U n i v e r z i t e t u N i š u
Prirodno matematički fakultet
Odsek za matematiku i informatiku

Aleksandar Stamenković

Fazi automati i fazi regularni izrazi

Doktorska disertacija

Niš, 2009.

Uvod

Teoriju fazi skupova je uveo L. A. Zadeh 1965. godine, kao pristup u predstavljanju i obradi podataka, kojim se pripadnost elemenata nekom skupu tretira aproksimativno, neprecizno. L. A. Zadeh je primetio da je ovakav način razmišljanja pogodan za razmatranje problema kod kojih izvor nepreciznosti jeste odsustvo tačno određenih kriterijuma pripadnosti nekoj klasi. Takvi problemi su veoma česti kada se radi sa klasama objekata koji se sreću u realnom, fizičkom svetu, zbog čega fazi skupovi imaju veoma značajne primene u mnogim oblastima. U istom radu, Zadeh je uveo pojam fazi relacije koji je kasnije razvijao u radu iz 1971. godine, gde je uveo i pojmove fazi ekvivalencije i fazi uređenja. Pošto su fazi relacije pogodne za izražavanje čak i jedva primetnih nijansi povezanosti, nije iznenađujuće to što su one našle prirodne primene u takozvanim "mekim" naukama, kao što su psihologija, sociologija, lingvistika, itd. Fazi pristup je primenjen i na teoriju jezika i automata, još u prvom stadijumu razvoja teorije fazi skupova. Budući da preciznost formalnih jezika prilično odudara od nepreciznosti koje se javljaju u prirodnim jezicima, fazi jezici i njima odgovarajući fazi automati, su uvedeni kao način za prevazilaženje tih suprotnosti. Zahvaljući tome, fazi jezici i automati su dobili široku primenu u leksičkoj analizi, opisu prirodnih i programskih jezika, sistemima učenja, kontrolnih sistemima, neuronskim mrežama, kliničkom monitoringu, prepoznavanju šablona, bazama podataka i drugim oblastima.

Poslednjih godina je postignut veoma veliki naučni napredak u teoriji fazi jezika i automata. Pomenućemo radove čiji su autori Belohlavek [7], Asveld [3], Y. M. Li i W. Pedrycz [68], [69], Z. Li, P. Li i Y.M. Li [67], S. Bozapalidis i O. Louscou - Bozapalidou [10] u kojima su dobijeni interesanti rezultati vezani za fazi automate, fazi jezike i gramatike nad raznim istinitosnim strukturama. Pomenimo da su algebarska svojstva fazi jezika i fazi automata izučavali i Shen [98] i Mordeson i Malik [84]. U poslednje vreme, fazi automati nad kompletnim reziduiranim mrežama su veoma intenzivno izučavani (vidi [103, 104, 105, 106]). Međutim, mnoga pitanja koja se tiču fazi jezika i automata su ostala i dalje otvorena i predstavljaju važnu temu za dalja istraživanja.

Redukcija konačnih nedeterminističkih automata zauzima značajno mesto u teoriji klasičnih automata. Za razliku od konačnih determinističkih automata, minimizacija broja stanja konačnih nedeterminističkih automata je PSPACE-kompletan problem ([56, 107]), pa su postojeći algoritmi dati u [21, 62, 79, 80, 97] neupotrebljivi u praksi. Iz ovih razloga, istraživanja mnogih autora bila su usmerena ka tome da se pronađe efektivan, u praksi upotrebljiv algoritam za smanjenje broja stanja nedeterminističkog automata. Metodi koji su razvijani u tim radovima bili su zapravo metodi za redukciju nedeterminističkog automata, tj. za nalaženje automata sa manjim brojem stanja koji raspoznaju isti jezik kao polazni automat, bez obaveznog određivanja minimalnog automata sa tim svojstvom. Ideja redukcije je dovela do razvoja koncepta desno invarijantnih ekvivalencija koje su pre svih izučavali Ilie i Yu u [51], a onda i u [15, 23, 53, 54, 55]. Isti koncept, ali iz drugog ugla izučavao je Calude u [14], pod imenom dobro-ponašajuće (engl. well-behaved) ekvivalencije.

Konačni fazi automati su uopštenje konačnih nedeterminističkih automata. Problemi minimizacije i redukcije su takođe prisutni u radu sa fazi automatima. Redukcija ili smanjenje broja stanja fazi automata izučavana je u [5, 27, 64, 76, 84, 90] i algoritmi koji su predstavljeni takođe su zasnovani na pronalaženju i spajanju nerazdvojivih stanja pomoću krisp ekvivalencija. Iako su dati algoritmi nazvani algoritmi minimizacije, njima se ne konstruiše minimalni fazi automat u skupu fazi automata koji raspoznaju dati fazi jezik. Za razliku od determinističkog slučaja gde je moguće efektivno otkriti i spojiti nerazdvojiva stanja, u nedeterminističkom slučaju, a tim pre i u fazi slučaju, gde imamo fazi prelaze iz stanja u fazi skupove stanja automata, veoma je teško odrediti kada su dva stanja nerazdvojiva a kad ne.

Osnovni zadatak ove doktorske disertacije je detaljno izučavanje problema redukcije fazi automata korišćenjem desno i levo invarijantnih fazi ekvivalencija i fazi kvazi–uređenja. Takođe je izvršena konstrukcija različitih tipova fazi automata iz datog fazi regularnog izraza i na dobijene fazi automate su primenjeni neki od metoda redukcije.

U prvoj glavi disertacije uvedeni su osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova, fazi relacija, fazi automata i fazi jezika. Koncept fazi skupova koji je razmatran u ovoj disertaciji baziran je na mrežno uređenim monoidima i kompletnim reziduiranim mrežama i znatno je opštiji od originalnog Zadehovog koncepta, gde se koristi realni, zatvoreni jedinični interval [0,1]. Kompletne rezidualne mreže su korišćene kao osnovne istinitosne strukture u drugoj i trećoj glavi, dok su u poslednjoj glavi problemi razmatrani nad mrežno uređenim monoidima, algebarskim strukturama opštijim od kompletnih reziduiranih mreža.

U drugoj glavi disertacije razmatran je problem redukcije fazi automata pomoću desno invarijantnih i levo invarijantnih fazi ekvivalencija. Pokazano je da su fazi raspoznavač i njegov faktor fazi raspoznavač ekvivalentni, tj. raspoznaju isti fazi jezik, ako i samo ako je odgovarajuća fazi ekvivalencija rešenje izvesnog sistema fazi relacijskih jednačina. Zatim su uvedene desno invarijantne i levo invarijantne fazi ekvivalencije fazi automata (fazi raspoznavača) i pokazano je da se pomoću ovih fazi ekvivalencija može izvršiti redukcija fazi automata (fazi raspoznavača), bolja od redukcije pomoću krisp ekvivalencija. Pokazano je da je skup svih desno invarijantnih fazi ekvivalencija fazi automata (fazi raspoznavača) gornja podpolumreža mreže svih fazi ekvivalencija tog fazi automata (fazi raspoznavača). Dat je i postupak za konstrukciju najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije fazi automata (fazi raspoznavača) koja daje rezultate nad lokalno konačnom reziduiranom mrežom, a izvršena je i karakterizacija najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije nad kompletnim reziduiranim mrežama koje zadovoljavaju izvesne distributivne zakone. Uveden je i koncept naizmeničnih redukcija, kod kojeg se naizmenično vrši desna i leva redukcija, odnosno gde fazi automat naizmenično redukujemo pomoću njegove najveće desno invarijantne, a potom pomoću njegove najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije i tako redom. Na kraju glave proučavamo specijalne tipove desno i levo invarijantnih ekvivalencija, koje smo nazvali jako desno invarijantne i jako levo invarijantne fazi ekvivalencije. Data je i efektivna procedura za izračunavanje najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije koja se može primeniti u proizvoljnoj kompletnoj reziduiranoj mreži.

U trećoj glavi je izučavan problem redukcije fazi automata pomoću desno invarijantnih i levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja. Champarnaud i Coulon su u [22, 23] predložili korišćenje kvazi–uređenja za redukciju nedeterminističkih automata i pokazali da metod baziran na kvazi–uređenjima vrši bolju redukciju od metoda zasnovanog na ekvivalencijama. Prirodno, do sličnog zaključka smo došli i u fazi slučaju. Naime, pokazano je da desno invarijantna fazi kvazi–uređenja vrše bolju redukciju fazi automata od one koja se može postići pomoću desno invarijantnih fazi ekvivalencija. Štaviše, pronađen je primer kojim je pokazano da se iterativni postupak za izračunavanje največeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja datog fazi automata, završava nakon konačnog broja koraka čak iako se sličan postupak za izračunavanje najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije tog fazi automata ne završava u konačnom broju koraka. Pored specijalnih tipova desno i levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja razmatranih u ovoj glavi, izučavamo i neke opštije tipove fazi kvazi–uređenja – slabo desno i slabo levo invarijantna fazi kvazi–uređenja. Pokazano je da je skup svih slabo desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja fazi raspoznavača glavni ideal mreže svih kvazi–uređenja na skupu stanja fazi automata i opisana je procedura za izračunavanje najvećeg elementa ovog glavnog ideala. Takođe je pokazano da slabo desno invarijantna fazi kvazi–uređenja vrše bolju redukciju fazi automata od desno invarijantnih, ali i da njihovo nalaženje predstavlja problem. Iako su rezultati i metodologija korišćena u ovoj glavi slični onima u prethodnoj, ispostavilo se da postoje bitne razlike koje opravdavaju naše izučavanje problema redukcije fazi automata pomoću fazi kvazi–uređenja.

U klasičnoj teoriji automata, konstrukcija malih konačnih nedeterminističkih raspoznavača iz regularnih izraza bio je izazov za mnoge autore. Istraživanja su bila usmerena ka nedeterminističkim automatima, zato što su konačni deterministički automati dobijeni iz regularnih izraza eksponencijalno veći od dužine odgovarajućih regularnih izraza. Do sad nije izvršena efektivna konstrukcija konačnog fazi raspoznavača iz fazi regularnog izraza. U poslednjoj glavi disertacije ćemo predstaviti jednostavan metod konstrukcije različitih tipova konačnih fazi raspoznavača jezika predstavljenih fazi regularim izrazom.

Na kraju, želim da izrazim zahvalnost mom mentoru, profesoru Miroslavu Ćiricu, na nesebičnoj pomoći, prijateljskoj podršci i stalnoj motivaciji tokom izrade ove disertacije. Takođe želim da se zahvalim svojoj porodici i svim prijateljima koji su mi, prilikom izrade ove disertacije, pružili neophodno razumevanje.

Sadržaj

Glava 1

Osnovni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi će biti uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati. Takođe će biti predstavljena neka osnovna svojstva uvedenih pojmova, koja će biti korišćena u daljem radu.

Glava se sastoji od sedam odeljaka. Najpre će u Odeljku 1.1 biti definisani neki pojmovi i oznake iz teorije skupova i neki tipovi relacija čije je poznavanje neophodno za dalji rad. U istom odeljku ćemo uvesti neke pojmove teorije polugrupa i slobodnih polugrupa. Dobro poznavanje pojmova kao što su nedeterministički automat i nedeterministički raspoznavač, regularni izraz i regularni jezik, neophodno je i u teoriji fazi jezika i fazi automata, zato će ovi pojmovi biti predstavljeni u Odeljku 1.2. U Odeljku 1.3 će biti navedeni pojmovi parcijalno uređenog skupa i mreže, koji su vezani za teoriju fazi skupova i važni su za poznavanje struktura istinitosnih vrednosti. Odeljak 1.4 će ukazati na opravdanost i značaj razvoja teorije fazi skupova. Ovde će biti uveden pojam mrežno uređenog monoida i pojam reziduirane mreže i biće date neke najznačajnije strukture istinitosnih vrednosti koje predstavljaju mrežno uređene monoide i reziduirane mreže, dok će, u Odeljku 1.5 biti navedena osnovna svojstva ovih algebarsih struktura. U Odeljku 1.6 biće uvedeni osnovni pojmovi vezani za fazi skupove i fazi relacije, a pojmove fazi automata, fazi raspoznavača i fazi regularnih izraza razmatraćemo u Odeljku 1.7.

Pojmovi i oznake su uvedeni u skladu sa sledećim knjigama: S. Burris i H. P. Sankappanavar [13], iz oblasti univerzalnih algebri, S. Bogdanović i M. Ćirić [9], iz oblasti teorije polugrupa i M. Ćirić, T. Petković i S. Bogdanović [28] iz teorije automata, R. Bělohlávek [6] iz oblasti reziduiranih mreža i teorije fazi skupova.

1.1. Skupovi, relacije i polugrupe

Pojmove i oznake iz Teorije skupova i Teorije brojeva, koji su nam potrebni u daljem radu, koristićemo onako kako je to uobičajeno u ovim teorijama. Kardinalni broj skupa A označavamo sa $|A|$. Familija skupova indeksirana skupom I će biti označavana sa A_i, $i \in I$, ili $\{A_i \mid i \in I\}$ ili $\{A_i\}_{i\in I}$. Ako je indeksni skup konačan i ima n elemenata, onda obično pišemo $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i familiju indeksiranu sa I označavamo sa A_1, A_2, $\dots$, A_n ili $\{A_i\}_{i=1}^n$.

Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ neprazna familija nepraznih skupova. Pod *Dekartovim proizvodom* te familije, koji označavamo sa $\prod_{i\in I} A_i$, podrazumevamo skup koji se sastoji od svih preslikavanja

$$a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad a : i \mapsto a_i \in A_i,$$

za svako $i \in I$. Jednostavnosti radi, element $a \in A = \prod_{i\in I} A_i$ zapisujemo kao $(a_i)_{i\in I}$, ili kraće samo (a_i), gde je I dati indeksni skup, a a_i je *i-ta koordinata* od a, za $i \in I$. Ako je indeksni skup I konačan, direktan proizvod familije $\{A_i\}_{i=1}^n$ označavamo sa $\prod_{i=1}^n A_i$ ili $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. U tom slučaju proizvoljan element $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ nazivamo *uređenom n-torkom*, a ako je $n = 2$, onda govorimo o *uređenom paru*. Ako je $A_i = A$, za svako $i \in I$, tada direktan proizvod $\prod_{i\in I} A_i$ označavamo sa A^I i nazivamo ga *direktnim stepenom* skupa A, a ako je $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, tada pišemo $\prod_{i=1}^n A_i = A^n$.

Neka je A neprazan skup. Pod pojmom *binarne relacije* na A podrazumevamo svaki podskup ξ skupa A^2, pri čemu to može biti i prazan podskup. Budući da najčešće radimo sa binarnim relacijama, onda binarne relacije kraće nazivamo samo *relacijama*. Specijalne relacije na skupu A koje su vredne pažnje su *prazna relacija*, sa uobičajenom oznakom $\varnothing$, *relacija jednakosti* $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$, koja se takođe naziva i *dijagonala*, *identička relacija ili jednakost*, i *univerzalna* ili *puna relacija* $\nabla_A = A \times A$. U slučajevima kada ne postoji opasnost od zabune, izostavićemo indeks A u Δ_A i ∇_A i pisaćemo jednostavno Δ i ∇. Ako je ξ relacija na A i $(a, b) \in \xi$, tada kažemo da su a i b *u relaciji* ξ i obično izrazom "$a\xi b$" zamenjujemo izraz "$(a, b) \in \xi$". *Proizvod* ili *kompozicija relacija* ξ, η na skupu A je relacija $\xi \circ \eta$ definisana sa

$$\xi \circ \eta = \{(a, c) \in A \times A \mid (\exists b \in A)\, (a, b) \in \xi \text{ i } (b, c) \in \eta\}.$$

Za binarnu relaciju ξ na A, relaciju $\xi^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \xi\}$ nazivamo *inverznom* ili *obratnom relacijom* relacije ξ. Skupove

$$\mathrm{Dom}\,\xi = \{a \in A \,|\, (\exists b \in A)\,(a,b) \in \xi\}$$
$$\mathrm{ran}\,\xi = \{b \in A \,|\, (\exists a \in A)\,(a,b) \in \xi\}$$

nazivamo *domen* i *rang* relacije ξ, tim redom. Jasno je da važi

$$\mathrm{Dom}(\xi^{-1}) = \mathrm{ran}\,\xi, \quad \mathrm{ran}\,(\xi^{-1}) = \mathrm{Dom}\,\xi.$$

Uvedimo oznake

$$a\xi = \{x \in A \,|\, (a,x) \in \xi\}, \qquad \xi a = \{x \in A \,|\, (x,a) \in \xi\}.$$

Posebno značajnu ulogu u daljem radu imaće *relacije parcijalnog uređenja* i *relacije ekvivalencije*. Neka je A neprazan skup. Relacija ξ na skupu A je:

- *refleksivna*, ako je $(a,a) \in \xi$, za svaki $a \in A$, tj. ako je $\Delta_A \subseteq \xi$;
- *simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ sledi $(b,a) \in \xi$, tj. ako je $\xi \subseteq \xi^{-1}$;
- *anti-simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ i $(b,a) \in \xi$ sledi da je $a = b$, tj. ako je $\xi \cap \xi^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- *tranzitivna*, ako za $a,b,c \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ i $(b,a) \in \xi$ sledi $(a,c) \in \xi$, tj. ako je $\xi \circ \xi \subseteq \xi$.

Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *uređenje* ili *relacija poretka*. Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacija ekvivalencije*, ili jednostavno *ekvivalencija*. Refleksivnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *kvazi–uređenje*. Ako je R kvazi–uređenje na skupu A, tada je relacija E_R definisana sa $E_R = R \cap R^{-1}$ ekvivalencija na A, koju nazivemo *prirodna ekvivalencija* kvazi–uređenja R.

Sada ćemo se malo pozabaviti relacijama ekvivalencije. Neka je θ ekvivalencija na skupu A. Ako su elementi $a,b \in A$ u relaciji θ, tj. $(a,b) \in \theta$, tada kažemo i da su oni *ekvivalentni*. Skup θ_a nazivamo *klasa ekvivalencije* elementa $a \in A$ u odnosu na θ, ili kraće θ*-klasa* elementa a. Jasno je da je u tom slučaju $a \in \theta_a$. Skup svih θ-klasa označavaćemo sa A/θ ili A_θ i nazivaćemo ga *faktor skup* skupa A, ili prosto *faktor* skupa A, u odnosu na θ. Kadinalnost skupa A/θ, u oznaci $\mathrm{ind}(\theta)$, nazivamo *indeks* od θ. Preslikavanje

$$\theta^\natural : a \mapsto \theta_a$$

koje slika skup A na faktor skup A/θ nazivamo *prirodnim preslikavanjem* skupa A određenim ekvivalencijom θ. Sa druge strane, neka su A i B neprazni skupovi i $\phi : A \to B$. Relaciju

$$\ker\phi = \{(x,y) \in A \times A \,|\, \phi(x) = \phi(y)\}$$

na skupu A nazivamo *jezgrom preslikavanja* ϕ. Vezu između ekvivalencija i preslikavanja daje nam naredna teorema.

Teorema 1.1.1. *Neka je A neprazan skup. Ako je ϕ preslikavanje na skupu A u skup B, tada je* $\ker\phi$ *ekvivalencija na A. Osim toga, za proizvoljnu ekvivalenciju θ na A je* $\ker(\theta^\natural) = \theta$.

Familiju $\{A_i \mid i \in I\}$ nepraznih podskupova skupa A nazivamo *razbijanjem* ili *particijom* skupa A, ako je

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

i za proizvoljan par $i, j \in I$ važi

$$A_i = A_j \qquad \text{ili} \qquad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Vezu između particije skupa i njegovih relacija ekvivalencije daje nam naredna teorema.

Teorema 1.1.2. *Neka je familija $\varpi = \{A_i \mid i \in I\}$ particija skupa A. Tada relacija θ_ϖ na skupu A definisana sa*

$$(a, b) \in \theta_\varpi \;\Leftrightarrow\; (\exists i \in I)\; a, b \in A_i, \qquad (a, b \in A)$$

jeste relacija ekvivalencije na skupu A. Obratno, neka je θ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada familija

$$\varpi_\theta = \{\theta_a \mid a \in A\}$$

jeste razbijanje skupa A. Osim toga, preslikavanja

$$\varpi \mapsto \theta_\varpi \qquad i \qquad \theta \mapsto \varpi_\theta$$

su uzajamno inverzne bijekcije iz skupa svih razbijanja skupa A na skup svih relacija ekvivalencije na skupu A, i obratno.

Neka je R kvazi–uređenje na skupu A. Za svaki $a \in A$, R-*afterset* od a je skup R_a definisan sa $R_a = \{b \in A| \ (a, b \in R)\}$, dok je R-*foreset* od a skup R^a definisan sa $R^a = \{b \in A| \ (b, a) \in R\}$ (vidi [4, 33, 34]). Skup svih R-afterseta ćemo označiti sa A/R, a skup svih R-foreseta ćemo označiti sa $A \backslash R$. Jasno, ako je R fazi ekvivalencija, tada je $A/R = A \backslash R$, i to je skup svih klasa ekvivalencije R.

Neka je na nepraznom skupu S definisana binarna operacija $\cdot$, tako da važi zakon asocijativnosti, tj. da je

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{za sve } a, b, c \in S.$$

Tada je algebra $(S, \cdot)$ *polugrupa*. Imajući u vidu da na polugrupi važi uopšteni zakon asocijativnosti, tj. da raspored zagrada nije bitan, koristićemo konvenciju o brisanju zagrada.

Neka su $(S, \cdot)$ i $(T, *)$ polugrupe. Preslikavanje $\varphi : S \to T$ je *homomorfizam* iz polugrupe $(S, \cdot)$ u polugrupu $(T, *)$, ako je

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b),$$

za sve $a, b \in S$. Homomorfizam $\varphi : S \to T$ koji je "1-1", tj. za koji je zadovoljeno

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b,$$

za sve $a, b \in S$, nazivamo *monomorfizam*. Homomorfizam $\varphi : S \to T$ koji je "na", tj. za koji je

$$\varphi(S) = T,$$

nazivamo *epimorfizam*. Bijektivni homomorfizam $\varphi : S \to T$ zovemo *izomorfizam* i u tom slučaju kažemo da su polugrupe $(S, \cdot)$ i $(T, *)$ *izomorfne*. Ako je $\varphi : S \to T$ izomorfizam i $(S, \cdot) = (T, *)$, kažemo da je φ *automorfizam* polugrupe $(S, \cdot)$

Neprazan podskup T polugrupe S je *podpolugrupa* od S ako je T zatvoren za operaciju polugrupe S, tj. ako je $ab \in T$, za sve $a, b \in T$. Neposredno se proverava da neprazan presek proizvoljne familije podpolugrupa polugrupe S jeste podpolugrupa od S. Prema tome, ako je T neprazan podskup od S, tada presek svih podpolugrupa polugrupe S koje sadrže T jeste podpolugrupa od S, koju označavamo sa $\langle T \rangle$ i nazivamo je podpolugrupa od S *generisana skupom* T.

Element e polugrupe S je *leva* (*desna*) *jedinica* ako važi $ea = a$ ($ae = a$), za svako $a \in S$. Element e je *jedinica* polugrupe S ako je leva i desna jedinica. Polugrupa sa jedinicom je *monoid*. Takođe se može dokazati da polugrupa ima jedinicu ako i samo ako ima i levu i desnu jedinicu, kao i da ukoliko postoji, jedinica u polugrupi jeste jedinstvena.

Neka je X neprazan, konačan skup koji ćemo zvati *alfabet*, a njegove elemente *slovima*. Konačan niz $x_1 x_2 \cdots x_n$ elemenata alfabeta X nazivamo *reč* nad alfabetom X. Dve reči $x_1 x_2 \cdots x_n$ i $y_1 y_2 \cdots y_m$ su jednake ako je $n = m$ i $x_i = y_i$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. ako su jednake kao nizovi. Sa

X^+ označavamo skup svih reči nad alfabetom X. Na skupu X^+ definišemo operaciju *dopisivanja* (*konkatenacije*) na sledeći način

$$(x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_m) = x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m.$$

Sa ovako definisanom operacijom X^+ je polugrupa, koju nazivamo *slobodna polugrupa nad alfabetom* X. Skup $X^* = X^+ \cup \{\varepsilon\}$ sa množenjem definisanim sa

$$uv = \begin{cases} uv, & u, v \in X^+; \\ u, & u \in X^+,\ v = \varepsilon; \\ v, & u = \varepsilon,\ v \in X^+; \\ \varepsilon, & u = v = \varepsilon \end{cases}$$

jeste monoid koji označavamo sa X^* i nazivemo *slobodni monoid nad alfabetom* X. Jedinični element, u oznaci ε, nazivamo *prazna reč*.

Pod *jezikom* nad alfabetom X podrazumevamo proizvoljan podskup slobodnog monoida X^*. *Konkatenacija jezika* L_1 i L_2 nad alfabetom X, u oznaci L_1L_2 je jezik nad X, definisan sa $L_1L_2 = \{uv|\ u \in L_1,\ v \in L_2\}$. Za jezik L, nad alfabetom X i $n \in \mathbb{N}$ jezike L^n definišemo sa

$$L^1 = L, \quad L^{n+1} = LL^n = L^nL.$$

Za reč u alfabeta X sa $|u|$ označavamo *dužinu reči* u, tj. broj slova alfabeta X koja učestvuju u zapisu reči u. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, sa X^k označavamo skup svih reči iz X^* dužine k, dok sa $X^{\geqslant k}$, odnosno $X^{\leqslant k}$, označavamo skup svih reči ulaznog alfabeta dužine najmanje, odnosno najviše, k.

Neka je X alfabet. Relacija *umetanja* (engl. embedding), u oznaci $\leqslant_{em}$, je relacija na slobodnom monoidu X^* definisana sa

$$u \leqslant_{em} v \Leftrightarrow u = u_1u_2\cdots u_n \ \text{ i } \ v = v_0u_1v_1u_2\cdots v_{n-1}u_nv_n, \tag{1.1}$$

gde je $n \in \mathbb{N}$ i $u, v, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_0v_1, \ldots, v_n \in X^*$.

Propozicija 1.1.1. ([41], [42]) *Za proizvoljan alfabet X, $\leq_{em}$ je relacija poretka na X^*. Svaki podskup slobodnog monoida X^*, koga čine po parovima neuporedive reči, je konačan.*

1.2. Nedeterministički automati i regularni izrazi

Nedeterministički automat A nad *alfabetom* X je trojka $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$, gde je A *skup stanja*, $\delta^A : A \times X \mapsto \mathscr{P}(A)$ je *funkcija prelaza*, a $\mathscr{P}(A)$ je partitivni skup skupa A. Specijalno, ako je za svaki $a \in A$ i svaki $x \in X$ zadovoljeno $|\delta^A(a,x)| = 1$, tada je A *deterministički automat*. Nedeterministički automat $\mathscr{A}$ je *konačan* ako je skup njegovih stanja A konačan.

Funkciju prelaza δ^A možemo na prirodan način produžiti do preslikavanja $\delta^A_* : A \times X^* \to \mathscr{P}(A)$ na sledeći način: Za $a \in A$, $\delta^A_*(a,\varepsilon) = a$, dok je za $u \in X^*$ i $x \in X$, $\delta^A_*(a,ux) = \delta^A_*(\delta^A_*(a,u),x)$. Bez opasnosti od zabune koristićemo oznaku δ^A umesto δ^A_*.

Za svaku reč $u \in X^*$ definišemo relaciju $\delta^A_u \subseteq A\times A$, koju zovemo *relacija prelaza* određena sa u, sa

$$(a,b) \in \delta^A_u \quad \Leftrightarrow \quad b \in \delta^A(a,u),$$

za sve $a,b \in A$. Očigledno, za sve $u,v \in X^*$, važi $\delta^A_{uv} = \delta^A_u \circ \delta^A_v$.

Inicijalni nedeterinistički automat nad X je četvorka $\mathscr{A} = (A,X,\sigma^A,\delta^A)$, gde je (A,X,δ^A) nedeterministički automat nad alfabetom X, a $\sigma^A \subseteq A$ je *skup inicijalnih stanja*, a *nedeterministički raspoznavač* A nad alfabetom X je petorka $\mathscr{A} = (A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$, gde je (A,X,σ^A,δ^A) inicijalni nedeterministički automat, a $\tau^A \subseteq A$ je *skup terminalnih (završnih) stanja.* Nedeterministički raspoznavač $\mathscr{A} = (A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ je *konačan*, ako je $\mathscr{A} = (A,X,\delta^A)$ konačan nedeterministički automat. Ako σ^A sadrži samo jedno stanje $a_0 \in A$, tj., ako je $\sigma^A = \{a_0\}$ tada nedeterministički raspoznavač označavmo sa $\mathscr{A} = (A,X,\delta^A,a_0,\tau^A)$. Primetimo da se u literaturi pojam nedeterministički automat često odnosi na konačni nedeterministički raspoznavač sa jednim inicijalnim stanjem.

Nedeterministički raspoznavač $\mathscr{A} = (A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ raspoznaje (prihvata) jezik $L \subseteq X^*$ ako je

$$L = \{u \in X^* | (\exists a \in \sigma^A)\delta^A(a,u) \in \tau^A\}, \quad \text{ili ekvivalentno} \tag{1.2}$$
$$L = \{u \in X^* | (\exists a\sigma^A)(\exists b \in T)\ (a,b) \in \delta^A_u\}. \tag{1.3}$$

Jezik L raspoznat pomoću nedeterminističkog raspoznavača $\mathscr{A}$ označavamo sa $L(\mathscr{A})$.

Familija *regularnih izraza* $\mathscr{R}$ ili jednostavnije *regularni izrazi* nad alfabetom X induktivno je definisana na sledeći način:

(i) $\emptyset \in \mathscr{R}$

(ii) $\varepsilon \in \mathscr{R}$;

(iii) $x \in \mathscr{R}$, za sve $x \in X$;

(iv) $(\alpha_1 + \alpha_2) \in \mathscr{R}$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{R}$;

(v) $(\alpha_1\alpha_2) \in \mathscr{R}$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{R}$;

(vi) $(\alpha)^* \in \mathscr{R}$, za svaki $\alpha \in \mathscr{R}$;

(vii) Regularni izrazi su samo oni izrazi koji se mogu dobiti primenom pravila (i) – (vii) konačan broj puta.

Za regularni izraz α, označimo sa $|\alpha|_X$, broj simbola alfabeta X u tom izrazu. Broj $|\alpha|_X$ nazivamo *širina* regularnog izraza α (vidi [1]). Za svaki $\alpha \in \mathscr{R}$, sa $\|\alpha\|$ označavamo jezik nad alfabetom X koga rekurzivno definišemo sa:

(i) $\|\emptyset\| = \emptyset$, $\|\varepsilon\| = \{\varepsilon\}$, $\|x\| = \{x\}$, za $x \in X$.

(iii) $\|(\alpha_1 + \alpha_2)\| = \|\alpha_1\| \cup \|\alpha_2\|$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{R}$;

(iv) $\|(\alpha_1\alpha_2)\| = \|\alpha_1\|\|\alpha_2\|$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{R}$;

(v) $\|(\alpha)^*\| = \|\alpha\|^*$, za svaki $\alpha \in \mathscr{R}$.

Primetimo da je jezik $\|\alpha_1\|\|\alpha_2\|$ konkatenacija jezika $\|\alpha_1\|$ i $\|\alpha_2\|$, dok je $\|\alpha\|^*$ Kleenejevo zatvorenje jezika $\|\alpha\|$, koje je definisano sa $\|\alpha\|^* = \{\varepsilon\} \cup \|\alpha\| \cup \|\alpha\|\|\alpha\| \cup \cdots \cup \|\alpha\|^n \cup \cdots$. Za svaki regularni izraz α, jezik $\|\alpha\|$ je *jezik definisan regularnim izrazom* α. Jezik nad konačnim alfabetom X je *regularan* ako je definisan regularnim izrazom nad X. Potsetimo da je jezik nad konačnim alfabetom regularan ako i samo ako je raspoznat nekim konačnim nedeterminističkim raspoznavačem.

Neka je α regularan izraz nad alfabetom X. Označimo sa $\overline{\alpha}$ izraz dobijen iz α indeksiranjem svakog simbola izraza α njegovom pozicijom u tom izrazu. Isto označavanje ćemo koristiti i za uklanjanje indeksa, tj. za regularan izraz α, važi: $\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$. Definišimo sledeće skupove:

(i) $pos_0(\alpha) = \{0, 1, \ldots, |\alpha|_X\}$,

(ii) $first(\alpha) = \{i \mid x_i u \in \|\alpha\|\}$,

(iii) $last(\alpha) = \{i \mid u x_i \in \|\alpha\|\}$,

(iv) $follow(\alpha, i) = \{j \mid u x_i x_j v \in \|\alpha\|\}$,

(v) $follow(\alpha, 0) = first(\alpha)$,

(vi)
$$last_0(\alpha) = \begin{cases} last(\alpha), & \varepsilon \notin \|\alpha\| \\ last(\alpha) \cup \{0\}, & \varepsilon \in \|\alpha\| \end{cases}.$$

Konačan nedeterministički raspoznavač

$$\mathscr{A}_{pos}(\alpha) = (pos_0(\alpha), X, \delta_{pos}, 0, last_0(\alpha))$$

zovemo *pozicioni automat* regularnog izraza α, čija je funkcija prelaza definisana sa

$$\delta_{pos}(i, x) = \{j \mid \overline{x_j} = x,\ j \in follow(\alpha, i)\}.$$

Glushkow [40] i McNaughton i Yamada [78], su pokazali da je jezik $\|\alpha\|$ raspoznat nedeterminističkim raspoznavačem $\mathscr{A}_{pos}(\alpha)$. Zbog jednostavnijeg pisanja, u daljem tekstu ćemo pozicioni automat $\mathscr{A}_{pos}(\alpha)$ regularnog izraza α, označavati sa $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha) = (A_{\mathrm{p}}, X, \delta^{A_{\mathrm{p}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{p}}})$.

Podsećamo da smo, za pojmove i oznake koji nisu ovde definisani uputili na knjigu M. Ćirića, T. Petković i S. Bogdanovića [28].

1.3. Uređeni skupovi i mreže

Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju na skupu A nazivamo *parcijalnim uređenjem* na A, ili kraće samo *uređenjem* na A. Uređenja najčešće označavamo simbolom $\leqslant$. Par $(A, \leqslant)$ koji se sastoji od skupa A i parcijalnog uređenja $\leqslant$ na njemu nazivamo *parcijalno uređenim skupom*, ili kraće samo *uređenim skupom*. Jednostavnosti radi, umesto "$(A, \leqslant)$ je uređen skup" govorićemo "A je uređen skup", pri čemu ćemo podrazumevati da je uređenje na njemu označeno sa $\leqslant$. Ako je $\leqslant$ uređenje na skupu A, tada sa $<$ označavamo relaciju na A definisanu sa

$$a < b \text{ ako i samo ako je } a \leqslant b \text{ i } a \neq b,$$

a sa $\geqslant$ i $>$ označavamo inverzne relacije relacija $\leqslant$ i $<$, tim redom. Uređenje $\leqslant$ na A nazivamo *linearnim* ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, i u tom slučaju kažemo da je A *linearno uređen skup* ili *lanac*.

Za preslikavanje ϕ koje slika uređen skup A u uređen skup B kažemo da je *izotono* ili *rastuće* ili da *očuvava uređenje* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Slično, za preslikavanje ϕ iz A u B kažemo da je *antitono* ili da je *opadajuće* ako za proizvoljne $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(b) \leqslant \phi(a)$. Za ϕ kažemo da je *izomorfizam uređenih skupova* A i B, ili *uređajni izomorfizam* iz A na B, ako je ϕ bijekcija iz A na B i ϕ i ϕ^{-1} su izotona preslikavanja.

Neka je A uređen skup. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *minimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo manji od njega, tj. ako za svaki $x \in A$, iz $x \leqslant a$ sledi $x = a$;

– *maksimalan element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo veći od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $a \leqslant x$ sledi $a = x$;
– *najmanji element* skupa A, ako je manji od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in A$;
– *najveći element* skupa A, ako je veći od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in A$.

Neka je H neprazan podskup uređenog skupa A. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *gornja granica* skupa H, ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in H$;
– *donja granica* skupa H, ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in H$;
– *najmanja gornja granica*, ili *supremum*, skupa H, ako je a najmanji element skupa svih gornjih granica skupa H, tj. ako je a gornja granica skupa H i za svaku gornju granicu b skupa H važi $a \leqslant b$;
– *najveća donja granica*, ili *infimum*, skupa H, ako je a najveći element skupa svih donjih granica skupa H, tj. ako je a donja granica skupa H i za svaku donju granicu b skupa H važi $b \leqslant a$.

Supremum skupa H, ako postoji, označavamo sa $\bigvee H$, a infimum, takođe ako postoji, sa $\bigwedge H$. Ukoliko je $H = \{x_i \mid i \in I\}$, tada umesto $\bigvee H$ i $\bigwedge H$ pišemo redom

$$\bigvee_{i \in I} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i \in I} x_i .$$

Uređen skup čiji svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum nazivamo *mrežom*. Indukcijom se lako dokazuje da i svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum. Za beskonačne podskupove mreže to ne mora da važi. Ako je L mreža, tada se na L mogu definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ sa

$$\wedge : (a, b) \mapsto a \wedge b \qquad \text{i} \qquad \vee : (a, b) \mapsto a \vee b .$$

Po analogiji sa odgovarajućim operacijama na skupovima, operacije $\vee$ i $\wedge$ nazivaćemo, redom, *unijom* i *presekom*. Drugim rečima, govorićemo da je $\bigvee H$ *unija skupa* H a $a \vee b$ je *unija elemenata* a i b, i slično, da je $\bigwedge H$ *presek skupa* H, a $a \wedge b$ je *presek elemenata* a i b. Koristeći operacije unije i preseka, mrežu možemo definisati i kao univerzalnu algebru sa dve binarne operacije koje zadovoljavaju nekoliko specijalnih uslova. Naime, neposredno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.3.1. *Ako je L mreža, tada je $(L, \wedge, \vee)$ univerzalna algebra takva da za sve $x, y, z \in L$ važe sledeći uslovi:*

(L1) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (*idempotentnost*);
(L2) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (*komutativnost*);
(L3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (*asocijativnost*);
(L4) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$ (*apsorpcija*).

Obratno, ako je L algebra sa dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju uslove (L1)–(L4), *tada je L mreža, u odnosu na parcijalno uređenje $\leqslant$ definisano sa*

$$a \leqslant b \ \Leftrightarrow \ a \wedge b = a \qquad (\textit{ili, ekvivalentno, } a \leqslant b \ \Leftrightarrow \ a \vee b = b).$$

Uslove (L1)–(L4) u Teoremi 1.3.1 nazivamo *aksiomama mreže*. Tretiranje mreže kao univerzalne algebre omogućava nam da kao i kod svake druge univerzalne algebre govorimo o *podmrežama*, kongruencijama, homomorfizmima, izomorfizmima, direktnim proizvodima mreža itd.

Neprazan podskup X mreže L naziva se *podmreža* mreže L ako za svaka dva elementa $a, b \in X$ važi $a \wedge b \in X$ i $a \vee b \in X$.

Za mrežu L i $a \in L$, podmreže

$$[a) = \{x \in L \,|\, a \leqslant x\} \qquad \text{i} \qquad (a] = \{x \in L \,|\, x \leqslant a\}$$

su *poluotvoreni intervali* mreže L, a za $a, b \in L$ takve da je $a \leqslant b$, podmreže

$$(a, b) = \{x \in L \,|\, a < x < b\} \qquad \text{i} \qquad [a, b] = \{x \in L \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

su *otvoreni interval* i *zatvoreni interval*, (ili *segment*) mreže L, tim redom.

Sistemi sa jednom binarnom idempotentnom, komutativnom i asocijativnom operacijom nazivaju se polumrežama. Ako neprazan skup L zajedno sa proizvoljnim elementima $a, b \in L$ sadrži i $a \wedge b$, odnosno $a \vee b$ onda se L naziva, redom $\wedge$-*polumreža* ili *donja polumreža*, tj. $\vee$-*polumreža* ili *gornja polumreža*.

Neprazan podskup J mreže L naziva se *ideal* ako važi:

(a) za elemente $a \in J$ i $x \in L$ takve da je $x \leqslant a$ je $x \in J$;

(b) za dva elementa $a, b \in L$ je i $a \vee b \in J$.

Nije teško pokazati da je J ideal mreže L ako važi:

$$a \vee b \in J \text{ ako i samo ako i } a \in J \text{ i } b \in J.$$

Dualni pojam pojmu ideala u mreži je *dualni ideal*. Dakle, neprazan podskup D mreže L je dualni ideal ako važi:

(a) za elemente $a \in D$ i $x \in L$ takve da je $a \leqslant x$ je $x \in D$;

(b) za dva elementa $a, b \in L$ je $a \wedge b \in D$.

Neka je element $a \in L$. Primetimo da su, tada poluotvoreni intervali $(a]$ i $[a)$, redom ideal, odnosno dualni ideal mreže L i nazivaju se *glavni ideal* generisan sa a i *glavni dualni ideal* generisan sa a.

Najmanji element mreže L, ako takav postoji, nazivamo *nulom*, a najveći element, ukoliko postoji, nazivamo *jedinicom mreže* L. Nulu i jedinicu mreže obično označavamo sa 0 i 1, tim redom. Mrežu koja ima nulu i jedinicu nazivamo *ograničenom mrežom*. Ograničena mreža se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju $(L1)$–$(L4)$, i nularnim operacijama (konstantama) 0 i 1 koje zadovoljavaju uslove

(L5) $0 \wedge x = 0$ (ili, ekvivalentno, $0 \vee x = x$), za svaki $x \in L$;
(L6) $1 \wedge x = x$ (ili, ekvivalentno, $1 \vee x = 1$), za svaki $x \in L$.

Nije teško pokazati da su na proizvoljnoj mreži L sledeći uslovi ekvivalentni:

(L7) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, za sve $x, y, z \in L$;
(L7′) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, za sve $x, y, z \in L$.

Mrežu koja zadovoljava bilo koji od tih uslova nazivamo *distributivnom mrežom*.

Neka je L ograničena mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Za element $y \in L$ kažemo da je *komplement* elementa $x \in L$ ako važi

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{i} \qquad x \vee y = 1.$$

U tom slučaju je i x komplement za y, tj. relacija "biti komplement" je simetrična. Ako je pri tome mreža L još i distributivna, tada se lako dokazuje da svaki element $x \in L$ može imati najviše jedan komplement, koji ćemo označavati sa x'.

Ograničenu distributivnu mrežu u kojoj svaki element ima dopunu nazivamo *Booleova algebra*. Preslikavanje $x \mapsto x'$ je unarna oparacija na L, i nazivamo je *operacija komplementacije*. Bulova algebra se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0 i 1.

Kako smo napred napomenuli, svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum, ali to ne mora da važi za beskonačne podskupove. Stoga za mrežu u kojoj svaki neprazan podskup ima supremum i infimum nazivamo *potpunom* ili *kompletnom mrežom*. Jasno, svaka takva mreža je ograničena. Podskup K potpune mreže L je *potpuna*(*kompletna*)*podmreža* od L ako se supremum i infumum (u L) svakog nepraznog podskupa od K nalaze u K.

Primer 1.3.1. Označimo sa $\mathscr{E}(A)$ skup svih relacija ekvivalencije na nepraznom skupu A. Taj skup je parcijalno uređen inkluzijom relacija, i u odnosu na to parcijalno uređenje on je potpuna mreža. Naime, dok je operacija preseka na $\mathscr{E}(A)$ presek dve relacije, operacija unije je određena drugačije, jer skupovna unija dve ili više relacija ekvivalencije ne mora biti relacija ekvivalencije. Neka je B proizvoljan neprazan podskup od $\mathscr{E}(A)$ i neka je $\langle B\rangle$ podpolugrupa polugrupe binarnih relacija na A generisana sa B. Tada je $\bigvee B$ jednako skupovnoj uniji svih relacija iz $\langle B\rangle$. Nula i jedinica u $\mathscr{E}(A)$ su redom Δ_A i ∇_A.

1.4. Mrežno uređeni monoidi i reziduirane mreže

U realnom, fizičkom svetu, često se nailazi na klase objekata kod kojih kriterijum pripadanja određenoj klasi nije precizno definisan. Zbog toga se osnovna ideja fazi skupova i fazi logike "suprotstavlja" tradiciji u nauci, tzv. bivalentnom načinu razmišljanja i rezonovanja, što je dovodi do formiranja novih modela stvarnosti. Iz navedenih razloga, struktura skupa istinitosnih vrednosti zahteva našu posebnu pažnju.

Osnovna ideja fazi skupova je gradacija pripadnosti, dok je osnovna ideja fazi logike gradacija istine, od potpune istine (1), do potpune neistine (0). Za tu gradaciju je potrebno da je struktura istinitosnih vrednosti $\mathscr{L}$ parcijalno uređena sa 0 i 1 kao najmanjim i najvećim elementom, tim redom. Osim toga, pretpostavlja se da za dve istinitosne vrednosti a i b, postoji istinitosna vrednost veća (manja) od obe. Na ovaj način prirodno dolazimo do zahteva za postojanjem supremuma (dualno infimuma) u istinitosnoj strukturi $\mathscr{L}$.

Iz pomenutih razloga uvodimo sledeću strukturu. *Mrežno uređeni monoid* ili *ℓ-monoid* [65, 66, 68, 99] je algebarska struktura $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet, 0, 1, e)$ takva da je

(LM1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1,

(LM2) $(L, \bullet, e)$ je monoid sa jedinicom e,

(LM3) $x \bullet 0 = 0 \bullet x = 0$, za svaki $x \in L$, (LM4) za sve $x, y, z \in L$ važi

$$x \bullet (y \vee z) = x \bullet y \vee x \bullet z \quad \text{i} \quad (x \vee y) \bullet z = x \bullet z \vee y \bullet z.$$

Ako je, pored toga, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža koja zadovoljava sledeće distributivne zakone,

(LM5) za sve $x \in L$, $\{x_i\} \subseteq L$

$$x \bullet (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (x \bullet x_i) \quad \text{i} \quad (\bigvee_{i \in I} x_i) \bullet x = \bigvee_{i \in I} (x_i \bullet x),$$

tada $\mathscr{L}$ zovemo *kvantal*. Ako distributivni zakoni (LM5) važe za prebrojive skupove $\{x_i\}$, tada $\mathscr{L}$ zovemo *prebrojivo mrežno uređeni monoid*.

Mrežno uređeni monoid $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet, 0, 1, e)$ je *integralni*, ako je $e = 1$, tj. ako je njegov najveći element jednak neutralu.

Operaciju $\bullet$ na mrežno uređenom monoidu zovemo *proizvod*. Lako se pokazuje da je proizvod izotona operacija u odnosu na relaciju uređenja mreže, tj. za sve $x, y, z \in L$ važi

$$x \leq y \Rightarrow x \bullet z \leq y \bullet z \quad \text{and} \quad z \bullet x \leq z \bullet y. \tag{1.4}$$

Primer 1.4.1. (i) Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ distributivna mreža. Tada je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \wedge, 0, 1, 1)$ integralni ℓ-monoid.

