УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ

Мирјана Г. Стојановић

ЛОКАЛИЗОВАНЕ СТРУКТУРЕ У НЕЛИНЕАРНИМ ФОТОНСКИМ РЕШЕТКАМА С РАВНИМ ЕНЕРГЕТСКИМ ЗОНАМА У ЛИНЕАРНОМ РЕЖИМУ

ДОКТОРСКА ТЕЗА

Ниш, 2023.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHYSICS

Mirjana G. Stojanović

LOCALIZED STRUCTURES IN NONLINEAR PHOTONIC LATTICES WITH FLAT-BANDS IN LINEAR LIMIT

PhD Thesis

Niš, 2023.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Ана Манчић, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу
Наслов:	Локализоване структуре у нелинеарним фотонским решеткама с равним енергетским зонама у линеарном режиму
Резиме:	Фотонске решетке представљају погодну платформу за реализацију све-оптичких, квантних рачунара, интерферометара, оптичких кола и модел система за симулацију комплексних феномена у физици кондензоване материје и ултрахладних гасова. Стога је очигледан интерес за детаљно проучавање динамичких својстава и контролу простирања локализованих структура типа компактона и солитонских таласа у дводимензионалним решеткама различите симетрије са бар једном равном енергијском зоном. Увођењем тзв. псеудо-калибрационог механизма у модел и директним реконструисањем енергетског спектра решетке, индуковаћемо нова тополошка својства средине и тиме увести нови степен слободе за манипулацију са светлошћу што, уз симултано индуковање модулационе нестабилности, отвара низ могућности за симулирање ефеката битних у квантним технологијама.
Научна област:	Физика
Научна дисциплина:	Нелинеарна оптика
Кључне речи:	Фотонска решетка, енергетски спектри са равним зонама, компактон, нелинеарност, флукс калибрационог поља, Ахаронов-Бом ефекат
УДК:	**535.317.2 + 530.182 (043.3)**
CERIF класифи-кација:	P 200 Електромагнетизам, оптика, акустика
Тип лиценце креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral supervisor:	Ana Mančić, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Localized structures in nonlinear photonic lattices with flat-bands in linear limit
Abstract:	Photonic lattices are suitable platform for realization of all-optical quantum computers, interferometers and a model-system for simulating complex phenomena in condensed matter physics and ultracold gases. Especially interesting are dynamic properties and controlled propagation of localized structures such as compactons and solitary waves in two-dimensional lattices with at least one flat band in spectrum. By introducing the gauge field mechanism in the model and reconstructing the spectrum of lattice, we induce topological properties and novel degree of freedom for light manipulation, which, with the simultaneous induction of modulation instability, opens additional possibilities for simulating the effects important for quantum technologies.
Scientific field:	Physics
Scientific discipline:	Nonlinear optics
Key words:	Photonic lattice, flatband spectrum, compacton, nonlinearity, artificial flux, Aharonov-Bohm effect
UDC:	535.317.2 + 530.182 (043.3)
CERIF classification:	P200 Electromagnetism, optics, acoustics
Creative common licence:	**CC BY-NC-ND**

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:		
Идентификациони број, **ИБР**:		
Тип документације, **ТД**:		Монографска
Тип записа, **ТЗ**:		текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:		докторска дисертација
Аутор, **АУ**:		Мирјана Г. Стојановић
Ментор, **МН**:		Ана Манчић
Наслов рада, **НР**:		Локализоване структуре у нелинеарним фотонским решеткама с равним енергетским зонама у линеарном режиму
Језик публикације, **ЈП**:		Српски
Језик извода, **ЈИ**:		Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:		Србија
Уже географско подручје, **УГП**:		Србија
Година, **ГО**:		2023.
Издавач, **ИЗ**:		ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:		Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)		5 поглавља, 98 страна, 52 слике, 151 цитат
Научна област, **НО**:		Физика
Научна дисциплина, **НД**:		Нелинеарна оптика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:		Фотонска решетка, енергетски спектри са равним зонама, компактон, нелинеарност, флукс калибрационог поља, Ахаронов-Бом ефекат
УДК		535.317.2 + 530.182 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:		Библиотека
Важна напомена, **ВН**:		
Извод, **ИЗ**:		Фотонске решетке представљају погодну платформу за реализацију све-оптичких, квантних рачунара, интерферометара, оптичких кола и модел система за симулацију комплексних феномена у физици кондензоване материје и ултрахладних гасова. Стога је очигледан интерес за детаљно проучавање динамичких својстава и контролу простирања локализованих структура типа компактона и солитонских таласа у дводимензионалним решеткама различите симетрије са бар једном равном енергијском зоном. Увођењем тзв. псеудо-калибрационог механизма у модел и директним реконструисањем енергетског спектра решетке, индуковаћемо нова тополошка својства средине и тиме увести нови степен слободе за манипулацију са светлошћу што, уз симултано индуковање модулационе нестабилности, отвара низ могућности за симулирање ефеката битних у квантним технологијама.
Датум прихватања теме, **ДП**:		30.8.2021.
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**	Председник:	
	Члан:	
	Члан:	
	Члан, Ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:		
Identification number, **INO**:		
Document type, **DT**:		Monograph
Type of record, **TR**:		textual / graphic
Contents code, **CC**:		doctoral dissertation
Author, **AU**:		Mirjana Stojanović
Mentor, **MN**:		Ana Mančić
Title, **TI**:		Localized structures in nonlinear photonic lattices with flat-bands in linear limit
Language of text, **LT**:		Serbian
Language of abstract, **LA**:		English
Country of publication, **CP**:		Serbia
Locality of publication, **LP**:		Serbia
Publication year, **PY**:		2023
Publisher, **PB**:		author's reprint
Publication place, **PP**:		Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)		5 chapters, 98 pages, 52 pictures, 151 references
Scientific field, **SF**:		Physics
Scientific discipline, **SD**:		Nonlinear optics
Subject/Key words, **S/KW**:		Photonic lattice, flatband spectrum, compacton, nonlinearity, artificial flux, Aharonov-Bohm effect
UC		535.317.2 + 530.182 (043.3)
Holding data, **HD**:		Library
Note, **N**:		
Abstract, **AB**:		Photonic lattices are suitable platform for realization of all-optical quantum computers, interferometers and a model-system for simulating complex phenomena in condensed matter physics and ultracold gases. Especially interesting are dynamic properties and controlled propagation of localized structures such as compactons and solitary waves in two-dimensional lattices with at least one flat band in spectrum. By introducing the gauge field mechanism in the model and reconstructing the spectrum of lattice, we induce topological properties and novel degree of freedom for light manipulation, which, with the simultaneous induction of modulation instability, opens additional possibilities for simulating the effects important for quantum technologies.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		30.8.2021.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Ову дисертацију посвећујем свом првом и најдражем идолу,
учитељу и чувару, свом деки Добривоју,
који је пре свих усадио знатижељу у једну срамежљиву дечију главу
и натерао је да завири у оно што не разуме.

Захвалница

Захваљујем се дивној менторки, Ани Манчић, на менторству и помоћи приликом израде ове тезе, као и на свим сугестијама у ранијим данима студирања.

Велику захвалност дугујем Александри Малуцков на „делању“, несебичној помоћи, сугестијама и покушајима да ме разуме, протумачи и одговори чак и када не поставим питање из било које области науке и живота.

Захваљујем се и Милутину Степићу, свом институтском ментору, на свим сугестијама и свим датим саветима приликом израде ове тезе и ван тога.

Хвала великом професору и пријатељу Ненаду Милојевићу што ме гурнуо на ову страну и охрабрио ме да се опробам у научном свету.

Хвала свим људима из P* групе што су ме примили и прихватили као члана. Хвала на свим дискусијама, слаткишима, топлим и хладним напитцима, шалама и свим лепим тренуцима, у лепим и мање лепим временима.

Хвала Дарку, Тамари и Милени, на свему што не може да стане у довољно кратку форму јер дуго траје.

Хвала драгом Милошу В. за подршку, охрабривање и подстицање да се бавим свиме што ме чини и испуњава.

Највеће Хвала свим члановима моје породице, пре свега мојим родитељима, који ме најдуже подржавају и воле и ако ме све мање разумеју. Посебно хвала Милошу С. који ми не дозвољава да баш о свему озбиљно мислим.

Садржај

Увод 1

1 Простирање светлости кроз фотонске решетке 4
1.1 Фотонске структуре 4
1.2 Параксијална једначина 7
1.3 Фотонске решетке 9
1.3.1 Енергетски спектар 11
1.3.2 Решетке с равним зонама у спектру енергија 13

2 Механизми локализације светлости у фотонским решеткама 17
2.1 Деструктивна интерференција индукована геометријом система 18
2.2 Андерсонова локализација 20
2.3 Динамичка локализација 22
2.4 Локализоване структуре у тополошки нетривијалним решеткама 25

3 Математички модел простирања светлости кроз нелинеарне фотонске решетке 28
3.1 Теорија спрегнутих мода 28
3.2 Аналитичке и нумеричке методе за симулацију простирања светлости и анализу својстава локализованих структура 32

4 Резултати 35
4.1 Локализоване моде у октагонално-дијамантској решетки 35
4.1.1 Модел решетке нетретиране и третиране флуксом 35
4.1.2 Зонски спектар линеарне решетке и компактонске моде у одсуству флукса 37
4.1.3 Утицај нелинеарности на компактно локализоване моде 41
4.1.4 Не-компактонске моде у полу-бесконачном процепу 48
4.1.5 Октагонално-дијамантска решетка третирана флуксом 53
4.1.6 Утицај флукса на изглед зонског спектра 56
4.1.7 Компактно локализоване моде 59
4.2 Локализоване моде у плус решетки 66
4.2.1 Модели плус решетке нетретиране и третиране флуксом 66
4.2.2 Утицај вредности константе спрезања на енергетски спектар решетке 67
4.2.3 Компактно локализоване моде и утицај нелинеарности 68
4.2.4 Утицај флукса на енергетски спектар решетке 70
4.2.5 Компактно локализоване моде плус решетке третиране флуксом 72
4.3 Локализоване моде у ромбичној решетки 73

4.3.1 Модел ромбичне решетке 73
4.3.2 Енергетски спектар линеарне решетке и компактно локализоване моде 74
4.3.3 Динамика компактно локализованих мода 76
4.3.4 Утицај нелинеарности на компактно локализоване моде 77

5 Закључак 80

Литература 84

Биографија 94

Библиографија 96

Изјаве аутора 98

Увод

У последњих неколико година, у фотоници (наука о светлости) и квантним технологијама базираним на њој, посебно се истичу два термина: топологија и нелинеарност. Узроци за велику заступљеност ових термина су бројни. Један од основних разлога су достигнућа и теоријска предвиђања у физици чврстог стања, чије разумевање бива отежано услед својствене комплексности разматраних система, али, с друге стране, потпомогнуто огромним могућностима за манипулацију својствима фотонских (оптичких) структура. Локализоване структуре формирају се тако да је интензитет таласа, који их описује, велики унутар једне одређене области - локације и обично брзо опада када се удаљавамо од те локације. Оне се могу искористити за добијање корисних сазнања о особинама система, а њихово контролисано вођење може се искористити за пренос информација. Ефекти локализације у фотонским системима су аналогни ефектима локализације електрона у физици чврстог стања. Једначине којима се може описати простирање светлости у фотонским системима могу се наћи у физици чврстог стања и у другим областима физике. У односу на остале системе (у физици чврстог стања, атомској физици, итд.) у којима се појављују локализоване структуре, фотонски системи издвојили су се због својих вишеструких предности као што су: њихова доступност (постоји читав низ развијених техника за производњу решетки с потпуном контролом свих параметара система), велики избор различитих типова ласера с могућношћу селекције таласне дужине, интензитета, поларизације и ширине упадног снопа, могућност рада с појединачним фотонима и синергијска вези светлости и средине кроз коју се она простире, једноставност реализације експеримената (посматрање добијених ефеката голим оком на собној температури при нормалном притиску,...), итд. Кључно место заузеле су фотонске једнодимензионалне (1Д), дводимензионалне (2Д) и тродимензионалне(3Д) решетке с периодичном променом индекса преламања (фотонски кристали, оптичка влакна, спрегнути таласоводи, метаматеријали направљени од матрица прстенова на одговарајућем оптичком супстрату итд). Оне данас представљају атрактивну платформу за реализацију све-оптичких квантних рачунара, интерферометара, оптичких кола и пробних система за симулацију сложених феномена у физици кондензоване материје и ултрахладних гасова.

Фотонске решетке (ФР) се састоје од низа слабо спрегнутих таласовода, при чему је слаба спрега омогућена одабиром њиховог међусобног растојања. У таквим периодичним срединама разматрања се могу свести на тзв. прву Брилуенову зону (БЗ) у реципрочном k-простору (реципрочна решетка постоји у простору просторних фреквенција - реципрочном простору или $\boldsymbol{k}$ - простору, где је $\boldsymbol{k}$ таласни вектор), по аналогији с кристалним решеткама које припадају атомским системима. Проводне зоне (ПЗ) енергетских спектара ових система могу бити раздвојене забрањеним зонама (ЗЗ) или се могу додиривати, односно пресецати. ЗЗ (процепи) су пандан за-

брањеним зонама у атомским системима и системима чврстог стања и представљају области енергије (фреквенције) за које се светлост не може простирати у решетки. Креирање додирних тачака проводних зона тзв. Диракових тачака на границама и центру прве БЗ је од посебног интереса јер њихово постојање може бити знак за појаву тополошког прелаза у систему.

Проводна равна зона (РЗ) у спектру својствених енергија непосредно указује на потпуно одсуство дисперзије и могућност побуде комплетно изолованих компактних локализованих мода (КЛМ) захваљујући деструктивној интерференцији која настаје као последица геометрије решетке. Увођењем флукса такозваних калибрационих поља које ефективно симулира на пример: ефекат псеудо спин-орбитално спрезања у атомским системима, присуство магнетног поља или различите феномене у фермионским и бозонским системима, постало је могуће манипулисати зонском структуром решетке.

У овој тези проучавани су начини настанка и динамичка својства различитих локализованих структура у 2Д нелинеарним ФР чији енергетски спектар у линеарном режиму, односно у одсуству нелинеарности, поседује равне енергетске зоне. Акценат је стављен на КЛМ, које у линеарној апроксимацији представљају својствене моде с енергијама у РЗ. Компактне моде су изоловане локализоване структуре, које показују велику робусност на поремећаје из своје околине, а између осталог, карактерише их и одсуство размене енергије с деловима система у којима нису локализоване. У ову сврху, фокусирали смо се на испитивање локализованих структура типа компактона и солитонских таласа у следећим типовима 2Д решетки са и без флукса калибрационих поља: октагонално-дијамантској (ОДР), ромбичној (РР) и плус (ПР) решетки. Свака од проучаваних решетки, захваљујући сопственој геометрији, у линеарном режиму и без присуства флукса калибрационих поља поседује бар једну потпуно дегенерисану РЗ у спектру својствених енергија. Циљ ове дисертације је расветљавање динамичких својстава локализованих структура компактонског типа у присуству нелинеарних ефеката у 2Д ФР с индукованим равним енергетским зонама. Нумерички је тестирана осетљивост феномена настанка модулационе нестабилности на геометријске и тополошке карактеристике система. Конкретније, разматрана је 2Д ОДР у циљу истраживања начина за добијање изоловане РЗ увођењем и подешавањем одговарајућег флукса калибрационог поља у линеарној решетки, као и у циљу проучавања особина компактних мода у таквом систему. Сагледан је и утицај нелинеарних ефеката који, такође, могу омогућити формирање солитонских локализованих мода у областима ЗЗ. Поред тога, за циљ смо имали аналитичко и нумеричко испитивање динамичке стабилности компактних мода, њихове интеракције или одзива на присуство ивичних и солитонских мода у систему. На тај начин смо покушали да дођемо до одговора на питање како се симетрија система и тополошка својства одражавају на понашање КЛМ. Поред ОДР, испитана су динамичка својства КЛМ у 2Д ПР, с подесивим спрезањем унутар примитивне ћелије квадратног облика уписане у додекагоналну решетку. У овом случају посебно треба истаћи истраживање утицаја промене спрезања између елемената решетке на облик енергетског спектра, стварања енергетског процепа између дисперзивних зона (ДЗ), добијање енергетског спектра који се састоји искључиво од потпуно равних енергетских зона и сагледавање ефекта нелинеарности на понашање КЛМ у тим случајевима. Такође, испитана су динамичка својства нелинеарних КЛМ у РР, која је у линеарној апроксимацији, за одређене вредности калибрационог поља, окарактерисана спектром од три, потпуно

дегенерисане РЗ.

Истраживање у овој дисертацији се своди на изучавање простирања линеарних и нелинеарних локализованих структура кроз 2Д ФР - код којих су губици и дефекти занемарени, с индукованим равним енергетским зонама у присуству слабе кубне нелинеарности. Специфично, фокусирали смо се на теоријско проучавање робусности компактних мода под утицајем нелинеарних ефеката у горепоменутим 2Д решеткама. Сама робусност компактних мода у линеарној решетки, на присуство малих пертурбација различитог типа, показана је у низу радова. Добијање и контролисано вођење локализованих мода у тим системима у линеарном режиму и у присуству слабе нелинеарности отвара низ могућности за симулирање логичких функција, прекидачких функција и функција савршеног преноса информација у оптичко-квантним системима. Кроз сва наведена теоријска истраживања испитано је како се путем механизма модулационе нестабилности, који је самосвојствен нелинеарним срединама, могу добити корисне информације о тополошким особинама модификованих решетки, односно кроз тај процес нумерички је тестирана осетљивост феномена настанка модулационе нестабилности на геометријске и тополошке карактеристике система.

У првој глави биће описане природне и вештачке фотонске структуре. Биће дат опис ФР са РЗ, односно описаће се њихов енергетски спектар. Представиће се и основне карактеристике простирања светлости кроз фотонске решетке. У другој глави биће представљени механизми за добијање различитих типова локализованих мода у ФР, чије ће особине такође бити описане. У трећој глави увешћемо математички модел простирања светлости кроз нелинеарне ФР. При чему ће бити наведене и основне аналитичке и нумеричке методе које су коришћене за симулације простирања светлости кроз ФР и анализу стабилности локализованих мода. У четвртој глави биће представљени резултати и дискусија о енергетским спектрима и локализованим структурама типа компактона и солитонских таласа у 2Д ОДР, РР и ПР са и без флукса калибрационих поља. У петој глави биће дат закључак о проучаваним структурама и истакнут значај резултата представљених у овој тези.

Глава 1

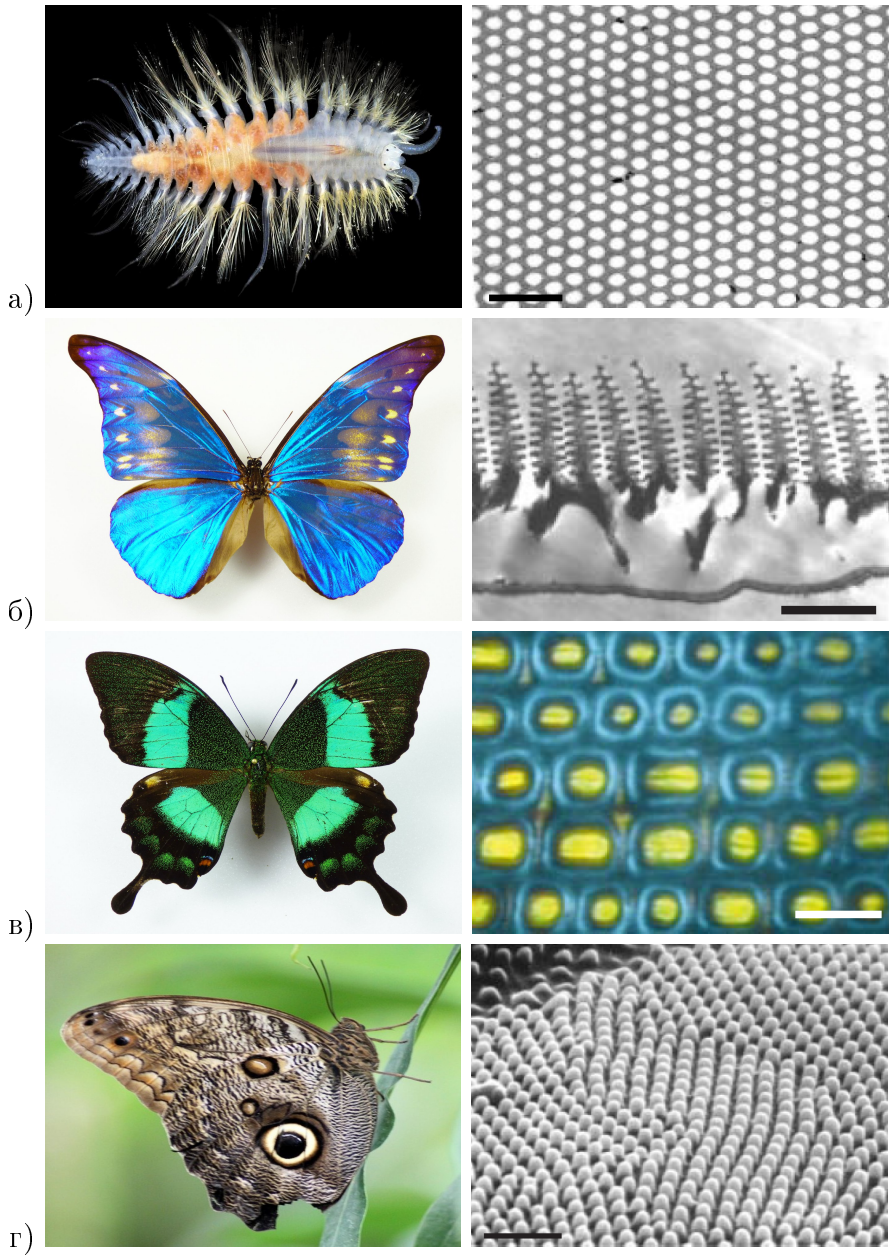
Простирање светлости кроз фотонске решетке

У овој глави биће објашњене основне карактеристике при простирању светлости кроз фотонске решетке, почевши од првих појава опажених у природи, до вештачких структура којима их опонашамо. Увешћемо основне једначине за простирање светлости кроз непрекидне нелинеарне средине, а затим ћемо доћи до једначине којом се описује простирање светлости кроз фотонску решетку. Између осталог, биће речи о решеткама с РЗ у спектру енергија. Такође, биће наведени и начини за производњу ових решетки и преглед до сада постигнутих резултата у доступној литератури која се бави овом проблематиком.

1.1 Фотонске структуре

Милионима година пре него што смо почели да контролишемо простирање светлости користећи вештачке структуре, у природи су се ови процеси одигравали веома успешно и без нашег знања или интервенције. Биолошки системи су користили архитектуру нанометарске скале да би произвели упечатљиве оптичке ефекте. Тако се појава иридисценције, која представља појаву мењања таласне дужине светлости, тј. боје у зависности од угла под којим се површина посматра, одигравала, између осталог, на крилима лептира. Код природних структура уочљива је запањујућа разноликост, тако на пример неке врсте морских звезди користе фотонске елементе састављене од калцита за прикупљање светлости, Морфо лептири користе више чврстих слојева и слојева ваздуха да би произвели своју упечатљиву плаву боју. Међу животињским светом, такође, позната је појава лажних очију на одређеним деловима тела, визуелне обмане, која служи као заштита од предатора. Неки инсекти користе фотонске структуре у виду низова елемената, познатих као низови брадавица, да би смањили рефлексију у њиховим сложеним очима. Примери налажења ових структура у природи приказани су на слици 1.1 [1]. Природне фотонске структуре послужиле су као инспирација за технолошке примене. Опонашањем ових структура, које су данас познате под називом фотонске микро и наноструктуре, различите групе научника успешно су направиле фотонске решетке [2],[3],[4].

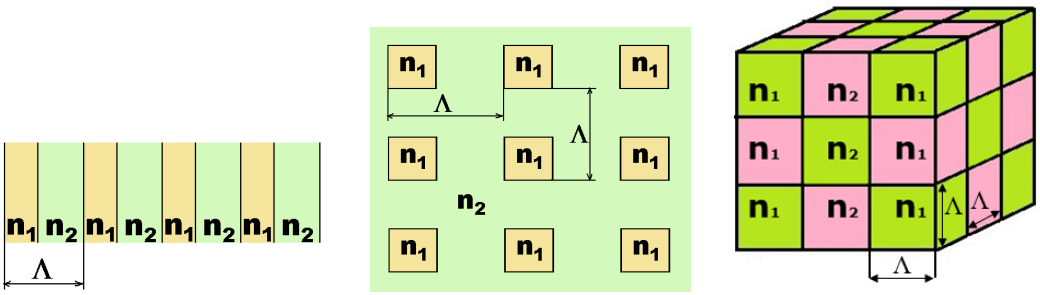
Прва истраживања и експериментална испитивања са синтетичким структурама вршио је лорд Рејли 1887. године, у време док је радио у Краљевској институцији Велике Британије као професор Филозофије природе [5]. За истраживања простирања



Слика 1.1: а) Чекињаста врста црва (лево) и слика трансмисионог електронског микрографа (TEM) попречних пресека кроз једну иридесцентну чекињу (десно). б) Плави Морфо лептир (лево) и слика TEM попречног пресека крила (десно). в) Лептир паун (лево) и боје које настају као последица низа удубљења у структури вишеслојних крила (десно). г) Лептир сова (лево) и антирефлективни низ брадавица које чине појединачне компоненте сложених очију (десно). Скале (десно): а) $1\mu m$, б) 1,8 μm, в) 6 μm, г) 1 μm. Преузето из [1].

таласа у периодичној средини, користио је структуре код којих се индекс преламања појединих слојева мало разликовао. Ову структуру карактерисала је периодична промена индекса преламања у трансверзалном правцу у односу на правац простирања светлости [6], [7]. Лорд Рајли дошао је до закључка да повећавањем упадног угла светлости рефлексивност система опада. Ово би значило да се у енергетском спектру ЗЗ смањује и да се на тај начин може управљати светлошћу. Овако је добијена прва ФР у 1Д систему.

Развој човека пратило је и његово дубље упознавање с карактеристикама материјала. Читава данашња колекција потпуно вештачких материјала с огромним спектром механичких својстава, постоји захваљујући напретку у металургији, и технологији производње керамике и пластике. Када би овладао одређеним вештинама, човек би се природно запитао како да прошири своје знање и унапреди своје алате за контролисање нових својстава материјала. Тако се, након контролисања механичких својстава, човеково интересовање проширило на електрична својства материјала. Напредак у физици полупроводника омогућио нам је да прилагодимо проводничка својства одређених материјала, чиме је покренута револуција транзистора у електроници. Са новим легурама и керамиком, научници су успели да направе високотемпературне суперпроводнике и друге егзотичне материјале који могу да формирају основу будућих технологија. Затим се, из истих разлога, отворила нова грана интересовања, у овом случају усмерена на изучавање начина контроле оптичких својстава материјала. Огроман технолошки развој би постао могућ уколико конструишемо материјале који би могли да реагују на светлосне таласе жељеног опсега фреквенција тако што би их савршено рефлектовали, дозволили да се шире само у одређеним правцима, или их заробили на тачно жељени начин. Сведоци смо револуције у индустрији телекомуникација, настале услед открића каблова с оптичким влакнима, који једноставно преносе светлост на велика растојања без значајних губитака. Да би се пронашли оптички материјали који би омогућили комплетну контролу простирања светлости кренуло се с изучавањем фотонских кристала (ФК); они су оптички аналогон кристалних решетки, при чему се уместо атома и молекула у чворовима фотонских кристала налазе материјали са различитим диелектричним константама, односно с различитим индексом преламања. Уместо периодичног потенцијала овде се јавља периодична диелектрична функција. У зависности од тога да ли постоји периодичност у једном, два или три правца, постоје 1Д, 2Д и 3Д ФК (слика 1.2). Након израде 1Д оптичких материјала, идеја је била да се направе материјали који би водили светлост на другачији начин од класичних оптичких влакана, односно да се искористи појава ЗЗ код 2Д ФК. С израдом 3Д ФК кренуло се услед потребе да се у свим правцима онемогући пролаз светлости било које поларизације, чија се фреквенција налази у неком одређеном интервалу, односно, да се она у потпуности рефлектује [2].



Слика 1.2: Структуре 1Д, 2Д и 3Д ФК, с лева на десно, $n_{1,2}$ представљају различите индексе преламања средине, а Λ период ФК. Преузето из [8].

Историјски гледано, идеја о дискретним оптичким компонентама није се појавила тако брзо у области оптике. Из перспективе класичне физике електромагнетно поље је континуална функција простора и времена, па је научницима требало времена да

схвате да светлост може да покаже понашање које је карактеристично за оно које се среће у дискретним системима [9]. Такође, можда и важнија препрека, која је спречавала ове идеје да постану стварност, биле су ограничене могућности производних технологија. Иако су прве студије процеса оптичког спрезања у низовима таласовода обављене почетком 1960-их [10], [11], тек су недавно постали доступни диелектрични елементи високог контраста који су омогућили стварање фотонских кристалних структура [12]. С унапређењем метода производње и обраде материјала, постало је изводљиво направити све мање структуре, а 1999. године је објављен први 3Д ФК са ЗЗ која одговара телекомуникационим фреквенцијама [13], [14]. Од тада су пријављене различите геометрије решетке за рад на сличним фреквенцијама [15], [16]. Таласоводи и увођење намерних дефеката у 3Д ФК нису напредовали тако брзо као у случају 2Д ФК, због потешкоћа у производњи и сложеније геометрије потребне за постизање 3Д ЗЗ [17].

ФК су структуре код којих су период решетке и таласна дужина светлости која се користи истог реда величине. Што је већа разлика индекса преламања таласовода и околине занимљивији су и феномени који се јављају услед одбијања и преламања светлости. У овим структурама може доћи до формирања фотонских ЗЗ те су ФК послужили као основа за израду структура које садрже таласоводе, код којих је светлост заробљена и који пружају могућност за широку примену код нелинеарних оптичких процеса [18].

1.2 Параксијална једначина

Да бисмо описали простирање светлости кроз фотонску решетку, прво ћемо кренути од Максвелових једначина за непрекидну средину:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{B}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{D}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где су: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ вектор електричног помераја, ρ густина слободног наелектрисања, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$ вектор магнетне индукције, $\boldsymbol{H}$ вектор јачине магнетног поља, $\boldsymbol{J}$ густина струје слободног наелектрисања, $\boldsymbol{P}$ вектор поларизације и $\boldsymbol{M}$ вектор магнетизације. Уколико у разматраној средини нема слободних наелектрисања и уколико средина није намагнетисана тада важи $\rho = 0$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$.

Код свих диелектричних средина јавља се нелинеаран одзив у случају јаких електромагнетних поља. Нелинеаран одзив система у вези је с анхармоничним кретањем везаних електрона које настаје услед интеракције са примењеним пољем. На тај начин индукују се диполни моменти који се описују вектором тоталне електричне поларизације. [20] У нелинеарној средини, поларизација зависи од амплитуде вектора електричног поља и може се представити уз помоћ Тејлоровог развоја као:

$$\boldsymbol{P}(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)}\boldsymbol{E}(t) + \chi^{(2)}\boldsymbol{E}^2(t) + \chi^{(3)}\boldsymbol{E}^3(t) + ... \right), \tag{1.2}$$

где је $\chi^{(n)}$ сусцептибилност n-тог реда. Линеарна сусцептибилност $\chi^{(1)}$ у вези је с линеарним индексом преламања материјала n_{r0}. Веза између њих је описана следећом релацијом: $n_{r0} = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$. Сусцептибилност другог реда $\chi^{(2)}$ је различита од нуле у срединама које немају централну симетрију и одговорна је за процесе као што су генерисање другог хармоника и спонтана параметарска конверзија. У случају средина где је нелинеарност Керовог типа, трећи члан $\chi^{(3)}$ је одговоран за зависност индекса преламања од интензитета светлости $n_r(I)$, при чему је интензитет светлости $I = |\boldsymbol{E}|^2$.

Уколико је модулација индекса преламања мала, $\nabla n_r/n_r \ll 1$, важиће Хелмхолцова једначина:

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{E} = 0. \tag{1.3}$$

Ако је ласерски сноп који користимо за простирање кроз решетку монохроматски и пропагира у правцу z са фреквенцијом ω, таласним бројем k и уколико је његова поларизација фиксирана у правцу $\hat{\boldsymbol{n}}$, онда такав сноп можемо описати пропагирајућим таласом $e^{-i(k_z z-\omega t)}$ који је модулисан обвојницом $A(\boldsymbol{r}, z)$, где је $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Поље је описано као $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, z) = A(\boldsymbol{r}, z)e^{-i(k_z z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{n}}$. Параксијална апроксимација подразумева да је енвелопа у уском спектралном опсегу $k_z \gg k_{x,y}$ и узима се да споро варира у z правцу, што подразумева да је $|k_z\partial_z A| \gg |\partial_z{}^2 A| \approx 0$ (апроксимација споро променљиве обвојнице). У том случају се Хелмхолмцова једначина своди на параксијалну једначину:

$$2ik_z\partial_z A - \nabla^2 A + \left(k_z{}^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right)A = 0, \tag{1.4}$$

где је $\nabla^2 = \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2$ трансверзални Лапласијан, а c брзина светлости.

Индекс преламања може се представити као збир константног индекса преламања и линеарних и нелинеарних модулација:

$$n_r = n_0 + \delta n_L + \delta n_{NL}(|A|^2), \tag{1.5}$$

За довољно мале модулације може се сматрати да је $n_0\omega/c \approx k_z$. Ако меримо r у јединицама карактеристичне дужинске скале a и уведемо нормализовану дужину $z = z/(k_z a^2)$, потенцијал $V = -k_z a^2(\delta n_L/n_0)$ и нелинеарни коефицијент $\gamma = -k_z a^2(\delta n_{NL}/n_0)$, параксијална једначина своди се на нелинеарну Шредингерову једначину:

$$i\partial_z A - \frac{1}{2}\nabla^2 A + VA + \gamma(|A|^2)A = 0. \tag{1.6}$$

С обзиром на то да се ова једначина може наћи и у физици чврстог стања као и у квантној механици, може се увидети аналогија између параксијалне пропагације светлости и динамике система у поменутим областима физике. Ако се z посматра као време, ова једначина се може повезати и с Бозе-Ајнштајновим кондензатима. Нелинеарни члан γ може бити фокусирајући и дефокусирајући у зависности од знака.

Веома битна и распрострањена појава, која се одиграва приликом простирања светлости у решеткама, јесте дискретна дифракција светлости. Да би се она разумела у решеткама, најбоље је кренути од дифракције у континуалним срединама а затим

уочити разлике између њих. У континуалним срединама при простирању равног таласа, долази до ширења упадног снопа, односно дифракције. Овај феномен се јавља као последица постојања градијента у акумулацији фазе различитих компоненти простируће светлосног таласа. Крајњи сноп је могуће представити као суперпозицију равних таласа, али са различитим вредностима трансверзалне компоненте таласног вектора k_x. Током простирања снопа, фаза сваког од ових таласа се мења независно од других компонената снопа. Након пређеног растојања z свакој просторној компоненти k_x одговараће другачија релативна промена фазе $\varphi(k_x, z) = k_z(k_x)z$. Различите промене фазе проузроковаће померај таласног пакета, који је био центриран на компоненти k_x, у трансверзалном правцу $\Delta x = \partial\varphi/\partial k_x = z\partial k_z/\partial k_x$. Услед спектралних промена у трансверзалном правцу, односно, услед дифракције, сноп светлости ће се током свог простирања ширити [19]. Као мера ширења снопа користи се величина која се назива коефицијент дифракције:

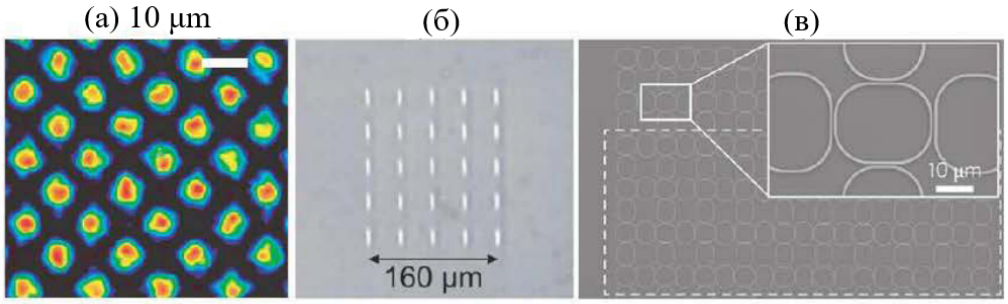
$$D = \frac{1}{z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial {k_x}^2} = \frac{\partial {k_z}^2}{\partial {k_x}^2}. \tag{1.7}$$

Уколико су испуњени услови за коришћење параксијалне апроксимације овај коефицијент биће сразмеран $D \sim -\frac{1}{k}$, односно у овом случају дифракција упадног равног таласа не зависи од трансверзалне компоненте k_x, увек је негативна и назива се нормалном дифракцијом. Код дискретних система ситуација је знатно компликованија, јер је поред нормалне могућ и случај такозване аномалне дифракције. Анализа дифракције у решеткама биће описана у трећој глави ове дисертације.

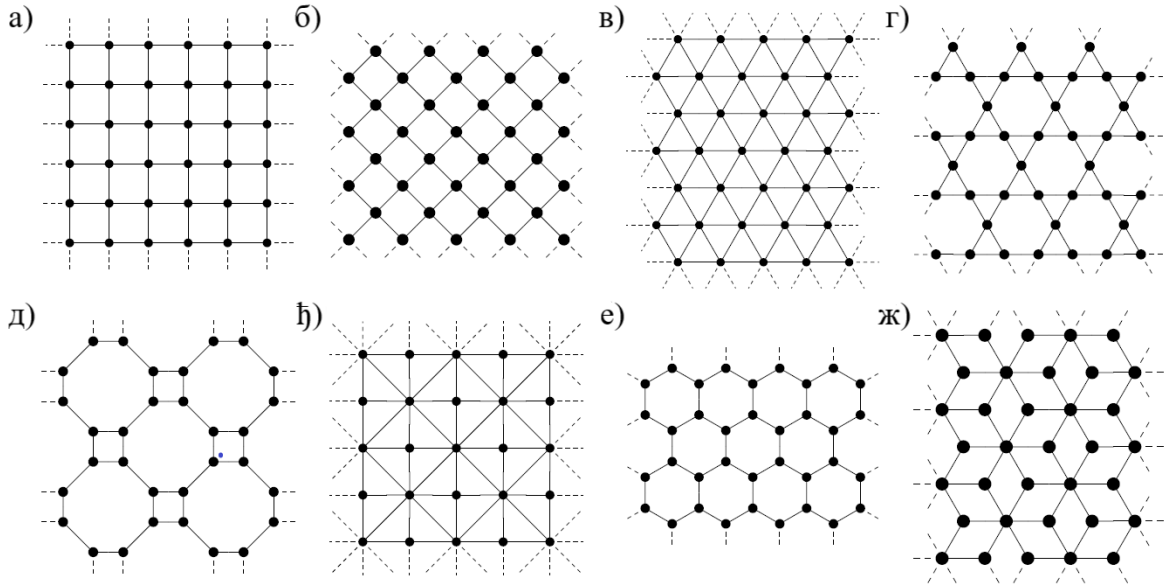
1.3 Фотонске решетке

ФР састоје се од низа таласовода који се налазе на растојању које омогућава спрезање суседних таласовода преко еванесцентних поља. У овим системима светлост се простире дуж таласовода, односно дуж правца у коме нема промене индекса преламања. Услед смењивања области с различитом вредношћу индекса преламања у трансверзалном правцу, омогућен је пролазак појединих таласних компоненти с одређеним вредностима пропагационе константе док се за остале таласе формира зонски процеп и тиме онемогућава њихово даље простирање. ФР се могу користити у целој области видљивог спектра, а ширина таласовода обично износи неколико таласних дужина пропагирајуће светлости [18].

Оптички индуковане решетке, као она приказана на слици 1.3 а), високо су флексибилне по питању промене своје конфигурације. То је могуће урадити просторном модулацијом светлости, применом електричног поља или уз помоћ нелинеарности. Предност употребе оваквих решетки је што их је могуће користити како у случају слабо спрегнутих тако и у случају јако спрегнутих таласовода, у зависности од тога колики је интензитет светлости која се користи. У првим експериментима, периодични профил индекса преламања је био фотоиндукован интерференцијом два поларизована равна таласа у фоторефрактивном кристалу [21]. Насупрот њима, решетке исписане фемтосекундним ласером, као она приказана на слици 1.3 б), имају таласоводе који су исписани понаособ и чије су особине међусобно независне, што омогућава велики избор геометрије решетки. Интегрисани оптички уређаји се могу лакше минимализовати и ујединити с микроелектроником, те се тако могу направити прецизни и веома сложени интегрисани системи.



Слика 1.3: 2Д фотонске решетке. а) Оптички индукована решетка у фоторефрактивном кристалу. б) Подручје таласовода исписано фемтосекундним ласером на силиконској плочици. в) Подручје таласовода прстенастих резонатора у силикону. Преузето из [18].



Слика 1.4: Примери 2Д геометрија решетки: а) квадратна решетка, б) назубљена решетка, в) троугаона решетка, г) кагоме решетка, д) архимедова решетка, ђ) неукрштајућа дијагонална квадратна решетка, е) саће решетка, ж) мицубиши решетка. Преузето из [26].

