

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Rančić Svetozar

Vizuelizacija beskonačno malih
savijanja krivih i površi

doktorska disertacija

Niš, januar 2011.

Sadržaj

1	Beskonačno mala savijanja krivih	3
1.1	Uvod	3
1.2	Odredjivanje polja savijanja krive	4
1.3	Beskonačno malo savijanje krivih u ravni	6
1.4	Vizuelizacija beskonačno malih savijanja krivih	9
1.5	Primeri	12
2	Beskonačno mala savijanja toroida sa četvorouganim meridijanom	18
2.1	Uvod	18
2.2	Opis problema	20
2.3	Beskonačno malo savijanje prvog reda rotacione površi	22
2.4	Toroidi generisani četvorouganim meridijanom	25
2.4.1	Toroidi sa konveksnim četvorouganim meridijanom	26
2.4.2	Toroidi sa nekonveksnim četvorouganim meridijanom	37
2.5	Toroidi sa meridijanom oblika paralelograma	43
2.6	Odredjivanje polja beskonačno malog savijanja toroida sa četvorouganim meridijanom	48
2.7	Vizuelizacija beskonačno malih savijanja toroida generisanih četvorouganim meridijanom	50
2.7.1	Korišćenje SurfBand programa	50
2.7.2	Primeri	53
3	Beskonačno mala savijanja toroida sa poligonalnim meridijanom	57
3.1	Uvod	57
3.2	Toroid sa poligonalnim meridijanom	58

3.3	Polje beskonačno malog savijanja prvog reda toroida sa poligonalnim meridijanom	60
3.4	Primeri	65
3.5	Beskonačno mala savijanja višeg reda rotacionih površi	67
3.6	Beskonačno mala savijanja višeg reda toroida generisanih poligonalnim meridijanom	73
3.7	Primeri	77
3.7.1	Primeri	77
4	Algoritam za nalaženje k najkraćih puteva u grafu	82
4.1	Uvod	82
4.2	k najkraćih puteva bez ponavljanja čvorova	83
4.3	Novi algoritam	86
4.4	Eksperimentalni rezultati	90
4.4.1	Slučajni grafovi	90
4.4.2	Greed4 grafovi	92
4.4.3	Greed4of8 grafovi	95
4.4.4	Geografski grafovi	98
4.5	Zaključak	101
	Literatura	103

Predgovor

Beskonačno mala savijanja krivih i površi su deo opštije teorije savijanja, koja predstavlja jednu od glavnih delova globalne diferencijalne geometrije. Koncept beskonačno malih deformacija je istraživao prvo na beskonačno malim deformacijama površi, a zatim i u teoriji krivih i mnogostrukosti. Rad razmatra probleme teorije beskonačno malih savijanja. Takodje je predstavljen i razvijeni programski alat za rad sa eksplicitno definisanim funkcijama. Bitan cilj tokom rada na disertaciji je bio razvoj programskog alata, intuitivnog i lakog za korišćenje, specijalizovanog za ispitivanje fleksibilnosti i vizuelno predstavljanje fleksibilnih krivih i površi. Takodje su predstavljeni i rezultati istraživanja algoritama nad grafovima, problema određivanja k najkraćih puteva između dva čvora u težinskog grafu. Rad se sastoji od četiri glave:

1. Beskonačno mala savijanja krivih
2. Beskonačno mala savijanja toroida sa četvorougaoim meridijanom
3. Beskonačno mala savijanja toroida sa poligonalnim meridijanom
4. Algoritam za nalaženje k najkraćih puteva u grafu

U prvoj glavi se razmatra beskonačno malo savijanje krivih u E^3 i određuje polje beskonačno malog savijanja. Uticaj polja beskonačno malog savijanja je posmatran, kao i uslovi pod kojima deformisana kriva ostaje u ravni. Uz pomoć alata za rad sa eksplicitno definisanim funkcijama razvijen je i u ovoj glavi prezentovan InfBand, alat za grafičko predstavljanje fleksibilnih krivih. Uticaj polja beskonačno malog savijanja je razmatran i vizuelizovan razvijenim alatom.

U drugoj glavi razmatrane su toroidne rotacione površi generisane četvorougaoim meridijanom. Dati su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje polja beskonačno malog savijanja dobijene površi. Temena četvorougaoim meridijana su data u obliku koordinata u Dekatovom pravouglom koordinatnom

sistemu i na osnovu njih su razmatrani uslovi za postojanje polja. Diskutovane su i istaknute nadjene klase fleksibilnih površi sa četvorougaoanim meridijanom. Opisan je SurfBand, razvijeni programski alat za numeričku proveru uslova fleksibilnosti, simboličku definiciju deformisanih površi, numeričko određivanje tačaka na površi i vizuelizaciju polaznih i deformisanih površi. Prikazani su primeri nadjenih fleksibilnih toroidnih površi sa četvorougaoanim meridijanom.

U trećoj glavi razmatrane su toroidne rotacione površi generisane poligonalnim meridijanom u E_3 . Dati su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje polja beskonačno malog savijanja ovih površi. Temena poligonalnog meridijana su data u obliku koordinata u Dekartovom koordinatnom sistemu i na osnovu njih su razmatrani uslovi za postojanje polja. Razmatrana su i beskonačno mala savijanja višeg reda. Dati su primeri nadjenih fleksibilnih toroidnih površi.

U četvrtoj glavi predstavljen je novi algoritam za rešavanje problema nalaženja k najkraćih puteva između dva čvora u težinskom grafu. Zahteva se da nadjeni putevi budu uredjeni u neopadajućem redosledu dužina, da ne poseduju cikluse, tj. nije dozvoljeno ponavljanje čvorova na putu, i nadjeni putevi se razlikuju za bar jedan čvor. Algoritam koristi osnovnu ideju iz A^* algoritma i poziva Dijkstrin algoritam za procenu cene dostizanja određiškog čvora. Algoritam poziva Dijkstrin algoritam samo jednom i koristi dobijene vrednosti za generisanje kandidata za sledeći put. Takodje koristi efikasni metod za detektovanje ciklusa u podputu za rano odsecanje neprihvatljivih puteva sa ciklusima. Navedeni su i eksperimentalni rezultati za nekoliko tipova grafova u cilju ilustrovanja efikasnosti i primenljivosti algoritma. U ovoj glavi su prezentovani novi, nepublikovani rezultati.

Želim da izrazim iskrenu zahvalnost mentoru, profesoru dr Ljubici Velimirović, na svesrdnoj i nesebičnoj pomoći u svim fazama izrade disertacije. Počev od upoznavanja sa problematikom i literaturom, sugestijama i savetima je doprinela izradi i uobličenju konačne verzije rada.

Želim da se zahvalim kolegi Milanu Zlatanoviću na saradnji prilikom izrade zajedničkih radova.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj porodici na razumevanju i podršci tokom rada na disertaciji. Supruzi Lidiji se zahvaljujem na interesovanju za moj rad i pomoći koju mi je pružila tokom izrade.

Januar 2011,

Rančić Svetozar

Poglavlje 1

Beskonačno mala savijanja krivih

U ovoj glavi se razmatra beskonačno malo savijanje krivih u E^3 i određuje polje beskonačno malog savijanja. InfBend, alat za grafičko predstavljanje fleksibilnih krivih je prezentovan. Uticaj polja beskonačno malog savijanja je razmatran i vizuelizovan razvijenim alatom. Ova glava je proizišla iz rezultata objavljenih u sledećim radovima: [7], [49], [62], [65] i [66].

1.1 Uvod

Beskonačno mala savijanja površi i krivih su deo opštije teorije savijanja, koja predstavlja jednu od glavnih delova globalne diferencijalne geometrije. Koncept beskonačno malih deformacija je istraživao prvo na beskonačno malim deformacijama površi, a zatim i u teoriji krivih i mnogostrukosti.

Pri savijanju površ je uključena u kontinualnu familiju izometrijskih površi, tako da krive zadržavaju dužinu luka a i uglovi su takodje nepromenjeni. Poznata je činjenica da su dve površi trivijalno izometrične ako se jedna može dobiti iz druge krutim pomeranjem ili ravanskom simetrijom (ili konačnim brojem takvih transformacija). Površ je jednoznačno definisana ako postoje samo trivijalno izometrične površi. Svaka jednoznačno definisana površ je kruta u smislu izometrijskih savijanja.

Sa druge strane beskonačno malo savijanje površi nije izometrijska deformacija, ili grubo govoreći jeste, ali sa odgovarajućom tačnošću. Dužina luka je stacionarna pod beskonačno malim savijanjem.

Teorija beskonačno malih deformacija ima brojne primene u matematici i mehanici (krutost ljuski). Prvi rezultati beskonačno malih savijanja nekon-

veksnih površi pripadaju H. Liebmanu [30], [31]. On je dokazao da su torus i analitičke površi koje sadrže konveksne trake kruti u smislu beskonačno malog savijanja. Kasnije je Efimov u [12] dao uslove za $\mathbf{z}(\mathbf{u})$ da bude polje beskonačno malog savijanja regularne krive.

Računarska grafika je oblast koja se rapidno razvija i inspiriše brz rast računarske snage. Danas postoji mnogo naučnih i industrijskih oblasti koje koriste programe bazirane na računarskoj grafici. Beskonačno mala savijanja krivih i površi ispoljavaju nedostatak u ovoj oblasti, mada se u radovima mogu naći grafički prezentovani primeri fleksibilnih krivih i površi. U tom smislu smo pristupili razvoju specijalizovanog alata za vizuelizaciju beskonačno malih deformacija krivih i površi - InfBend.

1.2 Odredjivanje polja savijanja krive

Beskonačno mala savijanja površi i mnogostrukosti su proučavani u [12], [24], [25], [56], [57]. Rezultate istraživanja beskonačno malih savijanja krivih u E^3 možemo naći u [12], [57], [58] i [62]. Rad u ovom pravcu je nastavak istraživanja čiji su rezultati dati u [57].

Na početku ćemo dati neke polazne pojmove, definicije i teoreme prema [12] i [57].

Definicija 1.2.1 *Posmatrajmo neprekidnu regularnu krivu*

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u), \quad (1.1)$$

uključenu u familiju krivih

$$C_\varepsilon : \mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r}(u) + \varepsilon \mathbf{z}(u), \quad (\varepsilon \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in \mathbb{R}) \quad (1.2)$$

gde je u realni parametar i dobijamo C za $\varepsilon = 0$ ($C \equiv C_0$).

Familija krivih C_ε je beskonačno malo savijanje krive C ako

$$ds_\varepsilon^2 - ds^2 = o(\varepsilon), \quad (1.3)$$

gde $\mathbf{z} = \mathbf{z}(u)$ je polje beskonačno malog savijanja krive C.

Teorema 1.2.1 [12] *Potreban i dovoljan uslov da $\mathbf{z}(\mathbf{u})$ bude polje beskonačno malog savijanja krive C je*

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{z} = 0. \quad \square$$

Sledeća teorema je povezana sa određivanjem polja beskonačno malog savijanja krive C .

Teorema 1.2.2 [57] *Polje beskonačno malog savijanja krive C iz (1.1) je*

$$\mathbf{z}(u) = \int [p(u)\mathbf{n}(u) + q(u)\mathbf{b}(u)]du + \text{const}, \quad (1.4)$$

gde su $p(u), q(u)$ proizvoljne integrabilne funkcije, a vektori $\mathbf{n}(u)$, $\mathbf{b}(u)$ su respektivno jedinični vektori normale i binormale vektorskog polja krive C . $\square$

Imajući na umu da jedinični vektori binormale i normale polja krive iz (1.1) mogu biti napisani u obliku

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}||\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}, \quad (1.5)$$

polje beskonačno malog savijanja može biti napisano u obliku

$$\mathbf{z}(u) = \int [p(u) \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}||\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} + q(u) \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}]du,$$

gde $p(u), q(u)$ su proizvoljne integrabilne funkcije, ili u obliku

$$\mathbf{z}(u) = \int [P_1(u)\dot{\mathbf{r}} + P_2(u)\ddot{\mathbf{r}} + Q(u)(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})]du \quad (1.6)$$

gde $P_i(u)$, $i = 1, 2$, $Q(u)$ su takodje proizvoljne integrabilne funkcije.

Napomena 1.2.1 *Beskonačno male deformacije specijalne vrste su razmatrane u [45].*

Polje beskonačno malog savijanja krive može se odrediti simbolički rešavanjem neodređenog integrala datog sa (1.4). Za taj pristup potrebno je realizovati simboličku integraciju funkcija ili koristiti neki programski paket koji to podržava, recimo programski paket *Mathematica*. Naravno, uz uslov da je moguće naći integral za konkretne funkcije p i q u zatvorenom obliku.

Pristup koji je realizovan nije zasnovan na nalaženju neodređenog integrala kojim je definisano polje i sa adicijom konstantom ima beskonačno

mnogo rešenja. Razvijen je podsistem za rad sa eksplicitno definisanim funkcijama, koji polazi od simboličkog zapisa funkcije više nezavisno promenljivih, parsira ga i prevodi u interni zapis koristeći stablo izraza. Ovakav zapis omogućava brzo izračunavanje vrednosti funkcije, a to se koristi za numeričko rešavanje integrala datog pomoću (1.4). Uz mogućnost da se interaktivno menja adicijona konstanta mogu se dobiti i vizuelizovati različite krive iz familije krivih date sa (1.2).

1.3 Beskonačno malo savijanje krivih u ravni

U ovom poglavlju razmotrićemo beskonačno mala savijanja ravnih krivih koje i posle savijanja ostaju u ravni (istoj ili nekoj drugoj) posle ovakve deformacije. Odredićemo polje beskonačno malih savijanja za ove slučajeve.

Posmatrajmo regularnu zatvorenu ravnu krivu datu u polarnim koordinatama

$$C : \rho = \rho(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.7)$$

Pod beskonačno malim savijanjima ova kriva je uključena u familiju krivih

$$C_\varepsilon : \rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (\varepsilon \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0). \quad (1.8)$$

U vektorskoj formi ove krive su date kako sledi

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.9)$$

$$C_\varepsilon : \mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r}(\theta) + \varepsilon \mathbf{z}(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (1.10)$$

gde $\mathbf{z}(\theta)$ je polje beskonačno malog savijanja.

Napomena 1.3.1 *U slučaju deo po deo glatke krive u tačkama neregularnosti pretpostavljamo kontinualnost polja savijanja na krivoj, tj.*

$$\mathbf{z}(\theta - 0) = \mathbf{z}(\theta + 0). \quad (1.11)$$

Sledeće razmatranje daje polje savijanja koje krivu zadržava u polaznoj ravni posle beskonačno malog savijanja.

Teorema 1.3.1 [57] *Polje beskonačno malog savijanja koje krivu*

$$C : \rho = \rho(\theta) \quad (1.12)$$

pod dejstvom beskonačno malog savijanja uključuje u familiju ravnih krivih

$$C_\varepsilon : \rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(\theta), \quad (\varepsilon \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0), \quad (1.13)$$

je dato u obliku

$$\mathbf{z}(\theta) = \int p(\theta) \mathbf{n}(\theta) d\theta + c. \quad \square \quad (1.14)$$

Ako je jednačina krive data u vektorskoj formi,

$$C : \mathbf{r}(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta \mathbf{i} + \rho(\theta) \sin \theta \mathbf{j}$$

imamo

$$\mathbf{z} = \int p(\theta) \frac{(\rho \ddot{\rho} - \rho^2 - 2\dot{\rho}^2)[(\rho \cos \theta + \dot{\rho} \sin \theta) \mathbf{i} + (\rho \sin \theta - \dot{\rho} \cos \theta) \mathbf{j}]}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} |\rho \ddot{\rho} - \rho^2 - 2\dot{\rho}^2|} d\theta.$$

Polazeći od

$$\begin{aligned} \rho(\theta) \cos \theta + \dot{\rho}(\theta) \sin \theta &= (\rho(\theta) \sin \theta)', \\ \rho(\theta) \sin \theta - \dot{\rho}(\theta) \cos \theta &= -(\rho(\theta) \cos \theta)', \end{aligned}$$

biramo

$$p(\theta) = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \dot{\rho}(\theta)^2},$$

što vodi do

$$\mathbf{z}(\theta) = \int [(\rho(\theta) \sin \theta) \mathbf{i} - (\rho(\theta) \cos \theta) \mathbf{j}] d\theta = \rho(\theta) \sin \theta \mathbf{i} - \rho(\theta) \cos \theta \mathbf{j}. \quad (1.15)$$

Pod beskonačno malim savijanjem krive neke njene geometrijske karakteristike se menjaju. Neke od njih su razmatrane u [57]. U radu [66] je data sledeća teorema:

Teorema 1.3.2 *Za regularnu planarnu krivu klase C^3 , datu sa (1.1), varijacija torzije τ pod beskonačno malim savijanjem (1.4), je nezavisna od funkcije $p(\theta)$, već zavisi samo od funkcije $q(\theta)$.*

Ako unesemo jedinične vektore normale $\mathbf{n}(\theta)$ i binormale $\mathbf{b}(\theta)$ krive C dobijamo:

$$\mathbf{n}(\theta) = \left(-\frac{\rho \cos \theta + \dot{\rho} \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}, \frac{-\rho \sin \theta + \dot{\rho} \cos \theta}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}, 0 \right), \quad \mathbf{b}(\theta) = (0, 0, 1).$$

Sada imamo familiju krivih

$$C_\varepsilon : \rho_\varepsilon(u) = \rho(\theta) + \varepsilon \mathbf{z}(\theta), \quad (\varepsilon \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in \mathfrak{R}) \quad (1.16)$$

tj.

$$C_\varepsilon : \rho_\varepsilon(u) = \left(\rho \cos \theta - \varepsilon \int \frac{p(\theta)(\rho \cos \theta + \dot{\rho} \sin \theta)}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}} d\theta, \right. \\ \left. \rho \sin \theta + \varepsilon \int \frac{p(\theta)(-\rho \sin \theta + \dot{\rho} \cos \theta)}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}} d\theta, \varepsilon \int q(\theta) d\theta \right). \quad (1.17)$$

Varijacija torzije pod beskonačno malim savijanjem je

$$\delta\tau = \frac{\partial \tau_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}} q''(\theta) + \frac{-\dot{\rho}(2\rho + 3\ddot{\rho}) + \rho\rho^{(3)}}{(\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho})^2} q'(\theta) \\ + \frac{\rho^2 + 6\dot{\rho}^2 - 4\rho\ddot{\rho} + 3\ddot{\rho}^2 - 2\dot{\rho}\rho^{(3)}}{(\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho})^2} q(\theta). \quad (1.18)$$

Vidimo da varijacija torzije zavisi samo od funkcije $q(\theta)$. $\square$

U cilju zadržavanja funkcije u polaznoj ravni zahteva se $\delta\tau = 0$. U ovom slučaju, imajući u vidu (1.18), ako $\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} \neq 0$, tj. $\rho(\theta) \neq \cos(\theta + c_2)$, i označavajući

$$a(\theta) = 1, \\ b(\theta) = \frac{-\dot{\rho}(2\rho + 3\ddot{\rho}) + \rho\rho^{(3)}}{(\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho})}, \\ c(\theta) = \frac{\rho^2 + 6\dot{\rho}^2 - 4\rho\ddot{\rho} + 3\ddot{\rho}^2 - 2\dot{\rho}\rho^{(3)}}{(\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho})},$$

iz (1.18) dobijamo kraće

$$a(\theta)q''(\theta) + b(\theta)q'(\theta) + c(\theta)q(\theta) = 0. \quad (1.19)$$

1.4 Vizuelizacija beskonačno malih savijanja krivih

Nedostatak specijalizovanih programskih alata za rad sa beskonačno malim deformacijama krivih i njihovom vizuelizacijom postoji i učinjen je pokušaj da se da doprinos u ovoj oblasti. Takođe je i da se omogući lak i interaktivan vizuelni prikaz krivih i uticaja polja beskonačno malih savijanja na njih, videti [65] i [66].

Takav alat treba da ispuni postavljene zahteve i da poveže u funkcionalnu celinu različite oblasti računarskih nauka zajedno sa teorijom beskonačno malih savijanja. Alat namenjen grafičkoj prezentaciji krivih i njihovim oblicima pod uticajem polja savijanja, zahteva osnovne mogućnosti za numeričko i simboličko izračunavanje. Podrazumeva se mogućnost rada sa parametarski definisanim krivama, definisanje funkcija uključenih u savijanje i provera korektnosti zadatih funkcija. Simboličko diferenciranje je takođe potrebno. Dobijene krive se crtaju za vrednosti parametara iz intervala navedenog od strane korisnika. Alat uključuje mogućnost za numeričko izračunavanje tačaka koje pripadaju krivoj. Crtanje polazne krive i njenih oblika dobijenih beskonačno malim savijanjima kao trodimenzionalnih (3D) objekata zahteva upotrebu neke grafičke biblioteke i u tu svrhu koristimo OpenGL kao industrijski standard u ovoj oblasti. Uključivanje OpenGL-a pruža bogate mogućnosti. Mogućnost brzog iscrtavanja i mogućnost interaktivnog ispitivanja dobijenog 3D objekta. Alat je razvijen u programskom jeziku C++ na *Microsoft Windows* platformi i pruža visok nivo interaktivnog ispitivanja.

Interesantno je videti uticaj polja beskonačno malog savijanja na fleksibilne krive i površi i odgovarajuće savijene oblike. Hronološki posmatrano CurveBend je naziv prve verzije alata za vizuelizaciju krivih. Pre njega bavili smo se beskonačno malim deformacijama površi i razvili alat pod nazivom SurfBend namenjen kreiranju 3D prezentacija i vizuelizaciji primene beskonačno malih savijanja na fleksibilne površi slične torusu. On je u ranijoj verziji prezentovan na ESI konferenciji "Rigidity and Flexibility", u Beču, 2006. [60]. Te površi su dobijene rotacijom meridijana oblika poligona. Takođe je bilo moguće pokazati krugove formirane temenima poligona i njihove savijene oblike, kao i vizuelno prezentovati površi kreirane tokom takvih deformacija [43].

Razvoj je nastavljen i SurfBend-u su, kao podsistem, dodate funkcionalnosti originalno implementirane u CurveBend programu. Novom alatu je dat i opštiji naziv InfBend, što je akronim nastao od infinitesimal bending.

Daljim razvojem proširena je primena beskonačno malih savijanja na fleksibilne krive, kako u ravni, tako i na prostorne krive. Prostorne krive koje leže na nekim opšte poznatim površima su takodje ispitivane. Postavljeni ciljevi su bili da se osmisli i razvije alat, lak za upotrebu, namenjen:

- definisanju krive i deformacije date pomoću (1.4). Da ima fleksibilnost da prihvati simbolički zadatu krivu $\mathbf{C}$, takodje i funkcije $\mathbf{z}$, p i q ;
- vizuelnoj prezentaciji polaznih i deformisanih krivih, koja uključuje brza osnovna i 3D računanja. Vrlo je korisno i ilustrativno interaktivno ispitati savijene krive i površi koje formiraju savijanjem, i uticaj polja beskonačno malog savijanja na njima.

Programski alat je razvijen u objektno orijentisanom jeziku C++. Koristi eksplicitno definisane funkcije sa n nezavisno promenljivih. Implementirana je *parsiraj jednom - evaluiraj više puta* tehnika parsiranja za matematičke izraze date u obliku stringova. Ova komponenta, parser matematičkih izraza, parsira i kreira objektno orijentisano stablo izraza za matematičke izraze koji mogu da sadrže promenljive, konstante i funkcije iz skupa elementarnih funkcija. Da bi bio efikasan u ponovljenim izračunavanjima, parser kreira stablo izraza jednom, na početku i dalje koristi formirano stablo za svaku kasniju evaluaciju, bez potrebe za ponovnim parsiranjem. Stablo izraza je optimizovano izračunavanjem konstantnih delova izraza samo jednom, redukcijom pripadajućeg podstabla, tako da će se dalji zahtevi za evaluacijom brže realizovati.

Svaka od elementarnih funkcija je obuhvaćena odgovarajućom klasom i formirali smo hijerarhiju klasa u cilju podrške izgradnji strukture stabla kao stabla izraza funkcije. Svaka klasa u hijerarhiji ima svoje verzije i implementacije apstraktnih funkcija članica:

```
double evaluate (double * arguments);
Function * derive(int argNumber);
```

Funkcija `evaluate` je namenjena izračunavanju vrednosti elementarne funkcije obuhvaćene konkretnom klasom i kao argument uzima niz double vrednosti n parametara za koje želimo da izračunamo vrednost.

Funkcija `derive` je namenjena izgradnji nove strukture tipa stabla prema pravilima za derivaciju elementarnih funkcija, proširene pravilima za složene funkcije. Ima kao argument, redni broj nezavisno promenljive za koju se traži parcijalni izvod. Vrednost koju vraća je takodje tipa `Function *`, pa možemo da istaknemo da nam je tako omogućeno da izgradimo strukturu stabla izraza

za parcijalnu derivaciju proizvoljnog reda i takodje da izračunamo vrednosti dobijene funkcije pozivajući `evaluate` funkciju članicu.

Polazna tačka je eksplicitno definisana funkcija kao ulazni string, koja se parsira i proverava konzistentnost. Koristimo formalne tehnike parsiranja, koje uključuju gramatiku za opis takvih funkcija. Gramatika koja se koristi se može naći u [7], a kao alat za parsiranje korišćen je GOLD Parser [17]. GOLD Parser je besplatan više-jezički sistem za parsiranje, pseudo otvorenog koda, kako ga opisuje autor, Devin Kook. Može se koristiti za razvoj programskih jezika, skriptnih jezika i interpretera. Ovaj sistem za parsiranje je više-jezički sistem, što nije realizovano kroz generisanje koda, kako je to uobičajeno u Lex i Yacc alatima. Mogućnost upotrebe u više jezika je postignuta kroz serijalizaciju u fajl svih potrebnih podataka za parsiranje jezika opisanog nekom gramatikom. Fajl ima ekstenziju `cgt`, što je akronim za `compiled grammar table` i sadrži sve potrebne podatke za parsiranje: tabele, opise LALR i DFA automata, azbuku jezika i pravila gramatike za redukciju. Primena na parsiranje u bilo kom jeziku se svodi na čitanje `cgt` fajla, formiranje odgovarajućih tabela i uz poznavanje LR, sleva na desno, tehnike parsiranja može raditi parsiranje ulaznog niza.

Posle parsiranja gradi se objektno orijentisano stablo izraza - interna struktura tipa stabla - uz primenu Objektno Orijentisanog projektnog uzorka Struktura (Composite):

```
MainFunction * pF;
if( ManagerFunction::parse( string functionInscription ))
    pF = ManagerFunction::build(string functionInscription );
```

Takodje se koriste poznati OO uzorci Singleton, Apstraktna fabrika [14] za kreiranje objekata iz hijerarhije funkcija, gradnju stabla i izračunavanje funkcija.

Prema teoremama 1.2.1 i 1.2.2 razmatramo polje beskonačno malog savijanja $\mathbf{z}$ za zatvorenu krivu i vrednosti parametara $u \in [0, 2\pi]$. Ako izračunamo odredjeni integral

$$\mathbf{z}(a) - \mathbf{z}(0) = \int_0^a [p(u)\mathbf{n}(u) + q(u)\mathbf{b}(u)]du, \quad (1.20)$$

dobijamo

$$\mathbf{z}(a) = \int_0^a [p(u)\mathbf{n}(u) + q(u)\mathbf{b}(u)]du + \mathbf{z}(0). \quad (1.21)$$

Aditivna konstanta $const$ iz (1.4) je ovde $\mathbf{z}(0)$. Polazeći od toga da možemo da nadujemo parcijalne izvode, da izračunamo njihove vrednosti za prosledjene argumente, možemo da primenimo numeričke metode, videti (1.21), za izračunavanje vrednosti polja beskonačno malog savijanja u diskretizovanim deobnim tačkama iz intervala $a \in [0, 2\pi]$. Za numeričku integraciju korišćena je poznata uopštena Simpsonova formula [35], a korisniku je data mogućnost da zahteva broj deobnih tačaka, kao i broj tačaka unutar svakog od segmenata određenog susednim deobnim tačkama. Dalje, izračunavamo vrednosti u deobnim tačkama polazne krive $\mathbf{C}$ i poznajući ε i vrednosti polja dobijamo koordinate tačaka savijene krive:

$$C_\varepsilon : \mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r}(\theta) + \varepsilon \mathbf{z}(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.22)$$

Vizuelizacija savijenih krivih $\mathbf{C}_\varepsilon$ je dobijena korišćenjem OpenGL [34], [16] standarda. Stoga je portabilnost na druge platforme olakšana. Dovodjenje nivoa kontrole na interaktivni nivo je uradjeno korišćenjem *MFC* biblioteke [46]. U mogućnosti smo da rotiramo 3D objekat i posmatramo ga iz različitih uglova i tačaka pogleda. Upotrebljene su kontrole tipa slider za lako, interaktivno podešavanje važnih parametara za izračunavanja kao ε , broj segmenata i broj tačaka unutar segmenata za numeričku integraciju, kao i aditivne konstante u svakoj od tri dimenzije. Tokom deformacije krive opisuju površi i u mogućnosti smo da damo vizuelni prikaz takvih površi u ispunjenom ili žičanom modelu. Možemo da interaktivno podesimo transparentnost nevidljivih linija u prikazu žičanog modela.

InfBend je besplatan softver i dostupan je na adresi:

http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/licne_prezentacije/103/software.php

Sledeći primeri su dobijeni korišćenjem našeg alata za vizuelizaciju.

1.5 Primeri

Beskonačno mala savijanja krivih pretpostavljaju da su deformacije male i da ne mogu biti vidljive golim okom. Da bismo ih učinili vidljivim u primerima koji slede uzećemo znatno veće vrednosti za parametar ε .

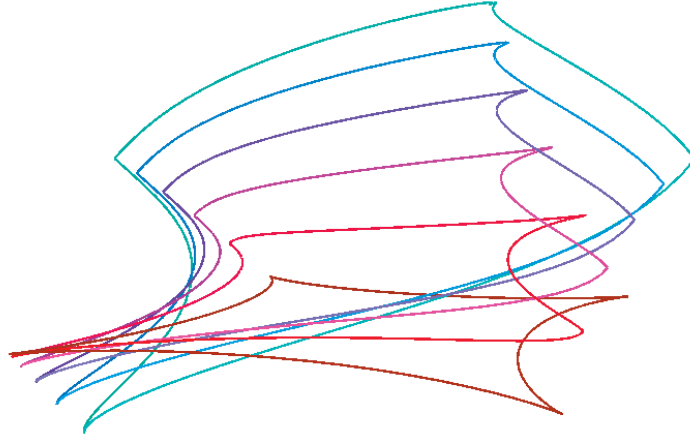
Primer 1.5.1 *Posmatrajmo krivu astroidu datu parametarskim jednačinama*

$$C : r(u) = (\cos^3(u), \sin^3(u), 0),$$

biramo polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) gde

$$p(u) = 1, \quad q(u) = \sin(u).$$

Slika 1.5.1. prezentuje polaznu krivu astroidu C i deformisane krive C_ε , za $\varepsilon = 0, (0.08), 0.4$ u ovom slučaju.



Slika 1.5.1.

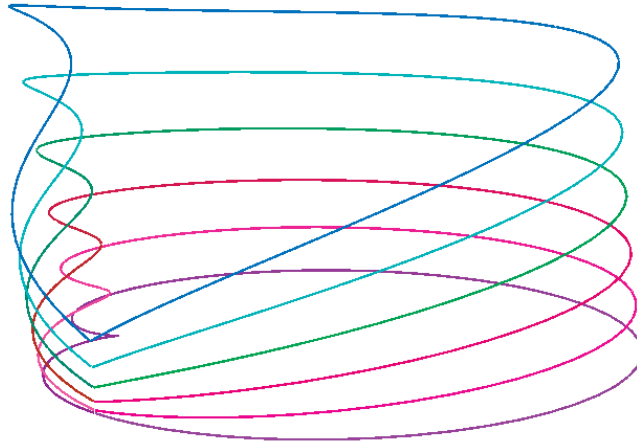
Primer 1.5.2 Posmatrajmo kardioidu datu u parametarskom obliku

$$C : r(u) = ((1 + \sin(u))\cos(u), (1 + \sin(u))\sin(u), 0).$$

Polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ je izabrano prema (1.21) gde

$$p(u) = \sqrt{2(1 + \sin(u))}, \quad q(u) = 2(\pi - u).$$

Slika 1.5.2. prezentuje polaznu krivu C i deformisane krive C_ε za $\varepsilon = 0, (0.03), 0.15$.