(ii) Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet, 0, 1, e)$ proizvoljan ℓ-monoid. Označimo sa $L(n)$ skup svih $n \times n$ matrica nad L. Proizvod na skupu $L(n)$, označen sa $\circ$, i supremum, označen sa $\vee$, definišemo na sledeći način: Za matrice, $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, $A \circ B = (c_{ij})$, $A \vee B = (d_{ij})$, gde je

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \bullet b_{kj}), \quad \text{a} \quad d_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij},$$

za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada $(L(n), \wedge, \vee, \circ, A_0, A_1, E)$ takođe jeste mrežno uređeni monoid, u kome je A_0 matrica tipa $n \times n$ čiji su svi elementi jednaki 0 (nula matrica), A_1 je matrica tipa $n \times n$, čiji su svi elementi jednaki 1, a jedinica je jedinična matrica E, čiji su svi elementi na dijagonali jednaki e, a ostali elementi jednaki 0. U ovom mrežno uređenom monoidu je $\circ$ nekomutativna operacija, čak i ako je proizvod na $\mathscr{L}$ komutativan.

U nastavku ovog odeljka ćemo više pažnje posvetiti užoj klasi mrežno uređenih monoida-reziduiranim mrežama. U nekim radovima reziduirane mreže se nazivaju integralni, komutativni, reziduirani ℓ-monoidi, dok neki autori naziv reziduirane mreže koriste za neke opštije strukture.

Reziduirana mreža je algebra $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ takva da

(RL1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1,

(RL2) $(L, \otimes, 1)$ je komutativan monoid sa jedinicom 1,

(RL3) operacije $\otimes$ i $\rightarrow$ obrazuju *adjungovani par*, tj. oni zadovoljavaju *svojstvo adjunkcije*: za sve $x, y, z \in L$,

$$x \otimes y \leqslant z \iff x \leqslant y \rightarrow z. \tag{1.5}$$

Ako je, pored toga, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, onda se $\mathscr{L}$ naziva *kompletna reziduirana mreža*. Operacije $\otimes$ (*množenje, proizvod*) i $\rightarrow$ (*reziduum* ili *implikacija*) predstavljaju modele konjunkcije i implikacije u odgovarajućoj logici, a supremum ($\bigvee$) i infimum ($\bigwedge$) modeliraju egzistencijalni i univerzalni kvantifikator, tim redom.

Na kompletnoj reziduiranoj mreži mogu se definisati i sledeće operacije:

$$\textit{bireziduum (ili biimplikacija)}: \quad x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x), \tag{1.6}$$

$$\textit{negacija}: \quad \neg a = a \rightarrow 0, \tag{1.7}$$

$$n\textit{-ti stepen}: \quad a^0 = 1 \;\text{ i }\; a^{n+1} = a^n \otimes a. \tag{1.8}$$

Operacija biimplikacije predstavlja model jednakosti istinitosnih vrednosti, dok je negacija model komplementa za datu istinitosnu vrednost.

Najviše proučavan i primenjivan skup istinitosnih vrednosti je realan, jedinični interval $[0, 1]$ sa

$$x \wedge y = \min(x, y), \quad x \vee y = \max(x, y),$$

i sa tri važna para adjungovanih operacija:

*Łukasiewicz*eve operacije: $x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$,
$x \rightarrow y = \min(1 - x + y, 1)$,

proizvod (*Goguen*ove) operacije: $x \otimes y = x \cdot y$,
$x \rightarrow y = 1$ ako je $x \leqslant y$ i $= y/x$ u protivnom,

*Gödel*ove operacije: $x \otimes y = \min(x, y)$,
$x \rightarrow y = 1$ ako je $x \leqslant y$ i $= y$ u protivnom.

Drugi važan skup istinitosnih vrednosti je skup $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, gde je $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$, na kome su adjungovane operacije definisane sa

$$a_k \otimes a_l = a_{\max(k+l-n,0)}, \qquad a_k \to a_l = a_{\min(n-k+l,n)}.$$

Specijalan slučaj ovih poslednjih algebri je dvoelementna Bulova algebra, na kojoj je zasnovana klasična logika. Jedini adjungovan par operacija na dvoelementnoj Bulovoj algebri sastoji se samo od klasičnih operacija konjunkcije i implikacije.

Sve tri strukture: Łukasiewiczeva, proizvod i Gödelova struktura predstavljaju reziduirane mreže indukovane takozvanim t-normama.

Binarnu operaciju $\otimes$ na $[0,1]$ koja je asocijativna, komutativna, monotona i za koju je 1 jedinični element nazivemo *t-norma.* Drugim rečima, t-norma je preslikavanje $\otimes : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ koje zadovoljava sledeće uslove:

$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$,

$x \otimes y = y \otimes x$,

$y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2$,

$x \otimes 1 = x$.

Opštije, algebra $([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ je kompletna reziduirana mreža ako i samo ako je $\otimes$ levo-neprekidna t-norma. Pod levo neprekidnom t-normom podrazumevamo t-normu za koju važi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \otimes b) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \otimes b,$$

i u tom slučaju je reziduum definisan sa $x \to y = \bigvee\{u \in [0,1] \mid u \otimes x \leqslant y\}$. Ako je t-norma $\otimes$ neprekidna kao realna funkcija sa dva argumenta, tada $\otimes$ zovemo naprekidna t-norma.

Navešćemo još neke važne istinitosne strukture, koje jesu reziduirane mreže, ali zadovoljavaju i neke dodatne uslove.

Reziduirana mreža $\mathscr{L}$ se naziva *Heytingova algebra* ako je $x \otimes y = x \wedge y$, za sve $x, y \in L$. Ako je, pored toga, $\mathscr{L}$ i kompletna mreža, onda je ona *kompletna Heytingova algebra*, a ako je parcijalno uređenje $\leqslant$ u $\mathscr{L}$ linearno, onda je $\mathscr{L}$ *linearno uređena Heytingova algebra*. Najvažniji primer linearno uređene, kompletne Heytingove algebre je realan, jedinični interval $[0,1]$ sa Gödelovim parom adjungovanih operacija, tj. sa standardnom minimum t-normom.

BL-algebra (*Basic Logic Algebra*) je reziduirana mreža koja zadovoljava uslov $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$ (*deljivost*) i $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ (*prelinearnost*).

Treba istaći da algebra $([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ jeste BL-algebra ako i samo ako je $\otimes$ neprekidna t-norma.

MV-algebra (*Multi Valued Algebra*) je BL-algebra koja dozvoljava dvostruku negaciju, tj. u kojoj je $a = \neg\neg a$, za svaki a.

P-algebra (*product algebra*) je BL-algebra koja zadovoljava uslov

$$(c \to 0) \to 0 \leqslant ((a \otimes c) \to (b \otimes c)) \to (a \to b) \quad \text{i} \quad a \wedge (a \to 0) = 0.$$

G-algebra (Gödelova algebra) je BL-algebra u kojoj je zadovoljen uslov $a \otimes a = a$ (idempotentnost).

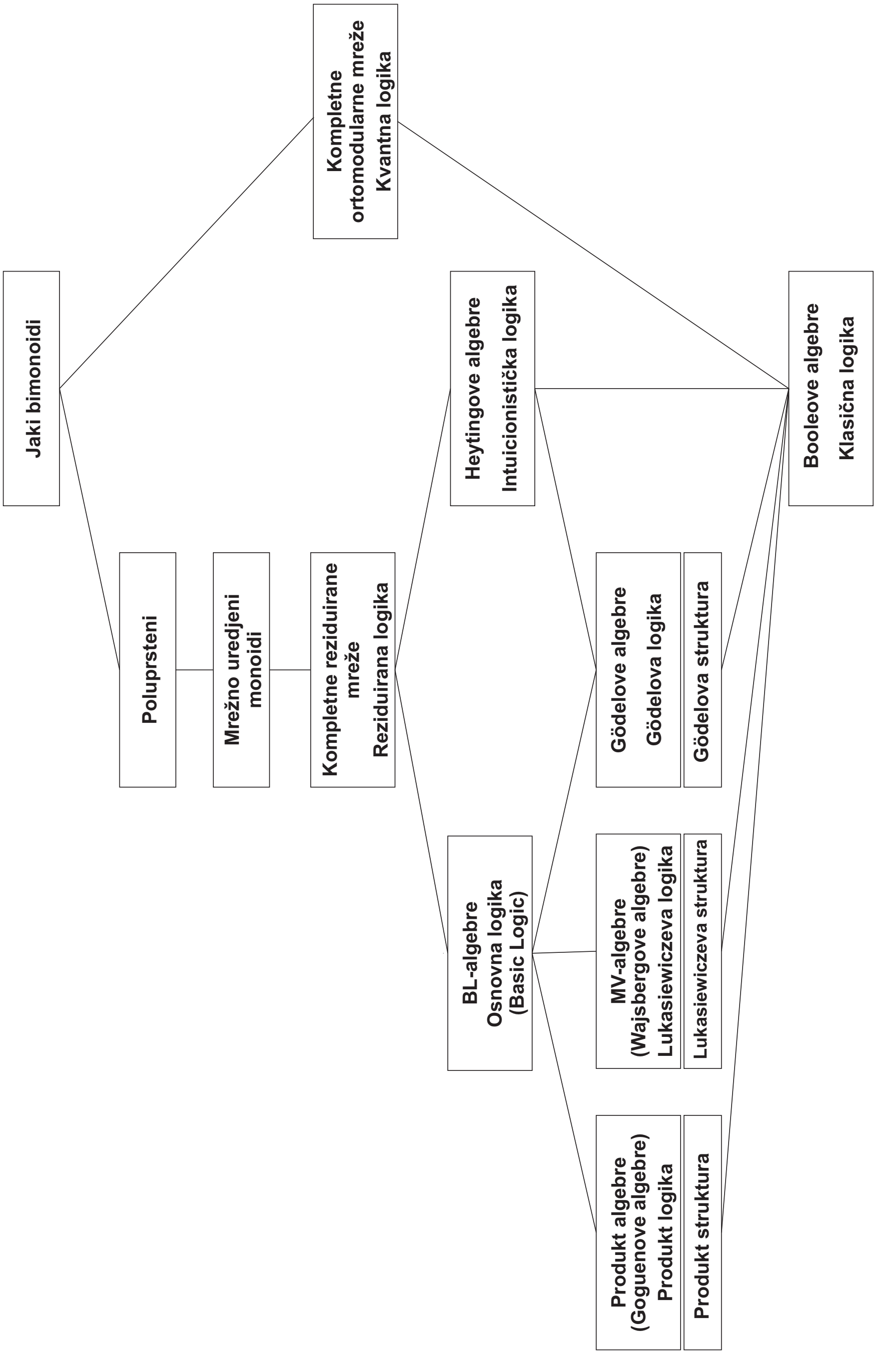
Očigledno, Booleova algebra je reziduirana mreža koja je i Heytingova algebra i MV-algebra.

Pregled najvažnijih tipova reziduiranih mreža, njihovih specijalnih podklasa i odgovarajućih logika dat je na Slici 1.1. Na slici su, poređenja radi, prikazane i ortomodularne mreže, na kojima je zasnovana kvantna logika.

Poluprsten je algebra $(L,+,\cdot,0,1)$, gde je $(L,+,0)$ komutativni monoid, $(L,\cdot,1)$ monoid, a $\cdot$ je distributivna operacija u odnosu na $+$ i $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$, za svako $x \in L$. Poluprsten $(L,+,\cdot,0,1)$ je *komutativan*, ako je $(L,\cdot,1)$ komutativan monoid. Ako je $\mathscr{L} = (L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ reziduirana mreža, tada njen redukt $\mathscr{S} = (L,\vee,\otimes,0,1)$ jeste komutativni poluprsten, zbog čega će nam ti poluprsteni i biti važni u daljem radu.

Poluprsten je *lokalno konačan* ako je svaki njegov konačno generisani podpoluprsten konačan, i slično, monoid je lokalno konačan ako je njegov proizvoljan konačno generisan podmonoid konačan. Lako se proverava da je poluprsten $\mathscr{S}$ lokalno konačan ako i samo ako su oba monoida $(L,\vee,0)$ i $(L,\otimes,1)$ lokalno konačni monoidi. Kako je $(L,\vee,0)$ polumreža, a svaka polumreža je lokalno konačna, poluprsten $\mathscr{S}$ je lokalno konačan ako i samo ako je monoid $(L,\otimes,1)$ lokalno konačan (vidi [38], [68]).

Slično, ako je svaka konačno generisana podalgebra reziduirane mreže $\mathscr{L}$ konačna, tada kažemo da je $\mathscr{L}$ *lokalno konačna*. Na primer, svaka Gödelova algebra, a time i svaka Gödelova struktura jeste lokalno konačna, dok proizvod struktura nije lokalno konačna.



Slika 1.1. Najznačajnije istinitosne strukture i odgovarajuće logike.

1.5. Osnovna svojstva ℓ-monoida i reziduiranih mreža

Navešćemo neka osnovna svojstva mrežno uređenih monoida i reziduiranih mreža. Većina ovih svojstava će biti korišćena u narednim glavama teze.

Propozicija 1.5.1. [68] *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid. Tada uslov* (1.4) *implicira uslov* (LM3) *i $x \bullet y \leq x \wedge y$, za sve $x, y \in L$.*

Teorema 1.5.1. *Svaka reziduirana mreža zadovoljava sledeće uslove:*

$$y \leqslant x \to (x \otimes y), \quad x \leqslant (x \to y) \to y, \tag{1.9}$$

$$x \otimes (x \to y) \leqslant y, \tag{1.10}$$

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1, \tag{1.11}$$

$$x \to x = 1, \quad x \to 1 = 1, \quad 1 \to x = x, \tag{1.12}$$

$$0 \to x = 1, \tag{1.13}$$

$$x \otimes 0 = 0, \tag{1.14}$$

$$x \otimes y \leqslant x, \quad x \leqslant y \to x, \tag{1.15}$$

$$x \otimes y \leqslant x \wedge y, \tag{1.16}$$

$$(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z), \tag{1.17}$$

$$(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant (x \to z), \tag{1.18}$$

$$x \to y \;\; \textit{je najveći element od} \;\; \{z \,|\, x \otimes z \leqslant y\}, \tag{1.19}$$

$$x \otimes y \;\; \textit{je najmanji element od} \;\; \{z \,|\, x \leqslant y \to z\}. \tag{1.20}$$

Naredna teorema ukazuje na izotonost operacije $\otimes$, kao i na izotonost operacije $\to$ po drugom i antitonost ove operacije po prvom argumentu.

Teorema 1.5.2. *U svakoj reziduiranoj mreži važi sledeće:*

$$y_1 \leqslant y_2 \quad \Rightarrow \quad x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2, \tag{1.21}$$

$$y_1 \leqslant y_2 \quad \Rightarrow \quad x \to y_1 \leqslant x \to y_2, \tag{1.22}$$

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \to y \leqslant x_1 \to y. \tag{1.23}$$

Navodimo još neka svojstva operacija u reziduiranoj mreži:

Teorema 1.5.3. *U svakoj reziduiranoj mreži zadovoljene su sledeće nejednakosti:*

$$x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z), \tag{1.24}$$

$$x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z), \tag{1.25}$$

$$x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z), \tag{1.26}$$

$$x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y), \tag{1.27}$$

$$x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z). \tag{1.28}$$

Naredna teorema daje odnos između operacija $\bigvee$ i $\bigwedge$, i operacija $\otimes$ i $\to$, nad nekom familijom elemenata reziduirane mreže.

Teorema 1.5.4. *Sledeća tvrđenja su tačna, za svaki indeksni skup I. Štaviše, ako u prve tri jednakosti leva strana ima smisla, onda i desna strana ima smisla.*

$$x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I} (x \otimes y_i), \tag{1.29}$$

$$x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I} (x \to y_i), \tag{1.30}$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to y = \bigwedge_{i\in I} (x_i \to y), \tag{1.31}$$

$$x \otimes \bigwedge_{i\in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i\in I} (x \otimes y_i), \tag{1.32}$$

$$\bigvee_{i\in I} (x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i\in I} y_i, \tag{1.33}$$

$$\bigvee_{i\in I} (x_i \to y) = \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \to y, \tag{1.34}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_i \to y_i) \leqslant \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigwedge_{i\in I} y_i\Big) \tag{1.35}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_i \to y_i) \leqslant \Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigvee_{i\in I} y_i\Big). \tag{1.36}$$

Teorema 1.5.5. *Sledeća tvrđenja predstavljaju još neka svojstva reziduiranih mreža:*

$$x \to y = ((x \to y) \to y) \to y, \tag{1.37}$$
$$x \otimes (x \to y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \otimes z = y), \tag{1.38}$$
$$x \to (x \otimes y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \to z = y), \tag{1.39}$$
$$(y \to x) \to x = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(z \to x = y), \tag{1.40}$$
$$(x \wedge y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \otimes y, \tag{1.41}$$
$$x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x), \tag{1.42}$$
$$x \wedge y \geqslant x \otimes (x \to y), \tag{1.43}$$
$$x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z). \tag{1.44}$$

Važi sledeća teorema:

Teorema 1.5.6. *Neka je* $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$ *struktura koja zadovoljava* (RL1) *i* (RL2) *iz definicije reziduiranih mreža i neka je* $\mathscr{L}$ *kompletna mreža. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja:*

(i) *Postoji* $\to$ *koje zadovoljava svojstvo adjunkcije u odnosu na* $\otimes$.

(ii) *Za sve* a, b, *skup* $\{c \mid a \otimes c \leqslant b\}$ *ima najveći element.*

(iii) *U* $\mathscr{L}$ *važi*
$$x \otimes \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \otimes y_i),$$
i za $x \to y = \bigvee \{z \mid x \otimes z \leqslant y\}$, $\otimes$ *i* $\to$ *su adjungovane operacije.*

Videćemo, dalje neka svojstva negacije u reziduiranoj mreži.

Teorema 1.5.7. *Negacija ima sledeća svojstva:*

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \tag{1.45}$$
$$x \otimes \neg x = 0, \tag{1.46}$$
$$x \leqslant \neg\neg x, \quad \neg x = \neg\neg\neg x, \tag{1.47}$$
$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \neg y \leqslant \neg z, \tag{1.48}$$
$$\neg\Big(\bigvee_{i \in I} x_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} \neg x_i, \tag{1.49}$$
$$\neg\Big(\bigwedge_{i \in I} x_i\Big) \geqslant \bigvee_{i \in I} \neg x_i. \tag{1.50}$$

Sledeća teorema pokazuje koja svojstva ima operacija bireziduuma.

Teorema 1.5.8. *Operacija bireziduuma ima sledeća svojstva:*

$$0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0, \quad 0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1, \tag{1.51}$$

$$x \leftrightarrow x = 1, \tag{1.52}$$

$$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x, \tag{1.53}$$

$$(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant x \leftrightarrow z, \tag{1.54}$$

$$x \leftrightarrow 1 = x, \quad x \leftrightarrow 0 = \neg x, \tag{1.55}$$

$$x \leftrightarrow y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \tag{1.56}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (y_1 \wedge y_2), \tag{1.57}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (y_1 \vee y_2), \tag{1.58}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \otimes x_2) \leftrightarrow (y_1 \otimes y_2), \tag{1.59}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (y_1 \to y_2), \tag{1.60}$$

$$x \leftrightarrow y = (x \vee y) \to (x \wedge y), \tag{1.61}$$

$$x \leftrightarrow y \leqslant x \otimes z \leftrightarrow y \otimes z, \tag{1.62}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigwedge_{i\in I} y_i\Big), \tag{1.63}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigvee_{i\in I} y_i\Big) \tag{1.64}$$

1.6. Fazi skupovi i fazi relacije

Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet, 0, 1, e)$ proizvoljan ℓ-monoid. *Fazi podskup* skupa A je svako preslikavanje iz A u L. *Krisp deo* fazi podskupa f je običan krisp podskup od A definisan sa $\widehat{f} = \{a \in A \,|\, f(a) = e\}$ (vidi [68]). Običan (krisp) podskup f skupa A možemo posmatrati kao fazi podskup od A čije vrednosti pripadaju skupu $\{0, e\} \subseteq L$, a koji je definisan sa $f(a) = e$, ako je $a \in f$ i $f(a) = 0$, u ostalim slučajevima. Takođe, $\widehat{f}$ možemo posmatrati i kao fazi podskup od A čije su vrednosti u skupu $\{0, e\}$, koji je definisan na gore opisani način.

Jednakost fazi podskupova f i g definisana je kao uobičajena jednakost preslikavanja. *Inkluzija* $f \le g$, fazi podskupova$f$ i g definiše se na sledeći način:

$$f \le g \quad \text{ako je} \quad f(x) \le g(x), \quad \text{za svaki} \quad x \in L.$$

Relacija $\leqslant$ jeste relacija poretka. Skup L^A svih fazi podskupova od A snabdeven relacijom $\leqslant$, čini distributivnu mrežu, u kojoj su presek (infimum)

$f \wedge g$ i unija (supremum) $f \vee g$ proizvoljnih fazi podskupova f i g od A jesu fazi podskupovi od A definisani sa

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x), \quad (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x).$$

Ako je, osim toga, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, tada je i L^A kompletna mreža, u kojoj su presek $\bigwedge_{i \in I} f_i$ i unija $\bigvee_{i \in I} f_i$ proizvoljnih familija $\{f_i\}_{i \in I}$ fazi podskupova od A definisani sa

$$\left(\bigwedge_{i \in I} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x), \qquad \left(\bigvee_{i \in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x).$$

Proizvod fazi podskupova$f, g \in A^L$, u oznaci $f \bullet g$ je fazi podskup od A definisan sa: $f \bullet g(x) = f(x) \bullet g(x)$, za svako $x \in A$. Razmotrićemo sada fazi relacije kao fazi podskupove od $A \times A$.

Fazi relacija na A je svako preslikavanje iz $A \times A$ u L, odnosno, svaki fazi podskup od $A \times A$, a jednakost, inkluzija, unija, presek i uređenje fazi relacija su definisani kao za fazi skupove. Za dve fazi relacije R i S na skupu A, njihova *kompozicija* je fazi relacija $R \circ S$ definisana sa:

$$(R \circ S)(a, b) = \bigvee_{c \in A} R(a, c) \bullet S(c, b), \tag{1.65}$$

za sve $x, y \in A$. Primetimo da na ℓ-monoidu $\mathscr{L}$ kompozicija fazi relacija ne mora da postoji. Naime, mrežno uređeni monoid $\mathscr{L}$ ne mora da sadrži uniju proizvoljne familije fazi podskupova skupa A, tj. mreža $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ ne mora da bude kompletna. Iz navedenih razloga, u daljem tekstu ovog odeljka ćemo smatrati da kompozicija proizvoljnih fazi podskupova postoji.

Označimo sa $\mathscr{R}(A)$ skup svih fazi relacija na skupu A. Za sve $P, Q, R \in \mathscr{R}(A)$ i proizvoljne $\{P_i\}_{i \in I}, \{Q_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{R}(A)$, važi sledeće:

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R), \tag{1.66}$$

$$P \leqslant Q \text{ povlači } P \circ R \leqslant Q \circ R \text{ i } R \circ P \leqslant R \circ Q. \tag{1.67}$$

Ako je, osim toga, $\mathscr{L}$ kvantal, tada je zadovoljeno:

$$P \circ (\bigvee_{i \in I} Q_i) = \bigvee_{i \in I} (P \circ Q_i), \quad (\bigvee_{i \in I} P_i) \circ Q = \bigvee_{i \in I} (P_i \circ Q) \tag{1.68}$$

$$P \circ (\bigwedge_{i \in I} Q_i) \leqslant \bigwedge_{i \in I} (P \circ Q_i), \quad (\bigwedge_{i \in I} P_i) \circ Q \leqslant \bigwedge_{i \in I} (P_i \circ Q). \tag{1.69}$$

Za fazi podskup f skupa A i fazi relaciju R na A, *kompozicije* $f \circ R$ i $R \circ f$ su fazi podskupovi od A definisani sa

$$(f \circ R)(a) = \bigvee_{b \in A} f(b) \bullet R(b,a), \quad (R \circ f)(a) = \bigvee_{b \in A} R(a,b) \bullet f(b), \qquad (1.70)$$

za proizvoljan $a \in A$. Konačno, za fazi podskupove f i g od A pišemo

$$f \circ g = \bigvee_{a \in A} f(a) \bullet g(a). \qquad (1.71)$$

Kompozicija fazi relacija asocijativna, a lako se proverava da važi i

$$(f \circ R) \circ S = f \circ (R \circ S), \quad (f \circ R) \circ g = f \circ (R \circ g), \qquad (1.72)$$

za proizvoljne fazi podskupove f i g od A, i fazi relacije R i S na A, što znači da se zagrade u (1.72) mogu izostaviti. Primetimo takođe da, ako je A konačan skup od n elemenata, fazi relacije R i S mogu da se posmatraju kao $n \times n$ fazi matrice nad $\mathscr{L}$ i $R \circ S$ je matrični proizvod, dok se $f \circ R$ može smatrati proizvodom $1 \times n$ matrce f i $n \times n$ matrice R, i $R \circ f$ je proizvod $n \times n$ matrice R i $n \times 1$ matrice f^t (transponovane matrice od f).

Za fazi relaciju R na A, fazi relacija R^n induktivno je definisana sa, $R^1 = R$, i $R^{n+1} = R^n \circ R$, za $n \in \mathbb{N}$. Takođe, za fazi podskup $f \in L^A$ i $n \in \mathbb{N}$, fazi podskup f^n definišemo na isti način.

Fazi relacija R na A je

(R) *refleksivna* (ili *fazi refleksivna*) ako je $R(a,a) = e$, za svaki $a \in A$;

(S) *simetrična* (ili *fazi simetrična*) ako je $R(a,b) = R(b,a)$, za sve $a, b \in A$;

(T) *tranzitivna* (ili *fazi tranzitivna*) ako je za sve $a, b, c \in A$ zadovoljeno

$$R(a,b) \bullet R(b,c) \leqslant R(a,c).$$

Jednostavno se pokazuje da je fazi relacija R tranzitivna ako i samo ako je

$$R^n \leq R, \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (1.73)$$

Takođe, za proizvoljnu refleksivnu fazi relaciju R i svaku fazi relaciju S na skupu A važi

$$S \leqslant S \circ R, \quad S \leqslant R \circ S. \qquad (1.74)$$

Ako je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, tada za fazi relaciju R na skupu A, fazi relacija R^∞ na A definisana sa

$$R^\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

je najmanja tranzitivna fazi relacija na A koja sadrži R. Fazi relaciju R^∞ zovemo *tranzitivno zatvorenje* od R.

Fazi relacija na A koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna je *fazi ekvivalencija*. Ako je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, tada je skup $\mathscr{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na A sa relacijom uređenja na skupu $\mathscr{R}(A)$, kompletna mreža, u kojoj je infimum obični presek fazi relacija, dok supremum u $\mathscr{E}(A)$ u opštem slučaju nije jednak uniji fazi relacija. Ovde je supremum u $\mathscr{E}(A)$ familije $\{E_i\}_{i\in I}$ fazi ekvivalencija E na A, definisana sa

$$E = \Big(\bigvee_{i\in I} E_i\Big)^\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigvee_{i\in I} E_i\Big)^n. \tag{1.75}$$

Za fazi ekvivalenciju E na A i $a \in A$ definišemo fazi podskup E_a od A sa $E_a(x) = E(a, x)$, za svaki $x \in A$. E_a zovemo *klasa fazi ekvivalencije* od E određena sa a. Skup $A/E = \{E_a \mid a \in A\}$ zovemo *faktor skup* od A u odnosu na E (vidi [6, 29]). Za fazi ekvivalenciju E na A, *indeks fazi ekvivalencije* E u oznaci $\mathrm{ind}(E)$, predstavlja kardinalni broj faktor skupa A/E.

Isti način označavanja koristićemo i za krisp ekvivalencije. Za ekvivlenciju π na A, odgovarajući faktor skup označavamo sa A/π, a klasu ekvivalencije elementa $a \in A$ označavamo sa π_a.

Fazi ekvivalencija E na skupu A je *fazi jednakost* ako za sve $x, y \in A$, iz $E(x, y) = e$ sledi $x = y$. Drugim rečima, E je fazi jednakost ako i samo ako je njen krisp deo $\widehat{E}$ krisp jednakost.

Sledeći rezultat daje važnu karakterizaciju fazi ekvivalencija i biće nam veoma koristan u daljem radu.

Lema 1.6.1. *Neka je E fazi ekvivalencija na skupu A i neka je $\widehat{E}$ njen krisp deo. Tada je $\widehat{E}$ krisp ekvivalencija na A i za sve $a, b \in A$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $E(a, b) = e$;

(ii) $E_a = E_b$;

(iii) $\widehat{E}_a = \widehat{E}_b$.

Iz tog razloga je $\mathrm{ind}(E) = \mathrm{ind}(\widehat{E})$.

Za fazi ekvivalenciju E na skupu A, na faktor skupu A/E definišemo fazi relaciju $\widetilde{E}$ sa

$$\widetilde{E}(E_x, E_y) = E(x, y),$$

za sve $x, y \in A$. Jednostavno se dokazuje da je $\widetilde{E}$ dobro definisana. Štaviše, $\widetilde{E}$ je fazi jednakost.

Refleksivnu i tranzitivnu fazi relaciju skupa A zovemo *fazi kvazi–uređenje*. U nekim izvorima kvazi–uređenja i fazi kvazi–uređenja nazvana su preduređenja i fazi preduređenja (engl. preordes) (vidi [22, 23, 54, 55]). Primetimo da je refleksivna fazi relacija R fazi kvazi–uređenje ako i samo ako je $R^2 = R$.

Ako je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, tada skup $\mathscr{Q}(A)$ svih fazi kvazi–uređenja na A, sa relacijom uređenja na skupu $\mathscr{R}(A)$ jeste kompletna mreža, u kojoj je infimum obični presek fazi relacija, dok supremum u $\mathscr{Q}(A)$, u opštem slučaju nije jednak uniji fazi relacija. Naime, supremum R familije $\{R_i\}_{i\in I}$ fazi kvazi–uređenja na A, možemo predstaviti sa

$$R = \left(\bigvee_{i\in I} R_i\right)^{\infty} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigvee_{i\in I} R_i\right)^{n}. \tag{1.76}$$

Ako je R fazi kvazi–uređenje na skupu A, tada fazi relacija E_R, definisana sa $E_R = R \wedge R^{-1}$, jeste fazi ekvivalencija na A. Fazi ekvivalenciju E_R zovemo *prirodna fazi ekvivalencija* fazi kvazi–uređenja R.

Fazi kvazi–uređenje R skupa A je *fazi uređenje*, ako za sve $a, b \in A$, iz $R(a, b) = R(b, a) = e$ sledi $a = b$, tj. ako prirodna fazi ekvivalencija E_R od R jeste fazi jednakost. Jasno je da fazi kvazi–uređenje R jeste fazi uređenje ako i samo ako krisp deo $\widehat{R}$ jeste krisp uređenje.

1.7. Fazi automati i fazi regularni izrazi

Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan ℓ-monoid. *Fazi automat* je trojka $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$, gde su A i X skupovi koje redom zovemo *skup stanja* i *ulazni alfabet*, a $\delta^A : A \times X \times A \mapsto L$ je fazi podskup od $A \times X \times A$, koji zovemo *funkcija fazi prelaza* ili samo *funkcija prelaza* fazi automata $\mathscr{A}$. Fazi automat koji ima konačan broj stanja zovemo *konačan fazi automat* (FFA). Kardinalnost fazi automata $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$, u oznaci $|\mathscr{A}|$, definišemo kao kardinalnost skupa stanja A tog fazi automata.

Preslikavanje δ^A možemo, na prirodan način, da produžimo do preslikavanja $\delta^A_* : A \times X^* \times A \mapsto L$ na sledeći način: Ako su $a, b \in A$, a $\varepsilon \in X^*$ je prazna reč, tada je

$$\delta^A_*(a, \varepsilon, b) = \begin{cases} e, & a = b \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \tag{1.77}$$

a ako je $u \in X^*$ i $x \in X$, tada je

$$\delta_*^A(a, ux, b) = \bigvee_{c \in A} \delta_*^A(a, u, c) \bullet \delta^A(c, x, b) \tag{1.78}$$

U daljem tekstu ćemo koristiti oznaku δ^A umesto δ_*^A.

Iz (LM4) i Teoreme 3.1 u [68] imamo

$$\delta^A(a, uv, b) = \bigvee_{c \in A} \delta^A(a, u, c) \bullet \delta^A(c, v, b), \tag{1.79}$$

za sve $a, b \in A$ i $u, v \in X^*$.

Za svaku reč $u \in X^*$ definišemo fazi relaciju $\delta_u^A \in L^{A \times A}$, sa

$$\delta_u^A(a, b) = \delta^A(a, u, b),$$

za sve $a, b \in A$. Fazi relaciju δ_u^A zovemo *fazi relacija prelaza* određena sa u. Za sve $u, v \in X^*$, jednakost (1.79) možemo zapisati

$$\delta_{uv}^A = \delta_u^A \circ \delta_v^A.$$

Fazi jezik je proizvoljan fazi podskup slobodnog monoida X^*. *Inicijalni fazi automat* je četvorka $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A)$, gde je (A, X, δ^A) fazi automat, a $\sigma^A \in L^A$ je fazi skup *inicijalnih (početnih) stanja*. *Fazi raspoznavač* definišemo kao petorku $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, gde je $(A, X, \delta^A, \sigma^A)$ je inicijalni fazi automat, a $\tau^A \in L^A$ je fazi skup *završnih (finalnih, terminalnih) stanja*.

Fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *raspoznaje (prihvata)* fazi jezik f, ako za svaku reč $u \in X^*$ važi

$$f(u) = \bigvee_{a, b \in A} \sigma^A(a) \bullet \delta^A(a, u, b) \bullet \tau^A(b), \tag{1.80}$$

što je ekvivalentno sa

$$f(u) = \sigma \circ \delta_u \circ \tau. \tag{1.81}$$

Fazi jezik f raspoznat fazi automatom $\mathscr{A}$ označavamo sa $L(\mathscr{A})$.

Fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ koji ima jedno krisp inicijalno stanje a_0 raspoznaje fazi jezik f, ako za svaku reč $u \in X^*$ važi

$$f(u) = \bigvee_{a \in A} \delta^A(a_0, u, a) \bullet \tau^A(a). \tag{1.82}$$

Analogno, fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, a_t)$, sa jednim krisp završnim stanjem a_t raspoznaje fazi jezik f, ako za svaku reč $u \in X^*$ imamo

$$f(u) = \bigvee_{a \in A} \sigma^A(a) \bullet \delta^A(a, u, a_t). \tag{1.83}$$

U daljem tekstu, obične krisp nedeterminističke raspoznavače (automate) ćemo posmatrati kao fazi raspoznavače. Naime, ako za dati krisp nedeterministički raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, krisp relacije prelaza δ_x^A posmatramo kao krisp fazi relacije, za svaki $x \in X$, a krisp skupove σ^A, τ^A kao krisp fazi skupove, sa vrednostima u skupu $\{0, e\} \subseteq L$, tada je $\mathscr{A}$ fazi raspoznavač.

Reverzni fazi automat fazi automata $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ je fazi automat $\bar{\mathscr{A}} = (A, X, \bar{\delta}^A)$, sa funkcijom fazi prelaza definisanom sa

$$\bar{\delta}^A(a, x, b) = \delta^A(b, x, a), \tag{1.84}$$

za sve $a, b \in A$ i $x \in X$. *Reverzni fazi raspoznavač* fazi raspoznavača $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ je fazi raspoznavač $\bar{\mathscr{A}} = (A, X, \bar{\delta}^A, \bar{\sigma}^A, \bar{\tau}^A)$, sa funkcijom fazi prelaza $\bar{\delta}^A$ definisanom sa (1.84) i fazi skupovima inicijalnih i završnih stanja definisanim sa

$$\bar{\sigma}^A = \tau^A \ \text{ i } \ \bar{\tau}^A = \sigma^A.$$

Fazi automati $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ i $\mathscr{A}' = (A', X, \delta^{A'})$ su *izomorfni* ako postoji bijekcija $\phi : A \to A'$ za koju je

$$\delta^A(a, x, b) = \delta^{A'}(\phi(a), x, \phi(b)), \tag{1.85}$$

za sve $a, b \in A$ i $x \in X$. Jednostavno se proverava da u tom slučaju važi $\delta_*^A(a, u, b) = \delta_*^{A'}(\phi(a), u, \phi(b))$, za sve $a, b \in A$ i $u \in X^*$. Slično, fazi raspoznavači $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathscr{A}' = (A', X, \delta^{A'}, \sigma^{A'}, \tau^{A'})$ su *izomorfni* ako postoji bijekcija $\phi : A \to A'$ za koju je zadovoljeno (1.85), i $\sigma^A(a) = \sigma^{A'}(\phi(a))$ i $\tau^A(a) = \tau^{A'}(\phi(a))$, za svaki $a \in A$.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ proizvoljan fazi automat i neka je E proizvoljna fazi ekvivalencija na A. Definišimo fazi funkciju prelaza

$$\delta^{A/E} : A/E \times X \times A/E \to L \ \text{ sa}$$

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = \bigvee_{a', b' \in A} E(a, a') \bullet \delta(a', x, b') \bullet E(b', b) \tag{1.86}$$

što je ekvivalentno sa,

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = (E \circ \delta_x \circ E)(a, b) = E_a \circ \delta_x \circ E_b, \tag{1.87}$$

za sve $a, b \in A$ i $x \in X$. Jasno, $\delta^{A/E}$ je dobro definisana i $\mathscr{A}_E = (A/E, X, \delta^{A/E})$ je fazi automat, koga zovemo *faktor fazi automat* ili *kvocijent fazi automat* od $\mathscr{A}$ u odnosu na E.

Ako je, osim toga, $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, tada definišemo fazi skup $\sigma^{A/E} \in L^{A/E}$ inicijalnih stanja i fazi skup $\tau^{A/E} \in L^{A/E}$ završnih stanja sa

$$\sigma^{A/E}(E_a) = \bigvee_{a' \in A} \sigma^A(a') \bullet E(a', a) = (\sigma^A \circ E)(a) = \sigma^A \circ E_a, \tag{1.88}$$

$$\tau^{A/E}(E_a) = \bigvee_{a' \in A} \tau^A(a') \bullet E(a', a) = (\tau^A \circ E)(a) = \tau^A \circ E_a, \tag{1.89}$$

za svaki $a \in A$. Jasno, $\sigma^{A/E}$ i $\tau^{A/E}$ su dobro definisani. Štaviše $\mathscr{A}_E = (A/E, \sigma^{A/E}, X, \delta^{A/E}, \tau^{A/E})$ jeste fazi raspoznavač, koga zovemo *faktor fazi raspoznavač* od $\mathscr{A}$ u odnosu na E.

Neka je f proizvoljan fazi jezik i $\lambda \in L$. *Skalarni proizvod* skalara λ i fazi jezika f, u oznaci $\lambda \bullet f$, jeste fazi jezik definisan sa

$$(\lambda \bullet f)(u) = \lambda \bullet f(u),$$

za svaku reč $u \in X^*$. *Unija* (*supremum*) $f \vee g$ fazi jezika f i g definisan je kao unija fazi podskupova f i g. *Proizvod* (*konkatenacija*) $f \circ g$ fazi jezika f i g je definisana sa

$$(f \circ g)(u) = \bigvee_{u = vw} f(v) \bullet g(w).$$

Kleenejevo zatvorenje od f, označeno sa f^*, definisano je sa

$$f = f_\varepsilon \vee \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n \right),$$

gde je f_ε karakteristična funkcija prazne reči ε, tj.,

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} e, & u = \varepsilon \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \tag{1.90}$$

Propozicija 1.7.1. [68] *Ako je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid, tada za svaki fazi jezik f Kleenejevo zatvorenje f^* je dobro definisano.*

Familija *fazi regularnih izraza* $\mathscr{LR}$ ili jednostavnije *fazi regularni izrazi* nad konačnim alfabetom X induktivno je definisana na sledeći način (vidi [66, 68]):

(i) $\emptyset \in \mathscr{LR}$;
(ii) $\varepsilon \in \mathscr{LR}$;
(iii) $x \in \mathscr{LR}$, za sve $x \in X$;
(iv) $(\lambda\alpha) \in \mathscr{LR}$, za sve $\lambda \in L$ i $\alpha \in \mathscr{LR}$;
(v) $(\alpha_1 + \alpha_2) \in \mathscr{LR}$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{LR}$;
(vi) $(\alpha_1\alpha_2) \in \mathscr{LR}$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{LR}$;
(vii) $(\alpha^*) \in \mathscr{LR}$, za sve $\alpha \in \mathscr{LR}$;
(viii) Svaki fazi regularan izraz dobijen primenom (i) – (viii) konačan broj puta.

Za proizvoljan $\alpha \in \mathscr{LR}$, sa $\|\alpha\|$ označavamo fazi jezik rekurzivno definisan na sledeći način (vidi [66, 68]):

(i) Za $\alpha \in X \cup \{\emptyset, \varepsilon\}, \|\alpha\| = f_\alpha$, gde je f_α karakteristična funkcija od α definisana sa
$$f_\alpha(u) = \begin{cases} e, & u = \alpha \\ 0, & \text{inače} \end{cases};$$
(ii) $\|\lambda\alpha\| = \lambda \bullet \|\alpha\|$ za sve $\lambda \in L$ i $\alpha \in \mathscr{LR}$;
(iii) $\|(\alpha_1 + \alpha_2)\| = \|\alpha_1\| \vee \|\alpha_2\|$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{LR}$;
(iv) $\|(\alpha_1\alpha_2)\| = \|\alpha_1\| \circ \|\alpha_2\|$, za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{LR}$;
(v) $\|(\alpha^*)\| = \|\alpha\|^*$, za sve $\alpha \in \mathscr{LR}$.

Sa $|\alpha|$ označavamo *dužinu* fazi regularnog izraza α, koja se definiše sa $|\alpha| = |\alpha|_X + n$, gde je n broj skalara u α. Za fazi regularan izraz α, fazi jezik $\|\alpha\|$ zovemo *fazi jezik definisan pomoću fazi regularog izraza* α. Poznato je (vidi [65, 66]) da se fazi jezik može definisati pomoću fazi regularog izraza ako i samo ako se može raspoznati nekim konačnim fazi raspoznavačem.

Glava 2

Redukcija pomoću fazi ekvivalencija

Desno invarijantne ekvivalencije uveli su Ilie i Yu u [51], kao alat koji se može veoma uspešno koristiti za redukciju nedeterminističkih automata. Desno invarijantne ekvivalencije su potom izučavane u [15, 23, 53, 54, 55], gde su pomoću njih dobijeni različiti metodi redukcije nedeterminističkih automata. U [51, 53] je opisan postupak za izračunavanje najveće desno invarijantne ekvivalencije na nedeterminističkom automatu u polinomialnom vremenu. Taj algoritam je popravljen u [54], korišćenjem čuvenog algoritma Paigea i Tarjana [85]. Takođe je pokazano da se pomoću desno invarijantih ekvivalencija može opisati veza između nedeterminističkih automata konstruisanih iz regularnih izraza. Naime, dokazano je da su automati parcijalnih izvoda i follow automati datog regularnog izraza faktor automati pozicionih automata u odnosu na desno invarijantne ekvivalencije ([24, 25, 50, 53, 52]). Treba istaći da su desno i levo invarijantne ekvivalencije blisko povezane sa konceptom direktnih i povratnih bisimulacija (engl. forward i backward). Direktne i povratne bisimulacije su relacije ekvivalencije korišćene ne samo u redukciji težinskih automata ([12, 43, 44]), već i u mnogim drugim oblastima matematike i informatike, kao što su modalna logika, proveravanje modela, teorija konkurencije, teorija skupova, formalna verifikacija, itd.

Fazi automati su uopštenje nedeterminističkih automata tako da su problemi minimizacije i redukcije prisutni i u radu sa konačnim fazi automatima. U svim prethodnim radovima u ovoj oblasti ([5, 27, 64, 76, 84, 90]), razmatrana je redukcija fazi automata isključivo pomoću krisp ekvivalencija. U ovoj glavi je pokazano da je moguće izvršiti redukciju fazi automata i pomoću fazi ekvivalencija. Štaviše, dokazano je da se korišćenjem fazi ekvivalencija može postići bolja redukcija fazi automata, odnosno dobiti manji fazi automati. Polazeći od proizvoljne fazi ekvivalencije E, na skupu stanja A, fazi automata (raspoznavača) $\mathscr{A}$, konstruišemo faktor fazi automat (raspoznavač) $\mathscr{A}/E$ u odnosu na E. Međutim, ukoliko fazi ekvivalenciji E nisu nametnuti dodatni uslovi, faktor fazi automat (raspoznavač) $\mathscr{A}/E$ se neće ponašati kao i polazni fazi automat (raspoznavač) $\mathscr{A}$. Recimo, fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}/E$, ne moraju da budu ekvivalentni. Ovde ćemo pokazati da su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}/E$ ekvivalentni ako i samo ako je E rešenje izvesnog sistema fazi relacijskih jednačina. Ovaj sistem je nazvan *opši sistem*. Opšti sistem je rešiv na skupu $\mathscr{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na A, jer ima bar jedno rešenje, a to je identička relacija na skupu A. Naš cilj je je da na skupu $\mathscr{E}(A)$ pronađemo najveće moguće rešenje opšteg sistema, kako bismo dobili najbolju moguću redukciju fazi automata $\mathscr{A}$. Ipak, s obzirom da se opšti sistem sastoji od beskonačno mnogo jednačina, nalaženje njegovih netrivijalnih rešenja može biti težak zadatak. Iz navedenih razloga, naša namera je da se pozabavimo rešavanjem određenih sistema koji se sastoje iz konačno mnogo fazi jednačina, čija rešenja su ujedno i rešenja opšteg sistema.

U Odeljku 2.2. ćemo razmatrati sistem oblika $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, čija ćemo rešenja u $\mathscr{E}(A)$ nazvati desno invarijantne fazi ekvivalencije. Rešenja dualniog sistema $E \circ \delta_x^A \circ E = E \circ \delta_x^A$, na skupu $\mathscr{E}(A)$, ćemo nazvati levo invarijantne fazi ekvivalencije. Pokazaćemo da su desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije direktna uopštenja desno i levo invarijantnih krisp ekvivalencija na nedeterminističkim automatima. Takođe ćemo pokazati i da su kongruencije na fazi automatima, uvedene u radu T. Petković [90], desno invarijantne krisp ekvivalencije fazi automata. Primerom 2.2.2 pokazaćemo da najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija vrši bolju redukciju fazi automata od najveće desno invarijantne krisp ekvivalencije na tom fazi automatu. Dalje, dokazaćemo da je skup desno invarijantnih fazi ekvivalencija na fazi automatu $\mathscr{A}$ kompletna mreža (Teorema 2.2.2), te da postoji najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija od $\mathscr{A}$. To znači da za svaki fazi automat $\mathscr{A}$ postoji najbolja redukcija pomoću desno invarijantnih fazi ekvivalencija i da je za izvršenje takve redukcije potrebno konstruisati najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju od $\mathscr{A}$. U ovom odeljku će biti dat postupak za konstrukciju najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije na $\mathscr{A}$ koji daje rezultate kada funkcije fazi prelaza od $\mathscr{A}$ uzimaju vrednosti u lokalno konačnoj reziduiranoj mreži $\mathscr{L}$ (Teorema 2.2.3). Pokazano je (Primer 2.2.1) da data procedura ne mora da dâ rezultate ako $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna. Teoremom 2.2.5 ćemo okarakterisati najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}$, kada su nad reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$ zadovoljeni izvesni distributivni zakoni. Kako su pomenuti zakoni zadovoljeni za svaku neprekidnu t-normu na realnom, jediničnom intervalu, tj. za svaku BL-algebru na realnom, jediničnom intervalu, Teorema 2.2.5 važi za Łukasiewiczevu, Goguenovu (proizvod) i Gödelovu strukturu.