Уписивање фемтосекундним ласером први пут је реализовано 1996. године [22], [23], [24], [25] и од тада се интензивно користи. Ова метода је за израду фотонске решетке први пут примењена 2004. године, када су произведени низови диелектричних таласовода [27]. Од тада су многе фотонске структуре направљене овом технологијом. У методи израде фотонских решетки фемтосекундним ласером, обично се фокусирани ласерски импулс шаље у растопљени силицијум диоксид, што ствара локализовано трајно повећање индекса преламања материјала. Сходно томе, приликом померања узорка у односу на сноп за писање, ствара се уздужно проширена модификација индекса преламања - таласовод. Ова метода израде има предност јер подржава генерисање компактних 2Д и високодимензионалних решетки скоро произвољних геометрија, што омогућава посматрање различитих фундаменталних фено-

мена у таквим решеткама [28]. Примери до сада изучаваних 2Д решетки дати су на слици 1.4. Велики пробој у нанофабрикацији је омогућио израду решетки, као што је решетка приказана на слици 1.3 в), с високом вредношћу диелектричном константом, која омогућава високи степен заробљавања светлости. Геометрија простирања светлости у овим решеткама је таква да светлост кружи око еванесцентно спрегнутих прстенастих резонатора. Уколико је спрезање између прстенова слабо, једначина за простирање светлости је слична једначини која описује претходни случај решетки чији су таласоводи исписани фемтосекундним ласером [18].

1.3.1 Енергетски спектар

Захваљујући периодичном карактеру индекса преламања решетке $n(x+a) = n(x)$, при чему је a просторни период решетке, аналогно Кронинг-Пенијевом моделу за полупроводнике кристале и овде се може искористити Блохова теорема [29]. Решење једначине (1.6) може се представити у облику: $A(\boldsymbol{r}, z) = \phi(\boldsymbol{r})e^{-i\beta z}$, где су β својствена решења Хамилтонијана система и представљају пропагациону константу, а ϕ представља линеарне својствене моде, односно трансверзални профил снопа инваријантан дуж правца простирања z који задовољава Шредингерову једначину:

$$\beta\phi = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi + V(\boldsymbol{r})\phi. \tag{1.8}$$

Због периодичности потенцијала $V(\boldsymbol{r})$ својствене вредности (СВ) формираће дискретан скуп зона $\beta = \beta_l(\boldsymbol{k})$, где је l индекс зоне а $\boldsymbol{k}$ Блохов таласни вектор. Својствена стања ϕ могу се представити помоћу Блохових функција $u_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})$ као $\phi = u_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, одакле следи једначина за Блохове функције:

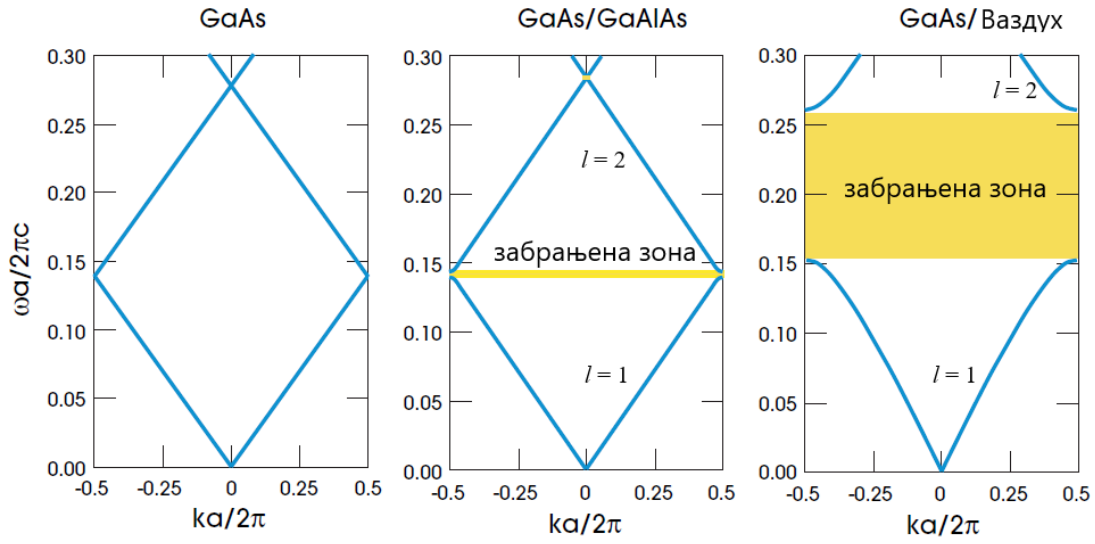
$$\beta_l(\boldsymbol{k})u_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = \left[-\frac{1}{2}(\nabla + i\boldsymbol{k})^2 + V(\boldsymbol{r})\right] u_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}), \tag{1.9}$$

где је Блохов Хамилтонијан једнак:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\nabla + i\boldsymbol{k})^2 + V(\boldsymbol{r}). \tag{1.10}$$

Блохове функције имају исту просторну периодичност као што је периодичност решетке и за сваку вредност $\boldsymbol{k}$ формирају ортонормиран базис и задовољавају израз: $\int d\boldsymbol{r} {u_m}^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})u_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = \delta_{ml}$ при чему је δ_{ml} Кронекерова делта а интеграљење се врши унутар граница јединичне ћелије. Дефинисан базис Блохових функција омогућава нам да одредимо линеарно простирање моде уколико знамо њен почетни облик, другим речима, пројектоваћемо дату моду на Блохов базис. У нелинеарном режиму, пројекције мода могу имати нетривијалну динамику, попут међузонских прелаза. Блохов базис показао се као најприроднији одабир за описивање динамике таласних пакета у периодичним решеткама.

Решавањем својственог проблема Хамилтонијана одређене решетке долази се до дисперзионе релације, односно до скупа реалних или комплексних пропагационих константи β које заједно с таласним вектором $\boldsymbol{k}$ чине енергетски (зонски) спектар. Као што је већ напоменуто, енергетски спектар ФР састоји се од дозвољених и ЗЗ, што је последица управо периодичне промене индекса преламања, што се може видети на слици 1.5 где је приказан, као пример, зонски спектар вишеслојних филмова.



Слика 1.5: Зонска структура за три вишеслојна филма. Лево: Сви слојеви имају исту диелектричну константу ($\epsilon = 13$). Средина: Слојеви имају две блиске вредности диелектричне константе ($\epsilon = 12$ и $\epsilon = 13$). Десно: Драстичнија разлика диелектричних константи ($\epsilon = 1$ и $\epsilon = 13$). Фреквенција и таласни вектор су приказани у бездимензионалним јединицама. Преузето из [2].

Колика год била разлика индекса преламања (диелектричне константе) доћи ће до појаве ЗЗ. Што је разлика две вредности индекса преламања већа, биће већа и ширина ЗЗ [2].

Изглед зонске структуре одређене решетке диктирају међусобни однос пропагационе константе, таласног вектора и диелектричне константе (или индекса преламања). Адекватним одабиром ових параметара могуће је обезбедити простирање светлосног таласа кроз решетку. Простирање таласа кроз таласовод могуће је уколико је индекс преламања средине унутар таласовода већи у односу на индекс преламања супстрата. У овом случају ће највећи део поља бити сконцентрисан унутар посматраног таласовода, док ће у његовој околини поље експоненцијално опадати. На граничним површинама између области с мањим и већим индексом преламања морају бити задовољени гранични услови непрекидности тангенцијалних компоненти електричног и магнетног поља [19]. Периодичне промене индекса преламања намећу периодичне граничне услове, који намећу ограничења, односно квантизацију трансверзалне компоненте таласног вектора. Овим поједине вредности трансверзалне компоненте таласног вектора формирају бесконачан скуп дискретних вредности таласних решења која представљају такозване вођене моде за посматрану структуру. Самим тим ће постојати и одговарајући скуп реалних пропагационих константи за које је вођење мода кроз структуру могуће и оне ће чинити проводну зону. Уколико је таласни број комплексан, то указује на поље које експоненцијално опада у правцу простирања. Ако за тренутак посматрамо 1Д случај и таласни вектор представимо као $k = k_0 + i\kappa$, тада се својствено стање може представити као $\phi = u_l e^{ik_0 x} e^{-\kappa x}$, односно можемо видети да моде имају такозване "репове", јер опадају експоненцијално, што значи да је њихово простирање овим отежано или онемогућено. Унутар ЗЗ нема пропагирајућих мода, тј. моде се карактеришу скупом чисто имагинарних пропагационих константи [30].

1.3.2 Решетке с равним зонама у спектру енергија

Током последњих деценија неколико група научника се фокусирало на проучавање нових физичких платформи где би се већина теоријских предвиђања могла директно демонстрирати, што би помогло да се развију нове технологије. Системи решетки с РЗ у енергетском спектру су се појавили као кључне поставке за проучавање својства транспорта и локализације на линеарном нивоу [31], [32].

Решетке с РЗ познате су још од 80-их година прошлог века. Њих карактерише постојање макар једне потпуно равне, недисперзивне, проводне зоне у спектру својствених енергија, као и постојање фундаменталних КЛМ. Прво проучавање модела решетки с РЗ извршио је Садерленд и резултате свог истраживања објавио 1986. године [33]. Он је представио једноставан 2Д модел спрезања независних електрона и демонстрирао постојање стриктно локализованих стања РЗ у датој решетки. Такође, показано је и да локализована стања опстају због локалне геометрије чак и ако је периодичност решетке уништена. Ова стања именована су компактним локализованим стањима у раду Аокија и сарадника десет година касније [34].

У скорије време интересовање за решетке са РЗ поново се распламсало у различитим областима физике. Испоставило се да велики број једноставнијих модела с РЗ који су окарактерисани везама кратког домета могу бити реализовани у лабораторији захваљујући напредним техникама. Оно што је занимљиво је да ови системи могу показати фасцинантно понашање када се уведу пертурбације у виду интеракција. У оквиру фотонике, студије РЗ су углавном биле фокусиране на истраживање њихових основних својстава. Потенцијалне примене РЗ као што су успоравање и заробљивање светлости или нова фотонска кристална влакна представљају проблеме од великог интереса у области фотонике [32].

Простирање таласа у периодичним срединама, односно пропагација светлости у ФР, може се окарактерисати зонским спектром помоћу Блохових таласа и зона, као што је показано у одељку 1.3.1. Енергија (фреквенција) својствене моде зависи од непрекидног момента импулса и од индекса зоне коју карактерише $\beta = \beta_l(\boldsymbol{k})$. Подешавањем својстава периодичне средине може се контролисати дисперзиона релација. Један од најупечатљивијих ефеката који произилази из периодичности је присуство локалних екстремума у дисперзионој релацији, где групна брзина нестаје, односно тежи нули. Такви екстремуми су у вези с успоравањем светлости и локализацијом таласа [32].

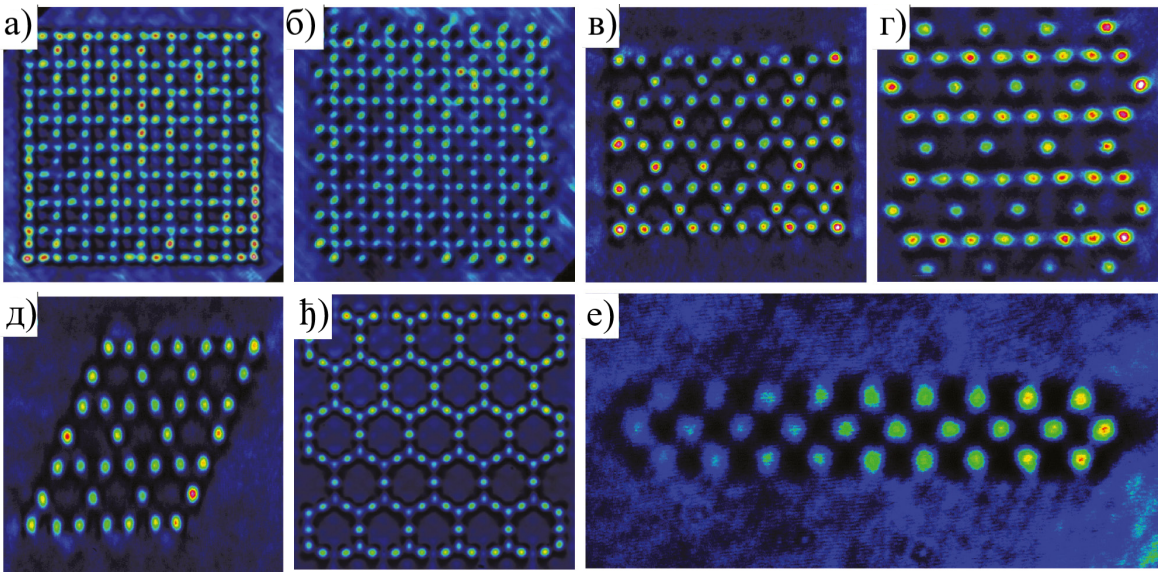
Постоје два конвенционална приступа за постизање нулте групне брзине коришћењем периодичних фотонских средина. Први је заснован на појави фотонских ЗЗ које се јављају у близини Брагове резонанције и карактеришу периодичне структуре које формирају фотонске решетке [12]. У ЗЗ није подржано простирање таласа, али се дефектима унутар структуре могу заробити локализоване моде и на тај начин заробити светлост. У близини ивица ЗЗ, групна брзина таласа који се шире се приближава нули, што доводи до структуром индукованог спорог светла. Као и процес резонантног расејања између Блохових таласа који путују напред и назад, ови ефекти су ограничени на уски опсег таласних вектора који су блиски вектору реципрочне решетке. Оваквим приступом степен локализације, односно смањење групне брзине, може се побољшати повећањем диелектричног контраста структуре, што доводи до јачег спрезања таласа који се крећу у супротним смеровима.

Друга класа конвенционалних структурних система за успоравање светлости заснована је на спрегнутим таласоводима или резонаторима. Сваки појединачни еле-

мент - таласовод, има могућност да локализује светлосне моде и на тај начин формира ФР с периодом много већим од радне таласне дужине, реда десетина до стотина микрометара за уређаје оптичке таласне дужине (нпр. ФК са периодичношћу реда стотине нанометара). Овакав приступ заснован на ФР омогућава смањење групне брзине преко целе БЗ јер не постоји ограничење које потиче од Брагове резонанције. Смањење групне брзине је појачано слабијим спрезањем појединачних елемената [32].

Енергија равних Блохових таласа је потпуно независна од њиховог таласног вектора, што доводи до макроскопске дегенерације. Све РЗ окарактерисане су одсуством дисперзије, али се све не понашају квалитативно исто. Према карактеристикама њихових својствених стања, РЗ се могу груписати у три различите врсте [32]:

1. РЗ „заштићене симетријом“ које одговарају локализованим „тамним“ стањима;
2. „Случајне“ РЗ формиране финим подешавањем параметара система;
3. „Тополошки заштићене“ РЗ, које су отпорне на пертурбације параметара спрезања.



Слика 1.6: Типични примери ФР са РЗ, направљених техником уписивања ласером континуалног снопа. а), б) Либ [35] решетке са различитим граничним завршецима, в–д) Кагоме решетке с различитим граничним завршецима [36], ђ) решетка супер-саћа [37] и е) „покренута“ ромбична решетка са градијентом индекса. Преузето из [28].

Недисперзивне РЗ, за које не постоји зависност $\beta_n(\boldsymbol{k})$, протежу се кроз цео Брилуенов спектар и у линеарном спектру формирају скуп локализованих просторних стања, која заузимају мали број јединичних ћелија [38], [39]. Компактна локализација таласа одиграва се посредством интерференције, тако што амплитуде својственог стања стриктно нестају, осим на коначном броју јединичних ћелија структуре. Профили ових компактних локализованих стања, нпр. број јединичних ћелија које заузимају и чињеница да ли својствене функције чине линеарно независан скуп, могу помоћи у карактеризацији дате РЗ. [38], [40]. Тако, уколико РЗ карактеришу КЛМ које заузимају једну јединичну ћелију, односно припадају класи компактона $U = 1$, формирајући тако ортогоналан скуп, РЗ припада групи РЗ заштићених симетријом. Случајне РЗ карактеришу се КЛМ које заузимају две или више јединичних ћелија,

односно припадају класи $U \geq 2$, и формирају неортогоналан скуп који може бити и линеарно зависан. Тополошки заштићене РЗ се јављају у системима с бипартитном симетријом као што је Либова решетка [41] која се може поделити на два подсистема различитих величина који немају директно спрезање између елемената унутар истог подсистема [32].

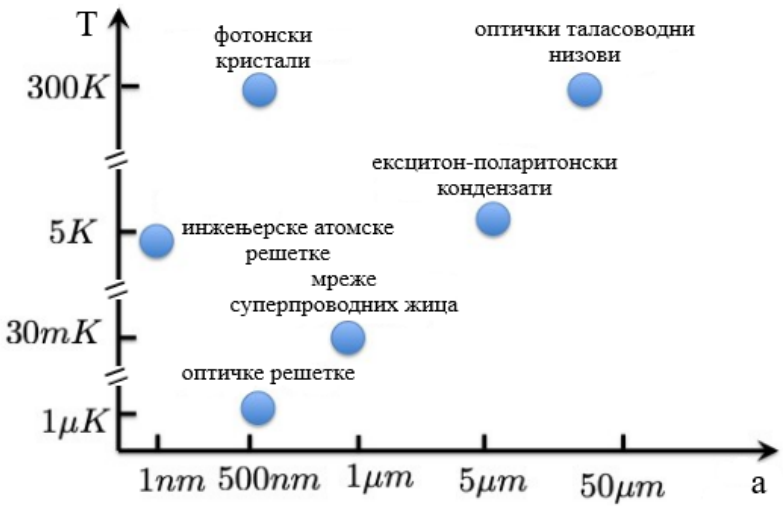
РЗ се могу класификовати и на основу присуства или одсуства дисконтинуитета у Блоховим таласним функцијама као:

1. сингуларне РЗ и
2. несингуларне РЗ.

Сингуларност је генерисана укрштањем РЗ с другом ДЗ, па на основу тога можемо рећи да су сингуларне РЗ оне РЗ које се пресецају с другим зонама у спектру, док су несингуларне РЗ оне које не пресецају ни једну другу зону, што се одређује такозваном квантном удаљеношћу [42].

У скорије време овакви системи су опсежно проучавани на неколико физичких конфигурација [43]–[54], с јасним доказима о предвиђеним особинама. Ова проучавања су подстакла даља теоријска и експериментална истраживања која су спроведена узимајући у обзир неке нове методе које у систем могу да унесу одређене квалитете, као што су на пример, укључивање дефеката или поремећаја [55], [56] и, врло недавно, линеарно-нелинеарне интеракције [57] и парно-временске (ПТ) симетрије [58]. Демонстрације КЛМ и низа повезаних феномена су дискутоване у многим 1Д и 2Д решеткама [35], [36], [45]-[49], [59]-[68].

Оно што и даље интригира научну заједницу јесте кохерентни транспорт датог локализованог РЗ линеарног стања који и даље није реализован. То је још један разлог због кога је важно истражити различите РЗ моделе решетки и омогућити проналажење кохерентних мобилних стања кроз дату решетку, у циљу преношења енергије на контролисан начин [69]. Веома битан фактор за експерименталну реализацију свих РЗ решетки су и температура и просторни период решетке.



Слика 1.7: Приказ "радне"температуре и константе решетке различитих система са РЗ. Преузето из [70].

Тренутно се РЗ проучавају у различитим областима физике кондензоване материје, и експериментално су реализоване у 1Д, 2Д и 3Д системима (видети слику 1.2) [70]. РЗ су опажене и у атомским системима који функционишу од области ултра ниских температура, као што су РЗ у случају атома у оптичкој решетки [71], [72]. У режиму собних температура, РЗ се теоријски и експериментално проучавају у мрежама таласовода ФК и оптичких таласоводних низова [43], [44], [73]. РЗ су примећене у електронским системима као што су мреже суперпроводних жица и наноинжењерске атомске решетке на металним површинама [74], [75], [76], а у области квантне електродинамике у шупљини РЗ су реализоване у ексцитон-поларитонским кондензатима [53], [77].

Глава 2

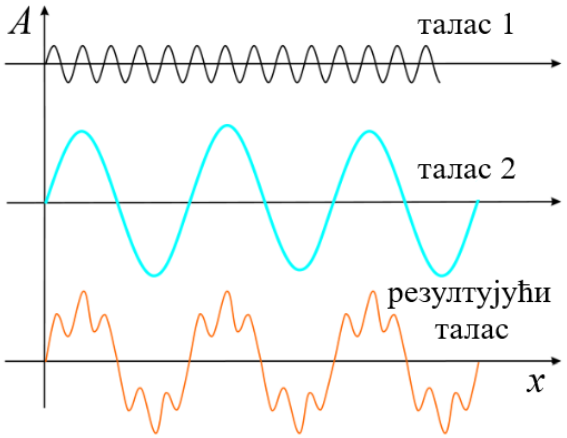
Механизми локализације светлости у фотонским решеткама

Могућности за добијање различитих типова локализованих мода, компактонских, солитонских и дишућих, су генерички везане с геометријски индукованом деструктивном интерференцијом [78] и самозаробљавањем индукованим нелинеарношћу [79], респективно. Локализација мода у ФР може бити индукована постојањем дефеката (неправилностима у периодичности решетке, тј. променом ширине појединих таласовода или растојања између њих, као и променом индекса преламања једног или више таласовода) [9], [80], када долази до нарушавања транслационе симетрије система и појаве тзв. дефектних мода. У срединама са стационарном неуређеношћу може доћи до Андерсонове локализације [81]. Увођењем додатних чланова, који потичу од такозваних калибрационих поља, у једначине, може се изазвати заравњавање свих зона у енергетском спектру линеарних решетки. Тај ефекат се показао изводљивим у фермионским системима, Бозе-Ајнштајн кондензатима у оптичким решеткама и ФР, када се уведу тзв. псеудо спин-орбитално спрезање, вештачки магнети флукс или се користи Флокеов механизам [82]. Добијање и контролисано вођење локализованих мода у тим системима у линеарном режиму и у присуству слабе нелинеарности отвара низ могућности за симулирање логичких функција, прекидачких функција и функција савршеног преноса информација у квантно-оптичким системима. У нелинеарним срединама јавља се механизам модулационе нестабилности [83], [84], чијим се испитивањем могу добити информације о тополошким особинама модификованих решетки [85]. Локализација светлости у ФР може се постићи на собним температурама, што представља велику предност за експерименте. Ефекти у фотонским системима, који су аналогони ефектима локализације електрона у атомским системима, се дешавају када је скала кохерентног вишеструког расејања сведена на саму таласну дужину, што је од великог значаја за практичну употребу. Насупрот томе, студије локализације електрона компликованије су услед присуства интеракције електрон-електрон и електрон-фонон типа.

У овој глави говориће се о феномену локализације у ФР, као и о особинама насталих локализованих структура. Биће објашњени различити механизми локализације светлости: деструктивна интерференција индукована геометријом система, деструктивна интерференција у срединама са стационарном неуређеношћу (Андерсонова локализација), самозаробљавање светлости услед развоја модулационе нестабилности у нелинеарним срединама (динамичка локализација). Такође, разматраће се и особине локализованих структура у тополошки нетривијалним решеткама.

2.1 Деструктивна интерференција индукована геометријом система

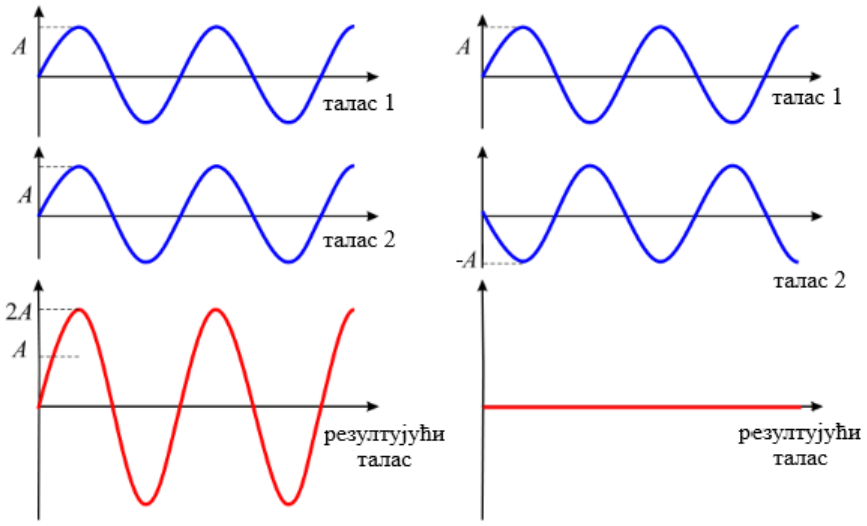
Уколико се кроз неку средину простире више таласа у истом тренутку, доћи ће до њихове суперпозиције. Тренутна вредност амплитуде таласа у некој тачки простора зависи од резултата суперпозиције таласа у тој тачки у датом тренутку (слика 2.1). То значи да ће вредност амплитуде таласа у некој тачки простора зависити од вредности амплитуде оба таласа у тој истој тачки. Вредност амплитуде резултујућег таласа се у општем случају мења, јер се вредности појединачних таласа мењају различитим ритмом.



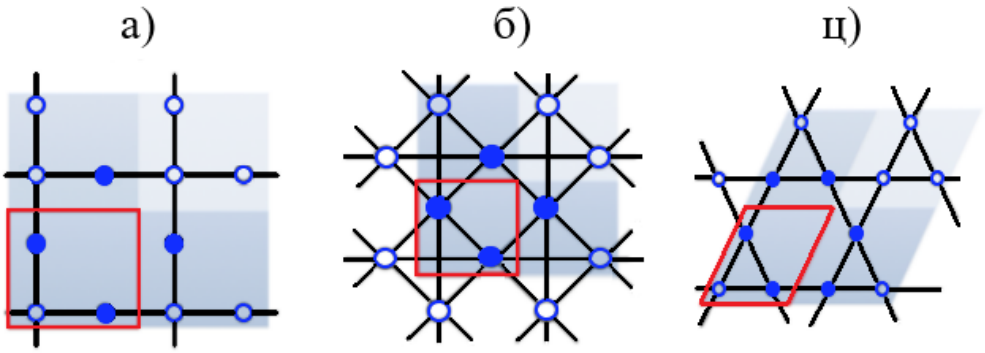
Слика 2.1: Принцип суперпозиције два таласа.

Интерференција таласа је ефекат који се може опазити у посебним случајевима суперпозиције таласа, ако се кроз материјалну средину истовремено простиру таласи исте таласне дужине. У одређеним тачкама средине таласи продуктују увек исти резултат суперпозиције. Приликом интерференције може доћи до појачања или слабљења резултујућег таласа, односно конструктивне и деструктивне интерференције. У посебним случајевима, када су и амплитуде таласа једнаке, долази до конструктивне интерференције при којој се дуплира вредност амплитуде и деструктивне интерференције када се таласи поништавају (слика 2.2). Деструктивна интерференција се јавља када се фазе два таласа, једнаких амплитуда, разликују за π чиме се позитивна амплитуда једног таласа поништава негативном амплитудом другог таласа. Када амплитуда првог таласа расте, амплитуда другог таласа опада, чиме амплитуда резултујућег таласа постаје нула. Два таласа савршено се поништавају у сваком тренутку, не остављајући никакав талас.

Да би се обезбедила локализација светлости често је потребна нека врста неуређености у решетки. Међутим, постоји посебна врста локализација у транслационо инваријантним решеткама где, као последица геометрије или симетрије решетке, долази до деструктивне интерференције светлости у одређеним таласоводима решетке. Као резултат јављају се компактони, код којих су таласне функције заробљене у коначном броју таласовода, док на другим таласоводима имају нулту вредност, као што је приказано на слици 2.3. Компактони могу да генеришу енергетске зоне без дисперзије, односно РЗ-е које су макроскопски дегенерисане [70].



Слика 2.2: Конструктивна (лево) и деструктивна (десно) интерференција.



Слика 2.3: Пример 2Д решетки у којима је могуће формирање КЛМ. Попуњеним плавим круговима обележени су чворови који чине КЛМ у: а) Либовој, б) шаховница и ц) кагоме решетки. Црвеним квадратима су обележене јединичне ћелије, а осенчене су оне у којима су локализоване КЛМ.

Дакле, један директан приступ постизању деструктивне интерференције јесте помоћу манипулације са геометријом решетке. У вези са тим постоји више метода за генерисање решетки са РЗ-ма: метод линијског графа, метод конструкције ћелије, оригами метод и метод понављања мини-низова.

Метод линијског графа подразумева да се на средини сваке странице која спаја два спрегнута таласовода прво постави нови таласовод. Затим се тај таласовод споји са свим таласоводима који су у оригиналној решетки били спрегнути с таласоводом који се налазио на страници (вези) где је сада постављен нови таласовод [86], [87].

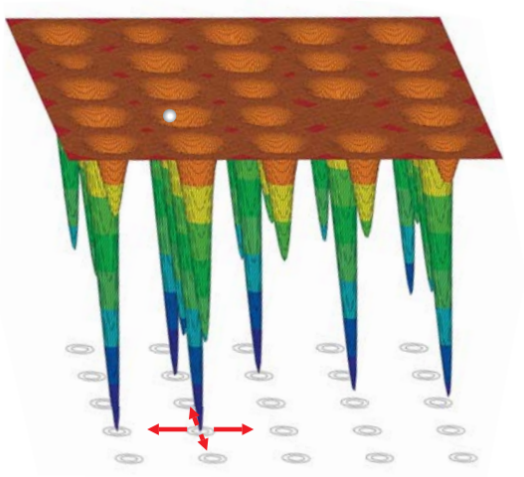
Метод конструкције ћелије функционише на следећи начин: постоји један унутрашњи и два или више спољашњих таласовода; унутрашњи таласовод се спреже само с таласоводима из своје ћелије док се спољашњи спрежу са спољашњим таласоводима из суседних ћелија. На овај начин се повезивањем ћелија формира решетка [88], [89].

Оригами метод назив је добио по чувеном начину преклапања папира и склапања оригами фигура. Овде се помоћу низа правила већ постојеће РЗ решетке преклапају и преводе у решетке нових геометрија које ће такође имати РЗ у свом енергетском спектру [90].

Метод мини-низова заснива се на формирању мини-низа таласовода и спајања с осталим мини-низовима помоћу једног конекторског таласовода. Затим се подешавањем спрезања постиже деструктивна интерференција у конекторским таласоводима и добија решетка с РЗ [39].

2.2 Андерсонова локализација

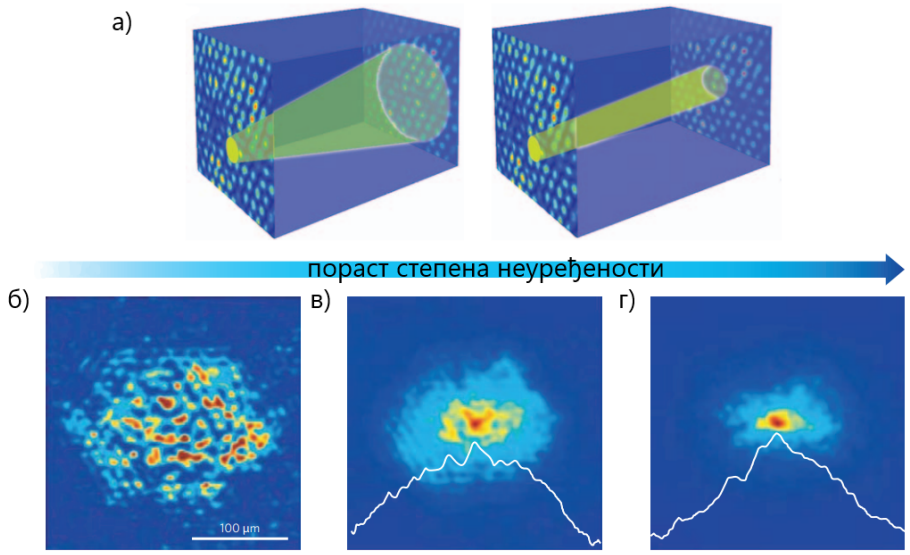
Један од најзанимљивијих феномена у физици чврстог стања, познат још од 1958. године, је Андерсонова локализација, која представља заробљавање електрона када се он стави у кристалну решетку која садржи одређену неуређеност. До локализације електрона, коју одликују експоненцијално опадајуће локализоване моде, долази услед вишеструких расејања на дефектима решетке. Насумична неуређеност у потенцијалу омогућава постизање жељене интерференције између вишеструког расејања електрона [81].



Слика 2.4: Андерсонов модел. Ако замислимо електрон који се налази у насумичном потенцијалу у 2Д решетки, квантно-механички принципи омогућиће електрону да тунелује од једног до другог места кроз велике енергетске баријере као што је приказано црвеним стрелицама. Енергија електрона се тако насумично мења, иако се на сваком месту решетке претпоставља константан просторни опсег његове таласне функције (скициран испод потенцијала), што доводи до константне брзине тунеловања. У уређеној решетки где су све јаме исте дубине, електрон би био потпуно покретан за неки опсег енергија. Али овде, критична количина случајности у дубинама потенцијала локализује електрон. Преузето из [91].

Пре Андерсоновог открића [92], научници су моделовали неуређености у кристалу као пертурбације које насумично расејавају електроне. На тај начин електрони су третирани као тачкасте класичне честице а транспорт је описан преко Брауновског кретања. Андерсон је помоћу свог модела (слика 2.4) проучавао веома неуређене кристалне решетке и анализирао проблем у квантном режиму узимајући у обзир таласну природу електрона. Открио је да се класично дифузно кретање електрона урушава како електронска таласна функција постаје експоненцијално локализована, за широк спектар услова. Сходно томе, када се електрон иницијално постави у близини једног атома, његова таласна функција неће се проширити на цео кристал, већ ће остати локализована око свог почетног положаја. Материјал ће престати да проводи наелектрисање и на тај начин постати изолатор. Ова појава локализације је директна последица интерференције таласних функција вишеструко расејаних електрона на дефектима решетке [93].

По Андерсеновој теорији, разматран је квантномеханички модел, у апроксимацији јаке везе за електрон који се налази у потенцијалу кристалне решетке и у обзир је узета могућност тунеловања само ка најближим суседима. Неуређеност, односно случајне флуктуације потенцијала решетке се суперпонирају на периодични потенцијал кристала. Енергије електрона у чворовима решетке су третиране као стохастичке величине, чиме је неуређеност математички описана [94].



Слика 2.5: а) Простирање светлосног снопа кроз периодичну (лево) и неуређену (десно) 2Д ФР. Расподела интензитета светлости на излазу у случају ФР која је б) периодична, в) неуређена (долази до дифузије), г) неуређена с већим степеном него ФР под б) (долази до Андерсенове локализације). Преузето из [93].

С обзиром на то да је Андерсонова локализација таласни феномен који се ослања на интерференцију, овај концепт проширен је на оптичке системе почевши од 1984. године [95], [96]. Ови системи одличне су платформе за проучавање ефеката локализације, пошто је кохерентност у њима природно очувана а сами фотони представљају бозоне који међусобно не интерагују [93].

За Андерсонову локализацију потребно је постојање периодичног потенцијала на

који су суперпониране случајне флуктуације, и притом су периодични потенцијал и флуктуације непроменљиви у времену. ФР су се показале као погодни системи за проучавање овог ефекта јер постоји периодичност потенцијала (индекса преламања) у трансверзалном правцу, док је потенцијал у правцу простирања светлости непроменљив. Испоставило се да је на непроменљиви потенцијал могуће додати флуктуације на контролисан начин, тако да се испуни услов непроменљивости у правцу простирања светлости кроз ФР. Концепт трансверзалне локализације светлости први пут је описан 1989. године и подразумевао је да се неуређеност додаје у трансверзалним правцима, чији број зависи од димензионалности посматране решетке [97].

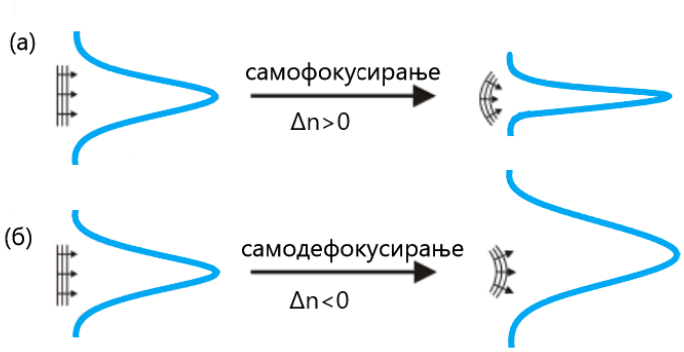
Прва директна експериментална потврда Андерсоновог модела извршена је коришћењем 2Д фотонског система [81]. Уколико се контролисано мења индекс преламања појединачних таласовода, показано је да прво долази до дифузионог ширења снопа а затим до уског локализовања. Када се повећа неуређеност, Андерсонова локализација наступа брже тако што се скраћује дистанца до које оптички сноп може да дифундује у правцу простирања. Када се достигне висок степен неуређености дифузиони међупрелаз ишчезава и достиже се директна Андерсонова локализација окарактерисана експоненцијалним опадањем интензитета снопа с удаљавањем од његовог центра на излазу из ФР [81]. Утицај неуређености на понашање светлосног снопа убаченог у 2Д ФР приказан је на слици 2.5. Може се видети постепена транзиција од неометаног транспорта (слика 2.5 б)), где дифракција настаје захваљујући симетрији решетке, до дифузије (слика 2.5 в)) у присуству неуређености (профил интензитета има Гаусов облик, уцртан у логаритамској скали), и код јачег поремећаја, до Андерсонове локализације са експоненцијално опадајућим реповима (слика 2.5 г)). Овај феномен је широко проучаван у РЗ системима. Осим РЗ заштићених симетријом, као што су хиралне РЗ, већина РЗ осетљиве су на дефекте. Додавање неуређености у решетку са РЗ може изазвати Андерсонову локализацију, што разбија РЗ и узрокује да КЛМ постане експоненцијално локализована мода [70].

2.3 Динамичка локализација

Динамичка локализација подразумева самозаробљавање светлости услед развоја модулационе нестабилности у нелинеарним срединама. Простирање светлости кроз материјалне средине, попут диелектричних, разликује се од простирања електромагнетних таласа у вакуму. Једна од разлика односи се на промену фреквенције емитоване светлости из извора. Интеракција између оптичког поља и атома у материјалној средини може довести до одређеног типа нелинеарног одзива. Нелинеарност се огледа у томе да за различите вредности интензитета светлости која се простире кроз оптичку средину долази до другачијег одзива средине. Светлост може утицати на расподелу наелектрисања унутар материјала, што је на макроскопској скали у вези са променом индекса преламања. То јест, оптичка нелинеарност је својство материјала, а не самог електромагнетног поља. Као резултат, постаје могуће да светлосни сноп великог интензитета интерагује са самим собом или с другим сноповима у нелинеарној средини, односно, упадни сноп може модификовати сам себе. У пракси, често је немогуће стриктно категорисати оптички систем као линеаран или нелинеаран. Линеарност се повезује с идеализованим системима, тј. представља апроксимацију првог реда сложенијих нелинеарних система. С проналаском ласера 60-их година прошлог века, различити нелинеарни оптички ефекти добијају на зна-

чају, како с фундаменталног тако и с практичног аспекта. Ласери могу да обезбеде високе интензитете светлости потребне да би се експериментално посматрали нелинеарни ефекти у већини материјала, што је омогућило проучавање бројних нових феномена као што су: стварање хармоника, конверзија фреквенције, четворталасно мешање, параметарско генерисање и појачање, оптичко исправљање, генерисање импулса, оптичка бистабилност, само- и међуфазна модулација, самофокусирање и формирање солитона [107]. Феномен модулационе нестабилности (МН) јавља се у различитим физичким системима. У нелинеарној оптици, овај феномен се обично односи на процес у коме упадни талас модификује средину, при чему настају хармоници вишег реда, што доводи до појачавања малих почетних модулација, које притом расту експоненцијално, чиме се нарушава симетрија и униформност снопа. Простирање кохерентних снопова светлости у нелинеарним ФР може довести до појаве солитона решетке (у почетку названи „дискретни“ солитони, пратећи дискретни модел који се користи у њиховом предвиђању) [98]. Солитони оптичке решетке су предвиђени 1988. године [99], а уочени десет година касније [100]. Феномен МН, који је блиско повезан са солитонима, је предвиђен помоћу дискретне нелинеарне Шредингерове једначине (ДНЛШЈ) [101],[102]. Прва примена модулационе нестабилности у дискретним оптичким системима је изведена у [103]. Даљи експерименти су потврдили присуство модулационе нестабилности у низовима таласовода литијум ниобата [104], у срединама са самодефокусирањем [105] и у слојевитим Керовим срединама [106].

У класичној електромагнетној теорији, интеракцију светлости и материје карактерише поларизација средине $\boldsymbol{P}$, која је функција примењеног електричног поља $\boldsymbol{E}$. Поларизација, дата формулом 1.2, представља одговор средине на примењено електрично поље. Свако одступање од линеарног односа између $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{E}$ је манифестација нелинеарне интеракције. У већини ситуација, нелинеарност је релативно мала и може се третирати као пертурбација линеарне релације [107].



Слика 2.6: Утицај нелинеарности на: (а) сужавање снопа у самофокусирајућој средини и (б) ширење снопа у самодефокусирајућој средини.

Битну улогу у нелинеарним материјалима има и знак промене индекса преламања средине, који је последица расподеле нелектрисања унутар структуре материјала. Средине с локалним растом индекса преламања, односно с $\Delta n > 0$ су самофокусирајуће, а оне с $\Delta n < 0$ називају се самодефокусирајућим срединама. Поменуте средине ће за упадни сноп представљати сабирно или расипно сочиво, мењајући облик снопа приликом проласка. Присуство нелинеарности у материјалу такође ће утицати на

промену таласног фронта снопа чинећи га конкавним у самофокусирајућој средини, односно конвексним у случају простирања кроз самодефокусирајућу средину (слика 2.6)) [19].