Slika 1.5.2.

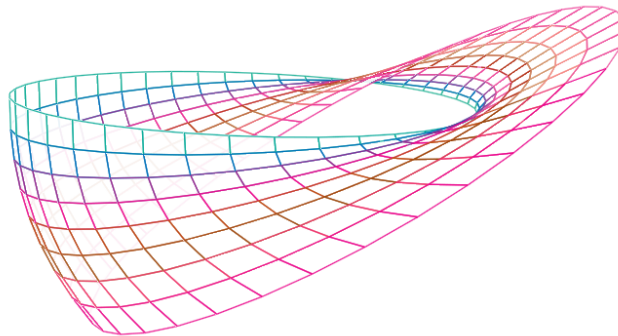
Primer 1.5.3 Posmatrajmo krug čiji je parametarski oblik

$$C : r(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

i neka je polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) gde

$$p(u) = 0, \quad q(u) = \cos(u) + \sin(u).$$

Slika 1.5.3. prezentuje polaznu krivu C i deformisane krive C_ε , za vrednosti $\varepsilon = 0, (0.08), 0.4$. U ovom slučaju su vizuelizovane krive i formirana površ kao žičani model uz semi transparentnost.



Slika 1.5.3.

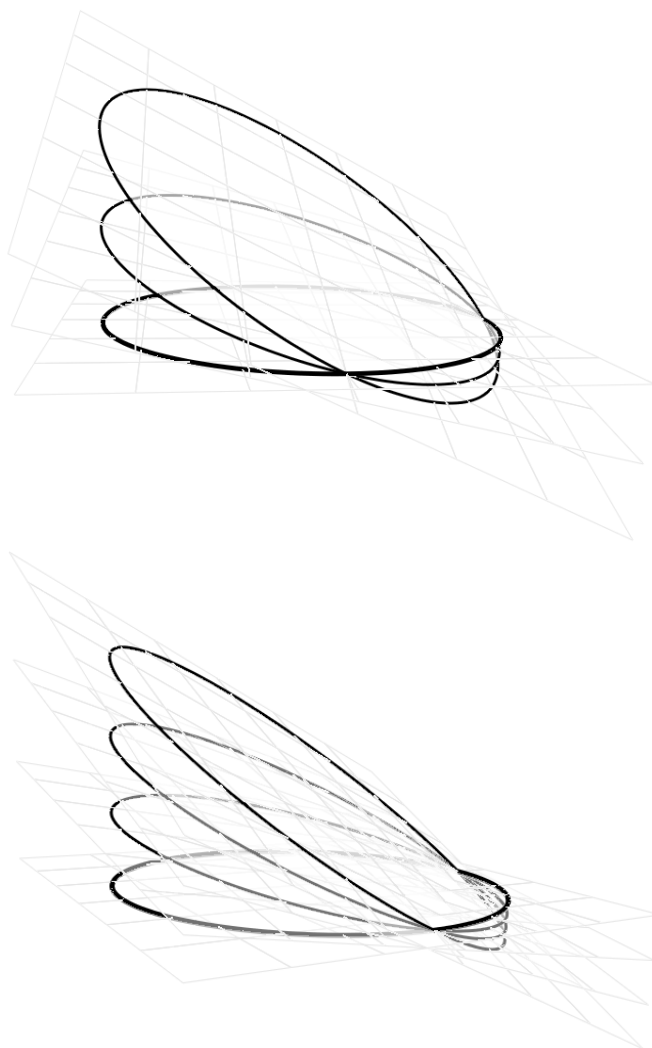
Primer 1.5.4 Posmatrajmo krug čiji je parametarski oblik

$$C : r(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

i neka je polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) gde je

$$p(u) = 0, \quad q(u) = \cos(u) + \sin(u).$$

Slika 1.5.4. prezentuje polazni krug C i deformisane krive C_ε . U ovom slučaju su vizuelizovani krug i deformisane krive zajedno sa ravnima u kojima leže u žičanom modelu uz semi transparentnost.



Slika 1.5.4.

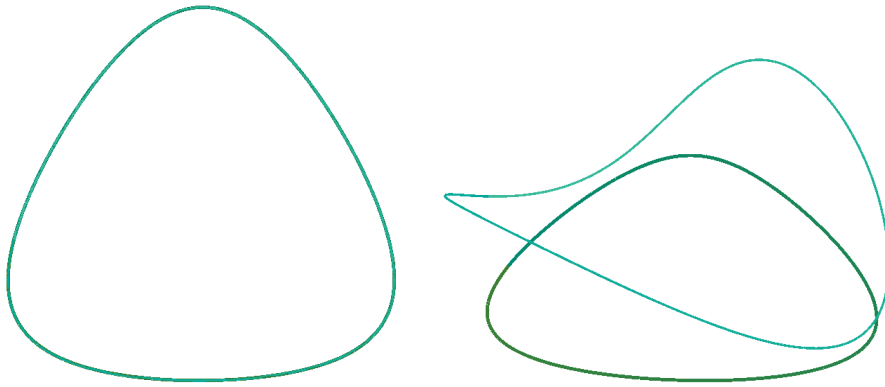
Primer 1.5.5 Posmatrajmo krivu datu parametarskom jednačinom

$$C : \mathbf{r}(u) = (8\cos(u) + \sin(2u), 8\sin(u) + \cos(2u), 0).$$

Izabrali smo polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) gde su

$$p(u) = 0, \quad q(u) = \cos(2u).$$

Slika 1.5.5. prezentuje obe krive, polaznu C i krivu dobijenu posle savijanja C_ε , $\varepsilon = 2.60$ za $u \in [0, 2\pi]$ u ovom slučaju.



Slika 1.5.5.

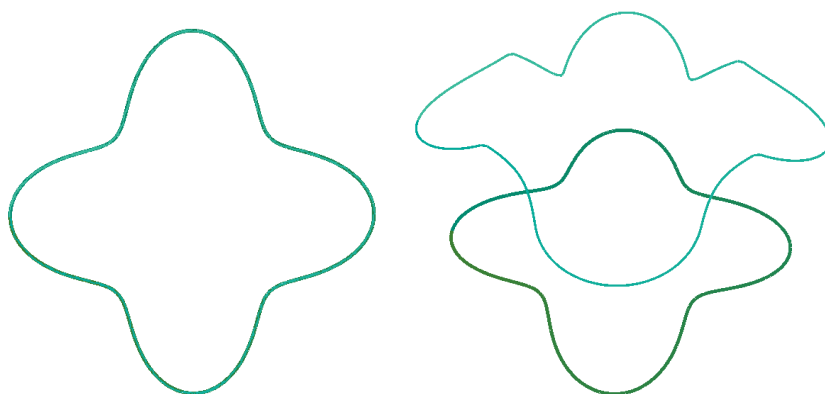
Primer 1.5.6 Posmatrajmo zatvorenu krivu datu u parametarskom obliku

$$C : \mathbf{r}(u) = ((4 + \cos(4u))\cos(u), (4 + \cos(4u))\sin(u), 0).$$

Polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) je definisano sa

$$p(u) = 0, \quad q(u) = \cos(u)\sin(u).$$

Slika 1.5.6. prezentuje polaznu C i savijenu krivu C_ε gde su u ovom slučaju C_ε , $\varepsilon = 4.0$ za $u \in [0, 2\pi]$.



Slika 1.5.6.

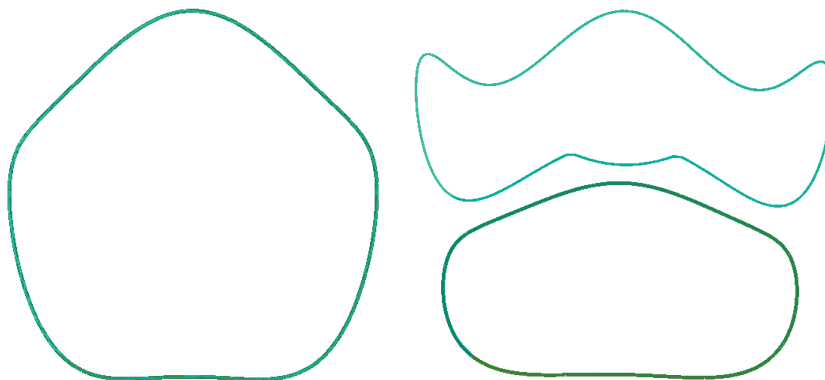
Primer 1.5.7 Posmatrajmo sledeću krivu datu u parametarskom obliku

$$C : r(u) = (4\cos(u) + 0.25\cos(4u), 4\sin(u) + 0.25\cos(4u), 0).$$

Polje beskonačno malih savijanja $z(u)$ dato sa (1.21) gde su

$$p(u) = 0, \quad q(u) = \sin(4u).$$

Slika 1.5.7. prikazuje polaznu C i deformisanu krivu C_ε , $\varepsilon = 2.50$ za $u \in [0, 2\pi]$ u ovom slučaju.



Slika 1.5.7.

Poglavlje 2

Beskonačno mala savijanja toroida sa četvorougaoim meridijanom

U ovoj glavi razmatraćemo toroidne rotacione površi generisane četvorougaoim meridijanom. Daćemo potrebne i dovoljne uslove za postojanje polja beskonačno malog savijanja dobijene površi. Temena četvorougaoim meridijana su data u obliku koordinata u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu i na osnovu njih su razmatrani uslovi za postojanje polja. Diskutovane su i istaknute nadjene klase fleksibilnih površi sa četvorougaoim meridijanom. Opisan je SurfBand, razvijeni programski alat za numeričku proveru uslova fleksibilnosti, simboličku definiciju deformisanih površi, numeričko određivanje tačaka na površi i vizuelizaciju polaznih i deformisanih površi. Prikazani su primeri nadjenih fleksibilnih toroidnih površi sa četvorougaoim meridijanom. U ovoj glavi su rezultati objavljeni u radovima: [7], [43], [59] i [61].

2.1 Uvod

Problem beskonačno malog savijanja površi je specijalan deo teorije savijanja površi. Teorija savijanja površi se bavi savijanjem površi, izometrijskim transformacijama, kao i beskonačno malim savijanjima površi i predstavlja jedan od glavnih delova opšte diferencijalne geometrije.

Pod savijanjem površ je uključena u neprekidnu familiju izometrijskih površi, tako da krive zadržavaju dužinu luka. Uglovi su takodje nepromenjeni.

Glavni pravac u problemima krutosti tj. fleksibilnosti površi je odrediti i naći površi koje predstavljaju klasu jedinstveno definisanih, krutih površi,

kao i nalaženje onih koje predstavljaju savitljive, fleksibilne površi. Zadatak je takodje proveriti fleksibilnost površi obzirom na datu klasu deformacija.

Pored uobičajene aparature klasične diferencijalne geometrije, u ovoj oblasti se koriste elementi topologije, funkcionalne analize (teorija analitičkih funkcija), diferencijalne jednačine, teorija grafova... Teorija beskonačno malih savijanja je blisko povezana sa teorijom tankih ljuski i krutost ima odgovarajuće mehaničko značenje.

Prvi rezultati teorije savijanja pripadaju Cauchyju, [5]. On je razmatrao zatvorene konveksne poliedre. Kasnije, 1838. F. Minding [36] je dao hipotezu da je sfera kruta. Liebman [29] je 1899. potvrdio ovu hipotezu. On je dokazao da sfera ne dozvoljava netrivialno izometrijsko savijanje, tj. dokazao je krutost sfere. takodje je dokazao da su jako konveksan pojas, i zatvoren analitički ovaloid (ovaloid je zatvorena konveksna površ sa svuda pozitivnom Gausovom krivinom) kruti u klasi analitičkih beskonačno malih savijanja površi. Sledeći doprinosi teoriji savijanja pripadaju D. Hielbertu, H. Weilu, Blascheu, Cohn-Vossenu.

Prve rezultate na temu beskonačno malih savijanja nekonveksnih površi dao je H. Liebman [30], [31]. On je dokazao da torus i analitičke površi koje sadrže konveksne trake, su krute u smislu beskonačno malih savijanja. Kasnije T. Minagava i T. Rado proširili su rezultate Leibmana [30], [31]. Oni su dokazali krutost torusa [37] i površi dobijene rotacijom u klasi C^1 , koja sadrže konveksne trake klase C^2 [38], pod pretpostavkom da je polje savijanja klase C^1 .

Rezultati H. Liebmana u vezi krutosti torusa i ovaloida, prirodno vode do pitanja egzistencije nekrutih zatvorenih površi. Proučavanje fleksibilnosti rotacionih površi je išlo u dva pravca: 1. ispitati važnost konveksnosti meridijana; 2. oslabiti regularnost meridijana.

Prvi je na ova pitanja odgovorio Cohn-Vossen u [9], [28]. On je dokazao da od svake ravne krive možemo uzeti meridijan nekrute rotacione površi roda 0. Ovaj rezultat Cohn-Vossena i njegov metod inicirali su dalje napore i rad na izučavanju beskonačno malog savijanja nekonveksnih površi dobijenih rotacijom.

Površ dobijene rotacijom sa osobinom da su roda 0 ili 1, generisane izlomljenom (poligonalnom) linijom su razmatrane od strane Cohn-Vossena, Bublik, K. M. Belova [4], N. G. Perlove [42].

Cohn-Vossen je posmatrao površi roda 0, generisane poligonalnom linijom i izveo zaključke o fleksibilnosti nekih od njih. K. M. Belov [4] je istakao

klasu toroida sa meridijanom u obliku specijalnog četvorougla, sa medjusobno normalnim dijagonalama, od kojih je jedna paralelna osi rotacije. Na taj način je Belov medju površima topološki ekvivalentnim torusu istakao klasu fleksibilnih toroida.

Problem krutosti toroida je razmatran u više radova autora Velimirović i Velimirović sa saradnicima. U radu [55] teorema Belova je dokazana na drugi način, koji je omogućio ispitivanje fleksibilnosti, određivanje polja i grafičke prezentacije [57]. Klasa toroida generisana četvorouglaonim meridijanom iz klase paralelograma je razmatrana u radu [59]. U prethodnim radovima su uslovi fleksibilnosti dati na algebarski način. Tokom rada je korišćen i programski paket *Mathematica*, a neki primeri su grafički predstavljeni upotrebom koda isprogramiranom u ovom paketu. Paket je svakako bio koristan u simboličkim izračunavanjima i proverama. Napomenimo da su rezultati iz ove glave uopštenja rezultata Belova.

2.2 Opis problema

Posmatrajmo površ $S \subset \mathfrak{R}$ klase C^α , $\alpha \geq 3$.

Definicija 2.2.1 *Površ S_ε je **deformacija** površi S ako je uključena u neprekidnu familiju površi*

$$\begin{aligned} S_\varepsilon : \bar{r} = (u, v, \varepsilon) = \bar{r}_\varepsilon(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathfrak{R}^2, \quad \varepsilon \in [0, 1], \\ \bar{r}_\varepsilon : D \times [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}^3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

i dobijamo S za $\varepsilon = 0$.

Razmatraćemo vrstu kontinualne familije površi definisanu prema Jefimovu [12]. Neka je regularna površ S klase C^α , $\alpha \geq 3$ data u vektorskom obliku sa (2.1) uključena u familiju površi

$$S_\varepsilon : \bar{r}_\varepsilon(u, v, \varepsilon) = \bar{r}(u, v) + \varepsilon \bar{z}(u, v), \quad (2.2)$$

gde $\varepsilon(\varepsilon \rightarrow 0)$, $(u, v) \in D$, $D \subset \mathfrak{R}$ i $\bar{r}_0(u, v, 0) = \bar{r}(u, v)$.

Definicija 2.2.2 *Površ (2.2) su **beskonačno mala savijanja prvog reda** površi S ako*

$$ds_\varepsilon^2 - ds^2 = o(\varepsilon) \quad (2.3)$$

tj. ako je razlika kvadrata linijskih segmenata ovih površi beskonačno mala reda većeg od prvog.

Polje $\bar{z}(u, v)$, za koje

$$\frac{\partial \bar{r}(u, v, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \bar{z}(u, v), \quad (2.4)$$

je polje brzine ili polje beskonačno malog savijanja.

Sledeća teorema je ekvivalentna Definiciji 2.2.2.

Teorema 2.2.1 [12] *Potreban i dovoljan uslov da površ S_ε (2.2) bude beskonačno malo savijanje površi S (2.1) je*

$$d\bar{r}d\bar{z} = 0, \quad (2.5)$$

gde je $\bar{z}(u, v)$ polje brzine u početnom trenutku deformacije. $\square$

Jednačina (2.5) je ekvivalentna sa sledeće tri parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\bar{r}_u \bar{z}_u = 0, \quad \bar{r}_u \bar{z}_v + \bar{r}_v \bar{z}_u = 0, \quad \bar{r}_v \bar{z}_v = 0. \quad (2.6)$$

Pod beskonačno malim savijanjem površi svaki linijski element dobija nenulti sabirak, koji je beskonačno mala veličina drugog reda u odnosu na ε , tj.

$$ds_\varepsilon - ds = o(\varepsilon) \geq 0. \quad (2.7)$$

Teorema 2.2.2 *Neka je $s = s(\varepsilon)$ dužina luka krive C_ε na površi S_ε . Potreban i dovoljan uslov za beskonačno malo savijanje inicijalne površi $S = S_0$ je*

$$\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (2.8)$$

tj. da je brzina promene dužine luka u početnom trenutku 0. $\square$

Definicija 2.2.3 *Polje savijanja je trivijalno, tj. to je polje krutog kretanja površi ako može biti dato u obliku:*

$$\bar{z} = \bar{a} \times \bar{r} + \bar{b}, \quad (2.9)$$

gde su $\bar{a}$ i $\bar{b}$ konstantni vektori.

Definicija 2.2.4 *Površ je kruta ako ne dozvoljava polje savijanja različito od trivijalnog.*

2.3 Beskonačno malo savijanje prvog reda rotacione površi

Specijalni koordinatni sistem sa ortonormiranom bazom $\bar{e}$, $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$ je uveden. Osa rotacije ima ort $\bar{e}$ i ort $\bar{a}(v) \perp \bar{e}$ u tački O . U koordinatnoj ravni generisanoj ortovima $\bar{e}, \bar{a}(v)$ posmatrajmo krivu C koja je meridijan rotacione površi

$$C : \rho = \rho(u),$$

u -osa je osa rotacije. Jednačina rotacione površi generisane krivom C kao meridijanom je

$$S : \bar{r}(u, v) = u\bar{e} + \rho(u)\bar{a}(v). \quad (2.10)$$

Polje beskonačno malog savijanja $\bar{z}(u, v)$ može biti predstavljeno:

$$\bar{z}(u, v) = \alpha(u, v)\bar{e} + \beta(u, v)\bar{a}(v) + \gamma(u, v)\bar{a}'(v). \quad (2.11)$$

Sledeća teorema je na snazi:

Teorema 2.3.1 *Potreban i dovoljan uslov da polje $\bar{z}(u, v)$, bude polje beskonačno malog savijanja rotacione površi S je da funkcije $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ zadovoljavaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti ne zavise od v*

$$\begin{aligned} \alpha_u + \rho'(u)\beta_u &= 0, \\ \beta + \gamma_v &= 0, \\ \alpha_v + \rho'(u)(\beta_v - \gamma) + \rho(u)\gamma_u &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Funkcije $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ su periodične funkcije nezavisno promenljive v sa periodom 2π . Mogu biti razvijene u Fourierove redove:

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k(u)e^{ikv}, \\ \beta(u, v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(u)e^{ikv}, \\ \gamma(u, v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi_k(u)e^{ikv}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

gde su $\varphi_k(u)$, $\psi_k(u)$, $\chi_k(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, kompleksne funkcije.

Polje $\bar{z}(u, v)$ može biti zapisano u obliku

$$\begin{aligned}\bar{z}(u, v) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\varphi_k(u)\bar{e} + \psi_k(u)\bar{a}(v) + \chi_k(u)\bar{a}'(v)]e^{ikv} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{z}_k(u, v)e^{ikv}\end{aligned}\quad (2.14)$$

gde

$$\bar{z}_k(u, v) = [\varphi_k(u)\bar{e} + \psi_k(u)\bar{a}(v) + \chi_k(u)\bar{a}'(v)]e^{ikv}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

Sledeća teorema je na snazi [28]:

Teorema 2.3.2 *Funkcije $\varphi_k(u), \psi_k(u), \chi_k(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, date sa (2.13) zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned}\varphi'_k(u) + \rho'(u)\psi'_k(u) &= 0, \\ \psi_k(u) + ik\chi_k(u) &= 0, \\ ik\varphi_k(u) + \rho'(u)[ik\psi_k(u) - \chi_k(u)] + \rho(u)\chi'_k(u) &= 0,\end{aligned}\quad (2.16)$$

i funkcije $\psi_k(u), \chi_k(u)$, zadovoljavaju iste obične diferencijalne jednačine drugog reda

$$\begin{aligned}\rho(u)\psi''_k(u) + (k^2 - 1)\rho''(u)\psi_k(u) &= 0 \\ \text{or } \rho(u)\chi''_k(u) + (k^2 - 1)\rho''(u)\chi_k(u) &= 0.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Prema [28] sledeća teorema je na snazi:

Teorema 2.3.3 *Svako rešenje $\psi_k(u)$ jednačine date u (2.17) koje nije identički jednako 0 za svako $k \in \{\pm 2, \pm 3, \dots\}$, odgovara netrivialnom polju $\bar{z}_k(u, v)$ datom u (2.15) beskonačno malog savijanja posmatranog dela rotacione površi.*

Poznato je (vidi [12]), za svako $k \in \{2, 3, \dots\}$ postoji polje beskonačno malog savijanja

$$\begin{aligned}\bar{z}(u, v) = \bar{z}_k(u, v) &= [\varphi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\varphi}_k(u)e^{-ikv}] \bar{e} \\ &+ [\psi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\psi}_k(u)e^{-ikv}] \bar{a}(v) \\ &+ [\chi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\chi}_k(u)e^{-ikv}] \bar{a}'(v)\end{aligned}\quad (2.18)$$

gde je na primer, $\tilde{\varphi}_k(u)$ konjugovana vrednost za $\varphi_k(u)$.

Jednačina (2.18) može biti na drugi način napisana u obliku:

$$\begin{aligned}\bar{z}(u, v) = \bar{z}_k(u, v) = & [\varphi_k(u) \cos kv + \tilde{\varphi}_k(u) \sin kv] \bar{e} \\ & + \left[\psi_k(u) \cos kv + \tilde{\psi}_k(u) \sin kv \right] \bar{a}(v) \\ & + [\chi_k(u) \cos kv + \tilde{\chi}_k(u) \sin kv] \bar{a}'(v).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Za razmatranje beskonačno malog savijanja rotacione površi generisane meridijanom koji je neprekidna ali nije regularna kriva, preuzećemo pristup Cohn-Vossena [28].

Počećemo teoremom Cohn-Vossen [28]:

Teorema 2.3.4 *Ako su funkcije $\varphi_k(u)$, $\chi_k(u)$ neprekidne u tačkama prekida $u = \sigma$ meridijana $\rho = \rho(u)$ tj. u tačkama gde $\rho'(\sigma - 0) \neq \rho'(\sigma + 0)$, onda funkcije $\psi_k(u)$ u tim tačkama zadovoljavaju jednačine:*

$$[\rho(u)\psi'_k(u) + (k^2 - 1)\rho'(u)\psi_k(u)] \big|_{\sigma-0}^{\sigma+0} = 0, \quad \text{tj.} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}& \rho(\sigma)[\psi'_k(\sigma + 0) - \psi'_k(\sigma - 0)] \\ & + (k^2 - 1)[\rho'(\sigma + 0) - \rho'(\sigma - 0)]\psi_k(\sigma) = 0.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Napomena 2.1 Kako za pozitivne i negativne vrednosti k dobijamo iste jednačine (2.17), posmatraćemo samo slučaj $k \geq 2$.

Oznacimo sa P poligon sa n tačaka, koji rotira oko u -ose, i njegove tačke kao $A_i(u_i, \rho_i)$ ($\rho_i > 0$, $u_{i+1} \neq u_i$, $u_{n+1} \equiv u_1$, $i = 1, \dots, n$). Ako je $\rho_{(1)}$ vrednost ρ na strani A_1A_2 , i $\rho_{(2)}$ na strani A_2A_3 itd..., dobijamo jednačine strana meridian

$$\begin{aligned}A_iA_{i+1} : \rho_{(i)} &= \rho_i + \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i), \\ (i = 1, \dots, n, A_{n+1} &\equiv A_1, \rho_{n+1} \equiv \rho_1, u_{n+1} \equiv u_1),\end{aligned}\quad (2.22)$$

odakle dalje

$$\rho'_{(i)} = k_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i}. \quad (2.23)$$

Ako zanemarimo index k , označićemo sa $\psi_{(i)}$, ($i = 1, \dots, n$) vrednosti funkcije ψ na strani A_iA_{i+1} .

Ako zamenimo $\rho'_{(i)}$ u (2.17) onda iz (2.23) dobijamo da su funkcije $\psi_{(i)}$ linearne tj.

$$\psi_{(i)} = M_i u + N_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.24)$$

Posmatrajmo poligon Q sa n tačaka simetričan polaznom poligonu P u odnosu na y osu i označimo njegove tačke kao $B_i(u_i, \rho_i)$ ($\rho_i > 0$, $u_{i+1} \neq u_i$, $u_{n+1} \equiv u_1$, $i = 1, \dots, n$) tako da $B_i(u_i, \rho_i) = A_i(-u_i, \rho_i)$.

Mozemo sada da formulišemo sledeću teoremu:

Teorema 2.3.5 *Toroidi dobijeni rotacijom poligona P i Q oko u -ose su oba fleksibilni ili kruti u smislu beskonačno malog savijanja.*

Dokaz. Dobijeni toroidi su podudarni, oni su simetrični.

S obzirom na ovaj zaključak dalje ćemo izostaviti iz razmatranja slučajeve simetričnih poligona, jer oni zadovoljavaju iste uslove fleksibilnosti. $\square$

2.4 Toroidi generisani četvorougaoim meridijanom

U paragrafu su dati rezultati analize koji se naslanjaju na prethodne rezultate objavljene u [55], [51], kao i klasifikacija data u [61]. Rezultati dati u [59] su u algebarskom obliku. Ovde ćemo dati izvodjenje i odgovarajuće formule za slučaj četvorougaoim meridijana. Takodje ćemo diskutovati uslove u algebarskom obliku i daćemo geometrijsko tumačenje.

Iz daljeg razmatranja ćemo isključiti toroide koji sadrže ravne delove generisane stranom četvorougla normalnom na osu rotacije. Na osnovu rezultata Efimova iz [12], ove površi su uvek fleksibilne i za polje savijanja imamo:

$$\bar{z}(M) = \begin{cases} \varphi(M)\bar{e}, & M \in \omega, \\ 0, & M \notin \omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

gde je $\varphi(M)$ skalarna funkcija tačke iz ravnog dela ω površi S , a $\bar{e}$ je jedinični vektor normale.

Ako je strana meridijana paralelna osi rotacije onda su generisani delovi toroida cilindri. Primeri površi koji sadrže cilindrične delove su proučavani u [12].

Pre svega podsetimo se teoreme Belova date u [4]:

Teorema 2.4.1 (*K. M. Belov*) *Neka četvorougao $\mathcal{B}$ sa čvorovima*

$$A(-1, b), B(0, b + c_1), C(1, b), D(0, b - c_2) \quad (2.26)$$

rotira oko u -ose u uOp ravni. Toridna rotaciona površ generisana meridijanom $\mathcal{B}$ je nekruta ako i samo ako

$$\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = \frac{k^2}{b}, \quad (2.27)$$

gde je $k \geq 2$ ceo broj. $\square$

2.4.1 Toroidi sa konveksnim četvorougaoim meridijanom

Posmatrajmo konveksni četvorougao dat na slici 2.4.1 Sledeća teorema je na snazi:

Teorema 2.4.2 *Neka je $\mathcal{Q} = A_1A_2A_3A_4$ konveksni četvorougao sa temenima*

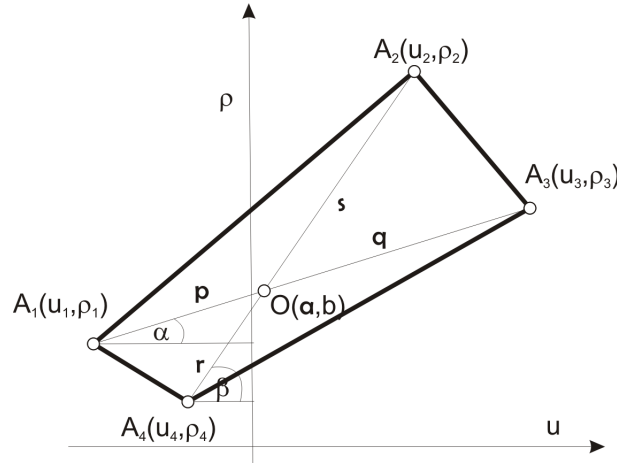
$$A_i(u_i, \rho_i) \quad (\rho_i > 0, \quad u_{i+1} \neq u_i, \quad u_5 \equiv u_1, \quad i = 1, 2, 3, 4), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &A_1(a - p \cos \alpha, b - p \sin \alpha), A_2(a + s \cos \beta, b + s \sin \beta), \\ &A_3(a + q \cos \alpha, b + q \sin \alpha), A_4(a - r \cos \beta, b - r \sin \beta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

gde je tačka $O(a, b)$ tačka preseka dijagonala, a p, q, r, s su dužine segmenata dijagonala i $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ su uglovi između dijagonala i pozitivnog dela x -ose, vidi (Slika 2.4.1.). Toridna rotaciona površ $\mathcal{S}$, generisana meridijanom $\mathcal{Q}$, je nekruta ako i samo ako

$$\frac{k^2 \sin(\alpha - \beta)}{b} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) \cos \alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \cos \beta, \quad (2.30)$$

gde je $k \geq 2$ ceo broj.



Slika 2.4.1.

Dokaz. Za razmatranje toroidne rotacione površi sa proizvoljnim četvorougaoim meridijanom koristićemo Kon-Fosenov metod [28] prezentovan takodje u [50].

Pretpostavimo da četvorugao $A_i(u_i, \rho_i)$ ($\rho_i > 0$, $u_{i+1} \neq u_i$, $u_5 \equiv u_1$, $i = 1, 2, 3, 4$) rotira oko u -ose. Ako je $\rho_{(1)}$ vrednost ρ na strani A_1A_2 , i $\rho_{(2)}$ na strani A_2A_3 itd..., možemo da napišemo jednačine strana meridijana:

$$A_iA_{i+1} : \rho_{(i)} = \rho_i + \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i), \quad (2.31)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, A_5 \equiv A_1, \rho_5 \equiv \rho_1, u_5 \equiv u_1),$$

odakle

$$\rho'_{(i)} = k_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i}. \quad (2.32)$$

Ako izostavimo indeks k , označićemo sa $\psi_{(i)}$, ($i = 1, 2, 3, 4$) vrednosti funkcije ψ na strani A_iA_{i+1} .