U Odeljku 2.3. pokazano je da faktor fazi automat u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju dalje ne može biti redukovan pomoću desno invarijantnih fazi ekvivalencija, ali da, u opštem slučaju, može biti redukovan pomoću najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije. Ovo nas dovodi do koncepta naizmeničnih redukcija, gde fazi automat naizmenično redukujemo pomoću njegove najveće desno invarijantne, a potom pomoću njegove najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije, i tako redom ili obratno. Naizmenična redukcija koja počinje desnom redukcijom je nazvana naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija, a ona koja počinje levom redukcijom se prirodno zove naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija. Naizmeničnom redukcijom konačnog fazi automata $\mathscr{A}$ broj stanja dobijenih automata prestaje da opada posle konačnog broja koraka. Poslednji fazi automat u tom nizu zovemo naizmenični redukt od $\mathscr{A}$. Međutim, u opštem slučaju ne postoji kriterijum kojim je moguće odrediti kraj naizmenične redukcije, tj. kada smo stigli do naizmeničnog redukta. Štaviše, Primer 2.3.2 pokazuje da naizmeničnom $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcijom fazi automata možemo da dobijemo fazi automate sa različitim brojem stanja. Isti primer pokazuje i da najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$- i najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija mogu da imaju različite dužine. Takođe je nepoznanica to koja od dve naizmenične redukcije daje bolje rezultate.

Podsetimo da su Ilie i Yu u [51, 53] pokazali da naizmeničnom redukcijom nedeterminističkog automata broj njegovih stanja može biti eksponencijalno smanjen, dok takav rezultat ne može biti dobijen redukcijom pomoću desno (levo) invarijantnih krisp ekvivalencija.

U poslednjem odeljku ove glave proučavamo specijalne tipove desno i levo invarijantnih ekvivalencija, koje smo nazvali jako desno invarijantne i jako levo invarijantne fazi ekvivalencije. Dve su osnovne prednosti jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija nad desno invarijantnim fazi ekvivalencijama. Pre svega, Teorema 2.4.2 daje efektivan postupak za izračunavanje najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije. Ovaj postupak se može primeniti u proizvoljnoj kompletnoj reziduiranoj mreži. Izračunavanje jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija je direktno, bez prethodnog formiranja niza fazi ekvivalencija. I pored ovoga, redukcija najvećom desno invarijantnom fazi ekvivalencijom je bolja od redukcije najvećom jakom desno invarijantnom fazi ekvivalencijom (Primer 2.4.1). Štaviše, faktor fazi automat u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju je desno redukovan, dok faktor fazi automat u odnosu na najveću jako desno invarijantnu fazi ekvivalenciju, u opštem slučaju, nije jako desno redukovan tako da ga je moguće opet redukovati pomoću jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija (Primer 2.4.2). Teoremom 2.4.6 dat je efektivan postupak kojim možemo da odlučimo da li je redukcija jako desno invarijantnim fazi ekvivalencijama završena.

2.1. Faktor fazi automati i fazi relacijske jednačine

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Podsetimo da smo sa $\mathscr{A}/E = (A/E, X, \delta^{A/E})$ označili faktor fazi automat od $\mathscr{A}$ u odnosu na E. Podsetimo da je funkcija prelaza ovog fazi automata definisana sa

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = \bigvee_{a',b' \in A} E(a, a') \otimes \delta(a', x, b') \otimes E(b', b) \tag{2.1}$$

tj.,

$$\delta^{A/E}(E_a, x, E_b) = (E \circ \delta_x^A \circ E)(a, b) = E_a \circ \delta_x^A \circ E_b, \tag{2.2}$$

za sve $a, b \in A$ i $x \in X$.

Sledeća teorema se može posmatrati kao verzija poznate Druge teoreme o izomorfizmu univerzalnih algebri (cf. [13], §2.6), ali primenjena na fazi automate.

Teorema 2.1.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka su E i F fazi ekvivalencije na $\mathscr{A}$ takve da je $E \leqslant F$. Tada fazi relacija F/E na faktor fazi automatu $\mathscr{A}/E = (A/E, X, \delta^{A/E})$ definisana sa*

$$F/E(E_a, E_b) = F(a, b), \qquad \textit{za sve } a, b \in A, \tag{2.3}$$

jeste fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$ i faktor fazi automati $(\mathscr{A}/E)/(F/E)$ i $\mathscr{A}/F$ su izomorfni.

Dokaz. Neka su $a, a', b, b' \in A$ elementi takvi da je $E_a = E_{a'}$ i $E_b = E_{b'}$, tj. $E(a, a') = E(b, b') = 1$. Kako je $E \leqslant F$, imamo $F(a, a') = F(b, b') = 1$, što povlači $F(a, b) = F(a', b')$. Dakle, F/E je dobro definisana fazi relacija. Jednostavno se proverava da je F/E fazi ekvivalencija.

Jednostavnosti radi stavimo da je $F/E = Q$. Definišimo preslikavanje $\phi : A/F \to (A/E)/Q$ sa

$$\phi(F_a) = Q_{E_a}, \qquad \text{za svaki } a \in A.$$

Prema Lemi 1.6.1, za proizvoljne $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned} F_a = F_b \;\Leftrightarrow\;\; & F(a,b) = 1 \;\Leftrightarrow\; Q(E_a, E_b) = 1 \\ \Leftrightarrow\;\; & Q_{E_a} = Q_{E_b} \;\Leftrightarrow\; \phi(F_a) = \phi(F_b), \end{aligned}$$

odakle sledi da je ϕ dobro definisano i injektivno preslikavanje. Jasno je da je ϕ i sirjektivno preslikavanje. Dakle, ϕ je bijekcija iz A/F na $(A/E)/Q$.

Kako $E \leqslant F$ povlači $E \circ F = F \circ E = F$, za sve $a, b \in A$ i $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned} \delta_x^{A/Q}(\phi(F_a), \phi(F_b)) &= \delta_x^{A/Q}(Q_{E_a}, Q_{E_b}) = (Q \circ \delta_x^{A/E} \circ Q)(E_a, E_b) \\ &= \bigvee_{c,d \in A} Q(E_a, E_c) \otimes \delta_x^{A/E}(E_c, E_d) \otimes Q(E_d, E_b) \\ &= \bigvee_{c,d \in A} F(a,c) \otimes (E \circ \delta_x^A \circ E)(c,d) \otimes F(d,b) \\ &= (F \circ E \circ \delta_x^A \circ E \circ F)(a,b) = (F \circ \delta_x^A \circ F)(a,b) \\ &= \delta_x^F(F_a, F_b). \end{aligned}$$

Dakle, ϕ je izomorfizam fazi automata $\mathscr{A}/F$ na fazi automat $(\mathscr{A}/E)/(F/E)$. $\square$

Primetimo da ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i ako su E, F i G fazi ekvivalencije na $\mathscr{A}$ takve da je $E \leqslant F$ i $E \leqslant G$, tada je

$$F \leqslant G \;\Leftrightarrow\; F/E \leqslant G/E, \tag{2.4}$$

odakle sledi da preslikavanje $\Phi : \mathscr{E}_E(A) = \{F \in \mathscr{E}(A) \mid E \leqslant F\} \to \mathscr{E}(A/E)$, definisano sa $\Phi : F \mapsto F/E$, jeste injektivno.

Potsetimo da za fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, \sigma^A, X, \delta^A, \tau^A)$ i proizvoljnu fazi ekvivalenciju E, faktor fazi raspoznavač od $\mathscr{A}$ u odnosu na E, označavamo sa $\mathscr{A}/E = (A/E, \sigma^{A/E}, X, \delta^{A/E}, \tau^{A/E})$.

Primetimo da je fazi jezik $L(\mathscr{A}/E)$ raspoznat faktor fazi raspoznavačem $\mathscr{A}/E$ dat sa

$$L(\mathscr{A}/E)(u) = \sigma^A \circ E \circ \delta_{x_1}^A \circ E \circ \delta_{x_2}^A \circ E \circ \cdots \circ E \circ \delta_{x_n}^A \circ E \circ \tau^A,$$

dok je fazi jezik $L(\mathscr{A})$ raspoznat fazi raspoznavačem $\mathscr{A}$ dat sa

$$L(\mathscr{A})(u) = \sigma^A \circ \delta_{x_1}^A \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \tau^A,$$

za svaku reč $u = x_1 x_2 \dots x_n \in X^*$, gde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Dakle, fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ i faktor fazi raspoznavač $\mathscr{A}/E$ su ekvivalentni, tj. raspoznaju isti fazi jezik, ako i samo ako fazi ekvivalencija E jeste rešenje sistema fazi relacijskih jednačina

$$\sigma^A\circ\delta^A_{x_1}\circ\delta^A_{x_2}\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ\tau^A=\sigma^A\circ E\circ\delta^A_{x_1}\circ E\circ\delta^A_{x_2}\circ E\circ\cdots\circ E\circ\delta^A_{x_n}\circ E\circ\tau^A,\quad (2.5)$$

za svaki $n\in\mathbb{N}$ i $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$. U daljem tekstu ćemo sistem (2.5) nazivati *opšti sistem*.

Opšti sistem ima najmanje jedno rešenje u skupu $\mathscr{E}(A)$, identičku relaciju na skupu A. To rešenje ćemo nazivati *trivijalno rešenje*. Da bismo postigli što bolju redukciju fazi automata $\mathscr{A}$, potrebno je da nađemo najveće rešenje opšteg sistema, ako ono postoji, ili da nađemo što je moguće veće rešenje tog sistema. Međutim, opšti sistem se sastoji od beskonačno mnogo jednačina, i nalaženje njegovih netrivijalnih rešenja može biti veoma teško. Iz tog razloga posvetićemo pažnju rešavanju nekih specijalnih slučajeva opšteg sistema. Sa praktičnog stanovišta, sistemi koje ćemo razmatrati treba da se sastoje iz konačno mnogo jednačina.

Potsetimo se da je fazi funkcija prelaza $\delta^{A/E}$ definisana sa

$$\delta^{A/E}(E_a,x,E_b)=(E\circ\delta^A_x\circ E)(a,b),$$

za sve $a,b\in A$ i $x\in X$. Za sve $a,b\in A$ i $u=x_1x_2\cdots x_n\in X^*$, gde $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$, imamo da je

$$\delta^{A/E}(E_a,u,E_b)=(E\circ\delta^A_{x_1}\circ E\circ\delta^A_{x_2}\circ E\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ E)(a,b),\qquad (2.6)$$

ali, u opštem slučaju, $\delta^{A/E}(E_a,u,E_b)$ nije jednako sa $(E\circ\delta^A_u\circ E)(a,b)$. Naime, imamo da je $\delta^{A/E}(E_a,u,E_b)=(E\circ\delta^A_u\circ E)(a,b)$ za sve $a,b\in A$ i $u=x_1x_2\cdots x_n\in X^*$, gde je $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$, ako i samo ako je E rešenje sistema fazi relacijskih jednačina

$$E\circ\delta^A_{x_1}\circ E\circ\delta^A_{x_2}\circ E\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ E=E\circ\delta^A_{x_1}\circ\delta^A_{x_2}\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ E,\qquad (2.7)$$

za sve $n\in\mathbb{N}$ i $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$. U ovom slučaju kažemo da je fazi automat $\mathscr{A}/E$ *saglasan* sa $\mathscr{A}$.

Ako je $\mathscr{A}$ fazi raspoznavač, korišćenjem sistema (2.7) dobijamo sledeću instancu opšteg sistema

$$\begin{aligned}&E\circ\delta^A_{x_1}\circ E\circ\delta^A_{x_2}\circ E\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ E=E\circ\delta^A_{x_1}\circ\delta^A_{x_2}\circ\cdots\circ\delta^A_{x_n}\circ E,\\&\sigma^A\circ E=\sigma^A,\\&\tau^A\circ E=\tau^A,\end{aligned}\qquad (2.8)$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Drugim rečima, svako rešenje sistema (2.8) je rešenje opšteg sistema.

Neka je f fazi podskup skupa A i neka je E fazi ekvivalencija na A. Kažemo da je f *ekstenzionalan* u odnosu na E ako za sve $x, y \in A$ važi

$$f(x) \otimes E(x,y) \leqslant f(y). \tag{2.9}$$

Iz (2.9), simetričnosti E i svojstva adjunkcije, f je ekstenzionalan u odnosu na E ako i samo ako je

$$E(x,y) \leqslant f(x) \leftrightarrow f(y), \tag{2.10}$$

za sve $x, y \in A$ (cf. [35, 36, 59, 60, 61]). Ako je E_f fazi ekvivalencija na A definisana sa $E_f(x,y) = f(x) \leftrightarrow f(y)$, za sve $x, y \in A$, tada je f ekstenzionalan u odnosu na E ako i samo ako je $E \leqslant E_f$, tj. ako je E_f najveća fazi ekvivalencija na A u odnosu na koju je f ekstenzionalan. Primetimo da je uslov (2.9) ekvivalentan uslovu $f \circ E \leqslant f$, pa zbog refleksivnosti fazi ekvivalencije E, to je ekvivalentno sa $f \circ E = f$.

Dakle, jednačine $\sigma^A \circ E = \sigma^A$ i $\tau^A \circ E = \tau^A$ se jednostavno rešavaju. Naime, E je rešenje jednačine $\sigma^A \circ E = \sigma^A$ ($\tau^A \circ E = \tau^A$) ako i samo ako je $E \leqslant E_\sigma$ ($E \leqslant E_\tau^A$), i dakle E_σ (E_τ) je najveće rešenje te jednačine. Dakle, rešenja sistema (2.8) su upravo upravo ona rešenja sistema (2.7) koja su sadržana u $E_\sigma \wedge E_\tau$. Iz tog razloga, u daljem tekstu ćemo pažnju posvetiti sistemu (2.7) i nekim njegovim instancama.

Primetimo takođe da jednačine $\sigma^A \circ E = \sigma^A$ i $\tau^A \circ E = \tau^A$ imaju prirodnu interpretaciju. Grubo govoreći, $E(a,b) \leqslant E_\sigma(a,b)$ i $E(a,b) \leqslant E_\tau(a,b)$, za sve $a, b \in A$, znači da E ne spaja inicijalna i neinicijalna stanja, a takođe ni završna i nezavršna stanja.

2.2. Desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Ako fazi ekvivalencija E na A jeste rešenje sistema

$$E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E, \quad x \in X, \tag{2.11}$$

tada je nazivemo *desno invarijantna* fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$, a ako je rešenje sistema

$$E \circ \delta_x^A \circ E = E \circ \delta_x^A, \quad x \in X, \tag{2.12}$$

tada je nazivamo *levo invarijantna* fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Krisp ekvivalencija na A koja je rešenje (2.11) zove se *desno invarijantna ekvivalencija* na $\mathscr{A}$, a krisp ekvivalencija koja je rešenje (2.12) se zove *levo invarijantna ekvivalencija* na $\mathscr{A}$.

U Napomeni 2.2.1 ćemo pokazati da su desno invarijantne fazi ekvivalencije direktno uopštenje desno invarijantnih ekvivalencija nedeterminističkih automata, koje su izučavali Ilie, Yu i ostali u [15, 23, 51, 53, 54, 55], ili dobro-ponašajućih ekvivalencija (engl. well-behaved) koje je izučavao Calude [14]. Štaviše, u toj napomeni ćemo pokazati da su kongruencije fazi automata, koje uvela Petković u [90], upravo desno invarijantne ekvivalencije fazi automata, prevedeno na terminologiju koju koristimo u ovoj disertaciji.

Jednostavno se pokazuje da je E levo invarijantna fazi ekvivalencija na fazi automatu $\mathscr{A}$ ako samo ako E jeste desno invarijantna fazi ekvivalencija na reverznom automata $\bar{\mathscr{A}}$ od $\mathscr{A}$. Zato ćemo u daljem tekstu razmatrati samo desno invarijantne fazi ekvivalencije.

Desno invarijantne fazi ekvivalencije se mogu okarakterisati na sledeći način:

Teorema 2.2.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *E je desno invarijantna fazi ekvivalencija;*

(ii) *$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$, za svaki $x \in X$;*

(iii) *za sve $a, b \in A$ je*

$$E(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{c\in A} (\delta_x^A \circ E)(a,c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b,c). \tag{2.13}$$

Dokaz. (i)⇔(ii). Neka je $x \in X$ proizvoljan element. Ako je $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, tada $E \circ \delta_x^A \leqslant E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$. Obratno, ako $E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$ tada $E \circ \delta_x^A \circ E \leqslant \delta_x^A \circ E \circ E = \delta_x^A \circ E$, a kako obratna nejednakost uvek važi, zaključujemo da je $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$.

(i)⇒(iii). Neka je E desno invarijantna fazi ekvivalencija. Tada za sve $x \in X$ i $a, b, c \in A$ imamo da je

$$E(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ E)(b,c) \leqslant (E \circ \delta_x^A \circ E)(a,c) = (\delta_x^A \circ E)(a,c),$$

pa korišćenjem svojstva adjunkcije dobijamo

$$E(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(b,c) \to (\delta_x^A \circ E)(a,c).$$

Zbog simetričnosti fazi ekvivalencije E imamo,

$$E(a,b) = E(b,a) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a,c) \to (\delta_x^A \circ E)(b,c), \text{ odakle je,}$$

$$E(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a,c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b,c). \tag{2.14}$$

Kako je (2.14) zadovoljeno za svaki $c \in A$ i svaki $x \in X$, zaključujemo da važi (2.13).

(iii)$\Rightarrow$(i). Ako važi (iii), tada za svaki $x \in X$ i sve $a, b, c \in A$ imamo

$$E(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a,c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b,c) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(b,c) \to (\delta_x^A \circ E)(a,c),$$

odakle, zbog svojstva adjunkcije, dobijamo

$$E(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ E)(b,c) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a,c).$$

Sada,

$$(E \circ \delta_x^A \circ E)(a,c) = \bigvee_{b \in A} E(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ E)(b,c) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a,c),$$

odakle, $E \circ \delta_x^A \circ E \leqslant \delta_x^A \circ E$. Kako obratna nejednakost uvek važi, zaključujemo da je $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, za svaki $x \in X$. $\square$

Napomena 2.2.1. Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ nedeterministički automat i neka je E relacija ekvivalencije na A. Jednostavno se proverava da je $E \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^A \circ E$ ekvivalentno sa

$$(P_2) \;\; (\forall a, b \in A)(\forall x \in X)((a,b) \in E \Rightarrow (\forall b' \in \delta^A(b,x))(\exists a' \in \delta^A(a,x))(a',b') \in E),$$

što predstavlja drugi uslov pomoću kojega su Ilie, Navarro i Yu u [54] definisali pojam desno invarijantnih ekvivalencija na nedeterminističkom automatu (vidi [55, 23]). Prvi uslov, kojim se traži da završna i nezavršna stanja nisu E ekvivalentna, može se, u fazi slučaju, zapisati kao $\tau^A \circ E = \tau^A$. U ovoj disertaciji je iz definicije pojma desno invarijantnih fazi relacija prvi uslov isključen, a biće razamatran posebno.

Calude i drugi su u [14] ekvivalencije koje zadovoljavaju (P_2) nazvali dobroponašajuće. Zapazimo još i da se ekvivalent uslova (P_2) pojavljuje u [51, 53] i odgovara našem uslovu (iii) u Teoremi 2.2.1.

Napomena 2.2.2. Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E krisp ekvivalencija na A. Iz uslova (iii) Teoreme 2.2.1 imamo da je E desno invarijantna ekvivalencija na $\mathscr{A}$ ako i samo ako za sve $a, a' \in A$, iz $(a, a') \in E$ sledi $(\delta_x^A \circ E)(a,b) =$

$(\delta_x^A \circ E)(a', b)$, za svaki $x \in X$ i svaki $b \in A$. Ali, $(\delta_x^A \circ E)(a, b) = (\delta_x^A \circ E)(a', b)$ je ekvivalentno sa

$$\bigvee_{b' \in E_b} \delta^A(a, x, b') = \bigvee_{b' \in E_b} \delta^A(a', x, b'),$$

odakle dobijamo da su desno invarijantne krisp ekvivalencije na fazi automatima ništa drugo do kongruencije fazi automata izučavane od strane T. Petković u [90] (ili particije sa svojstvom supstitucije iz [5]).

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Definišimo fazi relaticije $E^x \in L^{A\times A}$, za svaki $x \in X$ i $E^r \in L^{A\times A}$ sa

$$\begin{aligned} E^x(a, b) &= \bigwedge_{c \in A} (\delta_x^A \circ E)(a, c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b, c), \\ E^r(a, b) &= \bigwedge_{x \in X} E^x(a, b), \end{aligned} \tag{2.15}$$

za sve $a, b \in A$. Iz poznate Valverdeove teoereme o reprezentaciji [102] (vidi [6, 29]) imamo da su E^x, za svaki $x \in X$ i E^r fazi ekvivalencije. Takođe, imamo i sledeće

Lema 2.2.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka su E i F fazi ekvivalencije na A.*

Ako je $E \leqslant F$, tada je $E^r \leqslant F^r$.

Dokaz. Razmotrimo proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$. Iz $E \leqslant F$ sledi da je $E \circ F = F$, pa je iz (1.62), za sve $c, d \in A$ zadovoljeno

$$(\delta_x^A \circ E)(a, c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b, c) \leqslant (\delta_x^A \circ E)(a, c) \otimes F(c, d) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b, c) \otimes F(c, d).$$

Sada, iz (1.64) dobijamo

$$\begin{aligned} E^r(a, b) &\leqslant \bigwedge_{c \in A} (\delta_x^A \circ E)(a, c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b, c) \\ &\leqslant \bigwedge_{c \in A} \Big[(\delta_x^A \circ E)(a, c) \otimes F(c, d) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E)(b, c) \otimes F(c, d) \Big] \\ &\leqslant \Big[\bigvee_{c \in A} (\delta_x^A \circ E)(a, c) \otimes F(c, d) \Big] \leftrightarrow \Big[\bigvee_{c \in A} (\delta_x^A \circ E)(b, c) \otimes F(c, d) \Big] \\ &= (\delta_x^A \circ E \circ F)(a, d) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ E \circ F)(b, d) \\ &= (\delta_x^A \circ F)(a, d) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ F)(b, d). \end{aligned}$$

Ovo važi za sve $x \in X$, $d \in A$, odakle zaključujemo da je $E^r \leqslant F^r$. $\square$

Sada smo spremni da dokažemo sledeće:

Teorema 2.2.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Skup $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ svih desno invarijantnih fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ je kompletna mreža. Ova mreža je kompletna gornja podpolumreža mreže $\mathscr{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na A.*

Dokaz. Kako $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ sadrži najmanji element mreže $\mathscr{E}(A)$, identička relacija na skupu A, dovoljno je dokazati da je $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ gornja podpolumreža od $\mathscr{E}(A)$.

Naka $\{E_i\}_{i\in I}$ je familija svih desno invarijantnih fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ i neka je E njihov supremum u $\mathscr{E}(A)$. Tada za svaki $i \in I$, iz $E_i \leqslant E$ i Leme 2.2.1 dobijamo $E_i \leqslant E_i^r \leqslant E^r$, pa je $E \leqslant E^r$. Dakle, iz (iii) Teoreme 2.2.1 dobijamo da je E desno invarijantna ekvivalencija. $\square$

Iz Teoreme 2.2.2 sledi da za svaku fazi ekvivalenciju E na $\mathscr{A}$ postoji najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija sadržana u E. Označićemo je sa E^{ri}. U sledećoj teoremi ćemo razmotriti problem njene konstrukcije.

Teorema 2.2.3. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je E fazi ekvivalencija na A i neka je E^{ri} najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija sadržana u E.*

Definišimo induktivno niz $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi ekvivalencija na A na sledeći način:

$$E_1 = E, \quad E_{k+1} = E_k \wedge E_k^r, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Tada

(a) $E^{\mathrm{ri}} \leqslant \cdots \leqslant E_{k+1} \leqslant E_k \leqslant \cdots \leqslant E_1 = E$;

(b) *Ako je $E_k = E_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je $E_k = E_{k+1} = E^{\mathrm{ri}}$;*

(c) *Ako je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat i $\mathscr{L}$ je lokalno konačna reziduirana mreža, tada je $E_k = E^{\mathrm{ri}}$ za neki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. (a) Očigledno, $E_{k+1} \leqslant E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ a vaǐi i $E^{\mathrm{ri}} \leqslant E_1$. Pretpostavimo da je $E^{\mathrm{ri}} \leqslant E_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $E^{\mathrm{ri}} \leqslant (E^{\mathrm{ri}})^r \leqslant E_k^r$, tako da je $E^{\mathrm{ri}} \leqslant E_k \wedge E_k^r = E_{k+1}$. Dakle, indukcijom dobijamo da je $E^{\mathrm{ri}} \leqslant E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

(b) Neka je $E_k = E_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$E_k = E_{k+m} \leqslant E_{k+1} = E_k \wedge E_k^r \leqslant E_k^r,$$

što zna v ci da je E_k desno invarijantna fazi ekvivalencija. Kako je E^{ri} najveća desno invarijantna fazi ekvivlaencija sadržana u E, zaključujemo da je $E_k = E_{k+1} = E^{\mathrm{ri}}$.

(c) Neka je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat i $\mathscr{L}$ je lokalno konačna reziduirana mreža. Označimo sa $L_{\mathscr{A}}$ podalgebru algebre $\mathscr{L}$, čiji generatorni skup jeste $\delta^A(A \times X \times A) \cup E(A \times A)$. Pošto je $\delta^A(A \times X \times A) \cup E(A \times A)$ konačan skup, sledi da je algebra $L_{\mathscr{A}}$ konačna, odakle sledi i da skup $L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$ svih fazi relacija na A sa vrednostima u $L_{\mathscr{A}}$ jeste konačan. Iz definicija fazi relacija E_k i E_k^r imamo da je $E_k \in L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$, što povlači da postoje $k, n \in \mathbb{N}$ za koje je $E_k = E_{k+m}$, pa iz (b) zaključujemo da je $E_k = E^{\mathrm{ri}}$. $\square$

Prethodna teorema opisuje postupak za izračunavanje najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije sadržane u datoj fazi ekvivalenciji E konačnog fazi automata, koja daje rezultate ako je $\mathscr{L}$ lokalno konačna reziduirana mreža. Ali, ukoliko $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna, predstavljena procedura ne mora da daje rezultate, što je ilustrovano narednim primerom:

Primer 2.2.1. Neka je $\mathscr{L}$ proizvod struktura, $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ sa skupom stanja $A = \{1, 2\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$ i fazi relacijom prelaza δ_x^A datom sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je E univerzalna relacija na A. Primenom postupka iz Teoreme 2.2.3 na relaciju E, dobijamo niz fazi ekvivalencija $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dat sa

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

čiji su svi članovi različiti. Odavde imamo da je E^{ri} identička relacija na A, tj.

$$E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ako kompletna reziduirana mreža $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna, znamo da postoji najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{ri} sadržana u E, ali je problem kako je konstruisati.

U nekim slučajevima, da bismo redukovali fazi automat $\mathscr{A}$, možemo da nađemo najveću desno invarijantnu krisp ekvivalenciju sadržanu u krisp delu fazi ekvivalencije E. Ova ekvivalencija može da ima isti indeks kao E^{ri}, tako da faktor fazi automati $\mathscr{A}/E^{\circ}$ i $\mathscr{A}/E^{\mathrm{ri}}$ imaju isti broj stanja. Ekvivalenciju E° možemo konstruisati na način koji je dala Petković [90]. Tu konstrukciju možemo preformulisati na sledeći način:

Teorema 2.2.4. [90] *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je ϱ ekvivalencija na A i neka je ϱ° najveća desno invarijantna ekvivalencija sadržana u ϱ.*

Induktivno definišimo niz $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ekvivalencija na A na sledeći način:

$$\varrho_1 = \varrho, \quad \varrho_{k+1} = \varrho_k \cap \varrho_k^r, \quad \textit{za svaki } k \in \mathbb{N},$$

gde je ϱ_k^r relacija definisana sa

$$(a,b) \in \varrho_k^r \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)(\forall c \in A)(\delta_x^A \circ \varrho_k)(a,c) = (\delta_x^A \circ \varrho_k)(b,c),$$

za sve $a, b \in A$. Tada

(a) $\varrho^{\circ} \leqslant \cdots \leqslant \varrho_{k+1} \leqslant \varrho_k \leqslant \cdots \leqslant \varrho_1 = \varrho$;

(b) *If $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada $\varrho_k = \varrho_{k+1} = \varrho^{\circ}$;*

(c) *Ako je $\mathscr{A}$ konačan, tada je $\varrho_k = \varrho^{\circ}$ za neki $k \in \mathbb{N}$.*

Ipak, E° može imati veći indeks od E^{ri}, odakle, $\mathscr{A}/E^{\circ}$ može imati više stanja od $\mathscr{A}/E^{\mathrm{ri}}$, kao što pokazuje sledeći primer:

Primer 2.2.2. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ sa skupom stanja $A = \{1,2,3,4\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$ i fazi relacijama prelaza

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0.6 & 0.8 \\ 1 & 0.6 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.8 \\ 0.5 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neka je E univerzalna relatcija na A. Primenom procedura iz Teorema 2.2.3 i 2.2.4 na E, dobijamo da je $E_2 = E_3 = E^{\mathrm{ri}}$ i $\varrho_3 = \varrho_4 = E^{\circ}$, tj. dobijamo da je

$$E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, E° ne redukuje $\mathscr{A}$, dok E^{ri} ima tri klase i redukuje $\mathscr{A}$ na fazi automat $\mathscr{A}/E^{\mathrm{ri}}$ koji ima tri stanja i fazi relacije prelaza date matricama

$$\delta_x^{A/E^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^{A/E^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.8 & 1 \end{bmatrix},$$

Napomena 2.2.3. Neka kompletna reziduirana mreža $\mathscr{L}$ ima svojstvo da $\vee K = 1$ povlači $1 \in K$, za svaki konačan $K \subseteq L$. To svojstvo je zadovoljeno, na primer, kad god je $\mathscr{L}$ linearno uređena.

U tom slučaju je za proizvoljne fazi relacije R i S konačnog skupa A zadovoljeno

$$\widehat{R \circ S} = \widehat{R} \circ \widehat{S}.$$

Ovde za proizvoljnu desno invarijantnu fazi ekvivalenciju E fazi automata $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ imamo da je $\widehat{E}$ desno invarijantna krisp ekvivalencija nedeterminističkog automata $\widehat{\mathscr{A}} = (A, X, \widehat{\delta}^A)$. Takođe, za ma koju fazi ekvivalenciju F na $\mathscr{A}$, krisp deo od F^{ri} je najveća desno invarijantna ekvivalencija na $\widehat{\mathscr{A}}$ sadržana u $\widehat{F}$.

U Teoremi 2.2.3 konstruisali smo neopadajući niz $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi ekvivalencija za koji je

$$E^{\mathrm{ri}} \leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

Prirodno se postavlja pitanje, pod kojim uslovima je

$$E^{\mathrm{ri}} = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

Ovaj problem ćemo razmatrati u daljem tekstu. Pokažimo, pre svega sledeću lemu

Lema 2.2.2. *Neka je $\mathscr{L}$ kompletna reziduirana mreža koja zadovoljava uslov*

$$\bigwedge_{i\in I}(x \vee y_i) = x \vee \Big(\bigwedge_{i\in I} y_i\Big), \tag{2.17}$$

za svaki $x \in L$ i svaki niz $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq L$. Tada za sve neopadajuće nizove $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L$ važi

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}}(x_k \vee y_k) = \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} x_k\Big) \vee \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} y_k\Big). \tag{2.18}$$

Dokaz. Razmatrajmo proizvoljne neopadajuće nizove $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L$ i proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$. Kako su ti nizovi neopadajući, za svaki $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant m, n$, imamo $x_l \vee y_l \leqslant x_m \vee y_n$, odakle

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (x_k \vee y_k) \leqslant x_m \vee y_n.$$

Ova nejednakost važi za sve $m, n \in \mathbb{N}$, pa, prema (2.17) dobijamo

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (x_k \vee y_k) \leqslant \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (x_m \vee y_n) \Big) = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \Big(x_m \vee (\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} y_n) \Big) = (\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} x_m) \vee (\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} y_n).$$

Kako je obratna nejednakost očigledna, zaključujemo da je (2.18) tačna. □

Sada možemo da dokažemo sledeću teoremu

Teorema 2.2.5. *Neka je $\mathscr{L}$ kompletna reziduirana mreža koja zadovoljava uslov* (2.17) *i*

$$\bigwedge_{i\in I} (x \otimes y_i) = x \otimes \big(\bigwedge_{i\in I} y_i \big), \tag{2.19}$$

za svaki $x \in L$ i svaki niz $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq L$. Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ konačan fazi automat nad $\mathscr{L}$, neka je E fazi ekvivalencija na A, neka je E^{ri} najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ sadržana u E i neka je $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz fazi ekvivlaencija na A definisan sa (2.16)*. Tada*

$$E^{\mathrm{ri}} = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_k. \tag{2.20}$$

Dokaz. Jednostavnosti radi, neka je

$$F = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

Jasno, F je fazi ekvivalencija. Da bismo dokazali jednakost (2.20) dovoljno je pokazati da je F desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Prvo, imamo

$$F(a,b) \leqslant E_{k+1}(a,b) \leqslant E_k^r(a,b) \leqslant \delta_x^A \circ E_k(a,c) \leftrightarrow \delta_x^A \circ E_k(b,c), \tag{2.21}$$

za sve $a, b, c \in A$, $x \in X$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada, iz (2.21) i (1.63) dobijamo

$$\begin{aligned} F(a,b) &\leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \Big(\delta_x^A \circ E_k(a,c) \leftrightarrow \delta_x^A \circ E_k(b,c) \Big) \\ &\leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ E_k(a,c) \big) \leftrightarrow \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ E_k(b,c) \big), \end{aligned} \tag{2.22}$$

za sve $a, b, c \in A$ i svaki $x \in X$. Sledeće,

$$
\begin{aligned}
\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ E_k(a,c)\big) &= \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \Big(\bigvee_{d\in A} \big(\delta_x^A(a,d) \otimes E_k(d,c)\big)\Big) \\
&= \bigvee_{d\in A} \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A(a,d) \otimes E_k(d,c)\big)\Big) && \text{(by (2.18))} \\
&= \bigvee_{d\in A} \Big(\delta_x^A(a,d) \otimes \big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} E_k(d,c)\big)\Big) && \text{(by (2.19))} \\
&= \bigvee_{d\in A} \Big(\delta_x^A(a,d) \otimes F(d,c)\Big) = (\delta_x^A \circ F)(a,c).
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Upotreba uslova (2.18) je opravdana time što je A konačan i time što je $\{E_k(d,c)\}_{k\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz, odakle sledi da $\{\delta_x^A(a,d)\otimes E_k(d,c)\}_{k\in\mathbb{N}}$ jeste takođe neopadajući niz. Na isti način dokazujemo

$$
\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ E_k(b,c)\big) = (\delta_x^A \circ F)(b,c). \tag{2.24}
$$

Dakle, prema (2.22), (2.23) i (2.24) dobijamo

$$
F(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ F)(a,c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ F)(b,c).
$$

Kako ova nejednakost važi za svaki $x \in X$ i svaki $c \in A$, imamo

$$
F(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{c\in A} (\delta_x^A \circ F)(a,c) \leftrightarrow (\delta_x^A \circ F)(b,c),
$$

pa iz (iii) Teoreme 2.2.1 dobijamo da je F desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. □

Napomena 2.2.4. Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$, gde je $[0,1]$ realni jedinični interval i $\otimes$ je levo neprekidna t-norma na $[0,1]$. Tada $\mathscr{L}$, zbog linearnosti, zadovoljava uslov (2.17).

Sa druge strane, poznato je da $\mathscr{L}$ zadovoljava uslov (2.19) ako i samo ako je $\otimes$ neprekidna t-norma, tj. ako i samo ako $\mathscr{L}$ jeste BL-algebra (vidi [6, 8]). Dakle, tvrđenje Teoreme 2.2.5 je tačno za svaku BL-algebru na realnom jediničnom intervalu. Specijalno, Łukasiewiczeva, Goguenova (proizvod) i Gödelova struktura ispunjavaju uslove prethodne teoreme.

2.3. Redukcije i naizmenične redukcije

Bolji rezultati u redukciji broja stanja konačnih nedeterminističkih automata mogu biti postignuti na način koji su predložili Ilie i Yu u [51, 53, 54, 55].

Oni su uveli levo invarijantne ekvivalencije na NFA i pokazali da se manji konačni nedeterministički automat može dobiti tzv. optimalnim korišćenjem najveće desno invarijantne i najveće levo invarijantne ekvivalencije.

Motivisani pomenutim rezultatima, u ovom odeljku ćemo razmatrati redukciju fazi automata korišćenjem ne samo najvećih desno invarijantnih, već i najveće levo invarijantnih fazi ekvivalencija. Uvešćemo pojam naizmeničnih redukcija i pokazati da se njihovim korišćenjem može postići bolja redukcija fazi automata.

Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat. Niz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ fazi automata nazivaćemo *$\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukcija* od $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ i za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ imamo da je $\mathscr{A}_{k+1}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$. Analogno definišemo pojam *$\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukcije*.

Primetimo da za svaki konačni fazi automat $\mathscr{A}$ postoji $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ takva da za svaku $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukciju $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$, $\mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ od $\mathscr{A}$ koja je nastavak ove redukcije imamo da je

$$|\mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_{n+1}| = \cdots = |\mathscr{A}_{n+m}|,$$

tj. svi fazi automati $\mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ imaju isti broj stanja kao i $\mathscr{A}_n$. Primetimo takođe da za svaki fazi automat $\mathscr{A}$ postoji njegova najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ koja ima pomenuto svojstvo, koju ćemo nazivati *najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukcija* od $\mathscr{A}$. U tom slučaju ćemo fazi automat $\mathscr{A}_n$ nazivati *$\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukt* od $\mathscr{A}$, a broj n je *dužina* najkraće $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukcije. Ako je fazi automat $\mathscr{A}$ jednak svom $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-reduktu, tada kažemo da je *$\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan*. Analogno definišemo pojmove *najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukcija* od $\mathscr{A}$, *$\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukt* od $\mathscr{A}$, dužina najkraće leve redukcije i *$\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovani* fazi automat.

Dokazaćemo da dužina najkraće desne i najkraće leve redukcije nije veća od 2. Ali, pre svega dokažimo sledeću teoremu.

Teorema 2.3.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je E desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ i neka je F fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ za koju je $E \leqslant F$. Tada*

(a) *F je desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je F/E desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$;*

(b) *F je najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je F/E najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$;*

(c) *E je najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je $\widetilde{E}$ najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija faktor fazi automata $\mathscr{A}/E$.*

Dokaz. (a) Primetimo da je $E \leqslant F$ ekvivalentno sa $E \circ F = F \circ E = F$. Dalje, posmatrajmo proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$. Iz dokaza Teoreme 2.1.1 dobijamo

$$(F/E \circ \delta_x^{A/E} \circ F/E)(E_a, E_b) = (F \circ \delta_x^A \circ F)(a, b),$$

i takođe,

$$\begin{aligned}
(\delta_x^{A/E} \circ F/E)(E_a, E_b) &= \bigvee_{c \in A} \delta_x^{A/E}(E_a, E_c) \otimes F/E(E_c, E_b) \\
&= \bigvee_{c \in A} (E \circ \delta_x^A \circ E)(a, c) \otimes F(c, b) \\
&= (E \circ \delta_x^A \circ E \circ F)(a, b) = (\delta_x^A \circ E \circ F)(a, b) \\
&= (\delta_x^A \circ F)(a, b).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$F/E \circ \delta_x^{A/E} \circ F/E = \delta_x^{A/E} \circ F/E \;\Leftrightarrow\; F \circ \delta_x^A \circ F = \delta_x^A \circ F,$$

odakle tvrđenje (a) važi.

(b) Neka je F najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Prema (a), F/E je desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$. Pretpostavimo da je Q najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$. Definišimo fazi relaciju G na $\mathscr{A}$ sa

$$G(a, b) = Q(E_a, E_b), \qquad \text{za sve } a, b \in A.$$

Lako se proverava da je G fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Takođe, iz (a) ove teoreme dobijamo da je $\widetilde{E}$ desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, što povlači $\widetilde{E} \leqslant Q$, pa za proizvoljne $a, b \in A$ dobijamo da je

$$E(a, b) = \widetilde{E}(E_a, E_b) \leqslant Q(E_a, E_b) = G(a, b),$$

što znači $E \leqslant G$. Dakle, imamo de je $Q = G/E$, pa iz (a) dobijamo da je G desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$, odakle sledi $G \leqslant F$. Sada, prema (2.4), imamo da je $Q = G/E \leqslant F/E$ i kako je F/E desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, zaključujemo da je $Q = F/E$, tj. F/E je najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$.

Obratno, neka je F/E najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$. Iz (a), F je desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Neka je G najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Tada je $E \leqslant F \leqslant G$, pa iz (a) sledi da je G/E desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, što povlači $G/E \leqslant F/E$. Sada, iz (2.4) sledi da je $G \leqslant F$, odakle dobijamo $G = F$. Dakle, dokazali smo da je F najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na fazi automatu $\mathscr{A}$.

(c) Ovo sledi direktno iz (b) i činjenice da je $E/E = \widetilde{E}$. □

Teorema 2.3.2. *Fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ je $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan ako i samo ako fazi jednakost jeste najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$.*

Prema tome, za svaki fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$, njegov $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukt je faktor fazi automat $\mathscr{A}/E$, gde je E najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$.

Dokaz. Označimo sa E najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}$.

Pretpostavimo da fazi automat $\mathscr{A}$ jeste $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Ako E nije fazi jednakost, tada je $|\mathscr{A}/E| < |\mathscr{A}|$, što je u suprotnosti sa našom polaznom pretpostavkom da je $\mathscr{A}$ desno redukovan. Zbog toga zaključujemo da je E fazi jednakost.

Obratno, neka je E fazi jednakost. Posmatrajmo proizvoljnu $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukciju $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$. Za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je E_k najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k$. Prema Teoremi 2.3.1, za svaki $k \in \{2, \ldots, n\}$ je $E_k = \widetilde{E}_{k-1}$, odakle je E_k fazi jednakost, pa je prema pretpostavci, $E_1 = E$ fazi jednakost. Sada, za svaki $k \in \{2, \ldots, n\}$ imamo da je $|\mathscr{A}_k| = |\mathscr{A}_{k-1}/E_{k-1}| = |\mathscr{A}_{k-1}|$, te je, $|\mathscr{A}| = |\mathscr{A}_1| = |\mathscr{A}_2| = \cdots = |\mathscr{A}_n|$. Dakle, fazi automat $\mathscr{A}$ je desno redukovan.

Dalje, ako je $\mathscr{A}$ proizvoljan fazi automat i E najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$, tada je prema Teoremi 2.3.1 zadovoljeno da je $\widetilde{E}$ najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija faktor fazi automata $\mathscr{A}/E$, a kako je $\widetilde{E}$ fazi jednakost, dobijamo da je $\mathscr{A}/E$ desno redukovan i da je $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukt od $\mathscr{A}$. □

Ako fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ jeste $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan, tj. ako je najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E na $\mathscr{A}$ fazi jednakost, tada faktor fazi automat $\mathscr{A}/E$ ima istu kardinalnost kao $\mathscr{A}$, ali, u opštem slučaju, nije izomorfan sa $\mathscr{A}$ (vidi Primer 2.3.1). Ako je faktor automat $\mathscr{A}/E$ izomorfan automatu $\mathscr{A}$, tada $\mathscr{A}$ nazivamo *kompletno $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan*. Analogno definišemo *kompletno $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan* fazi automat.

Primer 2.3.1. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ sa skupom stanja $A = \{1, 2\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$ i fazi relacijama prelaza δ_x^A i δ_y^A datim sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{ri} i najveća levo invarijantna fazi ekvivalencija E^{li} na $\mathscr{A}$ su date sa

$$E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{\mathrm{li}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\mathscr{A}$ je istovremeno desno i levo redukovan.

Faktor fazi automat $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/E^{\mathrm{ri}} = (A_2, X, \delta^{A_2})$ ima takođe dva stanja i fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_2}$ i $\delta_y^{A_2}$ date sa

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, fazi automat $\mathscr{A}_2$ nije izomorfan sa $\mathscr{A}$, pa $\mathscr{A}$ nije kompletno $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Sa druge strane, faktor fazi automat $\mathscr{A}/E^{\mathrm{li}}$ je izomorfan sa $\mathscr{A}$, pa je $\mathscr{A}$ kompletno $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan.

Prema Teoremi 2.3.2, fazi automat $\mathscr{A}_2$ je $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E_2^{ri} i najveća levo invarijantna fazi ekvivalencija E_2^{li} na $\mathscr{A}_2$ su date sa

$$E_2^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2^{\mathrm{li}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tako da je faktor fazi automat $\mathscr{A}_2/E_2^{\mathrm{ri}}$ izomorfan sa $\mathscr{A}_2$, odakle je $\mathscr{A}_2$ kompletno $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Sa druge strane, faktor fazi automat $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2/E_2^{\mathrm{li}} = (A_3, X, \delta^{A_3})$ ima jedno stanje i fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_3}$ i $\delta_y^{A_3}$ su date sa $\delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$ i $\delta_y^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

Dakle, iako je fazi automat $\mathscr{A}$ istovremeno $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$-redukovan i $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan, nakon njegove faktorizacije pomoću najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije dobijamo fazi automat $\mathscr{A}_2$ čiji se broj stanja može dalje smanjivati faktorizacijom pomoću najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije. Iz tih razloga uvodimo sledeći koncept.

Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat. Niz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ fazi automata nazivamo *naizmenična $\mathscr{E}$-redukcija* od $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ i za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ važi sledeće:

(1) $\mathscr{A}_{k+1}$ je faktor fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveću desno invarijantnu ili najveću levo invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$;

(2) Ako je $\mathscr{A}_{k+1}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$, tada je $\mathscr{A}_{k+2}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_{k+1}$ u odnosu na najveću levo invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$;

(3) Ako je $\mathscr{A}_{k+1}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveću levo invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$, tada je $\mathscr{A}_{k+2}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_{k+1}$ u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_k$.