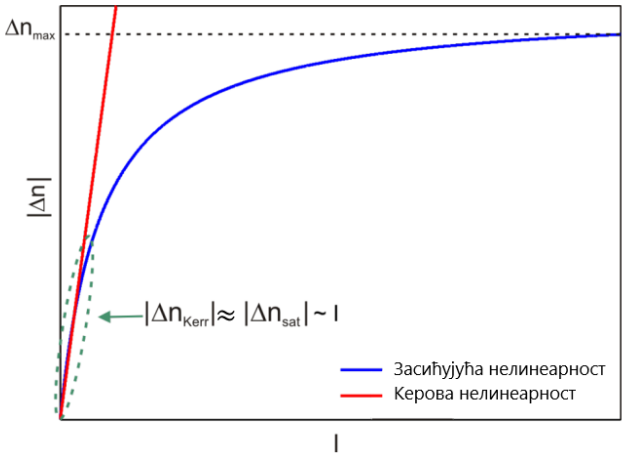
Парни чланови сусцептибилности из једначине 1.2 једнаки су нули за материјале који поседују инверзну симетрију кристалне структуре, остављајући сусцептибилност трећег реда као главни допринос нелинеарности материјала. Ова класа материјала се назива Керовим материјалима [106].

Многи материјали имају слабу нелинеарност, односно малу вредност Керовог коефицијента, због чега је, да би се у овим материјалима омогућило простирање сигнала на дужа растојања и искористио Керов ефекат, потребна светлост великог интензитета. Фотонска кристална влакна, на пример, пружају шансу за побољшање искоришћења нелинеарних феномена јер је помоћу њих могуће сконцентрисати поље унутар малог просторног угла, чиме се улазној светлости повећава интензитет снаге на излазу [2]. Нелинеарна зависност промене индекса преламања од интензитета упадне светлости може имати и засићујући карактер када с повећањем интензитета упадне светлости и апсолутна вредност промене индекса преламања расте до неке вредности Δn_{max} , након чега остаје константна. Ова врста нелинеарности типична је за фоторефрактивне материјале [108] па се они често називају и материјали са засићујућом нелинеарношћу. У стационарном случају, при малим интензитима упадне светлости одзив материјала своди се на Керов тип нелинеарног одзива, слика 2.7 [19].

У случају Керовог ефекта јавља се зависност индекса преламања средине од интензитета поља. За равне таласе у бесконачној изотропној средини индекс преламања $n_r = \sqrt{\epsilon}$ је измењен за:

$$\Delta n_r = \gamma I, \tag{2.1}$$

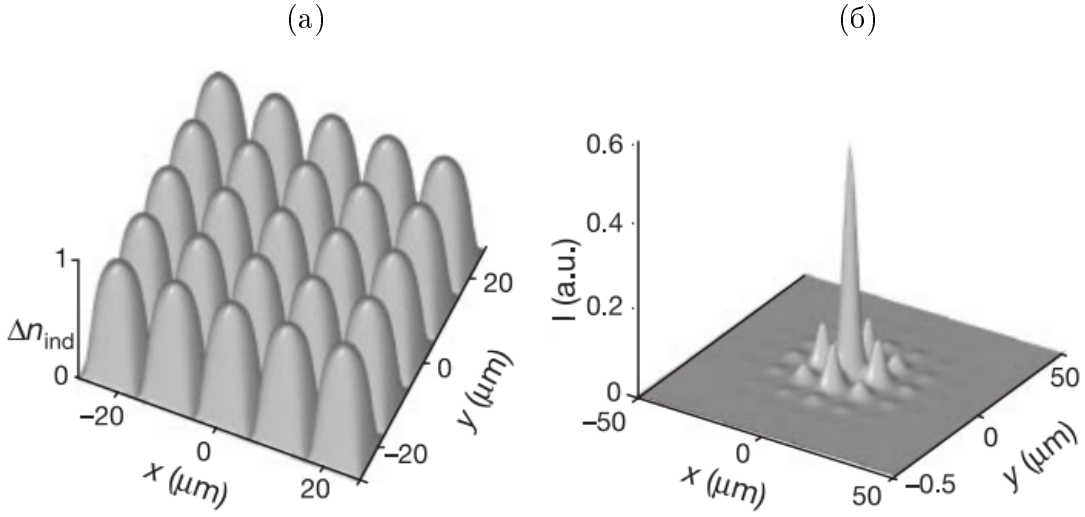
где је γ Керов коефицијент који потиче од сусцептибилности трећег реда $\chi^{(3)}$, а I временски усредњен интензитет светлости [2].



Слика 2.7: Зависности промене индекса преламања у случају средине с Керовом и засићујућом нелинеарношћу. Зеленом испрекиданом елипсом је обележена област малих интензитета упадне светлости при којима се нелинеарност засићујућег типа може апроксимирати Керовим типом нелинеарности.

Значајну улогу у срединама у којима се фреквенција не одржава, односно у дисперзивним срединама, има управо Керова нелинеарност. У оваквим срединама, за-

хваљујући Керовом типу нелинеарности, могу се јавити солитони - моде које нису дисперзивне, могу се конвертовати сигнали једне фреквенције у другу, а може се и генерисати читав опсег фреквенција од једне улазне.



Слика 2.8: Резултати нумеричке симулације који приказују индуковану ФР и структуру солитона решетке. а) Модел промене индукованог индекса Δn_{ind} 2Д ФР за самофокусирајућу нелинеарност. б) Симулирана структура интензитета солитона решетке. Преузето из [21]

.

По природи, солитони решетке представљају самозаробљене таласне пакете у нелинеарним периодичним структурама и резултат су интеракције између дифракције или дисперзије решетке и нелинеарности материјала. У оптици, ова класа самолокализованих стања је успешно примећена и у 1Д и у 2Д нелинеарним таласоводним низовима. Такве ФР су направљене у различитим системима материјала, укључујући оне са кубним (Керов тип), квадратним, фоторефрактивним и нелинеарностима течних кристала. У свим овим случајевима основна периодичност или дискретност доводи до потпуно нових фамилија оптичких солитона који немају никакав пандан у континуалним срединама [21].

При повољним условима, када су нелинеарност и дифракција избалансирани, сноп може да се простире као оптички просторни солитон, односно самозаробљени сноп који задржава свој облик при пропагацији [20]. Оптички сноп може да модификује средину и створи сопствени таласовод када се простире у нелинеарној средини, а затим може бити заробљен овим самоиндукованим таласоводом. Просторни солитон се може сматрати модом овог таласовода. Ако просторни профил снопа остаје константан и стабилан током простирања, онда се он назива дискретни солитон или солитон решетке [101], [107], [109], [110], [111].

2.4 Локализоване структуре у тополошки нетривијалним решеткама

Геометрија фотонских решетки даје могућност проучавања ефекта вештачких калибрационих поља, еквивалентних флуксу магнетног поља, тј. спин-орбиталној

интеракцији у атомским системима [112]. Неколико експерименталних техника које то омогућавају у пракси су засноване на спрегнутим прстенастим резонаторима [113], [114], [115], [116] и мрежама таласовода [39], [43], [49], [65]. Формирање енергетског спектра који се састоји само од РЗ могуће је постићи додавањем флукса калибрационог поља у систем. У том случају може доћи до савршене локализације таласа, која је позната под називом Ахаронов–Бом (АБ) кавез. Системи с потпуно равним спектром представљају ретке системе и обично су последица управо АБ кавеза [117], [118], [119]. Проучавање АБ ефеката у ФР датира од 2014. [61] и широко се користи у 1Д и 2Д системима фотонских решетки [119], [120]. АБ ефекат један је од најинтригантнијих феномена у физици и битан је за проналажење одговора на низ важних и фундаменталних питања квантне механике. АБ ефекти наелектрисаних честица су експериментално доказани и нашли су примену у различитим областима укључујући космологију, физику честица, физику чврстог стања. У последњих 20-ак година пажња је фокусирана и на АБ ефекат за неутралне честице, као што су фотони [121].

Тополошка фотоника појавила се као област проучавања која се брзо развија и која има за циљ да истражи карактеристике тополошких фаза материје, првобитно откривене у електронским системима чврстог стања. Ово поље истраживања почело је с открићем целобројног квантног Холовог ефекта 1980. године [122], [123]. Код Холовог ефекта, 2Д електронски гас у присуству јаког нормалног магнетног поља показује робусне скокове у вредностима Холове проводљивости. Проводљивост је функција магнетног поља и има вредности једнаке целобројним умношцима односа фундаменталних константи e^2/h. Далекосежне концептуалне последице целобројног квантног Холовог ефекта су истакнуте 1982. [124] и 1985. године [125]. Ови радови повезују цео број који се појављује у Холовој проводљивости с тополошком инваријантом система - Черновим бројем, који увек има целобројну вредност и описује глобалну структуру таласне функције у импулсном простору БЗ. Показало се да, уколико се два материјала с различитим тополошким инваријантама доведу у контакт, морају постојати ивична стања која су просторно локализована на споју та два материјала, на енергијама које леже унутар енергетских процепа тих материјала. Целобројна тополошка инваријанта система с процепима не може променити своју вредност услед пертурбације или деформације система, осим ако не дође до затварања процепа. Ово имплицира да се, када се два материјала с различитим тополошким инваријантама доведу у контакт, енергетски процеп мора затворити негде у близини споја, што доводи до појаве локализованих стања у овом региону. У тополошки нетривијалном систему коначне величине, спој представља граница самог узорка и тополошки тривијалног вакуума, гарантујући постојање локализованих стања на граници система. Да би се описале тополошке особине система и локализоване моде у тополошки нетривијалним решеткама, користе се величине које ће у наставку бити описане [126].

Спектар периодичне решетке $\beta_n(\boldsymbol{k})$ и Блохове функције $|u_n(\boldsymbol{k})>$ садрже све информације о линеарним особинама потенцијала. Блохове функције су инваријантне до на фазни фактор $e^{i\phi_n(\boldsymbol{k})}$ тј. $u'_n = e^{i\phi_n(\boldsymbol{k})}|u_n(\boldsymbol{k})>$ је еквивалентно $|u_n(\boldsymbol{k})>$. Математичко наведено својство Блохових функција је последица U(1) калибрационе симетрије. Ово је феноменолошки аналогно инваријантности до на фазни фактор потенцијала електромагнетног поља, који је уведен при описивању простирања електромагнетног таласа.

Увођењем фазе у модел преко калибрационог поља омогућава се коришћење Бе-

ријевог формализма. Фаза се изводи из тзв. Беријеве конекције:

$$\boldsymbol{A_n}(\boldsymbol{k}) =< u_n(\boldsymbol{k})|i\nabla_{\boldsymbol{k}}|u_n(\boldsymbol{k}) > . \tag{2.2}$$

Беријева конекција у присуству калибрационог поља трансформише се као $\boldsymbol{A'_n} = \boldsymbol{A_n} - (\nabla_{\boldsymbol{k}}\phi_n)$. Аналогон магнетног поља у електромагнетној теорији је Беријева кривина:

$$\boldsymbol{\Omega_n}(\boldsymbol{k}) = (i\nabla_{\boldsymbol{k}}) \times \boldsymbol{A_n}. \tag{2.3}$$

Беријева или геометријска фаза се дефинише као интеграл Беријеве кривине по затвореној 2Д површи у k простору унутар БЗ:

$$\gamma_B = \oint d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{A_n}(\boldsymbol{k}), \tag{2.4}$$

која представља геометријску фазу која се нагомилала услед паралелног транспорта Блохове функције дуж затворене путање кроз БЗ.

Беријева фаза γ_B може имати коначну вредност када је ефективно поље, тј. Беријева кривина, једнака нули унутар затворене криве у k простору. Уколико затворена крива обухвата Диракову тачку, интеграција унутар те криве довешће до промене γ_B за π. Беријева фаза је увек једнака целонројном умношку π, односно, квантована је величина.

Изолованим зонама у k простору може се придружити једна од квантованих тополошких инваријанти - Чернов број. Чернов број се придружује Блоховој зони и дефинише се као интеграл закривљења по целој БЗ, а може се посматрати као аналагон магнетног флукса:

$$C_n = \int_{BZ} d\boldsymbol{k}\boldsymbol{\Omega_n}(\boldsymbol{k}). \tag{2.5}$$

Чернов број увек је нула у системима с временски реверзибилном симетријом. Уколико је ова симетрија нарушена, он ће бити различит од нуле.

Глава 3

Математички модел простирања светлости кроз нелинеарне фотонске решетке

У овом делу дисертације биће уведен математички модел простирања светлости кроз нелинеарне ФР изведен из Максвел-Блохових једначина коришћењем теорије спрегнутих мода. Биће објашњен феномен дифракције у дискретним системима, уз увођење појма аномалне дифракције. Представиће се основне методе (аналитичке и нумеричке) које ће бити коришћене за симулацију простирања светлости и анализу својстава локализованих структура. Биће речи о анализи стабилности локализованих мода која је, при изради ове дисертације, примењена код следећих 2Д решетки: октагонално-дијамантске, плус и ромбичне решетке.

3.1 Теорија спрегнутих мода

Теорија спрегнутих мода (ТСМ) се широко примењује у оптици вођених таласа као математички алат за анализу простирања и интеракције електромагнетних таласа са средином. Због своје математичке једноставности овај приступ искоришћен је за разумевање рада великог броја постојећих уређаја и система као и приликом предлога нових концепата и дизајна [127].

Концепт спрезања мода се врло често користи да се опише простирање светлости у таласоводима или оптичким резонаторима под утицајем додатних ефеката, као што су спољашњи поремећаји или нелинеарне интеракције. По овој теорији, сва светлост у таласоводу може се представити као суперпозиција ортонормираних основних мода које представљају решења једначина у случају непертурбованог таласовода, а спрезање суседних таласовода се јавља као последица преклапања еванесцентних "репова"одговарајућих мода (слика 3.1 лево). Спрезање је омогућено адекватним растојањем између таласовода, односно просторним периодом решетке. Уколико је ширина полумаксимума упадног таласа светлости мања од периода решетке, неће доћи до преклапања мода из суседних таласовода [19].

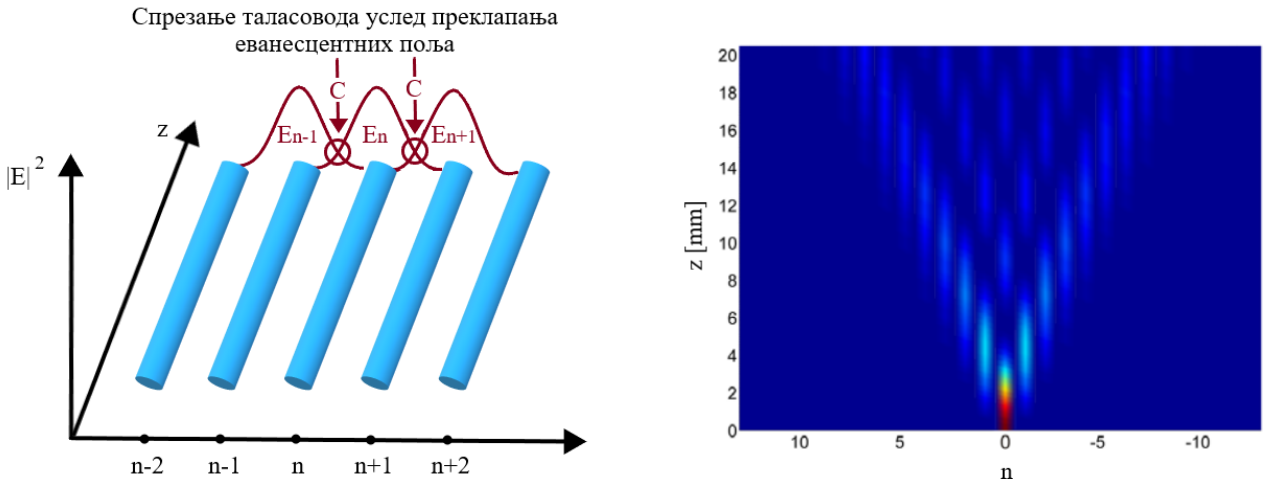
Овај приступ се технички и концептуално показао као веома погодан. У многим случајевима није могуће наћи аналитичко решење Хелмхолмцове једначине 1.3, због чега се приступа њеном апроксимативном решавању користећи ТСМ, тако што се узима у обзир само утицај најближих суседа на простирање светлости у једном таласоводу, односно користи се апроксимација јаког спрезања. У овој теорији се полази од појединачних таласовода за које се претпоставља да подржавају простирање само

основне моде, при чему је светлост сконцентрисана у области која има виши индекс преламања, а удаљавањем од ње јачина поља експоненцијално опада. Низ таласовода, односно, периодична промена индекса преламања се посматра као пертурбација [94].

Нелинеарне карактеристике материјала не испољавају се при малом упадном интензитету светлости. У том случају се, по овом моделу, простирање светлости кроз линеарну решетку (униформни низ таласовода) може описати системом спрегнутих линеарних диференцијалних једначина у облику:

$$i\frac{dE_n}{dz} + \beta_0 E_n + C(\lambda)\left[E_{n+1} + E_{n-1}\right] = 0, \tag{3.1}$$

где је с E_n обележена вредност електричног поља у n-том таласоводу, са β_0 пропагациона константа појединачних таласовода, односно посматране моде у лонгитудиналном правцу, а с C константа спрезања. Константа спрезања представља меру преклапања еванесцентних поља суседних таласовода и зависи од таласне дужине упадне светлости.



Слика 3.1: Лево: Приказ спрезања таласовода решетке услед преклапања еванесцентних поља, што је у једначини 3.1 описано константом спрезања C. Десно [19]: Дискретна дифракција приказана у униформној решетки (поглед из птичје перспективе).

У случају нелинеарних средина могуће је формирање солитонских мода. Ове моде се могу добити истовременом појавом ефеката дифракције и нелинеарности, и могу се такође представити помоћу TCM, што је приказано на слици 3.2.

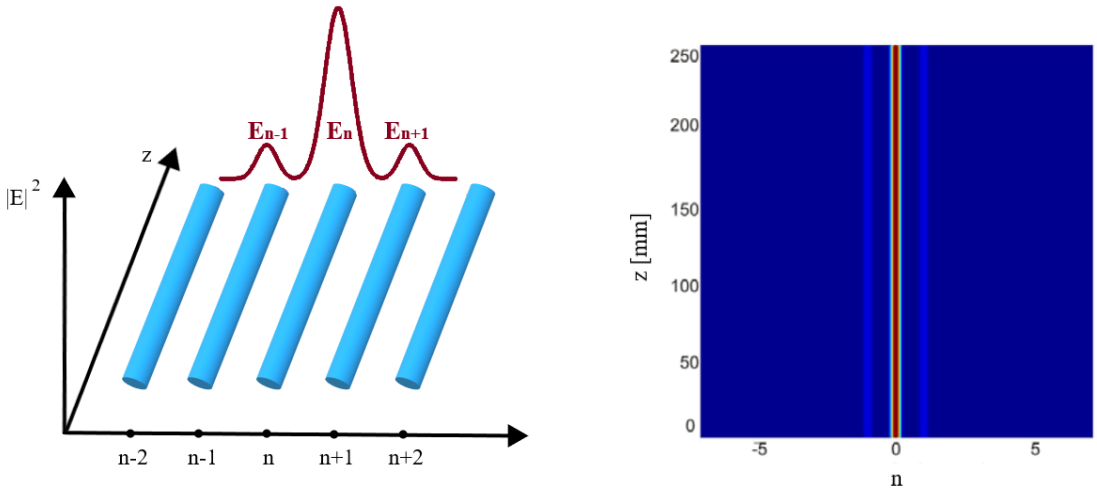
Као и у случају простирања светлости кроз континуалну средину и при простирању светлости кроз решетку, односно кроз дискретну средину, доћи ће до појаве дифракције. Дифракција у дискретним системима, која ће бити описана у наставку, има компликованије карактеристике него у случају континуалних средина.

Уколико побудимо решетку светлошћу, тако да амплитуде у свим таласоводима буду исте а однос фаза фиксан, електрично поље таквог равног таласа можемо да представимо у дискретној форми:

$$E_n = E_0 e^{i(nk_x a + \beta z)}. \tag{3.2}$$

где је a растојање између центара суседних таласовода или просторни период решетке. Релативна фазна разлика поља између два суседна таласовада је представљена производом $k_x a$, при чему је k_x трасверзална компонента таласног вектора, β је пропагациона константа таласовода која одговара лонгитудиналној компоненти таласног вектора k_z, а $nk_x a + \beta z$ је фаза таласа. Када се решење претпостављено у овом облику убаци у једначину 3.1, добија се дисперзиона релација облика:

$$\beta(k_x) = \beta_0 + 2Ccos(k_x a). \tag{3.3}$$



Слика 3.2: Лево: Приказ спрезања нелинеарног система таласовода у коме је могуће формирање солитона услед поништавања ефекта нелинеарности и дискретне дифракције. Десно: Простирање солитона у решетки (при чему је $n = 0$), (поглед из птичје перспективе).

Уколико је на самом почетку само један, централни, таласовод побуђен, захваљујући периодичној структури решетке, приликом простирања кроз таласовод, светлост може да тунелује кроз систем и да се удаљава од централног таласовода. Светлост на тај начин бива локализована даље од центра, што је супротно од понашања светлости у континуалној средини, када се највећи део светлости локализује око самог центра снопа.

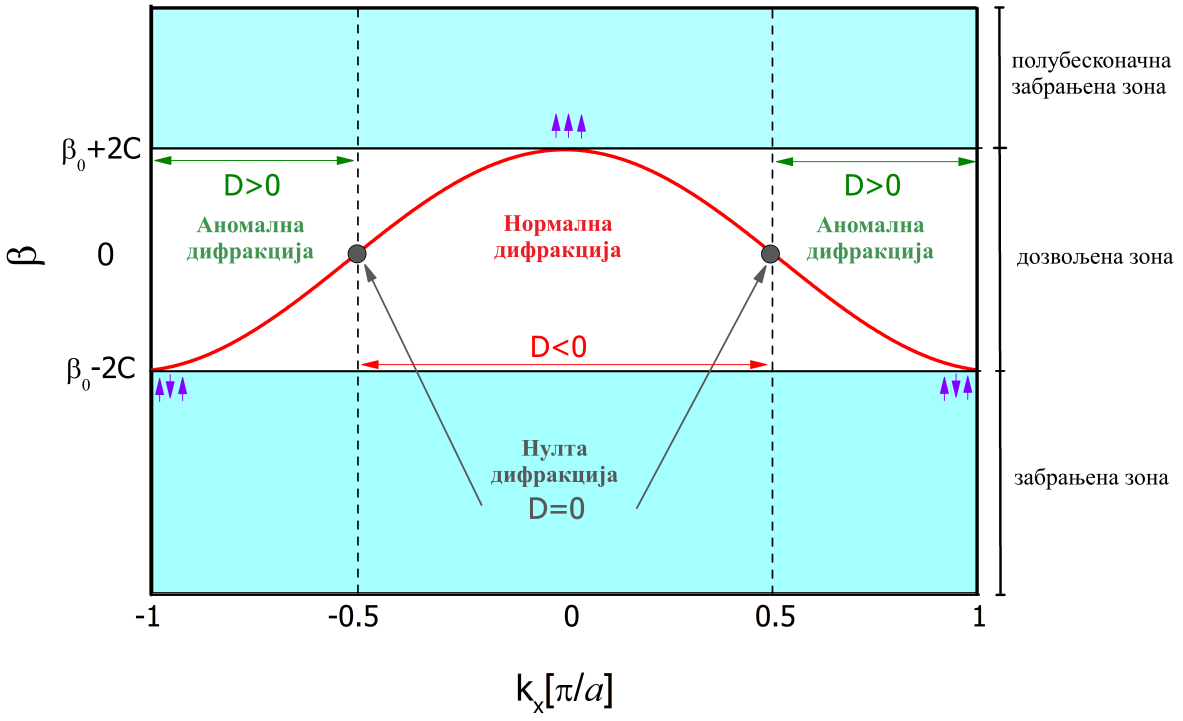
Приказ дискретне дифракције дат је на слици 3.1 десно. Степен ширења светлости у x правцу, приликом простирања светлости дуж таласовода у z правцу, односно тунеловање светлости кроз таласоводе, описује се дифракционим коефицијентом у облику:

$$D(k_x) = \frac{\partial \beta^2}{\partial {k_x}^2} = -2Ca^2 cos(k_x a). \tag{3.4}$$

Одавде се уочава да вредност дифракције у дискретном случају диктирају параметри саме решетке: константа спрезања и период решетке. Знак дифракционе константе може бити позитиван, негативан или једнак нули и зависи од дела области коју посматрамо. У случају $D < 0$, у области $|k_x a| < \pi/2$, говоримо о нормалној дифракцији, за $D > 0$, у области $\pi/2 < |k_x a| < \pi$, дифракција је аномална, а у случају $D = 0$, у тачкама $|k_x a| = \pi/2$, говоримо о нултој дифракцији или о одсуству дифракције (слика 3.3).

Изглед дифракционе криве може се објаснити различитим фазама које се нагомилавају приликом простирања мода које су побуђене убацивањем светлосног снопа у решетку. Конвексан централни део криве (који одликује нормалну дифракцију) је последица тога што суседне моде имају мању фазу од централне, па је таласни фронт снопа конвексан. Код конкавног дела криве (у случају аномалне дифракције) ситуација је обрнута.

Поинтинговим вектором за одређену трансверзалну компоненту k_x одређен је правац простирања Блохових мода у решетки. У реалном простору Поинтингов вектор је нормалан на дифракциону криву. Блохове моде које су побуђене у центру БЗ, имају амплитуде у фази и формирају моде непроменљиве фазе (unstaggered mode), док у случају побуде мода с краја БЗ фаза амплитуде мења знак од таласовода до таласовода и образује моде алтернирајуће фазе (staggered mode), што је на слици 3.3 приказано љубичастим стрелицама.



Слика 3.3: Дифракциона крива у случају периодичне решетке. Промена фазе Блохових мода од таласовода до таласовода приказана је љубичастим стрелицама у средини (unstaggered mode) и на крајевима (staggered mode) БЗ.

3.2 Аналитичке и нумеричке методе за симулацију простирања светлости и анализу својстава локализованих структура

Простирање светлости кроз средину, описује се помоћу таласне једначине за електрично поље $\boldsymbol{E}$:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

при чему је $\boldsymbol{P}$ вектор поларизације.

Простирање светлости кроз ФР може се моделовати системом спрегнутих диференцијално - диференцних једначина, где је свака једначина у вези с амплитудом таласне моде која пропагира у конкретном таласоводу. То се постиже дискретизацијом континуалног модела у апроксимацији јаког спрезања. У оваквом моделу посматрају се системи у којима нема губитка енергије, односно идеални системи. Сви таласоводи се посматрају као таласоводи бесконачне дужине. У моделу који ће бити приказан узимаће се у обзир Керов тип нелинеарности који је раније дефинисан. Под наведеним условима, простирање мода кроз периодичан, дискретан 1Д систем, односно ФР може се представити бесконачним скупом дискретних нелинеарних Шредингерових једначина (ДНЛШЈ) следећег облика:

$$i\frac{da_m}{dz} + \beta a_m + C(a_{m+1} + a_{m-1}) + \gamma |a_m|^2 a_m = 0, \tag{3.6}$$

где се простирање врши у z правцу, a_m је амплитуда моде у m-том таласоводу, C је константа спрезања а β пропагациона константа линеарног система, γ је нелинеарни коефицијент представљен кроз однос $\gamma = \omega_0 n_2 / c A_{eff}$, где је ω_0 оптичка фреквенција моде, n_2 Керов коефицијент, а A_{eff} ефективна област простирања моде у таласоводу. Аналогно системима чврстог стања и у системима ФР се уводе јединичне ћелије, па се систем једначина своди на писање једначина за сваку амплитуду таласовода у оквиру појединачне јединичне ћелије. Како се дифракциони и дифузиони процеси занемарују, у претходној једначини нема извода другог реда.

Приликом одређивања стабилности моде користи се тзв. спектрални услов, који се добија применом линеарне анализе стабилности (ЛАС). Да би мода била стабилна потребно је да својствене вредности (СВ) претходно линеаризоване једначине за мале пертурбације, у околини самих стационарних решења, буду чисто имагинарне величине. Анализа која следи биће, због једноставности, представљена у 1Д случају, а у наредној глави биће дати конкретни примери примене ЛАС, при чему ће комплетна анализа бити написана за ЛАС мода ОДР.

Дакле, претпостављено стационарно решење ћемо нарушити додавањем мале пертурбације:

$$a_m = (A_m + \delta a_m) e^{i\beta z}, \tag{3.7}$$

при чему се A_m придружује стационарном решењу, а δa_m представља пертурбацију која се додаје амплитуди при чему је $|\delta a_m| << A_m$. Пертурбација се посматра као комплексна величина:

$$\delta a_m = Re(\delta a_m) + iIm(\delta a_m). \tag{3.8}$$

Такође, и стационарно решење се посматра као комплексно:

$$A_m = Re(A_m) + iIm(A_m). \tag{3.9}$$

Пертурбована амплитуда се затим убацује у ДНЛШЈ попут једначине 3.6. Добијамо једначину по малим пертурбацијама која се затим линеаризује тако што се задржавају чланови до првог реда по пертурбацијама, а сви остали чланови вишег реда се одбацују, односно занемарују. Систем једначина се може поделити на реални и имагинарни део, па се добија систем линеарних једначина за еволуцију малих пертурбација у облику:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Re(\delta a_m)}{\partial z} =& \beta Im(\delta a_m) - C(Im(\delta a_{m-1}) + Im(\delta a_{m+1})) - \\ &- \gamma\left[2Re(A_m)Im(A_m)Re(\delta a_m) + (Re(A_m))^2 Im(\delta a_m) + 3(Im(A_m))^2 Im(\delta a_m)\right] \\ \frac{\partial Im(\delta a_m)}{\partial z} =& -\beta Re(\delta a_m) + C(Re(\delta a_{m-1}) + Re(\delta a_{m+1}) + ...) + \\ &+ \gamma\left[3(Re(A_m))^2 Re(\delta a_m) + (Im(A_m))^2 Re(\delta a_m) + 2Re(A_m)Im(A_m)Im(\delta a_m)\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ове једначине се даље могу решавати као својствен проблем за мале пертурбације. Из својствене матрице коју добијамо на овај начин се могу израчунати СВ:

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} Re(\delta a_m) \\ Im(\delta a_m) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Re(\delta a_m) \\ Im(\delta a_m) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

При чему је са M означена матрица, чија димензионалност зависи директно од броја таласовода унутар једне јединичне ћелије; исто важи и за изнад написану матрицу колону. Пертурбације задовољавају услов:

$$\begin{pmatrix} Re(\delta a_m) \\ Im(\delta a_m) \end{pmatrix} = e^{\lambda z} \begin{pmatrix} Re(\delta a_m)(z=0) \\ Im(\delta a_m)(z=0) \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где су λ СВ матрице M које представљају меру раста, односно коефицијенти малих пертурбација у еволуцији. Код Хамилтонијанских система СВ матрице малих пертурбација увек се појављују у паровима или четворкама. Парови се састоје од чисто реалних вредности $(+Re(a), -Re(a)$ а четворке од комплексних вредности $(Re(a) + iIm(a), Re(a) - iIm(a), -Re(a) + iIm(a), -Re(a) - iIm(a))$. Својствени проблем матрице се углавном решава нумерички.

На основу коефицијената пертурбације, односно СВ λ, може се закључити:

- Када су реални делови СВ и λ различити од нуле, долази до експоненцијалног раста пертурбације и решење је нестабилно. Уколико је имагинарни део СВ λ једнак нули, нестабилност је чисто експоненцијална.
- Када су и реални и имагинарни делови СВ λ различити од нуле, нестабилност има осцилаторни карактер.
- Уколико су СВ λ чисто имагинарне величине, решење је стабилно.

У 2Д системима једначине ће такође бити типа ДНЛШЈ, па ће тако амплитуда моде таласовода у ћелији с индексима m, n бити означена с $a_{m,n}$, а у једначину ће ући сва спрезања таласовода с најближим суседима у x и y правцу. Уопштеније, таласовод се може спрезати с таласоводима из своје ћелије као и са таласоводима из суседних ћелија. Ако таласоводе унутар једне ћелије обележимо са $a_{m,n}, b_{m,n}, ...$, трећи члан у једначини 3.6 можемо да представимо као суму која ће садржати сва спрезања једног таласовода са свим осталим таласоводима. У реалним 2Д системима решетка је ограничена у обе димензије, односно има коначан број ћелија и таласовода. Уколико је број ћелија: $m = 1, ..., M$ по x оси, и $n = 1, ..., N$ по y оси, укупан број једначина које описују систем биће: sNM, при чему је s број таласовода унутар једне јединичне ћелије. У оваквим системима углавном се узима да нема губитака, па се Хамилтонијан и снага система одржавају, односно представљају конзервисане величине: $H = const$, $P = const$.

У овој тези испитивали смо постојање и стабилност линеарних и нелинеарних локализованих мода 2Д система ФР. За решавање једначина које су коришћене у три модела решетки: октагонално дијамантска, ромбична и плус решетка, користили смо Рунге-Кута метод (шестог реда). Аналитички је могуће добити СВ Хамилтонијана система, решавајући његов својствени проблем. Такође се могу добити и облици КЛМ. Аналитички, применом ЛАС може се доћи и до једначина по малим пертурбацијама, које се даље углавном морају решавати нумерички. Тиме се испитује стабилност одређених локализованих мода. Варијациони рачун такође представља методу којом могу бити добијена и апроксимативна солитонска решења нелинеарних једначина којима је описан Хамилтонијански систем.

Глава 4

Резултати

4.1 Локализоване моде у октагонално-дијамантској решетки

У случају ОДР аналитички и нумерички је испитано постојање и стабилност линеарних и нелинеарних локализованих мода у њој. Описан је енергетски спектар линеарне решетке, који се састоји од две равне, недисперзивне зоне и две закривљене, ДЗ. Описани су типови локализованих мода који се појављују у случају кубне (Керове) нелинеарности [128]. Дискутована је могућност за проналажење солитонских решења у забрањеним зонама спектра. Такође, испитиван је утицај флукса вештачког поља на енергетски спектар решетке и могућност тополошких прелаза [129]. Пронађени су и приказани типови компактонских мода које се јављају при одговарајућим вредностима флукса и испитан је утицај флукса на њихову стабилност.

4.1.1 Модел решетке нетретиране и третиране флуксом

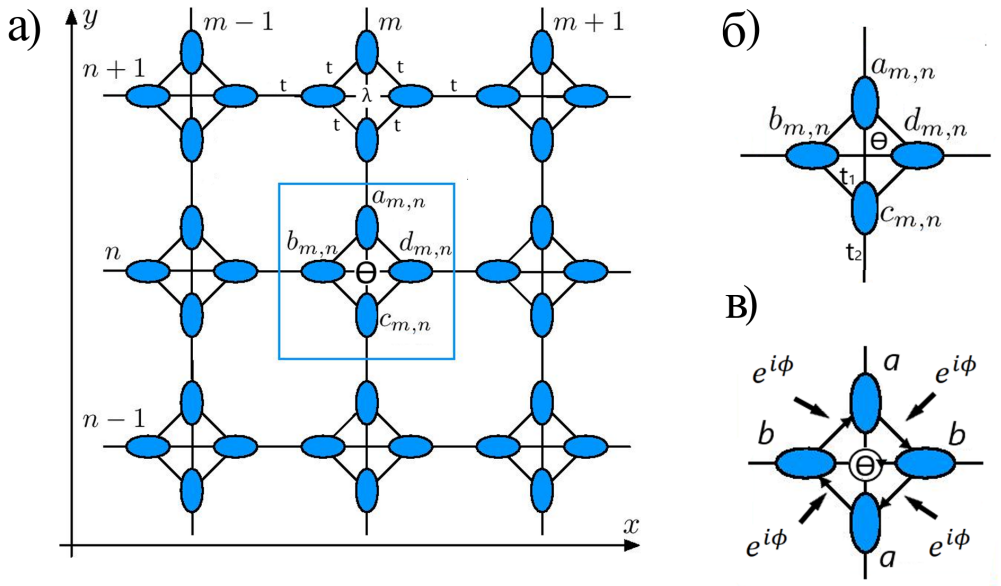
Геометрија ОДР је шематски приказана на слици 4.1 (а). Решетку граде квадратно-дијамантске јединичне ћелије са четири таласовода који су међусобно линеарно повезани и додатно повезани са по једним таласоводом из суседне јединичне ћелије. Решетка је изграђена тако да се осмоугаоне плочице и квадрати смењују у два ортогонална правца. Ова решетка може се разматрати у два независна случаја, један подразумева одусуство ($\Theta = 0$) а други присуство флукса вештачког поља ($\Theta \neq 0$). Флукс вештачког поља уводи се у систем помоћу калибрационог поља које генерише вештачко магнетно поље унутар квадратне плочице; овим се укључује утицај АБ ефекта у параметар спрезања, односно, модификује се спрега између таласовода унутар јединичне ћелије $t \to t\exp(\pm i\phi)$, при чему је $\Theta = 4\phi$, а t параметар спрезања.

Пропагација светлости кроз ОДР може се моделовати скупом линеарно спрегнутих диференцно-диференцијалних Шредингерових једначина с кубним нелинеарним чланом:

$$\begin{aligned}
i\dot{a}_{m,n} &+ t(b_{m,n}e^{i\phi} + d_{m,n}e^{-i\phi} + c_{m,n+1}) + \lambda c_{m,n} + \gamma|a_{m,n}|^2 a_{m,n} = 0,\\
i\dot{b}_{m,n} &+ t(a_{m,n}e^{-i\phi} + c_{m,n}e^{i\phi} + d_{m-1,n}) + \lambda d_{m,n} + \gamma|b_{m,n}|^2 b_{m,n} = 0,\\
i\dot{c}_{m,n} &+ t(b_{m,n}e^{-i\phi} + d_{m,n}e^{i\phi} + a_{m,n-1}) + \lambda a_{m,n} + \gamma|c_{m,n}|^2 c_{m,n} = 0,\\
i\dot{d}_{m,n} &+ t(a_{m,n}e^{i\phi} + c_{m,n}e^{-i\phi} + b_{m+1,n}) + \lambda b_{m,n} + \gamma|d_{m,n}|^2 d_{m,n} = 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где је дискретна таласна функција $\psi_{m,n}$ представљена помоћу компоненти $(a\,b\,c\,d)^T_{m,n}$, које представљају комплексне амплитуде тоталног таласног поља (четворокомпо-

нентног спинора), док су n, m индекси ћелије, при чему $n = 1, ..., N, m = 1, ..., M$, а γ је коефицијент нелинеарности. Укупан број ћелија је једнак производу NM. При посматрању униформне решетке, због једноставности и чињенице да промена вредности не мења саму физику проблема (што ће бити показано у наставку), вредности λ (коефицијент дијагоналних спрезања) и t (коефицијент свих осталих спрезања) су фиксиране на $\lambda = t = 1$.



Слика 4.1: (а) Шематски приказ ОДР третиране флуксом. У случају решетке која се не третира флуксом $\Theta = 0$. Јединична ћелија m, n оивичена је плавим квадратом. Дијагонална спрезања су означена с λ, а параметари спрезања свих осталих таласовода означени су с t. (б) Шема таласовода у квадратној решетки прстенастих резонатора. (в) Јединична ћелија прстенастих резонатора који би могли да чине ОДР решетку. Унутрашња и спољашња спрезања између прстенова су описана коефицијентима спрезања t_1 и t_2, респективно.

Укупни Хамилтонијан система може се представити као збир линеарног H_L и нелинеарног H_{NL} дела:

$$H = H_L + H_{NL}, \tag{4.2}$$

при чему је:

$$H_{NL} = \gamma\,\mathrm{diag}[|\psi_a(\vec{r})|^2, |\psi_b(\vec{r})|^2, |\psi_c(\vec{r})|^2, |\psi_d(\vec{r})|^2], \tag{4.3}$$

где је $\Psi^+_{\vec{k}} = (\tilde{\psi}_a(\vec{k})\,\tilde{\psi}_b(\vec{k})\,\tilde{\psi}_c(\vec{k})\,\tilde{\psi}_d(\vec{k}))^+$.

У k - простору, Хамилтонијан линеарног система може се представити у облику:

$$H_L(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} \Psi^+_{\vec{k}} H(\vec{k}) \Psi_{\vec{k}}. \tag{4.4}$$

Интензитет светлости по јединичној ћелији може се написати у облику: $I(\vec{r}) = \sum_j |\psi_j(\vec{r})|^2$, $j = a, b, c, d$. За тотални Хамилтонијан важиће $H(\Theta) = H(\Theta + 2s\pi)$, где је s цео број, а период $T_\Theta = 2\pi$.

Хамилтонијан линеарне ОДР може се написати у матричном облику:

$$H_L(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 & te^{i\phi} & \lambda + te^{-ik_y} & te^{-i\phi} \\ te^{-i\phi} & 0 & te^{i\phi} & \lambda + te^{ik_x} \\ \lambda + te^{ik_y} & te^{-i\phi} & 0 & te^{i\phi} \\ te^{i\phi} & \lambda + te^{-ik_x} & te^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

где је $\vec{k} = (k_x, k_y)$ двокомпонентни таласни вектор. Решавањем својственог проблема линеарног Хамилтонијана долази се до СВ $\beta_{n_z}(k_x, k_y)$, где је $n_z = 1, 2, 3, 4$ индекс придружен одговарајућој зони и својственој моди.