Ako zamenimo $\rho_{(i)}(u)$ u (2.17) prema (2.22), zaključujemo da su funkcije $\psi_{(i)}$ linearne, tj.

$$\psi_{(i)} = M_i u + N_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2.33)$$

Pretpostavljajući da su funkcije $\psi_{(i)}(u)$ neprekidne u tačkama $u = \sigma$ meridijana $\rho = \rho(u)$, gde $\rho'(\sigma - 0) \neq \rho'(\sigma + 0)$, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
\psi_{(1)}(u_1) &= \psi_{(4)}(u_1) = \psi_{(41)}(u_1), \\
\psi_{(2)}(u_2) &= \psi_{(1)}(u_2) = \psi_{(12)}(u_2), \\
\psi_{(3)}(u_3) &= \psi_{(2)}(u_3) = \psi_{(23)}(u_3), \\
\psi_{(4)}(u_4) &= \psi_{(3)}(u_4) = \psi_{(34)}(u_4).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Prema (2.33) imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
M_1 u_1 + N_1 &= M_4 u_1 + N_4, \\
M_2 u_2 + N_2 &= M_1 u_2 + N_1, \\
M_3 u_3 + N_3 &= M_2 u_3 + N_2, \\
M_4 u_4 + N_4 &= M_3 u_4 + N_3,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

tj. ako posmatramo ovaj sistem kao sistem po nepoznatim N_i :

$$\begin{aligned}
N_1 \quad \quad \quad - N_4 &= -M_1 u_1 + M_4 u_1, \\
N_1 - N_2 \quad \quad \quad &= -M_1 u_2 + M_2 u_2, \\
N_2 \quad - N_3 \quad \quad \quad &= -M_2 u_3 + M_3 u_3, \\
\quad \quad \quad N_3 - N_4 &= -M_3 u_4 + M_4 u_4.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

U temenima poligona, prema Kon-Fosenu [28] imamo sledeću jednačinu

$$\rho(\sigma)[\psi'_k(\sigma + 0) - \psi'_k(\sigma - 0)] + (k^2 - 1)\psi_k(\sigma)[\rho'(\sigma + 0) - \rho'(\sigma - 0)] = 0.$$

Primenjujući ovu jednačinu na temena M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
\rho_i(M_i - M_{i-1}) + (k^2 - 1)((M_i u_i + N_i)(k_i - k_{i-1}) &= 0 \\
(i = 1, 2, 3, 4; M_0 \equiv M_4, k_0 \equiv k_4). &
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Jednačine date u (2.36) i (2.37) predstavljaju sistem linearnih jednačina gde figurišu nepoznate M_i , N_i , ($i = 1, 2, 3, 4$). Posmatrajmo sistem dat u (2.36) po nepoznatim N_i .

Možemo da primenimo elementarnu transformaciju dodavanje vrste sledećoj vrsti u matrici sistema. Ovi koraci transformišu sistem u sledeći sa nepoznatim N_1, N_2, N_3, N_4 :

$$\begin{aligned}
N_1 & -N_4 = (M_4 - M_1)u_1 \\
-N_2 & +N_4 = (M_1 - M_4)u_1 + (M_2 - M_1)u_2 \\
-N_3 & +N_4 = (M_1 - M_4)u_1 + \sum_{l=2}^3 (M_l - M_{l-1})u_l \\
0 & = (M_1 - M_4)u_1 + \sum_{l=2}^4 (M_l - M_{l-1})u_l.
\end{aligned}$$

Sistem je saglasan ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, što nas vodi do

$$M_4 = \frac{1}{u_1 - u_4} \sum_{i=1}^{n-1} (u_i - u_{i+1})M_i.$$

Dalje, možemo da izrazimo N_1, N_2, N_3 u (2.36) pomoću N_4, M_1, M_2, M_3 i zamenimo ih u (2.37).

Ako uvedemo notaciju $u_{ij} = u_i - u_j$, $k_{ij} = k_i - k_j$, iz (2.37) dobijamo sistem

$$\begin{aligned}
& [\rho_1 u_{24} + (k^2 - 1)k_{14}u_1 u_{12}]M_1 + [(k^2 - 1)k_{14}u_1 - \rho_1]u_{23}M_2 \\
& + [(k^2 - 1)k_{14}u_1 - \rho_1]u_{34}M_3 + (k^2 - 1)k_{14}u_{14}N_4 = 0, \\
& [\rho_2 u_{41} + (k^2 - 1)k_{21}u_{12}u_4]M_1 + [\rho_2 u_{14} + (k^2 - 1)k_{21}u_{23}u_1]M_2 \\
& + (k^2 - 1)k_{21}u_{34}u_1 M_3 + (k^2 - 1)k_{21}u_{14}N_4 = 0, \\
& (k^2 - 1)k_{32}u_{12}u_4 M_1 + [\rho_3 u_{41} + (k^2 - 1)k_{32}u_{23}u_4]M_2 \\
& + [\rho_3 u_{14} + (k^2 - 1)k_{32}u_{34}u_1]M_3 + (k^2 - 1)k_{32}u_{14}N_4 = 0, \\
& [\rho_4 u_{12} + (k^2 - 1)u_{12}k_{43}u_4]M_1 + [\rho_4 u_{23} + (k^2 - 1)u_{23}k_{43}u_4]M_2 \\
& + [\rho_4 u_{31} + (k^2 - 1)u_{34}k_{43}u_4]M_3 + (k^2 - 1)u_{14}k_{43}N_4 = 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Potrebni i dovoljni uslovi da ovaj sistem linearnih jednačina ima netrivialna rešenja je da rang matrice

$$H = \begin{pmatrix} N_4 & M_3 & M_2 & M_1 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

bude manji od 4. Zadatak je da odredimo uslove pod kojima je ovo validno.

Prema (2.38) imamo

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (k^2 - 1)k_{14}u_{14}, & A_{12} &= \rho_1 u_{43} + (k^2 - 1)k_{14}u_{34}u_1, \\
A_{13} &= \rho_1 u_{32} + (k^2 - 1)k_{14}u_{23}u_1, & A_{14} &= \rho_1 u_{24} + (k^2 - 1)k_{14}u_{12}u_1, \\
A_{21} &= (k^2 - 1)k_{21}u_{14}, & A_{22} &= (k^2 - 1)k_{21}u_{34}u_1, \\
A_{23} &= \rho_2 u_{14} + (k^2 - 1)k_{21}u_{23}u_1, & A_{24} &= \rho_2 u_{41} + (k^2 - 1)k_{21}u_{12}u_4, \\
A_{31} &= (k^2 - 1)k_{32}u_{14}, & A_{32} &= \rho_3 u_{14} + (k^2 - 1)k_{32}u_{34}u_1, \\
A_{33} &= \rho_3 u_{41} + (k^2 - 1)k_{32}u_{23}u_4, & A_{34} &= (k^2 - 1)k_{32}u_{12}u_4, \\
A_{41} &= (k^2 - 1)k_{43}u_{14}, & A_{42} &= \rho_4 u_{31} + (k^2 - 1)k_{43}u_{34}u_4, \\
A_{43} &= \rho_4 u_{23} + (k^2 - 1)k_{43}u_{23}u_4, & A_{44} &= \rho_4 u_{12} + (k^2 - 1)k_{43}u_{12}u_4.
\end{aligned}$$

Očigledno je uvek $k_{i,i+1} \neq 0$, inače meridijan ne bi bio četvorougao. Prime-njujući u isto vreme sledeće operacije na matricu (2.39)

$$I \frac{k_{12}}{k_{14}} \rightarrow II, \quad I \frac{k_{23}}{k_{14}} \rightarrow III, \quad II \frac{k_{34}}{k_{21}} \rightarrow IV,$$

dobijamo

$$H \sim [B_{ij}], \quad (2.40)$$

gde

$$\begin{aligned}
B_{1j} &= A_{1j}, \quad B_{21} = 0, \quad B_{22} = \rho_1 u_{43} \frac{k_{12}}{k_{14}}, \quad B_{23} = \rho_1 u_{32} \frac{k_{12}}{k_{14}} + \rho_2 u_{14}, \\
B_{24} &= \rho_1 u_{24} \frac{k_{12}}{k_{14}} + \rho_2 u_{41} + (k^2 - 1)u_{12}u_{14}k_{12}, \quad B_{31} = 0, \\
B_{32} &= \rho_1 u_{43} \frac{k_{23}}{k_{14}} + \rho_3 u_{14}, \quad B_{33} = \rho_1 u_{32} \frac{k_{23}}{k_{14}} + \rho_3 u_{41} + (k^2 - 1)u_{23}k_{23}u_{14}, \\
B_{34} &= \rho_1 u_{24} \frac{k_{23}}{k_{14}} + (k^2 - 1)u_{12}k_{23}u_{14}, \quad B_{41} = 0, \\
B_{42} &= \rho_4 u_{31} + (k^2 - 1)u_{34}u_{14}k_{34}, \\
B_{43} &= \rho_2 u_{14} \frac{k_{34}}{k_{21}} + \rho_4 u_{23} + (k^2 - 1)u_{23}k_{34}u_{14}, \quad B_{44} = \rho_2 u_{41} \frac{k_{34}}{k_{21}} + \rho_4 u_{12}.
\end{aligned}$$

Dalje primenjujemo korake

$$II \frac{k_{41}}{\rho_1 u_{43} k_{12}} (\rho_1 u_{43} \frac{k_{23}}{k_{14}} + \rho_3 u_{14}) \rightarrow III,$$

$$II \frac{k_{41}}{\rho_1 u_{43} k_{12}} [\rho_4 u_{31} + (k^2 - 1) u_{34} u_{14} k_{34}] \rightarrow IV$$

i dobijamo

$$H \sim [C_{ij}], \quad (2.41)$$

gde

$$\begin{aligned}
C_{1j} &= B_{1j} = A_{1j}, \quad C_{2j} = B_{2j}, \quad C_{31} = C_{32} = 0 \\
C_{33} &= \rho_2 u_{14} \frac{k_{32}}{k_{12}} + \rho_3 \frac{u_{14} u_{24}}{u_{43}} + \frac{\rho_2 \rho_3 (u_{14})^2 k_{41}}{\rho_1 u_{43} k_{12}} + (k^2 - 1) u_{23} u_{14} k_{23}, \\
C_{34} &= \rho_2 u_{41} \frac{k_{32}}{k_{12}} + \rho_3 u_{41} \frac{u_{24}}{u_{43}} + \frac{\rho_3 (k^2 - 1) u_{12} (u_{14})^2 k_{41}}{\rho_1 u_{43}} + \frac{\rho_2 \rho_3 (u_{14})^2 k_{14}}{\rho_1 u_{43} k_{12}}, \\
C_{41} &= C_{42} = 0 \\
C_{43} &= \rho_2 u_{14} \frac{k_{43}}{k_{12}} + \rho_4 u_{23} \frac{u_{41}}{u_{43}} + \frac{\rho_2 \rho_4 u_{14} u_{31} k_{41}}{\rho_1 u_{43} k_{12}} \\
&\quad + \frac{\rho_2 (k^2 - 1) (u_{14})^2 k_{14} k_{34}}{\rho_1 k_{12}} \\
C_{44} &= \frac{\rho_4 u_{14} u_{23}}{u_{43}} + \frac{\rho_2 u_{41} k_{34}}{k_{21}} + \frac{\rho_2 (k^2 - 1) (u_{14})^2 k_{41} k_{34}}{\rho_1 k_{12}} + \\
&\quad + \frac{\rho_4 (k^2 - 1) u_{12} u_{14} u_{31} k_{41}}{\rho_1 u_{43}} + \frac{\rho_2 \rho_4 u_{41} u_{31} k_{41}}{\rho_1 u_{43} k_{12}} \\
&\quad + \frac{(k^2 - 1)^2 u_{12} (u_{14})^2 k_{14} k_{34}}{\rho_1} + (k^2 - 1) u_{24} u_{14} k_{34}.
\end{aligned} \quad (2.42)$$

Transformacijom $III \left(-\frac{C_{43}}{C_{33}} \right) \rightarrow IV$ matrica (2.41) dobija oblik

$$H \sim [D_{ij}], \quad (2.43)$$

gde

$$\begin{aligned}
D_{1j} &= C_{1j} = B_{1j} = A_{1j}, \quad D_{2j} = C_{2j} = B_{2j}, \quad D_{3j} = C_{3j} \\
D_{41} &= D_{42} = D_{43} = 0, \\
D_{44} &= -\frac{C_{43} C_{34}}{C_{33}} + C_{44} = \frac{1}{C_{33}} (C_{33} C_{44} - C_{43} C_{34}),
\end{aligned} \quad (2.44)$$

i C_{ij} su dati sa (2.42). Rang matrice N će biti manji od 4 za $D_{44} = 0$, tj. $C_{33}C_{44} - C_{43}C_{34} = 0$, što daje

$$Ak^4 + Bk^2 + C = 0, \quad (2.45)$$

gde je

$$\begin{aligned} A &= k_{21}k_{32}k_{41}k_{43}u_{12}u_{14}u_{23}u_{34}, \\ B &= k_{21}k_{41}k_{32}\rho_4u_{12}u_{13}u_{23} + k_{21}k_{41}k_{43}\rho_3u_{12}u_{14}u_{24} + k_{32}k_{41}k_{43}\rho_2u_{13}u_{14}u_{34} \\ &\quad - 2k_{21}k_{32}k_{43}k_{41}u_{23}u_{12}u_{14}u_{34} + k_{21}k_{32}k_{43}\rho_1u_{23}u_{24}u_{34}, \\ C &= k_{41}k_{43}\rho_2\rho_3u_{14}^2 - k_{32}k_{43}\rho_2\rho_1u_{34}^2 + k_{32}k_{41}\rho_2\rho_4u_{13}^2 - k_{43}\rho_2u_{13}u_{14}u_{34} \\ &\quad + k_{21}k_{41}\rho_3\rho_4u_{12}u_{12} - k_{21}k_{41}u_{12}k_{32}\rho_4u_{13}u_{23} - k_{21}k_{41}k_{43}\rho_3u_{12}u_{14}u_{24} \\ &\quad + k_{21}k_{41}k_{32}k_{43}u_{12}u_{14}u_{23}u_{34} - k_{21}k_{43}\rho_1\rho_3u_{24}^2 + k_{21}k_{32}\rho_1\rho_4u_{23}^2 \\ &\quad - k_{21}k_{32}k_{43}\rho_1u_{23}u_{24}u_{34}. \end{aligned}$$

Potreban i dovoljan uslov postojanja beskonačno male deformacije toroidne rotacione površi $\mathcal{S}$, generisane konveksnim četvorougaoim meridijanom $\mathcal{Q}$ sa temenima $A_i(u_i, \rho_i)$ ($\rho_i > 0$, $u_{i+1} \neq u_i$, $u_5 \equiv u_1$, $i = 1, 2, 3, 4$), koji rotira oko Ou je dat relacijom (2.45).

Zamenom koordinata datih sa (2.29) u (2.45) dobijamo sledeći uslov za fleksibilnost toroida

$$\begin{aligned} R &= k^2(p+q)^2(r+s)^2 \sin(\alpha - \beta)^3 \\ &\quad \cdot \left(bpq(s-r) \cos \alpha + brs(p-q) \cos \beta + k^2rspq \sin(\alpha - \beta) \right) \\ S &= (p \cos \alpha - r \cos \beta)(q \cos \alpha + r \cos \beta)(q \cos \alpha - s \cos \beta)(p \cos \alpha + s \cos \beta) \end{aligned}$$

i sada je

$$\frac{R}{S} = 0. \quad (2.46)$$

Na osnovu $k, p, q, r, s > 0$, $\beta - \alpha \notin \{0, \pi\}$, i $u_i \neq u_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $A_5 \equiv A_1$, $\rho_5 \equiv \rho_1$, $u_5 \equiv u_1$), možemo da redukujemo prethodni uslov u oblik:

$$bpq(s-r) \cos \alpha + brs(p-q) \cos \beta + k^2rspq \sin(\alpha - \beta) = 0, \quad (2.47)$$

ili u oblik:

$$\frac{k^2 \sin(\alpha - \beta)}{b} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \cos \beta, \quad (2.48)$$

Možemo da formulišemo sledeću teoremu:

Teorema 2.4.3 *Postoje prebrojivo mnogo vrednosti parametra s*

$$s = \frac{bpqr \cos \alpha}{bpq \cos \alpha + brp \cos \beta - brq \cos \beta + k^2 rpq \sin(\alpha - \beta)},$$

koje ispunjavaju uslove fleksibilnosti za $k \geq 2$. $\square$

Teorema 2.4.4 *Polje beskonačno malog savijanja rotacione površi $\mathcal{S}$ generisane konveksnim meridijanom $\mathcal{Q}$ datim sa (2.29) je jedinstveno.*

Dokaz. Iz (2.48), $k \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo

$$k = \pm \sqrt{\frac{bpq(r-s) \cos \alpha + rsb(q-p) \cos \beta}{rspq \sin(\alpha - \beta)}}. \quad (2.49)$$

Koristeći Kon-Fosenov metod [28] i napomenu da za pozitivno i negativno k dobijamo iste jednačine za određivanje polja, zaključujemo da je rešenje jedinstveno. $\square$

Lako je dokazati da ugao između dijagonala četvorougla $\mathcal{Q}$ datog pomoću (2.29) iznosi $|\beta - \alpha|$.

2.4.1.1 Geometrijsko tumačenje uslova fleksibilnosti konveksnog četvorougla

Kružni torus je krut [37]. U prethodnom poglavlju izveli smo uslove za fleksibilnost toroida sa četvorougaoim meridijanom (2.48). U ovom poglavlju daćemo geometrijsko značenje ovih uslova i klasifikaciju toroidnih površi sa četvorougaoim meridijanom kao fleksibilnih ili krutih. Na osnovu prethodnih razmatranja i objavljenih rezultata imamo:

Teorema 2.4.5 [50] *Toroidna površ, sa meridijanom oblika trougla, je nekruta ako i samo ako je jedna od strana meridijana normalna na osu rotacije.*

Teorema 2.4.6 [59] *Toroidna površ generisana meridijanom iz klase paralelograma, koja sadrži konusne delove, je nekruta ako i samo ako je jedna od strana meridijana normalna na osu rotacije.*

K.M. Belov [4] je analizirao četvorouglove sa jednom dijagonalom paralelnom osi rotacije, tj. gde je $\alpha = 0$ i $\beta = \pi/2$. Temena četvorougla (2.29) su u ovom slučaju

$$A(a-p, b), B(a, b+s), C(a+q, b), D(a, b-r) \quad (2.50)$$

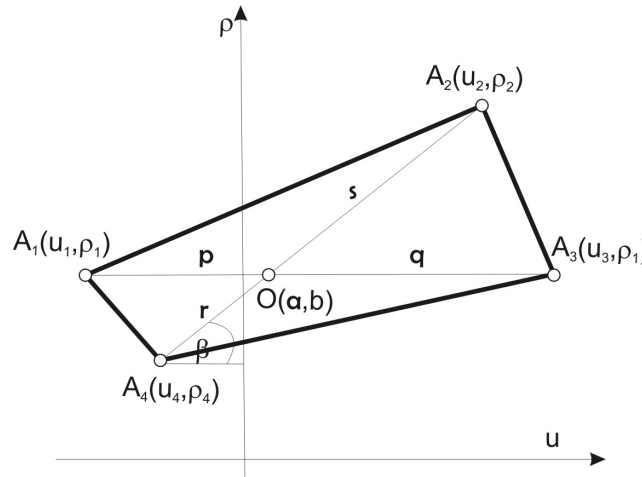
ili, za slučaj da $\alpha = \pi/2$ i $\beta = 0$

$$A(a, b-p), B(a+s, b), C(a, b+q), D(a-r, b). \quad (2.51)$$

Zamenom ovih koordinata u (2.48) dobijamo uslov Belova (2.27) kao specijalan slučaj (2.48)

$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}, \quad \frac{k^2}{b} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

A. Diskutovaćemo uslov dat sa (2.48) polazeći od pozicija njegovih dijagonala.



Slika 2.4.2.

A.1. Ako je jedna dijagonala (na primer A_1A_3) paralelna osi rotacije $\alpha = 0$ (Slika 2.4.2.), uslov nekrutosti (2.48) postaje

$$\frac{k^2}{b} \sin \beta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \cos \beta. \quad (2.52)$$

Ova formula vodi do krutih i nekrutih površi. Diskutovaćemo (2.52)

A.1.1. U slučaju ortogonalnosti druge dijagonale A_2A_4 na osu rotacije $\beta = \pi/2$, dobijamo

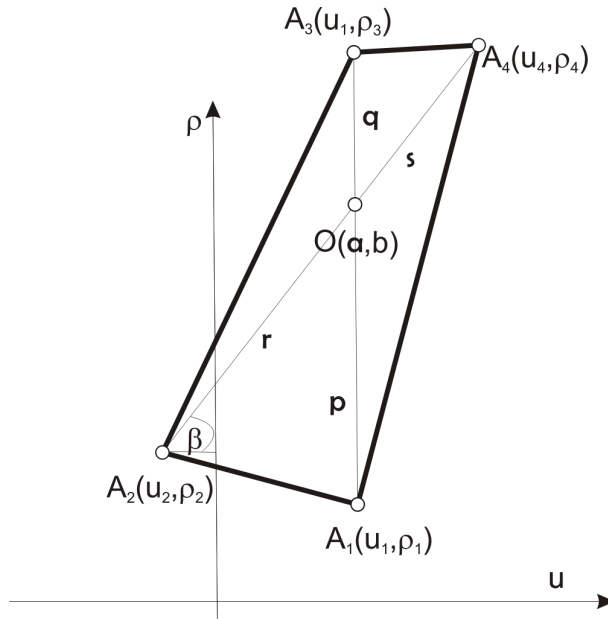
$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}. \quad (2.53)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

Posledica 2.4.1 U slučaju ortogonalnosti dijagonala meridijana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim u (2.29) toroidne površi $\mathcal{S}$, gde je jedna dijagonala paralelna osi rotacije, uslov nekrutosti je (2.53). Za poznate b, r u jednačini (2.53), imamo

$$s = \frac{br}{b - k^2r},$$

odakle sledi da postoje prebrojivo mnogo vrednosti parametra s koje vode do nekrutog slučaja ($k \geq 2$). Za granični slučaj $k \rightarrow \infty$ dobijamo $s = 0$ tj. trougaoni meridijan (slučaj krutog meridijana [50]). Za $s \leq r$ i $r > b/4$ površ je uvek kruta.



Slika 2.4.3.

A.1.2. Ako jedna dijagonala (A_2A_4) deli drugu (A_1A_3) na jednake delove ($p = q$, $r \neq s$, $\beta \neq \pi/2$), uslov (2.52) postaje

$$\frac{k^2}{b} \sin \beta = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}. \quad (2.54)$$

Posledica 2.4.2 *U slučaju da je jedna dijagonala, na primer A_1A_3 paralelna osi rotacije i ako druga dijagonala A_2A_4 deli prvu A_1A_3 na jednake delove ($p = q$, $r \neq s$) uslov nekrutosti je dat u (2.54). Za $s \leq r$ i $r > b/(4 \sin \beta)$ površ je uvek kruta.*

A.1.3 Ako dijagonala (A_1A_3) deli drugu (A_2A_4) na jednake delove ($p \neq q$, $r = s$, $\beta \neq \pi/2$), uslov (2.52) postaje

$$\frac{k^2}{b} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}. \quad (2.55)$$

Posledica 2.4.3 *Za slučaj da je jedna od dijagonala na primer A_1A_3) paralelna osi rotacije i ako dijagonala (A_1A_3) deli drugu (A_2A_4) na jednake delove ($p \neq q$, $r = s$) uslov nekrutosti je (2.55). Za $p \operatorname{tg} \beta \leq q \operatorname{tg} \beta$, i $q > b/4 \operatorname{tg} \beta$ površ je uvek kruta.*

A.1.4 Ako se dijagonale međusobno polove tj. $p = q$, $r = s$, dobijamo klasu paralelograma. Površ generisana paralelogramom je kruta (vidi [59]).

A.2. Ako je jedna dijagonala, na primer A_1A_3), normalna na osu rotacije $\alpha = \pi/2$ (Slika 2.4.2.), uslov nekrutosti (2.48) postaje

$$b(p - q) + k^2 pq = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{k^2}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \quad (2.56)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

Posledica 2.4.4 *Ako je jedna dijagonala normalna na osu rotacije meridijana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim sa (2.29) za toroidnu površ $\mathcal{S}$, uslov nekrutosti je (2.56). Za $q \leq p$ i $p > b/4$ površ je uvek kruta.*

Za slučaj da je $\alpha = \pi$ diskusija je ista kao u slučaju **A**.

B. Sada ćemo diskutovati pojedine klase četvorouglova.

B.1. Ako je meridijan trapez uslov nekrutosti (2.48) postaje

$$\frac{k^2}{b} \sin(\alpha - \beta) = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \cos \alpha + \left(\frac{s}{pq} - \frac{r}{pq} \right) \cos \beta. \quad (2.57)$$

B.1.1. Ako $p = r$ i $q = s$, $s \neq r$ meridijan je jednakokraki trapez. Uslov nekrutosti (2.48) redukuje na

$$\frac{k^2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{b \sin \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}, \quad \alpha - \beta \notin \{0, \pi\}, \quad \alpha + \beta \notin \{0, 2\pi\}. \quad (2.58)$$

B.2. Ako jedna dijagonala meridijana deli drugu na dva jednaka dela imamo:

B.2.1. Za slučaj da je $r = s$, $p \neq q$, onda (2.48) postaje

$$\frac{k^2 \sin(\alpha - \beta)}{b \cos \beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad \alpha - \beta \notin \{0, \pi\}. \quad (2.59)$$

B.2.2. Slično u slučaju $r \neq s$, $p = q$ uslov (2.48) postaje

$$\frac{k^2 \sin(\alpha - \beta)}{b \cos \alpha} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}, \quad \alpha - \beta \notin \{0, \pi\}. \quad (2.60)$$

B.3. Ako je $r = s$, $p = q$, četvorougao je paralelogram, a uslov (2.48) redukuje na

$$k^2 p q r s \sin(\alpha - \beta) = 0, \quad \alpha - \beta \notin \{0, \pi\}, \quad (2.61)$$

tj. toroid sa meridijanom oblika paralelograma je krut.

B.4. U slučaju četvorougla sa međjusobno normalnim dijagonalama $|\alpha - \beta| = \pi/2$, uslov nekrutosti (2.48) redukuje na

$$\frac{k^2}{b} = \pm \left(\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \cos \beta + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \sin \beta \right), \quad (2.62)$$

gde za $\beta = 0$ ili $\beta = \pi/2$ dobijamo uslov Belova (2.27) kao specijalan slučaj. U ovom slučaju posmatrani četvorougao je deltoid.

Teorema 2.4.7 *Toroidi generisani meridijanom oblika deltoida sa dijagonalom paralelnom osi rotacije su kruti.*

2.4.2 Toroidi sa nekonveksnim četvorougaoim meridijanom

Posmatrajmo nekonveksne četvorouglove date na slikama 4.4. i 4.5. Sledeća teorema je na snazi:

Teorema 2.4.8 *Neka je $\mathcal{Q} = A_1A_2A_3A_4$ nekonveksni četvorougao sa temenima*

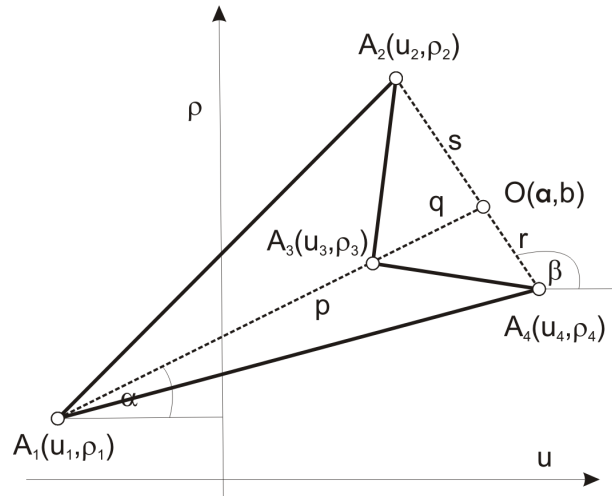
$$A_i(u_i, \rho_i) \quad (\rho_i > 0, \quad u_{i+1} \neq u_i, \quad u_5 \equiv u_1, \quad i = 1, 2, 3, 4), \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} A_1(a - p \cos \alpha, b - p \sin \alpha), \quad A_2(a + s \cos \beta, b + s \sin \beta), \\ A_3(a - q \cos \alpha, b - q \sin \alpha), \quad A_4(a - r \cos \beta, b - r \sin \beta), \end{aligned} \quad (2.64)$$

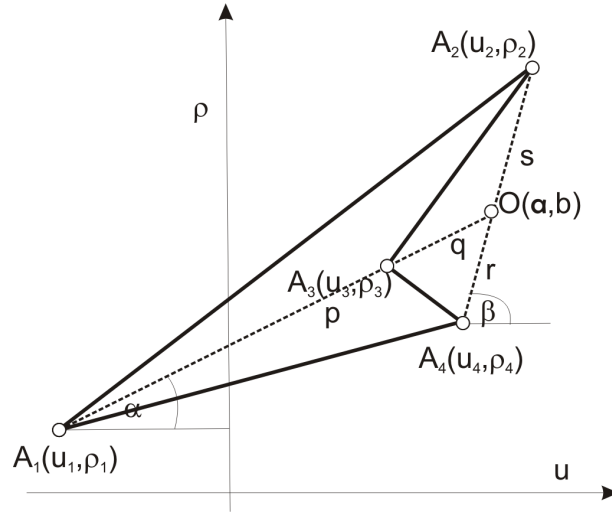
gde je tačka $O(a, b)$ tačka preseka dijagonala, a p, q, r, s su dužine segmenata dijagonala i $\alpha < \pi/2, \beta > \pi/2$ ili $\alpha < \pi/2, \beta < \pi/2$ su uglovi između dijagonala i pozitivnog dela x -ose (Slika 2.4.4.) i (Slika 2.4.5.). Toroidna rotaciona površ $\mathcal{S}$, generisana meridijanom $\mathcal{Q}$, je nekruta ako i samo ako

$$\frac{k^2 \sin(\alpha - \beta)}{b} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) \cos \alpha + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cos \beta, \quad (2.65)$$

gde je $k \geq 2$ ceo broj.



Slika 2.4.4.



Slika 2.4.5.

Dokaz. Dokaz ove teoreme je sličan dokazu teoreme 2.4.2 za slučaj da je toroid generisan konveksnim četvorougaoim meridijanom.

Na osnovu teoreme 2.4.8 možemo da formulišemo sledeće teoreme:

Teorema 2.4.9 *Postoje beskonačno mnogo vrednosti parametra s*

$$s = \frac{bpqr \cos \alpha}{bpq \cos \alpha + brp \cos \beta + brq \cos \beta - k^2 rpq \sin(\alpha - \beta)},$$

koje vode do nekrutih slučajeva ($k \geq 2$). Za slučaj $k \rightarrow \infty$ dobijamo $s = 0$, tj. dobijamo trougaoni meridijan koji nije fleksibilan [50]). $\square$

Teorema 2.4.10 *Polje beskonačno malog savijanja rotacione površi $\mathcal{S}$ generisane konveksnim meridijanom $\mathcal{Q}$ dato sa (2.64) je jedinstveno.* $\square$

2.4.2.1 Geometrijsko tumačenje uslova fleksibilnosti toroida sa meridijanom oblika nekonveksnog četvorougla

U prethodnom poglavlju dobili smo uslove nekrutosti (2.65) za toroide sa nekonveksnim četvorougaoim meridijanom. Dalje ćemo pokušati da damo geometrijsko tumačenje ovih uslova i klasifikaciju toroidnih površi kao krute ili fleksibilne.