Ako je $\mathscr{A}_2$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_1$ u odnosu na najveću desno invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_1$, tada se ova naizmenična redukcija zove *naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija* , a ako je $\mathscr{A}_2$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_1$ u odnosu na najveću levo invarijantnu fazi ekvivalenciju na $\mathscr{A}_1$, tada ovu naizmeničnu redukciju nazivamo *naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija.*

Primetimo da za svaki konačni fazi automat $\mathscr{A}$ postoji naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ takva da je za svaku naizmeničnu $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukciju $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ koja je nastavak ove redukcije zadovoljeno

$$|\mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_{n+1}| = \cdots = |\mathscr{A}_{n+m}|,$$

tj. svi fazi automati $\mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ imaju isti broj stanja kao $\mathscr{A}_n$. Takođe, postoji najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ koje ima ovo svojstvo, koju ćemo zvati *najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija* od $\mathscr{A}$, a $\mathscr{A}_n$ ćemo nazivati *naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukt* od $\mathscr{A}$. Broj n ćemo zvati *dužina* najkraće naizmenične $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcije od $\mathscr{A}$. Analogno definišemo pojam *najkraće naizmenične $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcije*, njegovu dužinu i *naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukt* od $\mathscr{A}$.

Sledeći primer pokazuje da naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukti fazi automata mogu da imaju različit broj stanja i da desno-leva i levo-desna naizmenična redukcija mogu da imaju različitu dužinu.

Primer 2.3.2. Neka je $\mathscr{A}_k = (A_k, X, \delta^{A_k})$, $k \in \{1, 2, 3\}$, niz fazi automata za koji je $|\mathscr{A}_1| = 3$, $|\mathscr{A}_2| = 2$, $|\mathscr{A}_3| = 1$, $X = \{x\}$ i fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_k}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, date sa

$$\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}.$$

Tada su najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E_1^{ri} na $\mathscr{A}_1$ i najveća levo invarijantna fazi ekvivalencija E_1^{li} on $\mathscr{A}_2$ date sa

$$E_1^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2^{\mathrm{li}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i niz $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ je naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija fazi automata $\mathscr{A}_1$, s obzirom da je $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1/E_1^{\mathrm{ri}}$ i $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2/E_2^{\mathrm{li}}$. Jasno, broj stanja fazi automata $\mathscr{A}_3$ ne može biti smanjen, tako da je niz $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija od $\mathscr{A}_1$, odakle je $\mathscr{A}_3$ naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukt od $\mathscr{A}_1$.

Sa druge strane, neka je $\mathscr{A}'_m = (A'_m, X, \delta^{A_m{}'})$, $m \in \{1,2,3,4\}$, niz fazi automata takav da je $\mathscr{A}'_1 = \mathscr{A}_1$, $|\mathscr{A}_2| = |\mathscr{A}_3| = |\mathscr{A}_4| = 1$, $X = \{x\}$ i fazi relacijama prelaza $\delta_x^{A_m{}'}$, $m \in \{2,3,4\}$, datim sa

$$\delta_x^{A_2{}'} = \delta_x^{A_3{}'} = \delta_x^{A_4{}'} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Tada su najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije F_1^{li} na $\mathscr{A}'_1 = \mathscr{A}_1$ i F_3^{li} na $\mathscr{A}'_3$ i najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija F_2^{ri} na $\mathscr{A}'_2$ date sa

$$F_1^{\mathrm{li}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.3 \\ 1 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F_2^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F_3^{\mathrm{li}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix},$$

i niz $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}'_2$, $\mathscr{A}'_3$, $\mathscr{A}'_4$ jeste naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija fazi automata $\mathscr{A}_1$, s obzirom da je $\mathscr{A}'_2 = \mathscr{A}_1/F_1^{\mathrm{li}}$, $\mathscr{A}'_3 = \mathscr{A}'_2/F_2^{\mathrm{ri}}$ i $\mathscr{A}'_4 = \mathscr{A}'_3/F_2^{\mathrm{li}}$. Takođe, imamo da je $\mathscr{A}'_2 \cong \mathscr{A}'_3 \cong \mathscr{A}'_4$, odakle zaključujemo da broj stanja fazi automata $\mathscr{A}'_2$ ne može biti redukovan pomoću desno invarijantnih ili levo invarijantnih fazi ekvivalencija. Zaključujemo da je niz $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}'_2$ najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija od $\mathscr{A}_1$ i da je $\mathscr{A}'_2$ naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukt od $\mathscr{A}_1$.

Dakle, ovaj primer pokazuje da naizmeničnom $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcijom fazi automata dobijamo fazi automate koji, u opštem slučaju, nemaju isti broj stanja. Naime, naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukt od $\mathscr{A}_1$ ima jedno stanje, dok naizmenični $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukt od $\mathscr{A}_1$ ima dva stanja. Ovaj primer takođe pokazuje da najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukcija nemaju istu dužinu, pošto najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukcija od $\mathscr{A}_1$ ima dužinu 3, a najkraća naizmenična $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$ -redukcija od $\mathscr{A}_1$ ima dužinu 2.

Primetimo da je u prethodnom primeru bilo moguće ustanoviti da su naizmenične redukcije najkraće. Naime, u naizmeničnoj $\mathscr{E}^{\mathrm{rl}}$-redukciji fazi automat koji je poslednji u nizu ima samo jedno stanje, tako da ne može biti dalje redukovan. Sa druge strane, u naizmeničnoj $\mathscr{E}^{\mathrm{lr}}$-redukciji tri poslednja uzastopna člana redukcije su izomorfna, pa samim tim njihova dalja redukcija ne bi dovela do smanjenja stanja. Ipak, još uvek nije poznat postupak pomoću kojega bi bilo moguće odrediti kada je naizmeničnom redukcijom dostignut najmanji broj stanja.

Za razliku od fazi automata, u slučaju nedeterminističkih automata može se ustanoviti kada je naizmeničnom redukcijom dostignt najmanji broj stanja. Naime, ako je nakon dva uzastopna koraka broj stanja ostao nepromenjen, tada je naizmenična redukcija završena. Drugim rečima, naizmenična redukcija se završava onda kada je dobijen nedeterministički automat koji je istovremeno i $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan i taj automat je naizmenični redukt polaznog automata. Ovo ne važi za fazi automate, jer faktorizacijom fazi automata pomoću fazi jednakosti, iako dobijamo fazi automat sa istim brojem stanja, on ne mora da bude izomorfan polaznom fazi automatu. Kako je pokazano u Primeru 2.3.1, čak i ako je fazi automat $\mathscr{A}$ istovremeno i $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan, njegovom faktorizacijom pomoću najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije dobijamo fazi automat čiji broj stanja može biti dalje smanjivan faktorizacijom pomoću njegove najveće levo invarijantne fazi ekvivalencije.

2.4. Jako desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Poseban tip desno invarijantnih fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ su fazi ekvivalencije na A koje su rešenja fazi relacijskih jednačina

$$E \circ \delta_x^A = \delta_x^A, \quad x \in X. \tag{2.25}$$

Ove fazi ekvivalencije zovemo *jako desno invarijantne fazi ekvivalencije* na $\mathscr{A}$. Slično, specijalan tip levo invarijantnih fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ su fazi ekvivalencije na A koje su rešenja sistema

$$\delta_x^A \circ E = \delta_x^A, \quad x \in X. \tag{2.26}$$

Ove fazi ekvivalencije zovemo *jako levo invarijantne fazi ekvivalencije* na $\mathscr{A}$. Primetimo da je fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ istovremeno jako desno invarijantna i jako levo invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je rešenje sistema

$$E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A, \quad x \in X. \tag{2.27}$$

U daljem tekstu ćemo izučavati jako desno invarijantne fazi ekvivalencije. Odgovarajući rezultati koji se odnose na jako levo invarijantne fazi ekvivalencije mogu da se dobiju na osnovu dualizma iz odgovarajućih tvrđenja koje se tiču jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija.

Neka je E fazi ekvivalencija na skupu A i neka je R fazi relacija na A. Tada je R *desno ekstenzionalan* (engl. extensional ili primetiv, engl. observable) u odnosu na E ako je

$$E(a,b) \otimes R(a,c) \leqslant R(b,c), \tag{2.28}$$

za sve $a,b,c \in A$, a R je *levo ekstenzionalna* u odnosu na E ako je

$$E(b,a) \otimes R(c,a) \leqslant R(c,b), \tag{2.29}$$

za sve $a,b,c \in A$.

Sledećom teoremom dajemo različite karakterizacije jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija.

Teorema 2.4.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i E fazi ekvivalencija na A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *E je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija;*

(ii) *$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A$, za svaki $x \in X$;*

(iii) *δ_x^A je desno ekstenzionalna u odnosu na E, za svaki $x \in X$;*

(iv) *za sve $a, b \in A$ imamo*

$$E(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{c\in A} \delta_x^A(a,c) \leftrightarrow \delta_x^A(b,c). \tag{2.30}$$

Dokaz. Jednakost $\delta_x^A \leqslant E \circ \delta_x^A$ važi zbog refleksivnosti fazi relacije E, odakle su implikacije (ii)⇒(i) i (i)⇒(ii) očigledne. Iz (2.28), (ii) je ekvivalentno sa (iii).

(iii)⇔(iv). Prema (2.28), imamo da je (iii) ekvivalentno sa

$$E(a,b) \leqslant \delta_x^A(a,c) \leftrightarrow \delta_x^A(b,c),$$

za sve $a, b, c \in A$ i svaki $x \in X$, što je očigledno ekvivalentno sa (2.30). Dakle, dokazali smo da je (iii) ekvivivalentno sa (iv). □

Sledećom teoremom dajemo karakterizaciju najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije na fazi automatu, kao i karakterizaciju mreže jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija na fazi automatu.

Teorema 2.4.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Tada*

(a) *Fazi ekvivalencija E^{sri} na A definisana sa*

$$E^{\mathrm{sri}}(a,b) = \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{c\in A} \delta_x^A(a,c) \leftrightarrow \delta_x^A(b,c), \tag{2.31}$$

za sve $a, b \in A$, je najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$.

(b) *Skup $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}(A)$ svih jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ je glavni ideal mreže $\mathscr{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na A generisan fazi ekvivalencijom E^{sri}.*

(c) *Za proizvoljnu fazi ekvivalenciju E na A imamo da je $E \wedge E^{\mathrm{sri}}$ najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ sadržana u E.*

Dokaz. (a) Prema Valverdeovoj teoremi o reprezentaciji ([102, 6, 29]) imamo da je E^{sri} fazi ekvivalencija na A, pa iz (iv) Teoreme 2.4.1 dobijamo da je E^{sri} jako desno invarijantna fazi ekvivalencija, štaviše najveća takva fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$.

Tvrđenja (b) i (c) su direktna posledica (iv) Teoreme 2.4.1. $\square$

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Konstruišimo novi fazi automat $\mathscr{A}^E = (A, X, \delta^{A^E})$, sa istim skupom stanja i istim ulaznim alfabetom kao $\mathscr{A}$ i fazi relacijama prelaza:

$$\delta_x^{A^E} = E \circ \delta_x^A \circ E, \quad \text{za svaki } x \in X. \tag{2.32}$$

Važi sledeće:

Lema 2.4.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je E fazi ekvivalencija na A. Tada*

(a) *E je istovrenmeno jako desno invarijantna i jako levo invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$;*

(b) *$\widetilde{E}$ je istovremeno jako desno invarijantna i jako levo invarijantna fazi ekvivalencija on $\mathscr{A}/E$.*

Dokaz. (a) Za svaki $x \in X$ važi

$$E \circ \delta_x^{A^E} \circ E = E \circ E \circ \delta_x^A \circ E \circ E = E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^{A^E},$$

odakle je E i jako desno invarijantna i jako levo invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$.

(b) Za proizvoljne $a, b \in A$ i svaki $x \in X$ je zadovoljeno

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{E} \circ \delta_x^{A/E} \circ \widetilde{E})(E_a, E_b) &= \bigvee_{c,d \in A} \widetilde{E}(E_a, E_c) \otimes \delta_x^{A/E}(E_c, E_d) \otimes \widetilde{E}(E_d, E_b) \\
&= \bigvee_{c,d \in A} E(a, c) \otimes (E \circ \delta_x^A \circ E)(c, d) \otimes E(d, b) \\
&= (E \circ E \circ \delta_x^A \circ E \circ E)(a, b) = (E \circ \delta_x^A \circ E)(a, b) \\
&= \delta_x^{A/E}(E_a, E_b).
\end{aligned}
$$

Dakle, $\widetilde{E} \circ \delta_x^{A/E} \circ \widetilde{E} = \delta_x^{A/E}$, pa je $\widetilde{E}$ je istovremeno jako desno invarijantna i jako levo invarijantna fazi ekvivalencija na faktor fazi automatu $\mathscr{A}/E$. $\square$

Sledeći primer pokazuje da najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na fazi automatu može biti strogo manja od najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije, odakle se pomoću najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije može postići bolja redukcija nego pomoću najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije.

Primer 2.4.1. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$ i fazi relacijom prelaza δ_x^A datom sa

$$
\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}.
$$

Tada su najveća desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{ri} i najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{sri} na $\mathscr{A}$ date sa

$$
E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Dakle, faktor fazi automat $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/E^{\mathrm{ri}} = (A_2, X, \delta^2)$ ima dva stanja, dok faktor fazi automat $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}/E^{\mathrm{sri}} = (A_3, X, \delta^3)$ ima tri stanja. Fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_2}$ i $\delta_x^{A_3}$ date su sa

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}, \qquad \delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat. Niz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ fazi automata zovemo $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$*-redukcija* od $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ i za svaki $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ važi da je $\mathscr{A}_{k+1}$ faktor fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveću jako desno invarijantnu fazi ekvivalenciju od $\mathscr{A}_k$. Analogno definišemo $\mathscr{E}^{\mathrm{sli}}$*-redukciju* od $\mathscr{A}$.

Za svaki konačni fazi automat $\mathscr{A}$ postoji $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ takva da za svaku $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukciju $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \dots, \mathscr{A}_{n+m}$ od $\mathscr{A}$ koja je nastavak ove redukcije važi

$$|\mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_{n+1}| = \cdots = |\mathscr{A}_{n+m}|,$$

tj. svi fazi automati $\mathscr{A}_{n+1}, \dots, \mathscr{A}_{n+m}$ imaju isti broj stanja kao i $\mathscr{A}_n$. Takođe, postoji najkraća $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ sa ovim svojstvom, a zovemo je *najkraća* $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$*-redukcija* od $\mathscr{A}$. Fazi automat $\mathscr{A}_n$ zovemo $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$*-redukt* od $\mathscr{A}$, a broj n nazivamo *dužina* najkraće $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcije. Ako je fazi automat $\mathscr{A}$ jednak svom $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-reduktu, tada kažemo da je $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$*-redukovan*. Analogno defnišemo *najkraću* $\mathscr{E}^{\mathrm{sli}}$*-redukciju* od $\mathscr{A}$, $\mathscr{E}^{\mathrm{sli}}$*-redukt* od $\mathscr{A}$, *dužinu* najkraće $\mathscr{E}^{\mathrm{sli}}$-redukcije i $\mathscr{E}^{\mathrm{sli}}$*-redukovan* fazi automat.

Za razliku od desnih redukcija, koje se zaustavljaju odmah nakon prve faktorizacie pomoću najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije, $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcije se, u opštem slučaju, ne zaustavljaju nakon prve faktorizacije pomoću najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije, pa zato takvu faktorizaciju možemo više puta vršiti sve dok ne dobijemo fazi automat koji ne može biti redukovan pomoću najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije. Ovo je pokazano sledećim primerom:

Primer 2.4.2. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$ i fazi relacijamom prelaza δ_x^A datom sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Tada je najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{sri} na $\mathscr{A}$ data sa

$$E^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Faktor fazi automat $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/E^{\mathrm{sri}} = (A_2, X, \delta^{A_2})$ ima takođe četiri stanja i fazi relacijom prelaza $\delta_x^{A_2}$ datom sa

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.9 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Fazi jednakost $\widetilde{E}^{\mathrm{sri}}$ i najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija E_2^{sri} na $\mathscr{A}_2$ su date sa

$$\widetilde{E}^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle $\widetilde{E}^{\mathrm{sri}}$ nije najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_2$, pa broj stanja faktor fazi automata $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/E^{\mathrm{sri}}$ može dalje biti redukovan pomoću najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije na $\mathscr{A}_2$.

Faktor fazi automat $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2/E_2^{\mathrm{sri}} = (A_3, X, \delta^{A_3})$ ima tri stanja i fazi relaciju prelaza $\delta_x^{A_3}$ datu sa

$$\delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix},$$

i najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_2$ je data sa

$$E_3^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\delta_x^{A_3} \circ E_3^{\mathrm{sri}} = \delta_x^{A_3}$, tj. kako je E_3^{sri} jako desno invarijantna i ujedno jako levo invarijantna fazi eqvivalencija, imamo da je faktor fazi automat $\mathscr{A}_4 = \mathscr{A}_3/E_3^{\mathrm{sri}}$ izomorfan sa $\mathscr{A}_3$, pa broj stanja fazi automata $\mathscr{A}_3$ ne može biti dalje redukovan pomoću najveće jako desno invarijantne fazi ekvivalencije.

U prethodnom primeru se $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcija zaustavila kada smo dobili dva uzastopna člana te redukcije koji su izomorfni. Dalje ćemo izučavati uslove pod kojima se $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcija zaustavlja.

Prvo ćemo pokazati sledeće:

Lema 2.4.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka su E i F fazi ekvivalencije na A za koje je $E \leqslant F$. Tada su faktor fazi automati $\mathscr{A}/F$, $\mathscr{A}^E/F$ i $(\mathscr{A}/E)/(F/E)$ izomorfni.*

Dokaz. Prema Teoremi 2.1.1, fazi automati $(\mathscr{A}/E)/(F/E)$ i $\mathscr{A}/F$ su izomorfni. Pokazaćemo da je fazi automat $\mathscr{A}^E/F$ takođe izomorfan i sa $\mathscr{A}/F$. Ova dva fazi automata imaju isti skup stanja, faktor skup A/F, i za sve $a, b \in A$ i svaki $x \in X$, iz $F \circ E = E \circ F = F$ važi

$$\begin{aligned}(\delta^{A^E})^F(F_a, x, F_b) &= (F \circ \delta_x^{A^E} \circ F)(a, b) = (F \circ E \circ \delta_x^A \circ E \circ F)(a, b)\\ &= (F \circ \delta_x^A \circ F)(a, b) = \delta^{A/F}(F_a, x, F_b).\end{aligned}$$

Ovo znači da fazi automati $\mathscr{A}^E/F$ i $\mathscr{A}/F$ jesu izomorfni. $\square$

Postoji još jedna značajna razlika između desno invarijantnih i jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija. Naime tvrđenje Teoreme 2.3.1 ne važi ako pojam desno invarijantnih fazi ekvivalencija zamenimo pojmom jako desno invarijantnih. Ipak, za jako desno invarijantne fazi ekvivalencije važi slična teorema.

Teorema 2.4.3. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ i neka je F fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ takva da je $E \leqslant F$. Tada je*

(a) *ako je F jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$ tada je F/E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$;*

(b) *F je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$ ako i samo ako je F/E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$;*

(c) *F je najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$ ako i samo ako je F/E najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$.*

Dokaz. (b) Za sve $a,b \in A$ i svaki $x \in X$ je zadovoljeno

$$
\begin{aligned}
(F/E \circ \delta_x^{A/E})(E_a,E_b) &= \bigvee_{c\in A} F/E(E_a,E_c) \otimes \delta_x^{A/E}(E_c,E_b) \\
&= \bigvee_{c\in A} F(a,c) \otimes (E \circ \delta_x^{A} \circ E)(c,b) \\
&= \bigvee_{c\in A} F(a,c) \otimes \delta_x^{A^E}(c,b) = (F \circ \delta_x^{A^E})(a,b),
\end{aligned}
$$

a kako je

$$\delta_x^{A/E}(E_a,E_b) = (E \circ \delta_x^{A} \circ E)(a,b) = \delta_x^{A^E}(a,b),$$

dobijamo

$$F/E \circ \delta_x^{A/E} = \delta_x^{A/E} \quad \Leftrightarrow \quad F \circ \delta_x^{A^E} = \delta_x^{A^E}.$$

Dakle, F je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$ ako i samo ako je F/E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$.

(a) Ako je F jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$, tada je

$$F \circ \delta_x^{A^E} = F \circ E \circ \delta_x^{A} \circ E = F \circ \delta_x^{A} \circ E = \delta_x^{A} \circ E = E \circ \delta_x^{A} \circ E = \delta_x^{A^E},$$

tj. F je takođe jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$, pa iz (b) dobijamo da je F/E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$.

(c) Neka je F najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$ i neka je Q najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$. Definišimo fazi relaciju G na A sa

$$G(a,b) = Q(E_a,E_b), \quad \text{za sve } a,b \in A.$$

Tada je G fazi ekvivalencija na A. Iz Leme 2.4.1, $\widetilde{E}$ je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, pa je $\widetilde{E} \leqslant Q$ i za sve $a,b \in A$ je zadovoljeno

$$E(a,b) = \widetilde{E}(E_a,E_b) \leqslant Q(E_a,E_b) = G(a,b).$$

Prema tome, $E \leqslant G$ i $Q = G/E$ i prema (a), G je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$. Sada imamo da je $G \leqslant F$, što povlači $Q = G/E \leqslant F/E$. Prema tvrđenju (b), F/E je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, pa dobijamo $Q = F/E$. Dakle, dokazali smo da je F/E najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$.

Obratno, neka je F/E najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$. Prema (b), F je jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$. Neka je G najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$. Tada iz

(b) dobijamo da je G/E jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}/E$, pa je $G/E \leqslant F/E$. Sa druge strane, kako iz $F \leqslant G$ sledi da je $F/E \leqslant G/E$, odatle je $F/E = G/E$, što dovodi do $F = G$. Dakle, F je najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}^E$. $\square$

Prema prethodnoj teoremi, postoji korespondencija između jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija faktor fazi automata $\mathscr{A}/E$ i jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija fazi automata $\mathscr{A}^E$. Koristeći tu korespondenciju istražićemo jako desnu redukciju fazi automata izučavajući niz $\{\mathscr{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi automata čiji su članovi definisani sa $\mathscr{A}_{k+1} = \mathscr{A}_k^{E_k}$, gde je $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ i E_k najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k$.

Pre svega dokažimo sledeće:

Teorema 2.4.4. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Neka je niz $\{\mathscr{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi automata induktivno definisan sa:*

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}_{k+1} = \mathscr{A}_k^{E_k}, \quad \textit{za svaki } k \in \mathbb{N}, \tag{2.33}$$

gde je E_k najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k$.

Ako je $\mathscr{A}_k = (A, X, \delta^k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada važi sledeće:

(a) *$E_k \leqslant E_{k+1}$ i $\delta_x^{A_k} \leqslant \delta_x^{A_{k+1}}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in X$;*
(b) *Ako je $E_k = E_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je $E_k = E_{k+1}$;*
(c) *Ako je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+m}}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$;*
(d) *Ako je $E_k = E_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\delta^{A_{k+1}} = \delta^{A_{k+2}}$;*
(e) *Ako je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $E_k = E_{k+1}$.*

Dokaz. Prvo, posmatrajmo niz $\{\delta_x^{A_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi relacija na A, za svaki $x \in X$ i niz $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi ekvivalencija na A, definisan sa

$$\delta_x^{A_1} = \delta_x^A, \quad \delta_x^{A_{k+1}} = \delta_x^k \circ E_k, \quad \text{za svaki } x \in X \text{ i svaki } k \in \mathbb{N}, \tag{2.34}$$

$$E_k(a,b) = \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{c\in A} \delta_x^{A_k}(a,c) \leftrightarrow \delta_x^{A_k}(b,c), \text{ za sve } k \in \mathbb{N} \text{ i } a, b \in A \tag{2.35}$$

(a) Za svaki $x \in X$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ važi da je E_k jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k$, odakle je

$$E_k \circ \delta_x^{A_{k+1}} = E_k \circ \delta_x^{A_k} \circ E_k = \delta_x^{A_k} \circ E_k = \delta_x^{A_{k+1}},$$

pa je E_k takođe jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_{k+1}$. Kako je E_{k+1} najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_{k+1}$, zaključujemo da je $E_k \leqslant E_{k+1}$.

Štaviše, za proizvoljne $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ i $a, b \in A$, važi

$$\delta_x^{A_k}(a,b) = \delta_x^{A_k}(a,b) \otimes E_k(b,b) \leqslant (\delta_x^{A_k} \circ E_k)(a,b) = \delta_x^{A_{k+1}}(a,b),$$

odakle je, $\delta_x^{A_k} \leqslant \delta_x^{A_{k+1}}$.

(b) Neka je $E_k = E_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$E_k \leqslant E_{k+1} \leqslant E_{k+m} = E_k,$$

odakle zaključujemo da je $E_k = E_{k+1}$. Slično dokazujemo (c).

(d) Neka je $E_k = E_{k+1}$, za neke $k \in \mathbb{N}$. Tada je za svaki $x \in X$ zadovoljeno

$$\delta_x^{A_{k+2}} = \delta_x^{A_{k+1}} \circ E_{k+1} = \delta_x^{A_{k+1}} \circ E_k = \delta_x^{A_k} \circ E_k \circ E_k = \delta_x^{A_k} \circ E_k = \delta_x^{A_{k+1}},$$

pa je prema tome $\delta^{A_{k+2}} = \delta^{A_{k+1}}$.

(e) Neka je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$, za neke $k \in \mathbb{N}$, tj. neka je $\delta_x^{A_k} = \delta_x^{A_{k+1}}$, za svaki $x \in X$. Tada iz (2.35) dobijamo $E_k = E_{k+1}$. $\square$

Sledećom teoremom uspostavljamo korespondenciju između niza fazi automati definisanog sa (2.36) i jako desno invarijantnih redukcija fazi automata.

Teorema 2.4.5. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Neka su nizovi $\{\mathscr{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\mathscr{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi automata induktivno definisani sa:*

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}_{k+1} = \mathscr{A}_k^{E_k}, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}, \tag{2.36}$$

gde je E_k najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k$ i

$$\mathscr{B}_1 = \mathscr{A}, \quad \mathscr{B}_{k+1} = \mathscr{B}_k/F_k, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}, \tag{2.37}$$

gde je F_k the najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{B}_k$.

Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo da su fazi automati $\mathscr{B}_{k+1}$, $\mathscr{A}_k/E_k$ i $\mathscr{A}/E_k$ izomorfni.

Dokaz. Dokažimo prvo da je $\mathscr{A}_k/E_k \cong \mathscr{A}/E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Jasno, ovo važi za $k = 1$. Pretpostavimo da je $k \geqslant 2$ i da je $\mathscr{A}_m/E_k \cong \mathscr{A}/E_k$, za neki $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k-1$. Kako je $E_m \leqslant E_k$, iz Leme 2.4.2 dobijamo

$$\mathscr{A}_{m+1}/E_k = \mathscr{A}_m^{E_m}/E_k \cong \mathscr{A}_m/E_k \cong \mathscr{A}/E_k,$$

odakle indukcijom dobijamo da je $\mathscr{A}_m/E_k \cong \mathscr{A}/E_k$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant k$, pa je $\mathscr{A}_k/E_k \cong \mathscr{A}_{E_k}$.

Dokažimo, dalje, da je $\mathscr{B}_{k+1} \cong \mathscr{A}/E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Ovo će biti dokazno indukcijom po k. Očigledno je da tvrđenje važi za $k = 1$.

Pretpostavimo da ovo tvrđenje važi za neki $k \in \mathbb{N}$. Kako je E_{k+1} najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_{k+1} = \mathscr{A}_k^{E_k}$, prema Teoremi 2.4.3 sledi da je E_{k+1}/E_k najveća jako desno invarijantna fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}_k/E_k \cong \mathscr{A}/E_k \cong \mathscr{B}_{k+1}$. Sada, iz Teoreme 2.1.1 dobijamo da važi

$$\mathscr{B}_{k+2} = \mathscr{B}_{k+1}/F_{k+1} \cong (\mathscr{A}/E_k)/(E_{k+1}/E_k) \cong \mathscr{A}/E_{k+1}.$$

Dakle, indukcijom zaključujemo da je $\mathscr{B}_{k+1} \cong \mathscr{A}/E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Ovim je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

Sada ćemo pokazati da se $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukcija fazi automata završava kad se niz fazi relacija prelaza definisan sa (2.34) zaustavi, a pokazaćemo i da se to mora dogoditi ako je posmatran fazi automat konačan, a odgovarajuća istinitosna struktura je lokalno konačna.

Teorema 2.4.6. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka su nizovi fazi automata $\{\mathscr{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\mathscr{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definisani sa* (2.36) *i* (2.37)*, gde je $\mathscr{A}_k = (A, X, \delta^{A_k})$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je*

(a) *Ako je $k \in \mathbb{N}$ najmanji broj takav da je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$, tada je $\mathscr{B}_{k+1} \cong \mathscr{B}_{k+m+1}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, i svaki $\mathscr{B}_{k+1}$ je $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukt od $\mathscr{A}$;*

(b) *Ako je $\mathscr{A}$ konačan i $\mathscr{L}$ je lokalno konačna, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$.*

Dokaz. (a) Neka je $k \in \mathbb{N}$ najmanji broj takav da je $\delta^{A_k} = \delta^{A_{k+1}}$. Prema Teoremi 2.4.4 imamo da je $E_k = E_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, pa iz Teoreme 2.4.5 dobijamo $\mathscr{B}_{k+1} \cong \mathscr{A}/E_k = \mathscr{A}/E_{k+m} \cong \mathscr{B}_{k+m+1}$. Iz navedenih razloga, $\mathscr{B}_{k+1}$ ne može više biti redukovan pomoću jako desno invarijantnih fazi ekvivalencija, pa je $\mathscr{B}_{k+1}$ $\mathscr{E}^{\mathrm{sri}}$-redukt od $\mathscr{A}$.

(b) Neka je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat i neka je $\mathscr{L}$ lokalno konačna algebra. Neka je nosač podalgebre od $\mathscr{L}$ generisane skupom $\delta^A(A \times X \times A)$ označen sa $L_{\mathscr{A}}$. Ovaj skup je konačan, pa je i $L_{\mathscr{A}}$ konačna, odakle je skup $L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$ svih fazi relacija na A sa istinitosnim vrednostima u $L_{\mathscr{A}}$ konačan. Kako je $E_k \in L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i kako je $L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$ konačan skup, zaključujem da postoji $k, m \in \mathbb{N}$ takav da je $E_k = E_{k+m}$, pa iz Teoreme 2.4.4 dobijamo $\delta^{A_{k+1}} = \delta^{A_{k+2}}$. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. $\square$

Glava 3

Redukcija pomoću fazi kvazi–uređenja

Champarnaud i Coulon su u [22, 23] predložili korišćenje kvazi–uređenja za redukciju nedeterminističkih automata. Pokazali su da je metod redukcije baziran na kvazi–uređenjima bolji od metoda zasnovanog na ekvivalencijama. Oni su konstruisali algoritam za izračunavanje najvećeg levo i najvećeg desno invarijantnog kvazi–uređenja u polinomialnom vremenu. Pomenuta procedura je potom poboljšana u [54, 55].

U ovoj glavi smo, motovisani pomenutim rezultatima, izučili problem redukcije fazi automata (raspoznavača) pomoću fazi kvazi uređenja. Počinjemo od proizvoljnog fazi kvazi–uređenja R, na skupu stanja A, fazi automata $\mathscr{A}$. Zatim formiramo skup A/R svih aftersetova od R i transformišemo fazi relacije prelaza na A u odgovarajuće fazi relacije prelaza na A/R. Na ovaj način gradimo afterset fazi automat $\mathscr{A}/R$. U slučaju da je $\mathscr{A}$ fazi raspoznavač, prevodimo i njegove fazi skupove inicijalnih i terminalnih stanja u odgovarajuće fazi skupove inicijalnih i završnih stanja afterset fazi raspoznavača $\mathscr{A}/R$. Na sličan način konstruišemo i foreset fazi automat i foreset fazi raspoznavač od $\mathscr{A}$ u odnosu na R. Pokazujemo da afterset fazi automat (raspoznavač) i foreset fazi automat (raspoznavač) u odnosu na zadato fazi kvazi uređenje jesu izomorfni, iz čega zaključujemo da je dovoljno razmatrati samo afterset fazi automate i raspoznavače. Ipak, ako ne nametnemo dodatne uslove fazi kvazi–uređenju R, afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}/R$ ne mora da raspoznaje isti fazi jezik kao $\mathscr{A}$. Pokazaćemo da su fazi automati $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}/R$ ekvivalentni ako i samo ako je R rešenje izvesnog sistema fazi relacijskih jednačina po nepoznatom fazi kvazi–uređenju R. Ovaj sistem, nazvan kao i u prethodnoj glavi *opšti sistem*, ima najmanje jedno rešenje na skupu $\mathscr{Q}(A)$ svih fazi kvazi–uređenja na A, a to je identička relacija na skupu A. Ali, da bismo postigli najbolju moguću redukciju od $\mathscr{A}$, moramo da nađemo najveće ili bar što je moguće veće rešenje opšteg sistema na skupu $\mathscr{Q}(A)$. Kao što je već rečeno, vrlo je teško naći netrivijalna rešenja opšteg sistema, tako da su u ovoj glavi posmatrani izvesni sistemi fazi relacijskih jednačina čija rešenja jesu i rešenja opšteg sistema, a koje je lakše rešiti.

U Odeljku 3.2. izučavamo dva sistema fazi relacijskih jednačina čija su rešenja ujedno i rešenja opšteg sistema, a zovemo ih desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja. Desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja su uopštenje desno i levo invarijantnih kvazi–uređenja i ekvivalencija, izučavanih u [22, 23, 54, 55], kao i desno i levo invarijantnih fazi ekvivalencija razmatranih u prethodnoj glavi. Korišćenjem metodologije slične onoj koja je korišćena u prethodnoj glavi disertacije (vidi takođe [31, 32]), izvršićemo karakterizaciju desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na fazi automatu $\mathscr{A}$. Pokazaćemo i da je skup svih desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na fazi automatu $\mathscr{A}$ kompletna mreža. Njen najveći element vrši najbolju redukciju fazi automata $\mathscr{A}$, u smislu redukcije pomoću fazi kvazi–uređenja ovog tipa. Teoremom 3.2.3 opisan je postupak za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja sadržanog u datom fazi kvazi–uređenju. Ovaj postupak je efektivan ako je odgovarajuća istinitosna struktura $\mathscr{L}$ lokalno konačna. Međutim, ukoliko $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna, naša procedura ne mora da daje rezultate. Takođe je izvršena karakterizacija najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja u slučaju kada $\mathscr{L}$ zadovoljava izvesne distributivne zakone. Iako su rezultati i metodologija korišćena u ovoj glavi slični onima u prethodnoj, postoje i bitne razlike koje opravdavaju naše izučavanje problema redukcije fazi automata pomoću fazi kvazi–uređenja. Naime, Primerom 3.2.3 pokazano je da desno invarijantna fazi kvazi–uređenja vrše bolju redukciju fazi automata od one koja se može postići pomoću desno invarijantnih fazi ekvivalencija. Štaviše, iterativni postupak za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja fazi automata $\mathscr{A}$, dat u Teoremi 3.2.3, završava se nakon konačnog broja koraka čak i ako se procedura za izračunavanje najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije na $\mathscr{A}$ ne završava u konačnom broju koraka (Primer 3.2.2).

Kao što smo primetili, postupak za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja na fazi automatu ne mora da daje rezultate ako odgovarajuća istinitosna struktura $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna. Iz tih razloga u Odeljku 3.3. razmatramo neke specijalne tipove desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja koja mogu biti izračunata i u slučajevima kada $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna. Teoremom 3.3.1 dat je iterativni postupak za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog krisp kvazi–uređenja sadržanog u datom krisp ili fazi kvazi–uređenju. Ova procedura daje rezultate ne samo na proizvoljnoj kompletnoj reziduiranoj mreži $\mathscr{L}$, već i kada je $\mathscr{L}$ mrežno uređeni monoid. Ipak, u slučajevima kada je moguće izračunati i najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje, ono može dati bolju redukciju od najvećeg desno invarijantnog krisp kvazi–uređenja (Primer 3.3.1). Takođe su izučavana i jako desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja. Pomenute fazi relacije se mogu izračunati bez iteracija, rešavanjem jednostavnog sistema fazi relacijskih jenačina, čak i kada je $\mathscr{L}$ prozvoljna kompletna reziduirana mreža. Biće pokazano da je i u ovom slučaju redukcija pomoću najvećeg jako desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja slabija od redukcije pomoću najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja (Primer 3.3.2).

Pored specijalnih tipova desno i levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja razmatranih u Odeljku 3.3., u Odeljku 3.4. izučavamo neke opštije tipove fazi kvazi–uređenja – slabo desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja. Pokazaćemo da je skup svih slabo desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ glavni ideal mreže svih kvazi–uređenja na skupu stanja fazi automata $\mathscr{A}$. Teoremom 3.4.1 je opisan je postupak za izračunavanje najvećeg elementa ovog glavnog ideala. Pokazano je da slabo desno invarijantna fazi kvazi–uređenja vrše bolju redukciju fazi automata od desno invarijantnih. Ipak, izračunavanje najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje predstavlja problem, iako se svaka od jednačina sistema koji ga definiše jednostavno rešava. Naime, broj ovih jednačina može eksponencijalno rasti sa rastom broja stanja fazi automata $\mathscr{A}$. Može se desiti da je ovih jednačina čak i beskonačno mnogo. Ovo je neposredna posledica činjenice da procedura kojom se izračunava najveće slabo desno invarijantno kvazi–uređenje podrazumeva determinizaciju reverznog fazi raspoznavača od $\mathscr{A}$ (postupak za determinizaciju fazi raspoznavača koji je razvijen u [47]).

U Odeljku 3.5. ove glave pokazaćemo da se bolji rezultati u smanjenju broja stanja fazi automata mogu postići takozvanim naizmeničnim redukcijama. Prvo ćemo pokazati da se fazi automatu, koji je redukovan pomoću najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja, dalje ne može smanjivati broj stanja pomoću takvih fazi kvazi–uređenja. Međutim, možemo ga redukovati pomoću njegovog najvećeg levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja. Ovo nas dovodi do koncepta naizmeničnih redukcija, gde fazi automat naizmenično redukujemo pomoću njegovog najvećeg desno invarijantnog, a potom pomoću njegovog najvećeg levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja, i tako redom. Takođe će biti pokazano da naizmenične redukcije koje počinju sa (slabo) desno invarijantnim fazi kvazi–uređenjem i one koje počinju sa (slabo) levo invarijantnim mogu imati ne samo različite dužine, već i da odgovarajući redukti mogu imati različit broj stanja (Primer 3.5.1). Ipak, nije poznat kriterijum pomoću koga je moguće odrediti koja će od naizmeničnih redukcija dati bolju redukciju. Takođe nije poznat ni kriterijum pomoću koga bi bilo moguće odrediti kada se naizmenična redukcija zaustavlja, tj. kada je ovom redukcijom dobijen fazi automat sa najmanjim brojem stanja. Pomenimo da u slučaju naizmeničnih redukcija nedeterminističkih automata i raspoznavača, ukoliko u dva uzastopna koraka naizmenične redukcije dobijemo isti automat, tada možemo da zaključimo da je odgovarajuća naizmenična redukcija završena.

Primetimo da su Champarnaud i Coulon [22, 23], Ilie, Navarro i Yu [54], Ilie, Solis-Oba i Yu [55] izučavali redukciju nedeterminističkih raspoznavača pomoću desno i levo invarijantnih kvazi–uređenja, ali u predloženim postupcima redukcije nisu koristili afterset i foreset raspoznavače u odnosu na odgovarajuća kvazi–uređenja. Pomenuti autori su u redukciji koristili faktor raspoznavače u odnosu na prirodne ekvivalencije razmatranih kvazi–uređenja. Iako su faktor raspoznavači i odgovarajući afterset (foreset) raspoznavači ekvivalentni i imaju isti broj stanja, redukcija korišćenjem afterset (foreset) automata ima izvesnih prednosti. Naime, Primerom 3.5.1 pokazano je da u nekim slučajevima naizmenične redukcije pomoću prirodnih ekvivalencija ne smanjuju broj stanja automata, dok naizmenične redukcije korišćenjem afterset raspoznavača smanjuju.

U poslednjem odeljku ove glave ćemo navesti neke primene slabo levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja u teoriji fazi diskretnih sistema događaja. Biće dokazano da je svaki fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ konfliktno-ekvivalentan sa afterset fazi raspoznavačem $\mathscr{A}/R$, u odnosu na svako slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje R na $\mathscr{A}$. Ovo znači da u paralelnoj kompoziciji fazi raspoznavača svaku njenu komponentu možemo zameniti afterset fazi raspoznavačem i tako dobijemo paralelnu kompoziciju koja ima ista konfliktna svojstva kao polazna, a može imati znatno manji broj stanja od nje. Samim tim i analiza nove paralelne kompozicije može biti jednostavnija.

3.1. Afterset i foreset fazi automati

Neka je R fazi kvazi–uređenje na skupu A. Za svaki $a \in A$, *R-afterset* od a je fazi skup $R_a \in L^A$ definisan sa $R_a(b) = R(a,b)$, za svaki $b \in A$, dok je *R-foreset* od a fazi skup $R^a \in L^A$ definisan sa $R^a(b) = R(b,a)$, za svaki $b \in A$ (vidi [4, 33, 34]). Skup svih R-afterseta ćemo označiti sa A/R, a skup svih R-foreseta ćemo označiti sa $A\backslash R$. Jasno, ako je R fazi ekvivalencija, tada je $A/R = A\backslash R$ skup svih klasa ekvivalencije R.

Ako je f proizvoljan fazi podskup od A, tada fazi relacije R_f i R^f na A definisane sa

$$R_f(a,b) = f(a) \to f(b), \quad R^f(a,b) = f(b) \to f(a), \tag{3.1}$$

za sve $a, b \in A$, jesu fazi kvazi–uređenja na A. Specijalno, ako je f normalizovan fazi podskup od A, tada je f afterset od R_f i foreset od R^f.

Teorema 3.1.1. *Neka je R fazi kvazi–uređenje na skupu A i E prirodna fazi ekvivalencija od R. Tada*

(a) *Za proizvolje $a, b \in A$ sledeći su uslovi ekvivalentni:*
   (i) $E(a,b) = 1$;
   (ii) $E_a = E_b$;
   (iii) $R_a = R_b$;
   (iv) $R^a = R^b$.

(b) *Funkcije $R_a \mapsto E_a$ iz A/R u A/E i $R_a \mapsto R^a$ iz A/R u $A\backslash R$ su bijekcije.*

Dokaz. (a) Posmatrajmo proizvoljne $a, b \in A$.

(i)⇒(ii). Neka je $E(a,b) = 1$, tj. neka je $R(a,b) = R(b,a) = 1$. Tada za svaki $c \in A$ imamo

$$R_b(c) = R(b,c) = R(a,b) \otimes R(b,c) \leqslant R(a,c) = R_a(c),$$

odakle je $R_b \leqslant R_a$. Analogno pokazujemo da je $R_a \leqslant R_b$, što povlači $R_a = R_b$.

(ii)⇒(i). Neka je $R_a = R_b$. Tada

$$R(a,b) = R_a(b) \geqslant R_b(b) = R(b,b) = 1,$$

odakle je $R(a,b) = 1$. Analogno se pokazuje $R(b,a) = 1$, pa dobijamo $E(a,b) = 1$.

Ekvivalencija (i)⇔(iii) se dokazuje slično kao ekvivalencija (i)⇔(ii).

Tvrđenje (b) direktno sledi iz (a). □

Ako je A konačan skup sa n elemenata, a kvazi–uređenje R na A tretiramo kao $n \times n$ fazi matricu nad $\mathscr{L}$, tada su R-afterseti vrste, a R-foreseti su kolone ove matrice. Prethodna teorema tvrdi da su i-ti i j-ti red matrice R jednaki ako i samo ako su i-ta i j-ta kolona te matrice jednake, a važi i obratno. Štaviše, matrica R predstavlja fazi uređenje ako i samo ako su su svi njeni redovi različiti, ili ekvivalentno, ako i samo ako su sve njene kolone različite.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je R fazi kvazi–uređenje na A. Fazi funkciju prelaza $\delta^{A/R} : A/R \times X \times A/R \to L$ možemo definisati sa

$$\delta^{A/R}(R_a, x, R_b) = \bigvee_{a',b' \in A} R(a, a') \otimes \delta^A(a', x, b') \otimes R(b', b), \tag{3.2}$$

ili ekvivalentno

$$\delta^{A/R}(R_a, x, R_b) = (R \circ \delta^A_x \circ R)(a, b) = R_a \circ \delta^A_x \circ R^b, \tag{3.3}$$

za sve $a, b \in A$ i svaki $x \in X$. Iz (a) Teoreme 3.1.1, $\delta^{A/R}$ je dobro definisana i $\mathscr{A}/R = (A/R, X, \delta^{A/R})$ je fazi automat koga zovemo *afterset fazi automat* od $\mathscr{A}$ u odnosu na R.

Osim toga, ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, tada fazi funkciju prelaza $\delta^{A/R}$ defnišemo kao u (3.2), a takođe definišemo i fazi skup $\sigma^{A/R} \in L^{A/R}$ inicijalnih stanja i fazi skup $\tau^{A/R} \in L^{A/R}$ završnih stanja sa

$$\sigma^{A/R}(R_a) = \bigvee_{a' \in A} \sigma^A(a') \otimes R(a', a) = (\sigma^A \circ R)(a) = \sigma^A \circ R^a, \tag{3.4}$$

$$\tau^{A/R}(R_a) = \bigvee_{a' \in A} R(a, a') \otimes \tau^A(a') = (R \circ \tau^A)(a) = R_a \circ \tau^A, \tag{3.5}$$

za svaki $a \in A$. Prema (a) Teoreme 3.1.1, $\sigma^{A/R}$ i $\tau^{A/R}$ su dobro definisane, a $\mathscr{A}/R = (A/R, X, \delta^{A/R}, \sigma^{A/R}, \tau^{A/R})$ je fazi raspoznavač koga zovemo *afterset fazi raspoznavač* od $\mathscr{A}$ u odnosu na R.