4.1.2 Зонски спектар линеарне решетке и компактонске моде у одсуству флукса

Основе овог модела описане су у претходном одељку и одговарају случају када је $\Theta = 0$. Константе спрезања можемо посматрати као једнаке $t = \lambda = 1$ с обзиром на то да су таласоводи у експериментима елиптичног облика [130] и уколико су оријентисани као на слици 4.1. На тај начин спрезање по дијагоналама је уравнотежено са спрезањима по ивицама дијамантских плочица, чиме је постигнута једнака јачина спрезања између таласовода. Ефективни коефицијент нелинеарности може бити позитиван ($\gamma/t > 0$) за фокусирајући тип нелинеарне интеракције и негативан ($\gamma/t < 0$) за дефокусирајући тип нелинеарне интеракције, у овом раду посматране су обе могућности у случају Керове нелинеарности.

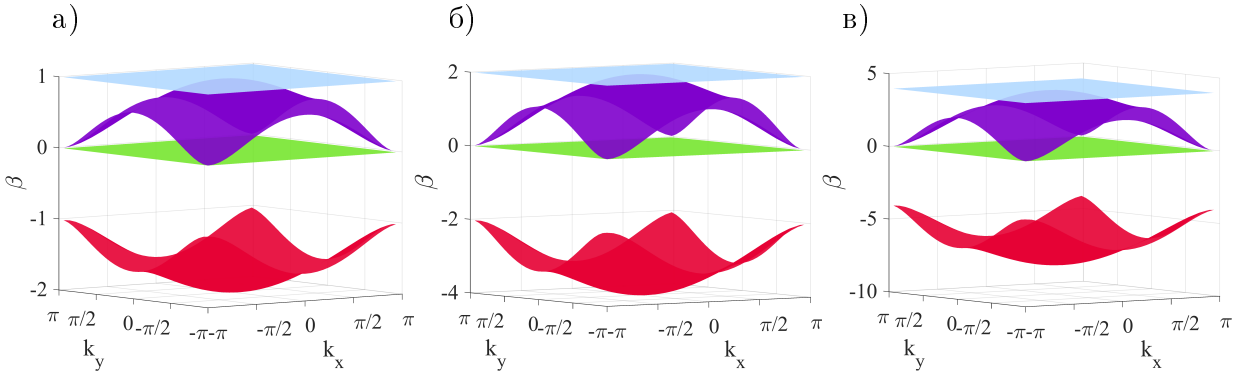
Модел једначина 4.1 је окарактерисан двема конзервисаним величинама, укупном снагом P и Хамилтонијаном H, које у разматраном случају можемо писати у облику:

$$P = \sum_{m,n} (|a_{m,n}|^2 + |b_{m,n}|^2 + |c_{m,n}|^2 + |d_{m,n}|^2), \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \sum_{m,n} \frac{1}{2}\gamma(|a_{m,n}|^4 + |b_{m,n}|^4 + |c_{m,n}|^4 + |d_{m,n}|^4) \\ & + ta_{m,n}(b_{m,n} + c_{m,n} + d_{m,n} + c_{m,n+1})^* \\ & + tb_{m,n}(a_{m,n} + d_{m,n} + c_{m,n} + d_{m-1,n})^* \\ & + tc_{m,n}(a_{m,n} + c_{m,n} + b_{m,n} + b_{m+1,n})^* \\ & + td_{m,n}(b_{m,n} + d_{m,n} + a_{m,n} + a_{m,n-1})^* + c.c. \Bigg\} . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Различите вредности константе спрезања t неће променити опште карактеристике спектра: редослед, врста и изглед зона, као и места пресецања остаће исти - што се може уочити на слици 4.2. Због тога, ради једноставности и без губитка општости, константа спрезања је нормализована на $t = 1$. Пошто ефективна нелинеарност зависи само од производа γP, можемо да разматрамо коефицијент нелинеарности γ као слободан параметар док се фиксирају вредности амплитуда мода, тако да се снага мода нормализује на јединицу, или можемо нормализовати коефицијент нелинеарности на $\gamma = \pm 1$ при чему као слободне параметре можемо посматрати снагу $P > 0$ и знак γ. У зависности од контекста, оба приступа су била коришћена приликом добијања доле наведених резултата. Чак је, за физички систем који се овде проучава, знак

Хамилтонијана произвољан, јер промена предзнака само представља комплексну коњугацију амплитуда мода или, еквивалентно, инверзију лонгитудиналне координате z.



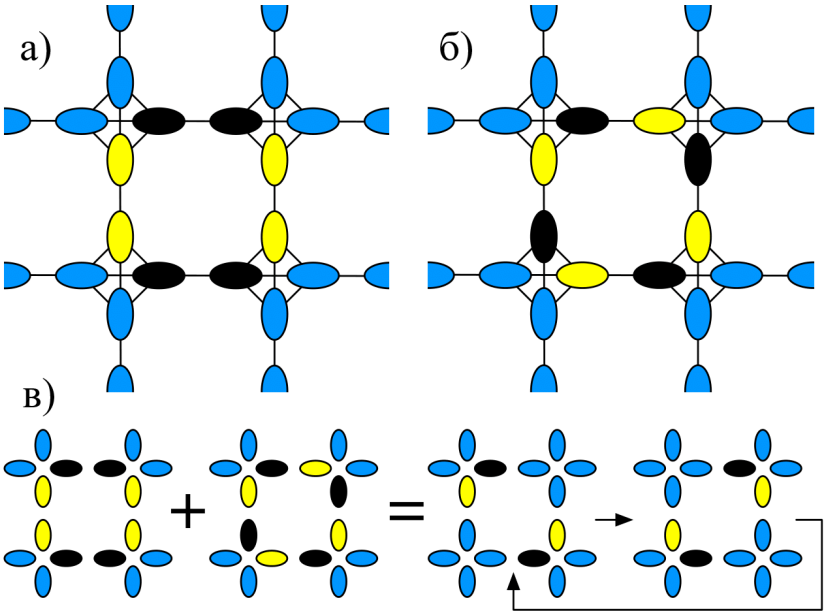
Слика 4.2: Приказ утицаја вредности параметра спрезања на енергетски спектар решетке. Изглед енергетског спектра у случају: а) $t = 0,5$, б) $t = 1$, в) $t = 2$.

За бесконачне системе или коначне системе с периодичним граничним условима, стационарна решења могу се изразити помоћу Блохових таласа у облику $\{a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}\} \sim \{A, B, C, D\}e^{i(k_x m + k_y n)}e^{-i\beta z}$, где је β пропагациона константа, а k_x, k_y су компоненте трансверзалног 2Д Блоховог таласног вектора $\vec{k}$. У одсуству нелинеарности ($\gamma = 0$), добијамо спектар за линеарна решења ОДР :

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 2,\ \beta_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5 + 2\cos k_x + 2\cos k_y}. \tag{4.8}$$

Две зоне потпуно су равне, независне од k и одговарају потпуно дегенерисаним РЗ без дисперзије [131]. Друге две зоне су дисперзивне и зависе од компоненти таласног вектора. Линеарни спектар случаја који смо проучавали је приказан на слици 4.2 б). Горња ДЗ је повезана је с горњом РЗ на $\beta_2 = 2$, у центру БЗ ($k_x = k_y = 0$). Доња РЗ ($\beta_1 = 0$) је такође повезана са горњом ДЗ, али на границама БЗ ($|k_x| = |k_y| = \pi$), као што је приказано на слици 4.2.

Сваки својствени базис РЗ састоји се од одговарајућег броја својствених вектора а ти својствени вектори или моде су компактони. Захваљујући томе, један од могућих избора својственог базиса је управо компактонски базис. Овај базис је формиран од компакатних вектора тј. мода - компактона, који у општем случају нису ортогонални. У случају ОДР, КЛМ су илустроване на слици 4.3 (а) и (б). Узрок неортогоналности је то што компактони припадају класи $U = 4$ [38], односно сваки компактон заузима четири јединичне ћелије. Спектар СВ (енергетски/фреквенцијски спектар) линеарне ОДР, састоји се од β_1, β_2, β_3 и β_4 зоне, које су приказане зеленом (РЗ $\beta = 0$), плавом (РЗ $\beta = 2$), црвеном (доња ДЗ) и љубичастом бојом (горња ДЗ). Компактони су осмоугаоне структуре са осам таласовода који деле четири јединичне ћелије. Два типа фундаменталних хомогених компактона, који заузимају осам таласовода, који имају или димерне $(++--++--)$ или мономерне $(+-+-+-+-)$ распоређене фазне структуре припадају $\beta = 0$ и $\beta = 2$ РЗ, респективно. У наставку се користе скраћенице С1 и С2, редом, за ова два типа компактона. Компактони типа С1 и С2 ортогонални су са компактонима истог типа само ако не деле јединичну ћелију (тј. ако нису локализовани на суседним осмоугаоним прстеновима), док су компактони различитог типа увек међусобно ортогонални јер припадају различитим РЗ.



Слика 4.3: (а) и (б) Расподела амплитуда компактонских решења за $\beta_2 = 0$ (С1) и $\beta_2 = 2$ (С2), респективно. Жута (црна) одговара позитивној (негативној) амплитуди, док светлоплава представља празан таласовод (нулта амплитуда). (в) Линеарна комбинација С1 и С2 која показује осцилаторну динамику.

Свака коначна линеарна комбинација компактона је такође компактно решење линеарног система [41]. Може се уочити интересантна особина линеарне комбинације компактона чија се амплитуда периодично мења са фреквенцијом $|\beta_2 - \beta_1| = 2$, ако су побуђени компактони различитог типа, као што је скицирано на слици 4.3 (в). Ове периодичне промене интензитета амплитуде би се могле искористити за конструкцију прецизног „РЗ сата“ и као механизам за контролисану периодичну промену енергије у одређеним регионима дате решетке. Наведено може наћи примену у оптичким комуникационим системима где су потребне различите форме кодирања за ефикасно шифровање велике количине података [128].

Стабилност нелинеарних стационарних решења нумерички је проучавана применом стандардне ЛАС и проверавана директним нумеричким симулацијама модела. И један и други приступ се заснивају на посматрању и проучавању еволуције малих пертурбација које се додају на стационарна решења. ЛАС се примењује додавањем малих пертурбација нелинеарним модама овог модела, чија је стабилност истражи-вана. Дакле, претпостављено стационарно решење пертурбоваћемо додавањем малих пертурбације облика:

$$a_{m,n} = (A_{m,n} + \delta a_{m,n})e^{i\beta z}, \tag{4.9}$$

при чему $A_{m,m}$ одговара стационарном решењу, а $\delta a_{m,n}$ представља пертурбације које се додају амплитудама при чему је $\delta a_{m,n} << A_{m,n}$. Аналогно ће важити и за $b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$.

Убацивањем 4.9 у систем једначина 4.1, а потом линеаризацијом по пертурбацијама, добија се систем линеарних једначина за еволуцију малих пертурбација у овом

систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Re\delta a_{m,n}}{\partial z} =& \beta Im\delta a_{m,n} - t(Im\delta b_{m,n} + Im\delta d_{m,n} + Im\delta c_{m,n+1}) - \lambda Im\delta c_{m,n} \\
& - \gamma \left[2ReA_{m,n}ImA_{m,n}Re\delta a_{m,n} + (ReA_{m,n})^2 Im\delta a_{m,n} + 3(ImA_{m,n})^2 Im\delta a_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Re\delta b_{m,n}}{\partial z} =& \beta Im\delta b_{m,n} - t(Im\delta a_{m,n} + Im\delta c_{m,n} + Im\delta d_{m-1,n}) - \lambda Im\delta d_{m,n} \\
& - \gamma \left[2ReB_{m,n}ImB_{m,n}Re\delta b_{m,n} + (ReB_{m,n})^2 Im\delta b_{m,n} + 3(ImB_{m,n})^2 Im\delta b_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Re\delta c_{m,n}}{\partial z} =& \beta Im\delta c_{m,n} - t(Im\delta b_{m,n} + Im\delta d_{m,n} + Im\delta a_{m,n-1}) - \lambda Im\delta a_{m,n} \\
& - \gamma \left[2ReC_{m,n}ImC_{m,n}Re\delta c_{m,n} + (ReC_{m,n})^2 Im\delta c_{m,n} + 3(ImC_{m,n})^2 Im\delta c_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Re\delta d_{m,n}}{\partial z} =& \beta Im\delta d_{m,n} - t(Im\delta a_{m,n} + Im\delta c_{m,n} + Im\delta b_{m+1,n}) - \lambda Im\delta a_{m,n} \\
& - \gamma \left[2ReD_{m,n}ImD_{m,n}Re\delta d_{m,n} + (ReD_{m,n})^2 Im\delta d_{m,n} + 3(ImD_{m,n})^2 Im\delta d_{m,n}\right]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Im\delta a_{m,n}}{\partial z} =& -\beta Re\delta a_{m,n} + t(Re\delta b_{m,n} + Re\delta d_{m,n} + Re\delta c_{m,n+1}) - \lambda Re\delta c_{m,n} + \\
& + \gamma \left[3(ReA_{m,n})^2 Re\delta a_{m,n} + (ImA_{m,n})^2 Re\delta a_{m,n} + 2ReA_{m,n}ImA_m Im\delta a_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Im\delta b_{m,n}}{\partial z} =& -\beta Re\delta b_{m,n} + t(Re\delta a_{m,n} + Re\delta c_{m,n} + Re\delta d_{m-1,n}) - \lambda Re\delta d_{m,n} + \\
& + \gamma \left[3(ReB_{m,n})^2 Re\delta b_{m,n} + (ImB_{m,n})^2 Re\delta b_{m,n} + 2ReB_{m,n}ImB_m Im\delta b_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Im\delta c_{m,n}}{\partial z} =& -\beta Re\delta c_{m,n} + t(Re\delta b_{m,n} + Re\delta d_{m,n} + Re\delta a_{m,n-1}) - \lambda Re\delta a_{m,n} + \\
& + \gamma \left[3(ReC_{m,n})^2 Re\delta c_{m,n} + (ImC_{m,n})^2 Re\delta c_{m,n} + 2ReC_{m,n}ImC_m Im\delta c_{m,n}\right] \\
\frac{\partial Im\delta d_{m,n}}{\partial z} =& -\beta Re\delta d_{m,n} + t(Re\delta a_{m,n} + Re\delta c_{m,n} + Re\delta b_{m+1,n}) - \lambda Re\delta b_{m,n} + \\
& + \gamma \left[3(ReD_{m,n})^2 Re\delta d_{m,n} + (ImD_{m,n})^2 Re\delta d_{m,n} + 2ReD_{m,n}ImD_m Im\delta d_{m,n}\right].
\end{aligned}$$

Еволуциона линеарна једначина за мале пертурбације се може интерпретирати и решавати као својствени проблем малих пертурбација. Решења формирају скуп СВ малих осцилација. Она директно указују на почетну тенденцију еволуције мода у присуству малих пертурбација. ЛАС даје довољан али не и неопходан услов за процену нестабилности, а реални део СВ указује на експоненцијални раст мале пертурбације и врсту нестабилности (чиста растућа или осцилаторна нестабилност).

Да би се окарактерисала нестабилност дате нелинеарне моде, уведен је индекс стабилности G који је дефинисан као максимални реални део свих СВ, што указује на растојање (време) на којем је ова мода постала нестабилна ($z \sim 1/G$). Стога, у наредној анализи, стабилна решења су представљена са $G = 0$, док нестабилна имају вредност $G > 0$.

Да бисмо потврдили налазе ЛАС и добили експлицитнију презентацију еволуције пертурбације користили смо директне нумеричке симулације једначина модела. У почетном тренутку локализована мода се убацује у систем и његова цела еволуција је затим условљена ефектима који су моделовани једначинама. У почетку амплитудама додајемо пертурбације које су моделоване скупом униформно распоређених

случајних бројева. Величине чија је еволуција посматрана су партиципациони број R и дисбаланс моде DB:

$$R = \frac{P^2}{\sum_{m,n}(|a_{m,n}|^4 + |b_{m,n}|^4 + |c_{m,n}|^4 + |d_{m,n}|^4)}, \tag{4.11}$$

$$DB = \frac{\sum_{i=n-1}^{n}(|a_{m-1,i}|^2 + |b_{m-1,i}|^2 + |c_{m-1,i}|^2 + |d_{m-1,i}|^2)}{\sum_{i=n-1}^{n}(|a_{m,i}|^2 + |b_{m,i}|^2 + |c_{m,i}|^2 + |d_{m,i}|^2)}, \tag{4.12}$$

при чему је R мера локализације моде у решетки, а у случају компактона који су хомогени, односно имају једнаке апсолутне вредности амплитуда, представља тачан број таласовода на којима је компактон локализован. С друге стране, DB служи за процену нарушавања унутрашње симетрије моде у x правцу за моде с главном локализацијом на четири јединичне ћелије $(m-1, n-1), (m-1, n), (m, n-1), (m, n)$ која формира октагонални прстен, и за савршено симетричну расподелу амплитуда биће $DB = 1$. За нарушавање симетрије у y правцу важи аналогна дефиниција.

4.1.3 Утицај нелинеарности на компактно локализоване моде

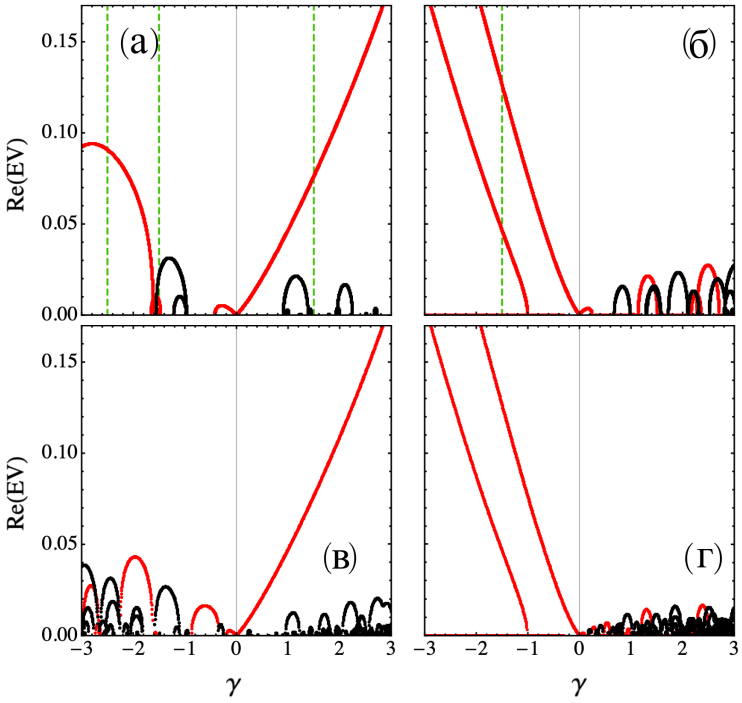
Нелинеарност омогућава аналитички "наставак"линеарних компактно локализованих мода типа $C1$ и $C2$, које су у линеарном спектру припадале РЗ, према ЗЗ. При овом ће се очувати облик компактона, као и фазна разлика између компоненти поља која се простиру кроз таласоводе, једино ће амплитуде поља на сваком таласоводу који заузима компактон бити подједнако модификоване сразмерно повећању снаге (услед нелинеарности). За ове врсте локализованих мода, константа нелинеарне пропагације μ и константа линеарне пропагације β биће повезане релацијом:

$$\mu = \beta - \frac{\gamma P}{8}. \tag{4.13}$$

Лако се види да се μ помера од β за одређени износ тачно пропорционалан снази. Дакле, хомогена компактонска решења настављају да постоје у присуству кубне нелинеарности са партиципационим бројем $R = 8$, а утицај нелинеарности се одражава само преко амплитуда таласовода који чине компактон. Међутим, ове нелинеарне компактне локализоване моде (НЛКЛМ) нису нужно стабилне и потребна је анализа стабилности [132] како би се утврдила њихова стабилност. Компактони су веома осетљиви на присуство било које врсте пертурбације која ремети њихову унутрашњу симетрију.

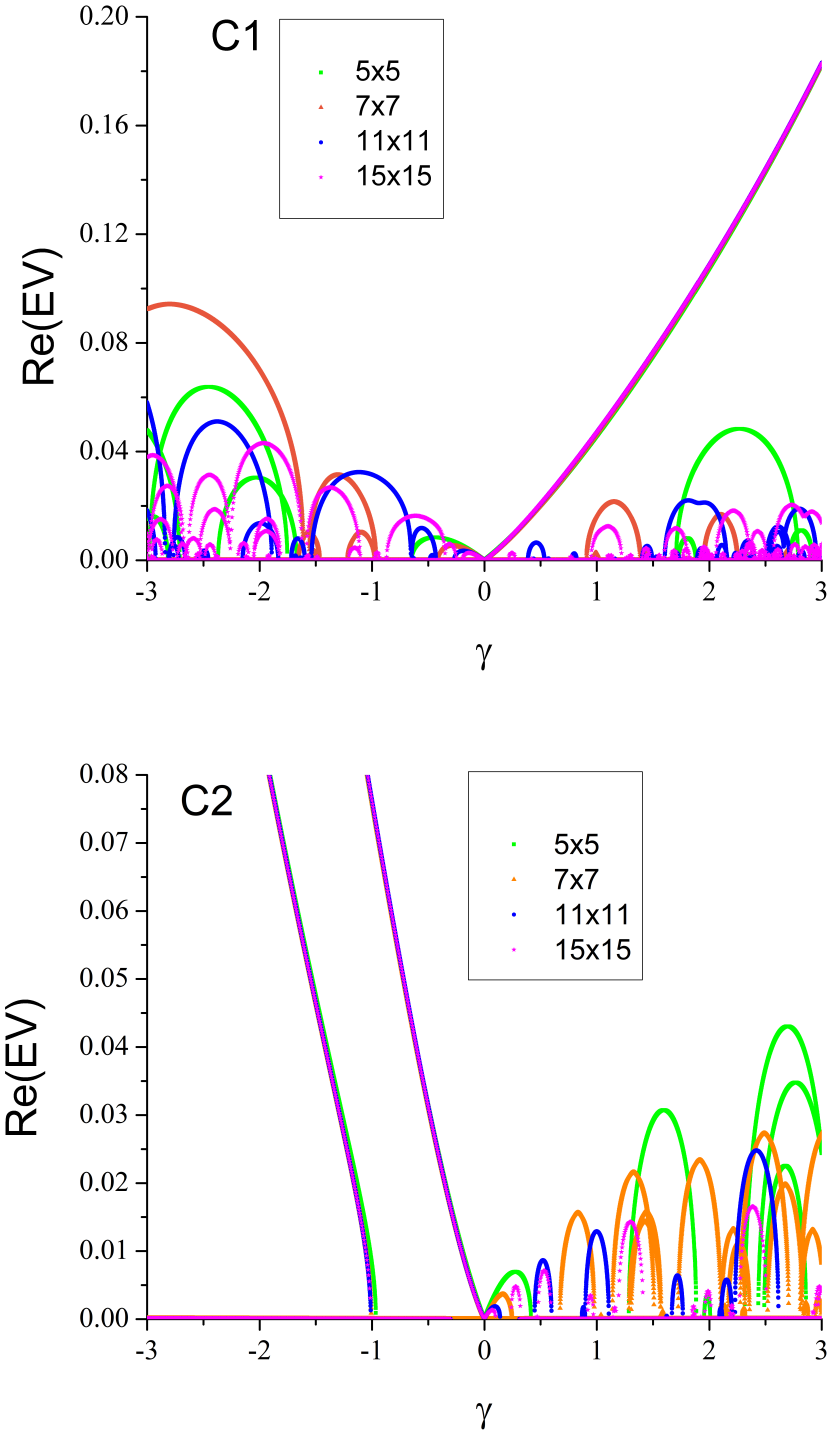
Претходна тврдња је потврђена применом ЛАС. Показано је да спектар СВ малих пертурбација додатих компактону садржи чисто имагинарне СВ дате оригиналним линеарним спектром али помереним за $\frac{|\gamma|P}{8}$. Штавише, као последица одржања енергије система, односно Хамилтонијана, негативна, као и комплексно коњугована својствена вредност такође ће бити својствена вредност. Ово важи и за нулту својствену вредност која одговара ротацији фазе компактона. Додатне СВ ће се појавити због локализованих својствених мода, које потичу или из унутрашњих осцилација моде - експоненцијалне нестабилности унутар осмоугаоног прстена, или од локалних осцилација на непобуђеним таласоводима у близини побуђених компактона. Резултати ЛАС за НЛКЛМ ОДР с 49 (7×7) и 225 (15×15) јединичних ћелија су сумирани на

слици 4.4, за умерене фокусирајуће и дефокусирајуће нелинеарности (овде и на даље $P = 1$, осим ако није другачије наведено). Случајеви веома слабих и веома јаких нелинеарности биће размотрени у наставку.



Слика 4.4: Реални делови СВ за C1 и C2 компактоне, за (а,б) 7×7 и (в,г) 15×15 ОДР, респективно. Чисто реалне СВ су означене црвеном бојом а реални делови комплексних СВ црном бојом. Зелене испрекидане вертикалне линије у (а) одговарају вредностима $\gamma = -2,5; -1,25; 1.5$ и (б) $\gamma = -1,25$ употребљеним у симулацијама на сликама 4.6 и 4.8, респективно.

На слици 4.4 могу се уочити области с реалним својственим вредностима $Re(EV) = 0$, односно прозори стабилности или слабе нестабилности, за оба компактона при фокусирајућој нелинеарности, а за $C1$ такође и за дефокусирајућу, при димензијама решетки које имају од 25 (5×5) до 400 (20×20) јединичних ћелија. Примећено је да повећање броја јединичних ћелија утиче на смањење/затварања прозора стабилности, уз незнатно смањење максималних вредности реалних делова СВ, што се детаљније, за оба компактона, може видети на слици 4.5. Уочено својство је повезано с ефектима коначне величине [133],[134], који се обично појављују када осцилације интерне моде побуђеног компактона резонују с фреквенцијама линеарне ДЗ. Како број јединичних ћелија расте, фреквенције мода с крајева решетке ће се приближити континуираном спектру, што ће резултовати слабом осцилаторном нестабилношћу.

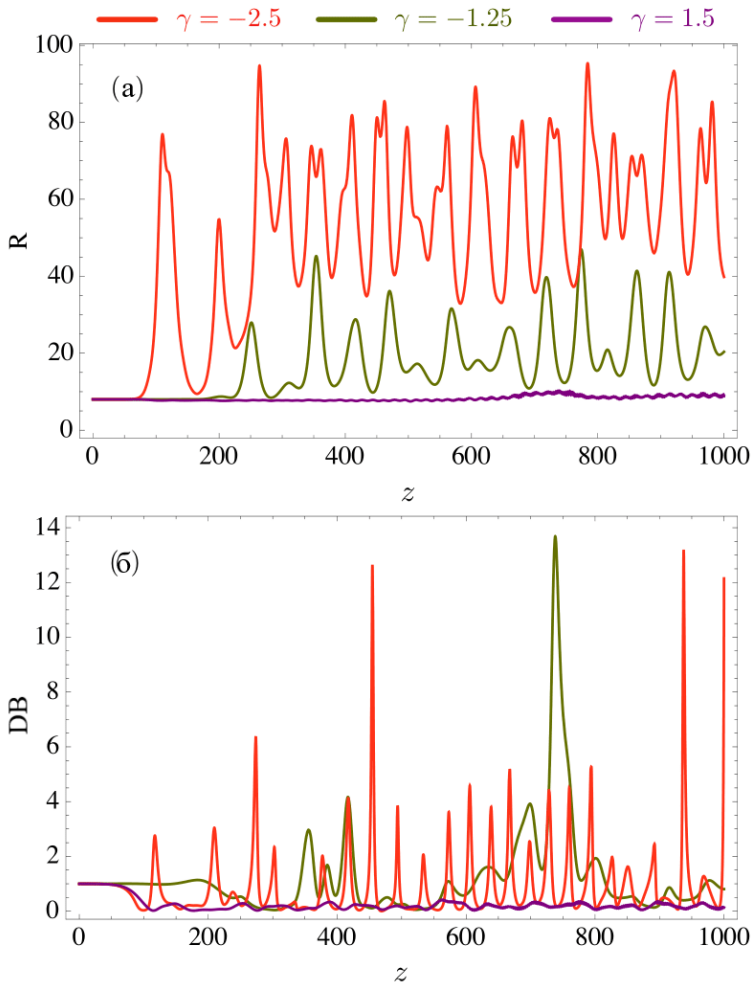


Слика 4.5: Смањење/затварање прозора стабилности услед повећања броја јединичних ћелија. Реални делови СВ за C1 и C2 компактон у решеткама димензија: 5x5, 7×7, 11x11 и 15x15.

Стабилност компактона C1

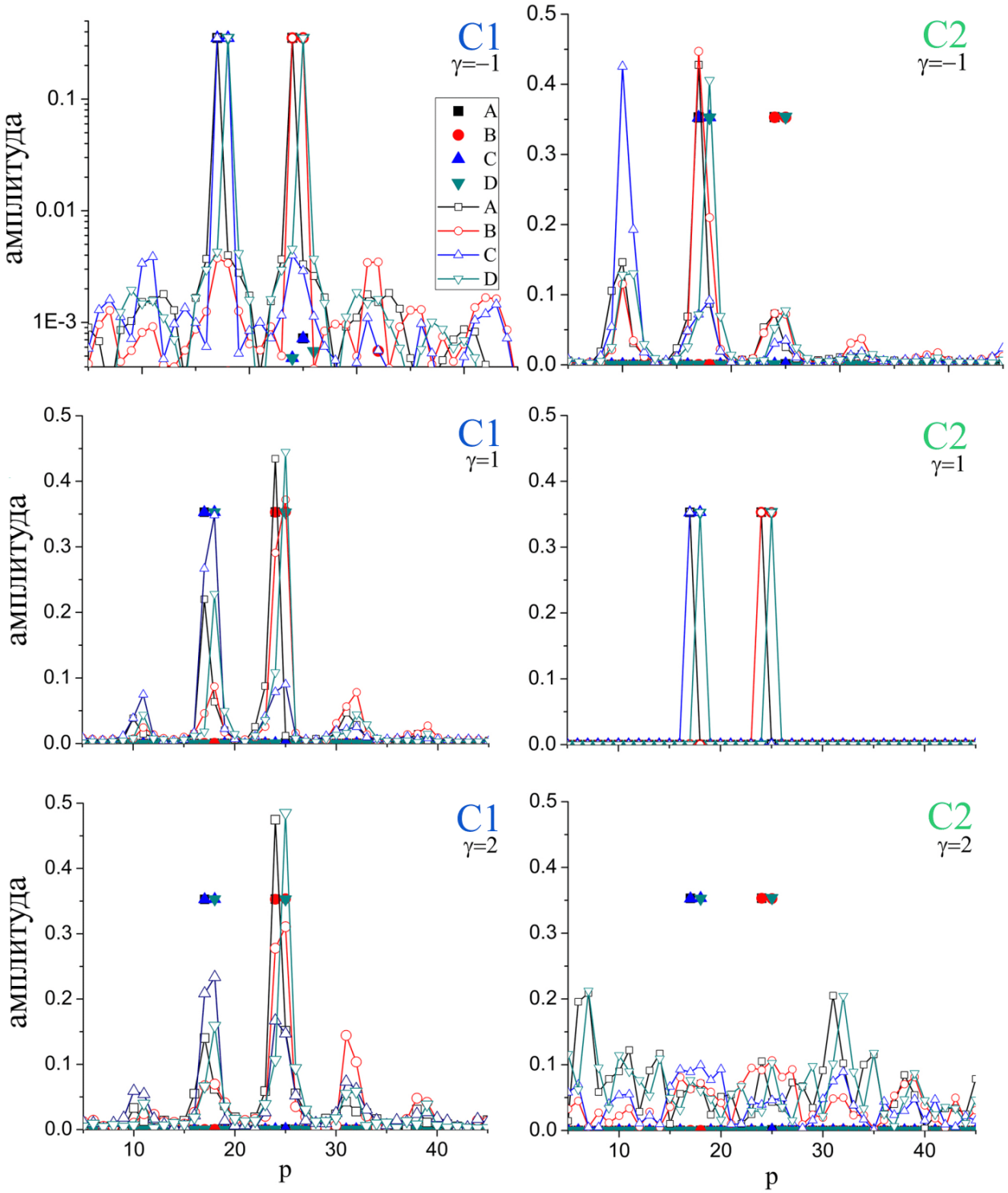
Константа пропагације за овај компактон је померена у односу на константу пропагације β у линеарном случају и износи $\mu = -\gamma P$, што доводи до тога да линеарни

спектар садржи имагинарне СВ које одговарају оригиналном спектру али померене надоле (нагоре) за дефокусирајућу (фокусирајућу) нелинеарност, што ће важити и за коњуговане вредности. Дакле, за мале вредности коефицијента нелинеарности дефокусирајућег типа ($\gamma < 0$) горња ДЗ ће имати преклапања у нули. Нестабилности које одговарају резонанцијама између унутрашњих компактонских мода и ДЗ, резултираће ширењем и "распадањем"компактона у већим решеткама. За мање решетке, прозори стабилности се могу појавити као што је горе објашњено, због дискретности ДЗ.



Слика 4.6: (а) Партиципациони број и (б) дисбаланс за C1 у ОДР са 49 (7×7) ћелија. Изабране вредности γ одговарају приказаним вертикалним линијама на слици 4.4 (а).

С друге стране, за фокусирајуће нелинеарности ($\gamma > 0$) линеарни спектар ће бити померен нагоре, а пошто се горња ДЗ помера, односно удаљава од $\beta = 0$ и доња ДЗ је одвојена, нема резонанција с дисперзивним модама, све док нелинеарност не буде довољно велика да превазиђе процеп до доње ДЗ. Ипак, испоставило се да је овај компактон нестабилан са чисто реалном СВ за било које $\gamma > 0$. Објашњење ове нестабилности је у вези с унутрашњом фазном динамиком компактног октагонског прстена, који садржи суседне парове побуђених таласовода с идентичним фазама. Како је дискутовано нпр. у [135],[136], такав однос фаза у интеракцијама генерално доводи до нестабилности за довољно велике вредности фокусирајуће нелинеарности.



Слика 4.7: Профили амплитуда A, B, C, D на таласоводима a, b, c, d током еволуције. Попуњеним симболима означена је почетна фаза, а непопуњеним симболима и линијама профили амплитуда у одређеном тренутку еволуције. Изабране вредности параметра γ одговарају карактеристичним областима нестабилности за компактоне C1 и C2. Број ћелије означен је с $p = m + (n-1)N, m, n = 1, ..., N, N = 7$. Разматра се ОДР с 7x7=49 ћелија.

У случају веома јаких нелинеарности ($|\gamma|P/t \to \infty$ еквивалентно слабој спрези, „анти-континуалној" граници $t \to 0$), линеарна зонска структура постаје неважна и преовладавају само фазне интеракције унутар компактонског прстена, које одређују његову стабилност. Узимајући у обзир у овом сличају само осмоугао који чини осам таласовода као 1Д ланац, случај дефокусирања постаје еквивалентан случају фокусирања с промењеним знаком амплитуде на сваком другом таласоводу, а пошто замена знака доводи до осмоугаоника с истом фазном структуром (само је померен један таласовод решетке), горњи аргумент [135],[136] објашњава нестабилност и у режиму велике нелинеарности и у случају дефокусирајуће нелинеарности.

Горњи закључци ЛАС илустровани су директним нумеричким симулацијама на сликама 4.6 и 4.7 (леви део). На слици 4.6 еволуција партиципационог броја R и дисбаланса DB је приказана за одређене вредности параметра γ, који припадају различитим регионима нестабилности у ОДР с 49 ћелија. Ове вредности су означене вертикалним линијама на одговарајућим дијаграмима на слици 4.4. Као што се може видети, за негативну нелинеарност постоји приближно истовремено повећање R и смањење DB, што указује на нестабилност која истовремено нарушава симетрију компактона и изазива његово ширење у решетки, у складу с ЛАС резултатима интерних компактонских мода које резонују с ДЗ. С друге стране, за позитивно γ долази до брзог смањења DB на веома мале вредности, што указује на јако нарушавање симетрије компактона, а само мале осцилације у R развијају се на већим временским скалама. Ово је такође у складу с резултатима ЛАС нестабилне унутрашње моде без директне резонанције с ДЗ у које постоје у линеарном случају, омогућавајући добро локализованој (иако нестационарној и некомпактној) моди да опстане на великим растојањима.

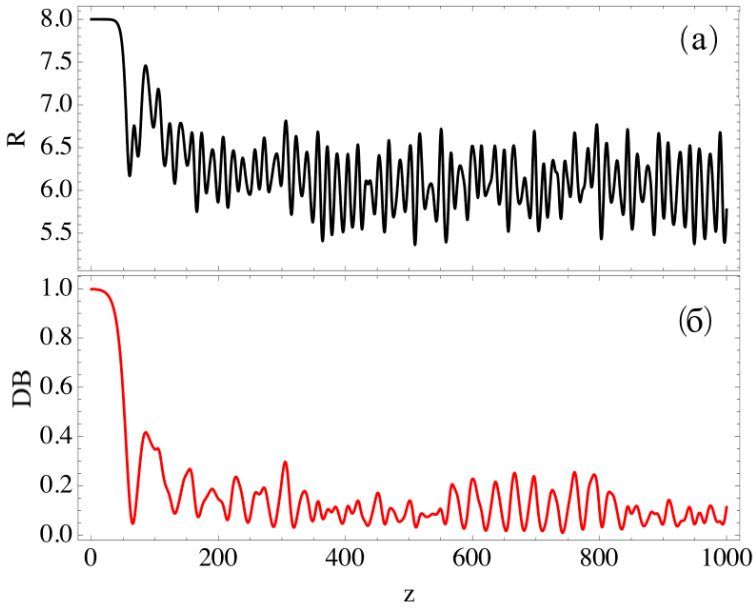
Још једна илустрација својстава стабилности компактона је приказана на слици 4.7, где је приказана расподела амплитуде мода по ћелијама у почетном и у одређеном тренутку током простирања кроз релативно малу решетку са 7×7 јединичних ћелија. Лева колона одговара случају када се у решетку у почетном тренутку убаци компактон С1 (побуде се таласоводи који га чине на адекватан начин) у централни део решетке. Вредности параметра нелинеарности су $\gamma = -1, 1, 2$, респективно. Први график илуструје понашање НЛКЛМ ($\gamma = -1$), који се налази на граници прозора стабилности на слици 4.4 (а), узроковано коначном величином система. У овим околностима мода је суштински стабилна на великим растојањима, уз детектоване слабе позадинске флуктуације. Друга два случаја, $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$, одговарају нестабилним модама с чисто реалним СВ, што је у вези с унутрашњим нарушавањем симетрије осмоугаоног компактона као и с расипањем енергије углавном према суседним ћелијама у решетки.

Стабилност компактона С2

У овом случају вредност померања пропагационе константе је иста, па ће она бити дата као $\mu = 2 - \gamma P$, што доводи до тога да линеарни спектар садржи имагинарне СВ које одговарају оригиналном спектру али померене надоле (нагоре) за дефокусирајућу (фокусирајућу) нелинеарност, $Im(EV) = \beta - 2 + \gamma P$ што ће важити и за коњуговане вредности. За вредност фокусирајуће нелинеарности, која није превише велика, доћи ће до пресека проводне зоне (РЗ у линеарном случају) са ДЗ на нултој вредности и до резонанције мода ДЗ с модама унутрашњег компактона што ће проузроковати ширење и распадање компактона у већим решеткама и слично као у

случају компактона C1. Код мањих решетки могу се јавити прозори стабилности.

У случају дефокусирајуће нелинеарности ($\gamma < 0$), пропагациона константа μ због померања, улази у област полу-бесконачне ЗЗ (ПБЗЗ) изнад $\beta = 2$ и стога резонанције с модама ДЗ за C2 компактон не би требало да постоје, за било коју вредност дефокусирајуће нелинеарности. Испоставило се да за довољно велики систем, долази до дестабилизације чисто реалне СВ за било коју произвољно малу дефокусирајућу нелинеарност (слика 4.4 (б), (г)). Разлог за ову дестабилизацију лежи у томе што, чим нелинеарност постане различита од нуле, основно стање довољно великог система није један C2 компактон већ нетривијална линеарна комбинација C2 компактона постављених на различитим осмоугаоним прстеновима.



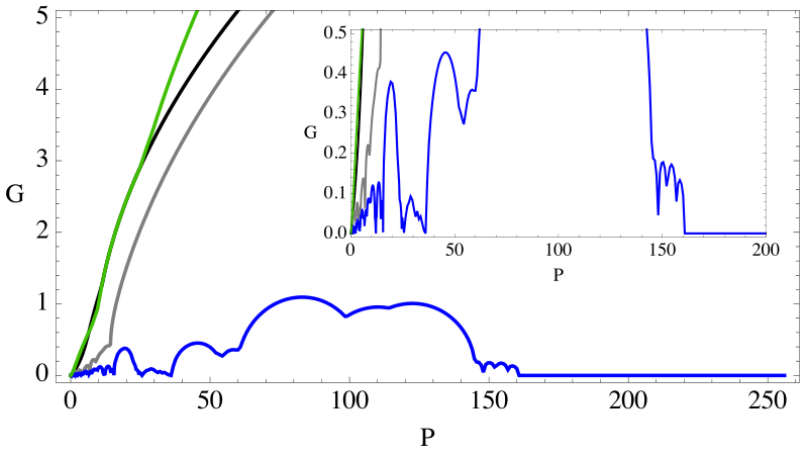
Слика 4.8: (а) Партиципациони број R и (б) дисбаланс DB за C2 у ОДР са 49 (7×7) ћелија. Изабрана вредност $\gamma = -1,25$ одговара приказаној вертикалној линији на слици 4.4 (б).

Примери из директних нумеричких симулација нестабилности компактона C2 приказани су на сликама 4.7 (десни део) и 4.8. За дефокусирајућу нелинеарност, видимо са слике 4.8 да се R смањује, што указује на прелаз у локализованију структуру, а DB опада на мале вредности, што указују на снажно нарушење симетрије осмоугаоног прстена. Ово је у складу с оснивним механизмом самозаробљавања који регулише својства локализације; убачена енергија се прераспоређује у нове структуре са реповима који су различити од нуле, али се распадају (погледати пример у горњем десном углу слике 4.7).