K.M. Belov [4] je razmatrao nekonveksne četvorouglove sa jednom dijagonalom paralelnom osi rotacije, tj. gde je $\alpha = 0$ i $\beta = \pi/2$. Temena četvorougla (2.29) su u slučaju Belova

$$A(a-p, b), B(a, b-s), C(a-q, b), D(a, b+r) \quad (2.66)$$

ili, za slučaj da je $\alpha = \pi/2$ i $\beta = 0$

$$A(a, b-p), B(a-s, b), C(a, b-q), D(a+r, b). \quad (2.67)$$

Zamenom ovih koordinata u (2.65) imamo uslov Belova (2.27) kao specijalan slučaj (2.65)

$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}, \quad \frac{k^2}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.$$

C. Diskutovaćemo uslov (2.65) uzimajući u obzir poziciju dijagonala.

C.1. Ako je dijagonala A_1A_3 paralelna osi rotacije onda je $\alpha = 0$ (Slika 2.4.6.) i uslov nekrutosti (2.65) postaje

$$\frac{k^2}{b} \sin \beta = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) \cos \beta. \quad (2.68)$$

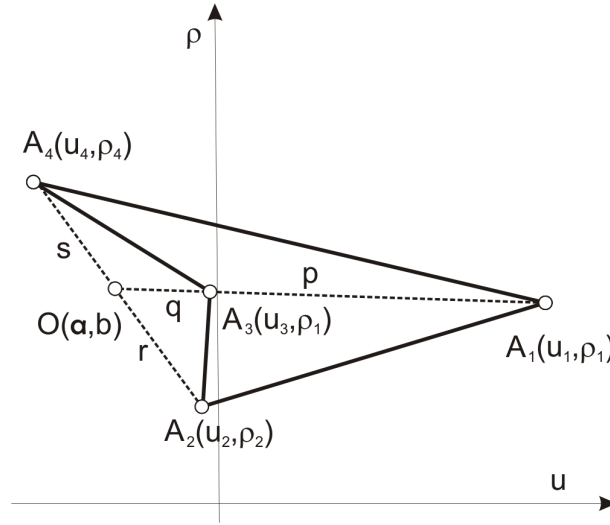
Ova formula vodi do krutih i fleksibilnih površi. Diskutovaćemo (2.68).

C.1.1. Za slučaj ortogonalnosti druge dijagonale A_2A_4 na osu rotacije $\beta = \pi/2$, dobijamo

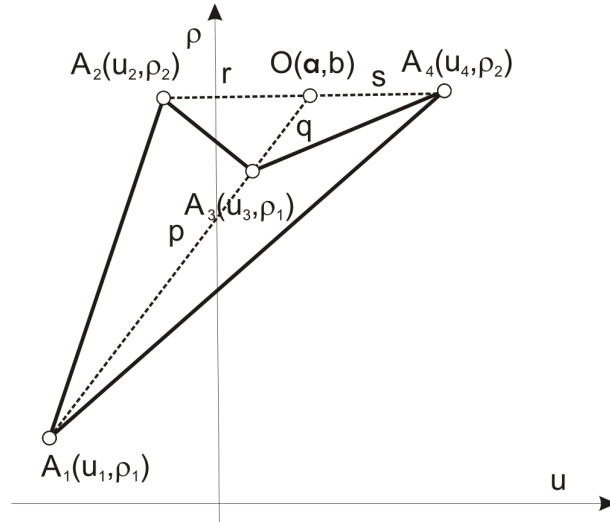
$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}. \quad (2.69)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

Posledica 2.4.5 *Za slučaj ortogonalnosti dijagonala meridijana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim sa (2.64) za toroidnu površ $\mathcal{S}$, gde je jedna dijagonala paralelna osi rotacije, uslov nekrutosti je dat u (2.69). Za $r \leq s$ i $s > b/4$ površ je kruta.*



Slika 2.4.6.



Slika 2.4.7.

C.2. Ako je dijagonala A_2A_4 paralelna osi rotacije $\beta = 0$ (Slika 2.4.7.), uslov nekrutosti (2.65) postaje

$$\frac{k^2}{b} \sin \alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \cos \alpha + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right). \quad (2.70)$$

Ova formula vodi do krutih i fleksibilnih površi. Diskutovaćemo (2.70):

C.2.1 Za slučaj ortogonalnosti druge dijagonale A_1A_3 na osu rotacije $\alpha = \pi/2$, dobijamo

$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (2.71)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

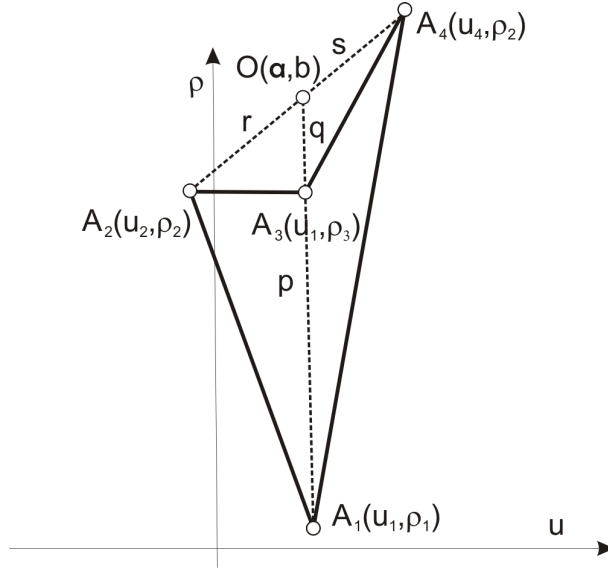
Posledica 2.4.6 *Za slučaj ortogonalnosti dijagonala meridijana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim sa (2.64) za toroidnu površ $\mathcal{S}$, gde je jedna dijagonala paralelna osi rotacije, uslov nekrutosti je (2.71).*

C.3. Ako je dijagonala A_1A_3 ortogonalna na osu rotacije $\alpha = \pi/2$ (Slika 2.4.8., Slika 2.4.9.), uslov nekrutosti (2.65) postaje

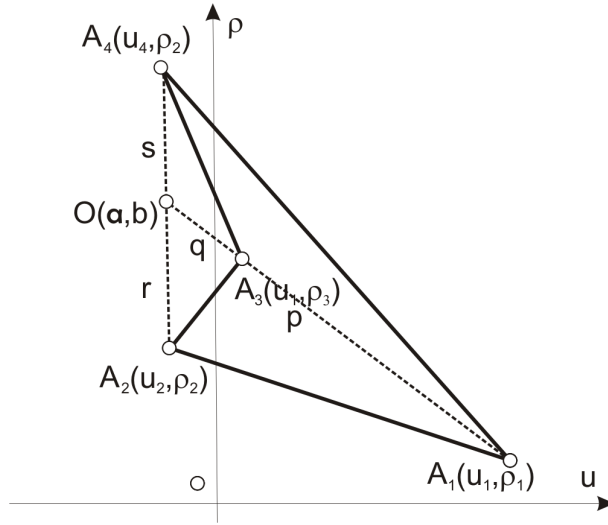
$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (2.72)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

Posledica 2.4.7 *Ako je jedna dijagonala ortogonalna na osu rotacije meridijana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim u (2.64) za toroidnu površ $\mathcal{S}$, uslov nekrutosti je (2.72).*



Slika 2.4.8.



Slika 2.4.9.

C.4. Ako je dijagonala A_2A_4 ortogonalna na osu rotacije $\beta = \pi/2$ (Slika 2.4.8., Slika 2.4.9.), onda uslov nekrutosti (2.65) postaje

$$\frac{k^2}{b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}. \quad (2.73)$$

Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu Belova (2.27).

Posledica 2.4.8 Za slučaj ortogonalnosti dijagonala meridiana $\mathcal{Q}$ sa temenima datim sa (2.64) za toroidnu površ $\mathcal{S}$, gde je jedna dijagonala paralelna osi rotacije, uslov nekrutosti je (2.73). Za $s \leq r$ i $r > b/4$ površ je uvek kruta.

Za slučaj $\alpha = \pi$ diskusija je ista kao u slučaju **C**.

2.5 Toroidi sa meridijanom oblika paralelograma

U ovom paragrafu ćemo dati pregled objavljenih rezultata, prema [59].

Teorema 2.5.1 Toroidna površ generisana rotacijom meridijana oblika paralelograma, koja sadrži konusne delove je infinitezimalno kruta.

Dokaz. Neka je P_4 paralelogram sa temenima $A_i(u_i, \rho_i)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) u Dekartovom koordinatnom sistemu $uO\rho$ sa osom rotacije u . Jednačine strana su:

$$\begin{aligned}
A_i A_{i+1} : \rho_{(i)} &= \rho_i + \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i} (u - u_i), \\
\rho'_{(i)} &= \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{u_{i+1} - u_i} = k_i \quad (i = 1, 2, 3, 4; A_5 \equiv A_1)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

gde su ρ_i vrednosti ρ na segmentu $A_i A_{i+1}$.

Ispitivanje ovakve rotacione površi je radjeno prema Cohn-Vossenovom metodu [28]. Ako uvedemo oznake: $\bar{e}$ je jedinični vektor ose rotacije, $\bar{a}(v)$ je jedinični vektor ρ -ose, gde je v ugao izmedju ravni početne pozicije meridijana i $\bar{a}(v)$ onda $\bar{a}'(v) \perp \bar{a}(v)$ i $\bar{a}'(v) \perp \bar{e}$ (vidi [28] strana 90, ili [12] strana 253). Radijus vektor rotacione površi u koordinatnom sistemu sa bazom $\bar{e}, \bar{a}, \bar{a}'$ je

$$\bar{r}(u, v) = u\bar{e} + \rho(u)\bar{a}(v).$$

Možemo da podjemo od osnova i postupka za nalaženje polja beskonačno malog savijanja kako je već dato u poglavlju o toroidu sa četvorougaoim meridijanom, dakle definisano jednačinama (2.11), odnosno u obliku (2.15), (2.24). Ako postavimo sistem linearnih jednačina za temena paralelograma (2.34), (2.35) i jednačine po osnovu neprekidnosti polja beskonačno malog savijanja (2.37) i dalje primenjujemo postupak iz dokaza teoreme 2.4.2, na ovaj način se dobije homogen linearni sistem sa determinantom A . Tako, slično dokazu teoreme 2.4.2 uslov postojanja polja beskonačno malog savijanja možemo da formulišemo u obliku:

$$\det A = 0.$$

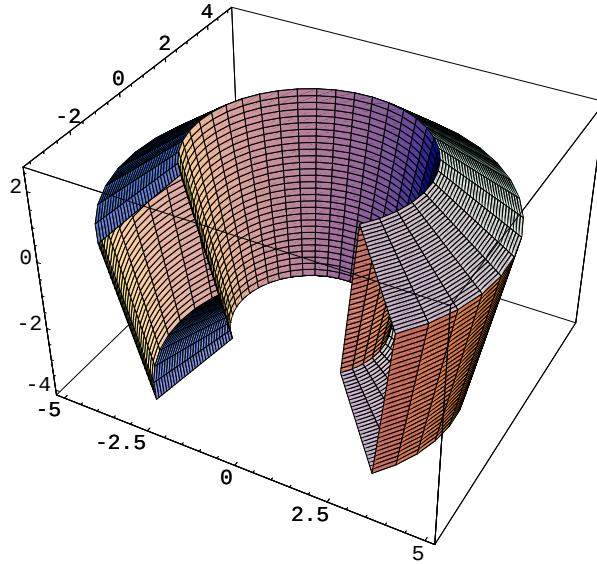
Sa oznakama kao u ovom poglavlju uslov je oblika:

$$\begin{aligned}
& [\rho_1 \rho_2 u_{43} k_{32} + \rho_1 \rho_3 u_{24} k_{12} + \rho_2 \rho_3 u_{14} k_{41} \\
& + \rho_1 (k^2 - 1) u_{23} u_{43} k_{12} k_{23}] \times \\
& [\rho_4 u_{12} u_{31} k_{41} + (k^2 - 1) u_{12} u_{43} u_{14} k_{14} k_{34} + \rho_1 u_{43} u_{24} k_{34}] - \\
& - (\rho_1 u_{23} u_{43} k_{23} + \rho_3 u_{12} u_{14} k_{41}) \\
& \times [\rho_1 \rho_2 u_{34} k_{34} + \rho_1 \rho_4 u_{32} k_{12} + \rho_2 \rho_4 u_{31} k_{41} \\
& + \rho_2 (k^2 - 1) u_{14} u_{43} k_{14} k_{34}] = 0,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

gde

$$\begin{aligned}
u_i - u_j &= u_{ij} \\
k_i - k_j &= k_{ij}.
\end{aligned}$$

Na slici 2.5.1 je prikazan primer toroida dobijenog rotacijom meridijana oblika paralelograma oko u ose. Slika 2.5.1 je dobijena korišćenjem simboličkog programskog paketa *Mathematica*.



Slika 2.5.1.

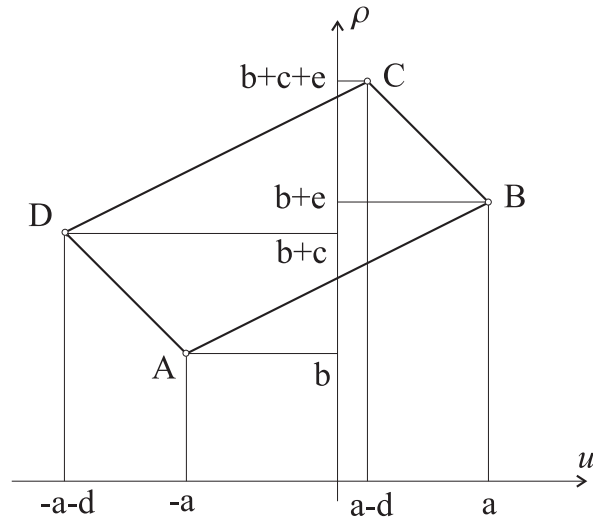
Ispitaćemo četiri moguća slučaja paralelograma koji ne sadrže ravne delove generisane stranama koje su ortogonalne na osu rotacije, kao ni cilindrične delove generisane stranama meridijana koje su paralelne osi rotacije. U nastavku su razmotreni slučajevi paralelograma i uslovi krutosti na njima. Koordinate temena su izražene u terminima pozitivnih vrednosti a , b , c , d i $e > 0$.

Slučaj 1:

Na slici 2.5.2 je prikazan paralelogram sa temenima $A[-a, b]$, $B[a, b + e]$, $C[a - d, b + c + e]$ i $D[-a - d, b + c]$. U ovom slučaju uslov nekrutosti dat sa (2.75) postaje

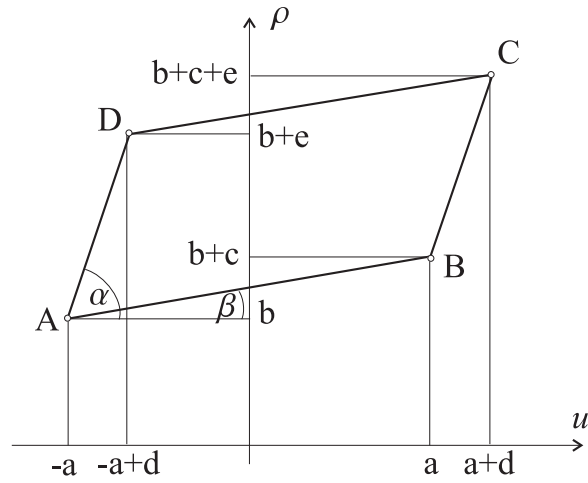
$$-\frac{b(2ac + ed)^4 k^4}{4a^2 d} = 0.$$

Lako se uvidja da izraz na levoj strani ne može biti jednak 0, kao i da je uvek manji od 0 saglasno pretpostavci da su a , b , c , d i e veći od 0. Ovo znači da polje beskonačno malog savijanja za ovaj slučaj ne postoji.



Slika 5.2.

Slučaj 2:



Slika 2.5.3.

Na slici 2.5.3 je prikazan paralelogram sa temenima $A[-a, b]$, $B[a, b+c]$, $C[a+d, b+c+e]$ i $D[-a+d, b+e]$. U ovom slučaju uslov nekrutosti dat sa (2.75) postaje

$$-\frac{b(-2ac+ed)^4 k^4}{4a^2 d} = 0.$$

Izraz na levoj strani može biti jednak 0 ako i samo ako

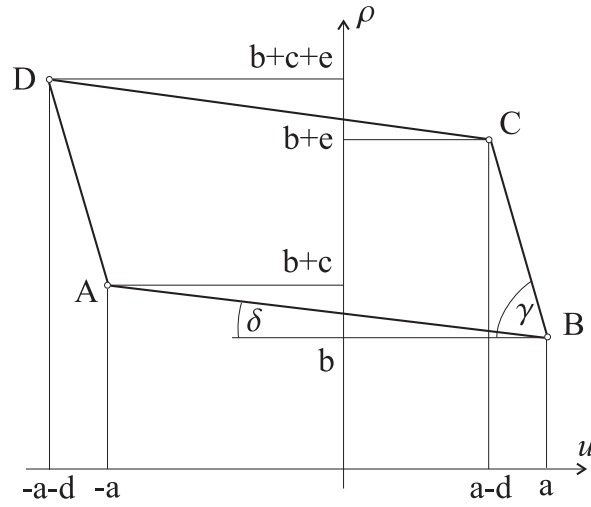
$$-2ac + ed = 0.$$

Ovaj uslov može biti napisan kao

$$\frac{e}{d} = \frac{c}{2a} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\beta).$$

Ako je ovo tačno paralelogram ne postoji, jer onda njegova temena leže na istoj pravoj.

Slučaj 3:



Slika 2.5.4.

Na slici 2.5.4 je prikazan paralelogram sa temenima $A[-a, b+c]$, $B[a, b]$, $C[a-d, b+e]$ i $D[-a-d, b+c+e]$. U ovom slučaju uslov postojanja polja beskonačno malog savijanja dat sa (2.75) postaje

$$\frac{-(b+c)(-2ae+cd)^4 k^4}{4a^2 d} = 0.$$

Izraz na levoj strani može biti 0 ako i samo ako

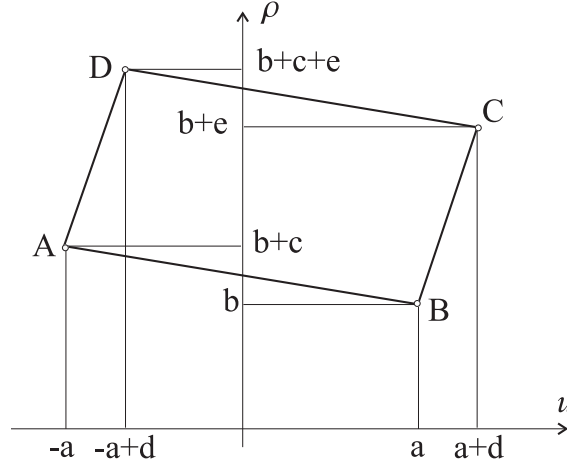
$$-2ae + cd = 0.$$

Ovaj uslov može se napisati u obliku

$$\frac{c}{2a} = \frac{e}{d} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\gamma).$$

Ako ovaj uslov važi temena paralelograma leže na jednoj pravoj, te onda paralelogram ne postoji.

Slučaj 4:



Slika 2.5.5.

Na slici 2.5.5 je prikazan paralelogram sa temenima $A[-a, b+c]$, $B[a, b]$, $C[a+d, b+e]$ i $D[-a+d, b+c+e]$. U ovom slučaju uslov postojanja polja beskonačno malog savijanja, dat sa (2.75), glasi

$$-\frac{(b+c)(2ae+cd)^4 k^4}{4a^2 d} = 0.$$

Prema pretpostavci o pozitivnim vrednostima a, b, c, d i e lako se može videti da izraz na levoj strani nije nikad jednak 0, u stvari uvek je manji od 0, tako da polje beskonačno malog savijanja ne postoji ni u ovom slučaju. $\square$

2.6 Odredjivanje polja beskonačno malog savijanja toroida sa četvorougaoim meridijanom

Prethodno primenjeni metod omogućava odredjivanje polja beskonačno male deformacije. Iz (2.42) može se dobiti redukovani sistem

$$\begin{aligned} D_{11}N_4 + D_{12}M_3 + D_{13}M_2 + D_{14}M_1 &= 0 \\ D_{22}M_3 + D_{23}M_2 + D_{24}M_1 &= 0 \\ D_{33}M_2 + D_{34}M_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.76}$$

odakle

$$\begin{aligned}
M_2 &= -\frac{D_{34}}{D_{33}}M_1, \\
M_3 &= \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) M_1, \\
N_4 &= \left[-\frac{D_{12}}{D_{11}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) + \frac{D_{13}D_{34}}{D_{11}D_{33}} - \frac{D_{14}}{D_{11}} \right] M_1, \\
M_4 &= \frac{1}{u_{14}} \left[u_{12} - \frac{u_{23}D_{34}}{D_{33}} + u_{34} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) \right] M_1, \\
N_1 &= \left\{ \left[-\frac{D_{12}}{D_{11}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) + \frac{D_{13}D_{34}}{D_{11}D_{33}} - \frac{D_{14}}{D_{11}} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_1u_{34}}{u_{14}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) - \frac{u_1u_{23}D_{34}}{u_{14}D_{33}} + \frac{u_1u_{12}}{u_{14}} - u_1 \right\} M_1, \quad (2.77) \\
N_2 &= \left\{ \left[-\frac{D_{12}}{D_{11}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) + \frac{D_{13}D_{34}}{D_{11}D_{33}} - \frac{D_{14}}{D_{11}} \right] - u_1 + u_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_{34}u_2}{D_{33}} + \frac{u_1u_{12}}{u_{14}} - \frac{u_1u_{23}D_{34}}{u_{14}D_{33}} + \frac{u_1u_{34}}{u_{14}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) \right\} M_1, \\
N_3 &= \left\{ \left[-\frac{D_{12}}{D_{11}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) + \frac{D_{13}D_{34}}{D_{11}D_{33}} - \frac{D_{14}}{D_{11}} \right] - u_1 + u_2 + \frac{D_{34}u_2}{D_{33}} \right. \\
&\quad - \frac{D_{34}u_3}{D_{33}} - \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) u_3 + \frac{u_1u_{12}}{u_{14}} - \frac{D_{34}u_1u_{23}}{D_{33}u_{14}} \\
&\quad \left. + \frac{u_1u_{34}}{u_{14}} \left(\frac{D_{23}D_{34}}{D_{22}D_{33}} - \frac{D_{24}}{D_{22}} \right) \right\} M_1.
\end{aligned}$$

Jednačinom (2.77) izrazili smo M_i, N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) u funkciji od M_1 (neodređena konstanta). Dalje, dobijamo $\psi_{(i)}(u)$ na osnovu (2.33) i na osnovu (2.16) funkcije $\chi_{(i)}, \varphi_{(i)}$, ($i = 1, 2, 3, 4$) su

$$\begin{aligned}
\chi_{(i)} &= \frac{I\psi_{(i)}}{k} = \frac{I(M_i u + N_i)}{k}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\
\varphi_{(i)} &= \frac{-M_i \rho_i + k_i(N_i - k^2 N_i + M_i(-k^2 u + u_i))}{k^2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

Na ovaj način dobijamo polje beskonačno malog savijanja $\bar{z}(u, v)$ iz (2.11). Koristili smo programski paket *Mathematica* za implementaciju i proveru izračunavanja.

2.7 Vizuelizacija beskonačno malih savijanja toroida generisanih četvorougaoim meridijanom

Računari omogućavaju vizuelizaciju površi i pogled na njih pod različitim uglovima uz biranje tačaka pogleda. Takodje mogu da pomognu u analizi uslova nekrutosti i odredjivanju da li ih zadovoljava generisani toroid. Na početku rada u ovoj oblasti u ispitivanju toroida i odredjivanju njihovih osobina koristili smo programski paket *Mathematica*. Napisani *Mathematica* notebook uzima tačke meridijana kao ulazne parametre, onda odredjuje uslove krutosti. Kao izlaz daje rezultat tipa string, koji je simbolička definicija rotacione površi, zajedno sa poljem beskonačno malog savijanja prvog reda. Takav rezultat se onda može da prosledi funkciji paketa za 3D reprezentaciju.

Grafička reprezentacija deformacija je razmatana u knjizi Gray [18], radovima Terzopoulos [48], Hahmann [19].

U cilju dobijanja programa sa više mogućnosti i više opcija posvećenog vizuelnoj prezentaciji koji ima brža osnovna i 3D izračunavanja kao jedan od glavnih zadataka tokom izrade disertacije bio je i razvoj SurfBand programa. Smatrali smo da će korisno doprineti istraživanju rotacionih površi i uticaja polja beskonačno malih savijanja na njih. Rana verzija programa je prezentovana na ESI Conference Rigidity and Flexibility, Vienna, 2006. Dobijeni analitički izrazi su grafički prezentovani u cilju ilustracije teorijskih razmatranja.

2.7.1 Korišćenje *SurfBand* programa

SurfBand je posvećen vizuelizaciji beskonačno malih savijanja toroida i razvijen je u C++ [27] i koristi OpenGL [16], [34] standard za prikazivanje grafike. Stoga je njegova portabilnost olakšana, mada je razvijan i testiran na *Microsoft Windows* platformi. Osnovna izračunavanja geometrijskog modela su uradjena u ANSI C++, ali je podizanje nivoa kontrole na interaktivni nivo uradjeno uz pomoć MFC [46]. Uzima kao ulazne parametre Dekartove koordinate tačaka poligona, onda izvršava analizu krutosti. Ako poligon zadovoljava uslove nekrutosti možemo da vizuelizujemo familiju infinitezimalno savitljivih površi. Takodje, mogu biti prikazani neki od nadjenih primera fleksibilnih konveksnih i nekonveksnih poligonalnih meridijana.

Za unos tačaka poligona i podešavanja fleksibilnog toroida namenjen je View/Property dijalog. Odatle se mogu menjati vidljivost i boje konusa dobijenih rotacijom meridijana. Parametar savijanja je inicijalno postavljen na 0.0 (nema savijanja), ugao rotacije na $\frac{3\pi}{2}$ i broj deobnih tačaka na 20, a oni mogu biti promenjeni preko odgovarajućih scroll barova, a efekti na 3D model su vidljivi na glavnom prozoru aplikacije.

Pritisak i držanje levog dugmeta miša, dok se miš kreće po podlozi će rotirati površ. Pritisak na taster "w" daje prikaz žičanog modela, a taster "f" daje prikaz ispunjenog modela. Tačka pogleda se može pozicionirati dalje ili bliže modelu. Postoji i svetlosni izvor koji se može uključiti radi postizanja realistične slike 3D objekta. Program može da se izvršava u više modova. Jedan od interesantnih je "drag and rotate" mod, gde se zapamćene rotacije modela mogu da ponavljaju kontinualno (primenjujući ih dalje ili vraćajući na početak).

Temena poligona rotacijom oko u-ose formiraju krugove. Infinitesimalno savijanje ih deformiše u krive, a one opisuju površi tokom deformisanja. Ovim se krivama i površima može da interaktivno pristupi preko View/Cone borders dijaloga. Njegova aktivacija prebacuje mod izvršenja, koji sakriva konuse, a pokazuje samo ove krive i površi koje opisuju. U ovom modu je na raspolaganju interektivno podešavanje osobina kao boja i vidljivosti krivih opisanih svakim od čvorova poligona, minimalnu i maksimalnu vrednost intervala za parametar savijanja. Na radnoj površi aplikacije se mogu videti krive ili mreža koja je pogodnija za prikaz površi koju formiraju tokom deformacije.

U programu koristimo vrstu Free-form deformacija (FFD) u modelovanju beskonačno malih savijanja fleksibilnih toroida. FFD [15], [48] je opšti metod za deformisanje objekata koji obezbeđuje viši i precizniji metod kontrole deformisanja objekata od nekih drugih i koji je računarski efikasan. To daje mogućnost kreiranja animacije savijanja toroida. U mogućnosti smo da postavimo startni položaj i podesimo osobine modela preko AnimationBeginProperty dijaloga, završnu formu modela preko AnimationEndProperty dijaloga. Posle potvrde u Drag to animate boxu, pritisak i držanje levog dugmeta miša dok ga pokrećemo će memorisati primenjene rotacije. Otpuštanje levog dugmeta miša označava završetak kreiranja animacije i ona će biti prikazivana transformišući model od polazne do završne forme.

Naš cilj je bio kreiranje alata, lakog za korišćenje, za:

- definisanje poligona i deformacije. Mogućnost da se numerički proveriti zadovoljenje uslova fleksibilnosti i dobijanje simboličke definicije infinitezimalno savijenih površi. Alat može da transformiše simboličku definiciju površi u numerički efikasnu internu strukturu i upotrebi je za potrebna izračunavanja tokom vizuelizacije površi;
- vizuelnu prezentaciju i mogućnost brzih i osnovnih i 3D izračunavanja. Vrlo je korisno interaktivno istražiti savijene površi i uticaj polja beskonačno malog savijanja na njih. Dobijeni 3D objekti mogu biti rotirani pomeranjem miša, obojeni po volji i razgledavani u punom i semi transparentnom zračnom modelu.

Programski alat za ove namene zahteva da ima simboličke i numeričke sposobnosti. Razlog je što polazimo od tačaka poligona, zatim postavljamo i rešavamo sisteme jednačina. Dalje dobijamo definicije konusnih rotacionih površi u obliku stringa, što su zapravo eksplicitne funkcije sa n nezavisno promenljivih na skupu elementarnih funkcija. Svaka elementarna funkcija je omotana u odgovarajuću klasu i kreirali smo hijerarhiju klasa radi podrške izgradnji strukture tipa stabla kao objektno orijentisanog stabla izraza. Svaka klasa u hijerarhiji ima redefinisane apstraktne funkcije članice:

```
double evaluate (double * arguments);
Function * derive(int argNumber);
```

Ove su nam funkcije neophodne da bismo izračunali tačke na rotacionoj površi, kao i da bismo u tim tačkama izračunali izvode i pomoću njih dobili vektore normala, što nam je neophodno za kalkulacije svetla i osvetljenosti modela.

Funkcija `evaluate` je projektovana da računa vrednost elementarne funkcije omotane klasom. Kao argument dobija niz double vrednosti n parametara za koje želimo da računamo vrednost funkcije.

Funkcija `derive` je projektovana da izgradi novu strukturu stabla prema pravilima za derivaciju elementarnih funkcija proširenih pravilima za složene funkcije. Ima kao argument redni broj nezavisno promenljive po kojoj se traži parcijalni izvod. Vrednost koju vraća je takodje `Function *` tipa, tako da je omogućeno korišćenje za izgradnju strukture stabla proizvoljnog reda i za potrebni redosled promenljivih po kojima se derivacija traži. Takodje i izračunavanje vrednosti dobijenog parcijalnog izvoda pozivom `evaluate` funkcije članice. Ovo je vredna osobina i omogućava racunanje količine svetla na površi.

Za parsiranje eksplicitno definisanih funkcija zadatih u obliku ulaznog stringa upotrebljene su formalne tehnike parsiranja, koje uključuju gramatiku koja opisuje takve funkcije [7], a kao alat za parsiranje korišćen je GOLD Parser [17]. Gramatički pristup parsiranju prirodnog jezika i otkrivanju entiteta u njemu je pristup čiji se opis i rezultati mogu naći u [49]. Posle uspešnog parsiranja gradimo internu strukturu objektno orijentisanog stabla funkcije, kako je opisano u objektno orijentisanom uzorku projektovanja Struktura (Composite) [14]:

```
MainFunction * pF;
if( ManagerFunction::parse( string f ) )
    pF = ManagerFunction::build(string f );
```

Takodje su u realizaciji korišćeni i poznati OO uzorci Singleton, Apstraktna fabrika (Abstract Factory) [14] za kreiranje objekata funkcija, izgradnju stabala i evaluiranje funkcija.

Data je mogućnost upotrebe scroll barova za lako interaktivno odredjivanje parametara za izračunavanje savijanja, ε ili broja deobnih tačaka. Dobijene infinitezimalno deformisane površi se prikazuju kao pun ili žičani model. Za slučaj prikaza u obliku žičanog modela mogu se elementarne površi prikazati upotrebom četvoruglova ili trouglova, a takodje je moguće koristiti prikaz dobijen fiksiranjem jednog parametra i menjanjem drugog, što daje niz poligonalnih linija. Takodje je interesantan prikaz koji ne eliminiše potpuno nevidljive linije kod žičanog modela, već se interaktivno može da podesi nivo polupropusnosti površina.