Analogno, za fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$, defnišemo *foreset fazi automat* od $\mathscr{A}$ u odnosu na R kao fazi automat $\mathscr{A}\backslash R = (A\backslash R, X, \delta^{A\backslash R})$ sa fazi funkcijom prelaza $\delta^{A\backslash R}$ definisanom sa

$$\begin{aligned} \delta^{A\backslash R}(R^a, x, R^b) &= \bigvee_{a',b' \in A} R(a, a') \otimes \delta^A(a', x, b') \otimes R(b', b) \\ &= (R \circ \delta^A_x \circ R)(a, b) = R_a \circ \delta^A_x \circ R^b, \end{aligned} \tag{3.6}$$

za sve $a, b \in A$ i svaki $x \in X$, a za fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, definišemo *foreset fazi raspoznavač* od $\mathscr{A}$ u odnosu na R kao fazi raspoznavač $\mathscr{A}\backslash R = (A\backslash R, X, \delta^{A\backslash R}, \sigma^{A\backslash R}, \tau^{A\backslash R})$ sa fazi skupom $\sigma^{A\backslash R} \in L^{A\backslash R}$ inicijalnih stanja i fazi skupom $\tau^{A\backslash R} \in L^{A\backslash R}$ završnih stanja

$$\sigma^{A/R}(R^a) = \bigvee_{a' \in A} \sigma^A(a') \otimes R(a', a) = (\sigma^A \circ R)(a) = \sigma^A \circ R^a, \tag{3.7}$$

$$\tau^{A/R}(R^a) = \bigvee_{a' \in A} R(a, a') \otimes \tau^A(a') = (R \circ \tau^A)(a) = R_a \circ \tau^A, \tag{3.8}$$

za svaki $a \in A$.

Jednostavno se pokazuje sledeća:

Teorema 3.1.2. *Za svako fazi kvazi–uređenje R na fazi raspoznavaču (automatu) $\mathscr{A}$ afterset fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}/R$ i foreset fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}\backslash R$ su izomorfni.*

Dokaz. Ovo sledi direktno iz (3.2), (3.6) i (b) Teoreme 3.1.1. □

Imajući u vidu Teoremu 3.1.2, u daljem tekstu ćemo razmatrati samo afterset fazi raspoznavače i automate. U Primeru 3.2.3 ćemo videti da faktor fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}/E_R$ od $\mathscr{A}$, u odnosu na prirodnu fazi ekvivalenciju E_R od R nije nužno izomorfan sa fazi raspoznavačima $\mathscr{A}/R$ i $\mathscr{A}\backslash R$, ali iz (b) Teoreme 3.1.1, svi pomenuti rasponavači (automati) su iste kardinalnosti. Takodje je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}/E_R)$, ako je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}/R)$ $(= L(\mathscr{A}\backslash R))$.

Ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i R fazi kvazi–uređenje na A, tada takođe definišemo i fazi funkciju prelaza $\delta^{A|R} : A \times X \times A \to L$ sa

$$\delta^{A|R}(a, x, b) = (R \circ \delta^A_x \circ R)(a, b), \quad \text{za sve } a, b \in A \text{ i svaki } x \in X,$$

tj., $\delta^{A|R}_x = R \circ \delta^A_x \circ R$, za svaki $x \in X$ i dobijamo novi fazi automat $\mathscr{A}|R = (A, X, \delta^{A|R})$ koji ima isti skup stanja i isti ulazni alfabet kao i polazni fazi automat. Dalje, ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, tada definišemo fazi skup $\sigma^{A|R} = \sigma^A$ i fazi skup $\tau^{A|R} = \tau^A$, odakle dobijamo fazi raspoznavač $\mathscr{A}|R = (A, X, \delta^{A|R}, \sigma^{A|R}, \tau^{A|R})$.

Sledeća teorema se može shvatiti kao verzija poznate Druge Teoreme o Izomorfizmu (vidi [13], §2.6) za fazi automate i fazi kvazi–uređenja.

Teorema 3.1.3. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač i neka su R i S fazi kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ takva da je $R \leqslant S$. Tada fazi relacija S/R na A/R definisana sa*

$$S/R(R_a, R_b) = S(a, b), \qquad \textit{za sve } a, b \in A, \tag{3.9}$$

jeste fazi kvazi–uređenje na A/R i fazi raspoznavači $\mathscr{A}/S$, $(\mathscr{A}/R)/(S/R)$ i $(\mathscr{A}|R)/S$ su izomorfni.

Dokaz. Neka su $a, a', b, b' \in A$ takvi da je $R_a = R_{a'}$ i $R_b = R_{b'}$, tj., $E_R(a, a') = E_R(b, b') = 1$. Kako je $R \leqslant S$, imamo i da je $R^{-1} \leqslant S^{-1}$, odakle je $E_R \leqslant E_S$, pa sledi da je $E_S(a,a') = E_S(b,b') = 1$ i $S(a,b) = S(a',b')$. Dakle, S/R je dobro definisana fazi relacija i jasno S/R je fazi kvazi–uređenje.

Jednostavnosti radi uvedimo oznaku $S/R = Q$. Definišimo preslikavanje $\phi : A/S \to (A/R)/Q$ sa

$$\phi(S_a) = Q_{R_a}, \qquad \text{za svaki } a \in A.$$

Prema Teoremi 3.1.1, za proizvoljne $a, b \in A$ imamo

$$S_a = S_b \;\Leftrightarrow\; S(a,b) = S(b,a) = 1 \;\Leftrightarrow\; Q(R_a, R_b) = Q(R_b, R_a) = 1$$

$$\Leftrightarrow\; Q_{R_a} = Q_{R_b} \;\Leftrightarrow\; \phi(S_a) = \phi(S_b),$$

odakle je ϕ dobro definisana injektivna funkcija. Jasno je da je ϕ takođe i sirjektivna funkcija. Dakle, ϕ je bijekcija iz A/S na $(A/R)/Q$.

Kako iz $R \leqslant S$ sledi $R \circ S = S \circ R = S$, za proizvoljne $a, b \in A$ i svaki $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned}
\delta_x^{(A/R)/Q}(\phi(S_a), \phi(S_b)) &= \delta_x^{(A/R)/Q}(Q_{R_a}, Q_{R_b}) = (Q \circ \delta_x^{A/R} \circ Q)(R_a, R_b) \\
&= \bigvee_{c,d \in A} Q(R_a, R_c) \otimes \delta_x^{A/R}(R_c, R_d) \otimes Q(R_d, R_b) \\
&= \bigvee_{c,d \in A} S(a,c) \otimes (R \circ \delta_x^{A} \circ R)(c,d) \otimes S(d,b) \\
&= (S \circ R \circ \delta_x^{A} \circ R \circ S)(a,b) = (S \circ \delta_x^{A} \circ S)(a,b) \\
&= \delta_x^{A/S}(S_a, S_b).
\end{aligned}$$

Štaviše, za svaki $a \in A$ važi

$$\sigma^{(A/R)/Q}(\phi(S_a)) = \sigma^{(A/R)/Q}(Q_{R_a}) = \sigma^{A/R}(R_a) = \sigma^{A}(a) = \sigma^{A/S}(S_a),$$

i slično, $\tau^{(A/R)/Q}(\phi(S_a)) = \tau^{A/S}(S_a)$. Dakle, ϕ je izomorfizam fazi raspoznavača $\mathscr{A}/S$ na fazi raspoznavač $(\mathscr{A}/R)/(S/R)$.

Dalje, za sve $a, b \in A$ i svaki $x \in X$ je zadovoljeno

$$\begin{aligned}
\delta^{(A|R)/S}(S_a, x, S_b) &= (S \circ \delta_x^{A|R} \circ S)(a,b) = (S \circ R \circ \delta_x^{A} \circ R \circ S)(a,b) \\
&= (S \circ \delta_x^{A} \circ S)(a,b) = \delta^{A/S}(S_a, x, S_b),
\end{aligned}$$

i $\sigma^{(A|R)/S} = \sigma^{A/S}$, $\tau^{(A|R)/S} = \tau^{A/S}$, tako da fazi raspoznavači $(\mathscr{A}|R)/S$ i $\mathscr{A}/S$ jesu izomorfni. $\square$

Ako u dokazu prethodne teoreme zanemarimo fazi skupove inicijalnih i završnih stanja, dobijamo da ona važi takođe i za fazi automate.

Primetimo da ako je $\mathscr{A}$ fazi raspoznavač ili fazi automat, A skup njegovih stanja, a R, S i T su fazi kvazi–uređenja na A takva da je $R \leqslant S$ i $R \leqslant T$, tada je

$$S \leqslant T \;\Leftrightarrow\; S/R \leqslant T/R, \tag{3.10}$$

odakle je preslikavanje $\Phi : \mathscr{Q}_R(A) = \{S \in \mathscr{Q}(A) \mid R \leqslant S\} \to \mathscr{Q}(A/R)$, dato sa $\Phi : S \mapsto S/R$, injektivno (u stvari, ovo je uređajni izomorfizam iz $\mathscr{Q}_R(A)$ na podskup skupa $\mathscr{Q}(A/R)$).

Specijalno, za fazi kvazi–uređenje R na A, fazi relaciju R/R na A/R ćemo označiti sa $\widetilde{R}$. Lako se pokazuje da je $\widetilde{R}$ fazi uređenje na A/R, a ako je E fazi ekvivalencija na A, tada je $\widetilde{E}$ fazi jednakost na A/E.

Za fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i fazi kvazi–uređenje R na A fazi jezik $L(\mathscr{A}/R)$ koji je raspoznat afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}/R$ je dat sa

$$L(\mathscr{A}/R)(u) = \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A,$$

dok je fazi jezik $L(\mathscr{A})$ koji raspoznaje $\mathscr{A}$ dat sa

$$L(\mathscr{A})(u) = \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A,$$

za svaki $u = x_1 x_2 \ldots x_n \in X^*$, gde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Dakle, fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ i afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}/R$ su ekvivalentni, tj. raspoznaju isti fazi jezik, ako i samo ako fazi kvazi–uređenje R jeste rešenje opšteg sistema

$$\sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A = \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A, \tag{3.11}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.

Podsetimo da se bolja redukcija fazi automata postiže pomoću većih rešenja opšteg sistema. Kako nam je cilj da postignemo što bolju redukciju fazi automata, potrebno je da nađemo što veće rešenje opšteg sistema u $\mathscr{Q}(A)$. Iz praktičnih razloga, kao i u slučaju fazi ekvivalencija, i ovde ćemo posmatrati ona rešenja opšteg sistema na skupu $\mathscr{Q}(A)$ koja zadovoljavaju izvesne "jednostavnije" sisteme fazi relacijskih jednačina.

Sledeća teorema opisuje neka svojstva skupa svih rešenja opšteg sistema.

Teorema 3.1.4. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač. Tada skup svih rešenja opšteg sistema u $\mathscr{Q}(A)$ jeste ideal mreže $\mathscr{Q}(A)$.*

Dakle, ako je fazi kvazi–uređenje R na A rešenje opšteg sistema, tada je njegova prirodna fazi ekvivalencija E_R takođe rešenje opšteg sistema.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljne $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, i fazi kvazi–uređenja R i S na A takva da je S rešenje opšteg sistema. Neka je $R \leqslant S$. Kako je S rešenje opšteg sistema i kako važi $R \leqslant S$, zbog refleksivnosti R i zbog (1.67) dobijamo

$$\begin{aligned}\sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A &\leqslant \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A \\ &\leqslant \sigma^A \circ S \circ \delta^A_{x_1} \circ S \circ \cdots \circ S \circ \delta^A_{x_n} \circ S \circ \tau^A \\ &= \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A,\end{aligned}$$

pa je R rešenje opšteg sistema. Iz prethodnog sledi da je skup svih rešenja opšteg sistema u $\mathscr{Q}(A)$ ideal mreže $\mathscr{Q}(A)$.

Drugi deo teoreme direktno sledi iz činjenice da je $E_R = R \wedge R^{-1} \leqslant R$. □

Sledećim primerom je pokazano da postoje fazi kvazi–uređenja koja nisu rešenja opšteg sistema, dok njihove prirodne fazi ekvivalencije jesu.

Primer 3.1.1. Neka je $\mathscr{L}$ Bulova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$ i δ^A_x, δ^A_y, σ^A i τ^A datim sa

$$\delta^A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta^A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za kvazi–uređenje R na A dato sa

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

važi

$$\sigma^A \circ R \circ \delta^A_x \circ R \circ \delta^A_y \circ R \circ \tau^A = 1 \neq 0 = \sigma^A \circ \delta^A_x \circ \delta^A_y \circ \tau^A,$$

Dakle, R nije rešenje opšteg sistema, dok je njegova prirodna fazi ekvivalencija E_R jednakost na A, pa jeste rešenje opšteg sistema.

Sledeći primer pokazuje da opšti sistem ne mora da ima najveće rešenje.

Primer 3.1.2. Neka je $\mathscr{L}$ Bulova struktura, neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$, i δ^A_x, σ^A i τ^A predstavljenim pomoću matrica

$$\delta^A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Razmotrimo dva fazi kvazi–uređenja (fazi ekvivalencije) E i F na A data sa

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oba fazi kvazi–uređenja E i F su rešenja opšteg sistema (E je desno invarijantno, a F je levo invarijantno fazi kvazi–uređenje, vidi sledeći odeljak). Sa druge strane, unija E i F u mreži $\mathscr{Q}(A)$ je fazi kvazi–uređenje U dato sa

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazi kvazi–uređenje U nije rešenje opšteg sistema, s obzirom da je

$$\sigma^A \circ U \circ \delta_x^A \circ U \circ \delta_x^A \circ U \circ \tau^A = 1 \neq 0 = \sigma^A \circ \delta_x^A \circ \delta_x^A \circ \tau^A.$$

Ako bi opšti sistem imao najveće rešenje R u mreži $\mathscr{Q}(A)$, tada bi iz $E \leqslant R$ i $F \leqslant R$ sledilo $U \leqslant R$, pa bi zbog Teoreme 3.1.4 važilo da je U rešenje opšteg sistema. Dakle, zaključujemo da opšti sistem ne mora da ima najveće rešenje u $\mathscr{Q}(A)$.

3.2. Desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Ako je fazi kvazi–uređenje R na A rešenje sistema

$$R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R, \quad x \in X, \tag{3.12}$$

tada ćemo ovo fazi kvazi–uređenje zvati *desno invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$, a ako je rešenje sistema

$$R \circ \delta_x^A \circ R = R \circ \delta_x^A, \quad x \in X, \tag{3.13}$$

tada ćemo ga zvati *levo invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$. Krisp kvazi–uređenje na A koje je rešenje (3.12) zovemo *desno invarijantno kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$, a krisp kvazi–uređenje koje je rešenje (3.13) zovemo *levo invarijantno kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$. Primetimo da je fazi kvazi–uređenje na A istovremeno desno i levo invarijantno ako i samo ako je rešenje sistema

$$R \circ \delta_x^A = \delta_x^A \circ R, \quad x \in X, \tag{3.14}$$

i takvo fazi kvazi–uređenje zovemo *invarijantno fazi kvazi–uređenje*.

Ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, tada je *desno invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$ ono fazi kvazi–uređenje R na A koje je rešenje sistema (3.12) i rešenje jednačine

$$R \circ \tau^A = \tau^A, \tag{3.15}$$

a *levo invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$ je fazi kvazi–uređenje R na A koje je rešenje sistema (3.13) i jednačine

$$\sigma^A \circ R = \sigma^A. \tag{3.16}$$

Jasno je da su desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ rešenja opšteg sistema (3.11), tako da su odgovarajući afterset fazi automati ekvivalentni sa $\mathscr{A}$.

Poznato je (vidi [30, 87, 88, 89, 95]) da rešenja (3.15) ((3.16)) na skupu $\mathscr{Q}(A)$ čine glavni ideal mreže $\mathscr{Q}(A)$ čiji je najveći element fazi kvazi–uređenje R^τ (R_σ) definisan sa (3.1). Ovo znači da desno (levo) invarijanta fazi kvazi–uređenja fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ su ona desno (levo) invarijantna fazi kvazi–uređenja fazi automata (A, X, δ^A) koja su sadržana u R^τ (R_σ).

Sledećom teoremom data je karakterizacija desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja:

Teorema 3.2.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka je R fazi kvazi–uređenje na A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje;*

(ii) *$R \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ R$, za svako $x \in X$;*

(iii) *za sve $a, b \in A$ važi*

$$R(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{c\in A} (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c). \tag{3.17}$$

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Posmatrajmo proizvoljan $x \in X$. Ako je $R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R$, zbog refleksivnosti R sledi

$$R \circ \delta_x^A \leqslant R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R.$$

Obratno, ako je $R \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ R$ tada je $R \circ \delta_x^A \circ R \leqslant \delta_x^A \circ R \circ R = \delta_x^A \circ R$, a kako suprotna nejednakost važi zbog refleksivnosti R, zaključujemo da je $R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R$.

(i)⇒(iii). Neka je R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje. Tada je za svaki $x \in X$ i sve $a, b, c \in A$ zadovoljeno

$$R(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ R)(b,c) \leqslant (R \circ \delta_x^A \circ R)(a,c) = (\delta_x^A \circ R)(a,c),$$

odakle zbog svojstva adjunkcije dobijamo

$$R(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c).$$

Dakle,

$$R(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c). \tag{3.18}$$

Kako je (3.18) zadovoljeno za svaki $c \in A$ i svaki $x \in X$, zaključujemo da (3.17) važi.

(iii)⇒(i). Ako važi (iii), tada za proizvoljan $x \in X$ i sve $a, b, c \in A$ imamo

$$R(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c),$$

pa zbog svojstva adjunkcije dobijamo da je $R(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ R)(b,c) \leqslant (\delta_x^A \circ R)(a,c)$. Sada,

$$(R \circ \delta_x^A \circ R)(a,c) = \bigvee_{b \in A} R(a,b) \otimes (\delta_x^A \circ R)(b,c) \leqslant (\delta_x^A \circ R)(a,c),$$

tj. važi $R \circ \delta_x^A \circ R \leqslant \delta_x^A \circ R$, a kako obratna nejednakost sledi direktno iz refleksivnosti R, zaključujemo da je $R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R$, za svaki $x \in X$, tj. R je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje. □

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i R fazi kvazi–uređenje na A. Defnišimo fazi relaciju R^r na A sa

$$R^r(a,b) = \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{c \in A} (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c), \tag{3.19}$$

za sve $a, b \in A$. Kako je R^r presek familije fazi kvazi–uređenja definisanih sa (3.1), imamo da je R^r takođe fazi kvazi–uređenje. Prema Teoremi 3.2.1, R je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje ako i samo ako je $R \leqslant R^r$.

Štaviše, važi sledeće:

Lema 3.2.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat i neka su R i S fazi kvazi–uređenja na A.*

Ako je $R \leqslant S$, tada je $R^r \leqslant S^r$.

D o k a z . Neka su $a, b \in A$ i $x \in X$ proizvoljni. Iz $R \leqslant S$ sledi $R \circ S = S$, pa zbog (1.26), za proizvoljne $c, d \in A$ je zadovoljeno

$$(\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c) \leqslant (\delta_x \circ R)(b,c) \otimes S(c,d) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c) \otimes S(c,d).$$

Sada, iz (1.36) dobijamo

$$\begin{aligned} R^r(a,b) &\leqslant \bigwedge_{c\in A} (\delta_x^A \circ R)(b,c) \to (\delta_x^A \circ R)(a,c) \\ &\leqslant \bigwedge_{c\in A} \Big[(\delta_x^A \circ R)(b,c) \otimes S(c,d) \to (\delta_x^A \circ R)(b,c) \otimes S(c,d)\Big] \\ &\leqslant \Big[\bigvee_{c\in A} (\delta_x^A \circ R)(b,c) \otimes S(c,d)\Big] \to \Big[\bigvee_{c\in A} (\delta_x^A \circ R)(a,c) \otimes S(c,d)\Big] \\ &= (\delta_x^A \circ R \circ S)(b,d) \to (\delta_x^A \circ R \circ S)(a,d) \\ &= (\delta_x^A \circ S)(b,d) \to (\delta_x^A \circ S)(a,d). \end{aligned}$$

Kako ovo važi za svaki $x \in X$ i svaki $d \in A$, zaključujemo da

$$R^r(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{d\in A} (\delta_x^A \circ S)(b,d) \to (\delta_x^A \circ S)(a,d) = S^r(a,b),$$

odakle je $R^r \leqslant S^r$. $\square$

Teorema 3.2.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ proizvoljan fazi automat i neka je $\mathscr{A}' = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač koji odgovara $\mathscr{A}$. Tada*

(a) *Skup $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ svih desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ je kompletna mreža. Mreža $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ je kompletna gornja podpolumreža mreže $\mathscr{Q}(A)$.*

(b) *Skup $\mathscr{Q}^{\mathrm{cri}}(\mathscr{A})$ svih desno invarijantnih krisp kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ je kompletna mreža. Ova mreža je kompletna gornja podpolumreža mreže $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(A)$.*

(c) *Skup $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ svih desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na $\mathscr{A}'$ je glavni ideal mreže $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$.*

D o k a z . (a) Neka je $\{R_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ i neka je R supremum ove familije u $\mathscr{Q}(A)$. Tada za svaki $i \in I$, iz $R_i \leqslant R$ i Leme 3.2.1 dobijamo $R_i \leqslant R_i^r \leqslant R^r$, odakle je $R \leqslant R^r$. Sada, iz Teoreme 3.2.1 sledi da je $R \in \mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$, odakle je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ kompletna gornja podpolumreža od $\mathscr{Q}(\mathscr{A})$. Kako $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ sadrži najmanji element mreže $\mathscr{Q}(A)$, a to je jednakost na A, zaključujemo da je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ kompletna mreža.

(b) Ovo sledi direktno iz (a), (1.76) i činjenice da unija i kompozicija fazi relacija, primenjena na krisp relacije, za rezultat daje krisp relacije.

(c) Prema definiciji, $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ se sastoji iz svih $R \in \mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ koje zadovoljavaju $R \circ \tau = \tau$. Poznato je da je $R \circ \tau = \tau$ ekvivalentno sa $R \leqslant R_\tau$, što povlači da je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ ideal od $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$. Dalje, neka je $\{R_i\}_{i\in I}$ proizvoljna familija elemenata skupa $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ i neka je R supremum ove familije u $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$. Iz (a) ove teoreme, R je takođe i supremum familije $\{R_i\}_{i\in I}$ u $\mathscr{Q}(\mathscr{A})$, a kako je $R_i \leqslant R_\tau$, za svaki $i \in I$, zaključujemo da je $R \leqslant R_\tau$. Iz ovoga sledi da je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ kompletna gornja podpolumreža od $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$, odakle je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ ideal od $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ koji ima najveći element, tj. $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A}')$ je glavni ideal mreže $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$. $\square$

Kao što smo ranije primetili, problem izračunavanja najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja na fazi raspoznavaču $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ svodi se na problem izračunavanja najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja na fazi automatu (A, X, δ^A) koje je sadržano u kvazi–uređenju R^τ, gde je $(\tau = \tau^A)$. Iz navedenih razloga, nadalje ćemo se posvetiti problemu nalaženja najvećeg desno invarijantnog fazi kvazi–uređenja R^{ri} fazi automata (A, X, δ^A), sadržanog u datom fazi kvazi–uređenju R.

Teorema 3.2.3. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je R fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ i R^{ri} najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ sadržano u R.*

Definišimo induktivno niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ na sledeći način:

$$R_1 = R, \quad R_{k+1} = R_k \wedge R_k^r, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Tada

(a) $R^{\mathrm{ri}} \leqslant \cdots \leqslant R_{k+1} \leqslant R_k \leqslant \cdots \leqslant R_1 = R$;

(b) *Ako je $R_k = R_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je $R_k = R_{k+1} = R^{\mathrm{ri}}$;*

(c) *Ako je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat i ako je $\mathscr{L}$ lokalno konačna reziduirana mreža, tada je $R_k = R^{\mathrm{ri}}$ za neki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. (a) Jasno, $R_{k+1} \leqslant R_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a važi i $R^{\mathrm{ri}} \leqslant R_1$. Pretpostavimo da je $R^{\mathrm{ri}} \leqslant R_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $R^{\mathrm{ri}} \leqslant (R^{\mathrm{ri}})^r \leqslant R_k^r$, odakle je $R^{\mathrm{ri}} \leqslant R_k \wedge R_k^r = R_{k+1}$. Dakle, indukcijom dobijamo da je $R^{\mathrm{ri}} \leqslant R_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

(b) Neka je $R_k = R_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$. Tada je $R_k = R_{k+m} \leqslant R_{k+1} = R_k \wedge R_k^r \leqslant R_a k^r$, odakle je R_k desno invarijantno fazi kvazi–uređenje. Kako je R^{ri} the najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje sadržano u R, zaključujemo da je $R_k = R_{k+1} = R^{\mathrm{ri}}$.

(c) Neka je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat i neka je $\mathscr{L}$ lokalno konačna reziduirana mreža. Označimo sa $L_{\mathscr{A}}$ podalgebru algebre $\mathscr{L}$ generisanu skupom $\delta^A(A \times X \times A) \cup R(A \times A)$. Generatorni skup od $L_{\mathscr{A}}$ je konačan, pa je $L_{\mathscr{A}}$ konačna, tako da je i skup $L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$ svih fazi relacija na A sa vrednostima u $L_{\mathscr{A}}$ konačan. Iz definicije fazi relacija R_k i R_k^r imamo da je $R_k \in L_{\mathscr{A}}^{A\times A}$, što povlači da postoje $k, n \in \mathbb{N}$ za koje je $R_k = R_{k+m}$, pa iz (b) zaključujemo da je $R_k = R^{\mathrm{ri}}$. $\square$

Prema (c) Teoreme 3.2.3, ako je struktura $\mathscr{L}$ lokalno konačna, tada je za svaki fazi automat $\mathscr{A}$ nad $\mathscr{L}$, niz fazi kvazi–uređenja definisan sa (3.20) konačan. Ipak, ovo ne mora da važi ako $\mathscr{L}$ nije lokalno konačna, što pokazuje sledeći primer:

Primer 3.2.1. Neka je $\mathscr{L}$ Goguenova (proizvod) struktura i $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1, 2\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$ i δ_x^A datom sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Neka je R puna relacija na A. Primenom procedure iz Teoreme 3.2.3 na R, dobijamo niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi kvazi–uređenja predstavljenim matricama

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2^{k-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

Svi članovi ovog niza su različiti, tj. ovaj niz je beskonačan. Takođe, najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje sadržano u R je

$$R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da za fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ nad kompletnom reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$, najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{li} sadržano u datom fazi kvazi–uređenju R na A može da se izračuna na sličan način kao i R^{ri}. Zaista, induktivno definišimo niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi kvazi–uređenja na A sa

$$R_1 = R, \quad R_{k+1} = R_k \wedge R_k^l, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

gde je R_k^l fazi kvazi–uređenje na A definisano sa

$$R_k^l(a,b) = \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{c\in A}(R_k\circ\delta_x^A)(c,a)\to(R_k\circ\delta_x^A)(c,b), \qquad \text{za sve } a,b\in A.$$

Ako je $\mathscr{L}$ lokalno konačna, tada je gornji niz konačan i R^{li} je jednako najmanjem članu ovog niza.

Potsetimo da smo u Teoremi 2.2.3 opisali postupak za izračunavanje najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije E^{ri} sadržane u datoj fazi ekvivalenciji E na A. Ovaj postupak je vrlo sličan onom u Teoremi 3.2.3 za fazi kvazi–uređenja i takođe radi za sve konačne fazi automate nad lokalno konačnim kompletnim reziduiranim mrežama.

Sledećim primerom je pokazano da je moguće da niz fazi ekvivalencija definisan sa (2.16) beskonačan, dok je niz fazi kvazi–uređenja definisan sa (3.20) konačan.

Primer 3.2.2. Neka je $\mathscr{L}$ Goguenova (proizvod) struktura i $\mathscr{A}=(A,X,\delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A=\{1,2,3\}$, ulaznim alfabetom $X=\{x\}$ i relacijom fazi prelaza δ_x^A datom sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako proceduru (2.16) primenimo na punu relaciju na skupu A, dobijamo niz $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi ekvivalencija na A, gde je

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2^{k-1}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^{k-1}} & 1 \end{bmatrix}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Sa druge strane, ako pomoću (3.20) formiramo niz fazi kvazi–uređenja sadržanih u punoj relaciji na A, dobijamo da je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan niz fazi kvazi–uređenja na A, dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad R_k = R_2, \ \text{za sve } k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 3.$$

U opštem slučaju, redukcija fazi automata korišćenjem najvećeg desno invarijantneg fazi kvazi–uređenja daje bolje rezultate od redukcije pomoću najveće desno invarijantne fazi ekvivalencije tog automata. Ovo će biti pokazano sledećim primerom. Dalje, kako je pokazano Teoremom 3.1.4, ako je fazi kvazi–uređenje R fazi automata $\mathscr{A}$ rešenje opšteg sistema, tada je njegova prirodna fazi ekvivalencija E_R takođe rešenje opšteg sistema. Ali, sledeći primer takođe pokazuje da ako je R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje, tada E_R ne mora da bude desno invarijantna fazi ekvivalencija.

Primer 3.2.3. Neka je $\mathscr{L}$ Booleova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$ i fazi relacijama prelaza δ_x^A i δ_y^A predstavljenim sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} na $\mathscr{A}$, njegova prirodna fazi ekvivalencija $E_{R^{\mathrm{ri}}}$ i najveće desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{ri} na $\mathscr{A}$ date su sa

$$R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{R^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, E^{ri} ne redukuje broj stanja fazi automata $\mathscr{A}$, dok R^{ri} smanjuje broj stanja od $\mathscr{A}$ i redukuje ga na fazi automat sa dva stanja.

Štaviše, R^{ri} je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje, dok njegova prirodna fazi ekvivalencija $E_{R^{\mathrm{ri}}}$ nije desno invarijantna fazi ekvivalencija (jer važi $E^{\mathrm{ri}} < E_{R^{\mathrm{ri}}}$). Takođe, dobijamo da afterset fazi automat $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ nije izomorfan sa faktor fazi automatom $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{ri}}}$, s obzirom da je

$$R^{\mathrm{ri}} \circ \delta_y^A \circ R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{R^{\mathrm{ri}}} \circ \delta_y^A \circ E_{R^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje ćemo posmatrati slučaj kada reziduirana mreža $\mathscr{L}$ zadovoljava uslove (2.17) i (2.19) koji, kako je primećeno u prethodnoj glavi, važe za svaku BL-algebru na realnom, jediničnom intervalu, a specijalno na Łukasiewiczevoj, Goguenovoj (proizvod) i Gödelovoj strukturi.

Naime, važi sledeći rezultat:

Teorema 3.2.4. *Neka je $\mathscr{L}$ kompletna reziduirana mreža koja zadovoljava uslove* (2.17) *i* (2.19) *i* $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ *konačnan fazi automat nad* $\mathscr{L}$. *Neka je R fazi kvazi–uređenje na A, R^{ri} najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ sadržano u R i neka je $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz fazi kvazi–uređenja na A definisan sa* (3.20). *Tada je*

$$R^{\mathrm{ri}} = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k. \tag{3.22}$$

Dokaz. U prethodnoj glavi je pokazano da ako (2.17) važi, tada za proizvoljne neopadajuće nizove $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L$ važi da je

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (x_k \vee y_k) = \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} x_k\Big) \vee \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} y_k\Big). \tag{3.23}$$

Zbog jednostavnosti uvedimo oznaku

$$S = \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k.$$

Jasno, S je fazi kvazi–uređenje. Da bismo dokazali (3.22) dovoljno je da pokažemo da je S desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Pre svega, imamo sledeće

$$S(a,b) \leqslant R_{k+1}(a,b) \leqslant R_k^r(a,b) \leqslant \delta_x^A \circ R_k(b,c) \to \delta_x^A \circ R_k(a,c), \tag{3.24}$$

važi za sve $a,b,c \in A$, $x \in X$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada, iz (3.24) i (1.35) dobijamo

$$\begin{aligned} S(a,b) &\leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \Big(\delta_x^A \circ R_k(b,c) \to \delta_x^A \circ R_k(a,c)\Big) \\ &\leqslant \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ R_k(b,c)\big) \to \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ R_k(a,c)\big), \end{aligned} \tag{3.25}$$

za sve $a,b,c \in A$ i svaki $x \in X$. Dalje,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ R_k(b,c)\big) &= \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \Big(\bigvee_{d\in A} \big(\delta_x^A(b,d) \otimes R_k(d,c)\big)\Big) \\ &= \bigvee_{d\in A} \Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A(b,d) \otimes R_k(d,c)\big)\Big) && \text{(iz (2.18))} \\ &= \bigvee_{d\in A} \Big(\delta_x^A(b,d) \otimes \big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} R_k(d,c)\big)\Big) && \text{(iz (2.19))} \\ &= \bigvee_{d\in A} \Big(\delta_x^A(b,d) \otimes S(d,c)\Big) = (\delta_x^A \circ S)(b,c). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Upotreba uslova (2.18) je opravdana činjenicom da je A konačan i da je $\{R_k(d,c)\}_{k\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz, odakle je i niz $\{\delta_x^A(b,d)\otimes R_k(d,c)\}_{k\in\mathbb{N}}$ takođe neopadajući. Na sličan način dokazuje se i da je

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \big(\delta_x^A \circ R_k(a,c)\big) = (\delta_x^A \circ S)(a,c). \tag{3.27}$$

Dakle, iz (3.25), (3.26) i (3.27) dobijamo

$$S(a,b) \leqslant (\delta_x^A \circ S)(b,c) \to (\delta_x^A \circ S)(a,c).$$

Kako ova nejednakost važi za sve $x\in X$ i svaki $c\in A$, imamo da je

$$S(a,b) \leqslant \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{c\in A} (\delta_x^A \circ S)(b,c) \to (\delta_x^A \circ S)(a,c),$$

pa iz (iii) of Teoreme 3.2.1 dobijamo da je S desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. $\square$

3.3. Specijalni tipovi desno i levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja

Za dato fazi kvazi–uređenje R i fazi automat $\mathscr{A}$, Teoremom 3.2.3 je opisan postupak za izračunavanje R^{ri} u slučaju kada je odgovarajuća istinitosna struktura $\mathscr{L}$ lokalno konačna kompletna reziduirana mreža, a Teorema 3.2.4 daje karakterizaciju R^{ri} kada $\mathscr{L}$ zadovoljava određene distributivne zakone. Prirodno se postavlja se pitanje, šta ako $\mathscr{L}$ ne zadovoljava nijedan od navedenih uslova? U ovom slučaju je moguće aproksimovati R^{ri} pomoću manjeg fazi kvazi–uređenja koje pripada nekom podskupu skupa $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}(\mathscr{A})$ čiji je najveći element moguće izračunati i onda kada je $\mathscr{L}$ proizvoljna kompletna mreža. Prvi takav podskup je $\mathscr{Q}^{\mathrm{cri}}(\mathscr{A})$, skup svih desno invarijantnih krisp kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$, a drugi je $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}(\mathscr{A})$, skup svih jako desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja.

Primetimo da je za krisp relaciju ϱ i fazi relaciju R na skupu A važi da je $\varrho\leqslant R$ ako i samo ako je $\varrho\subseteq \widehat{R}$, gde sa $\widehat{R}$ označavamo krisp deo od R. Neka je $\mathscr{A}=(A,X,\delta^A)$ fazi automat i neka je R fazi kvazi–uređenje na A. Lako se proverava da se krisp deo fazi kvazi–uređenja R^r može predstaviti na sledeći način: za sve $a,b\in A$ važi

$$(a,b)\in\widehat{R^r} \;\Leftrightarrow\; (\forall x\in X)(\forall c\in A)\ (\delta_x^A\circ R)(b,c)\leqslant(\delta_x^A\circ R)(a,c). \tag{3.28}$$

Jasno, $\widehat{R^r}$ je kvazi–uređenje.

Sledeća teorema daje postupak za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog krisp kvazi–uređenja fazi automata, sadržanog u datom kvazi–uređenju.

Teorema 3.3.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat, neka je ϱ kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ i ϱ^{ri} najveće desno invarijantno kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ sadržano u ϱ.*

Definišimo induktivno niz $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ kako sledi:

$$\varrho_1 = \varrho, \quad \varrho_{k+1} = \varrho_k \cap \widehat{\varrho_k^r}, \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Tada

(a) $\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \cdots \subseteq \varrho_{k+1} \subseteq \varrho_k \subseteq \cdots \subseteq \varrho_1 = \varrho$;

(b) *Ako je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je $\varrho_k = \varrho_{k+1} = \varrho^{\mathrm{ri}}$;*

(c) *Ako je $\mathscr{A}$ konačan, tada je $\varrho_k = \varrho^{\mathrm{ri}}$ za neki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. (a) Jasno, $\varrho_{k+1} \subseteq \varrho_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \varrho_1$. Ako je $\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \varrho_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $(\varrho^{\mathrm{ri}})^r \leqslant \varrho_k^r$, a takođe je i $\varrho^{\mathrm{ri}} \leqslant (\varrho^{\mathrm{ri}})^r$, tako da je

$$\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \widehat{(\varrho^{\mathrm{ri}})^r} \subseteq \widehat{\varrho_k^r},$$

a odavde sledi da je $\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \varrho_{k+1}$. Dakle, indukcijom dobijamo da je $\varrho^{\mathrm{ri}} \subseteq \varrho_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ako je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada je

$$\varrho_k = \varrho_{k+m} \subseteq \varrho_{k+1} \subseteq \widehat{\varrho_k^r} \leqslant \varrho_k^r,$$

, odakle je ϱ_k desno invarijantno kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Zaključujemo, $\varrho_k = \varrho_{k+1} = \varrho^{\mathrm{ri}}$.

(c) Ako je skup A konačan, tada je skup svih krisp relacija na A takođe konačan, pa postoje $k, m \in \mathbb{N}$ za koje je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$ i tada je$\varrho_k = \varrho^{\mathrm{ri}}$. □

Prethodnom teoremom je pokazano da najveće desno invarijantno krisp kvazi–uređenje može biti efektivno izračunato za bilo koji konačni fazi automat nad proizvoljnom kompletnom reziduiranom mrežom, čak i za konačan fazi automat nad proizvoljnim mrežno uređenim monoidom. Ipak, onda kada je moguće izračunati najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje, njegovim korišćenjem se, u opštem slučaju, postiže bolja redukcija u poređenju sa redukcijom pomoću najvećeg krisp kvazi–uređenjem. Ovo je pokazano u sledećem primeru:

Primer 3.3.1. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x\}$ i δ_x^A datom sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} i najveće desno invarijantno krisp kvazi–uređenje ϱ^{ri} na $\mathscr{A}$ su

$$R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varrho^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ϱ^{ri} ne redukuje fazi automat $\mathscr{A}$, dok R^{ri} redukuje $\mathscr{A}$ na fazi automat sa samo dva stanja.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Ako je fazi kvazi–uređenje R na A rešenje sistema

$$R \circ \delta_x^A = \delta_x^A, \quad x \in X, \tag{3.29}$$

tada ga zovemo *jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$, a ako je rešenje sistema

$$\delta_x^A \circ R = \delta_x^A, \quad x \in X, \tag{3.30}$$

tada ga zovemo *jako levo invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$. Jasno, svako jako desno (levo) invarijantno fazi kvazi–uređenje je desno (levo) invarijantno. Primetimo da je fazi kvazi–uređenje na A istovremeno jako desno i jako levo invarijantna ako i samo ako je rešenje sistema

$$R \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^A, \quad x \in X, \tag{3.31}$$

i tada ga zovemo *jako invarijanto fazi kvazi–uređenje*.

Ako je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, tada pod nazivom *jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$ podrazumevamo fazi kvazi–uređenje na A koje je ne samo rešenje sistema (3.29) već i

$$R \circ \tau^A = \tau^A, \tag{3.32}$$

dok je *jako levo invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$ fazi kvazi–uređenje koje je rešenje sistema (3.30) i

$$\sigma^A \circ R = \sigma^A. \tag{3.33}$$

Važi sledeća teorema:

Teorema 3.3.2. *Neka je* $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ *proizvoljan fazi automat i neka je* $\mathscr{A}' = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *fazi raspoznavač koji odgovara* $\mathscr{A}$*. Tada*

(a) *Skup* $\mathscr{Q}^{\text{sri}}(\mathscr{A})$ *svih jako desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na* $\mathscr{A}$ *je glavni ideal mreže* $\mathscr{Q}(A)$*. Najveći element ovog glavnog ideala je fazi kvazi–uređenje* R^{sri} *definisano sa*

$$R^{\text{sri}}(a, b) = \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{c \in A} \delta_x^A(b, c) \to \delta_x^A(a, c), \quad \textit{za sve } a, b \in A. \tag{3.34}$$

(b) *Skup* $\mathscr{Q}^{\text{sri}}(\mathscr{A}')$ *svih jako desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na* $\mathscr{A}'$ *je glavnio ideal mreže* $\mathscr{Q}(A)$*. Najveći element ovog glavnog ideala je fazi kvazi–uređenje* $R_\tau \wedge R^{\text{sri}}$*.*

Dokaz. (a) Fazi relacija R^{sri} je fazi kvazi–uređenje, kao presek familije fazi kvazi–uređenja definisanih kao u (3.1). Neka je R proizvoljno fazi kvazi–uređenje na A. Tada je zadovoljeno

$$\begin{aligned}
R \leqslant R^{\text{sri}} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\forall a, b, c \in A)\ R(a, b) \leqslant \delta_x^A(b, c) \to \delta_x^A(a, c)\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\forall a, b, c \in A)\ R(a, b) \otimes \delta_x^A(b, c) \leqslant \delta_x^A(a, c)\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\forall a, c \in A)\ \bigvee_{b \in A} R(a, b) \otimes \delta_x^A(b, c) \leqslant \delta_x^A(a, c)\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)(\forall a, c \in A)\ R \circ \delta_x^A(a, c) \leqslant \delta_x^A(a, c)\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)\ R \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X)\ R \circ \delta_x^A = \delta_x^A,
\end{aligned}$$

pa je R jako desno invarijantno ako i samo ako pripada glavnom idealu od $\mathscr{Q}(A)$ generisanom sa R^{sri}.

(b) Sledi direktno iz (a). □

Prema (3.34), najveće jako desno invarijantno kvazi–uređenje može da se izračuna za svaki konačan fazi automat nad proizvoljnom kompletnom reziduiranom mrežom. Ipak, kao i kod desno invarijantnih krisp kvazi–uređenja i ovde se, u opštem slučaju, bolja redukcija postiže pomoću jako desno invarijantnih fazi uređenja, što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.3.2. Posmatrajmo fazi automat $\mathscr{A}$ iz Primera 3.2.3. U ovom primeru smo pokazali da najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri}

na $\mathscr{A}$ redukuje $\mathscr{A}$ na fazi automat sa dva stanja. Sa druge strane, najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{sri} na $\mathscr{A}$ je

$$R^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa odgovarajući afterset fazi automat $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/R^{\mathrm{sri}} = (A_2, X, \delta^{A_2})$ ima tri stanja i fazi tranzicijske relacije $\delta_x^{A_2}$ i $\delta_y^{A_2}$ su

$$\delta_x^{A_2} = \delta_x^A \circ R^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^{A_2} = \delta_y^A \circ R^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje, najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R_2^{sri} na $\mathscr{A}_2$ je dato sa

$$R_2^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je afterset fazi automat $\mathscr{A}_2/R_2^{\mathrm{sri}}$ izomorfan sa $\mathscr{A}_2$. Zaključujemo da broj stanja od $\mathscr{A}$ ne može da bude smanjen pomoću jako desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja.

3.4. Slabo desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja

U prethodnom odeljku razmatrali smo desno i levo invarijantna fazi kvazi–uređenja i neke njihove specijalne tipove. U ovom odeljku izučavamo fazi kvazi–uređenja koja su opštija od desno i levi invarijantnih.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač. Za svaku reč $u \in X^*$ definišimo fazi skupove $\sigma_u^A, \tau_u^A \in L^A$ sa

$$\sigma_u^A(a) = \bigvee_{b \in A} \sigma^A(b) \otimes \delta_*^A(b, u, a), \qquad \tau_u^A(a) = \bigvee_{b \in A} \delta_*^A(a, u, b) \otimes \tau^A(b),$$

za svaki $a \in A$, tj. $\sigma_u^A = \sigma^A \circ \delta_u^A$ i $\tau_u^A = \delta_u^A \circ \tau^A$. Očigledno, za praznu reč $e \in X^*$ važi $\sigma_e^A = \sigma^A$ i $\tau_e^A = \tau^A$. Fazi skupovi σ_u^A već su korišćeni u [47] i odigrali su značajnu ulogu u determinizaciji fazi automata. Slično, za svaki $a \in A$ definišemo fazi jezike $\sigma_a^A, \tau_a^A \in L^{X^*}$, sa $\sigma_a^A(u) = \sigma_u^A(a)$ i $\tau_a^A(u) = \tau_u^A(a)$, za svaku $u \in X^*$. Sledeći terminologiju korišćenu u [23] za nedeterminističke automate, fazi skup σ_a^A zovemo *levi fazi jezik* od a, dok fazi skup τ_a^A zovemo *desni fazi jezik* od a. Levi fazi jezici su izučavani u [47, 49].

Fazi kvazi–uređenje R na A koje je rešenje sistema fazi relacijskih jednačina

$$R \circ \tau_u^A = \tau_u^A, \quad u \in X^*, \tag{3.35}$$

zovemo *slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje* na fazi raspoznavaču $\mathscr{A}$, a ako je R rešenje sistema

$$\sigma_u^A \circ R = \sigma_u^A, \quad u \in X^*, \tag{3.36}$$

tada ga zovemo *slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje* na $\mathscr{A}$. Važi sledeća

Teorema 3.4.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač. Tada*

(a) *Skup $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}(A)$ svih slabo desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja na $\mathscr{A}$ je glavni ideal mreže $\mathscr{Q}(A)$. Najveći element glavnog ideala je fazi kvazi–uređenje R^{wri} na A definisano sa*

$$R^{\mathrm{wri}}(a,b) = \bigwedge_{u \in X^*} \tau_u^A(b) \to \tau_u^A(a), \qquad \text{za sve } a, b \in A. \tag{3.37}$$

Štaviše, R^{wri} je najveće rešenje sistema (3.35) *u $\mathscr{R}(A)$.*

(b) *Svako slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ je rešenje opšteg sistema.*

(c) *Svako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ je slabo desno invarijantna.*

Dokaz. (a) R^{wri} je fazi kvazi–uređenje, budući da je presek familije fazi kvazi–uređenja definisanih sa (3.1). Prema rezultatima iz [95] (vidi [87, 88, 89]), R^{wri} je najveće rešenje sistema (3.35). Lako se proverava da rešenja sistema (3.35) na skupu $\mathscr{Q}(A)$ čine ideal od $\mathscr{Q}(A)$, štaviše glavni ideal od $\mathscr{Q}(A)$.

Neka je R proizvoljano rešenje (3.35) na skupu $\mathscr{R}(A)$. Fazi jednakost I na A je takođe rešenje sistema (3.35), pa iz (1.68) dobijamo da je $(R \vee I)^\infty$ rešenje (3.35). Kako je $(R \vee I)^\infty$ fazi kvazi–uređenje na A, zaključujemo da je $R \leqslant (R \vee I)^\infty \leqslant R^{\mathrm{wri}}$, odakle je R^{wri} najveće rešenje sistema (3.35) u $\mathscr{R}(A)$.