За позитивну вредност γ сценарио је квалитативно сличан као и за компактон C1 с дефокусирајућом нелинеарношћу: унутар прозора стабилности, за мале системе, компактон остаје у великој мери непромењен (видети пример за $\gamma = 1$ у средини десно, слика 4.7), док у режимима када постоји резонанција компактонске моде с модама ДЗ (пример за $\gamma = 2$ у доњем десном углу слика 4.7) долази до великог ширења у решетки.

У режиму велике нелинеарности компактона C2, $\gamma P/t >> 1$, основна динамика је вођена унутрашњом динамиком побуђеног осмоугаоног прстена, а остале амплитуде

таласовода решетке се могу третирати као слаба пертурбација. У случају дефокусирања ($\gamma/t < 0$), долази до промене расподеле фаза у осмоугаоном прстену због модулационе нестабилности, а на остатак решетке проширују се само виши хармоници са малим параметром $t/\gamma P$. С друге стране, за фокусирајућу нелинеарност ($\gamma/t > 0$) расподела фаза није угрожена (основно стање - октагонални прстен), а нестабилности се могу појавити само на неким малим, али различитим од нуле вредностима прага $t/\gamma P$ услед спрезања с таласоводима нулте амплитуде који не припадају осмоугаоном прстену. Стабилизација компактона С2 за велике вредности $\gamma P/t >> 1$ је потврђена нумерички, као што се може видети на слици 4.9, на којој је приказано и поређење са својственим вредностима које одговарају највећем степену раста нестабилности компактона С1. Режим стабилности компактона С2 при фокусирајућој НЛ, апроксимативно одговара области $\gamma P/t \gtrsim 160$ (за довољно велики систем где се ефекти коначних димензија система могу занемарити). Механизам за дестабилизацију компактона је спрезање с додатним таласоводима с пољима нулте амплитуде, исти као и у случају тамних солитона [134]. Снага неопходна за стабилизацију С2 компактона је већа, због тога што се више од једног таласовода нулте амплитуде спреже на исти пар компактонских таласовода супротне фазе (видети слику 4.3)).

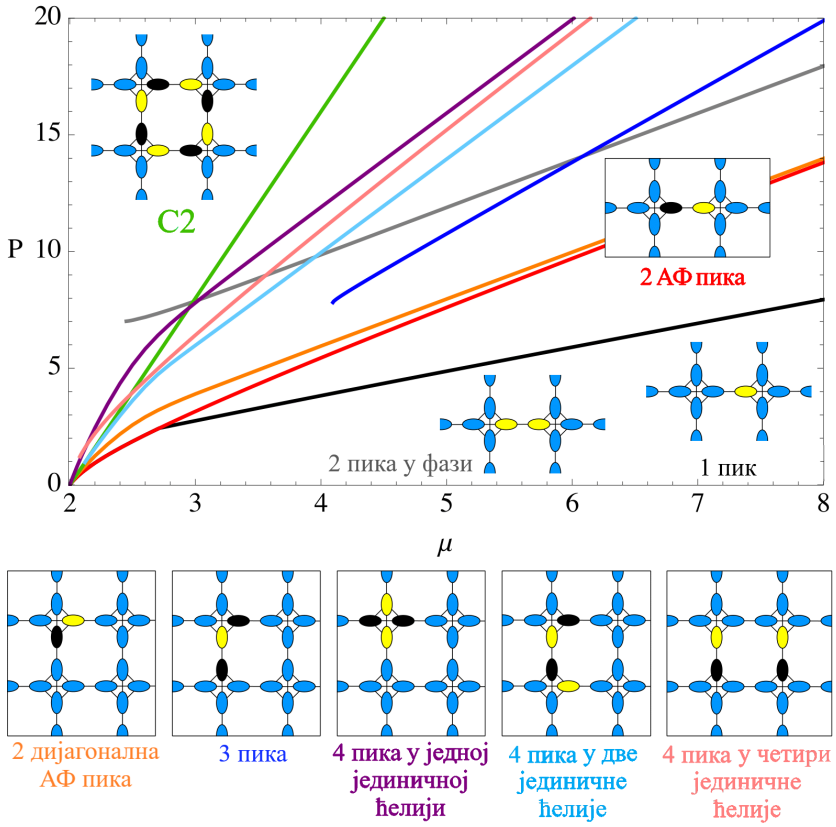


Слика 4.9: Максимум стопе раста нестабилности G у односу на снагу P у ОДР са 64 (8×8) ћелија. Сива: компактон С1 $\gamma = -1$; црна: компактон С1 $\gamma = 1$; зелена: компактон С2 $\gamma = -1$; плава: компактон С2 $\gamma = 1$. Исечак приказује мале вредности максимума стопе раста.

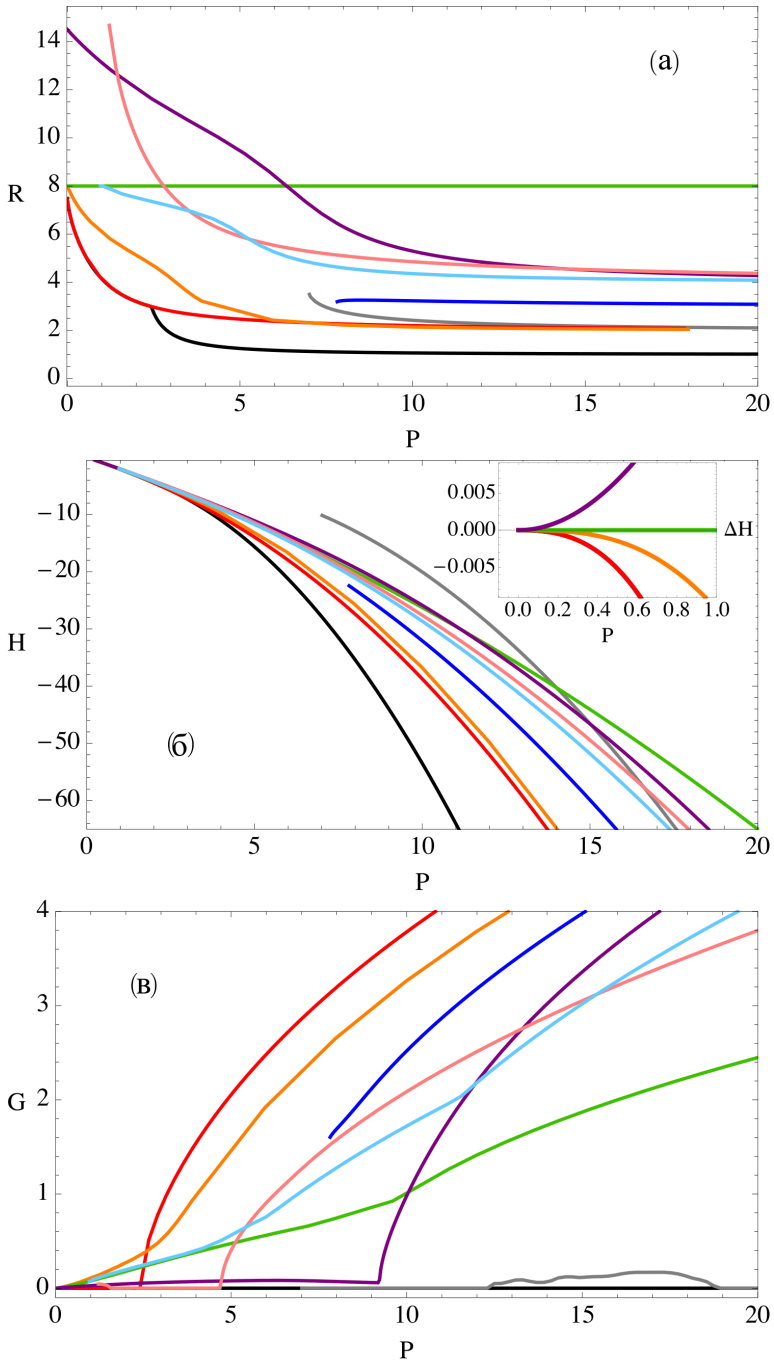
4.1.4 Не-компактонске моде у полу-бесконачном процепу

У овом одељку ћемо изнети најзначајнија запажања и резултате која се тичу истраживања читавог спектра локализованих структура аналитички очекиваних и нумерички нађених у ПБЗЗ. На слици 4.10 је дат дијаграм $P(\mu)$ за различите локализоване моде, као и одговарајући профили амплитуда у тзв анти-континуалној апроксимацији. Осим С2 компактонске моде, остале локализоване структуре имају експоненцијално опадајуће репове. Идентификовали смо 4 различите фамилије мода (с различитим својствима симетрије) које потичу из $\beta = 2$ зоне и које се могу "наставити"до лимита снаге $P = 0$ и могу постојати у ПБЗЗ (како P расте): прстенаста мода, мода са два пика (екстремума) ван фазе, мода са два пика у фази и мода

са једним пиком. Са слике 4.11 се види да, у присуству јаке нелинеарности, мода са једним пиком (црна линиија) представља стабилно основно стање система, као и у случају квадратне нелинеарне решетке. Међутим мода са једним пиком постоји само за $P \geq 2,4$, након виљушкасте бифуркације ($P = 2,4; \mu = 2,7$) из фамилије моде с 2 АФ пика (црвена линија). У области слабе нелинеарности, фамилија моде са два пика остаје стабилно основно стање. То решење је окарактерисано најмањим R ('највише локализовано') од свих посматраних локализованих мода у том региону параметара система. Такође треба навести да мода с два пика увек има мање H и R од одговарајућих вредности за C2 (зелена линија), што посредно значи да се C2 дестабилизује захваљујући нарушењу симетрије подстакнуте развојем модулационе нестабилности. Друга два решења која постоје у линеарном и нелинеарном режиму су решења с два пика у супротним фазама (наранџаста). Положај пикова је назначен на слици 4.11 и може се упоредити с решењем са два АФ пика. Решење са једним пиком је нестабилно. Иста је ситуација и с решењем са ненултим амплитудама поља на сва 4 чвора у јединичној ћелији али са супротним фазама (љубичасто).



Слика 4.10: Дијаграм зависности $P(\mu)$ различитих фамилија нелинеарних локализованих мода за $\gamma = -1$. Репрезентативне моде профила, у граници великих снага, приказане су (уметнуте) и означене истим бојама као криве. За све моде, жута (црна) одговара позитивној (негативној) амплитуди, док светлоплава представља таласоводе с нултом вредношћу амплитуде. (Скраћеница АФ означава таласоводе у антифази (супротној фази).)



Слика 4.11: (а) Партиципациони број R, (б) Хамилтонијан H, и (в) стопа нестабилности G у односу на снагу P, за све моде приказане на слици 4.10 и користећи исте боје за сваку моду. Уметак у (б) показује разлику ΔH, у поређењу с H за C2 компактон (зелена крива), за решење које се наставља на $\beta = 2$.

Утицај величине решетке на основно стање

Нумеричке симулације решетки с различитим бројем јединичних ћелија показале су да се с порастом броја ћелија тј. повећањем решетке, прозори стабилности нелинеарних компактних мода смањују. Ово смањење је праћено и малим смањењем максималне вредности реалних делова СВ пертурбација, које су пак сразмерне степену експоненцијалног раста малих пертурбација, тј. брзини настанка нестабилности посматране моде. Наведено упућује на значај тзв. ефеката величине система (finite-size effect), који су обично последица резонантног појачања (унутрашњих) осцилација у пропагирајућој моди које су побуђене појавом модулационе нестабилности. Прецизније, у спектру нелинеране пропагирајуће моде се појављују нове фреквенције повезане с новим осцилаторним степенима слободе које могу бити у резонанцији с модама из ДЗ. Тако долази до резонантног повећања амплитуда новонасталих осцилација и модификације пропагирајуће моде.

У линеарном случају ($\gamma = 0$), свака линарна комбинација C2 мода је егзактно решење Хамилтонијана $H = -2P$ и припада јако дегенерисаном основном стању система. У присуству нелинеарних ефеката ситуација се мења. Само линеарне комбинације које екстремизују H и имају одговарајућа својства симетрије могу опстати. Услов екстемизације можемо извести из једначине 4.11. У линеарном случају долазимо до $\mu = 2$, што је пак вредност која екстремизује и R за дато P, тако да у случају јако мале нелинеарности можемо очекивати да линеарна комбинација C2 представља основно стање система. Да би одредили критичну величину система за коју појављивање ефеката нелинеарности мења структуру основног стања типа компактног прстена (C2) са структуром састављеном од нетривијалне комбинације прстенова, кренули смо од узорка који се састоји од линеарне комбинације 14 прстенова (компактних прстенова). Комбиновали смо аналитичке и нумеричке методе да одговоримо на постављено питање. Услов за налажење екстремалне вредности H је:

$$H = -\mu P - \frac{\gamma P^2}{2R}. \tag{4.14}$$

У линеарном случају $\mu = 2$ овај услов је заправо еквивалентан услову за екстремализацију R при фиксираној вредности P, јер се очекује да ће основно стање при слабој нелинеарности бити линеарна комбинација која минимизује партиципациони број, тј. за коју постоји најјача локализација. Са слике 4.11 а) може се уочити да, када $P \to 0$, мода са два пика има партиципациони број $R < 8$, што указује на то да за довољно велике системе при слабој нелинеарности C2 неће бити основно стање система, већ да основно стање треба тражити као линеарну комбинацију и осталих мода.

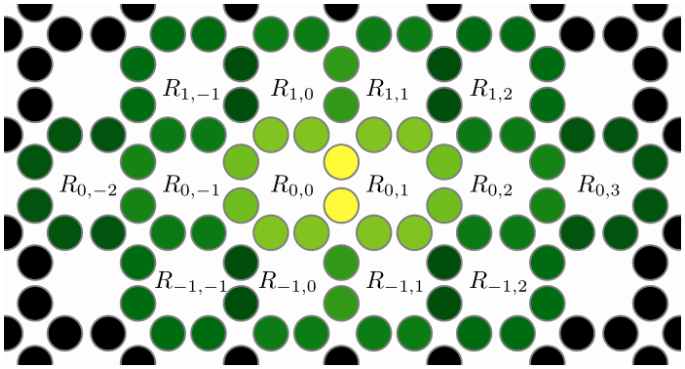
Да би одредили критичну величину система повећавали смо разматрани систем, тежећи минимализацији партиципационог броја R. Тако смо дошли до претпоставке да ће систем од 14 прстенова представљати управо тражену критичну величину:

$$\begin{aligned}\psi = {} & w(R_{0,0} - R_{0,1}) + h(R_{0,-1} - R_{0,2}) + l(R_{0,-2} - R_{0,3}) + \\ & + u(R_{1,0} - R_{1,1} + R_{-1,0} - R_{-1,1}) + \\ & + v(R_{1,-1} - R_{1,2} + R_{-1,-1} - R_{-1,2}).\end{aligned} \tag{4.15}$$

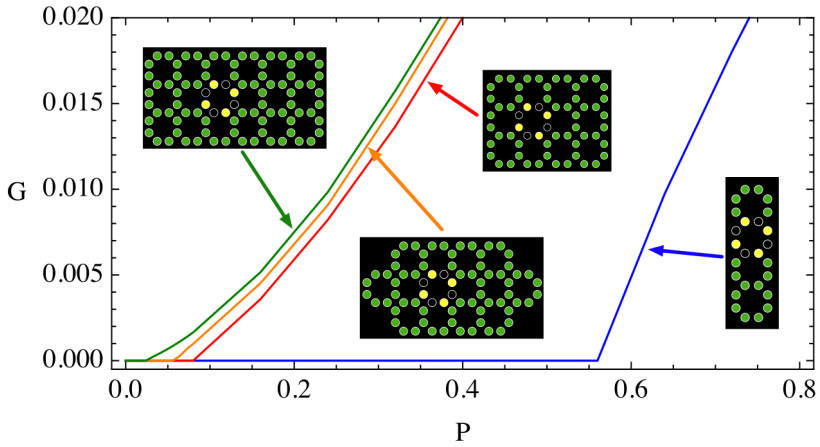
Овде $R_{i,j}$ означава C2 прстен са јединичном амплитудом на чвору (i, j), а w, h, l, u, v

су позитивни коефицијенти које одређујемо из услова минимализације R. Структура је скицирана на слици 4.12.

Мењајући број прстенова на 12 такође смо добили $R < 8$, али за било који систем с мање од 12 C2 прстенова R је бивало веће од 8. Ова процедура је потврдила да основно стање треба да буде 2 пик мода за све системе који садрже 12 или више прстенова и решење од једног прстена за мање системе. Промена основног стања са величином система рефлектује се на динамику мода. На слици 4.13 је представљен индекс стабилности у функцији од снаге за један C2 компактон у малој решетки са фиксираним граничним условима. За системе са 4 прстена C2 је основно стање у присуству слабе НЛ, што на слици одговара понашању за мале снаге $P \lesssim 0.55$. Када се величина система повећа на 12, 14 и 18 прстенова, компактон није основно стање и нестабилност се брзо испољава. Овде треба напоменути да и за такве системе постоји јако узак регион стабилности за јако мале снаге, који се смањује са порастом величине система.



Слика 4.12: $\sqrt{|\psi|}$ нумерички добијеног основног стања у режиму мале снаге ($P \approx 5 \times 10^{-6}$). Систем од 14 прстенова (из 4.15) има 6 прстенова у централној врсти ($i = 0, -2 \leq j \leq 3$) и по 4 у врсти изнад и испод ($i = \pm 1, -1 \leq j \leq 2$). Пораст амплитуде имплициран је променом боје таласовода од црне ка жутој.



Слика 4.13: Индекс стабилности G у зависности од снаге P за појединачне C2 прстенове убачене у мале системе који се састоје од не тако великог броја таласовода и назначени су у уметнутим сликама ($\gamma = -1, t = 1$, при фиксним граничним условима).

Када се у мали систем који се састоји од неког коначног броја ћелија с 4 чвора, убаци одговарајуће решење 4.15 с минималним R а које би било дистрибуирано тако да је за сваки разматрани случај максималан број доступних 'целих' јединичних ћелија 'попуњен', добили смо следеће: за систем величине (3 × 2), (5 × 2), (7 × 2) јединичних ћелија (с 4 чвора) средња вредност R је већа од 8, док за системе с (5 × 4) и (7 × 4) јединичних ћелија остаје мања од 8 за велика времена пропагације и у присуству случајног шума. Тако смо потврдили да је у општем случају малих решетки критична вредност величине система 12 прстенова.

Покретљивост компактонских мода

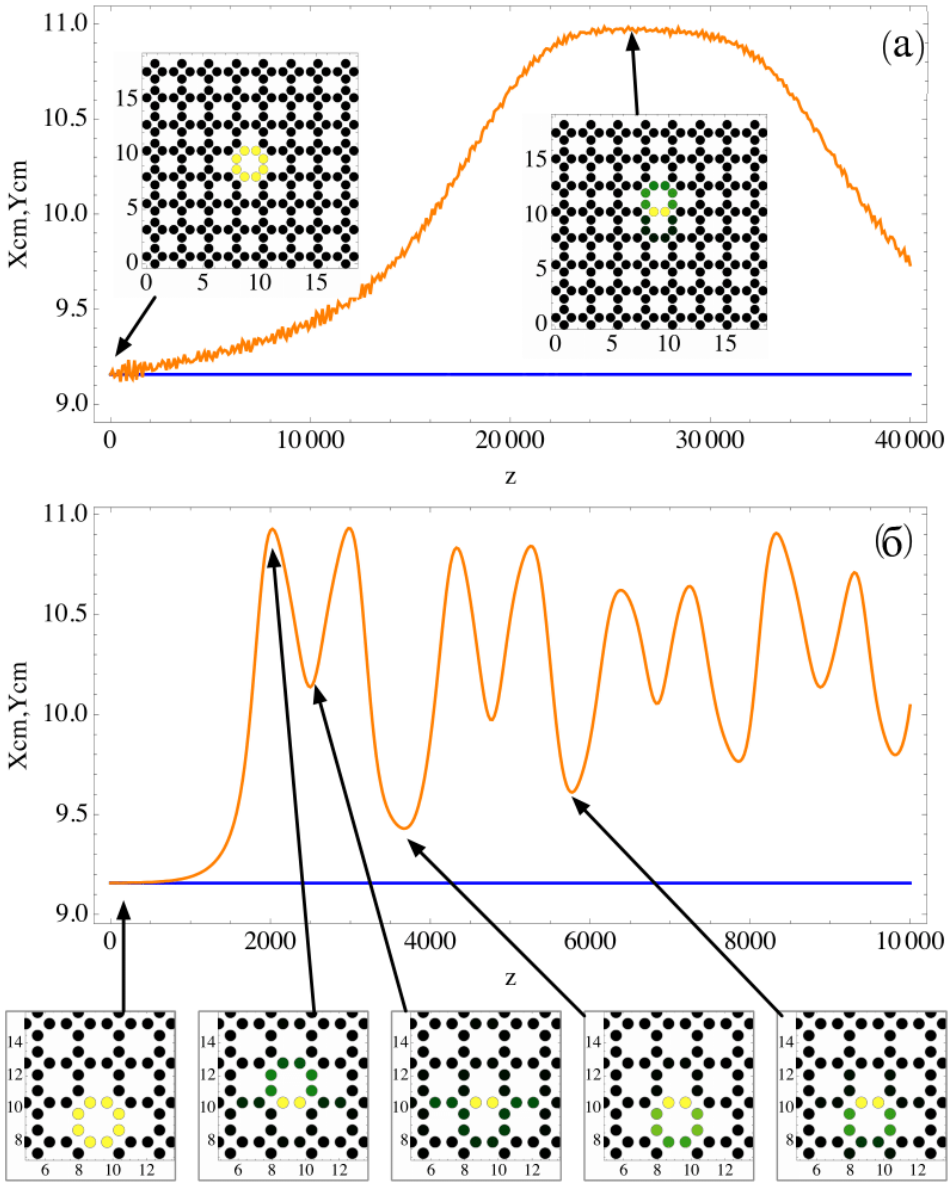
Постоји сличност у зонској структури око $\beta = 2$ у случају ОДР и кагоме решетке, где је установљено да постоји добра покретљивост јако локализованих мода у близини границе РЗ-ПБЗЗ [137]. Због ових сличности, покушали смо да идентификујемо могуће мобилне моде и у ОДР. Два типична примера су илустрована на слици 4.14, где је компактону C2 у близини доње границе ПБЗЗ додат трансверзални поремећај: $\Psi_{m,n}(0) = R_{m,n}e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{r}$ дефинише положаје таласовода који чине компактон, а $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha_x}, \boldsymbol{\alpha_y}\}$ градијент фазе.

Мењајући ефективне вредности величине помераја, утврдило се да не постоји тражена мобилност. Нисмо успели да покренемо компактон, уочили смо мале осцилације и заробљавање у ефективној потенцијалној јами, типа Пајерлс-Набарове јаме, која је генерисана модом са два пика. Значајно повећање α није омогућило савладавање баријере, већ је изазвало побуђивање осцилаторног компактонског комплекса. Ово се феноменолошки може довести у везу с чињеницом да компактон C2, који је својствена мода линеарног Хамилтонијана, није својствено решење нелинеарног Хамилтонијана. Како се почетни ОДР режим C2 прстена преводи према стабилној моди с два пика, многе додатне прстенасте моде се побуђују, што може отежати поновно враћање у транслирану прстенасту моду с почетка.

Истраживана је и могућност покретљивости прстенасте моде у дијагоналним правцима, што би значило да постоје стационарне дијагоналне моде с два пика, као и моде с четири пика које би могле да буду међупрелази при кретању дуж дијагонале решетке. Међутим, испоставило се да су моде на крају симулације сличне онима у аксијалном кретању: мода се не транслира већ у почетку осцилује у дијагоналном правцу и како се додатна нестабилност која нарушава симетрију развија, њен центар масе почиње да се понаша независно од осцилација у хоризонталном и вертикалном правцу (слика 4.14). Стога се чини да транслациона мобилност не постоји у било ком правцу за локализоване режиме близу горње РЗ.

4.1.5 Октагонално-дијамантска решетка третирана флуксом

Сада ће бити представљени резултати у случају ОДР третиране флуксом. У зонском спектру РЗ могу бити одвојене од других зона, односно несингуларне (појединачне) или сингуларне уколико постоје додирне тачке са другим ПЗ. У случају сингуларних РЗ постоје дисконтинуитети у Блоховим својственим функцијама у близини додирних тачака у БЗ. Са становишта тополошке теорије зона, савршено РЗ се карактеришу тривијалном (нултом) вредношћу Черновог броја. Ово се односи на аналитичка својства Блохових таласних функција у БЗ [42].



Слика 4.14: Примери динамике C2 компактонске моде у режиму слабе снаге за $\gamma = -1, t = 1$, које су померене у вертикалном правцу ($\alpha_x = 0$) за $\{\alpha_y, P\}$: (а) $\{-0,1; 0,005\}$ и (б) $\{-0,001; 0,1\}$. Главне слике Y_{cm} (наранџасто), X_{cm} (плаво) представљају центре маса у зависности од z. Уметнуте слике приказују расподелу интензитета на растојањима која су назначена стрелицама. Разматрана је коначна решетка с 256 таласовода.

С тачке гледишта топологије, сингуларне РЗ нису погодне за рад, управо због немогућности да се дефинишу тополошке величине, услед постојања дисконтинуитета у својственим функцијама. Особина сингуларних РЗ је да се не може пронаћи комплетан скуп компактних локализованих стања који обухвата сингуларну РЗ при периодичним граничним условима. У случају отворених граничних услова, сингуларност се манифестује кроз постојање ивичних стања, која се називају робусне граничне моде (компактне линијске моде) [42]. Ове моде су заштићене заравњеношћу ПЗ и сингуларношћу, за разлику од тополошких ивичних стања која су заштићене постојањем ЗЗ и тополошким наелектрисањем (набојем). Ове моде су компактне и

робусне и могу допунити компактонски базис, али треба нагласити да нису последица тополошких промена.

Тополошка инваријанта у вези са ПЗ јесте Чернов број. Тополошке особине сингуларних зона је тешко дефинисати, али се може доћи до тополошки интересантних ефеката при одвајању зона, што се може манифестовати појавом ивичних мода [42]. Постоји узрочно-последична веза између броја ивичних мода и Черновог броја.

Као што се може видети на слици 4.2, РЗ ОДР су сингуларне, а да бисмо изазвали одвајање зона, односно појаву процепа између њих и начинили их тополошки интересантним, третирали смо сваку дијамантску плочицу униформним флуксом $\theta = 4\phi$. Овим је нарушена временски-реверзибилна симетрија, а спрезања дуж страница дијаманта постала су комплексне вредности $te^{i\phi}$. Експериментална реализација ОДР третиране флуксом вештачког поља могућа је уписивањем таласовода у плочице силицијума фемтосекундним ласером [64], [138] или формирањем решетки које се састоје од прстенастих резонатора [139]. Као што је показано у [131], финим подешавањем параметра спрезања, могуће је добити системе с тополошки тривијалним РЗ и нетривијалним скоро равним зонама (СРЗ). Решетке које поседују СРЗ показале су се као погодне за испитивање нових феномена у тополошкој фотоници а тиме посредно и у атомским системима и физици кондензоване материје. У раду [129] смо испитивали робусност КЛМ, индукованих у решеткама са сингуларним и несингуларним зонама на присуство нелинеарног одговора средине, са намером да испитамо да ли сингуларност повећава нестабилност поменутих мода.

Можемо разматрати јединичну ћелију резонатора која се састоји од резонантних прстенова који се спрежу помоћу "прстенова везе"позиционираних тако да опонашају спрезања унутар (t_1) и ван јединичне ћелије (t_2), као што је приказано на слици 4.1 (б). Процедура која је представљена у [140] подразумева да се флукс вештачког поља контролише подешавањем прстенова везе који нису у резонанци. Спрезање посредством нерезонантних прстенова везе је описано ефективном константом спрезања $t_1 = tcsc(\Theta/2)$ где је t константа спрезања за савршено анти-резонантне прстенове $\Theta = \pi$. Елементи решетке сада имају додатне потенцијале $tcot(\Theta/2)$, који у случају бесконачне решетке могу бити уклоњени из разматрања једноставним померањем почетног нивоа у енергетском спектру, односно рескалирањем. Ванћелијско спрезање t_2 може се остварити директно или посредством анти-резонантних прстенова везе у форми $t_2 = Jcsc(\Theta/2)$, где је J друга константа спрезања. У нашем случају $J = t$, а дијагонална спрезања унутар јединичне ћелије представљена су с t_1. Након рескалирања енергије у складу с фактором $csc(\Theta/2)$, линеарна решетка се може моделовати скупом наведених једначина 4.1 где је $t = \lambda$ а $\Theta \neq 0$. У случају $\Theta = 0$ алтернативно се могу користити низови слабо спрегнутих оптичких таласовода, где се унакрсно спрезање постиже раздешавањем таласовода [140]-[143].

Начин конструисања ОДР помоћу мреже прстенастих резонатора, погодан је због велике могућности за манипулисање интензитетом светлости и смањење губитака. Међутим, слаба тачка оваквих система је потреба за густим паковањем мреже резонатора у ОДР, што представља изазов за експерименталну реализацију.

У случају ОДР која би била базирана на таласоводима, постојао би проблем великих губитака при великим интензитетима светлости, који су потребни за постизање веће нелинеарности. С друге стране, обећавајуће резултате дао је рад с диполарним таласоводима у дијамантским плочицама, који могу да олакшају пут за постизање АБ фазе и уклоне проблеме с помоћним таласоводима [144].

4.1.6 Утицај флукса на изглед зонског спектра

Прво ћемо размотрити изглед линеарног енергетског спектра ОДР-е. Линеарна својствена стања - Блохове функције, задовољавају једначину $H_L u_n(\vec{k}) = \beta u_n(\vec{k})$, где је β одговарајућа вредност својствене енергије која игра улогу пропагационе константе. Користећи флукс као параметар у опсегу $\phi \in [0, \pi]$, ОДР може послужити као платформа за манипулисање прелазима с тополошки тривијалних на тополошки нетривијалне зоне, као што је приказано на слици 4.15.

За рачунање вредности тополошких инваријанти зона коришћен је приступ из [145] који је базиран на израчунавању Блохових функција и одговарајућих варијабли при сваком калибрационом пољу, у дискретним тачкама унутар прве БЗ. Кренувши од 4x4 спинорских таласних функција n-те зоне може се формирати варијабла везе:

$$U_n(\vec{k}_l) = \frac{1}{N_n(\vec{k}_l)} < u_n(\vec{k}_l) | u_n(\vec{k}_l + \vec{\mu}) >, \tag{4.16}$$

где је $N_n(k_l) = | < u_n(\vec{k}_l) | u_n(\vec{k}_l + \vec{\mu}) > |$ константа нормирања, $\vec{k}_l$ дискретизована мрежа тачака решетке, а $\vec{\mu} = \vec{1}, \vec{2}$ означава померај у $\vec{k}$-простору решетке. Варијабла везе представља комплексни фазни фактор са јединичним модуом, и дефинисана је преко целе БЗ-е осим у тачкама сингуларитета ($N_n(k_l) = 0$), које могу бити избегнуте инфинитезималним померајем мреже одабраних $\vec{k}$ тачака. Неопходно је да се стекну услови за отварање ЗЗ да би се усвојила наведена процедура и дефинисао Чернов број. Наредни корак је израчунавање снаге поља:

$$F_{12}(\vec{k}_l) = \ln(U_1(\vec{k}_l) U_2(\vec{k}_l + \vec{1}) U_1(\vec{k}_l + \vec{2})^{-1} U_2(\vec{k}_l)^{-1}), \quad -\pi < \frac{1}{i} F_{12}(\vec{k}_l) \leq \pi, \tag{4.17}$$

након чега се Чернов број одређене зоне може одредити помоћу израза:

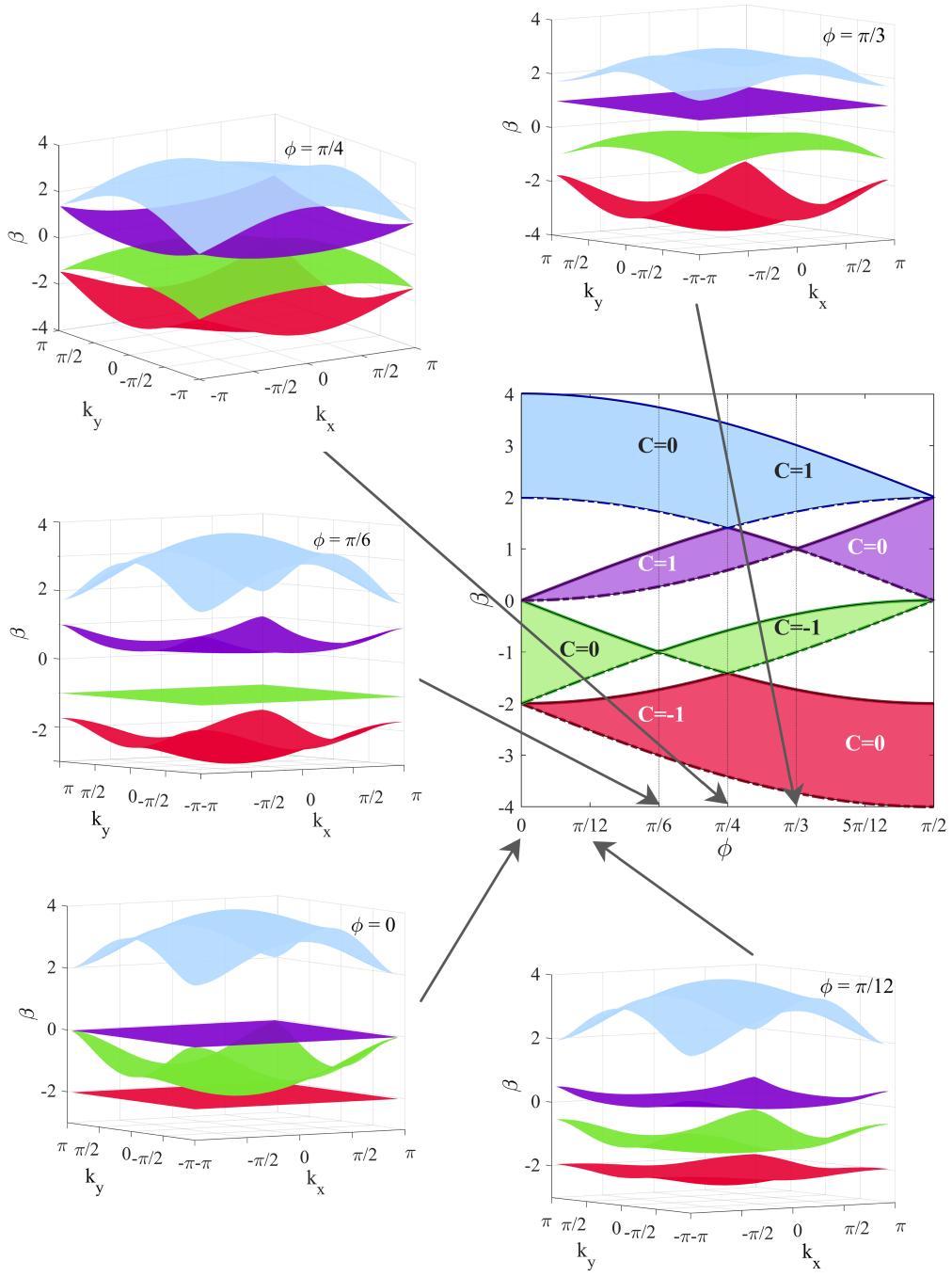
$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_l F_{12}(\vec{k}_l). \tag{4.18}$$

Чернов број C_n има увек целобројну вредност за произвољан корак мреже [145].

За карактеризацију тополошких особина ПЗ уведен је и параметар заравњења зоне, дефинисан као однос између минималне ширине ЗЗ (Δ) и ширине ПЗ (W): $F = \Delta / W$.

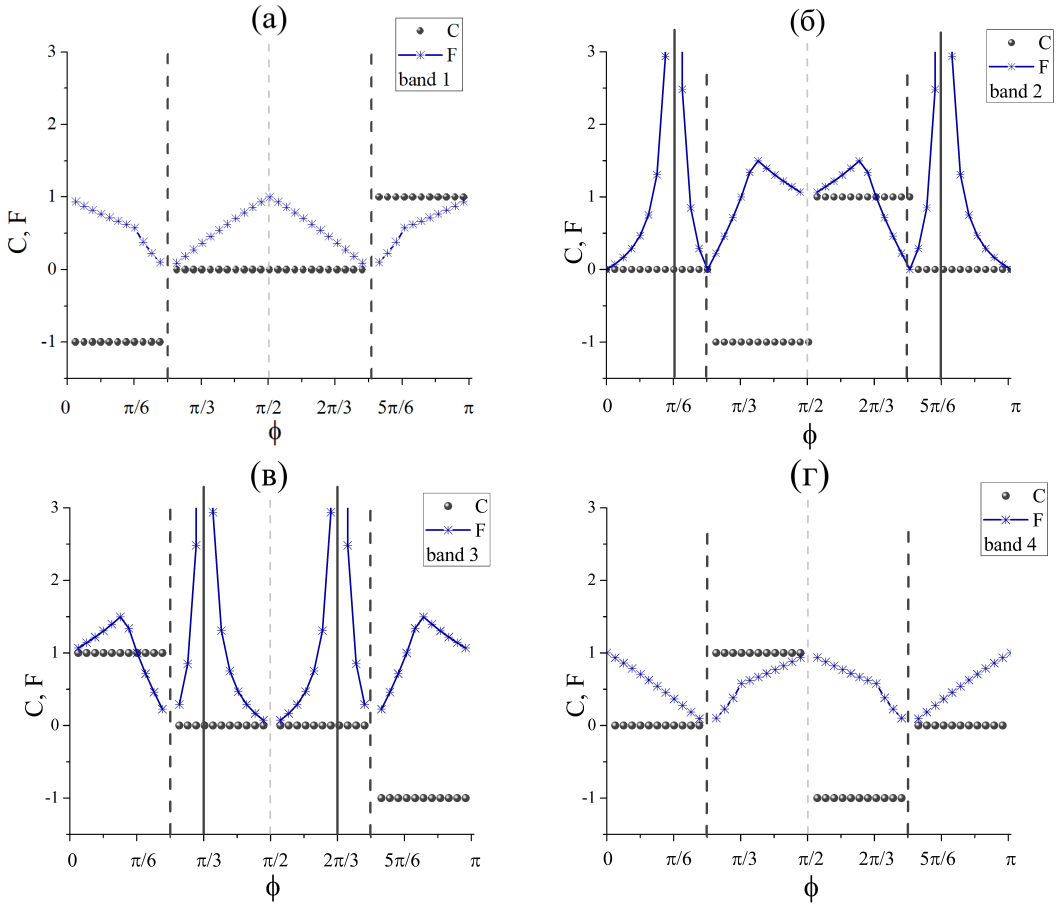
У одсуству флукса ($\phi = 0$) енергетски спектар се састоји од тополошки тривијалних зона, као што је приказано на слици 4.15: две зоне су потпуно дегенерисане РЗ на одговарајућим енергијама $\beta = 0$ и -2. Прва зона додирује угњеждену ДЗ на границама БЗ, а друга РЗ је додирује у центру БЗ; одговарајући пресеци који се јављају су конични и параболични, редом, слично као и у случају Либ и Кагоме решетке [146]. Стога закључујемо да су обе РЗ сингуларне са сингуларним тачкама пресека са ДЗ. Четврта зона је дисперзивна и одвојена од РЗ-ДЗ-РЗ триплета.

АБ модулација спрезања може да се повеже с тополошким фазним прелазом након отварања процепа при критичној вредности флукса, због нарушења временски-реверзибилне симетрије. Отварање процепа између РЗ и ДЗ унутар триплета, мењањем вредности флукса, приказано је на слици 4.15. Ово је праћено формирањем тополошких ивичних мода и нетривијалних тополошких зона с вредношћу $C = -1, 0, 1, 0$, респективно.



Слика 4.15: Зависност СВ β од вредности флукса ϕ и одговарајуће вредности Черновог броја за све четири зоне. Представљене су највећа (пуна линија) и најмања (испрекидана линија) вредност енергије за сваку вредност $\phi = [0, \pi/2]$ у линеарној апроксимацији. Уметнути графици представљају енергетске спектре $\beta(\boldsymbol{k})$ при одговарајућим (назначеним) вредностима флукса.

Ширина зоне и процеп могу бити процењени из кривих на слици 4.15 за свако ϕ, дајући тако вредности заравњања представљених на слици 4.16. Несингуларне, перфектне РЗ су окарактерисане вредношћу $F \gg 1$, док заравњење сингуларних РЗ није јединствено дефинисано јер представља однос две нулте вредности, што се дешава у случају зоне 1 и 2 за $\phi = 0$ а за зоне 3 и 4 при $\phi = \pi/2$, итд. С друге стране анулирање вредности F за коначну вредност W, указује на тачку пресека и може да помогне да се пронађе Диракова тачка као и тачке тополошког прелаза. На слици 4.16 последњи случај одговара вредностима $\phi = \pi/4$ и $3\pi/4$, што је назначено вертикалним испрекиданим линијама.



Слика 4.16: Вредности Черновог броја C и заравњења зона F у зависности од флукса ϕ за зоне: а) 1, б) 2, в) 3 и г) 4. Тачке тополошких прелаза $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ су означене испрекиданим линијама. Сингуларне РЗ јављају се за: $\phi = 0, \pi/2, \pi$, а несингуларне за: $\phi = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3$. Тополошки нетривијалне СРЗ могу се наћи у области између $\phi = 0$ и $\phi = \pi/6$.