2.7.2 Primeri

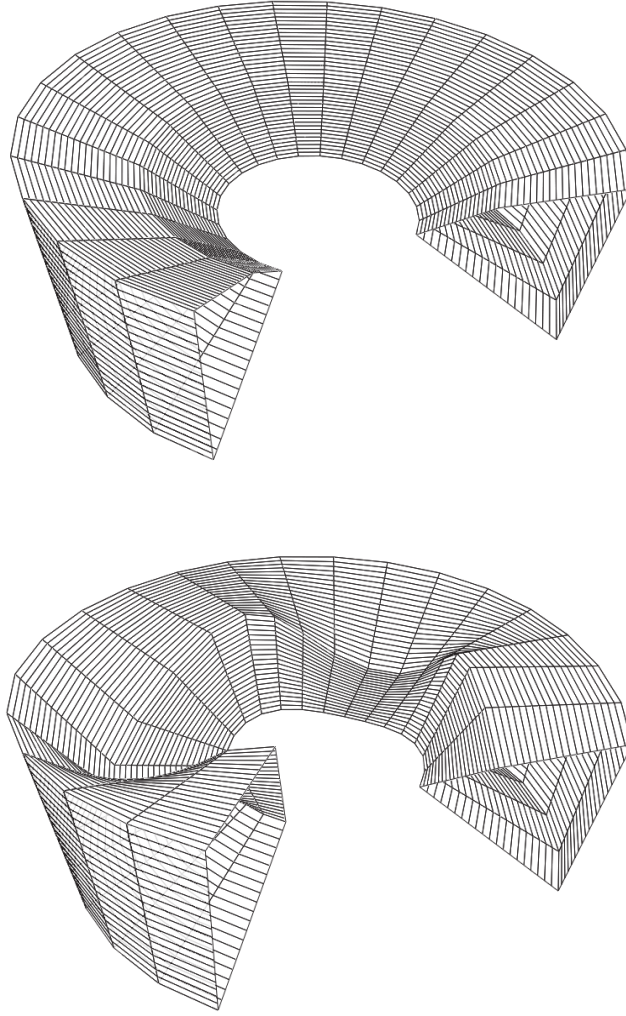
Sledeći primeri su dobijeni upotrebom razvijenog alata SurfBend.

Primer 2.7.1 *Primer je dobijen za $p \neq q$, $r \neq s$, $k = 3$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $b = -6$, $a = 1$, $p = 4$, $q = 3$, $r = 5$ i $s = \frac{60}{(192-5\sqrt{3})}$.*

Tako dobijamo temena

$$\left\{ (-1, 2(3 + \sqrt{3})), (7 + \frac{1152}{-192 + 5\sqrt{3}}, 6 - \frac{30}{192 - 5\sqrt{3}}), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}(4 - \sqrt{3})), (1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{17}{2}) \right\}.$$

Za $\varepsilon = 0.25$ (Slika 2.7.1.) daje polazni i transformisani toroid.

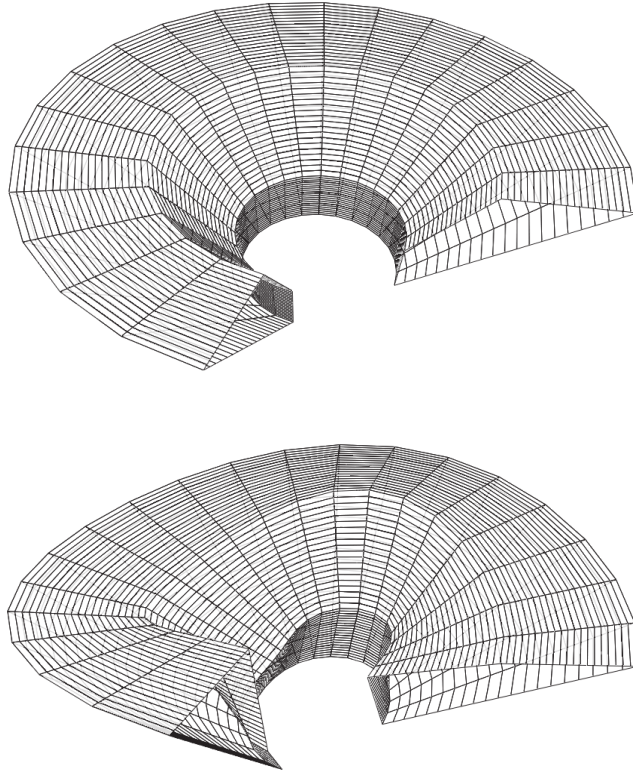


Slika 2.7.1.

Primer 2.7.2 Primer je dobijen za parametre $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5\pi}{6}, p = q = 4, a = 1, b = 6, s = 3$ i $r = 1$. Tako imamo temena

$$\left\{ (-2\sqrt{3}, 4), \left(\frac{27 + 12\sqrt{3}}{11}, \frac{102 + 27\sqrt{3}}{11} \right), (2\sqrt{3}, 8), (-1, 6 - 2\sqrt{3}) \right\}.$$

Slika 2.7.2. sadrži polazni i deformisani toroid za $\varepsilon = 0.015$.

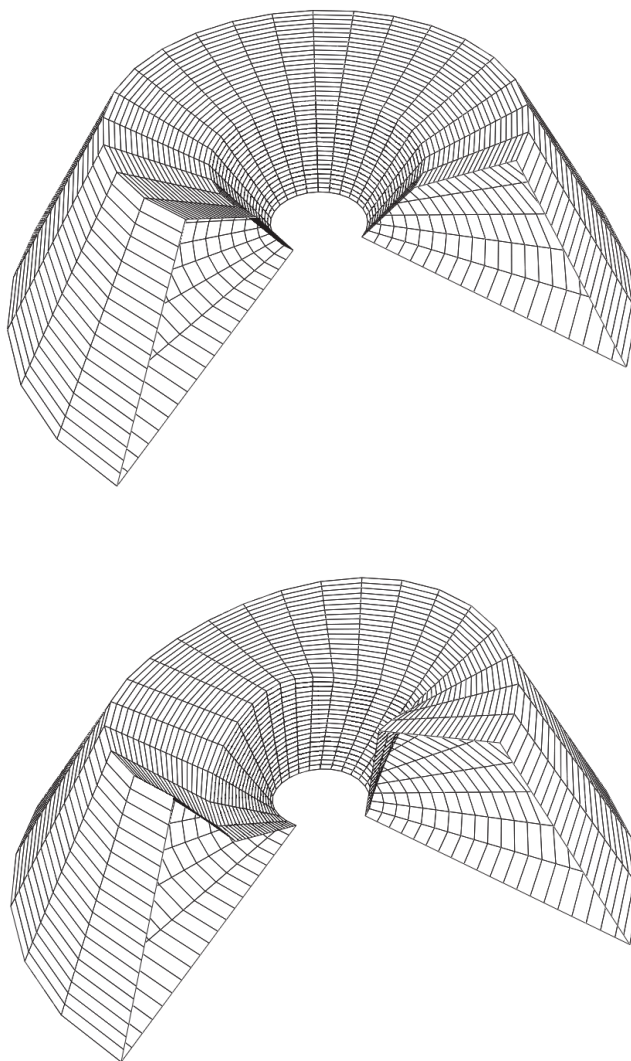


Slika 2.7.2.

Primer 2.7.3 Primer je za parametre $r = s$ i uzete vrednosti $r = 5, s = 5, \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, b = 6, a = 1, p = 1, q = 3(2 + \sqrt{3}), k = 2$. Tako su dobijena temena meridijana

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}, 6 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(1 + \frac{5}{\sqrt{2}}, 6 + \frac{5}{\sqrt{2}} \right), \left(-2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{21}{2} + 3\sqrt{3} \right), \right. \\ \left. \left(1 - \frac{5}{\sqrt{2}}, 6 - \frac{5}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Slika 2.7.3. sadrži polazni i deformisani toroid za $\varepsilon = 0.5$.

*Slika 2.7.3.*

Poglavlje 3

Beskonačno mala savijanja toroida sa poligonalnim meridijanom

U ovoj glavi razmatraćemo toroidne rotacione površi generisane poligonalnim meridijanom u E_3 . Daćemo potrebne i dovoljne uslove za postojanje polja beskonačno malog savijanja ovih površi. Temena poligonalnog meridijana su data u obliku koordinata i na osnovu njih su razmatrani uslovi za postojanje polja. Razmatrana su i beskonačno mala savijanja višeg reda. Izloženi su primeri nadjenih fleksibilnih toroidnih površi. Ovde su prikazani rezultati objavljeni u radovima: [63], [64] i [60].

3.1 Uvod

Teorija savijanja površi razmatra savijanje površi, izometrijske transformacije, kao i beskonačno mala savijanja površi. Savijanje transformiše površ u neprekidnu familiju izometrijskih površi, tako da se očuvavaju veličine uglova i dužine lukova krivih. Sa druge strane beskonačno mala savijanja površi nisu izometrijske deformacije, ali se može reći samo uslovno, da jesu sa odgovarajućom tačnošću. Dužina luka je stacionarna pod beskonačno malim savijanjima.

U ovoj glavi razmatrana su beskonačno mala savijanja toroidnih površi dobijenih rotacijom poligonalnog meridijana u E_3 . U prethodnom veku teorija savijanja je razvijena zahvaljujući radu vodećih matematičara D. Hielberta, H. Weila, Blaschkea, Cohn-Vossena, A. D. Aleksandrova, N. V. Efimova, A. V. Pogorelova, I. N. Vekua, V. T. Fomenka, I. Kh. Sabitova, I. I. Karatopraklijeve, R. Conellya, R. Bishopa, H. Stachela, H. Glucka... Medju prvima koji su se bavili, koji su postavili temelje, možemo istaći H. Liebmana, [30],

[31], A. D. Aleksandrova [1], T. Rada i T. Minagawu [37], [38], kao i Efimova [12] i Cohn-Vossena [28].

3.2 Toroid sa poligonalnim meridijanom

Osnovni koncepti beskonačno malih savijanja mogu biti definisani na više različitih načina. Ovde je uzet pristup prema Efimovu [12] i Cohn-Vossenu [28].

Posmatrajmo površ $S \subset \mathbb{R}$ klase $C^\alpha, \alpha \geq 3$.

Definicija 3.2.1 *Površ S_ε je deformacija deo po deo regularne površi S ako je uključena u neprekidnu familiju površi*

$$\begin{aligned} S_\varepsilon : \bar{r} = (u, v, \varepsilon) = \bar{r}_\varepsilon(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \in [0, 1], \\ \bar{r}_\varepsilon : D \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

pri čemu dobijamo S za $\varepsilon = 0$.

Razmatraćemo vrstu neprekidne familije površi, prema Efimovu [12].

Definicija 3.2.2 *Neka je površ*

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

$$S_\varepsilon : \bar{r}_\varepsilon = \bar{r}_\varepsilon(u, v, \varepsilon), \quad (\varepsilon \geq 0, \varepsilon \rightarrow 0), \quad (3.2)$$

zavisna od parametra ε i dobijamo S za $\varepsilon = 0$. Na taj način

$$S_\varepsilon : \bar{r}_\varepsilon = \bar{r}(u, v) + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \bar{z}^{(j)}(u, v), \quad m \geq 1,$$

gde su $\bar{z}^{(j)}(u, v) \in C^\alpha(\alpha \geq 3)$, $j = 1, \dots, m$, data polja, a familija S_ε je beskonačno mala deformacija reda m površi S .

Teorija koja se bavi istraživanjem geometrijskih objekata povezanih sa S_ε do preciznosti reda m obzirom na ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) je teorija beskonačno malih deformacija površi reda m . Dajući dodatne posebne uslove dobijamo različite vrste deformacija površi.

Deformacije višeg reda poliedarskih površi razmatrali su u V. A. Aleksandrov [2] i H. Stachel [47].

Neka je regularna površ S klase C^α , $\alpha \geq 3$, data u vektorskoj formi sa (3.1), uključena u familiju površi

$$S_\varepsilon : \bar{r}_\varepsilon(u, v, \varepsilon) = \bar{r}(u, v) + \varepsilon \bar{z}(u, v), \quad (3.3)$$

gde $\varepsilon(\varepsilon \rightarrow 0)$, $(u, v) \in D$, $D \subset \mathbb{R}$ i $\bar{r}_0(u, v, 0) = \bar{r}(u, v)$.

Definicija 3.2.3 *Površ (3.3) su beskonačno mala savijanja prvog reda površi S ako*

$$ds_\varepsilon^2 - ds^2 = o(\varepsilon) \quad (3.4)$$

tj. razlika kvadrata linijskih segmenata površi je višeg reda od prvog.

Polje $\bar{z}(u, v)$ za koje važi

$$\left. \frac{\partial \bar{r}(u, v, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \bar{z}(u, v) \quad (3.5)$$

je brzina ili polje beskonačno malog savijanja.

Prema [12], [28] ova definicija je ekvivalentna sledećoj teoremi:

Teorema 3.2.1 *Potreban i dovoljan uslov da površ S_ε data sa (3.3) bude polje beskonačno malog savijanja površi S (3.1) je*

$$d\bar{r}d\bar{z} = 0, \quad (3.6)$$

gde je $\bar{z}(u, v)$ polje brzine u početnom trenutku deformacije. $\square$

Jednačina (3.6) je ekvivalentna sa sledeće tri parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\bar{r}_u \bar{z}_u = 0, \quad \bar{r}_u \bar{z}_v + \bar{r}_v \bar{z}_u = 0, \quad \bar{r}_v \bar{z}_v = 0. \quad (3.7)$$

Usled beskonačno malog savijanja površi svaki linijski segment dobija nenulti dodatak, koji je beskonačno mala vrednost višeg reda u odnosu na ε , tj.

$$ds_\varepsilon - ds = o(\varepsilon) \geq 0. \quad (3.8)$$

3.3 Polje beskonačno malog savijanja prvog reda toroida sa poligonalnim meridijanom

Posmataćemo infinitezimalne deformacije toroidne rotacione površi čiji je meridijan poligon. Daćemo potreban i dovoljan uslov krutosti ovakvog toroida. Takodje i postupak za određivanje polja beskonačno malog savijanja.

Neka je P_n poligon sa temenima: $A_i(u_i, \rho_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) u Dekartovom koordinatnom sistemu $uO\rho$ sa osom rotacije u . Jednačine strana poligona su:

$$A_m A_{m+1} : \rho_{(m)} = \rho_m + \frac{\rho_{m+1} - \rho_m}{u_{m+1} - u_m}(u - u_m), \quad (3.9)$$

$$\rho'_{(m)} = \frac{\rho_{m+1} - \rho_m}{u_{m+1} - u_m} = k_m \quad (m = 1, 2, \dots, n; A_{n+1} \equiv A_1)$$

gde je $\rho_{(m)}$ vrednost ρ na strani $A_m A_{m+1}$.

U cilju razmatranja beskonačno malog savijanja toroidne rotacione površi koristićemo Cohn-Vossenov [28]. Radijus vektor površi je

$$\bar{r}(u, v) = u\bar{e} + \rho(u)\bar{a}(v),$$

gde je $\rho = \rho(u)$ jednačina meridijana. Ako je $\bar{e}$ jedinični vektor ose rotacije, $\bar{a}(v)$ jedinični vektor ρ ose, v je ugao između ravni početne pozicije meridijana i $\bar{a}(v)$, onda je $\bar{a}'(v)$ normalan na $\bar{a}(v)$ i $\bar{a}'(v)$ je normalan na $\bar{e}$ (vidi [12] strana 90, ili [28] strana 253).

Polje beskonačno malog savijanja površi S pokušaćemo da nadujemo u obliku

$$\begin{aligned} \bar{z}(u, v) = \bar{z}_k(u, v) = & [\varphi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\varphi}_k(u)e^{-ikv}]\bar{e} + \\ & [\psi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\psi}_k(u)e^{-ikv}]\bar{a}(v) + [\chi_k(u)e^{ikv} + \tilde{\chi}_k(u)e^{-ikv}]\bar{a}'(v). \end{aligned}$$

Funkcije $\varphi_k(u)$, $\psi_k(u)$, $\chi_k(u)$ zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{aligned} \varphi'_k(u) + \rho'(u)\psi'_k(u) &= 0, \\ \psi_k(u) + ik\chi'_k(u) &= 0, \\ ik\varphi_k(u) + \rho'(u)[ik\psi_k(u) - \chi_k(u)] + \rho(u)\chi'_k(u) &= 0. \end{aligned}$$

Funkcije $\psi_k(u)$, $\chi_k(u)$ takodje zadovoljavaju jednačinu

$$\rho(u)\lambda''(u) + (k^2 - 1)\rho''(u)\lambda(u) = 0, \quad (3.10)$$

gde je $\lambda(u)$ nepoznata funkcija. Izostavićemo indeks k , i označiti sa $\psi_{(i)}$ vrednost funkcija ψ na $A_i A_{i+1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), $A_{n+1} \equiv A_1$.

Iz jednačina (3.9) i (3.10) sledi takodje linearnost funkcija $\psi_i(u)$

$$\psi_{(i)} = M_i u + N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.11)$$

U tačkama $u = \sigma$ meridijana, gde $\rho(\sigma - 0) = \rho(\sigma + 0)$, tj. u temenima poligona, pretpostavljajući neprekidnost funkcija $\psi_{(i)}(u)$ dobijamo

$$\psi_{(i)}(u_i) = \psi_{(i-1)}(u_i), \quad i = 2, \dots, n; \quad \psi_{(1)}(u_1) = \psi_{(n)}(u_1),$$

a dalje, prema (3.11)

$$M_i u_i + N_i = M_{i-1} u_i + N_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad M_0 \equiv M_n, \quad N_0 \equiv N_n.$$

Ako posmatramo ovaj sistem kao sistem sa nepoznatim N_i , $i = 1, 2, \dots, n$, imamo:

$$\begin{array}{rcl} N_1 & - N_n & = -M_1 u_1 + M_n u_1 \\ N_1 - N_2 & & = -M_1 u_2 + M_2 u_2 \\ & \dots\dots\dots & \\ N_{m-1} - N_m & & = -M_{m-1} u_m + M_m u_m \\ & \dots\dots\dots & \\ & N_{n-1} - N_n & = -M_{n-1} u_n + M_n u_n. \end{array} \quad (3.12)$$

U temenima poligona važi neprekidnost polja savijanja, te prema [28] imamo sledeću jednačinu

$$\rho(\sigma)[\psi'_k(\sigma + 0) - \psi'_k(\sigma - 0)] + (k^2 - 1)\psi_k(\sigma)[\rho'(\sigma + 0) - \rho'(\sigma - 0)] = 0,$$

Primenjujući ovu jednačinu na temena M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \rho_i(M_i - M_{i-1}) + (k^2 - 1)((M_i u_i + N_i)(k_i - k_{i-1})) &= 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n; \quad M_0 \equiv M_n, \quad k_0 \equiv k_n). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Jednačine (3.12) i (3.13) predstavljaju sistem lineranih jednačina sa nepoznatim M_i, N_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) i označimo sa A matricu sistema i sa P proširenu matricu sistema.

U cilju razmatranja sistema (3.13) uradićemo elementarne transformacije nad sistemom.

Sistem dat sa (3.13) je kompatibilan ako i samo ako je $\text{rang} A = \text{rang} P$ tj. ako i samo ako je

$$M_n = \frac{1}{u_1 - u_n} \sum_{i=1}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) M_i. \quad (3.14)$$

Prema (3.13) i (3.14) dobijamo redukovani sistem za

$$\begin{array}{rcl} N_1 & - N_n & = (M_n - M_1)u_1 \\ -N_2 & + N_n & = (M_1 - M_n)u_1 + (M_2 - M_1)u_2, \\ & \dots\dots\dots & \\ & \text{za } m = 3, \dots, n-2 & \\ -N_m + & N_n & = (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^m (M_l - M_{l-1})u_l, \\ & \dots\dots\dots & \\ N_{n-1} + N_n & = & (M_1 - M_n)u_1 + \sum_{l=2}^{n-1} (M_l - M_{l-1})u_l. \end{array} \quad (3.15)$$

Uvodimo notaciju

$$u_i - u_j = u_{ij}, \quad k_i - k_j = k_{ij}$$

iz (3.15) dobijamo

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_n + \frac{u_1}{u_{1n}} \left[u_{n2} M_1 + \sum_{i=2}^{n-1} u_{i,i+1} M_i \right] \\
&\dots\dots\dots \\
&\text{za } m = 2, \dots, n-2 \\
N_m &= N_n + \frac{u_1}{u_{1n}} \sum_{i=1}^{m-1} u_{i,i+1} M_i + \frac{u_m u_n - u_1 u_{m+1}}{u_{1n}} M_m \\
&\quad + \frac{u_1}{u_{1n}} \sum_{i=m+1}^{n-1} u_{i,i+1} M_i, \\
&\dots\dots\dots \\
N_{n-1} &= N_n + \frac{u_n}{u_{1,n-2}} + \sum_{i=1}^{n-2} u_{i,i+1} M_i + \frac{u_n u_{n-1,1}}{u_{1,n}} M_{n-1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sistem (3.13) sa nepoznatima $M_1, \dots, M_{n-1}, N_n$ redukuje na:

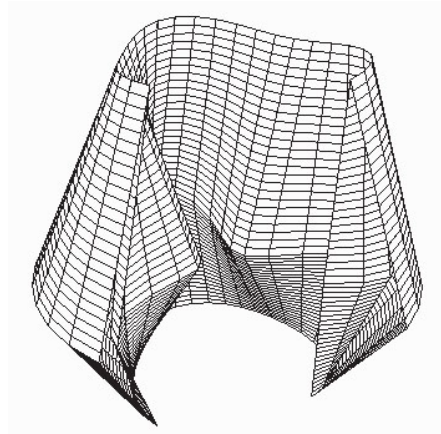
$$\begin{aligned}
&[\rho_1 u_{2,n} + (k^2 - 1) k_{1,n} u_1 u_{1,2}] M_1 + \sum_{i=1}^{n-1} u_{i,j+1} [(k^2 - 1) k_{1,n} u_1 u_{1,2}] M_i \\
&[(k^2 - 1) k_{2,1} u_n u_{1,2} - \rho_2 u_{1,n}] M_1 + [\rho_2 u_{1,n} + (k^2 - 1) k_{2,1} u_1 u_{2,3}] M_2 \\
&+ (k^2 - 1) k_{2,1} \left[u_{1,2} N_n + u_1 \sum_{i=3}^{n-1} u_{i,i+1} M_i \right] = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
&(k^2 - 1) k_{m,m-1} u_n \sum_{i=1}^{m-2} u_{i,j+1} M_i \\
&+ [(k^2 - 1) k_{m,m-1} u_n u_{m-1,m} + \rho_m u_{n,1}] M_{m-1} \\
&+ (k^2 - 1) k_{m,m-1} u_1 \sum_{i=m+1}^{n-2} u_{i,j+1} M_i + (k^2 - 1) k_{m,m-1} u_{1,n} N_n = 0 \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&\dots\dots\dots \\
&(k^2 - 1) k_{m,m-1} u_n \sum_{i=1}^{m-2} u_{i,j+1} M_i \\
&+ [(k^2 - 1) k_{m,m-1} u_n u_{m-1,m} + \rho_m u_{n,1}] M_{m-1} \\
&+ (k^2 - 1) k_{m,m-1} u_1 \sum_{i=m+1}^{n-2} u_{i,j+1} M_i + (k^2 - 1) k_{m,m-1} u_{1,n} N_n = 0 \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.4 Primeri

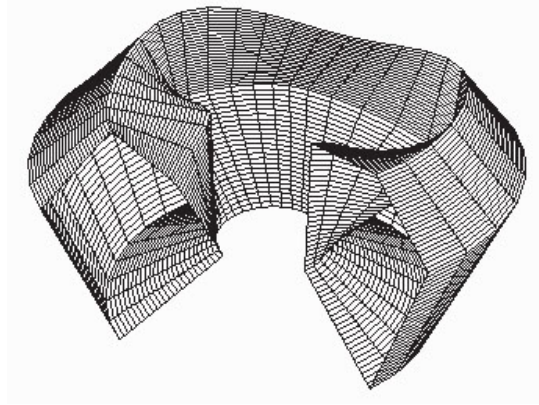
Dalje slede primeri toroidnih površi sa poligonalnim meridijanom koji su dobijeni alatom SurfBand.

Primer 3.4.1 *Fleksibilna toroidna površ (Slika 3.4.1.) sa konveksnim četvorougaoim meridijanom čija su temena $A(-3, \frac{18}{7})$, $B(0, \frac{65}{28})$, $C(5, \frac{18}{7})$, $D(0, \frac{32}{7})$ i $k = 3$, $\varepsilon = 0.15$.*



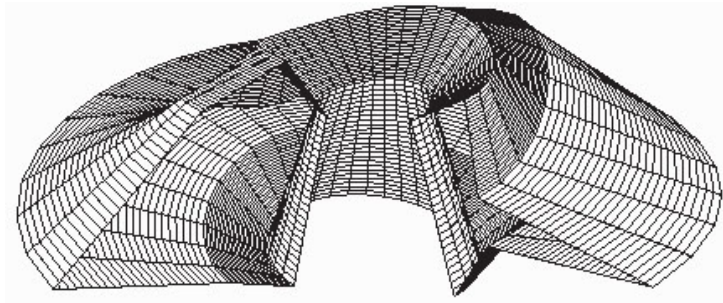
Slika 3.4.1.

Primer 3.4.2 *Slika 3.4.2 je dobijena rotacijom petougaoog meridijana sa temenima $A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(1, 4)$, $D(2, \frac{24275-31\sqrt{51937}}{6069})$, $E(1, 2)$, $k = 3$, $\varepsilon = 0.01$.*



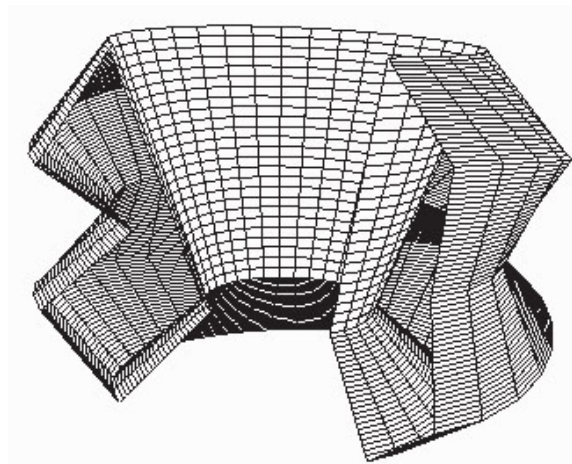
Slika 3.4.2.

Primer 3.4.3 *Primer fleksibilne toroidne površi (Slika 3.4.3) je površ sa šestougaonim meridijanom sa temenima $A(-1, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-1, 3)$, $D(0, 6)$, $E(1, 3)$, $F(2, 2)$, $k = 2$, $\varepsilon = 0.1$.*



Slika 3.4.3.

Primer 3.4.4 *Primer fleksibilne toroidne površi (Slika 3.4.4) sa konveksnim šestougaonim meridijanom, čija su temena $D(0, \frac{167-\sqrt{6133}}{37})$, $E(1, 3)$, $F(2, 2)$, $A(-1, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-1, 3)$, $k = 2$, $\varepsilon = 0.1$.*



Slika 3.4.4.

3.5 Beskonačno mala savijanja višeg reda rotacionih površi

Razmotrićemo beskonačno mala savijanja toroidne rotacione površi generisane poligonalnim meridijanom, koji ne sadrži segmente normalne na osu rotacije.

Poznato je [28], [12] da su sfera i torus krute površi. Među površima koje su topološki ekvivalentne torusu, Belov [4] je ukazao na klasu fleksibilnih površi; generisanih četvorougloj specijalne forme. U prethodnom odeljku su razmatrane toroidne površi sa poligonalnim meridijanom, bez ravnih delova i dati su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje polja beskonačno malog savijanja prvog reda. Velimirović u radu [52] razmatra beskonačno male doformacije drugog reda. To je vodilo dalje do proširenja na beskonačno male deformacije višeg reda toroidne rotacione površi sa poligonalnim meridijanom.

Fleksibilnosti višeg reda su takodje proučavane, videti V. A. Aleksandrov [2], N. G. Perlova [42] i H. Stachel [47]. Fundamentalni doprinos teoriji beskonačno malih savijanja dao je prof. I. Kh. Sabitov u [24] i [44].

Neka je S deo po deo regularna površ, data jednačinom

$$S : \bar{r} = \bar{r}(u, v), \quad (3.21)$$

uključena u familiju površi

$$S_t : \bar{r}_t = \bar{r}(u, v) + \sum_{j=1}^m t^j \bar{z}^{(j)}(u, v), \quad (3.22)$$

gde je $t \in R$ parametar i $\bar{z}^{(j)}(u, v)$ su neprekidne vektorske funkcije deinisane u tačkama na S .

Definicija 3.5.1 *Površni S_t (3.22), $t \in R$ su beskonačno mala savijanja m -tog reda površi S ako*

$$ds_t^2 - ds^2 = o(t^m). \quad (3.23)$$

Ovaj uslov je prema [12], [28] ekvivalentan sistemu jednačina:

$$d\bar{r}d\bar{z} = 0, \quad 2d\bar{r}d\bar{z}^{(j)} + \sum_{l=1}^{j-1} d\bar{z}^{(l)}d\bar{z}^{(j-l)} = 0, \quad \text{for } j = 2, \dots, m. \quad (3.24)$$

I ovde ćemo koristiti Cohn-Vossenov metod [28] za istraživanje beskonačno malih savijanja površi. U ravni meridijana koji rotira oko u -ose uvodimo Dekartov ortogonalni koordinatni sistem $uO\rho$, gde $\rho = \rho(u)$ je jednačina meridijana. Označimo sa $\bar{e}$ jedinični vektor ose rotacije, sa $\bar{a}(v)$ jedinični vektor ρ -ose, gde je v ugao između ravni početne pozicije meridijana i $\bar{a}(v)$, onda je $\bar{a}'(v)$ ortogonalno na $\bar{a}(v)$ i $\bar{a}'(v)$ je ortogonalno na $\bar{e}$ (vidi [42] strana 253, ili [28] strana 90).