(b) Neka je R proizvoljno slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Indukcijom po n ćemo dokazati da je

$$R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \delta_{x_2}^A \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \tau^A = \delta_{x_1}^A \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \tau^A, \tag{3.38}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Pre svega, primetimo da je $\tau_e^A = \tau^A$, gde je $e \in X^*$ prazna reč, pa iz (3.35) dobijamo $R \circ \tau^A = \tau^A$. Odavde i iz (3.35), za svaki $x \in X$ je zadovoljeno

$$R \circ \delta_x^A \circ R \circ \tau^A = R \circ \delta_x^A \circ \tau^A = \delta_x^A \circ \tau^A,$$

odakle je (3.38) tačno za $n = 1$. Pretpostavimo sada da (3.38) važi za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je iz (3.38) i (3.35), za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$ tačno sledeće

$$\begin{aligned}
R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \delta_{x_{n+1}}^A \circ R \circ \tau^A = & \\
&= R \circ \delta_{x_1}^A \circ (R \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \delta_{x_{n+1}}^A \circ R \circ \tau^A) \\
&= R \circ \delta_{x_1}^A \circ (\delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \delta_{x_{n+1}}^A \circ \tau^A) \\
&= R \circ \delta_{x_1}^A \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \delta_{x_{n+1}}^A \circ \tau^A \\
&= \delta_{x_1}^A \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \delta_{x_{n+1}}^A \circ \tau^A.
\end{aligned}$$

Dakle, (3.38) važi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Konačno, iz (3.38) direktno sledi da je R rešenje opšteg sistema.

(c) Neka je R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Za svaku reč $u \in X^*$ važi ne samo $R \circ \delta_u^A \circ R = \delta_u^A \circ R$, već i $R \circ \tau^A = \tau^A$, što povlači $R \circ \tau_u^A = R \circ \delta_u^A \circ \tau^A = R \circ \delta_u^A \circ R \circ \tau^A = \delta_u^A \circ R \circ \tau^A = \delta_u^A \circ \tau^A = \tau_u^A$. Dakle, R je slabo desno invarijantno. $\square$

Primetimo da R^{wri} možemo predstaviti u obliku

$$R^{\mathrm{wri}}(a,b) = \bigwedge_{u \in X^*} \tau_b^A(u) \to \tau_a^A(u), \qquad \text{za sve } a, b \in A, \tag{3.39}$$

tj. $R^{\mathrm{wri}}(a,b)$ možemo interpretirati kao stepen inkluzije fazi jezika τ_b^A u fazi jeziku τ_a^A.

Analogno, možemo definisati fazi kvazi–uređenje R^{wli} na $\mathscr{A}$ sa

$$R^{\mathrm{wli}}(a,b) = \bigwedge_{u \in X^*} \sigma_u^A(a) \to \sigma_u^A(b) = \bigwedge_{u \in X^*} \sigma_a^A(u) \to \sigma_b^A(u), \qquad \text{za sve } a, b \in A, \tag{3.40}$$

i možemo pokazati da teorema koja odgovara Teoremi 3.4.1, ali za R^{wli}, takođe važi. Jednostavno se pokazuje da je najveća slabo desno invarijantna fazi ekvivalencija E^{wrie} na $\mathscr{A}$ data sa

$$E^{\mathrm{wrie}}(a,b) = \bigwedge_{u \in X^*} \tau_u^A(a) \leftrightarrow \tau_u^A(b) = \bigwedge_{u \in X^*} \tau_a^A(u) \leftrightarrow \tau_b^A(u), \qquad \text{za sve } a, b \in A, \tag{3.41}$$

a da je najveća slabo levo invarijantna fazi ekvivalencija E^{wlie} na $\mathscr{A}$ data sa

$$E^{\mathrm{wlie}}(a,b) = \bigwedge_{u\in X^*} \sigma_u^A(a) \leftrightarrow \sigma_u^A(b) = \bigwedge_{u\in X^*} \sigma_a^A(u) \leftrightarrow \sigma_b^A(u), \qquad \text{za sve } a,b\in A, \tag{3.42}$$

Prirodno, označimo sa E^{wri} prirodnu fazi ekvivalenciju od R^{wri}, a sa E^{wli} prirodnu fazi ekvivalencija od R^{wlie}. Fazi kvazi–uređenje R^{wri} takođe zovemo i *desno Myhill-Nerodeovo fazi kvazi–uređenje* od $\mathscr{A}$, R^{wli} zovemo *levo Myhill-Nerodeovo fazi kvazi–uređenje* od $\mathscr{A}$, E^{wrie} zovemo *desna Myhill-Nerodeova fazi ekvivalencija* od $\mathscr{A}$, a E^{wlie} *levo Myhill-Nerodeova fazi ekvivalencija* od $\mathscr{A}$. Primetimo da fazi relaciju N_σ slobodnog monoida X^* definisanu sa

$$N_\sigma(u,v) = \bigwedge_{a\in A} \sigma_u^A(a) \leftrightarrow \sigma_v^A(a) = \bigwedge_{a\in A} \sigma_a^A(u) \leftrightarrow \sigma_a^A(v), \qquad \text{za sve } u,v\in X^*,$$

zovemo *Nerodeova fazi desna kongruencija* na X^*. Nerodeova fazi desna kongruencija i Myhillova fazi kongruencija na slobodnim monoidima pridruženih fazi automatima izučavane su u [47, 49].

Sledeći primer pokazuje da postoje slabo desno invarijantna fazi kvazi–uređenja koja nisu desno invarijantna i da slabo desno invarijantna fazi kvazi–uređenja vrše bolju redukciju od desno invarijantnih.

Primer 3.4.1. Neka je $\mathscr{L}$ Booleova struktura i $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač nad $\mathscr{L}$, sa skupom stanja $A = \{1,2,3,4\}$, ulaznim alfabetom $X = \{x\}$. Neka je σ^A proizvoljan podskup od A, a δ_x^A i τ^A date sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau^A = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zbog jednostavnosti označimo $\tau^A = \tau$. Kako smo ranije primetili, najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na fazi raspoznavaču $\mathscr{A}$ je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje fazi automata (A, X, δ^A) sadržano u fazi kvazi–uređenju R^τ. Ovde je

$$R^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle, primenjujući na R^τ postupak iz Teoreme 3.2.3, dobijamo da je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} na $\mathscr{A}$

$$R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sa druge strane, imamo da je $\tau_e = \tau$ i

$$\tau_x = \delta_x^A \circ \tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_{x^2} = \delta_x^A \circ \tau_x = \tau_x$$

što znači da je $\tau_u = \tau_x$, za svaki $u \in X^*$, $u \neq e$, odakle

$$R^{\mathrm{wri}} = R^\tau \wedge R^{\tau_x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, R^{ri} je strogo manje od R^{wri} i R^{ri} ne smanjuje broj stanja od $\mathscr{A}$, dok R^{wri} redukuje $\mathscr{A}$ na fazi raspoznavač $\mathscr{A}/R^{\mathrm{wri}} = (A_2, X, \delta^{A_2}, \sigma^{A_2}, \tau^{A_2})$ sa dva atanja, dok su $\delta_x^{A_2}$ i τ^{A_2} date sa

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i σ^{A_2} je definisana kao u (3.4).

Ipak, iako slabo desno invarijantna i slabo levo invarijantna fazi kvazi–uređenja, u opštem slučaju, daju bolju redukcija od desno invarijantnih i levo invarijantnih, ovde postoje ozbiljna ograničenja. Za fazi automate i fazi raspoznavače nad lokalnim konačnim kompletnim reziduiranim mrežama, najveće desno i levo invarijantno fazi kvazi–uređenje može biti izračunato u polinomialnom vremenu, korišćenjem procedure iz Teoreme 3.2.3, ali izračunavanje najveće slabo desno i slabo levo invarijantnih kvazi–uređenja je težak problem. Naime, pojedinačno svaka jednačina $R \circ \tau_u^A = \tau_u^A$ u (3.35) se jednostavno rešava, ako je dat fazi skup τ_u^A, dok izračunavanje τ_u^A, za svaku reč $u \in X^*$, može biti teško. U stvari, izračunavanje τ_u^A, za svaku $u \in X^*$, predstavlja determinizaciju reverznog fazi raspoznavača od $\mathscr{A}$, dok izračunavanje

σ_u^A, za svaku $u \in X^*$, jeste determinizacija od $\mathscr{A}$ korišćenjem postupka datom u [47], koju zovemo *konstrukcija pomoću dostižnih fazi podskupova* (engl. accessible fuzzy subset construction). Poznato je da prilikom determinizacije nedeterminističkog raspoznavača, broj stanja može porasti eksponencijalno u odnosu na broja stanja polaznog raspoznavača, a u slučaju fazi raspoznavača skupovi stanja mogu biti i beskonačni. Uslovi pod kojima su ovi skupovi konačni određeni su u [47, 49]. Štaviše, zbog eksponencijalnog rasta broja stanja automata tokom determinizacije nedeterminističkog raspoznavača, u procedurama za redukciju broja stanja automata smanjenje broja stanja se vrši pre njegove determinizacije. Ali, ovde je determinizacija neophodna pre redukcije automata pomoću najveće slabo desno i slabo levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja.

3.5. Naizmenične redukcije pomoću fazi kvazi–uređenja

U ovom odeljku ćemo pokazati da se korišćenjem naizmeničnih redukcija pomoću najveće desno i najveće levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja ili pomoću najvećeg slabo desno i najvećeg slabo levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja postiže bolja redukcija fazi automata. Pokazaćemo da u nekim slučajevima čak iako nijedno od navedenih fazi kvazi–uređenja ponaosob ne redukuje dati fazi automat, naizmenične redukcije smanjuju broj stanja tog fazi automata.

Teorema 3.5.1. *Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat ili fazi raspoznavač, R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$, a S fazi kvazi–uređenje na skupu stanja od $\mathscr{A}$, takvo da je $R \leqslant S$. Tada*

(a) *S je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je S/R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$;*

(b) *S je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je S/R najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$;*

(c) *R je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je $\widetilde{R}$ najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$.*

Dokaz. Potsetimo da je $R \leqslant S$ ekvivalentno sa $R \circ S = S \circ R = S$.

(a) Pretpostavimo da je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat. Posmatrajmo proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned}(\delta_x^{A/R} \circ S/R)(R_a, R_b) &= \bigvee_{c \in A} \delta_x^{A/R}(R_a, R_c) \otimes S/R(R_c, R_b) \\ &= \bigvee_{c \in A} (R \circ \delta_x^A \circ R)(a, c) \otimes S(c, b) \\ &= (R \circ \delta_x^A \circ R \circ S)(a, b) = (\delta_x^A \circ R \circ S)(a, b) \\ &= (\delta_x^A \circ S)(a, b),\end{aligned} \tag{3.43}$$

pa iz dokaza Teoreme 3.1.3, sledi

$$(S/R \circ \delta_x^{A/R} \circ S/R)(R_a, R_b) = (S \circ \delta_x^A \circ S)(a, b). \tag{3.44}$$

Prema tome, iz (3.43) i (3.44) dobijamo da (a) važi.

Dalje, neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač. Tada za svaki $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned}(S/R \circ \tau^{A/R})(R_a) &= \bigvee_{b \in A} S/R(R_a, R_b) \otimes \tau^{A/R}(R_b) \\ &= \bigvee_{b \in A} S(a, b) \otimes \tau^A(b) = (S \circ \tau^A)(a),\end{aligned}$$

pa je $S/R \circ \tau^{A/R} = \tau^{A/R}$ ako i samo ako je $S \circ \tau^A = \tau^A$. Dakle i u ovom slučaju je (a) tačno.

(b) Neka je S najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Iz (a), S/R je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$. Neka je Q najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$. Definišimo fazi relaciju T na $\mathscr{A}$ sa

$$T(a, b) = Q(R_a, R_b), \qquad \text{za sve } a, b \in A.$$

Lako se proverava da je T fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Prema (a), $\widetilde{R}$ je desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$, što povlači $\widetilde{R} \leqslant Q$, pa za proizvoljan $a, b \in A$ dobijamo

$$R(a, b) = \widetilde{R}(R_a, R_b) \leqslant Q(R_a, R_b) = T(a, b),$$

što znači da je $R \leqslant T$. Odavde imamo da je $Q = T/R$, pa iz (a) dobijamo da je T desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Odavde je $T \leqslant S$. Sada, prema (3.10), imamo da je $Q = T/R \leqslant S/R$, pa ako je S/R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$, zaključujemo da je $Q = S/R$, tj. S/R je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$.

Obratno, neka je S/R najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$. Iz (a)važi da je$S$ desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Neka je T najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Tada imamo da je $R \leqslant S \leqslant T$, pa iz (a) sledi da je T/R desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$, što vodi do $T/R \leqslant S/R$. Sada, iz (3.10) sledi da je $T \leqslant S$, odakle je $T = S$. Dokazali smo da je S najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$.

(c) Tvrđenje sledi direktno iz (b). $\square$

Izvesno je da prethodna teorema važi i za levo invarijantna fazi kvazi–uređenja. Dalje, važi i slična teorema koja se tiče slabo desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja:

Teorema 3.5.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, R slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ i S fazi kvazi–uređenje na A takvo da je $R \leqslant S$. Tada*

(a) *S je slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je S/R slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$;*

(b) *S je najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako is amo ako je S/R najveće slabo desno invarijanto fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$;*

(c) *R je najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$ ako i samo ako je $\widetilde{R}$ najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R$.*

Dokaz. (a) Za proizvoljan $a \in A$ i $u = x_1 \dots x_n \in X^*$, $x_1, \dots, x_n \in X$, iz (3.38) dobijamo

$$\begin{aligned}
\tau_u^{A/R}(R_a) &= (\delta_u^{A/R} \circ \tau^{A/R})(R_a) = \bigvee_{b \in A} \delta_u^{A/R}(R_a, R_b) \otimes \tau^{A/R}(R_b) \\
&= \bigvee_{b \in A} (R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \dots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R)(a, b) \otimes (R \circ \tau^A)(b) \\
&= (R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \dots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \tau^A)(a) \\
&= (\delta_{x_1}^A \circ \dots \circ \delta_{x_n}^A \circ \tau^A)(a) \\
&= \tau_u^A(a).
\end{aligned}$$

Dalje, za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned}
(S/R \circ \tau_u^{A/R})(R_a) &= \bigvee_{b \in A} S/R(R_a, R_b) \otimes \tau_u^{A/R}(R_b) = \bigvee_{b \in A} S(a, b) \otimes \tau_u^A(b) \\
&= (S \circ \tau_u^A)(a).
\end{aligned}$$

Odavde je $S/R \circ \tau_u^{A/R} = \tau_u^{A/R}$ ako i samo ako je $S \circ \tau_u^A = \tau_u^A$, čime smo dokazali (a).

Tvrđenje (b) se dokazuje slično kao i (b) Teoreme 3.5.1, a (c) direktno sledi iz (b). $\square$

Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat. Niz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ fazi automata zovemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$*-redukcija* za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ imamo da je $\mathscr{A}_{k+1}$ je afterset fazi automat $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$. Analogno, korišćenjem levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja definišemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukciju* od $\mathscr{A}$, korišćenjem jako desno i jako levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja definišemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$*-redukcija* i $\mathscr{Q}^{\mathrm{sli}}$*-redukciju* od $\mathscr{A}$. Ako posmatramo fazi raspoznavač, na sličan način definišemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$*-redukciju*, kao i $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukciju* fazi raspoznavača.

Primetimo da za svaki konačan fazi automat $\mathscr{A}$ postoji $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ takva da za svaku $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukciju $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ od $\mathscr{A}$ koja je nastavak ove redukcije važi

$$|\mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_{n+1}| = \cdots = |\mathscr{A}_{n+m}|,$$

tj. svi fazi automati $\mathscr{A}_{n+1}, \ldots, \mathscr{A}_{n+m}$ imaju isti broj stanja kao $\mathscr{A}_n$. Takođe, postoji najkraća $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ of $\mathscr{A}$ koja ima navedeno svojstvo i koju ćemo zovemo *najkraća* $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$*-redukcija* od $\mathscr{A}$, fazi automat $\mathscr{A}_n$ zovemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$*-redukt* od $\mathscr{A}$, a n zovemo *dužina* najkraće $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukcije. Ako je fazi automat $\mathscr{A}$ svoj sopstveni $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukt, tada ga zovemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$*-redukovan*. Analogno definišmo $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukt* od $\mathscr{A}$, $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukovan* fazi automat, kao i $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{sli}}$*-redukt*, $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{sli}}$*-redukovan* fazi automat. Za fazi raspoznavač na sličan način definišemo $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$*-redukt*, $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$*-redukovan* fazi raspoznavač, $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukt*, $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$*-redukovan* fazi raspoznavač, itd.

Sledećom teoremom je pokazano da dužina najkraće $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$-redukcije nije veća od 2.

Teorema 3.5.3. *Fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}$ je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan ako i samo ako je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} na $\mathscr{A}$ fazi uređenje.*

Prema tome, za svaki konačan fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}$, afterset fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan.

Dokaz. Neka je $\mathscr{A}$ $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Ako R^{ri} nije fazi uređenje, tada je $|\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}| < |\mathscr{A}|$, što je u suprotnosti sa polaznom hipotezom da je $\mathscr{A}$ $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. Odavde zaključujemo da je R^{ri} fazi uređenje.

Obratno, neka je R^{ri} fazi uređenje. Posmatrajmo proizvoljnu $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukciju $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$. Za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je R_k^{ri} najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$. Iz Teoreme 3.5.1, za svaki $k \in \{2, \ldots, n\}$ imamo da je $R_k^{\mathrm{ri}} = \widetilde{R}_{k-1}^{\mathrm{ri}}$, tako da je R_k^{ri} fazi uređenje, pa je iz polazne hipoteze, $R_1^{\mathrm{ri}} = R^{\mathrm{ri}}$ fazi uređenje. Sada, za svaki $k \in \{2, \ldots, n\}$ važi $|\mathscr{A}_k| = |(\mathscr{A}_{k-1})/R_{k-1}^{\mathrm{ri}}| = |\mathscr{A}_{k-1}|$, odakle je $|\mathscr{A}| = |\mathscr{A}_1| = |\mathscr{A}_2| = \cdots = |\mathscr{A}_n|$. Zato, fazi raspoznavač (automat) $\mathscr{A}$ jeste $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan.

Dalje, neka je $\mathscr{A}$ proizvoljan konačan fazi raspoznavač (automat) i neka je R^{ri} najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Tada iz Teoreme 3.5.1 sledi da je $\widetilde{R}^{\mathrm{ri}}$ najveće desno invarijantna fazi kvazi–uređenje na afterset fazi raspoznavaču (automatu) $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$, a kako jeste fazi uređenje, zaključujemo da $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ jeste $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan. □

Slično se dokazuje sledeća:

Teorema 3.5.4. *Fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ je $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$-redukovan ako i samo ako je najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{wri} na $\mathscr{A}$ fazi uređenje.*

Prema tome, za svaki konačni raspoznavač $\mathscr{A}$, afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}/R^{\mathrm{wri}}$ je $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$-redukovan.

Ako je fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan, tj. ako je najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} na $\mathscr{A}$ fazi uređenje, tada afterset fazi automat $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ ima istu kardinalnost kao $\mathscr{A}$, ali nije nužno izomorfan sa $\mathscr{A}$ (vidi Primer 3.5.1). Ako je afterset fazi automat $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ izomorfan sa $\mathscr{A}$, tada fazi automat $\mathscr{A}$ zovemo *kompletno $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukovan*. Analogno definišemo *kompletno $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$-redukovan* fazi automat, kao i *kompletno $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$-, $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$-* i *$\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$-redukovan* fazi raspoznavač.

Primer 3.5.1 pokazuje da čak i ako je fazi raspoznavač ili fazi automat $\mathscr{A}$ $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i/ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$-redukovan, ili je $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$- i/ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$-redukovan moguće je i dalje smanjivati broj njegovih stanja naizmeničnom redukcijom pomoću najveće slabo desno i najveće slabo levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja ili pomoću najvećeg desno i najvećeg levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja. Iz tih razloga uvodimo sledeći koncept.

Neka je $\mathscr{A}$ fazi automat. Niz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ fazi automata zovemo *naizmenična $\mathscr{Q}$-redukcija* od $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}$ i za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ važi sledeće:

(1) $\mathscr{A}_{k+1}$ je afterset fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveće desno invarijantno ili najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$;

(2) Ako je $\mathscr{A}_{k+1}$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$, tada je $\mathscr{A}_{k+2}$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_{k+1}$ u odnosu na najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$;

(3) Ako je $\mathscr{A}_{k+1}$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_k$ u odnosu na najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$, tada je $\mathscr{A}_{k+2}$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_{k+1}$ u odnosu na najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_k$.

Ako je $\mathscr{A}_2$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_1$ u odnosu na najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_1$, tada ovu naizmeničnu $\mathscr{Q}$-redukciju zovemo *naizmenična* $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$*-redukcija*, a ako je $\mathscr{A}_2$ afterset fazi automat od $\mathscr{A}_1$ u odnosu na najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_1$, tada ovu naizmeničnu $\mathscr{Q}$-redukciju zovemo *naizmenična* $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$*-redukcija.*

Primetimo da za svaki konačni fazi automat $\mathscr{A}$ postoji naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ takva da za svaku naizmeničnu $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$-redukciju $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \dots, \mathscr{A}_{n+m}$ koja je nastavak ove redukcije važi

$$|\mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_{n+1}| = \cdots = |\mathscr{A}_{n+m}|,$$

tj. svi fazi automati $\mathscr{A}_{n+1}, \dots, \mathscr{A}_{n+m}$ imaju isti broj stanja kao $\mathscr{A}_n$. Takođe, postoji najkraća naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$-redukcija $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ od $\mathscr{A}$ koja ima ovo svojstvo i koju ćemo zvati *najkraća naizmenična* $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$*-redukcija* od $\mathscr{A}$. Tada ćemo fazi automat $\mathscr{A}_n$ zvati *naizmenični* $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$*-redukt* od $\mathscr{A}$, broj n ćemo zvati *dužina* najkraće naizmenične $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$-redukcije od $\mathscr{A}$. Analogno se definiše pojam *najkraće naizmenične* $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$*-redukcije*, njene dužine i *naizmeničneg* $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$*-redukta* od $\mathscr{A}$. Ako je $\mathscr{A}$ fazi raspoznavač, slično definišemo *naizmeničnu* $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$*-*, *naizmeničnu* $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$*-* i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$*-redukciju*, *naizmenični* $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$*-* i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$*-redukt*, kao i *naizmeničnu* $\mathscr{Q}$*-redukciju*, *naizmeničnu* $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$*-* i $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$*-redukciju*, *naizmenični* $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$*-* i $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$*-redukt.*

Razmotrimo sledeći primer.

Primer 3.5.1. Neka je $\mathscr{L}$ Booleova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač nad $\mathscr{L}$, gde je $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x, y\}$ i neka su δ_x^A, δ_y^A, σ^A i τ^A dati sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je fazi automat (A, X, δ^A) razmotren u Primeru 3.5.1.

Najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{wri} na $\mathscr{A}$ i odgovarajući afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/R^{\mathrm{wri}} = (A_2, X, \delta^{A_2}, \sigma^{A_2}, \tau^{A_2})$ su dati sa

$$R^{\mathrm{wri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dok je najveće slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje R_2^{wli} na $\mathscr{A}_2$ i odgovarajući afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2/R^{\mathrm{wri}} = (A_3, X, \delta^{A_3}, \sigma^{A_3}, \tau^{A_3})$ dati sa

$$R_2^{\mathrm{wli}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se proverava da je najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje i najveće slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_3$ jednake identičkoj relaciji na A_3, pa je afterset fazi raspoznavač od $\mathscr{A}_3$ u odnosu na ova fazi kvazi–uređenja izomorfan sa $\mathscr{A}_3$. Iz ovoga sledi da nijedna od $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcija ne smanjuje broj stanja od $\mathscr{A}_3$, zbog čega niz $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ predstavlja najkraću naizmeničnu $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$-redukciju od $\mathscr{A}$, odakle je $\mathscr{A}_3$ naizmenični $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$-redukt od $\mathscr{A}$.

Sa druge strane, najveće slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{wli} na $\mathscr{A}$ i afterset fazi raspoznavač $\mathscr{A}_2' = \mathscr{A}/R^{\mathrm{wli}} = (A_2', X, \delta^{A_2'}, \sigma^{A_2'}, \tau^{A_2'})$ dati su sa

$$R^{\mathrm{wli}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^{A_2'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^{A_2'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najveće slabo desno invarijantno fazi kvazi–uređenje i najveće slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}_2'$ jednaka su sa R^{wli} i afterset fazi raspoznavači od $\mathscr{A}_2'$ u odnosu na ova fazi kvazi–uređenja izomorfni su sa $\mathscr{A}_2'$. Ovo znači da nijedna od naizmeničnih $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcija od $\mathscr{A}_2'$ ne smanjuje broj stanja $\mathscr{A}_2'$, tj. nijedna od naizmeničnih $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$-redukcija ne smanjuje broj stanja od $\mathscr{A}$, tako da je $\mathscr{A}$ njegov naizmenični $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$-redukt.

Primetimo da su R^{wri} i R_2^{wri} ujedno i najveća desno invarijantna fazi kvazi–uređenja na fazi raspoznavačima $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}_2$, ali i fazi automata (A, X, δ^A) i (A_2, X, δ^{A_2}), pa je R^{wli} takođe i najveće levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na fazi raspoznavaču $\mathscr{A}$ i fazi automatu (A, X, δ^A). Dakle, pokazali smo da u ovom slučaju sve što važi za slabo desno invarijantna i slabo levo invarijantna fazi kvazi–uređenja važi i za desno invarijantna i levo invarijantna kvazi–uređenja.

Primer 3.5.1 pokazuje da čak iako je fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i/ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$-redukovan, ipak je moguće nastaviti smanjivanje broja stanja od $\mathscr{A}$ njegovom naizmeničnom redukcijom pomoću najvećeg slabo desno i slabo levo invarijantnog fazi kvazi–uređenja. Naime, fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ iz ovog primera je istovremeno $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$-redukovan, dok naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$-redukcija smanjuje broj njegovih stanja. Isti primer pokazuje i da naizmenične $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$-redukcije mogu imati različite dužine i da odgovarajući naizmenični redukti-mogu imati različit broj stanja. Zaista, naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{wrl}}$-redukcija smanjuje broj stanja fazi automata $\mathscr{A}$ za jedan, dok naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{wlr}}$-redukcija ne smanjuje broj njegovih stanja. Ova primedba važi i za $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{lr}}$-redukcije.

Redukciju nedeterminističkih automata i raspoznavača pomoću desno invarijantnih i levo invarijantnih kvazi–uređenja izučavali su Champarnaud i Coulon [22, 23], Ilie, Navarro i Yu [54], i Ilie, Solis-Oba i Yu [55] (vidi [51, 53]). U ovim radovima je redukcija nedeterminističkog raspoznavača $\mathscr{A}$ vršena pomoću faktor raspoznavača $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{ri}}}$ i $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{li}}}$ u odnosu na prirodne ekvivalencije od R^{ri} i R^{li}, ali ni u jedanom od radova nije razmatrao afterset raspoznavače $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ i $\mathscr{A}/R^{\mathrm{li}}$. Kao što je ranije primećeno, raspoznavači $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{ri}}}$ i $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$, kao i $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{li}}}$ i $\mathscr{A}/R^{\mathrm{li}}$, ne moraju biti izomorfni, ali imaju isti broj stanja i jesu ekvivalentni sa $\mathscr{A}$. Iz tih razloga, svejedno je da li u redukciji koristimo $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{ri}}}$ ili $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ i $\mathscr{A}/E_{R^{\mathrm{li}}}$ ili $\mathscr{A}/R^{\mathrm{li}}$. Ipak, postoje značajne prednosti korišćenja afterset automata koje se uočavaju kod naizmeničnih redukcija. Za raspoznavač $\mathscr{A}$ sa tri stanja iz Primera 3.5.1, prirodne ekvivalencije $E_{R^{\mathrm{ri}}}$ i $E_{R^{\mathrm{li}}}$ jednake su relaciji jednakosti, pa naizmenične redukcije pomoću ovih ekvivalencija ne daju rezultate, ali naizmenična $\mathscr{Q}^{\mathrm{rl}}$-redukcija od $\mathscr{A}$ smanjuje broj njegovih stanja za jedan. Štaviše, s obzirom da su ekvivalencije E^{ri} i E^{li} na A relacije jednakosti, i nijedna od naizmeničnih $\mathscr{E}$-redukcija ne redukuje $\mathscr{A}$.

Kod naizmeničnih $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcija iz Primera 3.5.1 dobili smo da su tri uzastopna člana izomorfna i iz te činjenice smo zaključili da je nijedna od naizmeničnih $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcija ne može dalje smanjivati broj stanja fazi raspoznavavača . Sličan zaključak možemo izvući i u slučaju da smo dobili fazi raspoznavač sa samom jednim stanjem. Ipak, još uvek nemamo opšti kriterijum na osnovu koga možemo zaključiti da li smo dostigli najmanji broj stanja u naizmeničnoj $\mathscr{Q}$- ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukciji, tj. da li je $\mathscr{Q}$- ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcija završena. Izuzetak su naizmenične redukcije nedeterminističkih automata i raspoznavača. Zaista, ako nakon dva sukcesivna koraka broj stanja automata ostane nepromenjen, tada možemo zaključiti da su $\mathscr{E}$-redukcije završene. Drugim rečima, naizmenična $\mathscr{E}$-redukcija je završena onda kada je dobijen nedeterministički automat koji je istovremeno $\mathscr{E}^{\mathrm{ri}}$- i $\mathscr{E}^{\mathrm{li}}$-redukovan i taj automat je naizmenični $\mathscr{E}$-redukt polaznog automata. Isto važi i za naizmenične $\mathscr{E}^{\mathrm{w}}$-redukcije nedeterminističkih raspoznavača. Međutim pomenuti kriterijum ne važi za naizmenične $\mathscr{Q}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcije čak i u slučaju nedeterminističkih automata i raspoznavača. Razlog je to što afterset automat ili raspoznavač u odnosu na relaciju uređenja ima promenjene relacije prelaza i ne mora da bude izomorfan polaznom automatu, pa je moguće nastaviti naizmeničnu $\mathscr{Q}$- ili $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukciju i dalje smanjivati broj stanja automata (vidi Primer 3.5.1). Ipak, ako u dva uzastopna koraka naizmenične $\mathscr{Q}$- i $\mathscr{Q}^{\mathrm{w}}$-redukcije nedeterminističkih automata, dobijemo isti automat, tada možemo da zaključimo da je odgovarajuća naizmenična redukcija završena. Dobijeni nedeterministički automat istovremeno $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-, $\mathscr{Q}^{\mathrm{li}}$-redukovan ,tj. $\mathscr{Q}^{\mathrm{wri}}$-, $\mathscr{Q}^{\mathrm{wli}}$-redukovan i jeste naizmenični $\mathscr{Q}$-redukt polaznog automata. Primetimo da pomenuti kriterijum važi i za naizmenične $\mathscr{Q}$ i Q^{w} redukcije fazi automata nad lokalno konačnim reziduiranim mrežama.

Konačno, obratimo pažnju na neka karakteristična svojstva jako desno i jako levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja. Lako se proverava da za svako fazi kvazi–uređenje R na fazi automatu $\mathscr{A}$, fazi uređenje $\widetilde{R}$ na afterset fazi automatu $\mathscr{A}/R$ jako invarjiantno, tj. istovremeno je jako desno i jako levo invarijantno. Iz tih razloga, za najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{ri} na $\mathscr{A}$, iz Teoreme 3.5.1 sledi da je $\widetilde{R}^{\mathrm{ri}}$ najveće desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$, odakle je $\widetilde{R}^{\mathrm{ri}}$ najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ i svako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R^{\mathrm{ri}}$ je jako desno invarijantno.

Ipak, za najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{sri} na $\mathscr{A}$ imamo da je $\widetilde{R}^{\mathrm{sri}}$ jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R^{\mathrm{sri}}$, ali sledeći primer pokazuje da ono nije nužno najveći element od $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}(\mathscr{A})$. Iz tih razloga, analogna teorema Teoreme 3.5.3 ne važi za jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenja, tj. afterset fazi automat $\mathscr{A}/R^{\mathrm{sri}}$ ne mora da bude $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$-redukovan, pa za razliku od $\mathscr{Q}^{\mathrm{ri}}$-redukcija, $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$-redukcija se ne završava nakon jednog koraka. Ovo ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.5.2. Neka je $\mathscr{L}$ Booleova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$, gde je $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x\}$, a fazi relacija prelaza δ_x^A je data sa

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R^{sri} na $\mathscr{A}$ je

$$R^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

afterset fazi automat $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}/R^{\mathrm{sri}} = (A_2, X, \delta^{A_2})$ ima dva stanja, tj. $A_2 = \{1, 2\}$, a fazi relacija prelaza $\delta_x^{A_2}$ je data sa

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za posledicu imamo da je najveće jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje R_2^{sri} na $\mathscr{A}_2$ fazi relacija

$$R_2^{\mathrm{sri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

koja redukuje $\mathscr{A}_2$ na fazi automat $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_2/R_2^{\mathrm{sri}} = (A_3, X, \delta^{A_3})$ sa jednim stanjem i fazi tranzionom relacijom $\delta_x^{A_3} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$. Dakle, niz $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$ jeste najkraća $\mathscr{Q}^{\mathrm{sri}}$-redukcija od$\mathscr{A}$.

Ovaj primer pokazuje i da obratna implikacija u (a) Teoreme 3.5.1 ne važi za jako desno invarijantna fazi kvazi–uređenja. Naime, ako pretpostavimo da je S univerzalna relacija na A, tada je $S/R^{\mathrm{sri}} = R_2^{\mathrm{sri}}$ jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}/R^{\mathrm{sri}}$, ali S nije jako desno invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$.

3.6. Primena slabo levo invarijantnih fazi kvazi–uređenja kod FDES

U ovom odeljku ćemo predstaviti primer koji prikazuje moguće primene slabo desno invarijantnih fazi kvazi–uređenja u proučavanju fazi diskretnih sistema događaja.

Diskretni sistem događaja (*DES*, engl. Discrete Event System) je dinamički sistem čija su stanja zadata diskretnim skupom, a prelaz sistema kroz različita stanja je rezultat dejstva diskretnih događaja na sistem u diskretnoj vremenskoj skali [20, 46]. DES imaju značajnu primenu ne samo u mnogim naučnim oblastima, recimo u računarstvu, računarskim mrežama i mrežnim komunikacijama, već i u sferama svakodnevnog života, poput proizvodnje, kontrole javnog prevoza i saobraćaja, zdravstva itd. Uobičajeno je da su diskretni sistemi događaja predstavljeni konačnim automatima (determinističkim ili nedeterminističkim), događaji su predstavljeni pomoću ulaznih simbola, a ponašanje DES-a je opisano jezikom raspoznatim pomoću odgovarajućeg automata. Ipak, često se dešava da su stanja i prelazi između stanja DES-a nedovoljno precizni i u izvesnom smislu neizvesni. Uzimajući u obzir ovakve slučajeve, Lin i Ying uopštavaju koncept DES-a i uvode pojam *fazi diskretnog sistema događaja* (*FDES*, engl. Fuzzy Discrete Event System) [70, 71].

Fazi diskretni sistemi događaja su izučavani u brojnim radovima [16, 17, 18, 58, 70, 71, 72, 73, 91, 92] i uspešno su primenjivani u biomedicinskoj kontroli HIV/AIDS, kontroli robota, kontroli inteligentnih vozila, tretmanu otpadnih voda, itraživanju hemijskih reakcija i u drugim poljima. U [70, 71], a kasnije u [18, 58, 91, 92], fazi diskretni sistemi događaja modelirani su pomoću automata sa fazi stanjima i fazi ulazima, čije su funkcije prelaza definisane na deterministički način. U stvari, ovi automati se mogu posmatrati kao determinizacija fazi automata data u [47, 49]. Sa druge strane, u [16, 17, 73] fazi diskretni sistemi događaja su predstavljeni pomoću fazi automata sa jednim krisp inicijalnim stanjem. U svim pomenutim radovima razmatrani su fazi automati u Gödelovoj strukturi.

U ovom poglavlju je fazi diskretni sistem događaja modeliran pomoću konačnog fazi raspoznavača $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad kompletnom reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$. Ključnu ulogu u proučavanju FDES igraju dve vrste fazi jezika. Prvi je fazi jezik $L(\mathscr{A})$ raspoznat pomoću $\mathscr{A}$, a drugi je *fazi jezik* $L_g(\mathscr{A})$ *generisan sa* $\mathscr{A}$, kojeg definišemo sa

$$L_g(\mathscr{A})(u) = \bigvee_{a,b\in A} \sigma^A(a) \otimes \delta_*^A(a, u, b) = \bigvee_{b\in A} (\sigma^A \circ \delta_u^A)(b), \tag{3.45}$$

za svaku $u \in X^*$. Intuitivno gledano, $L_g(\mathscr{A})(u)$ predstavlja stepen prelaska raspoznavača $\mathscr{A}$ iz ma kog inicijalnog stanja u bilo koje stanje tog raspoznavača, pod dejstvom ulaznae reči u. Dva fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ su *jezički-ekvivalenti* ako je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{B})$ i $L_g(\mathscr{A}) = L_g(\mathscr{B})$.

Veliki, kompleksni sistemi događaja su retko odmah modelirani kao celina. Češće, ovakvi sistemi događaja se grade iz njihovih sastavnih komponenti, nakon čega se svaka od njih modelira zasebno i na kraju se dobijeni modeli spajaju u jedinstveni model. Svaka od komponenti obavlja jedan specifičan posao, a celina radi sve poslove zajedno (paralelno, konkurentno, distribuirano, itd.). Ovakav način predstavljanja DES-a je modularni. Kod modularnog predstavljanja DES-a korišćenjem automata, komponente su automati, a njihovo povezivanje se vrši pomoću *paralelne kompozicije* automata. Automat dobijen paralelnom kompozicijom komponenti je model celovitog DES-a.

Neka su $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathscr{B} = (A, Y, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi raspoznavači. *Proizvod* fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ je fazi raspoznavač

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = (A \times B, X \cap Y, \delta^{A\times B}, \sigma^{A\times B}, \tau^{A\times B}),$$

gde su $\delta^{A\times B}$, $\sigma^{A\times B}$ i $\tau^{A\times B}$ definisani sa

$$\begin{aligned} &\delta^{A\times B}((a,b),x,(a',b')) = \delta^A(a,x,a') \otimes \delta^B(b,x,b'), \\ &\sigma^{A\times B}(a,b) = \sigma^A(a) \otimes \sigma^B(b), \quad \tau^{A\times B}(a,b) = \tau^A(a) \otimes \tau^B(b), \end{aligned} \tag{3.46}$$

za sve $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ i svaki $x \in X \cap Y$, dok je *paralelna kompozicija* fazi raspoznavača $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ fazi raspoznavač

$$\mathscr{A} \| \mathscr{B} = (A \times B, X \cup Y, \delta^{A\|B}, \sigma^{A\|B}, \tau^{A\|B}),$$

gde su $\delta^{A\|B}$, $\sigma^{A\|B}$ i $\tau^{A\|B}$ definisani sa

$$\begin{aligned} &\delta^{A\|B}((a,b),x,(a',b')) = \begin{cases} \delta^A(a,x,a') \otimes \delta^B(b,x,b') & \text{ako } x \in X \cap Y \\ \delta^A(a,x,a') & \text{ako } x \in X \setminus Y \text{ i } b = b' \\ \delta^B(b,x,b') & \text{ako } x \in Y \setminus X \text{ i } a = a' \\ 0 & \text{inače} \end{cases}, \\ &\sigma^{A\|B}(a,b) = \sigma^A(a) \otimes \sigma^B(b), \quad \tau^{A\|B}(a,b) = \tau^A(a) \otimes \tau^B(b), \end{aligned} \tag{3.47}$$

za sve $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Analogno definišemo paralelnu kompoziciju više od dva fazi automata.

Dejstvom zajedničkog ulaznog simbola iz skupa $X \cap Y$ na paralelnu kompoziciju fazi automata $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$, vrše se prelazi u oba automata simultano, što znači da su automati sinhronizovani na skupu $X \cap Y$. Sa druge strane, pod uticajem ulaznog simbola iz skupa $X \setminus Y$ tranzicija se dešava samo u fazi automatu $\mathscr{A}$, dok $\mathscr{B}$ ostaje u istom stanju, a analogno se dešava u slučaju kada je ulazni simbol skupa $Y \setminus X$. Jasno, ako je $X = Y$, tada se paralelna kompozicija svodi na proizvod. Ipak, čak i kada je $X \neq Y$, paralelna kompozicija fazi automata predstavlja proizvod odgovarajućih ulazna ekstenzija tih fazi automata, što će kasnije biti pokazano. Ako je $X \cap Y = \emptyset$, tj. kada u paralelnoj kompoziciji nema istovremenih tranzicija, kažemo da $\mathscr{A} \| \mathscr{B}$ jeste *konkuretni rad* fazi automata $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač i neka je Y alfabet za koji je $X \subseteq Y$. Definišimo novu funkciju prelaza $\delta^{A_Y} : A \times Y \times A \to L$ na sledeći način

$$\delta^{A_Y}(a, x, a') = \begin{cases} \delta^A(a, x, a') & \text{ako je } x \in X \\ 1 & \text{ako je } x \in Y \setminus X \text{ i } a = a' \\ 0 & \text{inače} \end{cases}, \tag{3.48}$$

za sve $a, a' \in A$ i svaki $x \in Y$. Tada fazi raspoznavač $\mathscr{A}_Y = (A, Y, \delta^{A_Y}, \sigma^A, \tau^A)$ zovemo Y-*ulazna ekstenzija* od $\mathscr{A}$. Drugim rečima, pod dejstvom ulaznih simbola iz skupa X fazi automat $\mathscr{A}_Y$ se ponaša kao i $\mathscr{A}$, dok pod dejstvom ulaznih simbola iz skupa $Y \setminus X$ fazi automat $\mathscr{A}_Y$ ostaje u zatečenom stanju. Dakle, jasno je da je $\delta_u^{A_Y}$ identička relacija na skupu A, za svaki $u \in (Y \setminus X)^*$.

Neka su X i Y alfabeti za koje je $X \subseteq Y$. *Prirodna projekcija* ili kraće *projekcija* je preslikavanje $\pi_X : Y^* \to X^*$ koje induktivno definišemo sa

$$\pi_X(w) = \begin{cases} e & \text{ako je } w \in (Y \setminus X)^* \\ w & \text{if } w \in X^* \\ \pi_X(u)\pi_X(v) & \text{ako je } w = uv, \text{ za neke } u, v \in Y^* \end{cases}, \tag{3.49}$$

za svaku $w \in Y^*$ (vidi [20]). Prirodna projekcija je operacija na rečima koja reč w nad alfabetom Y transformiše u reč $\pi_X(w)$ nad alfabetom $X \subseteq Y$, tako što iz w obrišemo sva slova iz $Y \setminus X$.

Lema 3.6.1. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač, neka je Y alfabet za koji je $X \subseteq Y$ i neka je $\mathscr{A}_Y = (A, Y, \delta^{A_Y}, \sigma^A, \tau^A)$ Y-ulazna ekstenzija od $\mathscr{A}$. Tada je za svaku reč $u \in Y^*$ zadovoljeno*

$$L_g(\mathscr{A}_Y)(u) = L_g(\mathscr{A})(\pi_X(u)) \quad i \quad L(\mathscr{A}_Y)(u) = L(\mathscr{A})(\pi_X(u)).$$

Dokaz. Proizvoljnu reč u nad alfabetom Y možemo predstaviti u obliku $u = u_1v_1u_2v_2\cdots u_nv_nu_{n+1}$, gde je $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in (Y \setminus X)^*$ i $v_1, v_2, \dots, v_n \in X^*$. Jasno, $\pi_X(u) = v$, gde je $v = v_1v_2\cdots v_n$. Kako je $\delta_p^{A_Y}$ identička relacija na skupu A i kako je $\delta_q^{A_Y} = \delta_q^A$, za svako $p \in (Y \setminus X)^*$ i svako $q \in X^*$, imamo da je

$$
\begin{aligned}
L_g(\mathscr{A}_Y)(u) &= \bigvee_{a\in A} (\sigma^A \circ \delta_u^{A_Y})(a) \\
&= \bigvee_{a\in A} (\sigma^A \circ \delta_{u_1}^{A_Y} \circ \delta_{v_1}^{A_Y} \circ \delta_{u_2}^{A_Y} \circ \delta_{v_2}^{A_Y} \circ \cdots \circ \delta_{u_n}^{A_Y} \circ \delta_{v_n}^{A_Y} \circ \delta_{u_{n+1}}^{A_Y})(a) \\
&= \bigvee_{a\in A} (\sigma^A \circ \delta_{v_1}^{A} \circ \delta_{v_2}^{A} \circ \cdots \circ \delta_{v_n}^{A})(a) = \bigvee_{a\in A} (\sigma^A \circ \delta_v^A)(a) \\
&= L_g(\mathscr{A})(v) = L_g(\mathscr{A})(\pi_X(u)),
\end{aligned}
$$

Slično pokazujemo da je $L(\mathscr{A}_Y)(u) = L(\mathscr{A})(\pi_X(u))$. $\square$

Sada možemo da dokažemo sledeći rezultat:

Teorema 3.6.1. *Neka su $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathscr{B} = (B, Y, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ fazi raspoznavači, neka je $Z = X \cup Y$ i neka su $\mathscr{A}_Z = (A, Z, \delta^{A_Z}, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathscr{B}_Z = (B, Z, \delta^{B_Z}, \sigma^B, \tau^B)$ njihove Z-ulazne ekstenzije redom.*

Tada su fazi raspoznavači $\mathscr{A}\|\mathscr{B}$ i $\mathscr{A}_Z\|\mathscr{B}_Z$ izomorfni i za svaku reč $u \in Z^*$ važi

$$
\begin{aligned}
L_g(\mathscr{A}\|\mathscr{B})(u) &= L_g(\mathscr{A}_Z)(u) \otimes L_g(\mathscr{B}_Z)(u) = L_g(\mathscr{A})(\pi_X(u)) \otimes L_g(\mathscr{B})(\pi_Y(u)), \\
L(\mathscr{A}\|\mathscr{B})(u) &= L(\mathscr{A}_Z)(u) \otimes L(\mathscr{B}_Z)(u) = L(\mathscr{A})(\pi_X(u)) \otimes L(\mathscr{B})(\pi_Y(u)).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz (3.48) i (3.47), zaključujemo da je za svaki $x \in Z = X \cup Y$ zadovoljeno

$$
\begin{aligned}
&\delta^{A_Z\|B_Z}((a,b), x, (a',b')) = \delta^{A_Z}(a,x,a') \otimes \delta^{B_Z}(b,x,b') \\
&= \begin{cases} \delta^A(a,x,a') \otimes \delta^B(b,x,b'), & \text{if } x \in X \cap Y \\ \delta^A(a,x,a') \otimes 1, & \text{ako je } x \in X \setminus Y \text{ i } b = b' \\ 1 \otimes \delta^B(b,x,b'), & \text{ako je } x \in Y \setminus X \text{ i } a = a' \end{cases} \\
&= \delta^{A\|B}((a,b), x, (a',b')),
\end{aligned}
$$

za sve $a, a' \in A$ i sve $b, b' \in B$. Kako fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}_Z$, a takođe i $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}_Z$, imaju iste fazi skupove inicijalnih i završnih stanja, zaključujemo da su $\mathscr{A}\|\mathscr{B}$ i $\mathscr{A}_Z\|\mathscr{B}_Z$ izomorfni. Štaviše, prema Lemi 3.6.1, za svaku reč $u \in Z^* = (X \cup Y)^*$ važi

$$\begin{aligned} L_g(\mathscr{A}\|\mathscr{B})(u) &= L_g(\mathscr{A}_Z\|\mathscr{B}_Z)(u) \\ &= \bigvee_{(a,b),(a',b')\in A\times B} \sigma^{A\|B}(a,b) \otimes \delta^{A_Z\|B_Z}((a,b),u,(a',b')) \\ &= \Big(\bigvee_{a,a'\in A} \sigma^A(a) \otimes \delta^{A_Z}(a,u,a')\Big) \otimes \Big(\bigvee_{b,b'\in B} \sigma^B(b) \otimes \delta^{B_Z}(b,u,b')\Big) \\ &= L_g(\mathscr{A}_Z)(u) \otimes L_g(\mathscr{B}_Z)(u) = L_g(\mathscr{A})(\pi_X(u)) \otimes L_g(\mathscr{B})(\pi_Y(u)). \end{aligned}$$

Ostalo se dokazuje na sličan način. $\square$

Diskretni sistemi događaja modelirani pomoću automata su izuzetno pogodni za analizu i proučavanje strukture i raznih svojstava DES-a, a posebno onih vezanih za njihovo ponašanje, pouzdanost i bezbednost. Među najvažnijim svojstvima automata kao modela DES-a jesu tzv. blokirajuća svojstva koja opisuju da li posmatrani model sadrži dostižna stanja iz kojih se ne može stići do nekog od završnih stanja. Ovde ćemo pojam blokirajućih svojstava uopštiti na fazi automate.