Повећавањем вредности флукса уочен је триплет изолованих СРЗ (као на слици 4.15 за вредност $\phi \approx \pi/12$), који су окарактерисани коначном вредношћу F и Черновим бројевима $C = -1, 0, 1$. Четврта зона је тополошки тривијална ДЗ. За $\phi = \pi/6$ зона окарактерисана са $C = 0$ се трансформише у несингуларну савршену РЗ на $\beta = -1$. Даљим повећавањем флукса, зоне формирају два дублета у којима се ДЗ додирују на крајевима БЗ за $\phi = \pi/4$. До отварања новог процепа долази са даљим повећавањем вредности флукса, а затим се сценарио понавља. За $\phi = \pi/3$ постојаће

једна несингуларна РЗ на $\beta = 1$ и три ДЗ са $C = 0, -1, 1$, као што се може видети на слици 4.16. Када је $\phi = 5\pi/12$ постојаће три СРЗ са $C = -1, 0, 1$ и једна тривијална ДЗ. На крају, за $\phi = \pi/2$, јавиће се РЗ-ДЗ-РЗ триплет и једна одвојена ДЗ, с огледалском симетријом у односу на случај у одсуству флукса, са $C = (0, 1, 0, -1)$. Образац понашања спектра с повећањем флукса може се окарактерисати периодом $T_\phi = \pi$. Цео циклус је у вези са АБ модификацијом спрезања унутар дијамантске плочице повезане са октагоналним прстеновима у ОДР.

Свака линеарна комбинација фундаменталних компактона за одређену вредност флукса је такође својствено решење одговарајуће РЗ. Другим речима, скуп N^2 фундаменталних компактона, распоређених по узастопним јединичним ћелијама кроз решетку, формира компактну али не и ортогоналну базу у случају несингуларне РЗ. Да би се конструисала компактна база РЗ у случају сингуларне РЗ, скуп КЛМ-а мора бити допуњен скупом стања облика петље (структуре чији је крај повезан са почетком).

4.1.7 Компактно локализоване моде

Системи у чијем се спектру налазе у потпуности дегенерисане РЗ одликују се постојањем КЛМ. У ОДР која је третирана флуксом, савршене РЗ се формирају за вредности флукса $\phi_{RZ} = (m-1)\pi/6$, $m \in [1, 7]$ унутар основног периода. У случајевима $\phi = 0, \pi/2, \pi$ јављају се сингуларне РЗ, док су РЗ у случајевима када флукс има вредности између поменутих несингуларне.

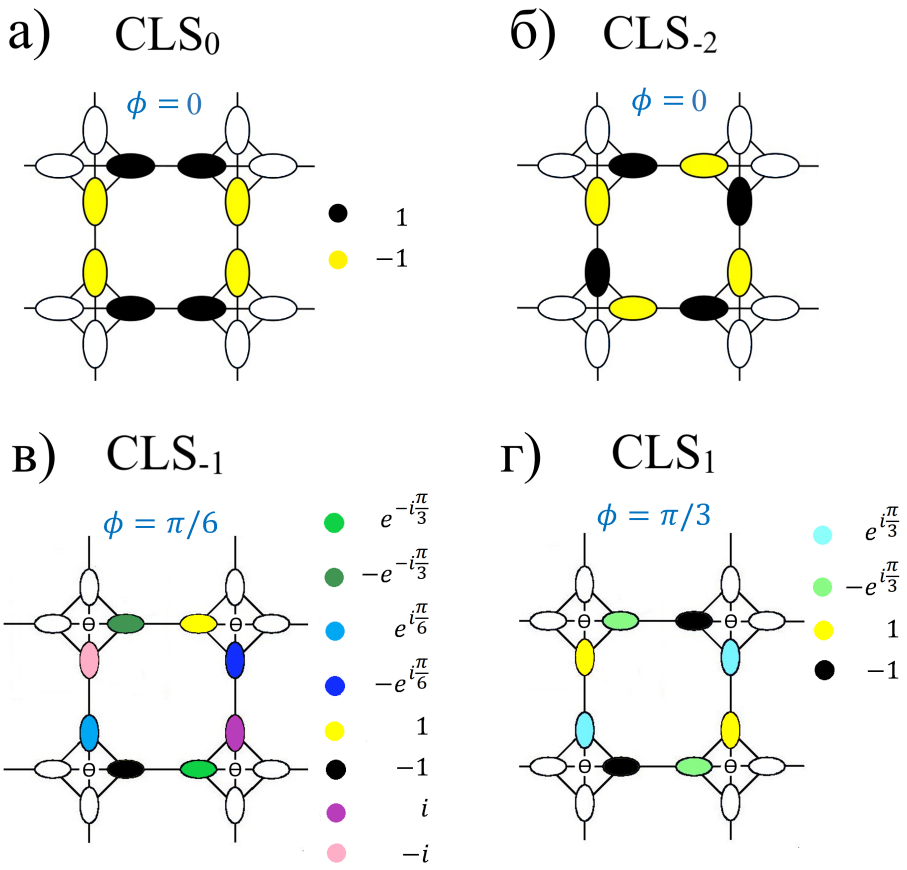
Фундаментални компактони, за одговарајуће вредности флукса, приказани су на слици 4.17. Компактони припадају класи $U = 4$, као и компактони ОДР која није третирана флуксом. Четири компактона су линеарно независна и могу се интерпретирати као различите реализације ентитета који карактерише амплитудно-фазна прерасподела између осам таласовода, одређена спрезањем које је моделовано флуксом унутар четири дијамантске плочице. При вредностима флукса $\phi = \phi_{RZ}$, АБ ефекат омогућава постојање деструктивне интерференције, односно појаву савршених РЗ и КЛМ.

Локална мала нелинеарност која се додаје директно на моде таласовода, нема ефекта на услове за постизање деструктивне интерференције, који су обезбеђени геометријом решетке, па самим тим не угрожава ни постојање КЛМ. Међутим, за одређене вредности параметара система, нелинеарност може да проузрокује нестабилност КЛМ, односно трансфер енергије КЛМ на Блохове таласе. Ефикасност мешања директно зависи од заравњења зоне, степена дегенерације, ширине процепа, присуства сингуларних тачака, јачине и типа нелинеарности.

Да би размотрили ефекат мешања (mixing), који настаје услед нелинеарности, на опстанак КЛМ, посматрали смо и покушали да квалификујемо динамички одговор КЛМ на развој нестабилности изазване нелинеарношћу. Такође, овај одговор може да се искористи и за карактерисање особина зоне, то јест да се пронађу "потписи"тополошких фазних прелаза. С друге стране, области параметара у којима су КЛМ стабилне, дозвољавају да се оне искористе као поуздани носиоци информација у уређајима заснованим на фотонским решеткама.

За квантификацију стабилности моде посматрана је еволуција партиципационог броја, који се израчунава еквивалентно као и у случају ОДР без флукса помоћу једначине 4.11; и који је у случају хомогених мода једнак броју таласовода на којима

је КЛМ локализована.



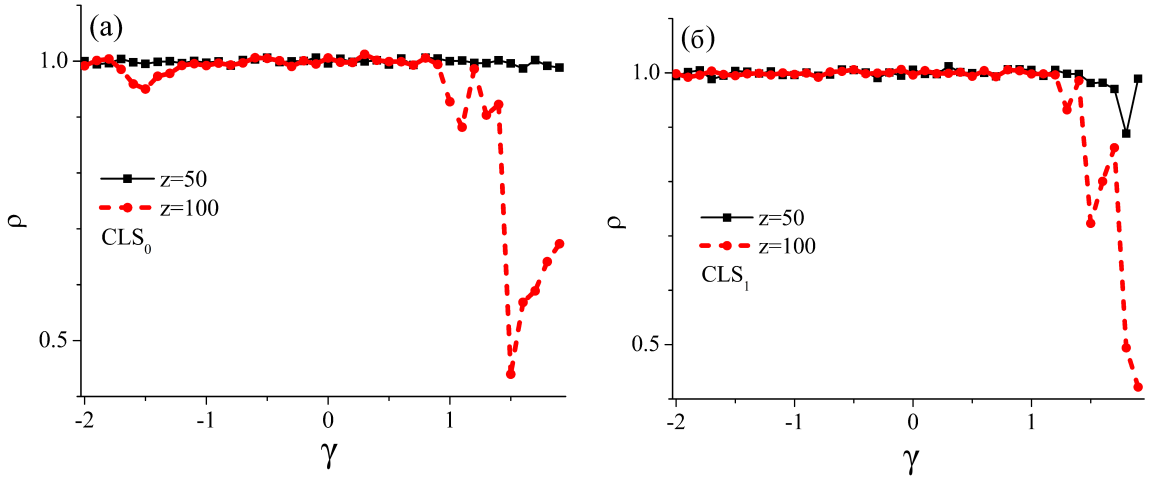
Слика 4.17: Фундаментални компактони за: (а) $\phi = 0$, $\beta = 0$ (CLS_0), (б) $\phi = 0$, $\beta = -2$ (CLS_{-2}), (в) $\phi = \pi/6$, $\beta = -1$ (CLS_{-1}), and (г) $\phi = \pi/3$, $\beta = 1$ (CLS_1).

Додатне информације о постојаности КЛМ су добијене израчунавањем нормализоване величине преклапања поља ρ:

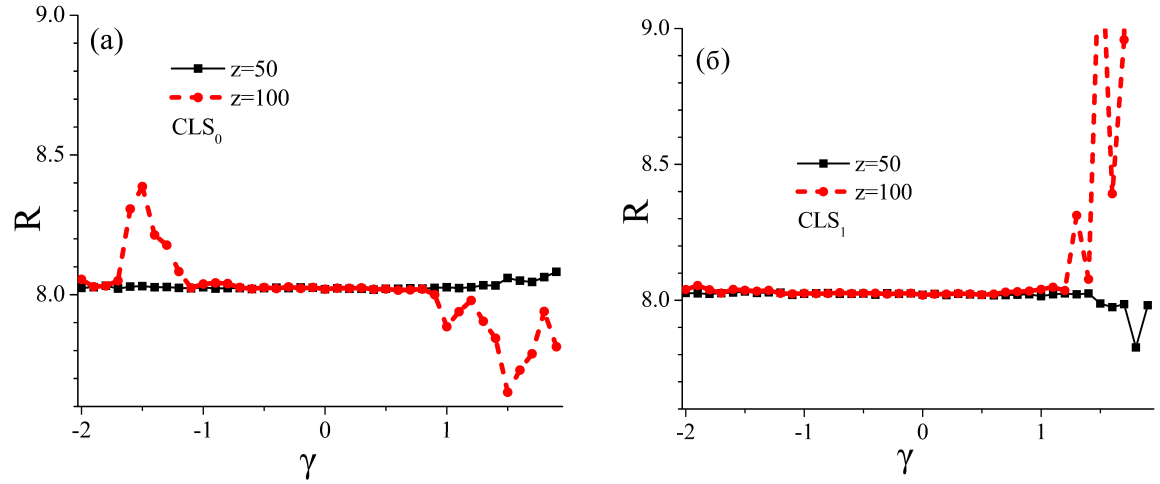
$$\rho(z) = | < \psi(z)|\psi(0) > |^2, \tag{4.19}$$

где $|\psi(z) >$ и $|\psi(0) >$ означавају $4N^2$-димензионо векторско поље чије су компоненте заправо амплитуде мода на таласоводима решетке на растојањима z и $z = 0$, редом. Одступање преклапања поља од јединице означава ниво интеракције КЛМ с окружењем и може бити у вези с губитком њене стабилности.

Да би се окарактерисала почетна фаза развоја нестабилности КЛМ, примењена је ЛАС, аналогна процедури примењеној у одељку 4.1.2. Међутим, резултати примене ЛАС, која је апроксимативна метода за анализу стабилности и директних нумеричких симулација нису били идентични. Разлог за одступања може се повезати са чињеницом да КЛМ у овом случају, представљају тзв. решења са нетривијалном структуром. С друге стране ЛАС може разјаснити својства стабилности тзв. неструктуираних мода као што су нпр. нелинеарне Блохове моде.



Слика 4.18: Преклапање поља ρ за нелинеарне CLS_0 и CLS_1 типове компактона, који припадају РЗ при $\phi = 0$ и $\phi = \pi/3$, респективно. Црном је означено ρ у $z = 50$, а црвеном у $z = 100$.



Слика 4.19: Партиципациони број R за нелинеарне CLS_0 и CLS_1 типове компактона, који припадају РЗ при $\phi = 0$ и $\phi = \pi/3$, респективно. Црном је означено R у $z = 50$, а црвеном у $z = 100$.

Динамика нелинеарних компактно локализованих мода

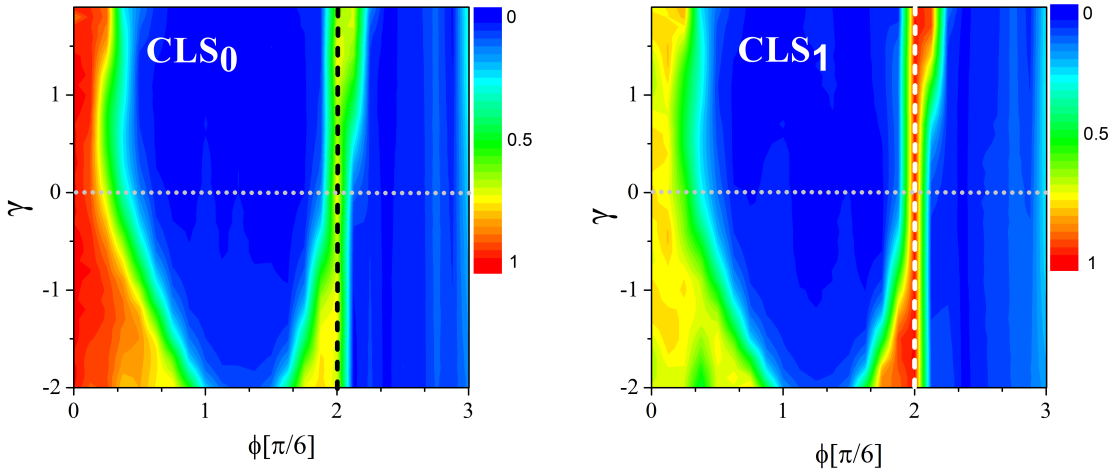
Линеарна ОДР са флуксом може се интерпретирати као фотонски систем управљан флуксом код које се облик и структура зона мења, тако да пролази кроз: фазу коју карактерише савршена РЗ (са нултим Черновим бројем), фазу тополошки нетривијалних СРЗ, фазу процепом одвојене перфектне РЗ (нулти Чернов број), и тако даље. Пун циклус се затвара након промене $\Theta = 2\pi$ када је зонска структура огледалски симетрична зонској структури с почетка, односно оној у одсуству флукса. Ово

управљање омогућује нови степен слободе (повезан с фазом). У овом приступу, КЛМ с 8 таласовода представљаће својеврсне "опсервабле", јер ће се било каква промена зонске структуре иницирана променом флукса одразити на унутрашњу расподелу фаза КЛМ. За вредности флукса $\phi = s\pi/6$, где је s целобројна вредност, омогућени су услови за појаву АБ ефекта и формирање компактона с фазном раподелом као на слици 4.18. Формално се може рећи да су осмоугаони прстенови компактона један објекат у различитим фазним стањима, која настају под утицајем флукса.

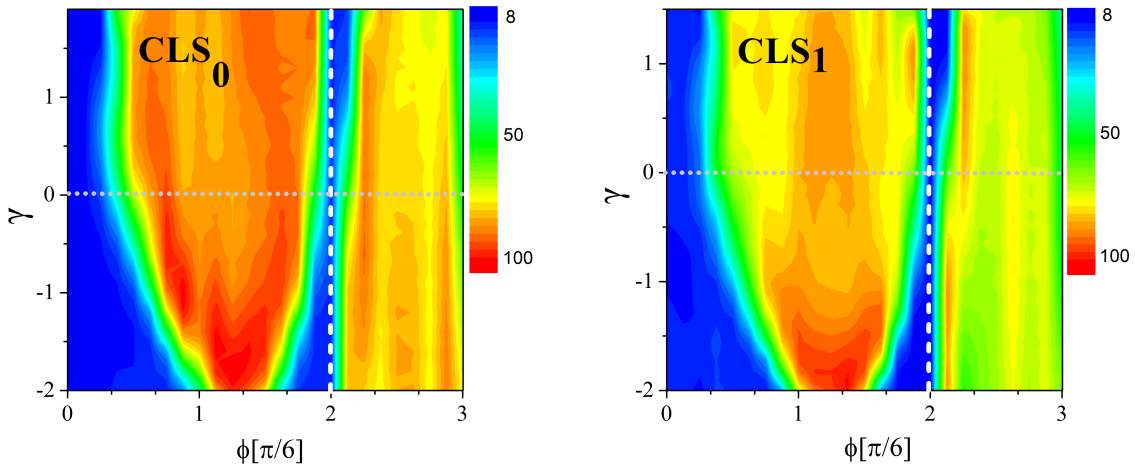
Приступ, који је овде примењен, се заснива на простирању изабране КЛМ структуре кроз нелинеарну решетку. Користећи Рунге-Кута процедуру 6. реда, симулирали смо пропагацију КЛМ кроз коначну решетку са периодичним и отвореним граничним условима. Неизбежни шум у реалистичним мрежама таласовода је нумерички моделован додавањем униформне случајне пертурбације на амплитуде и фазе мода, на почетку симулације [147]. Резултати приказани у наставку су добијени за максималну вредност случајне пертурбације амплитуде поља реда 0,01. Да би се разјаснила динамика мода и посредно објаснила својства зонског спектра решетке, коришћени су партиципациони број R и преклапање поља ρ.

Динамичка својства фамилија НЛКЛМ не показују квалитативне особености у погледу типа/фазе стања КЛМ. Објашњење робусности КЛМ лежи у зависности од више параметра (параметри: знак и снага нелинеарности; ширина ПЗ; ширина процепа; заравњеност). Ако је снага нелинеарности довољно мала да не затвори процеп између изоловане РЗ и најближе ДЗ (доња зона при $\phi = \pi/6$ (CLS_{-1}) или горња зона при $\pi/3$ (CLS_1)) НЛКЛМ биће веома робусна, показујући занемарљиве промене у ρ и R, као што је показано на сликама 4.18 и 4.19. Промене обе величине уочене за CLS_1 у присуству нелинеарности оба типа и $|\gamma| < 1$ показују стабилну/слабо нестабилну пропагацију. Повећањем јачине дефокусирајуће нелинеарности $\gamma > 1$ драматичне промене у R указују на значајан губитак енергије током пропагације и уништавање КЛМ. Са друге стране, у области фокусирајуће нелинеарности $\gamma < -1$ облик CLS_1 је очуван током пропагације након прерасподеле своје енергије са суседним таласоводима, као што се може видети на профилима ρ и R на сликама 4.18 и 4.19. Што се тиче нелинеарног CLS_0 еквивалента, који потиче из сингуларне РЗ, и уједно је члан робусног РЗ-ДЗ-РЗ триплета који је одвојен од друге ДЗ, мешање изазвано нелинеарношћу утиче на преклапање мода за $|\gamma| > 1$ у случају дефокусирајуће нелинеарности, што се може потврдити профилом ρ за CLS_0, слика 4.18 (а). Са повећањем дужине простирања уочена је промена вредности R у целој области $|\gamma| > 1$ али с максималним релативним одступањем реда 1%. Повећање ($\gamma < -1$) или смањење ($\gamma > 1$) R може бити повезано са повећањем или смањењем броја 'побуђених' таласовода решетке, респективно. У последњем случају формира се снажније локализовано стање него што је почетна КЛМ.

Разлог за различито понашање R током пропагације нелинеарних CLS_0 и CLS_1 мода може се повезати са повећаном робусношћу структуре с фазном расподелом унутар CLS_1 у односу на расподелу унутар CLS_0 у присуству фокусирајуће нелинеарности. Такође, у области $\gamma > 1$ уочене су драматичније промене у случају CLS_1 у поређењу са онима за CLS_0. Еквивалентни закључци добијени су за компактна стања CLS_{-2} и CLS_1. Ове промене нису у потпуности у складу са стопом раста нестабилности у раним фазама нестабилности КЛМ добијених помоћу ЛАС. Ова неслагања можемо довести у везу са особеношћу мода које потичу из високо дегенерисаних зона (као што су РЗ).



Слика 4.20: Магнитуда преклапања поља $\rho = | < \psi(z = 50)|\psi(0) > |^2$ у параметарском простору (ϕ, γ) за CLS_0 и CLS_1 нелинеарне компактне моде. Вертикалне испрекидане линије означавају позицију $\phi = \pi/3$, док хоризонтална тачкаста линија указује на случај $\gamma = 0$. Црвене области одговарају $\rho = 1$, тј. стабилној (слабо нестабилној) пропагацији НЛКЛМ.



Слика 4.21: Партиципациони број R у параметарском простору (ϕ, γ) за CLS_0 и CLS_1 нелинеарне компактне моде. Вертикалне испрекидане линије означавају позиције $\phi = \pi/3$, док хоризонтална тачкаста линија указује на случај $\gamma = 0$. Тамно плаве области одговарају стабилној (слабо нестабилној) пропагацији НЛКЛМ.

Исправно тумачење понашања у областима неутралне/маргиналне стабилности које је пријавила ЛАС у тим случајевима захтева анализу пертурбације вишег реда, односно потпуно нелинеарни приступ. Закључујемо да генерално за експериментално релевантне параметре КЛМ губе занемарљиву енергију предајући је позадини решетке у присуству слабе нелинеарности и случајне пертурбације. Разлог је доминација АБ ефекта над слабим мешањем стања зона изазваног нестабилношћу коју узрокује нелинеарност. С повећањем јачине нелинеарности, нелинеарно мешање између и унутар зона постаје јаче, што се одражава на динамику мода. Треба имати на уму да нормализовано растојање $z \leq 100$ одговара експериментално изводљивим дужинама простирања. Примећено је да природа структурисаног снопа КЛМ обезбеђује побуђивање ширег региона таласних вектора, који у почетку има КЛМ, од региона који би побудио раван талас. Развијањем нестабилности изазване нелинеарношћу, проширује се опсег побуђеног региона таласних вектора, што омогућава да они попуне целу РЗ, која истовремено престаје да буде перфектна РЗ. Ово отвара могућност за коришћење КЛМ за скенирање тополошких својстава зона у случајевима система чији су спектри окарактерисани СРЗ. Другим речима, велика површина зоне ће већ бити побуђена почетним стањем, што потенцијално омогућава да се Чернов број мери за краћа растојања простирања него у случају с побудом у опсегу коју покреће равни талас (нелинеарни Блохов режим) [85].

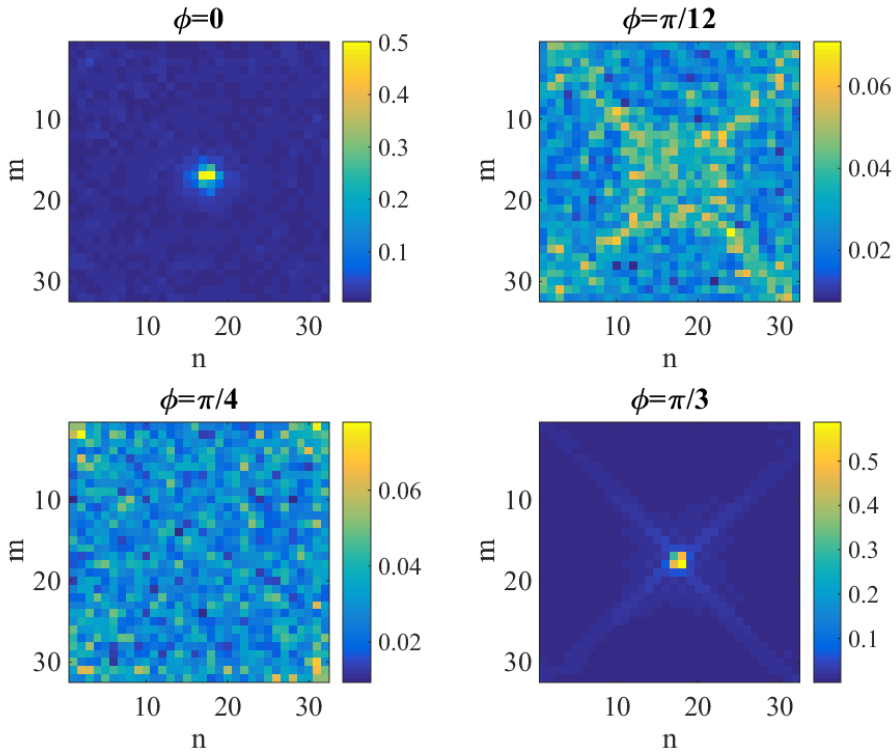
Утицај вештачког флукса на компактно локализоване моде

Даље је испитиван одговор НЛКЛМ на промене флукса (јачину спрезања). Начин на који се КЛМ прилагођавају спољашњем утицају - промени флукса може отворити нове перспективе у погледу примене КЛМ у контролисаном транспорту енергије/информација у фотонским решеткама.

Генерално, КЛМ су веома осетљиве на било какву промену флукса као што је приказано на сликама 4.20 и 4.21. Вредност преклапања поља и партиципационог броја на $z = 50$ у простору параметара (ϕ, γ) приказане су за еквивалент CLS_0 у нелинеарној решетки, која потиче од $\beta = 0, \phi = 0$ РЗ, и нелинеарне CLS_1 која потиче из $\beta = 1, \phi = \pi/3$ РЗ. Промена флукса раздешава услове за савршен АБ ефекат променом фазе компоненти поља унутар октагоналне КЛМ, и омогућава расипање енергије мода на остатак решетке. Максимално преклапање поља и партиципациони број $R = 8$ за CLS_0 догађа се за $\phi = 0$, односно $\phi = \pi/3$ када се ради о CLS_1. Генерално, брзина размене енергије ће бити највећа у околини критичних тачака за све КЛМ, што потврђују ρ и R својим понашањем за $\phi = \pi/4$ ($\rho \to 0$ и $R \to 100$) (плава и црвена подручја, респективно) на сликама 4.20 и 4.21.

Занимљиво је да смо променом флукса приметили могућност за поновно успостављање робусности КЛМ у областима ϕ_{FB}, тј. $\phi = \pi/3$ и $\phi = 0$ за НЛКЛМ типа CLS_0 и CLS_1, респективно, у присуству нелинеарности слабе (и умерене) снаге (случајеви приказани овде). Другим речима, пропагирајућа НЛКЛМ типа CLS_0, приказана на слици 4.17, се поново "ухвати"на почетни осмоугаони прстен за вредност $\phi = \pi/3$. Одговарајућа вредност преклапања поља је $\rho(z = 50) \approx 0,7$. Вредност партиципационог броја је $R \approx 12$ (док је на почетку била $R = 8$) и указује на ограничено ширење КЛМ за дужину простирања $z = 50$. Еквивалентна ситуација се дешава са НЛКЛМ типа CLS_1 (својствена мода РЗ за $\phi = \pi/3$), која враћа свој интегритет након пребацивања флукса на вредност $\phi = 0$, где су компактони CLS_0 и CLS_{-2} стабилни у линеарном случају. Вредност $\rho \approx 0,6$ $(0,7)$ указује на ефикастност обнављања енер-

гије на почетној позицији осмоугаоне КЛМ. Партиципациони број R је приближно 1,2 пута већи од почетног. Робусност КЛМ у односу на промену вредности флукса се може видети на слици 4.22 која приказује укупан интензитет мода при одређеним z за неколико изабраних вредности флукса. Укрштање флукса и нелинеарности чини КЛМ обећавајућим алатом за контролу транспорта енергије кроз решетку и испитивање структуре зона основне решетке.

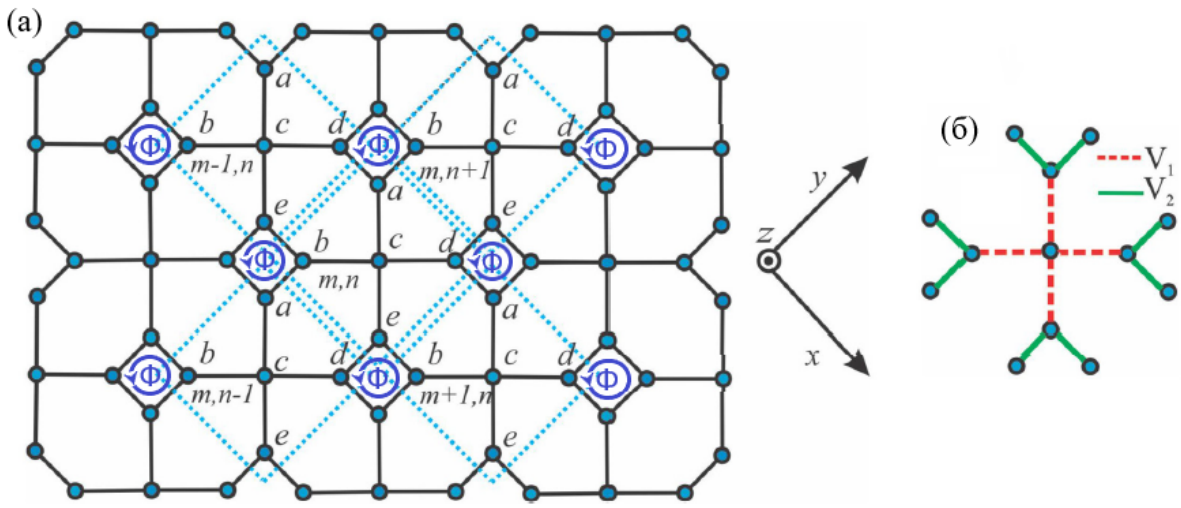


Слика 4.22: Расподела укупног интензитета у реалном простору на крају симулације за компактоне типа CLS_1 за различите вредности флукса, при нелинеарности $\gamma = 1$.

4.2 Локализоване моде у плус решетки

У овом случају проучавали смо фотонску линеарну 2Д ПР у одсуству и присуству вештачког флукса и истраживали утицај вештачког калибрационог поља на енергетски спектар. У оба случаја испитиван је утицај нелинеарности на локализоване моде. Решетка се експериментално може направити уписивањем помоћу фемтосекундног ласера или у случају постојања вештачког флукса, решеткама сачињеним од спрегнутих резонатора и погодно модификованих спрезања између таласовода. Геометрија решетке први пут је предложена у раду [148]. Утврђено је да се енергетски спектар одговарајуће линеарне решетке састоји од једне потпуно дегенерисане РЗ, постављене између две унутрашње и две спољашње ДЗ. Истражили смо својства линеарних и нелинеарних КЛМ, пре свега њихову стабилност. Затим смо у раду [149] истраживали утицај вештачког калибрационог поља на линеарну, униформну решетку налик ПР, узимајући да се униформним флуксом третира свака дијамантска плочица. АБ ефекат је изазвао појаву РЗ и за одређене вредности флукса, спектар решетке је описан с две независне од момента, потпуно дегенерисане РЗ и три ДЗ. Добијена су три различита типа фундаменталних неортогоналних компактона. Налази представљени овде могу се тестирати у пракси и могу се користити за испитивање различитих вештачких РЗ система.

4.2.1 Модели плус решетке нетретиране и третиране флуксом



Слика 4.23: (а)Шематски приказ 2Д ПР са вештачким флуксом. Јединичне ћелије оивичене су испрекиданим линијама. (б) Шематски приказ спрезања у систему.

Геометрија ПР приказана је на слици 4.23. У присуству калибрационог поља које индукује вештачки флукс ϕ, јединична ћелија ове решетке може се представити као структура која се састоји од пет таласовода обележених с a, b, c, d, e, па се амплитуде мода које посматрамо обележавају сходно местима где су моде локализоване: $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}, e_{m,n}$ с нумерацијом јединичних ћелија $m \in [1, M]$ и $n \in [1, N]$. Унутар решетке таласоводи су спрегнути са одговарајућим коефицијентима спрезања V_1 и V_2 на два начина, с три (a, b, d и e) или с четири суседна таласовода (c).

Када су ова два спрезања једнака, параметар $t = V_1 = V_2$ представља параметар спрезања. Дијамантске плочице се могу третирати флуксом ϕ, чиме се спрезања таласовода a, b, c, d и e модификују и постају комплексне величине $te^{i\frac{\phi}{4}}$. У случају када се решетка не третира флуксом, довољно је у једначинама модела ставити вредност $\phi = 0$.

У присуству флукса, уз коришћење апроксимације слабог спрезања, простирање светлости кроз ПР се може моделовати скупом 5MN спрегнутих диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}
i\dot{a}_{m,n} &+ V_2(b_{m+1,n}e^{i\frac{\phi}{4}} + d_{m-1,n}e^{-i\frac{\phi}{4}}) + V_1 c_{m,n} = 0,\\
i\dot{b}_{m,n} &+ V_2(a_{m,n-1}e^{-i\frac{\phi}{4}} + e_{m-1,n}e^{i\frac{\phi}{4}}) + V_1 c_{m,n} = 0,\\
i\dot{c}_{m,n} &+ V_1(a_{m,n} + b_{m,n} + d_{m,n} + e_{m,n}) = 0,\\
i\dot{d}_{m,n} &+ V_2(a_{m+1,n}e^{i\frac{\phi}{4}} + e_{m,n+1}e^{-i\frac{\phi}{4}}) + V_1 c_{m,n} = 0,\\
i\dot{e}_{m,n} &+ V_2(b_{m+1,n}e^{-i\frac{\phi}{4}} + d_{m,n-1}e^{i\frac{\phi}{4}}) + V_1 c_{m,n} = 0,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

при чему се диференцирање врши по пропагационој координати z, а вредности коефицијената спрезања су V_1 и V_2. Стационарна решења могу се представити у форми Блохових таласа: $\{a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}, e_{m,n}\} \sim \{A, B, C, D, E\}e^{i(k_x m + k_y n)}e^{-i\beta z}$, где је β пропагациона константа. Хамилтонијан ПР третиране флуксом (као и нетретиране, када је $\phi = 0$), у реципрочном простору решетке може се, затим, представити у облику:

$$H = \begin{bmatrix}
0 & V_2 e^{ik_y}e^{i\frac{\phi}{4}} & V_1 & V_2 e^{-ik_x}e^{-i\frac{\phi}{4}} & 0\\
V_2 e^{-ik_y}e^{-i\frac{\phi}{4}} & 0 & V_1 & 0 & V_2 e^{-ik_x}e^{i\frac{\phi}{4}}\\
V_1 & V_1 & 0 & V_1 & V_1\\
V_2 e^{ik_x}e^{i\frac{\phi}{4}} & 0 & V_1 & 0 & V_2 e^{ik_y}e^{-i\frac{\phi}{4}}\\
0 & V_2 e^{ik_x}e^{-i\frac{\phi}{4}} & V_1 & V_2 e^{-ik_y}e^{i\frac{\phi}{4}} & 0
\end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

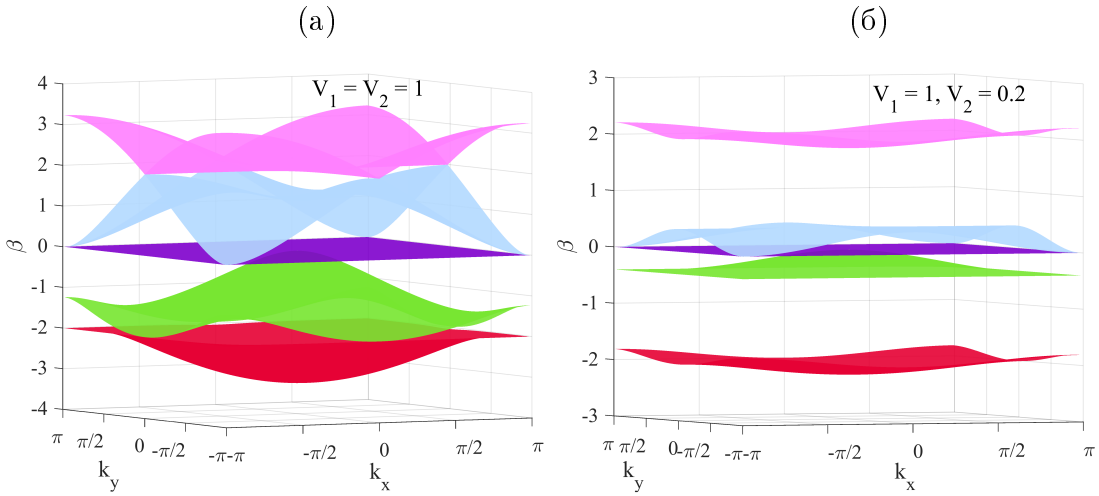
где су k_x, k_y компоненте трансверзалног Блоховог 2Д таласног вектора $\vec{k}$.

4.2.2 Утицај вредности константе спрезања на енергетски спектар решетке

Енергетски спектар униформне ПР $V_1 = V_2 = V = 1$, у одсуству флукса, окарактерисан је централном РЗ на $\beta = 0$, која је угњеждена између две ДЗ, које су пак повезане Дираковим тачкама, с још по једном, огледалски симетричном ДЗ, као на слици 4.24 лево. Недисперзивна РЗ додирује горњу ДЗ у четири тачке $(k_x, k_y) = (\pm\pi, \pm\pi)$. РЗ такође, додирује горњу ДЗ у тачки $(k_x, k_y) = (0, 0)$. За оба пара ДЗ карактеристично је да се додирују у четири тачке $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi), (\pm\pi, 0)$.

На слици 4.24 десно, можемо видети енергетски спектар димеризоване решетке, у случају када је $V_1 = 1, V_2 = 0.2$. Параметар спрезања се може контролисати или истовременом променом растојања између четири периферна елемента примитивне ћелије и централног таласовода или варирањем размака између суседних примитивних ћелија. Додатно подешавање слабе спреге између суседних елементата решетке може се постићи променом елиптичности таласовода. Одговарајући спектар СВ димеризоване решетке карактеришу: угњеждена РЗ између две суседне унутрашње ДЗ

које су јасно одвојене од спољашње две ДЗ. Показало се да димеризацијом решетке није могуће раздвојити овај ДЗ-РЗ-ДЗ триплет. У димеризованој плус решетки су пронађена три квалитативно различита типа локализованих мода: КЛМ, које потичу од геометријски индуковане деструктивне интерференције, НЛКЛМ и нелинеарне дишуће моде. НЛКЛМ су, фигуративно, припадници фамилије КЛМ из линеарне решетке, који су осетљиви на нелинеарне пертурбације (или било које врсте пертурбација) због робусне везе са ДЗ преко Диракових тачака. Последица пресецања зона је нестабилност НЛКЛМ која је обично повезана са резонантном интеракцијом са нелинеарнин модификованим модама ДЗ. Нелинеарним модама углавном управља механизам локализације самозаробљавања који је изазван и вођен нелинеарношћу. Међу нелинеарним модама можемо разликовати дискретне солитонске моде у ПБЗЗ, који су последица апроксимације јаког спрезања, и моде унутар уских ЗЗ које су отворене између унутрашњих и периферних ДЗ посредством димеризације. Грубо речено, нелинеарност повлачи моде из ДЗ у ЗЗ, захваљујући чему настају локализоване дишуће моде.

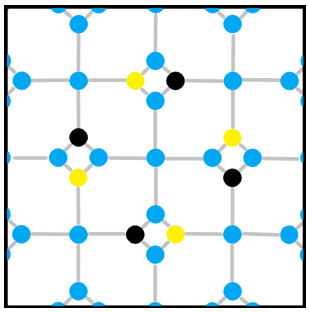


Слика 4.24: Енергетски спектар за (а) униформну и (б) димеризовану решетку.

4.2.3 Компактно локализоване моде и утицај нелинеарности

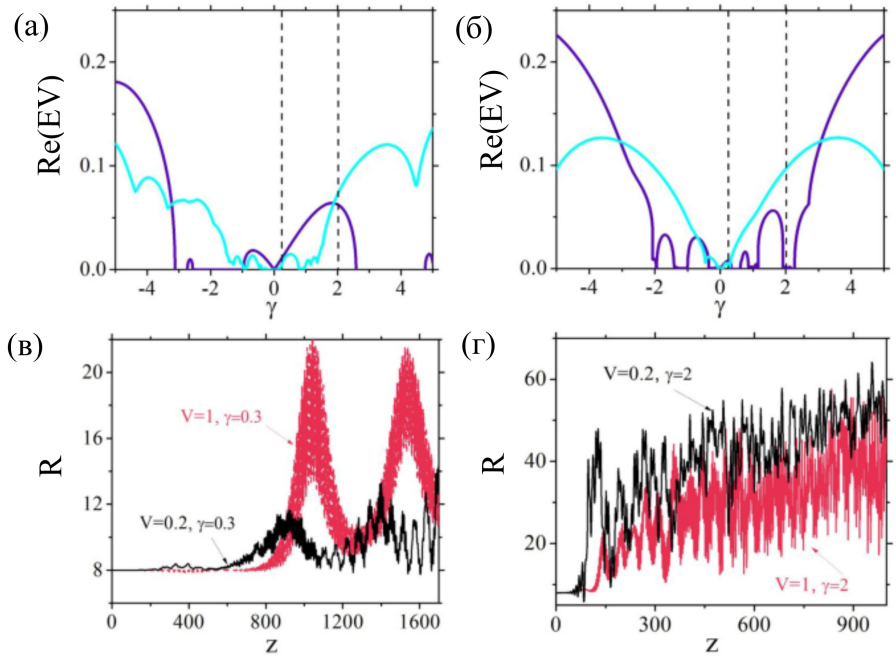
Изглед компактонске моде ПР, у одсуству флукса, која припада РЗ на $\beta = 0$, приказан је на слици 4.25. Компактон заузима пет јединичних ћелија, па припада класи компактона $U = 5$. У свакој јединичној ћелији налазе се два таласовода која чине компактон, осим у централној, која је празна. Вредности амплитуде, идући у смеру казаљке на сату смењују се као вредности $+1$ и -1, односно међу свака два суседна таласовода постоји фазна разлика од π. Све линеарне комбинације ове компактонске моде, такође су решења која се могу придружити поменутој РЗ ПР решетке.