Jednačina rotacione površi u koordinatnom sistemu sa bazom $\bar{e}, \bar{a}, \bar{a}'$ je

$$S : \bar{r}(u, v) = u\bar{e} + \rho(u)\bar{a}(v), \quad (3.25)$$

gde je $\rho = \rho(u)$ jednačina meridijana. Polje beskonačno malog savijanja $\bar{z}^{(j)}(u, v)$, $j = 1, \dots, m$ može se predstaviti pomoću sistema međjusobno normalnih jediničnih vektora $\bar{e}, \bar{a}(v), \bar{a}'(v)$ u obliku

$$\bar{z}^{(j)}(u, v) = \alpha^{(j)}(u, v)\bar{e} + \beta^{(j)}(u, v)\bar{a} + \gamma^{(j)}(u, v)\bar{a}'. \quad (3.26)$$

Koeficijenti $\alpha^{(j)}(u, v)$, $\beta^{(j)}(u, v)$, $\gamma^{(j)}(u, v)$, $j = 1, 2, \dots, m$, su periodične funkcije nezavisno promenljive v , sa periodom 2π , a prema Cohn-Vossenu [28] mogu biti predstavljene za $j = 1$ u obliku

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)}(u, v) &= \alpha_k^{(1)}(u, v) = \varphi_k^{(1)}(u)e^{ikv} + \varphi_{-k}^{(1)}(u)e^{-ikv}, \\
\beta^{(1)}(u, v) &= \beta_k^{(1)}(u, v) = \psi_k^{(1)}(u)e^{ikv} + \psi_{-k}^{(1)}(u)e^{-ikv}, \\
\gamma^{(1)}(u, v) &= \gamma_k^{(1)}(u, v) = \chi_k^{(1)}(u)e^{ikv} + \chi_{-k}^{(1)}(u)e^{-ikv},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

gde su $k \geq 2$, $k \in Z$, i $\varphi_{-k}^{(1)}(u)$ konjugovane vrednosti $\varphi_k^{(1)}(u)$ i tako dalje. Funkcije $\varphi_k^{(1)}(u)$, $\psi_k^{(1)}(u)$, $\chi_k^{(1)}(u)$ zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\varphi_k^{(1)'} + \rho^{(1)'}\psi_k^{(1)} = 0, \quad ik\chi_k^{(1)} + \psi_k^{(1)} = 0, \quad ik\varphi_k^{(1)} + \rho'(k\psi_k^{(1)} - \chi_k^{(1)}) + \rho\chi_k^{(1)'} = 0, \tag{3.28}$$

odakle se dobija diferencijalna jednačina drugog reda po $\psi_k^{(1)}$

$$\rho\psi_k^{(1)''} + (k^2 - 1)\rho''\psi_k^{(1)} = 0. \tag{3.29}$$

Prvo rešavamo jednačinu (3.29) i onda odredjujemo $\varphi_k^{(1)}(u)$, $\chi_k^{(1)}(u)$ iz (3.28). Tako dobijamo

$$\begin{aligned}
\bar{z}^{(1)}(u, v) &= \bar{z}_k^{(1)}(u, v) \\
&= e^{ikv}[\varphi_k^{(1)}(u)\bar{e} + \psi_k^{(1)}(u)\bar{a}(v) + \chi_k^{(1)}(u)\bar{a}'(v)] \\
&\quad + e^{-ikv}[\varphi_{-k}^{(1)}(u)\bar{e} + \psi_{-k}^{(1)}(u)\bar{a}(v) + \chi_{-k}^{(1)}(u)\bar{a}'(v)].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Za $j > 1$ (prema [24], [28], [42]) funkcije $\alpha_k^{(j)}(u, v)$, $\beta_k^{(j)}(u, v)$, $\gamma_k^{(j)}(u, v)$, $j = 2, \dots, m$, imaju:

- 1) za parno j , samo parne stepene $e^{\pm ikv}$ i e^0 ,
- 2) za neparno j , samo neparne stepene $e^{\pm ikv}$, tj.

$$\begin{aligned}
\alpha_k^{(j)}(u, v) &= \sum_{(p)}^{(j)} [\varphi_{pk}^{(j)}(u)e^{ipkv} + \varphi_{-pk}^{(j)}(u)e^{-ipkv}], \\
\beta_k^{(j)}(u, v) &= \sum_{(p)}^{(j)} [\psi_{pk}^{(j)}(u)e^{ipkv} + \psi_{-pk}^{(j)}(u)e^{-ipkv}], \\
\gamma_k^{(j)}(u, v) &= \sum_{(p)}^{(j)} [\chi_{pk}^{(j)}(u)e^{ipkv} + \chi_{-pk}^{(j)}(u)e^{-ipkv}],
\end{aligned} \tag{3.31}$$

gde

- 1) $p = 0, 2, 4, \dots, j$ za parno j ,
- 2) $p = 1, 3, 5, \dots, j$ za neparno j .

Polje beskonačno malog savijanja reda j je

$$\begin{aligned} \bar{z}_k^{(j)}(u, v) = & \left[\sum_{(p)}^{(j)} (\varphi_{pk}(u) e^{ipkv} + \varphi_{-pk}(u) e^{-ipkv}) \right] \bar{e} \\ & + \left[\sum_{(p)}^{(j)} (\psi_{pk}(u) e^{ipkv} + \psi_{-pk}(u) e^{-ipkv}) \right] \bar{a}(v) \\ & + \left[\sum_{(p)}^{(j)} (\chi_{pk}(u) e^{ipkv} + \chi_{-pk}(u) e^{-ipkv}) \right] \bar{a}'(v). \end{aligned}$$

Funkcije $\varphi_{pk}^{(j)}(u)$, $\psi_{pk}^{(j)}(u)$, $\chi_{pk}^{(j)}(u)$, zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \varphi_{pk}^{(j)'}(u) + \rho'(u) \psi_{pk}^{(j)'}(u) &= A_{pk}^{(j)}(u), \\ ipk \chi_{pk}^{(j)}(u) + \psi_{pk}^{(j)}(u) &= B_{pk}^{(j)}(u), \\ ipk \varphi_{pk}^{(j)}(u) + \rho'(u) (ipk \psi_{pk}^{(j)}(u) - \chi_{pk}^{(j)}(u)) + \rho(u) \chi_{pk}^{(j)'}(u) &= C_{pk}^{(j)}(u). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ovaj sistem je ekvivalentan diferencijalnoj jednačini drugog reda po $\psi_{pk}^{(j)}$

$$\rho \psi_{pk}^{(j)''} + (p^2 k^2 - 1) \rho'' \psi_{pk}^{(j)} = R_{pk}^{(j)}(u), \quad (3.33)$$

gde

$$R_{pk}^{(j)}(u) = -\rho'' B_{pk}^{(j)}(u) + \rho B_{pk}^{(j)''}(u) - p^2 k^2 A_{pk}^{(j)}(u) - ipk C_{pk}^{(j)'}(u). \quad (3.34)$$

Desna strana sistema (3.32) može biti napisana sa više detalja na poznat način, prema [23]

$$\begin{aligned} A_{pk}^{(j)}(u) = A_{(j-2h_j)k}^{(j)}(u) &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{r_s} (\varphi_{r_s k}^{(s)'} \varphi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)'}) \\ &+ \psi_{r_s k}^{(s)'} \psi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)'} + \chi_{r_s k}^{(s)'} \chi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)'}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
B_{pk}^{(j)}(u) &= B_{(j-2h_j)k}^{(j)}(u) \\
&= -\frac{1}{2\rho} \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{(r_s)} \{ -k^2 r_s (j-2h_j-r_s) \binom{(s)}{\varphi_{r_s k}} \binom{(j-s)}{\varphi_{(j-2h_j-r_s)k}} \\
&\quad + (i r_{sk} \psi_{r_s k}^{(s)} - \chi_{r_s k}^{(s)}) [i(j-2h_j-r_s)k \binom{(j-s)}{\psi_{(j-2h_j-r_s)k}} - \chi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)}] \\
&\quad + (i r_{sk} \chi_{r_s k}^{(s)} + \psi_{r_s k}^{(s)}) [i(j-2h_j-r_s)k \binom{(j-s)}{\chi_{(j-2h_j-r_s)k}} + \psi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)}] \}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pk}^{(j)}(u) &= C_{(j-2h_j)k}^{(j)}(u) \\
&= -\sum_{s=1}^{j-1} \sum_{(r_s)} \{ i k (j-2h_j-r_s) \binom{(s)}{\varphi_{r_s k}} \binom{(j-s)}{\varphi_{(j-2h_j-r_s)k}} \\
&\quad + \psi_{r_s k}^{(s)} [i(j-2h_j-r_s)k \binom{(j-s)}{\psi_{(j-2h_j-r_s)k}} - \chi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)}] \\
&\quad + \chi_{r_s k}^{(s)} [i(j-2h_j-r_s)k \binom{(j-s)}{\chi_{(j-2h_j-r_s)k}} + \psi_{(j-2h_j-r_s)k}^{(j-s)}] \}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

gde

- 1) $j = 2, \dots, m$,
- 2) $p_j = \frac{j}{2}$ za parne j i $p_j = \frac{j-1}{2}$ za neparne j ,
- 3) $h_j = 0, \dots, p_j, j = 2, \dots, m$
- 4) indeks po kome se sumira r_s u (3.35, 3.36, 3.37) uzima vrednosti iz skupa, $\{\pm(s-2h_s), h_s = 0, 1, \dots, p_s\}$ tako da brojevi $j-2h_j-r_s$ pripadaju skupu $\{\pm(j-s-2h_{(j-s)}), h_{(j-s)} = 0, 1, \dots, p_{(j-s)}\}$,
- 5) svakom broju $j, 2 \leq j \leq m$, odgovara $p_j + 1$ sistem jednačina (3.32).

Cohn-Vossen [28] je dokazao da u tačkama loma meridijana sledeća teorema važi (u [28] ova činjenica nije formulisana kao teorema, ali će ovde biti data u obliku teoreme).

Teorema 3.5.1 (Cohn-Vossen [28]) *Ako su funkcije $\varphi_k(u)$ i $\chi_k(u)$ neprekidne u tačkama loma $u = \sigma$ meridijana $\rho = \rho(u)$, onda u tim tačkama funkcije $\psi_k(u)$ zadovoljavaju jednačinu*

$$[\rho(u)\psi'_k(u) + (k^2 - 1)\rho'(u)\psi_k(u)]|_{\sigma=0}^{\sigma+0} = 0, \quad (3.38)$$

tj.

$$\rho(\sigma)[\psi'_k(\sigma+0) - \psi'_k(\sigma-0)] + (k^2 - 1)[\rho'(\sigma+0) - \rho'(\sigma-0)]\psi_k(\sigma) = 0. \quad (3.39)$$

Takodje ćemo dokazati sledeću teoremu za beskonačno malo savijanje višeg reda:

Teorema 3.5.2 *Pretpostavimo da su u tačkama loma $u = \sigma$ meridijana $\rho = \rho(u)$, ($\rho'(\sigma+0) \neq \rho'(\sigma-0)$) funkcije $\varphi_{pk}^{(j)}(u)$ i $\chi_{pk}^{(j)}(u)$ neprekidne ($j = 1, \dots, m, p = 2, \dots, m$, za parno m , $p = 1, 3, \dots, m$, za neparno m). Tada u tim tačkama funkcije $\psi_{pk}^{(j)}(u)$, $j = 1, \dots, m$ zadovoljavaju jednačinu*

$$[\rho(u)\psi_{pk}^{(j)}(u) + (p^2k^2 - 1)\rho'(u)\psi_{pk}^{(j)}(u)]|_{\sigma=0}^{\sigma+0} = Q_{pk}^{(j)}(\sigma), \quad (3.40)$$

gde

$$\begin{aligned} & Q_{pk}^{(j)}(\sigma) \\ &= \rho'(\sigma-0)\overset{(j)}{B}_{pk}(\sigma-0) - \rho(\sigma)\overset{(j)}{B}_{pk}'(\sigma-0) + ipk\overset{(j)}{C}_{pk}(\sigma-0) \\ & \quad - \rho'(\sigma+0)\overset{(j)}{B}_{pk}(\sigma+0) + \rho(\sigma)\overset{(j)}{B}_{pk}'(\sigma+0) - ipk\overset{(j)}{C}_{pk}(\sigma+0). \end{aligned} \quad (3.41)$$

□

Dokaz. Iz (3.33):

$$\begin{aligned} ipk\chi_{pk}^{(j)}(u) &= \overset{(j)}{B}_{pk}(u) - \psi_{pk}^{(j)}(u) \\ ipk\chi_{pk}^{(j)'}(u) &= \overset{(j)}{B}_{pk}'(u) - \psi_{pk}^{(j)'}(u), \\ ipk\varphi_{pk}^{(j)}(u) &= -\rho'(u)[ipk\psi_{pk}^{(j)}(u) - \frac{1}{ipk}(\overset{(j)}{B}_{pk}(u) - \psi_{pk}^{(j)}(u))] \\ & \quad - \frac{\rho(u)}{ipk}[\overset{(j)}{B}_{pk}'(u) - \psi_{pk}^{(j)'}(u)] + \overset{(j)}{C}_{pk}(u). \end{aligned}$$

Množeći levu i desnu stranu sa ipk dobijamo

$$\begin{aligned} -p^2k^2\varphi_{pk}^{(j)}(u) &= \rho(u)\psi_{pk}^{(j)'}(u) + (p^2k^2 - 1)\rho'(u)\psi_{pk}^{(j)}(u) \\ & \quad + \rho'(u)\overset{(j)}{B}_{pk}(u) - \rho(u)\overset{(j)}{B}_{pk}'(u) + ipk\overset{(j)}{C}_{pk}(u). \end{aligned}$$

U tačkama loma meridijana imamo

$$\varphi_{pk}^{(j)}(\sigma - 0) = \varphi_{pk}^{(j)}(\sigma + 0), \quad (3.42)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} & \rho(\sigma + 0) \psi_{pk}'^{(j)}(\sigma + 0) + (p^2 k^2 - 1) \rho'(\sigma + 0) \psi_{pk}^{(j)}(\sigma + 0) \\ &= \rho(\sigma - 0) \psi_{pk}'^{(j)}(\sigma - 0) + (p^2 k^2 - 1) \rho'(\sigma - 0) \psi_{pk}^{(j)}(\sigma - 0) + Q_{pk}^{(j)}, \end{aligned}$$

tj. dobili smo (3.40), gde je $Q_{pk}^{(j)}$ dat sa (3.41).

3.6 Beskonačno mala savijanja višeg reda toroida generisanih poligonalnim meridijanom

U ovom odeljku ćemo razmotriti beskonačno mala savijanja višeg reda toroida generisanih poligonalnim meridijanom, koji ne sadrže segmente normalne na osu rotacije sa čvorovima $A_l(u_l, \rho_l)$, $l = 1, \dots, n$, $A_{n+1} \equiv A_1$ u koordinatnom sistemu $uO\rho$. Jednačine stana poligina su

$$A_l A_{l+1} : \rho_{(l)} = \rho_l + \frac{\rho_{l+1} - \rho_l}{u_{l+1} - u_l} (u - u_l) = k_l u + n_l \quad (3.43)$$

$l = 1, 2, \dots, n$, $A_{n+1} \equiv A_1$, $\rho_{n+1} \equiv \rho_1$, $u_{n+1} \equiv u_1$ gde je $\rho_{(l)}$ vrednost ρ na strani $A_l A_{l+1}$

$$\rho_{(l)}' = k_l, \quad \rho_{(l)}'' = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (3.44)$$

Potražimo polje beskonačno malog savijanja $\bar{z}_k^{(j)}(u, v)$ na strani $A_l A_{l+1}$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{k,l}^{(j)}(u, v) &= \left[\sum_{(p)} \left(\varphi_{pk,l}^{(j)}(u) e^{ipkv} + \varphi_{-pk,l}^{(j)}(u) e^{-ipkv} \right) \right] \bar{e} \\ &+ \left[\sum_{(p)} \left(\psi_{pk,l}^{(j)}(u) e^{ipkv} + \psi_{-pk,l}^{(j)}(u) e^{-ipkv} \right) \right] \bar{a}(v) \\ &+ \left[\sum_{(p)} \left(\chi_{pk,l}^{(j)}(u) e^{ipkv} + \chi_{-pk,l}^{(j)}(u) e^{-ipkv} \right) \right] \bar{a}'(v), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$l = 1, 2, \dots, n,$

1) $p = 0, 2, 4, \dots, j$ za parno j ,

2) $p = 1, 3, 5, \dots, j$ za neparno j .

Polazeći od (3.33), dobijamo (prema (3.44)):

$$\rho_{(l)}^{(j)} \psi_{pk,l}''(u) = R_{pk,l}^{(j)}(u) \quad (3.46)$$

gde

$$R_{pk,l}^{(j)}(u) = \rho_{pk,l}^{(j)} B_{pk,l}''(u) - p^2 k^2 A_{pk,l}^{(j)}(u) - ipk C_{pk,l}^{(j)'}(u) \quad (3.47)$$

i $A_{pk,l}^{(j)}(u)$, $B_{pk,l}^{(j)}(u)$, $C_{pk,l}^{(j)}(u)$ su dati sa (3.35-3.37) na strani $A_l A_{l+1}$. Rešavajući (3.46) dobijamo

$$\psi_{pk,l}^{(j)}(u) = \int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du + M_{pk,l}^{(j)} u + N_{pk,l}^{(j)} \quad (3.48)$$

gde su $M_{pk,l}^{(j)}$ i $N_{pk,l}^{(j)}$ proizvoljne konstante. Iz (3.34) i (3.48) dobijamo

$$\chi_{pk,l}^{(j)}(u) = \frac{1}{ipk} \left[B_{pk,l}^{(j)}(u) - \int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du - M_{pk,l}^{(j)} u - N_{pk,l}^{(j)} \right]. \quad (3.49)$$

Na osnovu (3.34) i (3.48), (3.49) imamo

$$\begin{aligned} \varphi_{pk,l}^{(j)}(u) &= k_l \left(\frac{1}{p^2 k^2} - 1 \right) \int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du \\ &\quad - \frac{\rho_{(l)}(u)}{p^2 k^2} \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du + \frac{1}{ipk} C_{pk,l}^{(j)}(u) - \frac{k_l}{p^2 k^2} B_{pk,l}^{(j)}(u) \\ &\quad + \frac{\rho_{(l)}(u)}{p^2 k^2} B_{pk,l}^{(j)'}(u) + \left(k_l u + \frac{k_l}{p^2 k^2} u - \frac{\rho_{(l)}(u)}{p^2 k^2} \right) M_{pk,l}^{(j)} \\ &\quad + k_l \left(1 + \frac{1}{p^2 k^2} \right) N_{pk,l}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

1) $p = 0, 2, 4, \dots, j$ za parno j ,

2) $p = 1, 3, 5, \dots, j$ za neparno j .

Za $p = 0$ iz (3.34) dobijamo

$$\psi_{0,l}^{(j)}(u) = B_{0,l}^{(j)}(u), \quad (3.51)$$

i iz (3.34):

$$\varphi_{0,l}^{(j)}(u) = \int A_{0,l}^{(j)}(u) du - k_l B_{0,l}^{(j)}(u) + M_{0,l}^{(j)}. \quad (3.52)$$

Polazeći od (3.34), (3.51) i (3.52) dobijamo:

$$\chi_{0,l}^{(j)}(u) = \rho_{(l)}(u) \left[\int \frac{C_{0,l}^{(j)}(u)}{(\rho_{(l)}(u))^2} du + N_{0,l}^{(j)} \right]. \quad (3.53)$$

Koeficijenti polja $\tilde{z}_{k,l}^{(j)}(u, v)$ su dati sa (3.48)-(3.53). Konstante $\tilde{M}_{pk,l}^{(j)}$, $\tilde{N}_{pk,l}^{(j)}$ ćemo naći koristeći činjenicu da polje beskonačno malog savijanja mora biti neprekidno na celoj površi, uključujući i krugove, koje opisuju temena meridijana. U temenu $A_l(u_l, \rho_l)$ iz

$$\psi_{pk,l}^{(j)}(u_{l+1}) = \psi_{pk,l+1}^{(j)}(u_{l+1}), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.54)$$

i iz (3.48) dobijamo

$$\begin{aligned} & u_{l+1} \tilde{M}_{pk,l}^{(j)} - u_{l+1} \tilde{M}_{pk,l+1}^{(j)} + \tilde{N}_{pk,l}^{(j)} - \tilde{N}_{pk,l+1}^{(j)} \\ &= \left[\int du \int \frac{R_{pk,l+1}^{(j)}(u)}{\rho_{(l+1)}(u)} du - \int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}(u)} du \right] \Big|_{u=u_{l+1}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

U tačkama meridijana A_{l+1} jednačina (3.40) ima oblik

$$\begin{aligned}
& (k_{l+1}u_{l+1} + n_{l+1}) \left[\left(\int \frac{R_{pk,l+1}^{(j)}(u)}{\rho_{(l+1)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} + M_{pk,l+1}^{(j)} \right] \\
& + (p^2k^2 - 1)k_{l+1} \left[\left(\int du \int \frac{R_{pk,l+1}^{(j)}(u)}{\rho_{(l+1)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} + M_{pk,l+1}^{(j)}u_{l+1} + N_{pk,l+1}^{(j)} \right] \\
& - \rho_{(l)}(u_{l+1}) \left[\left(\int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} + M_{pk,l}^{(j)} \right] \\
& - (p^2k^2 - 1)k_l \left[\left(\int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} + M_{pk,l}^{(j)}u_{l+1} + N_{pk,l}^{(j)} \right] \\
& = Q_{pk,l}^{(j)}(u_{l+1})
\end{aligned} \tag{3.56}$$

gde je $Q_{pk}^{(j)}(u)$ dat sa (3.41) $l = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Na ovaj način, u temenima meridijana imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
& - (n_l + p^2k^2k_lu_{l+1})M_{pk,l}^{(j)} + (n_{l+1} + p^2k^2k_{l+1}u_{l+1})M_{pk,l+1}^{(j)} \\
& - (p^2k^2 - 1)k_lN_{pk,l}^{(j)} + (p^2k^2 - 1)k_{l+1}N_{pk,l+1}^{(j)} = V_{pk}^{(j)}(u_{l+1})
\end{aligned} \tag{3.57}$$

gde

$$\begin{aligned}
V_{pk}^{(j)}(u_{l+1}) &= k_l B_{pk,l}^{(j)} - \rho_l B_{pk,l}^{(j)'} + ipk C_{pk,l}^{(j)} - k_{l+1} B_{pk,l+1}^{(j)} \\
&+ \rho_l B_{pk,l+1}^{(j)'} - ipk C_{pk,l+1}^{(j)} - \rho_l \left(\int \frac{R_{pk,l+1}^{(j)}(u)}{\rho_{(l+1)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} \\
&- (p^2k^2 - 1)k_{l+1} \left(\int du \int \frac{R_{pk,l+1}^{(j)}(u)}{\rho_{(l+1)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} \\
&+ \rho_{(l)} \left(\int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}} \\
&+ (p^2k^2 - 1)k_l \left(\int du \int \frac{R_{pk,l}^{(j)}(u)}{\rho_{(l)}^{(j)}(u)} du \right) \Big|_{u=u_{l+1}}.
\end{aligned}$$

Na osnovu gore navedenog važi sledeća teorema:

Teorema 3.6.1 *Dovoljan uslov da toroidna rotaciona površ generisana poligonalnim meridijanom koji ne sadrži segment ortogonalan na osu rotacije bude nekrut reda m , tj. da ima polje beskonačno malog savijanja $\bar{z}^{(m)}(u, v)$ reda m , kao proširenje polja $\bar{z}^{(1)}(u, v), \bar{z}^{(2)}(u, v), \dots, \bar{z}^{(m-1)}(u, v)$, je da je sistem linearnih jednačina sa nepoznatim $M_{pk,l}^{(j)}, N_{pk,l}^{(j)}$ (3.55) i (3.57) kompatibilan. $\square$*

3.7 Primeri

Upotrebom računara možemo da analiziramo uslove nekrutosti i da odredimo familiju toroida koji zadovoljavaju ove uslove. Klasa fleksibilnih toroida nadjena od strane Belova [4] je proširena novim primerima toroida koji zadovoljavaju uslove nekrutosti. Kao primeri nekrutih toroida dati su toroid sa nekonveksnim četvorougaoim meridijanom, toroid sa konveksnim petougaoim meridijanom i primer toroida čiji meridijan ima 9 temena. Sledeći primeri i njihove osobine su istraživane uz pomoć simboličkog programskog paketa *Mathematica*. Naš program uzima tačke meridijana kao ulazne parametre, određuje uslove nekrutosti i kao izlaz daje simboličku definiciju rotacione površi zajedno sa poljem beskonačno malog savijanja prvog reda. Zatim se dobijeni simbolički izlaz iz programa može da unese kao argument u funkciju paketa *Mathematica* za 3D reprezentaciju. Grafička reprezentacija deformacija je razmatrana u [18], [19] i [48]. Tako smo u mogućnosti da vidimo rotacione površi i uticaj polja beskonačno malog savijanja na njima. U svrhu vizuelne prezentacije i kreiranja animacija infinitezimalno deformisanih površi razvijen je SurfBend.

3.7.1 Primeri

Primer 3.7.1 *Nekrute toroidna površ je dobijena rotacijom nekonveksnog četvorougla sa čvorovima $A(-1, 1)$, $B(0, \frac{5}{8})$, $C(1, 1)$ i $D(0, \frac{1}{4})$. Četvorougao rotira oko u -ose koordinatnog sistema uOp . Rotirajući, AB generiše $S_{(1)}$, a rotiranjem ivica BC , CD i DA se formiraju delovi površi $S_{(2)}S_{(3)}S_{(4)}$.*

Takodje $\bar{z}_{(i)}$ označava polje beskonačno malog savijanja. Označimo deformisani toroid sa S_ε .

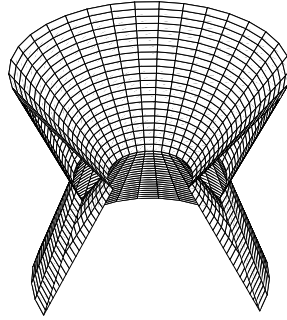
$$\begin{aligned}
S_\varepsilon : \bar{r}(u, v, \varepsilon) &= \bar{r}(u, v) + \varepsilon \bar{z}(u, v) \\
S_{(1)} : \bar{r}_{(1)}(u, v) &= \left[-\frac{3}{8}u + \frac{5}{8}\right] \cos(v) \bar{i} + \left[-\frac{3}{8}u + \frac{5}{8}\right] \sin(v) \bar{j} + u \bar{k}, \\
&u \in [-1, 0], v \in [0, 2\pi], \\
S_{(2)} : \bar{r}_{(2)}(u, v) &= \left[\frac{3}{8}u + \frac{5}{8}\right] \cos(v) \bar{i} + \left[\frac{3}{8}u + \frac{5}{8}\right] \sin(v) \bar{j} + u \bar{k}, \\
&u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi], \\
S_{(3)} : \bar{r}_{(3)}(u, v) &= \left[\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}\right] \cos(v) \bar{i} + \left[\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}\right] \sin(v) \bar{j} + u \bar{k}, \\
&u \in [1, 0], v \in [0, 2\pi], \\
S_{(4)} : \bar{r}_{(4)}(u, v) &= \left[-\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}\right] \cos(v) \bar{i} + \left[-\frac{3}{4}u + \frac{1}{4}\right] \sin(v) \bar{j} + u \bar{k}, \\
&u \in [0, -1], v \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Za polje $\bar{z}(u, v)$ beskonačno malog savijanja prvog reda dobijamo:

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{(1)}(u, v) &= \left[2\left(u + \frac{5}{9}\right) \cos(2v) \cos(v) + \left(u + \frac{5}{9}\right) \sin(2v) \sin(v)\right] \bar{i} \\
&+ \left[2\left(u + \frac{5}{9}\right) \cos(2v) \sin(v) - \left(u + \frac{5}{9}\right) \sin(2v) \cos(v)\right] \bar{j} \\
&+ \left[\frac{3}{4}u \cos(2v)\right] \bar{k}, u \in [-1, 0], v \in [0, 2\pi], \\
\bar{z}_{(2)}(u, v) &= \left[2\left(-u + \frac{5}{9}\right) \cos(2v) \cos(v) + \left(-u + \frac{5}{9}\right) \sin(2v) \sin(v)\right] \bar{i} \\
&+ \left[2\left(-u + \frac{5}{9}\right) \cos(2v) \sin(v) - \left(-u + \frac{5}{9}\right) \sin(2v) \cos(v)\right] \bar{j} \\
&+ \left[\frac{3}{4}u \cos(2v)\right] \bar{k}, u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi], \\
\bar{z}_{(3)}(u, v) &= \left[2\left(-\frac{1}{2}u + \frac{5}{90}\right) \cos(2v) \cos(v) + \left(-\frac{1}{2}u + \frac{5}{90}\right) \sin(2v) \sin(v)\right] \bar{i} \\
&+ \left[2\left(-\frac{1}{2}u + \frac{5}{90}\right) \cos(2v) \sin(v) - \left(-\frac{1}{2}u + \frac{5}{90}\right) \sin(2v) \cos(v)\right] \bar{j} \\
&+ \left[\frac{3}{4}u \cos(2v)\right] \bar{k}, u \in [1, 0], v \in [0, 2\pi],
\end{aligned}$$

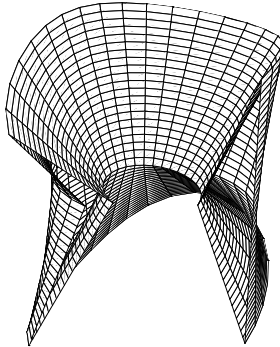
$$\begin{aligned}
\bar{z}_{(4)}(u, v) = & [2(\frac{1}{2}u + \frac{5}{90})\cos(2v)\cos(v) + (\frac{1}{2}u + \frac{5}{90})\sin(2v)\sin(v)]\bar{i} \\
& + [2(\frac{1}{2}u + \frac{5}{90})\cos(2v)\sin(v) - (\frac{1}{2}u + \frac{5}{90})\sin(2v)\cos(v)]\bar{j} \\
& + [\frac{3}{4}u\cos(2v)]\bar{k}, u \in [0, -1], v \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Sledeće slike pokazuju rotacione površi i uticaj beskonačno malog savijanja. U svrhu pogleda u unutrašnjost toroida rotacioni parametar v je uzet manji od 2π .



Slika 3.7.1.

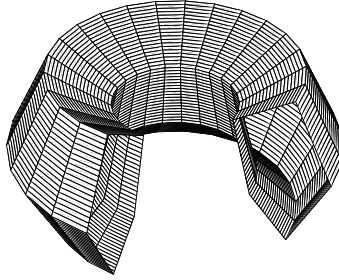
Slika 3.7.1 pokazuje početnu površ bez deformacija $\varepsilon = 0.0$ i $v \in [0, \frac{4}{3}\pi]$.



Slika 3.7.2.

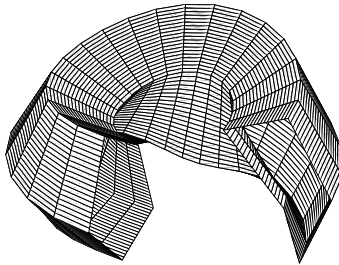
Slika 3.7.2 pokazuje deformisanu površ sa parametrom deformacije $\varepsilon = 0.15$ i rotacijom za ugao $v \in [0, \frac{4}{3}\pi]$.

Primer 3.7.2 Primer nekrute toroidne površi je dobijen rotacijom konveksnog petougla sa temenima $A(-1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 4)$, $D(2, 3)$ i $E(1, \frac{119 - \sqrt{2641}}{45})$. Petougao rotira oko u-ose koordinatnog sistema uOp .



Slika 3.7.3.

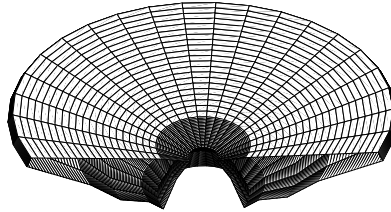
Slika 3.7.3 pokazuje polazni izgled površi bez deformacija $\varepsilon = 0.0$ i $v \in [0, \frac{3}{2}\pi]$.



Slika 3.7.4.

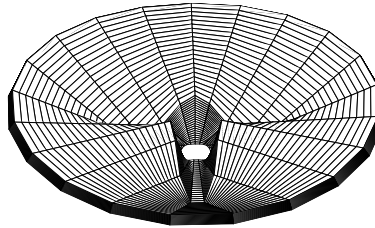
Slika 3.7.4 prikazuje toroid sa deformacijama $\varepsilon = 0.25$ i $v \in [0, \frac{3}{2}\pi]$.

Primer 3.7.3 *Toroidna površ dobijena rotacijom konveksnog poligona sa 9 temena $A(-2, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-3, 4)$, $D(-2, 6)$, $E(0, 8)$, $F(3, 12)$, $G(\frac{7}{2}, \frac{3839}{304} + \frac{(-173450877+836\sqrt{43583479149})^{1/3}}{304^{2/3} \cdot 50005})$, $H(0, 3)$ i $I(-1, 1)$, koji rotira oko u -ose koordinatnog sistema uOp .*



Slika 3.7.5.

Slika 3.7.5 pokazuje inicijalnu površ bez deformacija $\varepsilon = 0.0$ i $v \in [0, \frac{4}{3}\pi]$.



Slika 3.7.6.

Slika 3.7.6 pokazuje deformisanu površ dobijenu rotiranjem ivica poligona FG, GH i HI , a vrednosti parametara $\varepsilon = 0.02$ i $v \in [0, 2\pi]$.