Prefiks-zatvorenje fazi jezika $f \in L^{X^*}$, označeno sa $\overline{f}$, je fazi jezik definisan sa

$$\overline{f}(u) = \bigvee_{v\in X^*} f(uv), \tag{3.50}$$

za sve $u \in X^*$. Jednostavno se pokazuje da je preslikavanje $f \mapsto \overline{f}$ operator zatvorenja na skupu L^{X^*}, tj., za sve $f, f_1, f_2 \in L^{X^*}$ važi

$$f \leqslant \overline{f}, \quad \overline{\overline{f}} = \overline{f} \ \text{ and } \ f_1 \leqslant f_2 \ \text{ povlači } \ \overline{f_1} \leqslant \overline{f_2}. \tag{3.51}$$

Fazi jezik $f \in L^{X^*}$ je *prefiks-zatvoren* ako je $f = \overline{f}$.

Važi sledeće:

Lema 3.6.2. *Neka je* $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *fazi raspoznavač. Tada*

$$L(\mathscr{A}) \leqslant \overline{L(\mathscr{A})} \leqslant L_g(\mathscr{A}) = \overline{L_g(\mathscr{A})}. \tag{3.52}$$

Dokaz. Kako je $L(\mathscr{A}) \leqslant L_g(\mathscr{A})$ i kako je (3.51), dovoljno je pokazati $\overline{L_g(\mathscr{A})} \leqslant L_g(\mathscr{A})$. Za sve $a, b, c \in A$ and $u, v \in X^*$ važi

$$\sigma^A(a) \otimes \delta^A_u(a,c) \otimes \delta^A_v(c,b) \leqslant \sigma^A(a) \otimes \delta^A_u(a,c) \leqslant L_g(\mathscr{A})(u),$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{L_g(\mathscr{A})}(u) &= \bigvee_{v\in X^*} L_g(\mathscr{A})(uv) = \bigvee_{v\in X^*}\bigvee_{a,b\in A}\sigma^A(a)\otimes\delta^A_{uv}(a,b)\\ &= \bigvee_{v\in X^*}\bigvee_{a,b\in A}\bigvee_{c\in A}\sigma^A(a)\otimes\delta^A_u(a,c)\otimes\delta^A_v(c,b)\leqslant L_g(\mathscr{A})(u),\end{aligned}$$

za svaku $u\in X^*$. Dakle, $\overline{L_g(\mathscr{A})}\leqslant L_g(\mathscr{A})$. $\square$

Fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ je *blokirajući* ako je $L(\mathscr{A}) < L_g(\mathscr{A})$, u suprotnom, tj. ako je $\overline{L(\mathscr{A})} = L_g(\mathscr{A})$ fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ je *neblokirajući*. Ovi pojmovi su uopštenja odgovarajućih koncepata u teoriji krisp diskretnih sistema događaja, u kojoj je krisp automat blokirajući ako sadrži dostižno stanje iz koga se ne može stići ni u jedno završno stanje. Ako je krisp automat blokirajući, tada je moguće da on sadrži "zastoj" ("mrtvo stanje", engl. deadlock), stanje iz koga automat ne može izaći bez obzira ulaznu reč. Kod ovakvih krisp automata je moguće i postojanje "beskonačnih petlji" (engl. livelock). Beskonačna petlja je skup nezavršnih stanja sa svojstvom da automat koji je u nekom njenom stanju, pod dejstvom ma koje ulazne reči ne izlazi iz tog skupa.

Fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ su *nekonfliktni* ako je njihova paralelna kompozicija $\mathscr{A}\|\mathscr{B}$ neblokirajuća. U suprotnom, fazi raspoznavači su *konfliktni*. Dakle, između konfliktnih automata postoji konflikt, usmislu da je njihova paralelna kompozicija blokirajuća. Kako paralelna kompozicija automata može da bude blokirajuća čak i ako je svaka individualna komponenta neblokirajuća (vidi [20]), neophodno je istražiti njenu funkciju prelaza. Međutim, proučavanje funkcije prelaza paralelne kompozicije je komplikovano, pošto broj njenih stanja eksponencijalno raste sa povećanjem broja njenih komponenata.

Pomenuti problem je moguće rešiti modularnim pristupom u analizi velikih DES-a. Naime, ako svaku od komponenata paralelne kompozicije zamenimo manjim, ekvivalentnim automatom, tada će izučavanje DES-a kao celine biti olakšano. Ova ideja iskorišćena u [77], gde su proučavana konfliktna svojstva krisp diskretnih sistem događaja. Ovde ćemo pokazati da je svaki fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ konfliktno-ekvivalentan sa afterset fazi raspoznavačem $\mathscr{A}/R$ u odnosu na ma koje slabo levo invariantno fazi kvazi–uređenje R na $\mathscr{A}$. Ovo znači da u paralelnoj kompoziciji fazi raspoznavača svaku komponentu možemo zameniti odgovarajućim afterset fazi raspoznavačem, tako očuvamo sva konfliktna svojstva celine.

Fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ su *konfliktno-ekvivalenti* ako je za svaki fazi raspoznavač $\mathscr{C}$ paralelna kompozicija $\mathscr{A}\|\mathscr{C}$ neblokirajuća ako i samo ako je $\mathscr{B}\|\mathscr{C}$ neblokirajuća (vidi [77]). Drugim rečima, ako su fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ konfliktno-ekvivalenti, tada u svakoj paralelnoj kompoziciji u kojoj se $\mathscr{A}$ javlja kao komponenta, $\mathscr{A}$ možemo zameniti sa $\mathscr{B}$, a da se konfliktna svojstva kompozicije ne promene.

Sada možemo da dokažemo glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema 3.6.2. *Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ fazi raspoznavač i neka je R slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje na $\mathscr{A}$. Tada su fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}/R$ jezički-ekvivalentni i konfliktno-ekvivalentni.*

Dokaz. Kao što je poznato, $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}/R)$. Štaviše, iz (3.38), za proizvoljnu reč $u = x_1 \cdots x_n \in X^*$, gde je $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$, imamo

$$\begin{aligned}
L_g(\mathscr{A}/R)(u) &= \bigvee_{b\in A} (\sigma^{A/R} \circ \delta_u^{A/R})(R_b) = \bigvee_{b\in A} (\sigma^{A/R} \circ \delta_{x_1}^{A/R} \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^{A/R})(R_b) \\
&= \bigvee_{a_1,a_2,\ldots,a_n,b\in A} \sigma^{A/R}(R_{a_1}) \otimes \delta_{x_1}^{A/R}(R_{a_1}, R_{a_2}) \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n}^{A/R}(R_{a_n}, R_b) \\
&= \bigvee_{b\in A} (\sigma^A \circ R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R)(b) \\
&= \bigvee_{b\in A} (\sigma^A \circ \delta_{x_1}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A)(b) = \bigvee_{b\in A} (\sigma^A \circ \delta_u^A)(b) = L_g(\mathscr{A})(u),
\end{aligned}$$

odakle je $L_g(\mathscr{A}/R) = L_g(\mathscr{A})$.

Dalje, neka je $\mathscr{B} = (B, Y, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljan fazi raspoznavač i neka je $Z = X \cup Y$. Kako su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}/R$ jezički ekvivalentni, iz Teoreme 3.6.1, za svaku reč $u \in Z^* = (X \cup Y)^*$ je zadovoljeno

$$\begin{aligned}
L_g((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B})(u) &= L_g((\mathscr{A}/R)_Z)(u) \otimes L_g(\mathscr{B}_Z)(u) \\
&= L_g((\mathscr{A}/R))(\pi_X(u)) \otimes L_g(\mathscr{B})(\pi_Y(u)) \\
&= L_g(\mathscr{A})(\pi_X(u)) \otimes L_g(\mathscr{B})(\pi_Y(u) \\
&= L_g(\mathscr{A}_Z)(u) \otimes L_g(\mathscr{B}_Z)(u) \\
&= L_g(\mathscr{A}\|\mathscr{B})(u),
\end{aligned}$$

odakle je, $L_g((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B}) = L_g(\mathscr{A}\|\mathscr{B})$. Slično pokazujemo da je $L((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B}) = L(\mathscr{A}\|\mathscr{B})$, odakle je $\overline{L((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B})} = \overline{L(\mathscr{A}\|\mathscr{B})}$.

Dakle, $\overline{L(\mathscr{A}\|\mathscr{B})} = L_g(\mathscr{A}\|\mathscr{B})$ ako i samo ako je $\overline{L((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B})} = L_g((\mathscr{A}/R)\|\mathscr{B})$, čime je dokaz upotpunjen. □

Dakle, na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da u proizvoljnoj kompoziciji fazi raspoznavača, svaku njenu komponentu možemo zameniti odgovarajućim afterset fazi raspoznavačem u odnosu na najveće slabo levo invarijantno fazi kvazi–uređenje. Nova kompozicija će imati ista blokirajuća svojstva kao i polazna, a može imati znatno manji broj stanja.

Glava 4

Pozicioni fazi automati fazi regularnih izraza

U nekoliko poslednjih decenija, pronađeno je više različitih tehnika izgradnji malih konačnih nedeterminističkih raspoznavača iz regularnih izraza. Jedan od prvih algoritama (Thompson [101]), gradi nedeterministički raspoznavač sa ε-tranzicijama. Nakon ove, kasnije nastaju nove konstrukcije bez ε-tranzicija: pozicioni automat, konstrukcija koju su nazavisno jedan od drugog dali Glushkov u [40] i McNaughton i Yamada u [78], parcijalno izvodni automat [2], follow automat [50, 51, 52, 53], itd. Veličina dobijenih automata i vreme potrebno za njihovu konstrukciju igraju vrlo važnu ulogu. Iz tih razloga primetimo da je u [24, 25, 26, 52] pokazano da su parcijalno izvodni automati faktori pozicionih automata u odnosu na izvesne relacije ekvivalencije. Štaviše, u [50, 51, 52, 53] je pokazno da su i follow automati faktori pozicionih automata u odnosu na određene relacije ekvivalencije.

U ovoj glavi je pokazano da neki od ovih rezultata važe i za fazi regularne izraze nad mrežno uređenim monoidima. Prvo, u Odeljku 4.1. uvodimo efektivan metod za konstrukciju konačnog fazi raspoznavača $\mathscr{A}_\alpha$ iz fazi regularog izraza α. Konstrukcija započinje tako što gradimo regularan izraz α_R, tretirajući svaki skalar iz α kao slovo novog alfabeta Y. Potom, polazeći od proizvoljnog konačnog nedeterminističkog raspoznavača $\mathscr{A}$ dobijenog iz α_R, dobijamo konačni fazi raspoznavač $\mathscr{A}_\alpha$ koji raspoznaje fazi jezik $\|\alpha\|$.

U Odeljku 4.2., polazeći od pozicionog automata od α_R, gradimo pozicioni fazi automat od α, $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$. Ova konstrukcija je detaljno ilustrovana Primerom 4.2.1. U istom odeljku je dat algoritam za izračunavanje fazi relacija prelaza pozicionog fazi automata od α.

U Odeljku 4.3., izvršena je redukcija $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ jednostavnim brisanjem nekih njegovih stanja. Na kraju, u Odeljku 4.4., razmatramo problem redukcije fazi raspoznavača $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ pomoću desno invarijantnih krisp ekvivalencija.

U Odeljku 4.4., data je genaralizacija nekih rezultata iz [90]. Takođe je definisan pojam follow fazi automata. Pokazano je da su follow fazi automat i parcijalno izvodni fazi automat, faktor fazi raspoznavači pozicionog fazi automata u odnosu na određene desno invarijantne krisp ekvivalencije. Samim tim follow fazi automati i parcijalno izvodni fazi automati mogu biti manji od pozicionih fazi automata. U Primeru 4.4.1 je pokazano da se redukcijom pozicionog fazi automata $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ pomoću najveće desno invarijantne krisp ekvivalencije, dobija manji konačni fazi raspoznavač od odgovarajućeg follow fazi automata. Naime, predlažemo da se redukcija pozicionog fazi automata pomoću desno invarijantnih krisp ekvivalencija vrši u dva koraka: Prvo treba eliminisati neka stanja od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}$, a zatim izvršiti redukciju novog raspoznavača pomoću najveće desno invarijantne krisp ekvivalencije. Ipak, s obzirom da naš metod dozvoljava konstrukciju konačnog fazi raspoznavača fazi regularog izraza α polazeći od proizvoljnog konačnog nederminističkog raspoznavača jezika $\|\alpha_R\|$, moguće je konstrukciju započeti od nedeterminističkog raspoznavača koji je znatno manji od pozicionog automata regularnog izraza α_R. Zbog navedenih razloga, da bismo dobili najmanji mogući konačni fazi raspoznavač iz datog fazi regularnog izraza, bolje je konstrukciju započeti sa što manjim nederminističkim raspoznavačem jezika $\|\alpha_R\|$. Recimo, možemo započeti od nederminističkog raspoznavača dobijenog iz odgovarajućeg pozicionog automata nekim metodom redukcije koji ne može biti primenjen na konačne fazi raspoznavače nad ℓ-monoidima.

Potsetimo da ćemo u ovoj glavi koristiti mrežno uređene monoide kao osnovne istinitosne strukture. Osim toga, napomenimo da ćemo nadalje raditi isključivo sa konačnim nedeterminističkim i fazi raspoznavačima i automatima.

4.1. Fazi raspoznavači iz fazi regularnih izraza

Odeljak započinjemo sledećim rezultatom:

Lema 4.1.1. *Neka $\mathscr{L} = (\mathscr{L}, \wedge, \vee, \bullet)$ jeste ℓ-monoid i neka su $A, B \subset L$. Ako postoje konačni skupovi $C \subset A$ i $D \subset B$ takvi da je*

$$(\forall a \in A)(\exists c \in C)\ a \leq c \quad i \quad (\forall b \in B)(\exists d \in D)\ b \leq d,$$

tada

(a) *Postoje* $\bigvee_{a\in A} a, \bigvee_{b\in B} b, \bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \bullet b), \bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \vee b)$ *i*

$$\bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \bullet b) = (\bigvee_{a\in A} a) \bullet (\bigvee_{b\in B} b) \quad i \quad \bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \vee b) = (\bigvee_{a\in A} a) \vee (\bigvee_{b\in B} b);$$

(b) *Za svaki* $\lambda \in L$ *postoje* $\bigvee_{a\in A}(\lambda \bullet a)$ *i* $\bigvee_{a\in A}(\lambda \bullet a) = \lambda \bullet (\bigvee_{a\in A} a)$.

Dokaz. (a) Neka je $c_0 = \bigvee_{c\in C} c$. Jasno, $a \le c_0$, za svaki $a \in A$. Ako je $c_1 \in L$ takav da je $a \le c_1$, za svaki $a \in A$, tada je $c \le c_1$, za svaki $c \in C$. Dakle, $c_0 = \bigvee_{a\in A} a$. Slično pokazujemo da je $\bigvee_{b\in B} b = \bigvee_{d\in D} d$.

Neka je $A \bullet B = \{a \bullet b | \ a \in A, b \in B\}$ i $C \bullet D = \{c \bullet d | \ c \in C, d \in D\}$. Kako je $C \bullet D$ konačan podskup od $A \bullet B$ koji zadovoljava

$$(\forall x \in A \bullet B)(\exists y \in C \bullet D) \ x \le y,$$

imamo da je $\bigvee A \bullet B = \bigvee C \bullet D$. Dakle,

$$\bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \bullet b) = \bigvee_{\substack{c\in C,\\ d\in D}} (c \bullet d) = (\bigvee_{c\in C} c) \bullet (\bigvee_{d\in D} d) = (\bigvee_{a\in A} a) \bullet (\bigvee_{b\in B} b)$$

Neka je $E = \{a \vee b | a \in A, b \in B\}$ i $F = \{c \vee d | c \in C, d \in D\}$. F je konačan podskup od E za koji

$$(\forall x \in E)(\exists y \in F) x \le y.$$

Odavde je,

$$\bigvee_{\substack{a\in A,\\ b\in B}} (a \vee b) = \bigvee_{\substack{c\in C,\\ d\in D}} (c \vee d) = (\bigvee_{c\in C} c) \vee (\bigvee_{d\in D} d) = (\bigvee_{a\in A} a) \vee (\bigvee_{b\in B} b)$$

(b) Neka je $B = \{\lambda\}$. Ostatak dokaza direktno sledi iz (a). □

Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan ℓ-monoid i neka je α fazi regularan izraz nad konačnim alfabetom X. Neka je K skup svih $\lambda \in L$ koji se pojavljuju u α ($K = \emptyset$, ako je α fazi regularan izraz bez skalarnog proizvoda) i neka je Y alfabet za koji je $Y \cap X = \emptyset$ i $|K| = |Y|$. Alfabet Y zovemo *alfabet pridružen fazi regularnom izrazu* α.

Neka je $\lambda \mapsto \lambda'$ bijekcija iz K na Y. Jasno $Y = \{\lambda' | \ \lambda \in K\}$. Označimo sa α_R izraz nad konačnim alfabetom $X \cup Y$ dobijen iz α zamenom svakog $\lambda \in K$ odgovarajućim simbolom $\lambda' \in Y$. Očigledno, α_R je regularan izraz nad alfabetom $X \cup Y$. Nadalje, $\|\alpha_R\|$ ćemo posmatrati kao fazi jezik nad alfabetom $X \cup Y$, čije su vrednosti u skupu $\{0, e\} \subseteq L$.

Neka je $\varphi_\alpha : X \cup Y \mapsto L$ preslikavanje definisano sa

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} e, & x \in X \\ \lambda, & x = \lambda' \in Y \end{cases}, \tag{4.1}$$

za svaki $x \in X \cup Y$. Označimo sa φ_α^* homomorfizam iz monoida $(X \cup Y)^*$ u monoid $(L, \bullet, e)$ definisan sa:

$$\varphi_\alpha^*(\varepsilon) = e, \quad \text{i} \quad \varphi_\alpha^*(u) = \varphi_\alpha(x_1) \bullet \varphi_\alpha(x_2) \bullet \cdots \bullet \varphi_\alpha(x_n),$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \cup Y$.

Primer 4.1.1. Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet)$ proizvoljan ℓ-monoid i neka je α fazi regularan izraz nad alfabetom X. Ako je α bez skalarnog proizvoda tada je $\alpha_R = \alpha$, dok je φ_α identičko preslikavanje skupa X.

Primer 4.1.2. Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \bullet)$ Gödelova struktura. Razmotrimo $\alpha = 0.2((0.1(xy)^*)^* + y)$, fazi regularan izraz nad alfabetom $\{x, y\}$. Regularan izraz $\alpha_R = \lambda((\mu(xy)^*)^* + y)$, nad alfabetom $\{x, y, \lambda, \mu\}$, dobijen je iz α zamenom 0.2 sa λ i 0.1 sa μ. Preslikavanje φ_α, dato sa

$$\varphi_\alpha = \begin{pmatrix} x & y & \lambda & \mu \\ 1 & 1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

je traženi homomorfizam.

Primer 4.1.3. Razmotrimo fazi regularan izraz $\alpha = (0.1x^*)(yx + 0.8y)^*$, gde je $\mathscr{L}$ proizvod struktura. $\alpha_R = (\lambda x^*)(yx + \mu y)^*$ je regularan izraz nad alfabetom $\{x, y, \lambda, \mu\}$, gde je λ zamena za 0.1, a μ zamenjuje 0.8. Preslikavanje φ_α, dato sa

$$\varphi_\alpha = \begin{pmatrix} x & y & \lambda & \mu \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix},$$

je traženi homomorfizam.

Lema 4.1.2. *Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \bullet)$ integralni ℓ-monoid i neka je X proizvoljan alfabet. Tada svaki homomorfizam φ iz monoida X^* u monoid $(L, \bullet, 1)$ zadovoljava uslov*

$$u \leqslant_{em} v \quad \Rightarrow \quad \varphi(v) \leq \varphi(u), \tag{4.2}$$

za sve $u, v \in X^*$.

Dokaz. Ako je $u \leqslant_{em} v$, tada iz (1.1) dobijamo

$$u = u_1 u_2 \cdots u_n \quad \text{i} \quad v = v_0 u_1 v_1 u_2 \cdots v_{n-1} u_n v_n,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$ i $u, v, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_0 v_1, \ldots, v_n \in X^*$. Zato, iz (1.4), dobijamo

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi(v_0) \bullet \varphi(u_1) \bullet \varphi(v_1) \bullet \varphi(u_2) \bullet \cdots \bullet \varphi(v_{n-1}) \bullet \varphi(u_n) \bullet \varphi(v_n) \\ &\leqslant 1 \bullet \varphi(u_1) \bullet 1 \bullet \varphi(u_2) \bullet \cdots \bullet 1 \bullet \varphi(u_n) \bullet 1 \\ &= \varphi(u_1) \bullet \varphi(u_2) \bullet \cdots \bullet \varphi(u_n) = \varphi(u),\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Specijalno, za dati regularan izraz α, preslikavanje φ_α^* zadovoljava (4.2).

Neka je X alfabet. *Šafl* preslikavanje $\sqcup\!\sqcup : X^* \times X^* \to \mathscr{P}(X^*)$, definišemo induktivno sa

$$(u \sqcup\!\sqcup \varepsilon) = (\varepsilon \sqcup\!\sqcup u) = \{u\}, \tag{4.3}$$

i

$$(xu \sqcup\!\sqcup yv) = x(u \sqcup\!\sqcup yv) \cup y(xu \sqcup\!\sqcup v), \tag{4.4}$$

gde $u, v \in X^*$ i $x, y \in X$.

Šafl preslikavanje se može prirodno proširiti na operaciju na skupu svih jezika nad alfabetom X, na sledeći način: *Šafl jezika* L_1 i L_2 je jezik

$$L_1 \sqcup\!\sqcup L_2 = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} u \sqcup\!\sqcup v. \tag{4.5}$$

Neka je Y proizvoljan podskup alfabeta X. Ako je $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, definišimo skup $U_Y(u)$ sa

$$U_Y(u) = u \sqcup\!\sqcup Y^*,$$

za $u \in (X \setminus Y)^*$. Jednostavno se proverava da važi sledeće

$$U_Y(\varepsilon) = Y^*, \tag{4.6}$$

$$\text{Ako je} \quad Y = \emptyset \quad \text{tada} \quad U_Y(u) = \{u\}, \quad \text{za svaki} \quad u \in X^*, \tag{4.7}$$

$$U_Y(u)U_Y(v) = U_Y(uv), \quad \text{za sve} \quad u, v \in (X \setminus Y)^*, \tag{4.8}$$

$$U_Y(x) = Y^* x Y^*, \quad \text{za svaki} \quad x \in X, \tag{4.9}$$

gde je skup $U_Y(u)U_Y(v)$ konkatenacija jezika $U_Y(u)$ i $U_Y(v)$, a $Y^* x Y^*$ je konkatenacija jezika Y^*, $\{x\}$ i Y^*.

Lema 4.1.3. *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid, neka je α fazi regularan izraz nad konačnim alfabetom X i neka je Y alfabet pridružen α. Tada je*

$$\|\alpha\|(u) = \bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v), \tag{4.10}$$

za svaki $u \in X^*$.

Dokaz. Kako je, u slučaju da je $Y \neq \emptyset$, skup $U_Y(u)$ beskonačan, treba da pokažemo da $\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v)$ postoji za svaku reč $u \in X^*$.

Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč i neka je

$$A(u) = \{v \in U_Y(u) | \|\alpha_R\|(v) = 1\}.$$

Ako je $A(u) = \emptyset$, tada

$$\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) = 0.$$

U suprotnom, neka je $M(u)$ skup svih minimalnih reči skupa $A(u)$, u odnosu na relaciju uređenja $\leq_{em}$. Prema Propoziciji 1.1.1, $M(u)$ je konačan. Sada, za svaku reč $v \in U_Y(u)$, ako je $\|\alpha_R\|(v) = 0$, imamo

$$0 = \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) \leq \varphi_\alpha^*(w) \bullet \|\alpha_R\|(w),$$

za svaki $w \in M(u)$. Ako je $v \in A(u)$, tada je $w \leq_{em} v$, za neku reč $w \in M(u)$. Sada, iz Leme 4.1.2, dobijamo

$$\varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) \leq \varphi_\alpha^*(w) \bullet \|\alpha_R\|(w).$$

Zato, prema Lemi 4.1.1, $\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v)$ postoji za proizvoljnu reč $u \in X^*$.

Ako je α fazi regularan izraz bez skalarnog proizvoda, tj. ako je $Y = \emptyset$, tada je $U_Y(u) = \{u\}$, $\alpha = \alpha_R$, $\|\alpha\| = \|\alpha_R\|$, i $\varphi_\alpha^*(v) = 1$ za svaku reč $v \in (X \cup Y)^*$. Dakle, imamo

$$\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi_\alpha^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) = \|\alpha_R\|(u) = \|\alpha\|(u),$$

za svaku $u \in X^*$.

Ostatak dokaza izvodimo indukcijom po dužini regularnog izraza α. Pretpostavimo da (4.10) važi za sve fazi regularne izraze β i γ, čija dužina je manja od dužine α.

Neka je $\alpha = \lambda'\beta$, za $\lambda \in K$. Kako za $v \in (X \cup Y)^*$ važi

$$\|\alpha_R\|(v) = \begin{cases} \|\beta_R\|(w), & v = \lambda' w, \quad \text{za neki} \quad w \in (X \cup Y)^* \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

tada za svaki $u \in X^*$

$$\begin{aligned} \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) &= \bigvee_{\substack{v \in U_Y(u), \\ v\lambda' w}} \varphi^*_\alpha(\lambda' w) \bullet \|\beta_R\|(w) \\ &=^{(*)} \lambda \bullet \bigvee_{w \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(w) \bullet \|\beta_R\|(w) \\ &= \lambda \bullet \|\beta\|(u) = \|\alpha\|(u). \end{aligned}$$

Jednakost označena sa $(*)$ sledi iz (b) Leme 4.1.1.

Za $\alpha = (\beta + \gamma)$, i $v \in (X \cup Y)^*$, imamo $\|\alpha_R\|(v) = \|\beta_R\|(v) \vee \|\gamma_R\|(v)$. Tada

$$\begin{aligned} \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) &= \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet (\|\beta_R\|(v) \vee \|\gamma_R\|(v)) = \\ &=^{(*)} \Big(\bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\beta_R\|(v) \Big) \vee \Big(\bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\gamma_R\|(v) \Big) \\ &= \|\beta\|(u) \vee \|\gamma\|(u) = \|\alpha\|(u), \end{aligned}$$

za svaki $u \in X^*$. Jednakost $(*)$ sledi iz (a) Leme 4.1.1.

Ako je $\alpha = \beta\gamma$, tada $\|\alpha_R\|(v) = \bigvee_{v=wp} \|\beta_R\|(w) \bullet \|\gamma_R\|(p)$, za svaki $v \in (X \setminus Y)^*$. Dakle,

$$\begin{aligned} \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) &= \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \bigvee_{v=wp} (\|\beta_R\|(w) \bullet \|\gamma_R\|(p)) \\ &=^{(*)} \bigvee_{\substack{v \in U_Y(u), \\ v=wp}} \big(\varphi^*_\alpha(w) \bullet \|\beta_R\|(w)\big) \bullet \big(\varphi^*_\alpha(p) \bullet \|\gamma_R\|(p)\big) \\ &= \bigvee_{u=qr} \bigvee_{\substack{w \in U_Y(q), \\ p \in U_Y(r)}} \big(\varphi^*_\alpha(w) \bullet \|\beta_R\|(w)\big) \bullet \big(\varphi^*_\alpha(p) \bullet \|\gamma_R\|(p)\big) \\ &=^{(**)} \bigvee_{u=qr} \|\beta(q)\| \bullet \|\gamma(r)\| = \|\alpha\|(u), \end{aligned}$$

za $u \in X^*$. Jednakost $(*)$ važi zato što iz $\|\beta_R\|(w) \in \{0, 1\}$ sledi

$$\varphi^*_\alpha(p) \bullet \|\beta_R\|(w) = \|\beta_R\|(w) \bullet \varphi^*_\alpha(p).$$

Jednakost $(**)$ je tačna zbog (a) Leme 4.1.1.

Neka je $\alpha = (\beta^*)$ i neka je $\beta_n = f_e \vee \beta \vee \cdots \vee \beta^n$. Očigledno, važi da je $\|\beta_n\|(u) \leq \|\alpha\|(u)$, za svaki $u \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$. Dalje, iz dokaza Propozicije 1.7.1, dobijamo da za svako $u \in X^*$ postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji je $\|\alpha\|(u) \leq \|\beta_n\|(u)$. Zaključujemo,

$$\|\alpha\|(u) \leq \|\beta_n\|(u) = \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|(\beta_n)_R\|(v) \leq \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v),$$

za svaki $u \in X^*$ i neki $n \in \mathbb{N}$. Obratno, za sve $u \in X^*, v \in U_Y(u)$ i neki $m \in \mathbb{N}$, važi

$$\varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) \leq \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|(\beta_m)_R\|(v) \leq \|\beta_m\|(u) \leq \|\alpha\|(u).$$

Dakle, $\|\alpha\|(u) = \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \|\alpha_R\|(v)$. $\square$

Za fazi regularan izraz α nad alfabetom X, neka je α_R regularan izraz nad alfabetom $X \cup Y$, gde je Y alfabet pridružen α. Pretpostavimo da je $\mathscr{A} = (A, X \cup Y, \delta^A, a_0, \tau^A)$ proizvoljan nedeterministički raspoznavač jezika $\|\alpha_R\|$. Evidentno, $\mathscr{A}$ posmatran kao fazi raspoznavač sa vrednostima funkcije fazi prelaza na skupu $\{0, e\}$, raspoznaje fazi jezik $\|\alpha_R\|$. Dalje, neka je $\mathscr{A}_\alpha = (A_\alpha, X, \delta^{A_\alpha}, a_0, \tau^{A_\alpha})$ fazi raspoznavač sa krisp inicijalnim stanjem a_0, sa $A_\alpha = A$ i funkcijom fazi prelaza δ^{A_α} definisanom sa

$$\begin{aligned} \delta^{A_\alpha}(a, x, b) &= \bigvee_{v \in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^A(a, v, b), \\ \tau^{A_\alpha}(a) &= \begin{cases} \tau^A(a), & a \neq a_0 \\ \|\alpha_R\|(\varepsilon), & a = a_0 \end{cases}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

za sve $a, b \in A_\alpha$ i $x \in X$. Fazi raspoznavač $\mathscr{A}_\alpha = (A_\alpha, X, \delta^{A_\alpha}, a_0, \tau^{A_\alpha})$, definisan sa (4.11), zovemo *fazi raspoznavač pridružen* $\mathscr{A}$ *i* α.

Teorema 4.1.1. *Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je $\mathscr{A} = (A, X \cup Y, \delta^A, a_0, \tau^A)$ proizvoljan nedeterministički raspoznavač jezika $\|\alpha_R\|$. Tada je $\mathscr{A}_\alpha$, fazi raspoznavač pridružen $\mathscr{A}$ i α, dobro definisan. Osim toga, važi*

$$L(\mathscr{A}) = \|\alpha\|.$$

Dokaz. Iz (1.82) imamo $L(\mathscr{A}_\alpha)(u) = \bigvee_{a \in A_\alpha} \delta^{A_\alpha}(a_0, u, a) \bullet \tau^{A_\alpha}(a)$. Dakle, za praznu reč $\varepsilon \in X^*$ imamo $L(\mathscr{A}_\alpha)(\varepsilon) = \tau^{A_\alpha}(a_0) = \|\alpha\|(\varepsilon)$.

Ako je $Y \neq \emptyset$, skup $U_Y(u)$ nije konačan, pa treba pokazati

$$\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,b),$$

postoji za svaki $u \in X^*$ i sve $a,b \in A_\alpha$.

Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč, neka su $a,b \in A_\alpha$ proizvoljna stanja i neka je $\mathscr{P}(a,u,b) = \{v \in U_Y(u) |\ \delta^A(a,v,b) = 1\}$. Ako je $\mathscr{P}(a,u,b)$ prazan skup, tada $\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,b) = 0$. U suprotnom, neka je $\mathscr{M}(a,u,b)$ skup minimalnih reči skupa $\mathscr{P}(a,u,b)$, u odnosu na uređenje $\leq_{em}$. Prema Propoziciji 1.1.1, $\mathscr{M}(a,u,b)$ je konačan. Neka je $v \in U_Y(u)$ proizvoljna reč za koju je $\delta^A(a,v,b) = 1$ i neka je $w \in \mathscr{M}(i,u,j)$ reč za koju je $w \leq_{em} v$. Sada, koristeći Lemu 4.1.2 imamo

$$\varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^A(a,v,b) \leq \varphi^*_\alpha(w) \bullet \delta^A(a,w,b),$$

za svaku $w \in \mathscr{M}(a,w,b)$. Dakle, prema Lemi 4.1.1, $\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^A(a,v,b)$ postoji za svaku $u \in X^*$ i sve $a,b \in A_\alpha$.

Pretpostavimo da je $\delta_\alpha(a,u,b) = \bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,b)$, za $u \in X^*$ i sve $a,b \in A_\alpha$. Tada za svaki $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha(a,ux,b) &= \bigvee_{c\in A_\alpha} \delta_\alpha(a,u,c) \bullet \delta_\alpha(c,x,b) \\
&= \bigvee_{c\in A} \Big(\bigvee_{v\in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,c) \Big) \bullet \Big(\bigvee_{w\in U_Y(x)} \varphi^*(w) \bullet \delta^A(c,w,b) \Big) \\
&= \bigvee_{c\in A} \bigvee_{\substack{v\in U_Y(u),\\ w\in U_Y(x)}} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,c) \bullet \varphi^*(w) \bullet \delta^A(c,w,b) \\
&= \bigvee_{\substack{v\in U_Y(u),\\ w\in U_Y(x)}} (\varphi^*(vw) \bullet \bigvee_{c\in A} \delta^A(a,v,c) \bullet \delta^A(c,w,b)) \\
&= \bigvee_{\substack{v\in U_Y(u),\\ w\in U_Y(x)}} \varphi^*(vw) \bullet \delta^A(a,vw,b) = \bigvee_{v\in U_Y(ux)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(a,v,b).
\end{aligned}$$

Primetimo da gornje jednakosti slede iz Leme 4.1.1 i činjenice da vrednosti $\delta^A(a,u,c)$ pripadaju skupu $\{0,1\}$, za svaki $u \in (X \cup Y)^*$ i sve $a,b \in A_\alpha$.

Za posledicu imamo da za svaki $u \in X^+$ važi

$$
\begin{aligned}
L(\mathscr{A}_\alpha)(u) &= \bigvee_{a \in A_\alpha} \delta^{A_\alpha}(0,u,a) \bullet \tau^{A_\alpha}(a) \\
&= \bigvee_{a \in A} \Big(\bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \delta^A(0,v,a) \Big) \bullet \tau^A(a) \\
&= \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \Big(\bigvee_{a \in A} \delta^A(0,v,a) \bullet \tau^A(a) \Big) \\
&= \bigvee_{v \in U_Y(u)} \varphi^*(v) \bullet \|\alpha_R\|(v) \\
&=^{(*)} \|\alpha\|(u).
\end{aligned}
$$

Primetimo da jednakost $(*)$ sledi iz Leme 4.1.3. $\square$

4.2. Konstrukcija pozicionog fazi automata

Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz. Teorema 4.1.1 nam omogućava konstrukciju raznih fazi raspoznavača iz α, tj. konstrukciju raznih fazi raspoznavača fazi jezika $\|\alpha\|$. Naime, u opštem slučaju, izborom različitih nedeterminističkih raspoznavača jezika $\|\alpha_R\|$, dobijamo različite konačne fazi raspoznavače fazi jezika $\|\alpha\|$.

Potsetimo da postoji više poznatih konstrukcija nedeterminističkih raspoznavača iz datog regularnog izraza. Najpoznatije su dali Thompson [101], Glushkov [40] i McNaughton-Yamada [78]. Automat čiju su konstrukciju dali Glushkov i McNaughton-Yamada poznat je kao pozicioni automat. Osim toga, Antimirov je u [2] konstruisao parcijalno izvodni automat čime je uopštio izvodni automat Brzozowskog [11]. Ipak, uprkos poboljšanjima koja su postignuta u konstrukcijama Brzozowskog i Antimirova, pozicioni automat je najčešće korišćen, najverovatnije zbog njegove jednostavnosti i činjenice da se ostali tipovi automata nisu pokazali kao naročito praktični. Ilie i drugi autori u [50, 51, 52], izvršili su konstrukciju follow automata, i pokazali da su follow automati faktor automati pozicionih automata, te da iz tih razloga mogu biti znatno manji od njih.

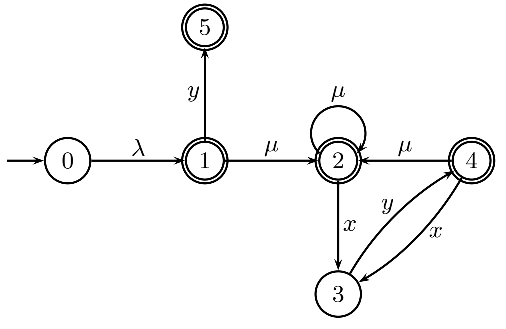
Polazeći od gornjih argumenata, dolazimo do sledećeg koncepta:

Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz nad alfabetom X. Za regularan izraz α_R nad $X \cup Y$, gde je Y alfabet pridružen α, neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$ pozicioni automat regularnog izraza α_R. Polazeći od $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R) = (A_{\mathrm{p}}, X \cup Y, \delta^{A_{\mathrm{p}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{p}}})$, koristeći (4.11) konstruišimo fazi raspoznavač pridružen $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$ i α, koji ćemo, na prirodan način, označavati sa $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha) = (A_{\mathrm{pf}}, X, \delta^{A_{\mathrm{pf}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{pf}}})$. Konačni fazi raspoznavač $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ zovemo *pozicioni fazi automat* od α. Konstrukcija $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$, datog fazi regularog izraza α, data je Teoremom 4.1.1. Primeri 4.2.1-4.2.2 detaljno opisuju tu konstrukciju.

Primer 4.2.1. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura. Razmotrimo fazi regularan izraz $\alpha = 0.2((0.1(xy)^*)^* + y)$, nad alfabetom $\{x, y\}$ iz Primera 4.1.2. Ovde je $\alpha_R = \lambda((\mu(xy)^*)^* + y)$ regularan izraz nad alfabetom $\{x, y, \lambda, \mu\}$, dobijen iz α. Označena verzija izraza α_R je $\overline{\alpha_R} = \lambda_1((\mu_2(x_3y_4)^*)^* + y_5)$, a φ_α je data sa

$$\varphi_\alpha = \begin{pmatrix} x & y & \lambda & \mu \\ 1 & 1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Donja slika predstavlja graf pozicionog automata $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$:



Slika 1. $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$

Primetimo da je

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, x, j) = \begin{cases} \bigvee_{u \in \mathscr{M}(i,x,j)} \varphi^*(u), & \mathscr{P}(i, x, j) \neq \emptyset \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

za sve $x \in X, i, j \in A_{\mathrm{p}}$.

Opišimo, na primer, kako odrediti $\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0, x, 3)$. Za svaku reč $u \in \mathscr{M}(0, x, 3)$ postoji put od 0 do 3, sa tačno jednom granom označenom sa x, a čije su ostale grane označene simbolima λ ili μ (Slika 1.). Jasno, $\mathscr{M}(0, x, 3) = \{\lambda\mu x\}$. Sada,

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0, x, 3) = \varphi^*(\lambda\mu x) = 0.2 \bullet 0.1 \bullet 1 = 0.1$$

Dalje, $\mathscr{M}(1,x,3)=\{\mu x\}$, $\mathscr{M}(2,x,3)=\{x\}$, $\mathscr{M}(4,x,3)=\{x\}$ i $\mathscr{M}(i,x,j)=\emptyset$ u svim ostalim slučajevima. Odavde imamo

$$\begin{aligned}&\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(1,x,3)=0.1, \quad \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(2,x,3)=1,\\ &\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(4,x,3)=1, \text{ i } \ \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i,x,j)=0,\end{aligned}$$

za $(i,j)\notin\{(0,3),(1,3),(2,3),(4,3)\}$.

Iz Slike 1. vidimo da je $\mathscr{M}(0,y,5)=\{\lambda y\}$, $\mathscr{M}(1,y,5)=\{y\}$, $\mathscr{M}(3,y,2)=\{y\mu\}$, $\mathscr{M}(3,y,4)=\{y\}$, i $\mathscr{M}(i,y,j)=\emptyset$ u ostalim slučajevima. Dakle, imamo

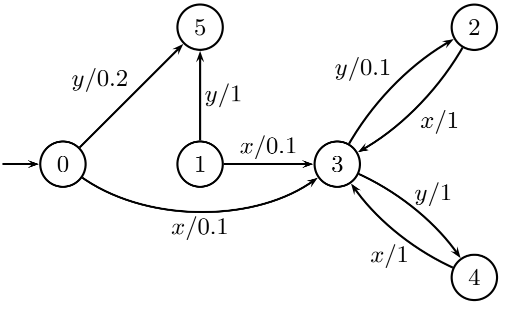
$$\begin{aligned}&\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0,y,5)=0.2, \quad \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(1,y,5)=1, \quad \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(3,y,2)=0.1,\\ &\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(3,y,4)=1, \quad \text{i} \quad \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i,y,j)=0,\end{aligned}$$

za $(i,j)\notin\{(0,5),(1,5)(3,2),(3,4)\}$.

Fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}$, $\delta_y^{A_{\mathrm{pf}}}$ i fazi skup $\tau^{A_{\mathrm{pf}}}$ završnih stanja konačnog fazi raspoznavača $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su:

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0.1&0&0\\0&0&0&0.1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}, \delta_y^{A_{\mathrm{pf}}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0.2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0.1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}, \tau^{A_{\mathrm{pf}}}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix},$$

a graf od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ je predstavljen Slikom 2.



Slika 2. $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$

Ipak, teoretski govoreći, izračunavanje fazi relacija prelaza pozicionog fazi automata datog regularog izraza može biti problem. Naime, u opštem slučaju, za date $i, j \in A_{\mathrm{pf}}$ i $x \in X$ skup $\mathscr{P}(i,x,j)$ svih reči $u \in U_Y(x)$ za koje je $\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j) = 1$ je beskonačan, pa određivanje skupa $\mathscr{M}(i,x,j)$ svih minimalnih reči skupa $\mathscr{P}(i,x,j)$ u odnosu na $\leqslant_{em}$, može predstavlati problem. Nadalje ćemo razmotrati ovaj problem.

Lema 4.2.1. *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid. Neka je R proizvoljna refleksivna fazi relacija na konačnom skupu A. Ako je $|A| = n > 1$, tada je R^{n-1} tranzitivno zatvorenje fazi relacije R.*

Dokaz. Primetimo da zbog konačnosti skupa A, kompozicija bilo kojih fazi relacija na A postoji. Dalje, iz (1.74), zaključujemo da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$R^k \leqslant R^{k+1}, \quad \text{odakle je} \quad R \leq R^{n-1}.$$

Za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ za koji je $n \leq k$, neka su $a_1, a_2, \dots a_{k+1}$ proizvoljni elementi skupa A. Kako je $|A| = n$ i $k+1 > n$, imamo $a_i = a_j$ za neki $i < j$. Dalje, iz (1.4) i (1.65), dobijamo sledeće

$$R(a_1,a_2) \bullet \cdots \bullet R(a_{i-1},a_i) \bullet \cdots \bullet R(a_j,a_{j+1}) \bullet \cdots \bullet R(a_{n-1},a_n) \leq$$
$$\leq R(a_1,a_2) \bullet \cdots \bullet R(a_{i-1},a_i) \bullet R(a_i,a_{j+1}) \bullet \cdots \bullet R(a_{n-1},a_n) \leq R^k(a_1,a_n).$$

Odavde je $R^{k+1} \leq R^k$, pa je $R^k \leq R^{n-1}$, za svaki $k \geq n$. Dakle,

$$R^{n-1}(a,c) \bullet R^{n-1}(c,b) \leq R^{2n-2}(a,b) \leq R^{n-1}(a,b),$$

tj. R^{n-1} je tranzitivna fazi relacija na A koja sadrži R.