Стабилност КЛМ је проверена помоћу ЛАС и директних симулација простирања мода у присуству малих пертурбација. Поменуте директне нумеричке симулације су засноване на Рунге-Кута методи шестог реда. У ту сврху, праћена је еволуција партиципационог броја.



Слика 4.25: Расподела амплитуда компактонске моде C0. Плавом бојом обележени су таласоводи нулте амплитуде; црном таласоводи с амплитудом -1, а жутом таласоводи с амплитудом 1.

Генерално, компактонске моде су веома осетљиве на присуство било какве пертурбације. Овде је испитан утицај нелинеарности на КЛМ, који је повезан с механизмом модулационе нестабилности. Како је енергетски спектар окарактерисан ДЗ-РЗ-ДЗ триплетом, односно постоји пресецање РЗ са две ДЗ, интересантно је испитати како ће нелинеарност утицати на КЛМ. Због пресецања с ДЗ, РЗ губи на дегенерацији и због резонантних интеракција с ДЗ модама, КЛМ се лако могу трансформисати у НЛКЛМ.



Слика 4.26: ЛАС за НЛКЛМ за: (а) униформни случај, (б) димеризовану решетку. Љубичастом бојом обележене су чисто реалне СВ, а цијан плавом реални делови комплексних СВ у решетки димензија 5x5. Еволуција партиципационог броја R за различите вредности нелинеарности, дата је на сликама (в) за $\gamma = 0,3$ и (г) $\gamma = 2$. Испрекидане линије на графицима (а) и (б) означавају вредности γ за које је приказана еволуција на графицима (в) и (г).

У присуству Керове нелинеарности, опстаје компактон C0 из линеарне РЗ. Он остаје компактан, односно његов облик остаје очуван. Снага НЛКЛМ је директно повезана с параметром нелинеарности односом $P = 8\gamma|A|^2$, која је, због погодности у прорачунима нормализована на 1. Амплитуде НЛКЛМ на побуђеним таласоводима су $|A|^2 = -\beta/\gamma$. ЛАС и директне симулације показују да су ове нелинеарне моде нестабилне. Развојем нестабилности управља снага нелинеарне пертурбације. Нелинеарност, било фокусирајућа ($\gamma > 1$) или дефокусирајућа ($\gamma < 1$), уводи померање константе пропагације ка негативној или позитивној вредности β, редом. Резултати ЛАС у униформним и димеризованим случајевима су укратко приказани на слици 4.26 (а) и (б). Чисто реална својствена вредност, тј. експоненцијална нестабилност, чак и за веома слабе НЛ, праћена је појавом квартета комплексних СВ с реалним делом различитим од нуле, тј. примећена је и осцилаторна нестабилност. Нестабилност овде може бити директно повезана с резонантном интеракцијом између НЛКЛМ и неком од "дишућих"мода која потиче из ДЗ између којих је угнеждена РЗ. Овде треба нагласити и да је РЗ првобитно била повезана са ДЗ преко пет Диракових тачака, па није могуће разлучити које интеракције засигурно доводе до нестабилности, јер нелинеарност истовремено делује на целу структуру.

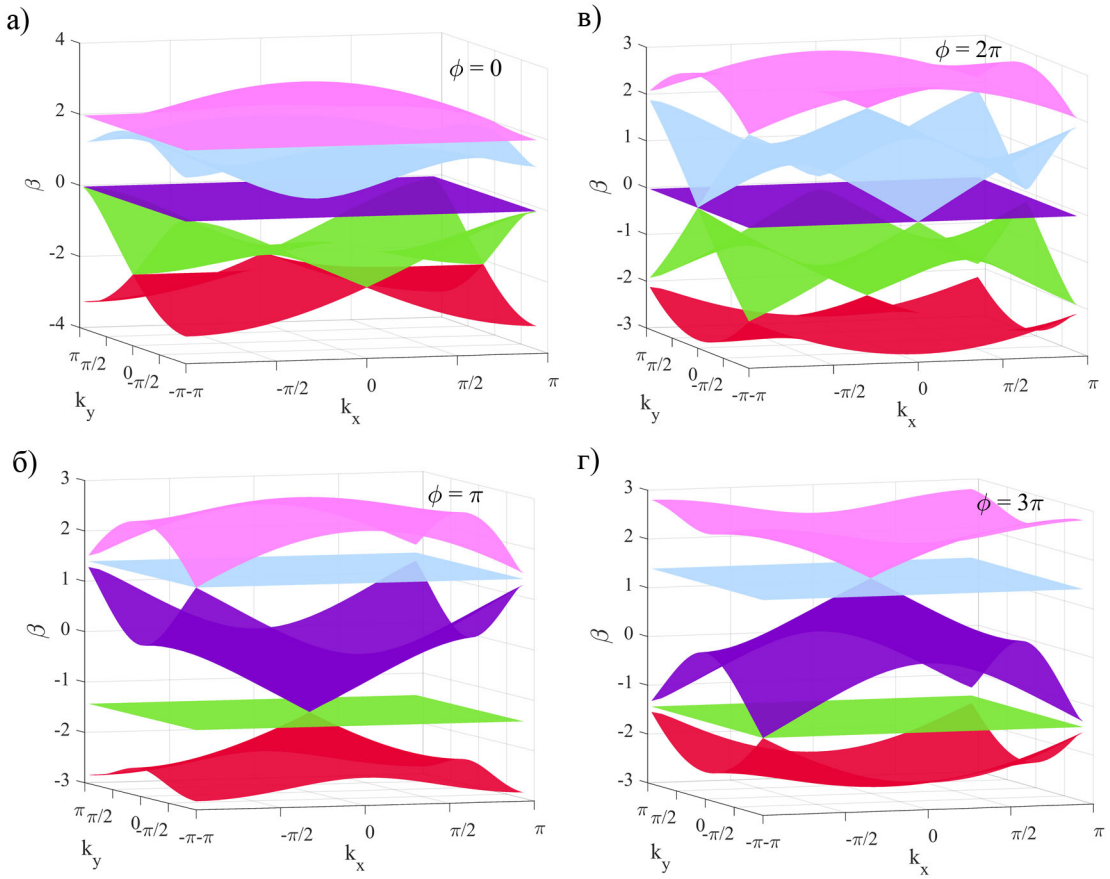
Динамичке симулације показују да се иницијална нестабилност НЛКЛМ може квантификовати преко стопе раста нестабилности добијене помоћу ЛАС. Ово је илустровано приказом еволуције партиципационог броја R у униформној и димеризованој решетки, на слици 4.26 (в) и (г), односно за одређене вредности параметра нелинеарности (вертикалне испрекидане линије на слици 4.26 (а) и (б)). У присуству слабе нелинеарности, компактон проводи дуго времена заробљен на својим почетним таласоводима, пре него што дође до његовог ширења на остатак решетке, услед интеракције с дишућом модом која потиче из ДЗ. С друге стране, јака нелинеарност изазива интеракције између мода у решетки, и доводи до брзог развоја нестабилности компактона. Сходно томе, раст R и у димеризованом и униформном случају ће бити мањи у присуству слабе нелинеарности као што је $\gamma = 0,3$, слика 4.26 в), у поређењу с растом у случају јаке нелинеарности $\gamma = 2$, слика 4.26 (д). Након почетне фазе развоја нестабилности динамиком моде управљају интеракције између различитих побуђених мода у систему, које су изазване нелинеарношћу, што се одражава на понашање R. Са повећањем нелинеарности, пропагирајућа мода расипа више енергије на остатак решетке и ступа у интеракцију с новопобуђеним стањима.

4.2.4 Утицај флукса на енергетски спектар решетке

На даље је проучаван утицај вештачког калибрационог поља (односно вештачког флукса) на енергетски спектар ПР. Једначине (4.20), при $V_1 = V_2 = t = 1$ и $\phi \neq 0$, одговараће разматраном проблему. Испоставило се да ће АБ ефекат довести до појаве РЗ и за одређене вредности флукса енергетски спектар решетке биће описан са две потпуно дегенерисане РЗ и три ДЗ. За поменуте РЗ, при одговарајућим вредностима флукса, пронађена су три различита типа фундаменталних неортогоналних компактона.

Као што је показано у претходном одељку, у одсуству флукса, енергетски спектар униформне решетке има једну потпуно дегенерисану РЗ која је центрирана на $\beta = 0$ и смештена између две унутрашње и две спољашње, огледалски симетричне ДЗ, слика 4.27 а). Увођењем флукса, ϕ, и променом његове вредности од $[0, \pi]$, утиче

се на енергетски спектар, као што је илустровано на слици 4.27 б), в), г). Услед АБ ефекта, долази до појаве две РЗ-не у одговарајућем енергетском спектру, при вредностима $\phi = w\pi$, где је w непаран број. За $\phi = \pi$, спектар решетке описан је с две потпуно дегенерисане РЗ и три ДЗ. Горња РЗ је повезана с две ДЗ у једној тачки ($|k_x| = -\pi, |k_y| = -\pi$), док је доња РЗ повезана с две ДЗ у центру БЗ ($k_x = k_y = 0$). У зонској структури која је пронађена за $\phi = 3\pi$ такође разликујемо две РЗ и три ДЗ. Та структура је огледалски симетрична у односу на x осу зонској структури за $\phi = \pi$. За $\phi = 2\pi$, пет својствених енергија линеарног Хамилтонијана формира једну РЗ на $\beta = 0$ и четири ДЗ, али је у овом случају цео спектар симетричан у односу на РЗ, слика 4.27 б). Овде је једина РЗ такође повезана са две ДЗ, и то са обе у четири тачке БЗ: ($|k_x| = 0, |k_y| = \pi$) и ($|k_x| = \pi, |k_y| = 0$).

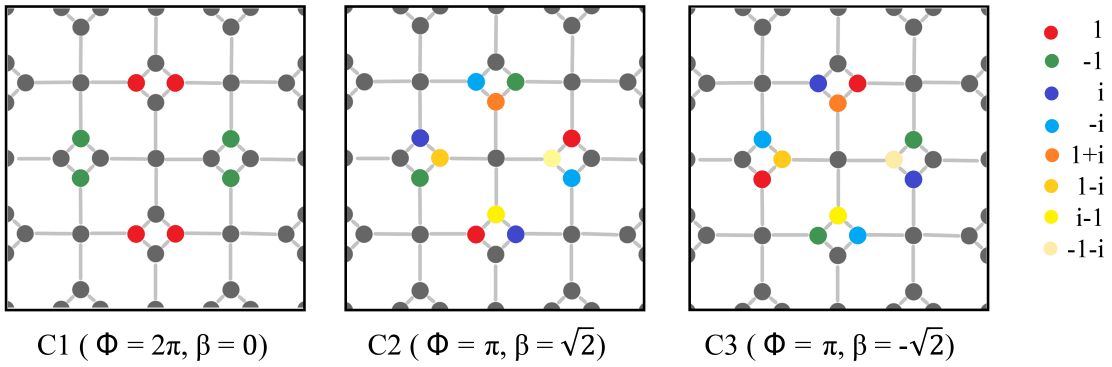


Слика 4.27: Спектар СВ униформне ПР третиране флуксом: (а) $\phi = 0$, (б) $\phi = \pi$, (в) $\phi = 2\pi$ и (г) $\phi = 3\pi$.

У случају униформне ПР решетке без флукса, својствени базис РЗ је представљен скупом одговарајућих компактних, неортогоналних КЛМ. Компактне моде су настале захваљујући деструктивној интерференцији која се индукује геометријски. Сваки компактон представља структуру од осам таласовода који деле пет јединичних ћелија. Унутар централне ћелије, амплитуде су једнаке нули, док два таласовода у свакој дијамантској плочици имају наизменичне (+ и -) једнаке амплитуде различите од нуле.

4.2.5 Компактно локализоване моде плус решетке третиране флуксом

Ако је вештачки флукс „укључен“, долази до активирања још по два таласовода унутар дијамантске плочице у случају $\phi = w\pi$, док централни таласовод компактона остаје и даље непобуђен, што је илустровано на слици 4.28. За $\phi = 2\pi$, основни компактони нулте енергије РЗ су означени са C1. Имају исту структуру као и они добијени за решетку без флукса и исте су класе, имају централну нулту амплитуду, али разлика је у томе што два таласовода у свакој квадратној плочици имају једнаке амплитуде. Основни компактони који одговарају двема РЗ ненулте енергије, формирана за $\phi = \pi$, означени су с C2 на $\beta = \sqrt{2}$ и C3 на $\beta = -\sqrt{2}$, слика 4.28. Ови компактони су класе $U = 5$, односно заузимају 5 јединичних ћелија. Осим амплитуде централног таласовода која је нула, сва остала 4 таласовода јединичне ћелије имају амплитуде различите од нуле. Исти компактони C2 и C3 одговарају случају $\phi = 3\pi$, али пошто је геометрија зона „обрнута“, тип C2 карактерише РЗ на $\beta = -\sqrt{2}$, док компактон типа C3 карактерише РЗ на $\beta = \sqrt{2}$.



Слика 4.28: Расподела амплитуда компактонских мода C1, C2 и C3.

4.3 Локализоване моде у ромбичној решетки

У 2Д РР с вештачки индукованим флуксом може се, захваљујући ефекту Ахаронов-Бома, индуковати формирање потпуно равног зонског спектра решетке и јако робусних компактонских мода. Компактне локализоване својствене моде РЗ, чија је динамика проучавана, изоловане су на свега неколико јединичних ћелија решетке у две пахуљичасте конфигурације [150]. Нумерички је испитивана могућност стабилног простирања компактних локализованих комплекса уз погодно подешавање нелинеарних својстава решетке [151].

4.3.1 Модел ромбичне решетке

Ова решетка, чија је геометрија приказана је на слици 4.29, може се конструисати преклапањем двеју хексагоналних решетки. У присуству калибрационог поља које индукује вештачки флукс ϕ, јединична ћелија ове решетке може се представити као структура која се састоји од шест таласовода обележених са a, b, c, d, e, f, при чему су амплитуде њихових мода обележене као $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}, e_{m,n}, f_{m,n}$ на позицији m, n у решетки с нумерацијом јединичних ћелија $m \in [1, M]$ и $n \in [1, N]$. Унутар решетке, таласоводи су спрегнути комплексним спрезањем $te^{i\frac{\phi}{2}}$ на два начина: с три (a, b, e и f) или са шест суседних таласовода (c и d), при чему t представља параметар спрезања. Две врсте дијамантских плочица обележене су на слици 4.29 зеленом и жутом бојом. У обе врсте дијамантских плочица постоји четири спрезања, три у смеру кретања казаљке на сату и једно у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату, или обрнуто, у зависности од чега плочице захватају флукс вредности $+\phi$ или $-\phi$.

У присуству кубне нелинеарности и флукса, уз коришћење апроксимације јаког спрезања, простирање светлости кроз РР се може моделовати скупом 6MN спрегнутих диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}
i\dot{a}_{m,n} &+ t(c_{m,n} + d_{m,n})e^{-i\frac{\phi}{2}} + tc_{m-1,n}e^{i\frac{\phi}{2}} + \gamma|a_{m,n}|^2 a_{m,n} = 0,\\
i\dot{b}_{m,n} &+ t(c_{m,n} + c_{m-1,n})e^{i\frac{\phi}{2}} + td_{m,n-1}e^{-i\frac{\phi}{2}} + \gamma|b_{m,n}|^2 b_{m,n} = 0,\\
i\dot{c}_{m,n} &+ t(a_{m,n} + f_{m,n} + e_{m,n-1})e^{i\frac{\phi}{2}} + t(b_{m,n} + a_{m+1,n} + b_{m+1,n})e^{-i\frac{\phi}{2}} + \gamma|c_{m,n}|^2 c_{m,n} = 0,\\
i\dot{d}_{m,n} &+ t(a_{m,n} + e_{m,n} + e_{m-1,n} + f_{m-1,n} + b_{m,n+1})e^{i\frac{\phi}{2}} + tf_{m,n}e^{-i\frac{\phi}{2}} + \gamma|d_{m,n}|^2 d_{m,n} = 0,\\
i\dot{e}_{m,n} &+ t(d_{m,n} + d_{m+1,n} + c_{m,n+1})e^{-i\frac{\phi}{2}} + \gamma|e_{m,n}|^2 e_{m,n} = 0,\\
i\dot{f}_{m,n} &+ td_{m,n}e^{i\frac{\phi}{2}} + t(c_{m,n} + d_{m+1,n})e^{-i\frac{\phi}{2}} + \gamma|f_{m,n}|^2 f_{m,n} = 0,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

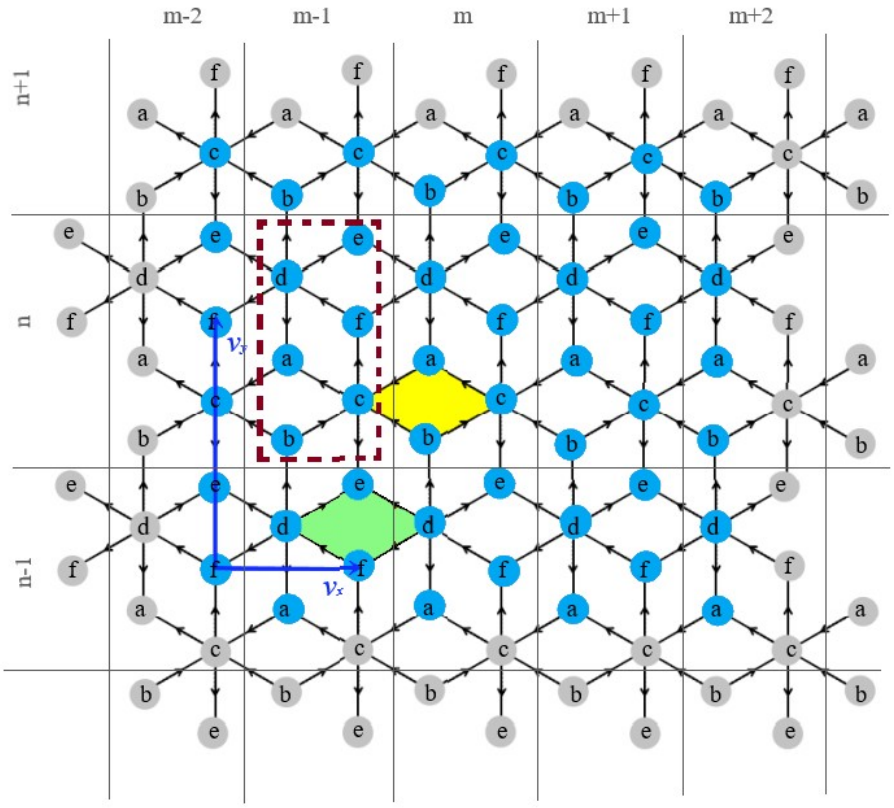
при чему се диференцирање врши по пропагационој константи z, а γ представља коефицијент нелинеарности. Вредност коефицијента спрезања скалирана је на $t = 1$, аналогно претходном примеру.

Системи које испитујемо су бесконачни или коначни с периодичним граничним условима по m и n, због чега стационарна решења могу бити представљена у форми Блохових таласа: $\{a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}, e_{m,n}, f_{m,n}\} \sim \{A, B, C, D, E, F\}e^{i(k_x m + k_y n)}e^{-i\beta z}$, за које је β пропагациона константа, а k_x, k_y су компоненте трансверзалног Блоховог 2Д таласног вектора $\vec{k}$. Применом 2Д Фурије трансформација у реципрочном

простору, могуће је развити Хамилтонијан система у линеарном случају у облику:

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & f_2 f_4{}^* & 0 & 0 \\ f_1{}^* & f_3{}^* & 0 & 0 & f_2{}^* f_4{}^* & f_2{}^* \\ f_2{}^* & f_2{}^* f_4 & 0 & 0 & f_3 & f_1 \\ 0 & 0 & f_2 f_4 & f_3{}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & f_1{}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

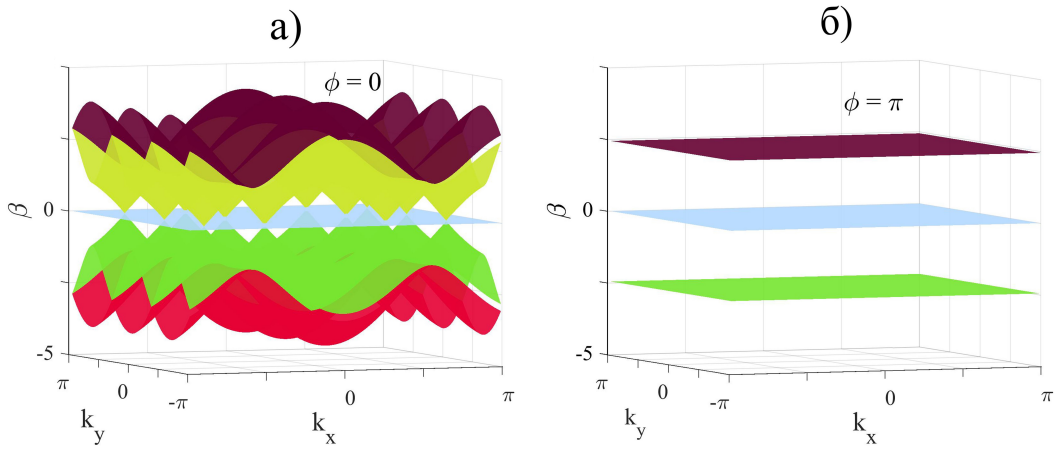
где су $f_1 = e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-ik_x}$, $f_2 = e^{-i\frac{\phi}{2}}$, $f_3 = (1 + e^{-ik_x}) e^{i\frac{\phi}{2}}$, $f_4 = e^{ik_y}$.



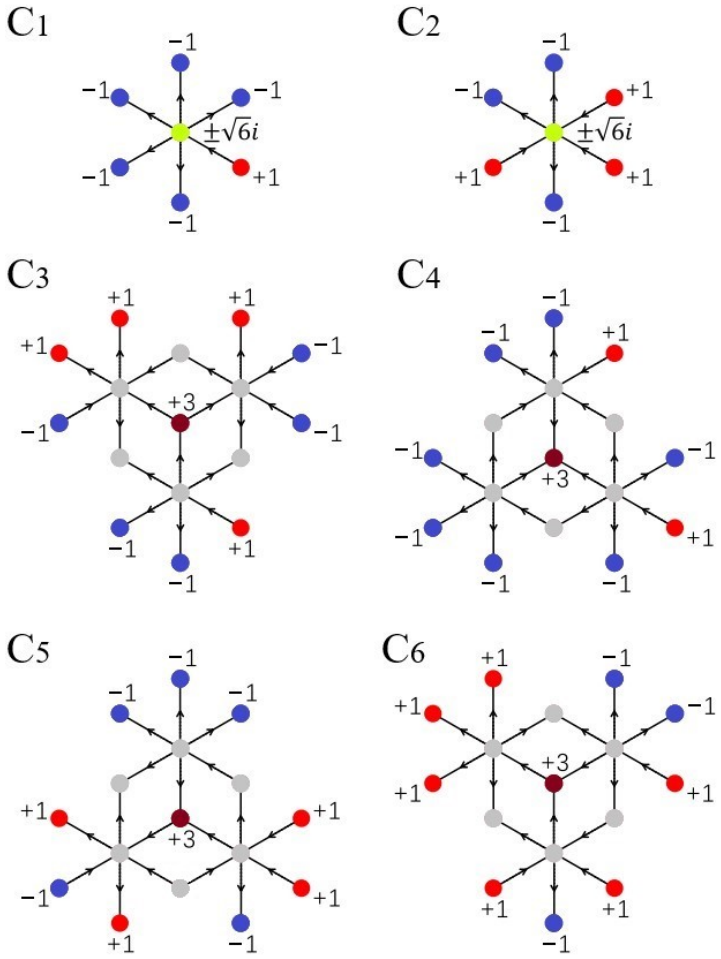
Слика 4.29: Шематски приказ 2Д РР. Јединична ћелија оивичена је црвеним правоугаоником, таласоводи су обележени са a, b, c, d, e, f а вектори у хоризонталном и вертикалном правцу $\vec{v_x}$ и $\vec{v_y}$ представљени су тамно плавим стрелицама. Два типа дијамантских плочица обојена су жутом и зеленом бојом.

4.3.2 Енергетски спектар линеарне решетке и компактно локализоване моде

У случају флукса $\phi = 0$ шест својствених енергија линеарног Хамилтонијана формираће енергетски спектар који ће се састојати од четири дисперзивне и једне двоструко дегенерисане РЗ, слика 4.30 а). Ако се решетка третира флуксом $\phi = \pi$, енергетски спектар биће окарактерисан с три потпуно дегенерисане РЗ, слика 4.30 б). Степен дегенерације сваке РЗ износи NM, ако је NM укупан број јединичних ћелија.



Слика 4.30: Енергетски спектар линеарне РР при: а)$\phi = 0$, б)$\phi = \pi$



Слика 4.31: Шематски приказ шест типова КЛМ. Енергије $\pm\sqrt{6}$ одговарају компактонима C_1, C_2, док нулта енергија одговара компактонима C_3, C_4, C_5, C_6. На слици су назначене вредности ненултих амплитуда.

Као резултат суперпозиције Блохових стања, услед деструктивне интерференције, у случају $\phi = \pm\pi$ може се контруисати скуп КЛМ. Фундаменталне КЛМ типа $C_{1,2}$

делиће три јединичне ћелије, док ће се КЛМ типа $C_{3,4,5,6}$ заузети шест јединичних ћелија, слика 4.31. Ове КЛМ формираће својствени базис који ће бити компактан али не и ортонормиран.

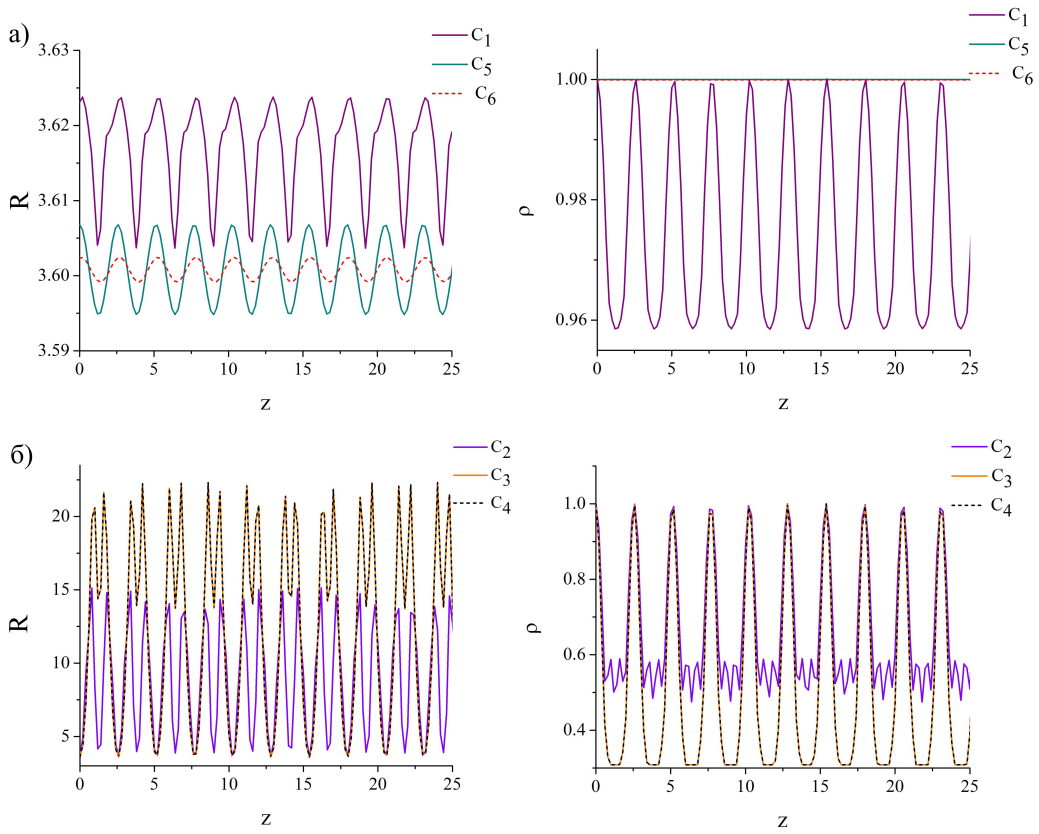
У жељи да испитамо динамику како линеарних тако и нелинеарних КЛМ, симулирали смо њихово простирање кроз РР, односно нумерички смо решили скуп једначина 4.22. Резултати представљени у наставку, објављени у [151], су добијени за решетку с 15x15 јединичних ћелија. Утицаји околине моделовани су као униформни случајни догађаји, тј. као бели шум [129], а за симулацију пропагирања КЛМ кроз решетку коришћен је Рунге-Кута метод 6. реда. Величине које су коришћене у сврху испитивања динамичких својстава КЛМ су: партиципациони број R, преклапање поља ρ и дистрибуција укупног интензитета I. Еволуција ових величина омогућава нам да одредимо ефикасност одржања компактности и локализованости мода и даје могућност процене односа утицаја два механизма (АБ ефекта и нелинеарности) на динамику мода.

4.3.3 Динамика компактно локализованих мода

У линеарном случају, на основу динамичких својстава могуће је КЛМ поделити у две групе: прву групу чине КЛМ типа C_1, C_5 и C_6, а другу КЛМ типа C_2, C_3 и C_4. Током простирања КЛМ прве групе јављају се мање осцилације вредности R (до 1%) и ρ (до 4%), с периодичношћу $z_0 = 2,5$, слика 4.32 а). У расподели интензитета нема значајних промена. На основу одсуства значајнијих промена ових величина, долази се до закључка да прва група остаје "замрзнута"током простирања, односно, неће доћи до промене облика КЛМ. Свака КЛМ задржава свој облик током простирања, број ћелија који заузимају на почетку - три у случају C_1 и шест у случају C_5 и C_6 - се не мења.

Током простирања КЛМ друге групе, промене величина R и ρ су доста значајније, али се уочавају две изражене периодичности односа $z_1/z_0 = 1/2$, као што је приказано на слици 4.32 б). Промена расподеле интензитета прати поменуте периодичности, па у складу с тим број ћелија које заузима C_2 осцилује између три и шест, а број ћелија који заузимају C_3 и C_4 осцилује између шест и дванаест. КЛМ друге групе понашају се као дишуће моде. На слици ?? илустрована је промена расподеле интензитета за инјектовану C_3 моду.

Дакле, у оба случаја можемо уочити да је ефикасност АБ заробљивања веома велика. Разлике у понашању једне групе у односу на другу највероватније потичу од различитих симетрија КЛМ на самом почетку простирања.



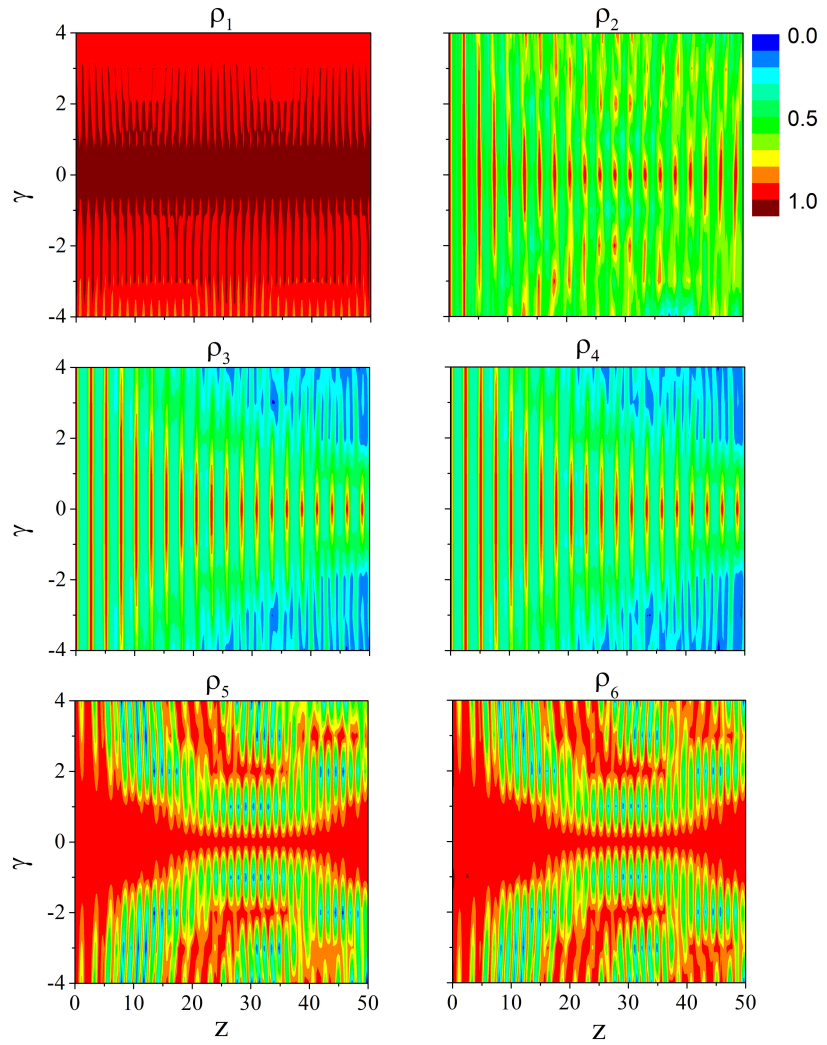
Слика 4.32: Еволуција партиципационог броја R и преклапања поља ρ за све КЛМ инјектоване у РР димензија 15x15.

4.3.4 Утицај нелинеарности на компактно локализоване моде

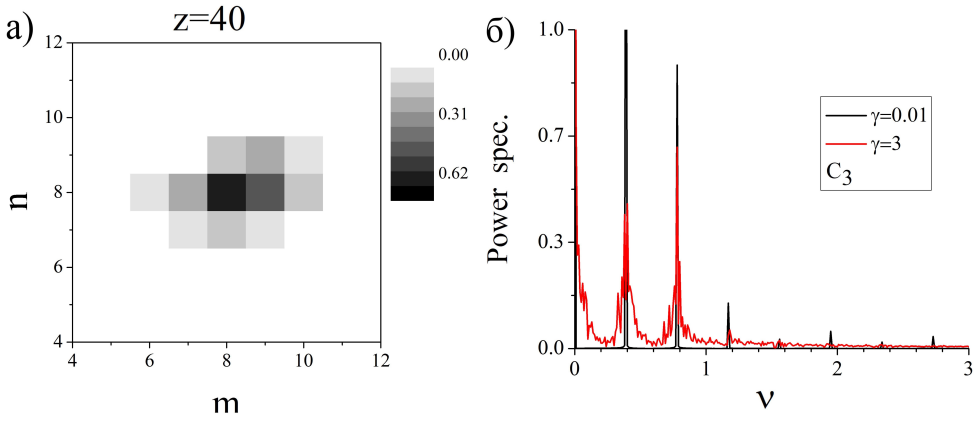
У случају хомогених КЛМ, код којих су апсолутне вредности амплитуда једнаке, нелинеарност директно додата на таласоводе утиче тако да од њих настају фамилије НЛКЛМ које задржавају исту амплитуду и расподелу фаза [132]. У овом случају КЛМ су хетерогене структуре, па се не може очекивати овакво понашање. Међутим, АБ ефекат омогућава да оне остану заробљене унутар дела "АБ кавеза".

Индекс преламања може се мењати додавањем нелинеарности. У ту сврху, у математички модел једначина 4.22 додат је последњи члан. Пропагацијом КЛМ кроз овако модификовану решетку, може се испитати њихова робусност у присуству нелинеарности.

На слици 4.33 дата је зависност $\rho(z)$ од γ за све типове КЛМ. За мале нелинеарности оба знака, динамика свих КЛМ не одступа од утврђене динамике у линеарном случају. КЛМ прве групе задржаће своју велику робусност коју су поседовале у линеарном режиму. Повећање нелинеарности доводи до тога да моде постају дишуће. КЛМ друге групе задржаће своје дишуће понашање за слабе нелинеарности. Веће нелинеарности проузроковаће квази-периодично дишуће понашање, односно расподела енергије изгубиће своју карактеристичну периодичност, али ће мода и даље остати заробљена у АБ кавезу, слика 4.34 а). Ово потврђује значај АБ кавеза који пркоси нелинеарности. На слици 4.34 б) дато је поређење спектра снаге квазипериодичне дишуће моде и регуларне дишуће моде.



Слика 4.33: Еволуција преклапања поља ρ у зависности од параметра нелинеарности γ за свих шест компактних мода инјектованих у нелинеарну решетку.



Слика 4.34: а) Расподела укупног интензитета у тренутку $z = 40$ за иницијално инјектован C_3 компактон у нелинеарну решетку $\gamma = 3$. б) Упоредни приказ спектра снаге инјектованог C_3 компактона у нелинеарну решетку с $\gamma = 0,01$ и $\gamma = 3$.

Намеће се закључак да се комплексност у понашању квазипериодичне дишуће моде може повезати са ширењем спектра на карактеристичним фреквенцијама.

Глава 5

Закључак

У ФР услед периодичности, тј. дискретне транслационе симетрије, долази у $\boldsymbol{k}$ простору до формирања еквавилената проводних и ЗЗ у атомским кристалима, које могу подржавати или не простирање светлости, респективно.

ФР које у зонском спектру поседују РЗ, занимљиве су за проучавање због потпуног одсуства дисперзије, што се одликује заустављањем светлости (групна брзина светлосног пакета је нула). Овакве решетке могу подржавати стварање локализованих, изолованих и компактних структура - тзв компактона. Простирањем светлости се може манипулисати у ФР подешавањем параметара решетке и карактеристика светлости која је у њу убачена, попут растојања између таласовода, облика таласовода, вредности параметара упадног светлосног снопа, и др. Уколико је интензитет светлосног снопа који се простире кроз решетку довољно висок да услови појаву модулационе нестабилности, тј. ексцитацију и спрезање различитих $\boldsymbol{k}$-вектора проводне зоне и тиме појаву повратног утицаја на светлосни сноп, средина има нелинеарни одзив на постирање светлости у њој. У дисертацији смо проучавали утицај Ахаронов-Бом ефекта на простирање светлости, тако што смо у решеткама индуковали вештачки флукс помоћу калибрационих поља. Проучавали смо ефекте нелинеарности и флукса на простирање светлости и настанак различитих локализованих мода, као и могућности манипулације простирањем светлости комбинацијом поменута два ефекта.

Локализоване структуре, пре свега компактонског типа, изучаване су у три различите 2Д ФР са РЗ: октагонално-дијамантској, ромбичној и плус решетки. Занимљива сличност између ових решетки јесте присуство дијамантских плочица у њиховој структури. У свим решеткама испитиване су особине компактона без и у присуству флукса вештачког поља којим се у свим наведеним решеткама третирају управо дијамантске плочице. Видевши да овакав приступ доводи до поравнања зона у спектрима октагонално-дијамантске и ромбичне решетке, дошло се на идеју да се на исти начин третира и плус решетка не би ли то довело до истог ефекта.

При истраживањима у оквиру ове дисертације коришћен је аналитички и нумерички метод. Истраживано је постојање и стабилност како линеарних тако и нелинеарних компактонских мода. Аналитички су пронађене различите структуре КЛМ - компактона, а ЛАС је примењена (аналитички и нумерички) да би се добили основни одговори који се тичу њихове стабилности. Показали смо да ЛАС није адекватна за анализу стабилности структуираних светлосних пулсева и тзв. нехомогених компактона. У тим случајевима, директне нумеричке симулације су биле незаменљив алат за испитивање стабилности локализованих мода у нелинеарним решеткама у одсуству и присуству вештачког флукса. Такође смо испитивали утицај вештачнког

флукса на тополошке карактеристике система.

Познато је да ОДР има неке интересантне особине, посебно за случај када је дијагонална спрега унутар јединичних ћелија фино подешена да буде идентична спрегама најближих суседа. Ово резултује линеарним спектром са две потпуно РЗ и две ДЗ. Фундаментални компактони одговарајућих РЗ су осмоугаоне структуре са идентичним расподелама амплитуде, али с различитим фазама. Предложили смо начин да се ОДР експериментално реализује с елиптичним таласоводима и анализирали својства њених локализованих модова у линеарном и Керовом нелинеарном режиму. Нашли смо да фамилије локализованих стања равних зона настављају да постоје као фамилија незнатно модификованих нелинеарних компактона. Међутим, за велике системе они обично постају нестабилни (у случају нелинеарности), изузев С2 компактона велике снаге за фокусирајућу нелинеарност. Међутим, нестабилност може бити слаба у одређеним областима параметарског простора (γ, μ, P), када ће компактност бити нарушена али јако локализована стања могу бити присутна. Дакле, са становишта примене, ОДР решетка би могла бити од интереса пре свега у линеарном режиму. Са две ортогоналне РЗ, осцилација мода РЗ би могла бити имплементирана у сврху ефикасног преноса контролисане количине енергије у дату област решетке са веома добро дефинисаним фреквенцијама.

Поред тога, пошто ОДР поседује потпун скуп компактона С1 и С2, број могућих комбинација компактних стања је 2^b (у и ван фазе ексцитације), где је b - број прстенова. Кодирање би се могло унапредити ако се истовремено побуде обе РЗ, што би генерисало осцилаторни образац (слика 4.3 (в)) и дало додатни степен слободе да се повећа број могуће некохерентне суперпозиције на различитим регионима решетке. Ово је свакако важан циљ у оптичким комуникационим системима, где су различити облици кодирања неопходни за ефикасно шифровање огромне количине дигиталних података.