Napomena 3.7.1 *Primetimo da glavni rezultati u [4], [50], [51], [55], [52], [53] i [54] mogu biti posmatrani kao specijalni slučajevi Teoreme 3.6.1.*

Poglavlje 4

Algoritam za nalaženje k najkraćih puteva u grafu

U ovoj glavi predstavimo novi algoritam za nalaženje k najkraćih puteva između dva čvora u težinskom grafu. Nadjeni putevi su uredjeni u neopadajućem redosledu dužina, ne poseduju cikluse, tj. nije dozvoljeno ponavljanje čvorova na putu, i nadjeni putevi se razlikuju za bar jedan čvor. Algoritam je zasnovan na A^* algoritmu i koristi Dijkstrin algoritam za procenu cene dostizanja odredišnog čvora. Algoritam poziva Dijkstrin algoritam samo jednom i koristi dobijene vrednosti za generisanje kandidata za sledeći put. Takođe koristi efikasni metod za detektovanje ciklusa u podputu za rano odsecanje neprihvatljivih puteva sa ciklusima. Navedeni su i eksperimentalni rezultati za nekoliko tipova grafova u cilju ilustrovanja efikasnosti i primenljivosti algoritma. U ovoj glavi su prezentovani novi nepublikovani rezultati.

4.1 Uvod

Tema koju ćemo obradivati u ovoj glavi je generalizacija problema najkraćeg puta, *shortest path* problema. U ovom slučaju ne traži se jedan najkraći put, već prvih k najkraćih puteva, k *shortest paths*. Rangiranje najkraćih puteva je dugo proučavani mrežni optimizacioni problem. Izdvojeni problem nalaženja najkraćeg puta, slučaj kada je $k = 1$, u grafu sa težinama dodeljenim ivicama je važan i temeljno proučavan optimizacioni problem sa brojnim primenama. Opštiji problem je takođe privukao pažnju istraživača i prvi rad na ovu temu se pojavio 1959. godine autora Hoffman i Pavley [22], nedugo posle prvog rada o najkraćim putevima Bellman-Ford-Moor. Stotinak referenci o najkraćim putevima se mogu naći u literaturi, vidi Cherkassky sa saradnicima [6]. Mnogo optimizacionih

problema može biti formulisano i rešeno u terminima izračunavanja najkraćeg puta između dva čvora u grafu. Metodi za nalaženje k najkraćih puteva mogu biti primenjeni na nalaženje k najboljih rešenja. Eppstein [13] je istakao nekoliko razloga za primenu ovih metoda: dodatni uslovi, evaluacija modela, analiza osetljivosti na grešku, generisanje alternativa ili druge primene u dinamičkom programiranju. Više od pedeset naslova je uključeno u bogatu bibliografiju o problemu k najkraćih puteva, dostupnu na adresi: [http : //www.ics.uci.edu/ ~ eppstein/bibs/kpath.bib](http://www.ics.uci.edu/~eppstein/bibs/kpath.bib). Naslovi u ovoj bibliografiji bave se problemima koji se pojavljuju u primenama u realnom svetu i predloženim rešenjima koja uključuju rangiranje najkraćih puteva.

Za dat neorijentisani graf G sa nenegativnim težinama dodeljenim ivicama, dva čvora s i t i prirodan broj k , problem se formuliše kao zadatak nalaženja k najkraćih puteva od s do t u neopadajućem redosledu dužina. Istraživači posmatraju dva podtipa problema:

- svi putevi su dozvoljeni, uključujući puteve sa ponovljenim čvorovima;
- k najkraćih puteva bez ponavljanja čvorova.

Dodatni uslov postavljen pred drugi podtip problema, čini njegovo rešavanje težim. Uopšte govoreći, sa praktične tačke gledišta, varijanta problema bez ponavljanja čvorova je interesantnija. Mada se mora primetiti da kod realnih problema gde putevi ne mogu da imaju ponovljene čvorove (recimo kod usmerenih acikličnih grafova), zadovoljavanje tog uslova predstavlja dodatnu, suvišnu aktivnost. Ovaj tekst je fokusiran na jednu vrstu puteva, puteva bez ciklusa i ponavljanja čvorova, te će se pominjanje puta ili puta bez ciklusa odnositi na isti pojam, a posebno će biti izdvojen i korišćen pojam puta sa ciklusima, ili puta sa ponavljanjem čvorova.

4.2 k najkraćih puteva bez ponavljanja čvorova

Neka je (V, E) neorijentisan graf sa n čvorova i m ivica, gde je bilo kojoj ivici $(i, j) \in E$ pridružena nenegativna vrednost $c_{ij} \in \mathcal{R}$. Put bez petlji i ponovljenih čvorova p od čvora $s \in V$ do čvora $t \in V$ u (V, E) je niz čvorova $p = \langle s = v_1, v_2, \dots, v_{l(p)} = t \rangle$, gde $(v_i, v_{i+1}) \in E$, za svako $i \in \{1, \dots, l(p) - 1\}$ i bilo koji čvor u p se pojavljuje samo jednom. Ovde, $l(p)$ označava broj čvorova na putu p . Ukupna cena ili dužina puta p je definisana sa

$$c(p) = \sum_{(v_i, v_{i+1}) \in p} c_{v_i, v_{i+1}}.$$

Neka $\mathcal{P}$ označava skup svih puteva bez petlji, $\mathcal{P}_{s,t}$ će biti korišćeno za skup svih puteva bez petlji za date čvorove startni s i ciljni t . Za dato $k \in N$, tražimo k najkraćih puteva u neopadajućem redosledu cene, tako da $c(p_1) \leq c(p_2) \leq \dots \leq c(p_k)$ i $c(p_k) \leq c(p)$, za svaki $p \in \mathcal{P} - \{p_1, \dots, p_k\}$.

Algoritmi za ovaj problem koriste skup X da zapamte puteve kandidate za p_r , gde $r = 1, \dots, k$. Skup je inicijalizovan najkraćim putem p_1 i kada su određeni $p_1, \dots, p_{r-1}$ onda je p_r najkraći kandidat iz skupa X . Kad se jednom p_r odredi i izbriše iz skupa X njegovi čvorovi se analiziraju sa ciljem generisanja novih kandidatskih puteva sa niskom cenom. Pošto su generisani kandidati devijacije iz p_r , jer imaju zajednički podput sa p_r , posle čega se razdvajaju u nekom čvoru, ovi algoritmi se takodje poznati kao devijacioni algoritmi. Varijante ovih algoritama se upravo razlikuju po tome kako se devijacije izračunavaju. Najlakši način da se nadje devijacija je da se obriše ivica iz p_r , koja polazi iz posmatranog čvora, a onda uzme najkraći put od tog čvora do određiškog čvora t . Naravno, ova procedura može da generiše puteve sa ciklusima, dakle sa ponovljenim čvorovima, stoga se zahteva da se proverí uslov postojanja ciklusa i selekcija unapred nepoznatog broja kandidata dok se traženih k puteva ne odredi. Algoritmi zasnovani na ovoj ideji se mogu naći u [32], [41].

Yen-ov algoritam [67] je prvi algoritam razvijen sa idejom rangiranja puteva. Pretpostavljajući da k najkraćih puteva ima oblik $p_r = \langle v_1 = s, \dots, v_{l(p_r)} = t \rangle$, za $r = 1, \dots, k$ Yenov predlog za dobijanje novih kandidata je particioniranje skupa puteva na sledeći način:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} - \{p_1\} &= \bigcup_{i=1}^{l(p_1)} \bar{\mathcal{P}}^1(v_i), \\ \bar{\mathcal{P}}^j(v_{d(p_r)}) - \{p_r\} &= \bigcup_{i=d(p_r)}^{l(p_r)} \bar{\mathcal{P}}^r(v_i), r > 1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde $\bar{\mathcal{P}}^j(v_i)$ označava skup puteva bez ponavljanja čvorova, različitih od $p_1, \dots, p_j$, koji imaju podput $sub_{p_j}(s, v_i)$ kao polazni podput, zajednički sa p_j za neko $a \leq j \leq r$. Kada je p_r izabran iz X skup $\bar{\mathcal{P}}^j(v_{d(p_r)})$, gde je p_r određen, se razmatra, što znači da se particionira izračunavanjem najkraćeg puta u svakom od podskupova u (4.1). Yen je primetio da je najbolja devijacija iz p_r u čvoru v_i oblika $sub_{p_j}(s, v_i) \diamond q_i$, gde je q_i najkraći put od v_i do t ,

pod uslovom da su čvorovi $v_1, \dots, v_{i-1}$ i ivice $(v_i, x) \in \{p_1, \dots, p_r\}$ izbačeni. Put p_r se zove otac novih kandidata (poznatih kao p_r sinovi ili p_r devijacije) i $v_{d(p_r)}$ devijacija čvora iz p_r . Ovde se analiza datog p_r sastoji od modifikacije (V, E) brisanjem nekih ivica i nekih čvorova i rešavanja problema najkraćeg puta između para čvorova.

Perko-v algoritam [41] predstavlja unapredjenu implementaciju Yenovog devijacionog algoritma za rangiranje puteva bez ponavljanja čvorova. U njegovom radu se može primetiti upotreba gornje granice za cenu koštanja generisanih kandidata, a u cilju smanjenja broja zapamćenih devijacija. Takodje i smanjenja broja rešavanih podproblema i uvođenja specijalne reprezentacije liste čvorova koji se označavaju kada rešavamo niz problema najkraćih puteva koji rezultuju iz analize nekog p_r , u cilju zaobilazanja inicijalizacije.

Martins i Pascoal [33] su autori algoritma koji koristi uočene sličnosti potproblema koji moraju biti rešavani u Yenovom algoritmu kada se skenira neki put p_r . Predložili su i implementirali varijantu gde se čvorovi analiziraju u određenom redosledu. Umesto brisanja ivica i čvorova, tokom analize p_r od $v_{l(p_r)} = t$ do $v_{d(p_r)}$ algoritam dozvoljava reoptimizaciju svakog najkraćeg puta ubacivanjem novih ivica i čvorova i zamenom rešavanja problema najkraćeg puta ovim reoptimizacijama.

Katoh, Ibaraki i Mine [26] su predložili 1982. još jedan devijacioni algoritam koji koristi samo puteve bez ponavljanja čvorova. Ovaj algoritam je primenljiv samo na neorijentisane grafove, i koristi njihovu uočenu karakteristiku da generišu najviše tri devijacije za svaki generisani p_r . Razlika u odnosu na Yenov algoritam je metod particionisanja upotrebljen za generisanje novih kandidata. Efikasnu implementaciju sa brojnim detaljima možemo naći u [20].

Pascoal u [39] je dala predlog devijacionog algoritma koji je nazvan hibridni algoritam. Taj algoritam je takodje inspirisan Yenovim algoritmom ali se koristi efikasniji metod za generisanje devijacija nego u algoritmu Katoh sa koautorima [26]. Ovde je učinjen pomak u efikasnosti, tako da je u suštini problem najkraćeg puta zamenjen problemom izbora ivice, što je brže i može se uraditi za konstantno vreme. Ovaj metod može da produkuje put sa ciklusom, te se onda mora da koristi procedura koju je opisao Yen. U [39] je dat koristan i vrlo ilustrativan uporedni pregled empirijske efikasnosti i memorijskih zahteva za svaki od pomenutih algoritama a testovi su sprovedeni na više tipova grafova i različitih veličina.

Glavna aktivnost u Yenovom i Katohovom algoritmu je menjanje polaznog grafa, brisanje čvorova i ivica i rešavanje potproblema, koji se sastoje od

nalaženja najkraćih puteva između parova čvorova. Tu su i zahtevi koji moraju da se uzmu u obzir: struktura podataka za predstavljanje grafa i za pamćenje generisanih puteva, kao i puteva kandidata. Čvorovi svakog generisanog kandidata zavise od prethodnika, tj. oca, od uslova na grafu pod kojima je dobijen (obrisani čvorovi i ivice). Kad je ovo jednom poznato ostatak puta se nalazi rešavanjem najkraćeg puta. Kako kod generisanih puteva ima zajedničkih potputeva, koji polaze od startnog čvora, pogodno je koristiti strukturu trie [8], što je u stvari n -arno stablo, ali sa linkovima prema roditelju. Vezano za ove implementacione probleme potrebno je organizovati i strukturu za pamćenje kandidatskih puteva bez ponavljanja čvorova. Kod Katohovog algoritma potrebno je održavati najviše $3k$ puteva, dok kod Yenovog algoritma je potrebno održavati onoliko puteva koliko se generiše iz svakog čvora posmatranog puta p_r , što daje znatno više potencijalnih kandidatskih puteva. Pretpostavljajući da znamo unapred koliko puteva je potrebno, može se optimizovati struktura bilo koji od sledećih načina da se izabere:

- pamćenje svih izračunatih rezultata;
- čuvanje najviše k najkraćih puteva u svakom koraku algoritma, pri čemu se podrazumeva zamena zapamćenog kandidata ako se pronadje kandidat sa boljom cenom;
- korišćenje kompromisnog pristupa, gde se izračunavaju kandidati dok se njih k ne pronadje, a onda se čuvaju samo oni čija je cena niža od maksimalne cene među nadjenih k .

4.3 Novi algoritam

Novi algoritam je inspirisan A^* algoritmom, vidi Pearl [40]. Podsetimo se da je A^* algoritam izveden iz Dijkstrinog algoritma [10], da koristi dodatne informacije iz grafa ili strukture problema u cilju određivanja redosleda u kome čvorovi treba da budu obidjeni. Postoji algoritam za rešavanje problema k najkraćih puteva sa ponavljanjem čvorova nazvan K^* , autori Aljazzar i Leue vidi [3], koji je takodje dobijen na osnovu A^* algoritma. U A^* se održava uredjena struktura "open queue", često realizovana kao heap, a sortirana funkcijom evaluacije f , heuristički procenjenom, koja pokazuje poželjnost ekspanovanja čvora. Ovde se pod čvorom ne podrazumeva obavezno čvor grafa, već ima širi smisao čvora u prostoru stanja problema. U A^* je funkcija

f definisana za svaki čvor v kao $d(v) + h(v)$, gde je $d(v)$ definisana Dijkstrinim algoritmom i predstavlja najkraći put od polaznog čvora s do čvora v , a $h(v)$ je heuristička procena rastojanja $d^*(v, t)$ što je procena najkraćeg rastojanja od v do odredišnog čvora t . Izvorno, prema A^* , vrednost $h(v)$ mora biti izračunata na osnovu nekih eksternih informacija, jer u trenutku dostizanja v , ona je potpuno nepoznata, kao i da li uopšte postoji put do odredišnog čvora. Možemo posmatrati $f(v) = d(v) + h(v)$ kao procenu dužine najkraćeg puta $s - t$, koji prolazi preko čvora v . Heuristička funkcija h se zove prihvatljivom, ako je optimistička, tj. ako $h(v) \leq d^*(v, t)$. h se zove monotona ili konzistentna ako za svaku ivicu (u, v) iz grafa važi da $h(u) \geq w(u, v) + h(v)$. Poznato je, vidi [3], da je svaka monotona heuristika takodje i dopustiva. Upotreba dopustive heuristike garantuje optimalnost A^* , tj. da će najkraći put $s - t$ biti nadjen. Čvorovi se ekspanduju A^* algoritmom u neopadajućem redosledu prema njihovim f vrednostima ako je heuristika monotona. Ako je $h(v) = 0$ za sve čvorove v , onda se A^* ponaša kao Dijkstrin algoritam. Hershberger sa koautorima, vidi [21], je problem nalaženja sledećeg najkraćeg puta definisao i posmatrao kao "replacement path problem".

U novom algoritmu se za procenu cene od nekog čvora u grafu do ciljnog čvora t uzima najkraće rastojanje, što se dobija pokretanjem Dijkstrinog algoritma ali polazeći unazad, od ciljnog čvora t do ostalih čvorova. Ovo je poznato u literaturi kao SSSPP - Single Source Shortest Path Problem. Dve funkcije su poslužile za realizaciju neophodnih procena dužina najkraćih puteva od nekog čvora do ciljnog. Prva funkcija nazvana DijkstraStart nalazi najkraće puteve od ciljnog čvora t do čvorova u grafu, ali prestaje sa radom kad se nadje najkraći put do startnog čvora s . Ovom se prilikom strukture podataka potrebne za Dijkstrin algoritam ne brišu, već se čuvaju u memoriji radi kasnijeg korišćenja. Druga funkcija, nazvana DijkstraContinue, nastavlja izračunavanje započeto DijkstraStart funkcijom, kad se u aktivnosti produženja puta (realizovanoj u funkciji ExpandPath) dodje do čvora za koji nije određeno najkraće rastojanje do čvora t . Kod rešavanja problema nalaženja sledećeg najkraćeg puta, vrši se ekspanzija po nadjenom najkraćem putu polazeći od startnog čvora i ide se prema ciljnom. Ovom prilikom se kandidatski put ne izračunava, niti se proverava postojanje ciklusa u njemu. Tada se u heap doda index u trie strukturi za potput koji: kreće od startnog čvora s , stiže do čvora v , ekspanduje se po susedima čvora v , pa se u heap dodaju vrednosti jednake zbiru dužine predjenog podputa i najkraćeg rastojanja od ekspandovanog čvora do ciljnog čvora t . Na ovaj način se formiraju sve alternative, tj. svi kandidatski putevi. Ovde se javlja problem da kandidatski

put može imati ciklus. Efikasan način da se proveri postojanje ciklusa je da se prolazeći unazad po trie strukturi prema polaznom čvoru s formira i skup čvorova na polaznom potputu, a da se kod produženja po najkraćem putu do ciljnog čvora t ažurira kandidatski put i prateći skup i proverava postojanje ciklusa.

Pristup koji koriste prethodno navedeni autori, počev od Yena nadalje zahteva da se formira kolekcija puteva bez ciklusa, koji se bar u jednom čvoru razlikuju od prethodnog puta čija su devijacija, pa da se tek onda nadje najkraći put. Ovaj pristup ima bar dva krupna nedostatka:

- Nije neophodno za sve kandidatske puteve proveravati da li sadrže ciklus, jer nije sigurno da će svi biti izabrani u k traženih.
- Nije dobar pristup sa brisanjem ivica i čvorova, jer dezavuiše rezultate dobijene inicijalnim pokretanjem Dijkstrinog algoritma.

Citirani autori formiraju i održavaju tokom rada kolekcije puteva bez ciklusa, koji mogu imati po nekoliko hiljada čvorova, pa i sličan broj kandidatskih puteva iz devijacija, koji moraju biti potpuno rekonstruisani da bi se utvrdilo nepostojanje ciklusa. Nema garancije da svi oni ulaze u skup traženih k najkraćih puteva. Za sve koji ne udju u skup, koji preostanu, uzalud je potrošeno vreme i memorijski resursi. Brisanje čvorova ili ivica anulira rezultate pozivanja Dijkstrinog algoritma, jer je graf promenjen. Ovaj pristup dezavuiše rezultate dobijene pokretanjem Dijkstrinog algoritma od krajnjeg čvora t . Za velike grafove, kod kojih je broj čvorova veliki i imaju veliki dijametar, posledično je veliki i odgovarajući broj čvorova na najkraćem putu (recimo, reda stotina ili hiljada). Potpuno je neprimenljivo startovati ponovo Dijkstra algoritam za generisanje devijacije, kada se za odredjivanje najkraćeg puta između dva čvora: jednog sa puta (a njih ima reda veličine stotina ili hiljada) i krajnjeg čvora t . Ovo važi kako za Yenov algoritam (gde se u osnovi svaka ivica sa najkraćeg puta briše), tako i za Katohov algoritam (gde ima najviše $3k$ poziva Dijkstrinog algoritma). U [39] se mogu naći podaci o vremenima potrebnim za nalaženje 100 puteva za primere geografskih grafova. U tom radu su testovi sprovedeni na računaru sa Pentium 4 procesorom na 3 GHZ, sa 2MB keš memorije, pod SUSE Linuxom, sa 1GB RAM memorije, a kod je realizovan u programskom jeziku C. Od više implementiranih i evaluiranih algoritama (Yen [67], Perko [41], Katoh [26], Martins i Pascoal [33]) najkraće vreme je bilo potrebno, u tom radu predloženom hibridnom algoritmu od strane Pascoal [39]. Za graf `USA-road-d.BAY.gr` koji predstavlja naseljena mesta u priobalnoj oblasti San Franciska i ima 321270 čvorova,

prosečno vreme potrebno za nalaženje 100 najkraćih puteva bez ciklusa je bilo oko 1,5 minuta, tj. 93 sekunde. Takodje je navedeno, za graf iz kategorije geografskih grafova, graf koji predstavlja naseljena mesta i puteve savezne države Kolorado, `USA-road-d.COL.gr` koji ima 435666 čvorova, hibridnim algoritmom je nadjeno 100 puteva bez ciklusa za aproksimativno 473 sekundi. Ovo čini neprimenljivim i taj, po radu [39], najbrži algoritam za veće grafove. Graf `USA-road-d.COL.gr` je najveći, tj. sa najvećim brojem čvorova koji je testiran u tom radu. Primetimo da je za kategoriju geografskih grafova ovaj graf najmanji za koje je testiranje izvršavano u kategoriji geografskih grafova u disertaciji.

Na osnovu prethodnih objašnjenja aktivnosti i koraka u algoritmu možemo da navedemo i skicu algoritamskih koraka novog algoritma za nalaženje k najkraćih puteva:

procedure K_ShortestPaths(startNode s , endNode t , int k)

pathsToExpandCollection : initialize minHeap;
trie : initialize;
pathsResult : empty path list;
pathCounter = 0;
call DijkstraStart(t, s);
insert into *trie* start node s with `dijkstraDistance[s]`;
while(*pathCounter* < k)
 v = get minimal from *pathsToExpandCollection*;
 call ExpandPath(v);
return *pathsResult*;

Algoritam k najkraćih puteva.

ExpandPath funkcija obavlja vrlo važne zadatke u ekspanziji puta sa proverom na cikliranje, po potrebi poziva DijkstraContinue funkciju i ažurira *trie* i *pathsToExpandCollection* strukturu.

Primetimo da je algoritam razvijen imajući u vidu prvenstveno neorijentisane grafove. Moguće ga je proširiti i na usmerene grafove, ali je potrebno dopuniti strukturu podataka za graf backward star strukturom kako bi bilo moguće upotrebiti Dijkstra algoritam za određivanje najkraćih dužina

puteva od ciljnog čvora ka polaznom čvoru. U disertaciji je razmatran problem najkraćih puteva bez ciklusa. Bilo bi vrlo interesantno uraditi modifikaciju algoritma sa ukinutom kontrolom na cikliranje, te testirati performanse i uporediti efikasnost modifikacije i primenljivost sa najpoznatijim algoritmima iz ove kategorije, vidi [13], što ostavljamo za dalje istraživanje.

4.4 Eksperimentalni rezultati

Testovi ponašanja novog algoritma, merenja brzine i efikasnosti nalaženja puteva su sprovedeni na ukupno četiri kategorije grafova, pri čemu su 3 kategorije test grafova generisane, a jedna je kategorija geografskih grafova iz realnog sveta. Kod je implementiran u programskom jeziku C#. Za sve kategorije grafova su uradjeni testovi nalaženja 100, 1,000 = 1k i 10,000 = 10k najkraćih puteva. Uradjeno je po 500 testova za slučajno odabrane čvorove iz grafa. Testiranje je radjeno na laptop računaru HP Envy 1050 sa procesorom Intel i720 mobile, sa 4 jezgra, L2 keš memorijom od 6 MB, sa radnim taktom 1,6 GHz, a u turbo režimu 2,8 GHz opremljenim sa 4 GB ram memorije. Treba naglasiti da je svaki test izvršavan u jednonitnom (single thread) režimu, te da nisu korišćene prednosti koje donosi izvršenje u višenitnom (multy thread) režimu rada.

4.4.1 Slučajni grafovi

U kategoriji Slučajnih grafova generisani su grafovi sa brojem čvorova i ivica kako je navedeno u tabeli 4.4.1.

Oznaka Grafa	čvorova	or. ivica	avg 100	avg 1k	avg 10k
IR_10kN_50kE	10,000	100,000	15	18	21
IR_50kN_250kE	50,000	500,000	16	19	22
IR_100kN_500kE	100,000	1,000,000	17	20	23
IR_500kN_3ME	500,000	6,000,000	18	21	24
IR_1MN_5ME	1,000,000	10,000,000	19	22	25
IR_5MN_20ME	5,000,000	40,000,000	21	23	27
IR_10MN_30ME	10,000,000	60,000,000	21	24	27

Tabela 4.4.1. Osobine Slučajnih grafova.

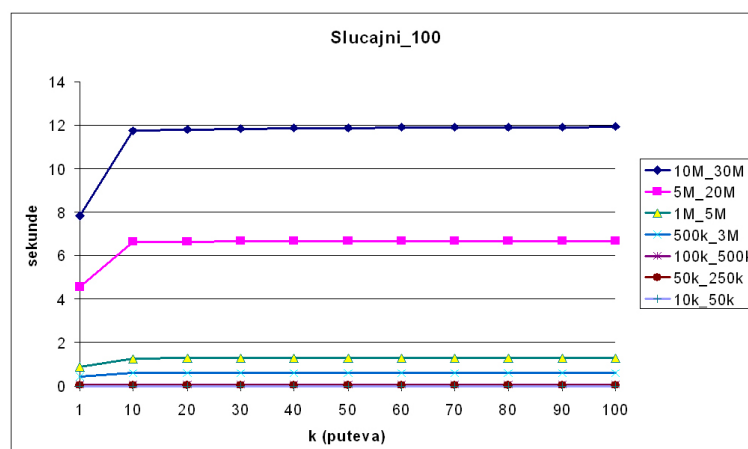
Upotrebom generatora slučajnih brojeva birani su parovi čvorova koji će se povezati ivicom, a takodje je slučajno birana i težina ivice iz opsega 1 do 1000. Poznato je da ovako generisani grafovi imaju relativno mali dijametar, što ima za posledicu relativno male prosečne dužine nadjenih puteva. Prosečne dužine nadjenih puteva su prikazane u tabeli 4.4.1.

U tabeli 4.4.2 su data prosečna vremena potrebna za nalaženje najkraćeg, prvih 100, zatim prvih 1,000=1k i prvih 10,000=10k puteva za svaki od test-nih grafova. Vremena data u tabeli 4.4.2 su u milisekundama.

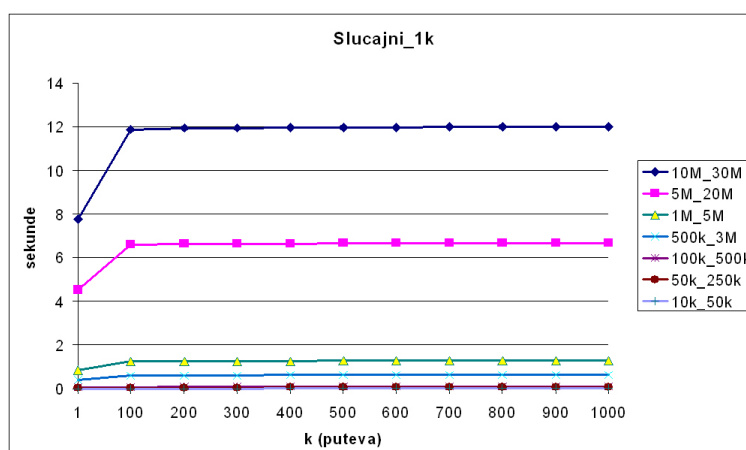
Oznaka Grafa	najkraći	prvih 100	prvih 1k	prvih 10k
IR_10kN_50kE	4	8	39	318
IR_50kN_250kE	24	37	74	376
IR_100kN_500kE	52	80	112	429
IR_500kN_3ME	411	601	639	1003
IR_1MN_5ME	874	1275	1290	1588
IR_5MN_20ME	4581	6686	6680	6944
IR_10MN_30ME	7809	11918	12010	12437

Tabela 4.4.2. Vremena algoritma u ms za Random grafove.

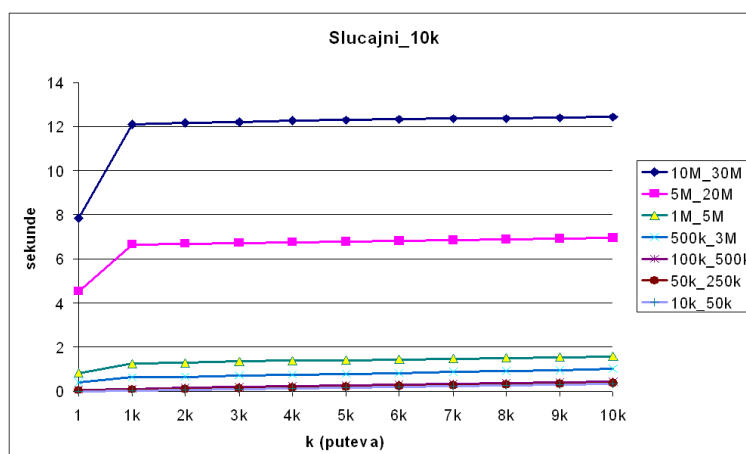
Na slikama 4.4.1, 4.4.2 i 4.4.3 su grafički prikazana vremena nalaženja 100, pa 1,000 = 1k i 10,000 = 10k najkraćih puteva za svaki od grafova.



Slika 4.4.1. Vreme za 100 najkraćih puteva.



Slika 4.4.2. Vreme za 1,000 najkraćih puteva.



Slika 4.4.3. Vreme za 10,000 najkraćih puteva.

4.4.2 Greed4 grafovi

Greed grafovi predstavljaju kategoriju grafova kod kojih su čvorovi razmešteni u tačkama I kvadranta Dekartovog koordinatnog sistema, čije su koordinate prirodni brojevi, a ivice se dodaju da povežu susedne čvorove. Ovde su pod susednim čvorovima smatrani čvorovi koji se nalaze dole, levo, desno i gore, ako su u zadatom opsegu. U literaturi se mogu naći različite interpretacije, koje mogu biti kvadratnog ili pravougaonog oblika rešetke po kojoj su raspodeljeni čvorovi. Namena ovakvih grafova je, iako imaju fiksira-

nu strukturu, da se variraju težine ivica (ovde od 1 do 1000), a za čvorove izmedju kojih se traže najkraći putevi biraju se oni na dijagonalama rešetke. Za ovu kategoriju grafova, pojedinačni testovi su startovani za grafove sa kvadratnom rešetkom.

Oznaka Grafa	čvorova	or. ivica	avg 100	avg 1k	avg 10k
IG_50x50	2500	9800	104	106	106
IG_100x100	10,000	39,600	209	211	211
IG_200x200	40,000	159,200	417	418	420
IG_500x500	250,000	998,000	1044	1047	1045
IG_1000x1000	1,000,000	3,996,000	2088	2092	2093
IG_2000x2000	4,000,000	15,992,000	4177	4181	4179

Tabela 4.4.3. Osobine Greed4 grafova.

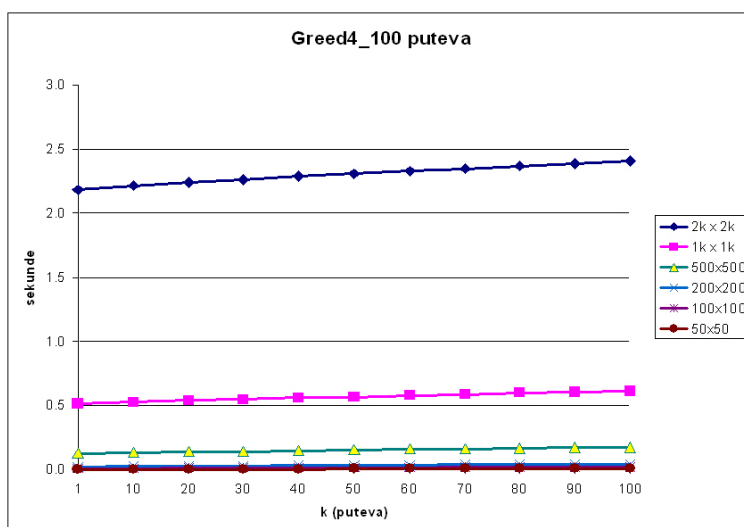
U ovoj kategoriji grafova generisani su grafovi sa brojem čvorova i ivica kako je navedeno u tabeli 4.4.3. Namena ovakvih grafova u testiranju je da se dobiju najkraći putevi čija je dužina veća ili jednaka dvostruko dimenziji rešetke. Prosečne dužine najkraćih puteva za ovu kategoriju grafova su navedene u tabeli 4.4.4.