Neka je S proizvoljna tranzitivna fazi relacija na A, za koju je $R \leq S$. Kako je S refleksivna i tranzitivna, iz (1.73) i (1.74) imamo $S = S^k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Odavde i iz

$$R^k \leq S^k = S,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, dobijamo $R^{n-1} \leq S$. □

Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz nad alfabetom X. Za regularan izraz α_R nad $X \cup Y$, gde je Y alfabet pridružen α, neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R) = (A_{\mathrm{p}}, X \cup Y, \delta^{A_{\mathrm{p}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{p}}})$ pozicioni automat od α_R. Definišimo refleksivnu fazi relaciju R na A_{p} na sledeći način

$$R(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ \lambda, & i \neq j \quad \text{i} \quad \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,\lambda',j) = 1, \quad \text{gde} \quad \lambda' \in Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \tag{4.12}$$

Pošto važi

$$\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,\lambda',j) = \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,\mu',j) = 1 \;\Rightarrow\; \lambda' = \mu',$$

za sve $i,j \in A_{\mathrm{p}}$, zaključujemo da je R dobro definisana. Neka je

$$R_\alpha = R^{n-1}, \tag{4.13}$$

gde je $n \in \mathbb{N}$ broj elemenata skupa A_{p}. Važi sledeća:

Teorema 4.2.1. *Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz. Neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$ pozicioni automat od α_R i neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ pozicioni fazi automat od α.*

Tada

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i,x,j) = \bigvee_{k,l\in A_{\mathrm{p}}} R_\alpha(i,k)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(k,x,l)\bullet R_\alpha(l,j), \tag{4.14}$$

za svaki $x \in X$, i sve $i,j \in A_{\mathrm{pf}}$.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ kardinalnost skupa A_{p}. Pokažimo prvo da je

$$R_\alpha(i,j) = \bigvee_{u\in Y^*} \varphi_\alpha^*(u)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j), \tag{4.15}$$

za sve $i,j \in A_{\mathrm{p}}$. Ako je $i = j$ tada

$$R_\alpha(i,i) = 1 = \varphi_\alpha^*(\varepsilon) = \varphi_\alpha^*(\varepsilon)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,\varepsilon,i) \leqslant \bigvee_{u\in Y^*}\varphi_\alpha^*(u)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,i).$$

U suprotnom, neka je $R_\alpha(i,j) \neq 0$. Tada za neki $k \in \mathbb{N}, k \leqslant n-1$, postoje različiti $i = i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = j$, i neki $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_k' \in Y$, za koje je

$$\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i_j,\lambda_j',i_{j+1}) = 1 \quad \text{i} \quad R_\alpha(i,j) = \lambda_1\bullet\cdots\bullet\lambda_k.$$

Odavde je

$$R_\alpha(i,j) = \varphi_\alpha^*(v) = \varphi_\alpha^*(v)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,v,j) \leqslant \bigvee_{u\in Y^*}\varphi_\alpha^*(u)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j),$$

gde je $v = \lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k' \in Y^*$.

Obratno, neka je $\varphi_\alpha^*(u)\bullet\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j) \neq 0$, gde je $u = \lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k'$, i $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_k' \in Y$. Kako je $\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j) = 1$, imamo

$$\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i_j,\lambda_j',i_{j+1}) = 1,$$

za neke $i_j \in A_{\mathrm{p}}$, gde je $j \in \{1,\ldots,k\}, k \in \mathbb{N}$. Dakle, $R(i_j, i_{j+1}) = \lambda_j$, za svaki $j \in \{1,\ldots,k\}$. Sada, iz Leme 4.2.1, dobijamo

$$\varphi^*_\alpha(u) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j) = \varphi^*_\alpha(u) = \lambda_1 \bullet \cdots \bullet \lambda_k \leqslant R^k(i,j) \leqslant R_\alpha(i,j).$$

Dakle, (4.15) važi. Sada, iz (4.11), (4.9) i (4.15), imamo

$$\begin{aligned}
\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i,x,j) &= \bigvee_{u \in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(u) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,u,j) \\
&= \bigvee_{v,w \in Y^*} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,vxw,j) \bullet \varphi^*_\alpha(w) \\
&= \bigvee_{v,w \in Y^*} \bigvee_{k,l \in A_{\mathrm{p}}} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i,v,k) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(k,x,l) \bullet \varphi^*_\alpha(w) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(l,w,j) \\
&= \bigvee_{k,l \in A_{\mathrm{p}}} R_\alpha(i,k) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(k,x,l) \bullet R_\alpha(l,j).
\end{aligned}$$

Ovim je teorema dokazana. $\square$

Prethodna teorema opisuje metod efektivnog izračunavanja pozicionog fazi automata datog fazi regularnog izraza α. Naime, nakon konstruisanja pozicionog automata $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$, potrebno je izračunati fazi relaciju R_α. Dalje, prema Teoremi 4.2.1, imamo

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}}_x = R_\alpha \circ \delta^{A_{\mathrm{p}}}_x \circ R_\alpha, \tag{4.16}$$

za svaki $x \in X$. Drugim rečima, fazi relacije prelaza od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su proizvodi matrice R_α i matrica odgovarajućih fazi relacija prelaza od $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R)$ (vidi Primer 4.2.2).

Primer 4.2.2. Razmotrimo $\alpha = 0.2((0.1(xy)^*)^* + y)$, fazi regularni izraz iz Primera 4.2.1. Jednostavno se proverava, korišćenjem Slike 2, da su fazi relacije R i R_α date sa

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada, iz Teoreme 4.2.1, računamo matrice $\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}$ i $\delta_y^{A_{\mathrm{pf}}}$

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}} = R_\alpha \circ \delta_x^{A_{\mathrm{p}}} \circ R_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^{A_{\mathrm{pf}}} = R_\alpha \circ \delta_y^{A_{\mathrm{p}}} \circ R_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3. Eliminacija nekih stanja pozicionog fazi automata

Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz nad alfabetom X. Za regularan izraz α_R nad $X \cup Y$, gde je Y alfabet pridružen α, neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}(\alpha_R) = (A_{\mathrm{p}}, X \cup Y, \delta^{A_{\mathrm{p}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{p}}})$ pozicioni automat od α_R. Neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha) = (A_{\mathrm{pf}}, X, \delta^{A_{\mathrm{pf}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{pf}}})$ pozicioni fazi automat od α. Neka je $A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{pf}} \setminus \{i \in A_{\mathrm{pf}} | \overline{x_i} \in Y,\ \tau^{A_{\mathrm{p}}}(i) = 0\}$. Neka je sa $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}(\alpha) = (A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}, X, \delta^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}, 0, \tau^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}})$ označen fazi raspoznavač definisan sa

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}(i, x, j) = \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, x, j), \quad \tau^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}(i) = \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(i), \tag{4.17}$$

za sve $i, j \in A_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}}$ i svaki $x \in X$.

Teorema 4.3.1. *Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz. Neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ pozicioni fazi automat od α i neka je $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}(\alpha)$ fazi raspoznavač definisan sa* (4.17).

Tada

$$L(\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}(\alpha)) = L(\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)). \tag{4.18}$$

D o k a z . Pre svega, dokažimo

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}(i, u, j) = \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, u, j),$$

za svaki $u \in X^+$ i sve $i, j \in A_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}}$. Prema (4.17), jednakost važi za $u = x \in X$. Zato, pretpostavimo da jednakost važi za datu reč $u \in X^+$. Tada, iz dokaza

Teoreme 4.1.1, imamo

$$\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, ux, j) = \bigvee_{v \in U_Y(ux)} \varphi^*_\alpha(v) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v, j),$$

za proizvoljan $x \in X$ i sve $i, j \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{p}}$. Neka je $y \in X$ poslednji simbol od u, tj. neka je $u = u_1 y$. Kako iz (4.8) i (4.9), imamo

$$U_Y(ux) = U_Y(u_1 y x) = U_Y(u_1) y U_Y(x),$$

to je,

$$\begin{aligned}
\delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, ux, j) &= \bigvee_{\substack{v_1 \in U_Y(u_1),\\ v_2 \in U_Y(x)}} \varphi^*_\alpha(v_1 y v_2) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v_1 y v_2, j)\\
&= \bigvee_{\substack{v_1 \in U_Y(u_1),\\ v_2 \in U_Y(x)}} \varphi^*_\alpha(v_1) \bullet \varphi^*_\alpha(v_2) \bullet \Big(\bigvee_{k \in A_{\mathrm{p}}} \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v_1 y, k) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(k, v_2, j) \Big)\\
&=^* \bigvee_{k \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \Big(\bigvee_{v_1 \in U_Y(u_1)} \varphi^*_\alpha(v_1) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v_1 y, k) \Big) \bullet \Big(\bigvee_{v_2 \in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(v_2) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(k, v_2, j) \Big)\\
&\leq \bigvee_{k \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \Big(\bigvee_{v_1 \in U_Y(u)} \varphi^*_\alpha(v_1) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v_1, k) \Big) \bullet \Big(\bigvee_{v_2 \in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(v_2) \bullet \delta^{A_{\mathrm{p}}}(k, v_2, j) \Big)\\
&= \bigvee_{k \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(i, u, k) \bullet \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(k, x, j) = \bigvee_{k \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \delta^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(i, u, k) \bullet \delta^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(k, x, j)\\
&= \delta^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(i, ux, j)),
\end{aligned}$$

za sve $i, j \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}$. Jednakost * je tačna zato što $\delta^{A_{\mathrm{p}}}(i, v_1 y, k) = 1$ povlači $\overline{x_k} = y \in X$, pa je $k \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}$.

Kako je obratna nejednakost uvek tačna, tvrđenje važi.

Sada, za svaku $u \in X^+$, važi

$$\begin{aligned}
L(\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha))(u) &= \bigvee_{i \in A_{\mathrm{pf}}} \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0, u, i) \bullet \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(i) = \bigvee_{\substack{i \in A_{\mathrm{pf}},\\ \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(i) \neq 0}} \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0, u, i) \bullet \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(i)\\
&\leq \bigvee_{i \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \delta^{A_{\mathrm{pf}}}(0, u, i) \bullet \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(i) = \bigvee_{i \in A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} \delta^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(0, u, i) \bullet \tau^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(i)\\
&= L(\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}(\alpha))(u),
\end{aligned}$$

što, zajedno sa činjenicom $\tau^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}(0) = \tau^{A_{\mathrm{pf}}}(0)$ i $L(\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}(\alpha)) \leq L(\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha))$, za svaki $u \in X^+$, povlači

$$L(\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}(\alpha)) = L(\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)).$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

Dakle, iz Teoreme 4.3.1, sledi da redukciju pozicionog fazi automata $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ možemo izvršiti uklanjanjem nekih stanja iz skupa A_{pf}. Stanja koja je opisanim metodom moguće ukloniti su pozicije skalara u α koje nisu završna stanja od $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}$. Dobijeni fazi raspoznavač $\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ ima, u opštem slučaju, najviše $|\alpha|+1$ a najmanje $|\alpha|_X+1$ stanja (Primeri 4.3.1 i 4.3.2). U Primeru 4.3.2 je pokazano da, u opštem slučaju, pozicije završnih skalara ne mogu biti uklonjene.

Primer 4.3.1. Razmotrimo fazi regularan izraz $\alpha = (0.1x^*)(yx+0.8y)^*$, iz Primera 4.1.3. Fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}$, $\delta_y^{A_{\mathrm{pf}}}$ i fazi skup $\tau^{A_{\mathrm{pf}}}$ završnih stanja fazi raspoznavača $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su:

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.064 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.64 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.64 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.64 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.64 & 0.8 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Evidentno $A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}} = \{0,1,2,3,4,6\}$, pa fazi raspoznavač $\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}$ ima jedno stanje manje. Fazi relacije prelaza $\delta_x^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}$, $\delta_y^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}$ i fazi skup $\tau^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}}$ završnih stanja od $\mathscr{A}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su:

$$\delta_x^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \delta_y^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \tau^{A^{\mathrm{r}}_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 4.3.2. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura. Razmotrimo $\alpha = 0.2x$ i $\beta = x(0.2\varepsilon)$, fazi regularne izraze nad alfabetom $X = \{x\}$. Fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}$ i $\tau^{A_{\mathrm{pf}}}$ od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su date sa

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\tau^{A_{\mathrm{pf}}}(1) = 0$ i 1 je jedina pozicija skalara u α, dobijamo da je $A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}} = \{0, 2\}$. Za posledicu imamo da fazi raspoznavač $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}(\alpha)$ ima tačno $|\alpha|_X + 1$ stnja i fazi relacije prelaza $\delta^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}$, $\tau^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}}$ od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\alpha)$ su date sa

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\mathrm{pf}}^{\mathrm{r}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Što se tiče β, fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}}$ i $\tau^{A_{\mathrm{pf}}}$ od $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\beta)$ su date sa

$$\delta_x^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\mathrm{pf}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\beta)$, 2 je jedina pozicija skalara u β. Izbacivanjem 2 iz njegovog skupa stanja, dobijamo fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (\{0,1\}, X, \delta^A, 0, \tau^A)$, čije su fazi relacije prelaza δ_x^A i τ^A date sa

$$\delta_x^{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau^{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, fazi raspoznavači $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\beta)$ nisu ekvivalenti, tj. ne raspoznaju isti jezik, pa $\mathscr{A}_{\mathrm{pf}}(\beta)$ ne može biti redukovan eliminacijom stanja.

4.4. Redukcija pozicionog fazi automata pomoću ekvivalencija

U prethodnim glavama disertacije izučena je redukcija fazi automata nad kompletnim reziduiranim mrežama pomoću desno invarijantnih fazi ekvivalencija. Pokazano je da se bolja redukcija broja stanja može postići korišćenjem fazi ekvivalencija. Međutim, reziduirane mreže su bogate algebaske strukture sa operacijama reziduuma i bireziduuma, koje zadovoljavaju mnoga svojstva koja, u opštem slučaju, mrežno uređeni monoidi ne zadovoljavaju. Operacije reziduuma i bireziduuma igraju veoma važnu ulogu, a iskorišćene su za modeliranje desno invarijantnih fazi ekvivalencija i desno invarijantnih fazi kvazi-uređenja. U ovoj glavi, međutim, radimo sa ℓ-monoidima, u kojima, usled nedostatka reziduuma i bireziduuma, konstrukcija fazi ekvivalencija predstavlja problem. Iz tih razloga, ovde izučavamo problem redukcije fazi automata pomoću desno invarijantnih krisp ekvivalencija.

Sledećom teoremom je data je karakterizacija desno invarijantnih fazi ekvivalencija.

Teorema 4.4.1. *Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid. Osim toga, neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$ i neka je E fazi ekvivalencija na A. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *E je desno invarijantna fazi ekvivalencija;*

(ii) *$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$, za svaki $x \in X$;*

(iii) *$E \circ \delta_u^A \circ E = \delta_u^A \circ E$, za svaki $u \in X^+$;*

(iv) *$E \circ \delta_u^A \leqslant \delta_u^A \circ E$, za svaki $u \in X^+$;*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Neka je $x \in X$ proizvoljan. Ako je $E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E$, tada je zbog (1.74)

$$E \circ \delta_x^A \leqslant E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E.$$

Obratno, ako je $E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E$ tada iz (1.67), dobijamo

$$E \circ \delta_x^A \circ E \leqslant \delta_x^A \circ E \circ E = \delta_x^A \circ E,$$

a kako obratna nejednakost važi zbog (1.74), zaključujemo da je E desno invarijantna fazi ekvivalencija.

(i)$\Leftrightarrow$(iii). Pretpostavimo da je $E \circ \delta_u^A \circ E = \delta_u^A \circ E$, za $u \in X^+$. Tada

$$\begin{aligned} E \circ \delta_{ux}^A \circ E &= E \circ \delta_u^A \circ \delta_x^A \circ E = E \circ \delta_u^A \circ E \circ \delta_x^A \circ E \\ &= \delta_u^A \circ E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_u^A \circ \delta_x^A \circ E = \delta_{ux}^A \circ E, \end{aligned}$$

za svaki $x \in X$. Dakle, indukcijom je dokazano da (iii) važi.

Obratna implikacija je trivijalna.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv). Dokaz je sličan dokazu (i)$\Leftrightarrow$(ii). □

Teorema 4.4.2. *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$.*

Skup $\mathscr{E}^{\mathrm{cri}}(\mathscr{A})$ svih desno invarijantnih krisp ekvivalencija na $\mathscr{A}$ je kompletna mreža. Ova mreža je kompletna gornja podpolumreža mreže $\mathscr{E}^{\mathrm{c}}(A)$ svih krisp ekvivalencija na A.

Dokaz. Kako $\mathscr{E}^{\mathrm{cri}}(\mathscr{A})$ sadrži najmanji element mreže $\mathscr{E}^{\mathrm{c}}(A)$, jednakost na A, dovoljno je pokazati da je $\mathscr{E}^{\mathrm{cri}}(\mathscr{A})$ kompletna gornja podpolumreža od $\mathscr{E}^{\mathrm{c}}(A)$.

Razmotrimo dve desno invarijantne krisp ekvivalencije E_1 i E_2 i neka je $E = E_1 \vee E_2$ najmanja krisp ekvivalencija koja ih sadrži. Jednostavno se pokazuje da je $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(E_1 \circ E_2)^n$ najmanja tranzitivna krisp relacija koja sadrži $E_1 \circ E_2$. Primetimo da je

$$((E_1\circ E_2)^k)^{-1} = (E_2^{-1}\circ E_1^{-1})^k = (E_2\circ E_1)^k \leqslant (E_1\circ E_2)^{k+1} \leqslant \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(E_1\circ E_2)^n,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Odavde je $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(E_1\circ E_2)^n$ simetrična. Dakle, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}(E_1\circ E_2)^n$ je krisp ekvivalencija koja sadrži E_1 i E_2, pa sadrži i E. Jasno, E sadrži $(E_1 \circ E_2)^k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, što povlači $E = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(E_1 \circ E_2)^n$. Sada, iz (b) Teoreme 4.4.1 dobijamo

$$(E_1 \circ E_2)^k \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ (E_1 \circ E_2)^k \leqslant \delta_x^A \circ E,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, odakle je

$$E \circ \delta_x^A \leqslant \delta_x^A \circ E.$$

Dakle, E je desno invarijantna krisp ekvivalencija.

Jasno je da se isti argument može koristiti u dokazu da je najmanja ekvivalencija koja sadrži proizvoljnu familiju desno invarijantnih krisp ekvivalencija, takođe desno invarijantna. □

Iz Teoreme 4.4.1 sledi da za svaku krisp ekvivalenciju E na $\mathscr{A}$ postoji najveća desno invarijantna krisp ekvivalencija sadržana u E. Označimo je sa E^{cri}. U sledećoj teoremi razmatramo problem njihove konstrukcije. Ekvivalenciju E^{cri} možemo da konstruišemo pomoću postupka koji je dala Petković u [90]:

Teorema 4.4.3. **[90]** *Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta^A)$ fazi automat nad $\mathscr{L}$. Neka je E krisp ekvivalencija na A i E^{cri} najveća desno invarijantna krisp ekvivalencija sadržana u E.*

Induktivno defininišimo niz $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ krisp ekvivalencija na A na sledeći način:

$$E_1 = E, \quad E_{k+1} = E_k \wedge E_k^r, \quad \textit{za sve } k \in \mathbb{N},$$

gde je E_k^r krisp ekvivalencija definisana sa

$$E_k^r(a,b) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)(\forall c \in A)(\delta_x \circ E_k)(a,c) = (\delta_x \circ E_k)(b,c),$$

za sve $a, b \in A$. Tada

(a) $E^{\mathrm{cri}} \leqslant \cdots \leqslant E_{k+1} \leqslant E_k \leqslant \cdots \leqslant E_1 = E$;

(b) *Ako je* $E_k = E_{k+m}$, *za neke* $k, m \in \mathbb{N}$, *tada je* $E_k = E_{k+1} = E^{\mathrm{cri}}$;

(c) *Ako je* $\mathscr{A}$ *konačan, tada je* $E_k = E^{\mathrm{cri}}$ *za neki* $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. (a) Primetimo da za proizvoljne refleksivne i tranzitivne fazi relacije E i F na A, važi $E \leqslant F \Rightarrow E \circ F = F \circ E = F$. Sada, ako je $E \leqslant F$ tada za sve $a, b \in A$ iz $E^r(a,b) = 1$ sledi

$$\begin{aligned}(\delta_x^A \circ F)(a,c) &= (\delta_x^A \circ E \circ F)(a,c)\\ &= \bigvee_{d\in A} (\delta_x^A \circ E)(a,d) \bullet F(d,c)\\ &= \bigvee_{d\in A} (\delta_x^A \circ E)(b,d) \bullet F(d,c)\\ &= (\delta_x^A \circ E \circ F)(b,c) = (\delta_x^A \circ F)(b,c),\end{aligned}$$

za svaki $c \in A$. Dakle, $E \leqslant F \Rightarrow E^r \leqslant F^r$. Štaviše, ako je E desno invarijantna fazi ekvivalencija, tada iz $E(a,b) = 1$ dobijamo

$$\begin{aligned}(\delta_x^A \circ E)(a,c) &= E(b,a) \bullet (\delta_x^A \circ E)(a,c) \leqslant (E \circ \delta_x^A \circ E)(b,c)\\ &= (\delta_x^A \circ E)(b,c),\end{aligned}$$

za sve $a, b, c \in A, x \in X$. Dakle, $\widehat{E} \leqslant E^r$.

Jasno, $E_{k+1} \leqslant E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $E^{\mathrm{cri}} \leqslant E_1$. Ako je $E^{\mathrm{cri}} \leqslant E_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $(E^{\mathrm{cri}})^r \leqslant E_k^r$ i takođe, $E^{\mathrm{cri}} = \widehat{E^{\mathrm{cri}}} \leqslant (E^{\mathrm{cri}})^r$, pa imamo da je

$$E^{\mathrm{cri}} \leqslant E_k^r,$$

a iz ovog sledi $E^{\mathrm{cri}} \leqslant E_{k+1}$. Dakle, indukcijom dobijamo $E^{\mathrm{cri}} \leqslant E_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ako za krisp ekvivalenciju E, važi $E \leqslant E^r$, tada za sve $a, b \in A, x \in X$ imamo

$$(E \circ \delta_x^A \circ E)(a,b) = 1 \;\Rightarrow\; E(a,c) = 1 \;\text{ i }\; (\delta_x^A \circ E)(c,b) = 1,$$

za neki $c \in A$. Sada, kako je $E^r(a,c) = 1$, dobijamo $(\delta_x^A \circ E)(a,b) = 1$. Dakle, $E \circ \delta_x^A \circ E \leqslant \delta_x^A \circ E$, tj. E je desno invarijantna.

Ako je $E_k = E_{k+m}$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, tada

$$E_k = E_{k+m} \leqslant E_{k+1} \leqslant E_k^r.$$

Odavde zaključujemo da je $E_k = E_{k+1} = E^{\mathrm{cri}}$.

(c) Ako je skup A konačan, tada je skup svih krisp relacija na A takođe konačan, pa postoje $k, m \in \mathbb{N}$, za koje je $E_k = E_{k+m}$ i tada je $E_k = E^{\mathrm{cri}}$. $\square$

Teorema odozgo opisuje proceduru za izračunavanje najveće desno invarijantne krisp ekvivalencije sadržane u datoj krisp ekvivalenciji E konačanog fazi automata.

Teorema 4.4.4. *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i α proizvoljan fazi regularan izraz. Neka je $\mathscr{A} = (A, X \cup Y, \delta^A, a_0, \tau^A)$ proizvoljan krisp nedeterministički raspoznavač od $\|\alpha_R\|$ i $\mathscr{A}_\alpha$ fazi raspoznavač pridružen $\mathscr{A}$ i α.*

Tada, svaka desno invarijantna krisp ekvivalencija E na $\mathscr{A}$ jeste desno invarijantna krisp ekvivalencija na $\mathscr{A}_\alpha$ i fazi raspoznavač $(\mathscr{A}/E)_\alpha$ je izomorfan faktor fazi raspoznavaču $\mathscr{A}_\alpha/E$.

Dokaz. Neka je E proizvoljna desno invarijantna krisp ekvivalencija na $\mathscr{A}$, gde je $\mathscr{A} = (A, X \cup Y, \delta^A, a_0, \tau^A)$ proizvoljan nedeterministički raspoznavač jezika $\|\alpha_R\|$. Imamo

$$\begin{aligned}
(E \circ \delta_x^{A_\alpha})(a,b) &= \bigvee_{c \in A_\alpha} E(a,c) \bullet \Big(\bigvee_{u \in U_Y(x)} \varphi_\alpha^*(u) \bullet \delta^A(c,u,b) \Big) \\
&= \bigvee_{u \in U_Y(x)} \varphi_\alpha^*(u) \bullet \Big(\bigvee_{c \in A} E(a,c) \bullet \delta^A(c,u,b) \Big) \\
&= \bigvee_{u \in U_Y(x)} \varphi_\alpha^*(u) \bullet (E \circ \delta_u^A)(a,b) \\
&\leqslant \bigvee_{u \in U_Y(x)} \varphi_\alpha^*(u) \bullet (\delta_u^A \circ E)(a,b) = (\delta_x^{A_\alpha} \circ E)(a,b)
\end{aligned}$$

za sve $a, b \in A_\alpha,\ x \in X$. Iz Teoreme 4.4.1, sledi da je E desno invarijantna krisp ekvivalencija na $\mathscr{A}_\alpha$. Štaviše, imamo

$$\begin{aligned}
\delta^{(A/E)_\alpha}(E_a,x,E_b) &= \bigvee_{u\in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(u)\bullet\delta^{A/E}(E_a,u,E_b)\\
&= \bigvee_{u\in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(u)\bullet\Big(\bigvee_{c,d\in A} E(a,c)\bullet\delta^A(c,u,d)\bullet E(d,b)\Big)\\
&= \bigvee_{c,d\in A}\bigvee_{u\in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(u)\bullet E(a,c)\bullet\delta^A(c,u,d)\bullet E(d,b)\\
&= \bigvee_{c,d\in A} E(a,c)\bullet\Big(\bigvee_{u\in U_Y(x)} \varphi^*_\alpha(u)\bullet\delta^A(c,u,d)\Big)\bullet E(d,b)\\
&= \bigvee_{c,d\in A_\alpha} E(a,c)\bullet\delta^{A_\alpha}(c,x,d)\bullet E(d,b)\\
&= (E\circ\delta^{A_\alpha}_x\circ E)(a,b) = \delta^{A_\alpha/E}(E_a,x,E_b),
\end{aligned}$$

za svaki $x\in X$ i sve $E_a,E_b\in A/E$. Štaviše, lako se proverava da

$$\tau^{(A/E)_\alpha}(E_a) = \tau^{A_\alpha/E}(E_a)$$

za svaki $E_a\in A/E$. Dakle, identičko preslikavanje $id_{A/E}$ je izomorfizam fazi raspoznavača $(\mathscr{A}/E)_\alpha$ i $\mathscr{A}_\alpha/E$. $\square$

Potsetimo da je Teoremom 4.1.1 opisan jednostavan metod konstrukcije raznih tipova fazi raspoznavača iz α. Ovaj metod se zasniva na izboru različitih nedeterminističkih raspoznavača jezika $\|\alpha_R\|$, iz kojih dobijamo različite konačne fazi raspoznavače fazi jezika $\|\alpha\|$.

Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan integralni ℓ-monoid i neka je α proizvoljan fazi regularan izraz nad alfabetom X. Za regularan izraz α_R nad $X\cup Y$, gde je Y alfabet pridružen α, neka je $\mathscr{A}_\mathrm{f}(\alpha_R) = (A_\mathrm{f}, X\cup Y, \delta^{A_\mathrm{f}}, 0, \tau^{A_\mathrm{f}})$ follow automat od α_R. Polazeći od $\mathscr{A}_\mathrm{f}(\alpha_R)$, prema (4.11), dobijamo fazi raspoznavač pridružen $\mathscr{A}_\mathrm{f}(\alpha_R)$ i α, koji označavamo sa $\mathscr{A}_\mathrm{ff}(\alpha) = (A_\mathrm{ff}, X, \delta^{A_\mathrm{ff}}, 0, \tau^{A_\mathrm{ff}})$. Konačan fazi raspoznavač $\mathscr{A}_\mathrm{ff}(\alpha)$ zovemo *follow fazi automat* od α.

Teorema 4.4.5. *Neka je $\mathscr{L}$ integralni ℓ-monoid i α proizvoljan fazi regularan izraz. Neka je $\mathscr{A}_\mathrm{pf}(\alpha)$ pozicioni fazi automat od α i $\mathscr{A}_\mathrm{ff}(\alpha)$ follow fazi automat od α.*

Tada je $\mathscr{A}_\mathrm{ff}(\alpha)$ izomorfan faktor fazi raspoznavaču $\mathscr{A}_\mathrm{pf}(\alpha)/E$ u odnosu na neku desno invarijantnu krisp ekvivalenciju E na A_pf.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz Teoreme 4.4.5 i činjenice da je automat $\mathscr{A}_{\rm f}(\alpha_R)$ kvocijent od $\mathscr{A}_{\rm p}(\alpha_R)$ u odnosu na neku desno invarijantnu krisp ekvivalenciju E. □

Potsetimo da je u dokazu poslednje teoreme korišćen rezultat iz [50, 51, 52, 53], prema kome je follow automat faktor pozicionog automata u odnosu na desno invarijantnu ekvivalenciju, tzv. *follow relaciju.* Iz Teoreme 4.4.5 dobijamo i da je follow fazi automat faktor fazi automat pozicionog fazi automata u odnosu na izvesnu desno invarijantnu krisp ekvivalenciju, pa je zato i znatno manji. Ipak, Primer 4.4.1 pokazuje da, u opštem slučaju, follow relacije nisu najveće desno invarijantne krisp ekvivalencije. Zaključujemo da se bolja redukcija fazi pozicionih automata dobija pomoću njihovih najvećih desno invarijantnih krisp ekvivalencija.

Primer 4.4.1. Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura. Razmotrimo $\alpha = xx^* + 0.1x^*$, fazi regularan izraz nad alfabetom $X = \{x\}$. Izraz $\alpha_R = xx^* + \lambda x^*$, nad alfabetom $\{x, \lambda\}$, je regularan izraz dobijen iz α. Pozicioni automat $\mathscr{A}_{\rm p}(\alpha_R)$, je dat sledećim fazi relacijama prelaza

$$\delta_x^{A_{\rm p}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \delta_\lambda^{A_{\rm p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\rm p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neka je E^f krisp relacija na $A_{\rm p}$, definisana sa

$$E^f(i,j) = 1 \ \text{ ako i samo ako je } \ \delta_x^{A_{\rm p}}(i,k) = \delta_x^{A_{\rm p}}(j,k)$$

za sve $i, j, k \in A_{\rm p}$, i svaki $x \in X$. E^f je desno invarijantna krisp ekvivalencija pozicionog automata $\mathscr{A}_{\rm p}(\alpha_R)$, poznata kao follow relacija na $A_{\rm p}$ (vidi [50, 51, 52, 53]). E^f je data sa

$$E^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa zato $\mathscr{A}_{\rm f}(\alpha_R)$ i $\mathscr{A}_{\rm ff}(\alpha)$ imaju 3 stanja.

Dalje, fazi relacije prelaza $\delta_x^{A_{\rm pf}}$, i $\tau^{A_{\rm pf}}$ od $\mathscr{A}_{\rm pf}(\alpha)$ date su sa

$$\delta_x^{A_{\rm pf}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tau^{A_{\rm pf}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a najveća desno invarijantna krisp ekvivalencija $E^{\rm cri}$ na $\mathscr{A}_{\rm pf}(\alpha)$ je

$$E^{\rm cri} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, fazi raspoznavač $\mathscr{A}_{\rm pf}(\alpha)/E^{\rm ri}$ ima samo 2 stanja.

Neka je α regularan izraz. Primetimo da je, polazeći od parcijalno izvodnog automata kao nedeterminističkog raspoznavača dobijenog iz regularog izraza α_R, moguće konstruisati parcijalno izvodni fazi automat iz α. Kako je parcijalno izvodni automat faktor automat pozicionog automata u odnosu na određenu desno invarijantna ekvivalenciju ([24, 25, 26, 52]), teorema koja odgovara Teoremi 4.4.5, a tiče se parcijalno izvodnih fazi automata, jednostavno se dokazuje.

Literatura

[1] C. Allauzen, M. Mohry, *A Unified Construction of the Glushkov, Follow and Antimirov Automata*, In: Proceedings of the 31st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS 2006, Springer, Berlin, Lecture Notes in Computer Science 4162 (2006) 110–121.

[2] V. Antimirov, *Partial derivatives of regular expressions and finite automaton constructions*, Theoretical Computer Science 155 (1996) 291–319.

[3] P. R. J. Asveld, *Algebraic aspects of families of fuzzy languages*, Theoretical Computer Science 293 (2003) 417–445.

[4] W. Bandler, L.J. Kohout, *Fuzzy relational products as a tool for analysis and synthesis of the behaviour of complex natural and artificial systems*, in: S.K. Wang, P.P. Chang (Eds.), Fuzzy Sets: Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems, Plenum Press, New York, 1980, pp. 341–367.

[5] N. C. Basak and A. Gupta, *On quotient machines of a fuzzy automaton and the minimal machine*, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002) 223–229.

[6] R. Bělohlávek, *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*, Kluwer, New York, 2002.

[7] R. Bělohlávek, *Determinism and fuzzy automata*, Information Sciences 143 (2002) 205–209.

[8] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Fuzzy Equational Logic*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2005.

[9] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Polugrupe*, Prosveta, Niš, 1993.

[10] S. Bozapalidis and O. Louscou-Bozapalidou, *On the recognizability of fuzzy languages* I, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 2394–2402.

[11] J. Brzozowsky, *Derivatives of regular expressions*, Journal of the ACM 11 (1964) 481–494.

[12] P. Buchholz, *Bisimulation relations for weighted automata*, Theoretical Computer Science 393 (2008) 109–123.

[13] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[14] C. S. Calude, E. Calude, B. Khoussainov, *Finite nondeterministic automata: Simulation and minimality*, Theoretical Computer Science 242 (2000) 219–235.

[15] C. Câmpeanu, N. Sântean, S. Yu, *Mergible states in large NFA*, Theoretical Computer Science 330 (2005) 23–34.

[16] Y. Z. Cao, M. S. Ying, Supervisory control of fuzzy discrete event systems, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B 35 (2005) 366–371.

[17] Y. Z. Cao, M. S. Ying, Observability and decentralized control of fuzzy discrete-event systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2006) 202–216.

[18] Y. Z. Cao, M. S. Ying, G. Q. Chen, State-based control of fuzzy discrete-event systems, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B 37 (2007) 410–424.

[19] P. Caron, M. Flouret, *Glushkov construction for series: The non commutative case*, International Journal of Computer Mathematics 80 (4) (2003) 457-472.

[20] C. G. Cassandras, S. Lafortune, *Introduction to Discrete Event Systems*, Springer US, 2008.

[21] J.-M. Champarnaud, F. Coulon, *Theoretical study and implementation of the canonical automaton*, Technical Report AIA 2003.03, LIFAR, Université de Rouen, 2003.

[22] J.-M. Champarnaud, F. Coulon, *NFA reduction algorithms by means of regular inequalities*, Z. Ésik, Z. Fülöp (eds.), DLT 2003, Lecture Notes in Computer Science 2710 (2003) 194–205.

[23] J.-M. Champarnaud, F. Coulon, *NFA reduction algorithms by means of regular inequalities*, Theoretical Computer Science 327 (2004) 241–253.

[24] J.-M. Champarnaud, D. Ziadi, *New finite automaton constructions based on canonical derivatives*, in: S. Yu, A. Paun (eds.), CIAA 2000, Springer, Berlin, Lecture Notes in Computer Science 2088 (2001) 94–104.

[25] J.-M. Champarnaud, D. Ziadi, *Computing the equation automaton of a regular expression in* $\mathscr{O}(s^2)$ *space and time*, in: A. Amir, G. Landau (eds.), CPM 2001, Springer, Berlin, Lecture Notes in Computer Science 2089 (2001) 157–168.

[26] J.-M. Champarnaud, D. Ziadi, *Canonical derivatives, partial derivatives and finite automaton constructions*, Theoretical Computer Science 289 (2002) 137–163.

[27] W. Cheng and Z. Mo, *Minimization algorithm of fuzzy finite automata*, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004) 439–448.

[28] M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Jezici i automati*, Prosveta, Niš, 2000.

[29] M. Ćirić, J. Ignjatović and S. Bogdanović, *Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1295–1313.

[30] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, *Uniform fuzzy relations and fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1054–1081.

[31] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, *Factorization of fuzzy automata*, in: E. Csuhaj-Varju, and Z. Ésik (eds.) FCT 2007, Lecture Notes in Computer Science 4639 (2007) 213–225.

[32] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, *Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata*, Journal of Computer and System Sciences (2009) doi:10.1016/j.jcss.2009.10.015.

[33] B. De Baets, E. Kerre, *The cutting of compositions*, Fuzzy Sets and Systems 62 (1994) 295–309.

[34] M. De Cock, E. E. Kerre, *Fuzzy modifiers based on fuzzy relations*, Information Sciences 160 (2004) 173–199.

[35] M. Demirci, *Topological properties of the class of generators of an indistinguishability operator*, Fuzzy Sets and Systems 143 (2004) 413–426.

[36] M. Demirci and J. Recasens, *Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations*, Fuzzy Sets and Systems 144 (2004) 441–458.

[37] A. Dovier, C. Piazza, A. Policriti, *An efficient algorithm for computing bisimulation equivalence*, Theoretical Computer Science 311 (2004) 221–256.

[38] M. Droste and P. Gastin, *Weighted automata and weighted logics*, in: Automata, languages and programming (32nd ICALP Lisbon, Portugal, 2005) Lecture Notes in Computer Science 3580 (2005) 513–525.

[39] R. Gentilini, C. Piazza, A. Policriti, *From bisimulation to simulation: coarsest partition problems*, Journal of Automated Reasoning 31 (2003) 73–103.

[40] V. M. Glushkov, *The abstract theory of automata*, Russian Mathematical Surveys 16 (1961) 1–53.

[41] L. H. Haines, *On free monoids partially ordered by embedding*, Journal of Combinatorial Theory 6 (1969) 94–98.

[42] G. Higman, *Ordering with divisibility in abstract algebras*, Proceedings of the London Mathematical Society 3 (1952) 326–336.

[43] J. Högberg, A. Maletti, J. May, *Backward and forward bisimulation minimisation of tree automata*, in: J. Holub, J. Ždárek (eds.), IAA07, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4783 (2007) 109–121.

[44] J. Högberg, A. Maletti, J. May, *Backward and forward bisimulation minimization of tree automata*, Theoretical Computer Science 410 (2009) 3539–3552.

[45] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *Introduction to automata theory, Language and Computation*, Addison-Wesley, Reading, MASS, 1979.

[46] B. Hrúz, M. C. Zhou, *Modeling and control of discrete-event dynamical systems: with Petri nets and other tools*, Springer, 2007.

[47] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, *Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices*, Information Sciences 178 (2008) 164–180.

[48] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, T. Petković, *Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata*, Fuzzy Sets and Systems (2009) doi:10.1016/j.fss.2009.06.007.

[49] J. Ignjatovic' and M. C'iric', *Formal power series and regular operations on fuzzy and crisp languages*, Information Sciences (to appear).

[50] L. Ilie, S. Yu, *Constructing NFAs by optimal use of positions in regular expressions*, in: A. Apostolico, M. Takeda (eds.), CPM 2002, Springer, Berlin, Lecture Notes in Computer Science 2373 (2002) 279–288.

[51] L. Ilie, S. Yu, *Algorithms for computing small NFAs*, in: K. Diks et al. (eds): MFCS 2002, Lecture Notes in Computer Science 2420 (2002) 328–340.

[52] L. Ilie, S. Yu, *Follow automata*, Information and Computation 186 (2003) 140–162

[53] L. Ilie, S. Yu, *Reducing NFAs by invariant equivalences*, Theoretical Computer Science 306 (2003) 373–390.

[54] L. Ilie, G. Navarro, S. Yu, *On NFA reductions*, in: J. Karhumäki et al. (eds): Theory is Forever, Lecture Notes in Computer Science 3113 (2004) 112–124.

[55] L. Ilie, R. Solis-Oba, S. Yu, *Reducing the size of NFAs by using equivalences and preorders*, in: A. Apostolico, M. Crochemore, and K. Park (Eds): CPM 2005, Lecture Notes in Computer Science 3537 (2005) 310–321.

[56] T. Jiang, B. Ravikumar, *Minimal NFA problems are hard*, SIAM Journal on Computing 22 (6) (1993) 1117–1141.

[57] P. C. Kannellakis, S. A. Smolka, *CCS expressions, finite state processes, and three problems of equivalence*, Information and Computation 86 (1990) 43–68.

[58] E. Kilic, Diagnosability of fuzzy discrete event systems, Information Sciences 178 (2008) 858–870.

[59] F. Klawonn, *Fuzzy points, fuzzy relations and fuzzy functions*, in: V. Novâk and I. Perfilieva (Eds.), Discovering World with Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 431–453.

[60] F. Klawonn, J. L. Castro, *Similarity in fuzzy reasoning*, Mathware Soft Computing 2 (1995) 197–228.

[61] F. Klawonn and R. Kruse, *Equality relations as a basis for fuzzy control*, Fuzzy Sets and Systems 54 (1993) 147-156.

[62] T. Kameda, P. Weiner, *On the state minimization of nondeterministic finite automata*, IEEE Transactions on Computers C-19 (7) (1970) 617–627.

[63] E. T. Lee, L. A. Zadeh, *Note on fuzzy languages*, Information Sciences 1 (1969) 421–434.

[64] H. X. Lei and Y. M. Li, *Minimization of states in automata theory based on finite lattice-ordered monoids*, Information Sciences 177 (2007) 1413–1421.

[65] Y. M. Li, *Lattice valued finite automata and their languages*, in: 8th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics: SCI2004, Orlando, USA (2004) 18–21.

[66] P. Li and Y. M. Li, *Algebraic properties of LA-languages*, Information Sciences 176 (2006) 3232–3255.

[67] Z. H. Li, P. Li and Y. M. Li, *The relationships among several types of fuzzy automata*, Information Sciences 176 (2006) 2208–2226.

[68] Y. M. Li and W. Pedrycz, *Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice ordered monoids*, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005) 68–92.

[69] Y. M. Li and W. Pedrycz, *The equivalence between fuzzy Mealy and fuzzy Moore machines*, Soft Computing 10 (2006) 953–959.

[70] F. Lin, H. Ying, Fuzzy discrete event systems and their observability, in: Proceedings of the 2001 IFSA/NAFIP Conference, 2001, pp. 1271–1276.

[71] F. Lin, H. Ying, Modeling and control of fuzzy discrete event systems, IEEE Transactions on Man, Systems and Cybernetics – Part B 32 (2002) 408–415.

[72] F. Lin, H. Ying, R. D. MacArthur, J. A. Cohn, D. Barth-Jones, L. R. Crane, Decision making in fuzzy discrete event systems, Information Sciences 177 (2007) 3749–3763.

[73] J. P. Liu, Y. M. Li, The relationship of controllability between classical and fuzzy discrete-event systems, Information Sciences 178 (2008) 4142–4151.

[74] S. Lombardy, J. Sakarovitch, *Derivations of Rational Expressions with Multiplicity*, In: Diks, K., Ritter,W. (eds.) MFCS 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2420, pp. 471482. Springer, Heidelberg (2002)

[75] N. Lynch, F. Vaandrager, *Forward and backward simulations: Part I. Untimed systems*, Information and Computation 121 (1995) 214–233.

[76] D. S. Malik, J. N. Mordeson and M. K. Sen, *Minimization of fuzzy finite automata*, Information Sciences 113 (1999) 323–330.

[77] R. Malik, D. Streader, S. Reeves, *Fair testing revisited: A process-algebraic characterisation of conflicts*, in: F. Wang (ed.), ATVA 2004, Lecture Notes in Computer Science 3299 (2004) 120–134.

[78] R. McNaughton, H. Yamada, *Regular expressions and state graphs for automata*, IEEE Transitions on Electronic Computers 9 (1) (1960) 39–47.

[79] B. F. Melnikov, *A new algorithm of the state-minimization for the nondeterministic finite automata*, Korean Journal of Computational & Applied Mathematics 6 (2) (1999) 277–290.

[80] B. F. Melnikov, *Once more about the state-minimization of the nondeterministic finite automata*, Korean Journal of Computational & Applied Mathematics 7 (3) (2000) 655–662.

[81] R. Milner, *A calculus of communicating systems*, in G. Goos and J. Hartmanis (eds.), Lecture Notes in Computer Science 92 (1980) Springer.

[82] R. Milner, *Communication and Concurrency*, Prentice-Hall International, 1989.

[83] R. Milner, *Communicating and Mobile Systems: the π-Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[84] J. N. Mordeson and D. S. Malik, *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[85] R. Paige, R. E. Tarjan, *Three partition refinement algorithms*, SIAM Journal on Computing 16 (6) (1987) 973–989.

[86] D. Park, *Concurrency and automata on infinite sequences*, in: P. Deussen (ed.), Proc. 5th GI Conf., Karlsruhe, Germany, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science 104 (1981) 167–183.

[87] I. Perfilieva, *Fuzzy function as an approximate solution to a system of fuzzy relation equations*, Fuzzy Sets and Systems 147 (2004) 363–383.

[88] I. Perfilieva, S. Gottwald, *Solvability and approximate solvability of fuzzy relation equations*, International Journal of General Systems 32 (2003) 361–372.

[89] I. Perfilieva, V. Novák, *System of fuzzy relation equations as a continuous model of IF-THEN rules*, Information Sciences 177 (2007) 3218–3227.

[90] T. Petković, *Congruences and homomorphisms of fuzzy automata*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 444–458.

[91] D. Qiu, Supervisory control of fuzzy discrete event systems: a formal approach, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B 35 (2005) 72–88.

[92] D. W. Qiu, F. C. Liu, Fuzzy discrete-event systems under fuzzy observability and a test algorithm, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 17 (3) (2009) 578–589.

[93] F. Ranzato, F. Tapparo, *Generalizing the PaigeTarjan algorithm by abstract interpretation*, Information and Computation 206 (2008) 620–651.

[94] M. Roggenbach, M. Majster-Cederbaum, *Towards a unified view of bisimulation: a comparative study*, Theoretical Computer Science 238 (2000) 81-130.

[95] E. Sanchez, *Resolution of composite fuzzy relation equations*, Information and Control 30 (1976) 38–48.

[96] D. Sangiorgi, *On the origins of bisimulation, coinduction, and fixed points*, Technical Report UBLCS-2007-24, Department of Computer Science, University of Bologna, 2007.

[97] H. Sengoku, *Minimization of nondeterministic finite automata*, Master thesis, Kyoto University, 1992.

[98] J. Z. Shen, *Fuzzy language on free monoid*, Information Sciences 88 (1996) 149–168.

[99] L. Sheng and Y. M. Li, *Regular grammars with truth values in lattice-ordered monoid and their languages*, Soft Computing 10 (2006) 79–86.

[100] A. Stamenković, M. Ćirić, J. Ignjatović, T. Petković, *Reduction of fuzzy automata by means of fuzzy quasi-order*, submitted to Information Sciences.

[101] K. Thompson, *Regular expression search algorithm*, Communications of the ACM 11 (6) (1968) 419–422.

[102] L. Valverde, *On the structure of F-indistinguishability operators*, Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 313–328.

[103] H.G. Xing, D.W. Qiu, *Pumping lemma in context-free grammar theory based on complete residuated lattice-valued logic*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1141–1151.

[104] H.G. Xing, D.W. Qiu, *Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: A categorical approach*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 2416–2428.

[105] H.G. Xing, D.W. Qiu, F.C. Liu, *Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Pushdown automata*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1125–1140.

[106] H.G. Xing, D.W. Qiu, F.C. Liu, Z.J. Fan,*Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1407–1422.

[107] S. Yu, *Regular languages*, in: Handbook of Formal Languages (G. Rozenberg, A. Salomaa, eds.), Vol 1, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1997, pp. 41–110.

[108] L. A. Zadeh, *Fuzzy languages and their relation to human and machine intelligence*, Electron. Research Laboratory University California, Berkley, CA, Technical Report ERL-M302, 1971.

Indeks