PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE **Sreda, 30.06.2021. godine**

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

REŠENJA ZADATAKA

1. Rešiti jednačinu po nepoznatoj x:

$$(x^2+3x+2)/(x^2+6x+5) \text{ - } (x^2+4x-12)/(x^2+11x+30) = 3$$

Rešenje: Uprošćavanjem razlomaka dobijamo:

$$(x^2+3x+2)/(x^2+6x+5) \text{ - } (x^2+4x-12)/(x^2+11x+30) =$$
$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x+5)(x+1)} - \frac{(x-2)(x+6)}{(x+5)(x+6)} =$$
$$\frac{x+2}{x+5} - \frac{x-2}{x+5} =$$
$$\frac{4}{x+5}$$

gde je $x \neq -1$ i $x \neq -6$.
Dakle, $x+5 = \frac{4}{3}$ pa je $x = -\frac{11}{3}$.

2. U jednačini $3x^2 - 3(m-1)x + m^2 + 2 = 0$ odrediti vrednosti parametra m tako da koreni jednačine zadovoljavaju uslov $x_1^3 + x_2^3 = -2$.

Rešenje: Na osnovu Vijetovih formula iz jednačine $3x^2 - 3(m-1)x + m^2 + 2 = 0$, rešenja x_1 i x_2 zadovoljavaju:

$$x_1 + x_2 = \frac{3(m-1)}{3} = m-1$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2+2}{3}$$

Dakle, $(x_1+x_2)^3 = (m-1)^3$, tj.

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (m-1)^3$$
$$x_1^3 + 3x_1 \cdot x_2(x_1+x_2) + x_2^3 = (m-1)^3$$
$$x_1^3 + 3\frac{m^2+2}{3}(m-1) + x_2^3 = (m-1)^3$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (m-1)^3 - (m-1)(m^2+2)$$
$$(m-1)^3 - (m-1)(m^2+2) = -2$$
$$-2m^2 + m + 3 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1+24}}{-4} = \frac{-1 \mp 5}{-4}$$

Odakle dobijamo da je:

$$m_1 = -1, m_2 = 3/2$$

3. Koji član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ sadrži promenljive a i b sa istim stepenom?

Rešenje: (k+1)-vi član u razvoju ovog binoma je:

$$T_{k+1} = \binom{21}{k}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{k} = \binom{21}{k}\left(\left(\frac{a}{b^{1/2}}\right)^{1/3}\right)^{21-k}\left(\left(\frac{b}{a^{1/3}}\right)^{1/2}\right)^{k}$$

$$T_{k+1} = \binom{21}{k}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{k} = \binom{21}{k} a^{\frac{21-k}{3}}\, b^{\frac{-21+k}{6}}\, b^{\frac{k}{2}}\, a^{\frac{-k}{6}}$$

Ako a i b imaju isti eksponent, onda je:

$$a^{\frac{21-k}{3}}\, a^{\frac{-k}{6}} = b^{\frac{-21+k}{6}}\, b^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{21-k}{3} + \frac{-k}{6} = \frac{-21+k}{6} + \frac{k}{2}$$

$$42 - 2k - k = -21 + k + 3k$$

$$63 = 7k \quad \to \quad k = 9$$

Deseti član sadrži promenljive a i b sa istim stepenom.

4. Rešiti sistem jednačina

$$\log_2 x - \log_4 y = 0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$

Rešenje: Sistem ima smisla ako su x i y pozitivni. Prvo ćemo dovesti logaritme na istu osnovu, a zatim dalje rešavati sistem

$$\log_2 x - \log_4 y = 0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$

$$\log_2 x - \log_{2^2} y = 0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$

$$\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 y = 0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$
$$\log_2 x - \log_2 y^{1/2} = 0$$

$$5x^2 - y^2 = 4$$

$$\log_2 \frac{x}{y^{1/2}} = 0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$

$$\frac{x}{y^{1/2}} = 2^0$$
$$5x^2 - y^2 = 4$$

$$x = y^{1/2}$$
$$-y^2 + 5y - 4 = 0$$

Rešićemo kvadratnu jednačinu

$$-y^2 + 5y - 4 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-2}$$

$$y_1 = 4, \qquad y_2 = 1$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 1$$

Rešenje sistema je skup uređenih parova

$$(x, y) \in \{(1,1), (2,4)\}.$$

5. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $\mathrm{A}(2, -6)$ I dodiruje kružnicu

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

Rešenje:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Dakle, u pitanju je kružnica sa centrom (p, q) poluprečnika $r = 5$, pri čemu je $p = 3$ i $q = 1$.

Neka je data prava $y = kx + n$. Kako prava sadrži tačku $\mathrm{A}(2, -6)$ imamo da je

$$-6 = 2k + n$$

Na osnovu formule za dodir prave i kružnice

$$r^2(1 + k^2) = (kp - q + n)^2$$

dobijamo da je:

$$25(1 + k^2) = (3k - 1 - 6 - 2k)^2$$
$$25(1 + k^2) = (k - 7)^2$$
$$24k^2 + 14k - 24 = 0$$

$$12k^2 + 7k - 12 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \mp \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{-7 \mp 25}{24}$$

Dakle, $k_1 = \frac{3}{4}$, dok je $k_2 = -\frac{4}{3}$.

Odatle sledi $n_1 = -6 - \frac{3}{2} = \frac{-15}{2}$, dok je $n_2 = -6 + \frac{8}{3} = -\frac{10}{3}$.

Postoje dva rešenja: prava $3x - 4y - 30 = 0$ i prava $4x + 3y + 10 = 0$.

6. Tačke $\mathrm{A}(-4, -2)$, $\mathrm{B}(2,4)$ i $\mathrm{C}(-3, \mathrm{y})$ su temena trougla. Odrediti y tako da površina trougla bude 21.

   Rešenje: Površina navedenog trougla je jednaka polovini apsolutne vrednosti determinante sledeće matrice:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & y & 1 \end{vmatrix}$$

Dakle,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|-16 + 6 + 2y - (-12 - 4y - 4)|$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|6 + 6y| = 3|1 + y|$$

Dakle, $3|1 + y| = 21$, pa postoje dva rešenja:

$$y = 6,$$
$$y = -8$$