U tabeli 4.4.2 su data prosečna vremena potrebna za nalaženje najkraćeg, prvih 100, zatim prvih 1,000 i prvih 10,000 puteva za svaki od testnih grafova. Vremena u tabeli su u milisekundama.

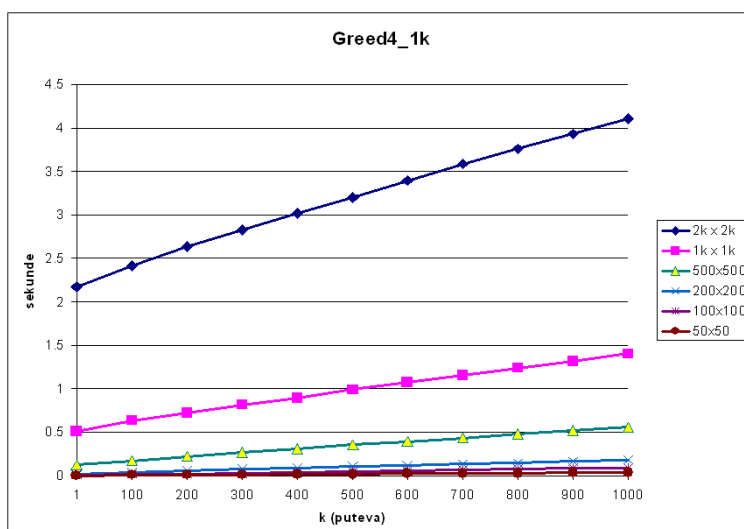
Oznaka Grafa	najkraći	prvih 100	prvih 1k	prvih 10k
IG_50x50	1	7	40	396
IG_100x100	7	20	90	744
IG_200x200	22	43	178	1486
IG_500x500	125	174	556	3859
IG_1000x1000	509	613	1402	8295
IG_2000x2000	2182	2409	4107	17889

Tabela 4.4.4. Vremena algoritma u ms za Greed4 grafove.

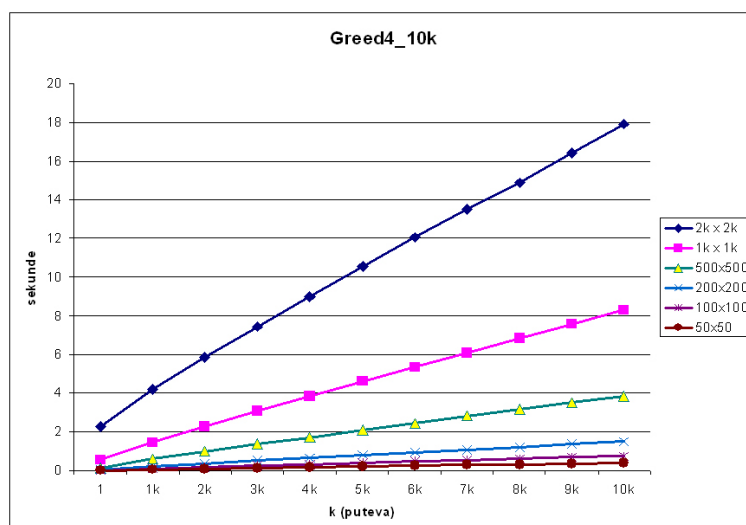
Rezultati testova za nalaženje 100, $1,000 = 1k$ i $10,000 = 10k$ najkraćih puteva su grafički prikazani na slikama 4.4.4, 4.4.5 i 4.4.6 za svaki od testnih grafova.



Slika 4.4.4. Vreme za 100 najkraćih puteva.



Slika 4.4.5. Vreme za 1,000 najkraćih puteva.



Slika 4.4.6. Vreme za 10,000 najkraćih puteva.

4.4.3 Greed4of8 grafovi

Greed4of8 grafovi predstavljaju kategoriju grafova kod kojih su čvorovi razmešteni u tačkama I kvadranta Dekartovog koordinatnog sistema, čije su koordinate prirodni brojevi, a ivice se dodaju da povežu susedne čvorove. Ovde se pod susednim čvorovima na slučajan način biraju 4 od potencijalno 8 suseda koji se nalaze dole, levo, desno i gore, kao i dole-desno, dole-levo, gore-levo i gore-desno. Na kraju se doda i izvestan broj ivica neophodnih da dobijeni graf bude povezan. U literaturi se mogu naći različite interpretacije, koje mogu biti kvadratnog ili pravougaonog oblika rešetke po kojoj su raspodeljeni čvorovi. Namena ovakvih grafova je da iako imaju fiksiranu strukturu, da se variraju težine ivica (ovde od 1 do 1000), a za čvorove između kojih se traže najkraći putevi biraju se oni na dijagonalama rešetke. Za ovu kategoriju grafova, pojedinačni testovi su startovani za grafove sa rešetkom kvadratnog oblika. U ovoj kategoriji grafova generisani su grafovi sa brojem čvorova i ivica kako je navedeno u tabeli 4.4.5.

Oznaka Grafa	čvorova	or. ivica	avg 100	avg 1k	avg 10k
IG_50x50	2500	9800	65	66	67
IG_100x100	10,000	39,600	168	169	172
IG_200x200	40,000	159,200	332	333	334
IG_500x500	250,000	998,000	834	835	832
IG_1000x1000	1,000,000	3,996,000	1662	1667	1667
IG_2000x2000	4,000,000	15,992,000	3324	3326	3332

Tabela 4.4.5. Osobine Greed4of8 grafova.

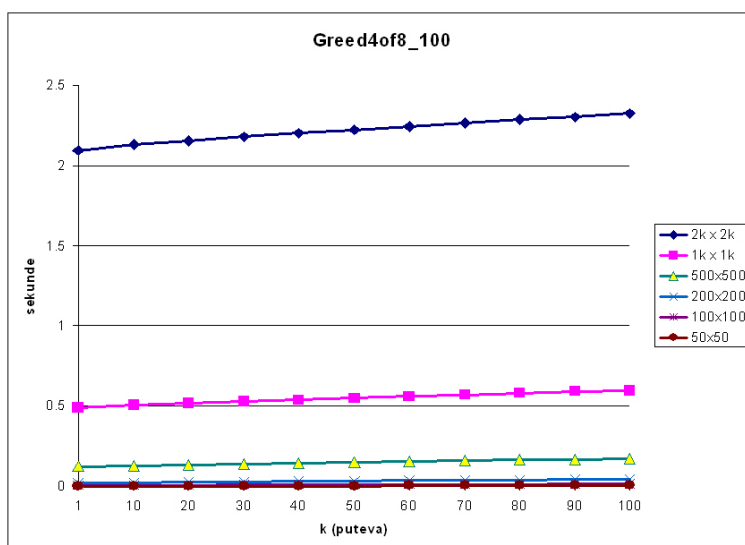
Ovakvi grafovi namenjeni su testiranju, a očekujemo relativno veliki broj čvorova na najkraćim putevima. Dužina ovako generisanih puteva je nešto manja u odnosu na slične primere Greed4 grafova.

U tabeli 4.4.6 su data prosečna vremena potrebna za nalaženje najkraćeg, prvih 100, zatim prvih 1,000=1k i prvih 10,000=10k puteva za svaki od testnih grafova. Vremena u tabeli su u milisekundama.

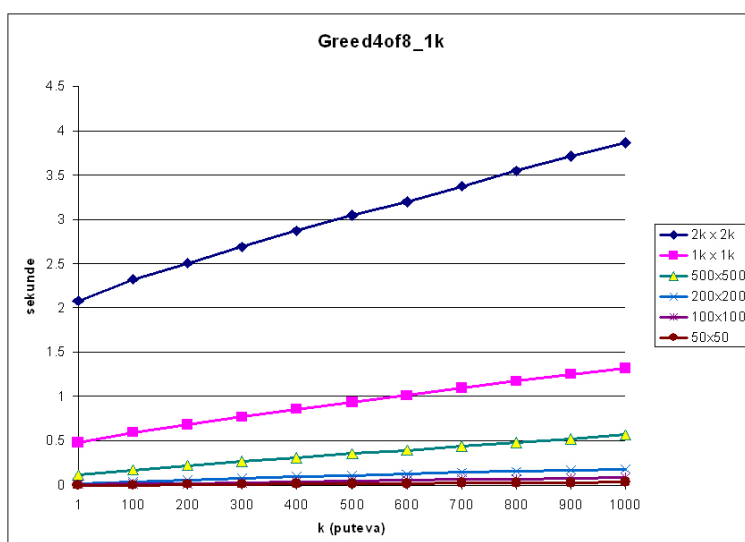
Oznaka Grafa	najkraći	prvih 100	prvih 1k	prvih 10k
IG_50x50	1	4	34	296
IG_100x100	5	15	85	687
IG_200x200	20	43	187	1404
IG_500x500	120	172	566	3585
IG_1000x1000	488	599	1323	7681
IG_2000x2000	2096	2325	3865	17074

Tabela 4.4.6. Vremena algoritma u ms za Greed4of8 grafove.

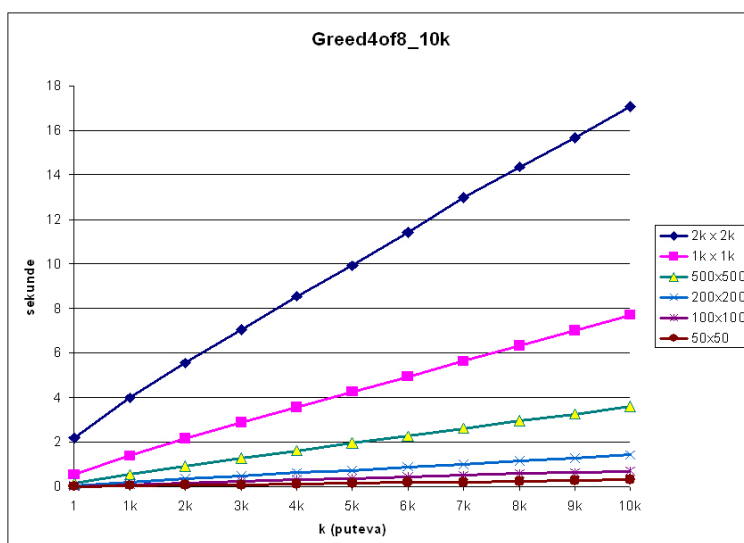
Rezultati testova za nalaženje najkraćeg, prvih 100, pa prvih 1,000 = 1k i 10,000 = 10k najkraćih puteva su grafički prikazana na slikama 4.4.7, 4.4.8 i 4.4.9 za svaki od testnih grafova.



Slika 4.4.7. Vreme za 100 najkraćih puteva.



Slika 4.4.8. Vreme za 1,000 najkraćih puteva.



Slika 4.4.9. Vreme za 10,000 najkraćih puteva.

4.4.4 Geografski grafovi

Geografskim grafovima predstavljamo geografske entitete na nekoj teritoriji. Imaju osobinu da su veliki, realni i da najkraći putevi za dva čvora na njima mogu imati veliki broj međučvorova, čak više hiljada. Ovde su u svrhe testiranja uzeti primeri geografskih grafova za delove 50 kontinentalnih, saveznih država u okviru USA, kao i ceo USA graf. Postoje verzije ovih grafova čije težine ivica predstavljaju rastojanja, kao i vremena. Testiranje je urađeno na grafu čiji čvorovi predstavljaju naselja, a ivice dužine direktnog puta između njih. Testni grafovi iz ove kategorije su preuzeti sa [11]. Skraćenice koje se javljaju na kraju naziva grafova predstavljaju delove USA: COL - saveznu državu Kolorado, FLA - Floridu, LKS - oblast Velikih jezera, E, W i CTR - istočni, zapadni i centralni deo USA, dok USA - predstavlja sva naselja u 50 kontinentalnih država u okviru USA.

Dimenzije odgovarajućih grafova su date u tabeli 4.4.7.

Oznaka Grafa	čvorova	or. ivica	avg 100	avg 1k	avg 10k
USA-road-d.COL	435,666	1,057,066	659	660	661
USA-road-d.FLA	1,070,376	2,712,798	1070	1071	1072
USA-road-d.LKS	2,712,798	6,885,658	2418	2419	2419
USA-road-d.E	3,598,623	8,778,114	2113	2114	2114
USA-road-d.W	6,262,104	15,248,146	2579	2579	2580
USA-road-d.CTR	14,081,816	34,292,496	3498	3498	3499
USA-road-d.USA	23,947,347	58,333,344	5276	5277	5277

Tabela 4.4.7. Osobine USA-road grafova.

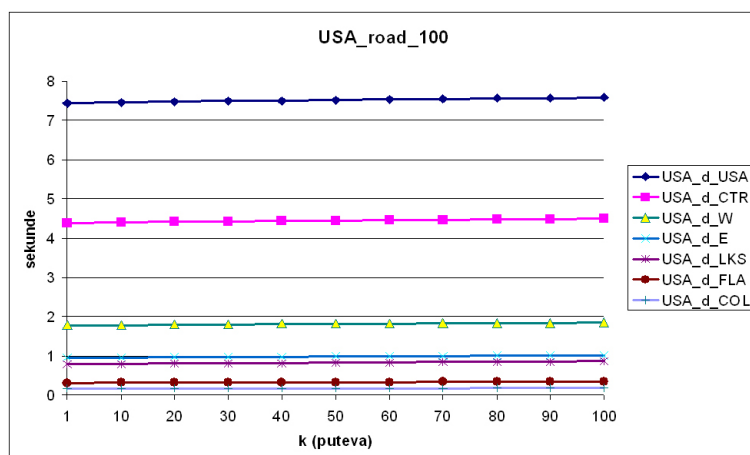
Ovakvi grafovi u testiranju pokazuju prosečan broj čvorova na najkraćim putevima od po nekoliko hiljada čvorova i stoga su vrlo zahtevni.

Tabela sadrži prosečna vremena potrebna za nalaženje najkraćeg, prvih 100, zatim prvih 1,000=1k i prvih 10,000=10k puteva za svaki od testnih grafova. Vremena u tabeli su u milisekundama.

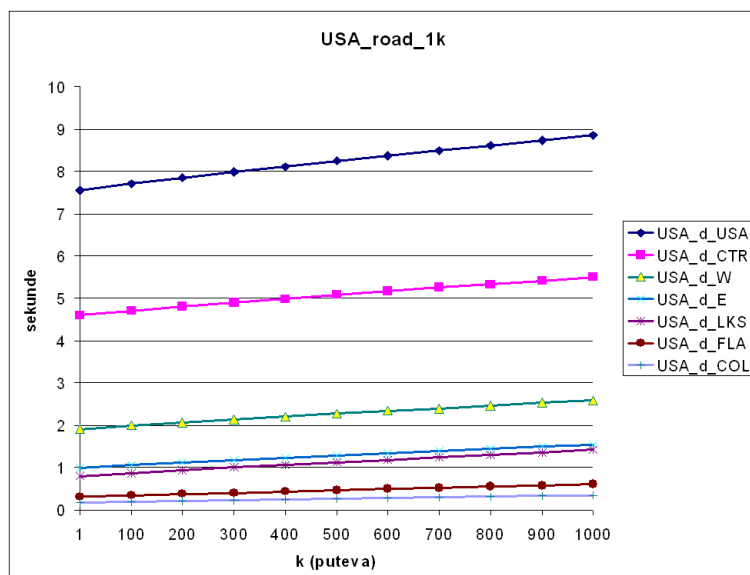
Oznaka Grafa	majkraći	prvih 100	prvih 1k	prvih 10k
USA-road-d.COL	163	182	340	1645
USA-road-d.FLA	307	341	609	2991
USA-road-d.LKS	782	854	1418	6319
USA-road-d.E	952	1013	1553	6051
USA-road-d.W	1775	1850	2591	7560
USA-road-d.CTR	4389	4492	5505	12980
USA-road-d.USA	7433	7591	8846	21961

Tabela 4.4.8. Vremena algoritma u ms za USA-road grafove.

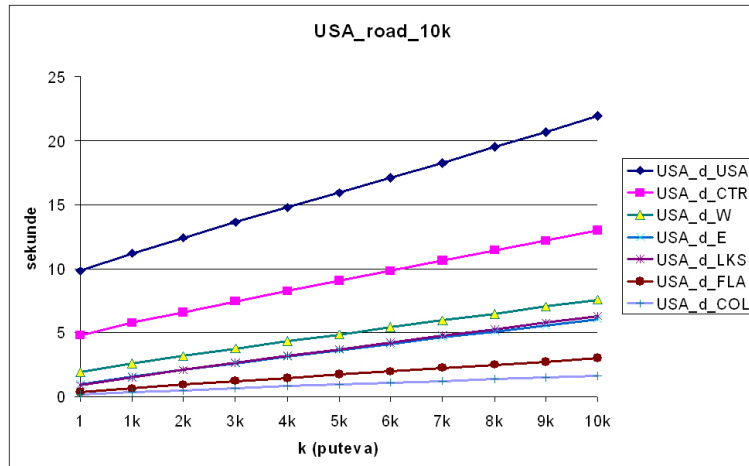
Rezultati testova koji pokazuju vremena potrebna za nalaženje najkraćeg, prvih 100, zatim 1,000=1k i 10,000=10k najkraćih puteva su grafički prikazani na slikama 4.4.10, 4.4.11 i 4.4.12 za svaki od testnih grafova.



Slika 4.4.10. Vreme za 100 najkraćih puteva.



Slika 4.4.11. Vreme za 1,000 najkraćih puteva.



Slika 4.4.12. Vreme za 10,000 najkraćih puteva.

4.5 Zaključak

Predloženi pristup realizovan kroz novi algoritam daje kraće vreme izvršenja u nalaženju k najkraćih puteva od postojećih algoritama. Pascoal je dala u [39] uporedni pregled rezultata testiranja više algoritama čiji su autori Yen, Katoh sa koautorima, Martins i Pascoal, sa u tom radu predloženim algoritmom, nazvanim hibridni algoritam (HY - Hybrid algorithm). Testovi sa merenjem vremena su sprovedeni na računaru sa procesorom Intel Pentium 4 na 3GHz, 2 MB procesorskog keša, sa 1GB RAM, pod SUSE Linuxom 9.3. Prema rezultatima Pascoal [39] najbrži algoritam je hibridni algoritam.

Testovi u disertaciji su izvršavani na laptop računaru HP Envy 1050 sa procesorom Intel i720 mobile, sa 4 jezgra, L2 keš memorijom od 6 MB, sa radnim taktom 1,6 GHz, a u turbo režimu 2,8 GHz opremljenim sa 4 GB ram memorije i naglašavam da je svaki test izvršavan u jednonitnom (single thread) režimu. Iako nisu u pitanju isti računari na kojima je vršeno testiranje, daćemo poredjenje prosečnih vremena dobijenih za najveće grafove iz [39] i najbrži hibridni algoritam sa novim algoritmom predloženim u disertaciji.

Za kategoriju slučajnih grafova HY algoritam za graf sa $2^{15} = 32768$ čvorova 100 najkraćih puteva nadje za oko 1.14 s, dok 1000 puteva nadje za oko 10 s. Novi algoritam u grafu sa 50,000 čvorova nadje najkraćih 100 puteva za 37 ms, dok mu je za 1000 potrebno 74 ms. Hibridnom algoritmu HY

je za najveći testirani slučajni graf sa 2^{21} čvorova za nalazenje 100 najkraćih puteva potrebno 166,7 s, dok je novom algoritmu za graf sa $5 \cdot 10^6 = 5M$ čvorova potrebno 6.686 s.

Za kategoriju greed4 grafova, koji se u [39] označavaju prefiksom Square, HY algoritam za graf sa 2^{18} čvorova u kvadratu dimenzija $2^9 \times 2^9$ nadje 100 najkraćih puteva za 104.98 s, dok novi algoritam za greed4 graf sa čvorovima u kvadratu dimenzija 500×500 nadje 100 najkraćih puteva za 174 ms.

Za kategoriju geografskih grafova za u [39] najveći testirani graf `USA-road-d-COL` hibridnom algoritmu je za nalazenje 100 najkraćih puteva potrebno 472.97 s, a novom algoritmu svega 182 ms.

Testovi su pokazali da je najveće ubrzanje u odnosu na hybridni algoritam u kategoriji grafova sa većim brojem čvorova na nadjenim putevima, pa posledično i većem broju kandidatskih puteva generisanih devijacijom. Napomenimo i da je najveći testirani geografski graf u [39], `USA-road-d-COL`, zapravo najmanji iz kategorije geografskih grafova obradjivanih u disertaciji.

Literatura

- [1] Aleksandrov, A. D., *O beskonechno malyh izgibaniyah neregulyarnyh poverhnostei* Matem. sbornik, 1(43), 3, (1936), 307-321.
- [2] Aleksandrov, V. A., *Sufficient condition for the extendability of an n -th order flex of polyhedra*, Beitr. Algebra Geom., 39 (1-3), (1998), 367-378.
- [3] Aljazzar H. and Leue S. K*: *A Directed On-The-Fly Algorithm for Finding the k Shortest Paths*, Association for Advancement of Artificial Intelligence, Rechical Report soft-08-03, (www.aaai.org), 2008.
- [4] Belov, K. M., *O beskonechno malyh izgib. toroobraznoi pov. vrashcheniya*, Sib. mat. zhurnal, t.IX, №3, (1968), 490-494.
- [5] Cauchy, A., *Sur les polygones et les polyedres*, Second Memoire, Journ. Ec. Polyt. 9, 87, 1813.
- [6] Cherkassky, B. W., Goldberg A. V. and Radzik T. *Sortest paths algorithms: Theory and experimental evaluation*, Mathematical Programming, 73, (1996), 129-196.
- [7] Ćirić M., Rančić S. R., *Parsing in different languages*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Elec. Energ. 18 (2), (2005), 299-307.
- [8] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, 2002.
- [9] Cohn-Vossen, S. *Unstarre geschlossene Flächen*, Math. Ann., 102, (1930), 10-29.
- [10] Dijkstra, E. W. *A note on two problems in connection with graphs*, Numerische Mathematik 1, (1959), 269-271.
- [11] 9th DIMACS Implementation Challenge <http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/> 2006.
- [12] Efimov, N. V. *Kachestvennye voprosy teorii deformacii poverhnostei*, UMN 3.2, (1948), 47-158.
- [13] Eppstein D. *Finding the k Shortest Paths*, SIAM Journal on Computing, 28(2), (1998), 652-673.
- [14] Gamma, E., Helm, R., Johnston, R. and Vlissides, J., *Design Patterns - Elements of Reusable Object-Oriented Software*, Addison-Wesley, 1995.
- [15] Gibson, F. F. S., Mirtich, B., *A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics*, Mitsubishi Electric Research Laboratory, Technical report, 97-19, (1997) .
- [16] Glasser, G., Stachel, H., *Open Geometry: OpenGL + Advanced Geometry*, Springer, 1999.
- [17] Devin Cook, GOLD Parser Builder, www.devincook.com/goldparser.
- [18] Gray, A., *Modern differential geometry of curves and surfaces*, CRC Press, Boca Ration, 1993.
- [19] Hahmann, S., *Visualization techniques for surface analysis*, in C. Bajaj (ed) Advanced Visualisation Tehniques, John Wiley 1999.
- [20] Hadjiconstantinou E. and Christofides N. *An efficient implementation of an algorithm for finding K shortest simple paths*, Networks, 34, (1999), 88-101.
- [21] Hershberger J., Maxel M. and Suri S. *Finding the k Shortest Simple Paths: A New algorithm and its Implementation*, ACM Transactions on Algorithms (TALG), Vol 3 Issue 4, (2007).
- [22] Hoffman, W. and Pavley R. *A method for the solution of the N th best path problem*, Journal of the Association for Computing Machinery, 6(4), (1959), 506-514.
- [23] I. Ivanova Karatopraklieva, *Infinitesimal bending of higher order of rotational surfaces with a planar pole*, Serdica **18**, (1992), 59-78.

- [24] Ivanova Karatopraklieva, I.; Sabitov, I Kh. *Surfaces deformation*, J. Math. Sci., New Yourk 70 N°3, (1995), 1685-1716.
- [25] Ivanova Karatopraklieva, I.; Sabitov, I Kh. *Bending of surfaces II*, J. Math. Sci., New Yourk 74 N°3, (1995), 997-1043.
- [26] Katoh N., Ibaraki T. and Mine H. *An efficient algorithm for K shortest simple paths*, Networks, 12, (1982), 411-427.
- [27] Kernighan W. B., Ritchie M. D., *The C Programming Language*, 2nd ed. Prentice Hall, New Jersey, (1988).
- [28] Kon-Fossen, S. E. *Nekotorye voprosy differ. geometrii v celom*, Fizmatgiz, Moskva **9** (1959).
- [29] Liebman, H., *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, Gott. Nachr., (1899), 44-55.
- [30] Liebman, H., *Über die Verbiegung von Ringfläche*, Gottinger Nachr. (1901) 39-53.
- [31] Liebman, H. *Über die Verbiegung von Rotationsflächen*, Leipzig Ber. 53 (1901) 215-234.
- [32] Martins, E. Q. V., Pascoal M. M. B and Santos J. L. E. *Deviation algorithms for ranking shortest paths*, The International Journal of Foundations of Computer Science, 10(3), (1999), 247-263.
- [33] Martins, E. Q. V. and Pascoal M. M. B. *A new implementation of Yen's ranking loopless paths algorithms*, 4OR - Quarterly Journal of the Belgium, French and Italian Operations Research Societies, 1(3), (2003), 121-134.
- [34] McReynolds Tom, David Blythe , *Advanced Graphics Programming Using OpenGL*, Morgan Kaufmann publishers , (2005).
- [35] Milovanović G., V. *Numerička analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- [36] Minagawa, T., *Remarks on the infinitesimal rigidity of closed convex surfaces*, Kodai Math. Semin. Repts, 8, 1, (1956), 41-48.
- [37] Minagawa, T., Rado, T., *On the infinitesimal rigidity of surfaces*, Osaka Math. J., 4, 2, (1952), 241-285.
- [38] Minagawa, T., Rado, T., *On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution*, Math.Zeitschr., **59** (1953), 151-163.
- [39] Pascoal, M. M. B. *Implementations and empirical comparisons of K shortest loopless path algorithms*, In: 9th DIMACS Implementation Challenge Workshop, 2006.
- [40] Pearl, J. *Heuristics - Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*, Adison-Wesley, 1986.
- [41] Perko A. *Implementation of algorithms for K shortest lopples paths*, Networks, 16, (1986), 149-160.
- [42] Perlova, N. G., *O beskonechno malyh izgibaniyah 1.,2. i 3.-go poryadkov zamknutyh rebristyh poverhnostei vrascheniya*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **10** (1969), 1-35.
- [43] Rančić, S. R.; Velimirović, L. S., *Visualization of infinitesimal bending of some class of toroid*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 42 N°4, (2008), 507-514.
- [44] I. Kh. Sabitov, *Local theory of bendings of surfaces.*, In Yu. D. Burago, V. A. Zallager (eds.): Geometry III. Theory of surfaces Encycl. Math. Sci. 48(1992), 179-250 [translation from the Russian original Itogi Nauki Tekh, Ser Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya 48, (1989), 196-270].
- [45] Sabitov, I Kh., *Isometric transformations of a surface inducing conformal maps of the surface onto itself*, Mat. Sb., 189:1, (1998), 119132.
- [46] Shepherd George, Kruglinski David , *Programming with Microsoft Visual C++.NET*, 6th ed. Microsoft Press , 2003.
- [47] Stachel H., *Higher Order Flexibility of Octahedra.*, Period. Math. Hung., **39 (1-3)** (1999), 227-242.
- [48] Terzopoulos D., Fleischer K., *Deformable models*, Visual Computer, 4(6), (1988), 306-331.
- [49] Todorović, T. B., Rančić S. R. and Mulalić, H. E. *Context Hidden Markov model for Named Entity Recognition*, Approximation and Computation In Honor of Gradimir V. Milovanovic, book series: Approximation and Its Applications, 447-460, DOI: 10.1007/978-1-4419-6594-3.30 Volume 42, Part 5, 2011.
- [50] Velimirović, Lj. S., *On the infinitesimal rigidity of a class of toroid surfaces of rotation* Collection of the scientific papers of the Faculty of Science Kragujevac, 16, (1994), 123-130.
- [51] Velimirović ,Lj. S., *On infinitesimal deformations of a toroid rotational surfaces generated by a quadrangular meridian*, Filomat, 9:2, (1995), 197-204.
- [52] Velimirović, L. S., *On the second order infinitesimal bending of the class of toroids*, Matematički vesnik, 49, (1997), 51-58.
- [53] Velimirović, L. S., *Beskonechno malye izgibaniya torobraznoi poverhnosti vrascheniya s mnogougol'nim meridianom*, Izvestiya Mat.+, 9, (1997), 3-7.

- [54] L. S. Velimirović, *Beskonačno mala savijanja površi*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd (1998).
- [55] Velimirović, Lj. S., *A new proof of theorem of Belov*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 63(77), (1998), 102-115.
- [56] Velimirović, L. S., *Change of area under infinitesimal bending of border curve*, Buletins for Applied Mathematics (BAM) Hungary PC-129 (2000).
- [57] Velimirović, L. S., *Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending*, Facta Universitatis - Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics Vol.3, No 11, (2001), 135-148.
- [58] Velimirović, L. S., *Infinitesimal bending of curves*, Matematički bilten Skopje, Makedonija 25(LI), (25-36).
- [59] Velimirović, Lj. S., Rančić, S., *Rigidity of Toroid Formed By Revolution Of Parallelogram*, Filomat, Vol 21, No 2, (2007), 109-120.
- [60] Velimirović, L. S., Rančić S. R., *Higher order infinitesimal bending of a class of toroids*, European Journal of Combinatorics, Volume 31, (2010), 1136-1147.
- [61] Velimirović, Lj. S., Rančić, S., *Rigidity and flexibility analysis of a kind of surfaces of revolution and visualization*, Applied Mathematics and Computation, doi:10.1016/j.amc.2010.11.012., Volume 217, Issue 9, (2011), 4612-4619.
- [62] Velimirović, L. S., Rančić S. R., Zlatanović, M. L., *Graphical presentation of infinitesimal bending of curves*, Proceedings of 24th nacional and 1st international scientific convention, MonGeometrija, Vrnjačka banja, september 25th - 27th (2008), 383-393.
- [63] Velimirović, L. S. and Rančić S. R., *Rigidity of Toroid with Polygonal Meridian*, International Conference on Geometry and Graphic, Dresden, (2008).
- [64] Velimirović, L. S. and Rančić S. R., *Notes on Infinitesimal Bending of a Toroid Formed by Revolution of a Polygonal Meridian*, Journal for Geometry and Graphics Volume 13, No. 2, (2009), 179-188.
- [65] Velimirović, L. S., Rančić S. R., Zlatanović, M. L. *Curvebend graphical tool for presentation of infinitesimal bending of curves*, Filomat 35:2, (2009), 111-122.
- [66] Velimirović, L. S., Rančić S. R., Zlatanović, M. L. *Visualization of Infinitesimal Bending of Curves*, Approximation and Computation In Honor of Gradimir V. Milovanovic, book series: Approximation and Its Applications, 469-480, DOI: 10.1007/978-1-4419-6594-3_32, Volume 42, Part 5, 2011.
- [67] Yen, Y. J. *Fonding the K shortest looples paths in a network*, Management Science, 17, (1971), 712-716,