Истражујући нелинеарну ОДР, уочили смо смо, по нашим сазнањима први пут на решеткама с РЗ, јаку зависност величине прозора стабилности нелинеарних компактних мода од величине решетке (size-effects). Показали смо да се у случају слабе нелинеарности дефокусирајућег типа, зависно од броја прстенастих ћелија у решетки мења и основно стање (стање са најнижом енергијом) у систему. За решетке с мање од 12 компактних прстенова (структуре од 4 чвора) основно стање је компактон типа С2, док је за веће системе основно стање линеарна комбинација 12 компактонских прстенова. Друга занимљива особина у оваквим решеткама је постојање критичне јачине нелинеарности на којој основно стање (за велике системе,) од стања с два пика постаје стање с једним пиком. Разноликост локализованих мода изазваних нелинеарношћу у РЗ ОДР такође усмерава на истраживања фундаменталних процеса одговорних за формирање динамичког обрасца у таквој геометрији, што је важна тема за будућа истраживања.

Додавањем флукса у ОДР добијен је модел који може послужити за генерисање тополошких фазних прелаза, укључујући прелазе између сингуларних и несингуларних РЗ, као и тополошки нетривијалних СРЗ. Кључну улогу у манипулисању овим фазама има АБ ефекат, који постоји као последица утицаја флукса на спрезања унутар решетке. Овде је у главном фокусу наших истраживања било тестирање робусности компактона. Идеја је да се помоћу компактона омогући скенирање особина решетки третираних флуксом. Демонстрирана је способност компактона, да услед промена у околини, прерасподеле унутрашњу расподелу фаза и очувају компактност.

Мењајући вредност флукса, могуће је искористити компактоне за доказивање тополошких и транспортних особина решетке. Нестабилност побуђена због инхерентног нелинеарног одзива фотонског материјала на простирање ласерске светлости изазива динамички одговор компактона, односно размену енергије са околином. У области слабе нелинеарности фамилије компактона се настављају из линеарних компактонских фамилија несингуларних РЗ за које се показало да су веома робусне структуре. Поред тога, показано је скоро стабилно/слабо нестабилно динамичко простирање нелинеарних мода типа компактона у одређеним конфигурацијама уређеним флуксом које могу укључивати тополошки нетривијалне случајеве далеко од прелазне тачке за адекватно одабране параметре система. Другим речима, прилагођавањем флукса поља, нелинеарне моде компактонског типа се могу користити за испитивање тополошких особина ФР и симулирање различитих оптичких функција на оптичким решеткама. Системи са ласерски уписаним таласоводима и прстенастим резонаторима могу бити погодне платформе за манипулацију помоћу компактона.

У случају ПР предложена је нова геометрија решетке. Енергетски спектар линеарне униформе и димеризоване ПР карактерише се постојањем једне РЗ која додирује две суседне и две периферне ДЗ. Као посебност ПР може се издвојити висока робусност триплета који се састоји од угњеждене РЗ између две ДЗ. Испитан је утицај димеризације и утврђено да се у том случају у енергетском спектру отварају процепи између суседних (унутрашње и периферне) ДЗ. Истражили смо утицај нелинеарности на компактоне у систему. Потврђено је да компактони опстају у присуству нелинеарности, али постају нестабилни. Утврђено је да постоје индикације да је главни механизам нестабилности резонантна интеракција с дискретним нелинеарним дишућим модама које потичу из ДЗ.

Затим је истражен утицај вештачког калибрационог поља на енергетски спектар ПР у линеарном случају и одговарајуће компактоне. Испоставило се да, као последица вештачког флукса, АБ ефекат изазива појаву РЗ у одговарајућем енергетском спектру. Дакле, за одређене вредности флукса, спектар решетке је описан са две независне потпуно дегенерисане РЗ и три ДЗ. Добијени су одговарајући компактони и у поређењу са случајем без флукса, сада су пронађена три различита типа фундаменталних неортогоналних компактона. Пошто се ПР може експериментално реализовати, ови налази би се могли тестирати у пракси и могу имати различите практичне примене.

Енергетски спектар линеарне 2Д РР се такође може модификовати ефективним магнетним флуксом како би се обезбедили услови за АБ кавез, што доводи до спектра с потпуно РЗ, који се састоји од три двоструко дегенерисане РЗ. У оваквим системима се може конструисати базис састављен од 6 фундаменталних неортогоналних компактона. Ове хетерогене изоловане локализоване структуре дугују своје постојање деструктивној интерференцији која је индукована геометријом система. Проучавали смо динамику компактона у линеарном и нелинеарном случају. Пронађена су два типа динамичких компактона: високо робусни стабилни компактони налик пахуљицама у линеарној и слабој нелинеарној решетки и локализоване дишуће структуре отпорне на присуство слабе нелинеарности. Робусност динамичких компактона је последица доминантног утицаја АБ кавеза у наведеним околностима. Значајан утицај АБ кавеза није изгубљен повећањем нелинеарности, иако је сложеност понашања, односно дисања, компактона повећана. Утицај нелинеарности се може повезати са појавом квазипериодичних и неправилних дишућих структура. Показали смо високу

ефикасност АБ кавеза у нелинеарној 2Д фотонској РР која се може искористити за управљање и манипулисање динамиком компактона. Ово се може тестирати на фотонским платформама као што су низови прстенастих резонатора или таласоводне мреже.

Сви наведени резултати могу дати допринос за проналажење начина за што савршеније манипулисање светлошћу. Истраживања у вези са простирањем светлости у ФР имају циљ да пронађу решетке адекватне геометрије и оптималне услове при којима би светлост била транспортована на жељени начин. Разјашњавање појава у вези са простирањем светлости у ФР омогућава и развој све бољих система за пренос информација у оптичким системима, за заустављање и успоравање светлости, прављење функционалних компоненти типа делиоца снопова, интерферометра и друго. Због много једноставније реализације експеримента, услед одсуства многих додатних ефеката који се јављају у сродним системима, а који се могу описати сличним модалним једначинама, разумевање теоријских достигнућа из других грана физике, поготово у физици кондензоване материје, бива олакшано теоријским и експерименталним достигнућима при проучавању фотонских система.

Литература

[1] P. Vukusic, J. Roy Sambles, Photonic structures in biology, Nature 424 (2003), 852-855, doi:10.1038/nature01941.

[2] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, Photonic crystals: molding the flow of light, 2nd ed. New Jersey, Prinston University Press, 2008.

[3] J. M. Lourtioz, et al., Photonic crystals: towards nanoscale photonic devices, 2nd ed. Berlin: Springer Verlag, 2008.

[4] P. N. Prasad, Nanophotonics, Ney Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[5] B. R. Masters, Lord Rayleigh: A Scientific Life, Optics & Photonics News 20 (6) (2009), 36-41.

[6] http://www.thelivingmoon.com/41pegasus/02files/Photonic_Crystals_01.html (17.4.2023.)

[7] C. Elachi, C. Yeh, Periodic structures in integrated optics, J. Appl. Phys. 44 (1973), 3146-3152, doi:10.1063/1.1662722.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Photonic_crystal?msclkid=2efca049a8fb11ec80fbd9f09ab07fde (17.4.2023.)

[9] F. Lederer et al., Discrete solitons in optics, Phys. Rep. 463 (1–3) (2008), 1-126, doi:10.1016/j.physrep.2008.04.004.

[10] A. L. Jones, Coupling of optical fibers and scattering in fibers, J. Opt. Soc. Am. 55 (3) (1965), 261-271, doi:10.1364/JOSA.55.000261.

[11] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H. L. Garvin, R. G. Hunsperger, Channel optical waveguide directional couplers, Appl. Phys Lett. 22 (1) (1973), 46-47, doi:10.1063/1.1654468.

[12] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, S. H. Fan Photonic crystals: putting a new twist on light, Nature 386 (6621) (1997), 143-149, doi:10.1038/386143a0.

[13] J. Baohua, D. Buso, L. Jiafang, G. Min, Active three dimensional photonic crystals with high third order nonlinearity in telecommunication, Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim. Optica Publishing Group, p. MH2_3, 2009.

[14] M. Deubel, G. Von Freymann, M. Wegener, C. M. Soukoulis, Direct laser writing of three-dimensional Photonic Crystal templates for photonic bandgaps at telecommunication wavelengths, Conference on Lasers and Electro-Optics, Optica Publishing Group, p. CTuDD6, 2004.

[15] H. Ohkubo, Y. Ohtera, S. Kawakami, T. Chiba, Transmission wavelength shift of + 36 nm observed with Ta/sub 2/O/sub 5/-SiO/sub 2/multichannel wavelength filters consisting of three-dimensional photonic crystals, IEEE Photon. Technol. Lett. 16(5) (2004), 1322-1324, doi:10.1109/LPT.2004.826232.

[16] R. J. Liu, Z. Y. Li, Z. F. Feng, B. Y. Cheng, D. Z. Zhang, Channel drop filters in three dimensional woodpile photonic crystals, J. Appl. Phys. 103 (9) (2008), 094514, doi:10.1063/1.2909982.

[17] V. Passaro, Advances in Photonic Crystals, InTech, 2013, doi:10.5772/47821.

[18] D. Leykam, Wave and spectral singularities in photonic lattices, Ph.D. Thesis, The Australian National University, 2015.

[19] P. Beličev, Prostiranje svetlosti u kompleksnim fotonskim rešetkama sa zasićujućom nelinearnošću, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 2012.

[20] Y. S. Kivshar, G.P. Agrawal, Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, San Diego, 2003.

[21] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices, Nature 422 (2003), 147–150, doi:10.1038/nature01452.

[22] K. M. Davis, K. Miura, N. Sugimoto, K. Hirao, Writing waveguides in glass with a femtosecond laser, Opt. Lett. 21 (1996), 1729–1731, doi:10.1364/OL.21.001729.

[23] G. Y. Chen et al., Femtosecond-laser-written microstructured waveguides in BK7 glass, Sci. Rep. 8 (1) (2018), 1-7, doi:0.1038/s41598-018-28631-3.

[24] F. Chen, J. R. Vázquez de Aldana, Optical waveguides in crystalline dielectric materials produced by femtosecond-laser micromachining, Laser Photon. Rev. 8 (2014), 251–275, doi:10.1002/lpor.201300025.

[25] S. Gross, M. Dubov, M. J. Withford, On the use of the Type I and II scheme for classifying ultrafast laser direct-write photonics, Opt. Exp. 23 (2015), 7767–7770, doi:10.1364/OE.23.007767.

[26] H. N. Huynh, G. Pruessner, L. Y. Chew, The Abelian Manna model on various lattices in one and two dimensions, J. Stat. Mech.: Theor. Exp. 9 (5) (2011), 1161-1176, doi:10.1088/1742-5468/2011/09/P09024.

[27] T. Pertsch et al., Discrete diffraction in two-dimensional arrays of coupled waveguides in silica, Opt. Lett. 29(5) (2004), 468-470, doi:10.1364/OL.29.000468.

[28] L. Tang et al., Photonic flat-band lattices and unconventional light localization, Nanophotonics, 9 (2020), 1161-1176, doi:10.1515/nanoph-2020-0043.

[29] C. Kittel, Quantum theory of solids, Wiley, New York, 1963.

[30] http://large.stanford.edu/courses/2007/ap273/dai1/ (17.4.2023)

[31] D. Leykam, A. Andreanov, S. Flach, Artificial flat band systems: from lattice models to experiments, Adv. Phys.: X 3, 1 (2018), 1473052, doi:10.1080/23746149.2018.1473052.

[32] D. Leykam, S. Flach, Perspective: Photonic flatbands, APL Photonics 3, 070901 (2018), doi:10.1063/1.5034365.

[33] B. Sutherland, Localization of electronic wave functions due to local topology, Phys. Rev. B 34 (1986), 5208, doi:10.1103/PhysRevB.34.5208.

[34] H. Aoki, M. Ando, and H. Matsumura, Hofstadter butterflies for flat bands, Phys. Rev. B. 54 (1996), R17296(R), doi:10.1103/PhysRevB.54.R17296.

[35] S. Xia et al., Unconventional flatband line states in photonic Lieb lattices, Phys. Rev. Lett. 121 (2018), 263902, doi:10.1103/PhysRevLett.121.263902.

[36] J. Ma et al., Direct Observation of Flatband Loop States Arising from Nontrivial Real-Space Topology, Phis. Rev. Lett. 124 (2020), 183901, doi:10.1103/PhysRevLett.124.183901.

[37] W. Yan et al., Flatband line states in photonic super-honeycomb lattices, Adv. Opt. Mater. 8 (2020), 1902174, doi:10.1002/adom.201902174.

[38] S. Flach, D. Leykam, J. D. Bodyfelt, P. Matthies, A. S. Desyatnikov, Detangling flat bands into Fano lattices, Eur. Phys. Lett. 105 (2014), 30001, doi:10.1209/0295-5075/105/30001.

[39] L. Morales-Inostroza, R. A. Vicencio, Simple method to construct flat-band lattices, Phys. Rev. A 94 (2016), 043831, doi:10.1103/PhysRevA.94.043831.

[40] D. L. Bergman, C. Wu, L. Balents, Band touching from real-space topology in frustrated hopping models, Phys. Rev. B 78 (2008), 125104, doi:10.1103/PhysRevB.78.125104.

[41] D. Guzmán-Silva et al., Experimental observation of bulk and edge transport in photonic Lieb lattices, New J. Phys. 16 (2014), 063061, doi:10.1088/1367-2630/16/6/063061.

[42] J. W. Rhim, B. J. Yang, Singular flat bands, Advances in Physics: X 6 (2021), doi:10.1080/23746149.2021.1901606.

[43] R. A. Vicencio et al., Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices, Phys. Rev. Lett. 114 (2015), 245503, doi:10.1103/PhysRevLett.114.245503.

[44] S. Mukherjee et al., Observation of a Localized Flat-Band State in a Photonic Lieb Lattice, Phys. Rev. Lett. 114 (2015), 245504, doi:10.1103/PhysRevLett.114.245504.

[45] Y. Zong et al., Observation of localized flat-band states in Kagome photonic lattices, Opt. Exp. 24 (2016), 8877-8885, doi:10.1364/OE.24.008877.

[46] S. Xia et al., Demonstration of flat-band image transmission in optically induced Lieb photonic lattices, Opt. Lett. 41 (2016), 1435-1438, doi:10.1364/OL.41.001435.

[47] S. Weimann et al., Transport in Sawtooth photonic lattices, Opt. Lett. 41 (2016), 2414-2417, doi:10.1364/OL.41.002414.

[48] S. Mukherjee, R.R. Thomson, Observation of localized flat-band modes in a quasi-one-dimensional photonic rhombic lattice, Opt. Lett. 40 (2015), 5443-5446, doi:10.1364/OL.40.005443.

[49] B. Real et al., Flat-band light dynamics in Stub photonic lattices, Sci. Rep. 7 (2017), 15085. doi:10.1038/s41598-017-15441-2

[50] C. Cantillano et al., Observation of localized ground and excited orbitals in graphene photonic ribbons, New J. Phys. 20 (2018), 033028, doi:10.1088/1367-2630/aab483.

[51] Z. Lin et al., Flatbands and Emergent Ferromagnetic Ordering in Fe_3Sn_2 Kagome Lattices, Phys. Rev. Lett. 121 (2018), 096401, doi:10.1103/PhysRevLett.121.096401.

[52] G. B. Jo et al., Ultracold Atoms in a Tunable Optical Kagome Lattice, Phys. Rev. Lett. 108 (2012), 045305, doi:10.1103/PhysRevLett.108.045305.

[53] F. Baboux et al., Bosonic Condensation and Disorder-Induced Localization in a Flat Band, Phys. Rev. Lett. 116 (2016), 066402, doi:10.1103/PhysRevLett.116.066402.

[54] Y. X. Xiao, G. Ma, Z.-Q. Zhang, C. T. Chan, Topological Subspace-Induced Bound State in the Continuum, Phys. Rev. Lett. 118 (2017), 166803, doi:10.1103/PhysRevLett.118.166803.

[55] T. Bilitewski, R. Moessner, Disordered flat bands on the kagome lattice, Phys. Rev. B 98 (2018), 235109, doi:10.1103/PhysRevB.98.235109.

[56] P. Shukla, Disorder perturbed flat bands: Level density and inverse participation ratio, Phys. Rev. B 98 (2018), 054206, doi:10.1103/PhysRevB.98.054206.

[57] V. Goblot et al., Nonlinear Polariton Fluids in a Flatband Reveal Discrete Gap Solitons, Phys. Rev. Lett. 123 (2019), 113901, doi:10.1103/PhysRevLett.123.113901.

[58] T. Biesenthal, M. Kremer, M. Heinrich, A. Szameit, Experimental Realization of PT-Symmetric Flat Bands, Phys. Rev. Lett.123 (2019), 183601, doi:10.1103/PhysRevLett.123.183601.

[59] M. Johansson, U. Naether, R. A. Vicencio, Compactification tuning for nonlinear localized modes in sawtooth lattices, Phys. Rev. E 92 (2015), 032912, doi:10.1103/PhysRevE.92.032912.

[60] S. Xia et al., Observation of quincunx-shaped and dipole-like flatband states in photonic rhombic lattices without band-touching, APL Photon 5 (2020), 016107, doi:10.1063/1.5131501.

[61] S. Longhi, Aharonov-Bohm photonic cages in waveguide and coupled resonator lattices by synthetic magnetic fields, Opt. Lett. 39 (2014), 5892–5895, doi:10.1364/OL.39.005892.

[62] R. Khomeriki, S. Flach, Landau-Zener Bloch oscillations with perturbed flat bands, Phys. Rev. Lett. 116 (2016), doi:10.1103/PhysRevLett.116.245301.

[63] S. Mukherjee et al., Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice, Nat. Commun. 8 (2017), 13918, doi:10.1038/ncomms13918.

[64] M. Kremer et al., A square-root topological insulator with non-quantized indices realized with photonic Aharonov-Bohm cages, Nat. Commun. 11 (2020), 907, doi:10.1038/s41467-020-14692-4.

[65] S. Mukherjee, M. Di Liberto, P. Öhberg, R. R. Thomson, and N. Goldman, Experimental observation of Aharonov-Bohm cages in photonic lattices, Phys. Rev. Lett. 121 (2018), 075502, doi:10.1103/PhysRevLett.121.075502.

[66] S. Longhi, Photonic flat-band laser, Opt. Lett. 44 (2019), 287–290, doi:10.1364/OL.44.000287.

[67] W. Yan et al., Flatband line states in photonic super-honeycomb lattices, Adv. Opt. Mater. 8 (2020), 1902174, doi:10.1002/adom.201902174.

[68] H. Zhong et al., Transport properties in the photonic super-honeycomb lattice – a hybrid fermionic and bosonic system, Ann. Phys. 529 (2017), 1600258, doi:10.1002/andp.201600258.

[69] R. A. Vicencio, M. I. Molina, Y. S. Kivshar, Controlled switching of discrete solitons in waveguide arrays, Opt. Lett. 28 (2003), 1942-1944, doi:10.1364/OL.28.001942.

[70] W. Maimaiti, Flatband generators, Ph.D Thesis, Korea University of Science and Technology, 2020.

[71] V. Apaja, M. Hyrkäs, M. Manninen, Flat bands, Dirac cones and atom dynamics in an optical lattice, Physical Review A 82 (2010), 041402(R), doi:10.1103/PHYSREVA.82.041402.

[72] S. Taie, T. Ichinose, H. Ozawa, Y. Takahashi, Spatial adiabatic passage of massive quantum particles in an optical Lieb lattice, Nat. Commun. 11 (2020), 257, doi:10.1038/s41467-019-14165-3.

[73] S. A. Schulz, J. Upham, L. O'Faolain, R. W. Boyd, Photonic crystal slow light waveguides in a kagome lattice, Opt. Lett. 42 (2017), 3243–3246, doi:10.1364/OL.42.003243.

[74] S. Rojas-Rojas, L. Morales-Inostroza, R. A. Vicencio, A. Delgado. Quantum localized states in photonic flat-band lattices, Phys. Rev. A 96 (2017), 043803, doi:10.1103/PhysRevA.96.043803.

[75] M. R. Slot et al., Experimental realization and characterization of an electronic lieb lattice, Nat. Phys. 13 (2017), 672–676, doi:10.1038/nphys4105.

[76] C. Naud, G. Faini, D. Mailly, Aharonov-Bohm cages in 2D normal metal networks, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 5104–5107, doi:10.1103/PhysRevLett.86.5104.

[77] S. Klembt et al., Polariton condensation in S- and P-flatbands in a two-dimensional Lieb lattice, Appl. Phys. Lett. 111 (2017), 231102, doi:10.1063/1.4995385.

[78] P. P. Beličev et al., Localized modes in nonlinear binary kagome ribbons, Phys. Rev. E 92 (2015), 052916, doi:10.1103/PhysRevE.92.052916.

[79] Z. Xu, M. I. Molina, Yu. S. Kivshar, Interface solitons in quadratic nonlinear photonic lattices, Phys. Rev. A 80 (2009), 013817, doi:10.1103/PhysRevA.80.013817.

[80] H. Trompeter et al., Tailoring guided modes in waveguide arrays, Opt. Exp. 11 (2003), 3404-3411, doi:10.1364/oe.11.003404.

[81] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, M. Segev, Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices, Nature. 446 (2007), 52-55, doi: 10.1038/nature05623.

[82] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, N. Whitaker, Coupled-mode theory of optical waveguides, J. Lightwave Technol. 5 (1987), 16-23, doi:10.1109/JLT.1987.1075416.

[83] K. Makris et al., Constant-intensity waves and their modulation instability in non-Hermitian potentials, Nat. Comm. 6 (2015), 7257, doi:10.1038/ncomms8257.

[84] C. E. Rüter, J. Wisniewski, M. Stepić, D. Kip, Higher-band modulational instability in photonic lattices, Opt. Exp. 15 (2007), 6324-6329, doi:10.1364/OE.15.006324.

[85] D. Leykam, E. Smolina, A. Maluckov, S. Flach, D. A. Smirnova, Probing Band Topology Using Modulational Instability, Phys. Rev. Lett. 126 (2021), 073901, doi:10.1103/PhysRevLett.126.073901.

[86] A. Mielke, Exact results for the $U = \infty$ Hubbard model, J. Phys. A: Math. Gen. 25 (1992), 6507, doi:10.1088/0305-4470/25/24/006.

[87] J. Motruk, A. Mielke, Bose–Hubbard model on two dimensional line graphs, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012), 225206, doi:10.1088/1751-8113/45/22/225206.

[88] H. Tasaki, Hubbard model and the origin of ferromagnetism, Eur. Phys. J. B 64 (2008), 365–372, doi:10.1140/epjb/e2008-00113-2.

[89] H. Tasaki, Ferromagnetism in the hubbard models with degenerate single-electron ground states, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), 1608–1611, doi:10.1103/PhysRevLett.69.1608.

[90] R. G. Dias, J. D. Gouveia, Origami rules for the construction of localized eigenstates of the Hubbard model in decorated lattices, Sci. Rep. 5 (2015), 16852, doi:10.1038/srep16852.

[91] A. Lagendijk, B. Tiggelen, D. Wiersma, Fifty years of Anderson Localization, Phys. Today. 62 (2009), 24-29, doi: 10.1063/1.3206091.

[92] P. Coleman, Philip W. Anderson (1923–2020), Nature 581 (2020), 29, doi: 10.1038/d41586-020-01318-4.

[93] M. Segev, Y. Silberberg, D. N. Christodoulides, Anderson localization of light, Nat. Photon. 7 (2013), 197–204, doi:10.1038/nphoton.2013.30.

[94] Ana B. Radosavljević, Prostiranje svetlosti u kompleksnim sistemima spregnutih talasovoda, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 2015.

[95] S. John, Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 2169–2172, doi:10.1103/PhysRevLett.53.2169.

[96] P. W. Anderson, The question of classical localization: a theory of white paint?, Phil. Mag. B 52 (1985), 505–509, doi:10.1080/13642818508240619.

[97] H. De Raedt, A. Lagendijk, P. de Vries, Tranverse localization of light, Phys. Rev. Lett. 62 (1989), 47-50, doi: 10.1103/PhysRevLett.62.47.

[98] M. Jablan, H. Buljan, O. Manela, G. Bartal, M. Segev, Incoherent modulation instability in a nonlinear photonic lattice, Opt. Exp. (2007) 15, 4623-4633, doi:10.1364/OE.15.004623.

[99] D. N. Christodoulides, R. I. Joseph, Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides, Opt. Lett. 13 (1988), 794-796, doi:10.1364/ol.13.000794.

[100] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, J. S. Aitchison, Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays, Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 3383-3386, doi: https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.81.3383.

[101] D. N. Christodoulides, F. Lederer, Y. Silberberg, Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide arrays, Nature (London) 424 (2003), 817-823, doi:10.1038/nature01936.

[102] Y. S. Kivshar, M. Peyrard, Modulation instabilities in discrete lattices, Phys. Rev. A 46 (1992), 3198-3205, doi:10.1103/physreva.46.3198.

[103] J. Meier et al., Experimental observation of discrete modulational instability, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), 163902, doi:10.1103/PhysRevLett.92.163902.

[104] R. Iwanow, G. I. Stegeman, R. Schiek, Y. Min, W. Sohler, Discrete modulational instability in periodically poled lithium niobate waveguide arrays, Opt. Exp. 13 (2005), 7794-7799, doi:10.1364/OPEX.13.007794.

[105] M. Stepić, C. Wirth, C. Rüter, D. Kip, Observation of modulational instability in discrete media with self-defocusing nonlinearity, Opt. Lett. (2005), 31 247-249, doi:10.1364/OL.31.000247.

[106] M. Centurion et al.,Modulational instability in a layered Kerr medium: Theory and experiment, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), 234101, doi:10.1103/PhysRevLett.97.234101 .

[107] I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar, Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides, Phys. Rep. (2012) 518, 1-79, doi:10.1016/j.physrep.2012.03.005.

[108] M. Stepić, A. Maluckov, D. Kip, Gap and dark solitons in discrete photorefractive media with intensity-resonant nonlinearity, Appl. Phys. B 95 (2009), 525–530, doi:10.1007/s00340-009-3400-8.

[109] J. W. Fleischer et al., Spatial photonics in nonlinear waveguide arrays, Opt. Exp. 13 (2005), 1780-1796, doi:10.1364/OPEX.13.001780.

[110] D. N. Neshev, A. A. Sukhorukov, W. Krolikowski, Y. S. Kivshar, Nonlinear optics and light localization in periodic photonic lattices, J. Nonl. Opt. Phys. Mater. 16 (2007), 1-25, doi:10.1142/S0218863507003548.

[111] A. A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, Spatial optical solitons in waveguide arrays, IEEE J. Quant. Electron. 39 (2003), 31-50, doi:10.1109/JQE.2002.806184.

[112] L. Simone et al., Observation of flat bands in twisted bilayer graphene, Nat. Phys. 17 (2021), 189–193, doi:10.1038/s41567-020-01041-x.

[113] D. Leykam, L. Yuan, Topological phases in ring resonators: recent progress and future prospects, Nanophotonics 9 (2020), 4473-4487, doi:10.1515/nanoph-2020-0415.

[114] Y. Liang et al., Magnetic topology changes induced by lower hybrid waves and their profound effect on edge-localized modes in the EAST tokamak, Phys. Rev. Lett. 110 (2013), 235002, doi:10.1103/PhysRevLett.110.235002.

[115] D. Leykam, K. Y. Bliokh, C. Huang, Y. D. Chong, F. Nori, Edge Modes, Degeneracies, and Topological Numbers in Non-Hermitian Systems, Phys. Rev. Lett. 118 (2017), 040401, doi:10.1103/PhysRevLett.118.040401.

[116] S. Mittal, S. Ganeshan, J. Fan, A. Vaezi, M. Hafezi, Observation of the Chern-Simons gauge anomaly, Nat. Photon. 10 (2016), 180-183, doi:10.1038/nphoton.2016.10.

[117] J. Vidal, P. Butaud, B. Douçot, R. Mosseri, Disorder and interactions in Aharonov-Bohm cages, Phys. Rev. B 64 (2001), 155306, doi:10.1103/PhysRevB.64.155306.

[118] J. Vidal, R. Mosseri, B. Douçot, Aharonov-Bohm Cages in Two-Dimensional Structures, Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 5888-5891, doi:10.1103/PhysRevLett.81.5888.

[119] C. Danieli, A. Andreanov, T. Mithun, S. Flach, Nonlinear caging in all-bands-flat lattices, Physical Review B 104 (2021), 085131, doi:10.1103/PhysRevB.104.085131.

[120] T. Verboven, Master Thesis: Generating Gauge Fields in Optical Kagome and Dice Lattices, Institute for Theoretical Physics, Utrecht; Institute of Photonic Sciences, Barcelona, 2016.

[121] E. Li et al. Photonic Aharonov–Bohm effect in photon–phonon interactions, Nat. Commun. 5 (2014), 3225, doi:10.1038/ncomms4225.

[122] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance, Phys. Rev. Lett. 45 (1980), 494–497, doi:10.1103/PhysRevLett.45.494.

[123] K. v. Klitzing, The quantized Hall effect, Rev. Mod. Phys. 58 (1986), 519–531 doi:10.1103/RevModPhys.58.519.

[124] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a twodimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. 49 (1982), 405–408, doi:10.1103/PhysRevLett.49.405.

[125] M. Kohmoto, Topological invariant and the quantization of the Hall conductance, Annals Phys. 160 (1985), 343–354, doi:10.1016/0003-4916(85)90148-4.

[126] J. K. Asbóth, L. Oroszlány, A. Pályi, A Short Course on Topological Insulators, Lect. Notes Phys. 919 (2016), doi:10.1007/978-3-319-25607-8.

[127] W. P. Huang, Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview, J. Opt. Soc. Am. A 11 (1994), 963-983, doi:10.1364/JOSAA.11.000963.

[128] M. G. Stojanović et al., Localized modes in linear and nonlinear octagonal-diamond lattices with two flat bands, Phys. Rev. A 102 (2020), 023532, doi:10.1103/physreva.102.023532.

[129] M. G. Stojanović et al.„ Nonlinear compact localized modes in flux-dressed octagonal-diamond lattice. Phys. Scr. 97 (2022), 030006, doi:10.1088/1402-4896/ac5357.

[130] A. Szameit et al., Hexagonal waveguide arrays written with fs-laser pulses, Appl. Phys. B 82 (2006), 507-512, doi:10.1007/s00340-005-2127-4.

[131] B. Pal, Nontrivial topological flat bands in a diamond-octagon lattice geometry, Phys. Rev. B 98 (2018), 245116, doi:10.1103/PhysRevB.98.245116.

[132] C. Danieli, A. Maluckov, S. Flach, Compact discrete breathers on flat-band networks, Low Temp. Phys. 44 (2018), 865-687, doi:10.1063/1.5041434.

[133] J. L. Marin, S. Aubry, Finite size effects on instabilities of discrete breathers, Phys. D 119 (1998), 163-174, doi:10.1016/S0167-2789(98)00077-3.

[134] M. Johansson, Yu.S. Kivshar, Discreteness-Induced Oscillatory Instabilities of Dark Solitons, Phys. Rev. Lett. 82 (1999), 85-88, doi:10.1103/PhysRevLett.82.85.

[135] A. M. Morgante, M. Johansson, G. Kopidakis, S. Aubry, Oscillatory Instabilities of Standing Waves in One-Dimensional Nonlinear Lattices, Phys. Rev. Lett. 85 (2000), 550-553, doi:10.1103/PhysRevLett.85.550.

[136] A. M. Morgante, M. Johansson, G. Kopidakis, S. Aubry, Standing wave instabilities in a chain of nonlinear coupled oscillators, (2002), Physica D 162, 53-94, doi:10.1016/S0167-2789(01)00378-5.

[137] R. A. Vicencio, M. Johansson, Discrete flat-band solitons in the kagome lattice, Phys. Rev. A 87 (2013), 061803(R), doi:10.1103/PhysRevA.87.061803.

[138] S. Longhi et al., Observation of dynamic localization in periodically curved waveguide arrays, Phys. Rev. Lett. 96 (2006), 243901, doi:10.1103/PhysRevLett.96.243901.

[139] G. Q. Liang and Y. D. Chong, Optical Resonator Analog of a Two-Dimensional Topological Insulator, Phys. Rev. Lett. 110 (2013), 203904, doi:10.1103/PhysRevLett.110.203904.

[140] D. Leykam, S. Mittal, M. Hafezi, Y. D. Chong, Phys. Rev. Lett. 121 (2018), 023901, doi:10.1103/PhysRevLett.121.023901.

[141] A. Yariv, Coupled-mode theory for guided-wave optics, IEEE J. Quant. Electron. 9 (1973), 919-933, doi:10.1109/JQE.1973.1077767.

[142] F. S.-S Chien, J. B. Tu, W.-F. Hsieh, and S.-C. Cheng, Tight-binding theory for coupled photonic crystal waveguides, Phys. Rev. B 75 (2007), 125113, doi:10.1103/PhysRevB.75.125113.

[143] S. Mookherjea, A. Yariv, Optical pulse propagation in the tight-binding approximation, Opt. Exp. 9 (2001), 91-96, doi:10.1364/OE.9.000091.

[144] D. Guzmán-Silva, G. Cáceres-Aravena, R. A. Vicencio, Phys. Rev. Lett. 127 (2021), 066601, doi:10.1103/PhysRevLett.127.066601.

[145] T. Fukui, Y. Hatsugai, H. Suzuki, Chern numbers in discretized Brillouin zone: efficient method of computing (spin) Hall conductances, J. Phys. Soc. Jpn. 74 (2005), 1674–1677, doi:10.1143/jpsj.74.1674.

[146] W. Jiang, M. Kang, H. Huang, H. Xu, T. Low, F. Liu, Topological band evolution between Lieb and kagome lattices, Phys. Rev. B 99 (2019), 125131, doi:10.1103/PhysRevB.99.125131.

[147] P.P. Beličev, G. Gligorić, A. Maluckov, M. Stepić, Dynamics of dark solitons localized at structural defect in one-dimensional photonic lattices with defocusing saturable nonlinearity, EPL 104 (2013), 14006, doi:10.1209/0295-5075/104/14006.

[148] M. Stojanović Krasić et al., Localized modes in a two-dimensional lattice with a pluslike geometry, Phys. Rev. E 102 (2020), 032207, doi:10.1103/PhysRevE.102.032207.

[149] A. Mančić, M. G. Stojanović, M. Stepić, Linear compact localized modes in flux-dressed two-dimensional plus lattice, Advanced Technologies (2022), doi:10.5937/savteh2202036m.

[150] S. M. Zhang, L. Jin, Compact localized states and localization dynamics in the dice lattice, Phys. Rev. B 102 (2020), 054301, doi:10.1103/PhysRevB.102.054301.

[151] M. G. Stojanović, A. Mančić, M. Stepić, A. Maluckov, Shaping the dynamics of Aharonov-Bohm caged localized modes by nonlinearity, Facta Uni. Phys. Chem. Tech. 20 (2022), 55-65, doi:10.2298/FUPCT2201055S.

Биографија

Мирјана Стојановић рођена је 15.5.1993. године у Нишу.

Основну школу „Бубањски хероји" и Гимназију „Светозар Марковић" у Нишу, завршила је као носилац Вукове дипломе. Школске 2012/2013. године уписала је основне академске студије физике на Природно-математичком факултету у Нишу и завршила их 2015. године са просеком 9,67. Исте године, уписала је мастер академске студије на смеру Општа физика и завршила их са просеком 9,8, одбранивши Мастер рад под називом „Модел електричне проводности аксона", под менторством професорке Љиљане Стевановић, 2018. године. Докторске студије, на којима тренутно има просек 9,92, уписала је 2018. године.

Повеља Природно-математичког факултета у Нишу, за најбољег студента који је завршио мастер академске студије у школској 2017/18. години, на студијском програму Физика, додељена јој је 2019. године.

На Институту за нуклеарне науке „Винча" запошљена је 2019. године као истраживач-приправник и ангажована на пројекту Министарства просвете науке и технолошког развоја ИИИ 45010 „Фотоника микро и нано структурних материјала".

Учествовала је на билатералном пројекту „Оптички прелази у фотонским решеткама" са Немачком (број пројекта: 451-03-01732/2017-09/15 (2019)).

Била је члан Организационог одбора VII међународне летње школе и конференције „PHOTONICA 2019".

Члан је Оптичког друштва Србије од 2019. године.

Била је учесник на истраживачкој теми 0402006 „Фотоника микро и нано структурних материјала" 2020. године и истраживачкој теми 0402104 „Физика комплексних система" 2021. године.

Звање истраживач-сарадник стекла је 2021. године.

Тренутно је ангажована на истраживачкој теми 0402312 „Комплексни системи: теорија и примене".

Од 2023. године ангажована је на пројекту „DIfferential Lung Impedance in heart-Failure Estimation (D-LIFE)", Фонда за иновациону делатност PC (Collaborative Grant

Scheme Program, project ID=51878, Oct 2022 - Sep 2024).

У току научно-истраживачког рада учествовала је на више националних и међународних конференција, коаутор је у два научна рада у врхунским међународним часописима (M21), једном раду у међународном истакнутом часопису (M22), једном раду у националном часопису од међународног значаја (M24) и једном раду у истакнутом националном часопису (M52).

Библиографија

Радови у врхунским међународним часописима [M21]:

1. M. G. Stojanović, M. Stojanović Krasić, A. Maluckov, M. Johansson, I. A. Salinas, R. A. Vicencio, M. Stepić, Localized modes in linear and nonlinear octagonal-diamond lattices with two flat bands, Phys. Rev. A 102 (2020), 023532, doi:10.1103/physreva.102.023532. (IF=3,140)

2. M. Stojanović Krasić, M. Stojanović, A. Maluckov, L. J. Maczewsky, A. Szameit, M. Stepić, Localized modes in a two-dimensional lattice with a pluslike geometry, Phys. Rev. E 102 (2020), 032207, doi:10.1103/PhysRevE.102.032207. (IF=2,529)

Радови у истакнутим међународним часописима [M22]:

1. M. G. Stojanović, S. Gündoğdu, D. Leykam, D. G. Angelakis, M. S. Krasić, M. Stepić, A. Maluckov, Nonlinear compact localized modes in flux-dressed octagonal-diamond lattice. Phys. Scri. 97 (2022), 030006, doi:10.1088/1402-4896/ac5357. (IF=3,081)

Радови у националним часописима међународног значаја [M24]:

1. M. G. Stojanović, A. Mančić, M. Stepić, A. Maluckov, Shaping the dynamics of Aharonov-Bohm caged localized modes by nonlinearity, Facta Universitatis, Series: Physics, Chemistry and Technology 20 (2022), 55-65, doi:10.2298/FUPCT2201055S.

Радови у истакнутим националним часописима [M52]:

1. A. Mančić, M. G. Stojanović, M. Stepić, Linear compact localized modes in flux-dressed two-dimensional plus lattice, Advanced Technologies (2022), doi:10.5937/savteh2202036m.

Саопштења са међународних скупова штампана у изводу [M34]:

1. M. Stojanović Krasić, M. G. Stojanović, A. Maluckov and M. Stepić, Localized modes in two-dimensional "plus" lattice, The seventh International School and Conference on Photonics „Photonica 2019", Belgrade, Serbia, p. 74 (2019).

2. M. G. Stojanović, M. Stojanović Krasić, M. Johansson, I. A. Salinas, R. A. Vicencio, M. Stepić, Localized modes in two-dimensional octogonal-diamond lattice, The seventh International School and Conference on Photonics „Photonica 2019", Belgrade, Serbia, p. 78 (2019).

3. M. G. Stojanović, S. Gundogdu, M. Stojanović Krasić, M. Stepić, A. Maluckov, Compact localized modes in the flux dressed 2D octagonal-diamond photonic lattice in the presence of nonlinearity, The eighth International School and Conference on Photonics „Photonica 2021“, Belgrade, Serbia, p. 69 (2021).

4. M. G. Stojanović, Ana Mančić, Milutin Stepić, Aleksandra Maluckov, Compact localized modes in Dice lattice dressed by artificial flux, 11th Conference of the Balkan Physical Union (BPU11 Congress), Belgrade, Serbia, p. 146 (2022).

5. Aleksandra Maluckov, Ana Mančić, Milutin Stepić, M. G. Stojanović, Existence and dynamics of eigenmodes in linear flux dressed two-dimensional plus lattice, 11th Conference of the Balkan Physical Union (BPU11 Congress), Belgrade, Serbia, p. 149 (2022).

Саопштења са скупа националног значаја штампано у изводу [M64]:

1. M. G. Stojanović, M. Stojanović Krasić, A. Maluckov, M. Stepić, Compactons in two-dimensional octagonal-diamond lattices, 13 th Photonics Workshop, Kopaonik, Serbia, p. 28 (2020).

2. M. G. Stojanović, Ana Mančić, Milutin Stepić, Aleksandra Maluckov, Dynamics of nonlinear Aharonov-Bohm caged compact localized modes in Dice lattice, 15th Photonics Workshop, Kopaonik, Serbia, p. 28 (2022).

3. M. G. Stojanović, Ana Mančić, Milutin Stepić, Aleksandra Maluckov, Localized modes in linear flux dressed two-dimensional plus lattice, 16th Photonics Workshop, Kopaonik, Serbia, p. 36 (2023).

Изјаве аутора

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом:

Локализоване структуре у нелинеарним фотонским решеткама с равним енергетским зонама у линеарном режиму

Која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивала на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредила ауторска права, нити злоупотребила интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

_____

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

Локализоване структуре у нелинеарним фотонским решеткама с равним енергетским зонама у линеарном режиму

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предала за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

_____

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Локализоване структуре у нелинеарним фотонским решеткама с равним енергетским зонама у линеарном режиму

Дисертацију са својим пролозима сам предала у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучила.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство-некомерцијално (CC BY-NC)
3. **Ауторство-некомерцијално-без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство-некомерцијално-делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство-без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство-делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

_____