УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Оливера М. Станимировић

УОПШТЕЊА ЈЕЗГАРНЕ-ЕП ОРТОГОНАЛНОСТИ И ОСОБИНЕ ЈЕЗГАРНОГ ЕП-ПРЕ УРЕЂЕЊА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2026.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Olivera M. Stanimirović

GENERALIZATIONS OF THE CORE-EP ORTHOGONALITY AND PROPERTIES OF THE CORE-EP PRE-ORDER

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2026.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Дијана Мосић, редовни професор, Природно-математички факултет у Нишу, Универзитет у Нишу
Наслов:	Уопштења језгарне-ЕП ортогоналности и особине језгарног-ЕП пре-уређења
Резиме:	Предмет научног истраживања ове докторске дисертације јесу различита уопштења концепта језгарне-ЕП ортогоналности као и особине језгарног-ЕП пре-уређења. Језгарни-ЕП инверз је прво дефинисан за квадратне матрице произвољног индекса као уопштење језгарног инверза за квадратне матрице индекса 1. Овај концепт је затим проучаван за Дрејзин инвертибилне операторе, елементе прстена са инволуцијом и елементе Банахове алгебре. Језгарни-ЕП инверз је примењен у решавању система једначина и минимизационих проблема, као и за дефинисање језгарне-ЕП ортогоналности и језгарног-ЕП пре-уређења. Циљ ове дисертације је најпре уопштење појмова једностраних језгарних ортогоналности и језгарне-ЕП ортогоналности. Једностране језгарне ортогоналности су уведене за квадратне матрице индекса 1, а у овој дисертацији се проучавају концепти ортогоналности за Дрејзин инвертибилне операторе произвољног индекса. Прецизније, представљају се лева и десна језгарна-ЕП ортогоналност и m-слабо групна ортогоналност и њихове релације са постојећим концептима ортогоналности. Различите карактеризације нових ортогоналности су изучаване. Значај нових појмова ортогоналности је у изучавању особина адитивности и пре-уређења. Разматране су и нове особине језгарног-ЕП пре-уређења. Тачније, представљени су еквивалентни услови под којима важи језгарно-ЕП пре-уређење, као и услови под којима језгарно-ЕП уређење имплицира да важе закони обрнутог и директног редоследа за језгарни-ЕП инверз. У прстену са инволуцијом, истражени су нови појамови ортогоналности који представљају уопштења постојећих појмова ортогоналности за операторе и елементе прстена са инволуцијом. Различите особине и карактеристике ортогоналних елемената су доказане, а такође су представљени и њихови матрични облици. У случају када важе нове уопштене ортогоналности, изучавају се и одговарајуће адитивне особине. Истражене су и особине језгарног-ЕП пре-уређења и закони обрнутог и директног редоследа за језгарни-ЕП инверз. Резултати ове докторске дисертације се односе на уопштења постојећих појмова ортогоналности на нове појмове

ортогоналности за операторе и елементе прстена са инволуцијом. Постојећи резултати се уопштавају и допуњују новим.

Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Теорија оператора
Кључне речи:	Језгарни-ЕП инверз, језгарна-ЕП ортогоналност, Делимично уређење и пре-уређење
УДК:	517.984/.4:512.552(043.3)
CERIF класификација:	П 001 Математика, П 140 Класе, Фуријеова анализа, функционална анализа, П 120 Теорија бројева, теорија поља, алгебарска геометрија, алгебра, теорија група
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Full professor, Dijana Mosić, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Generalizations of the core-EP orthogonality and properties of the core-EP pre-order

Abstract:

The subject of the scientific research in this doctoral dissertation are various generalizations of the concept of core-EP orthogonality, as well as the properties of the core-EP pre-order. The core-EP inverse was first defined for square matrices of an arbitrary index as a generalization of the core inverse for square matrices of index 1. This concept was subsequently studied for Drazin invertible operators, elements of a ring with involution, and elements of a Banach algebra. The core-EP inverse is applied in solving systems of equations and minimization problems, as well as for defining core-EP orthogonality and the core-EP pre-order.

The aim of this dissertation is, primarily, the generalization of the concepts of one-sided core orthogonalities and core-EP orthogonality. One-sided core orthogonalities are introduced for square matrices of index 1, while this dissertation investigates orthogonality concepts for Drazin invertible operators of an arbitrary index. More precisely, left and right core-EP orthogonality and m-weak group orthogonality are presented, along with their relations to existing orthogonality concepts. Various characterizations of these new orthogonalities are studied. The significance of these new concepts of orthogonality lies in the study of additivity properties and pre-orders.

New properties of the core-EP pre-order are also considered. Specifically, equivalent conditions under which the core-EP pre-order holds are presented, as well as conditions under which the core-EP order implies that the reverse order and forward order laws for the core-EP inverse hold.

In a ring with involution, new concepts of orthogonality, which represent generalizations of existing orthogonality concepts for operators and elements of a ring with involution, are explored. Various properties and characteristics of orthogonal elements are proven, and their matrix forms are also presented. In cases where the new generalized orthogonalities hold, the corresponding additive properties are also studied. Furthermore, the properties of the core-EP pre-order and the reverse order and forward order laws for the core-EP inverse are investigated.

The results of this doctoral dissertation relate to the generalizations of existing orthogonality concepts to new concepts of orthogonality for operators and elements of a ring with involution. Existing results are generalized and supplemented with new ones.

Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Operator theory
Key Words:	Core-EP inverse, Core-EP orthogonality, Partial orders and pre-order
UDC:	517.984/.4:512.552(043.3)
CERIF Classification:	P 001, Mathematics , P 120, Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory, P 140 Series, Fourier analysis, functional analysis

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Оливера М. Станимировић
Ментор, **МН**:	Дијана Мосић
Наслов рада, **НР**:	УОПШТЕЊА ЈЕЗГАРНЕ-ЕП ОРТОГОНАЛНОСТИ И ОСОБИНЕ ЈЕЗГАРНОГ-ЕП ПРЕ УРЕЂЕЊА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2026.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/106/99/0/0/0/0
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	функционална анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	теорија оператора
УДК	517.984/.4:512.552(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	/

Извод, **ИЗ**:	Предмет научног истраживања ове докторске дисертације јесу различита уопштења концепта језгарне-ЕП ортогоналности као и особине језгарног-ЕП пре-уређења. Језгарни-ЕП инверз је прво дефинисан за квадратне матрице произвољног индекса као уопштење језгарног инверза за квадратне матрице индекса 1. Овај концепт је затим проучаван за Дрејзин инвертибилне операторе, елементе прстена са инволуцијом и елементе Банахове алгебре. Језгарни-ЕП инверз је примењен у решавању система једначина и минимизационих проблема, као и за дефинисање језгарне-ЕП ортогоналности и језгарног-ЕП пре-уређења. Циљ ове дисертације је најпре уопштење појмова једностраних језгарних ортогоналности и језгарне-ЕП ортогоналности. Једностране језгарне ортогоналности су уведене за квадратне матрице индекса 1, а у овој дисертацији се проучавају концепти ортогоналности за Дрејзин инвертибилне операторе произвољног индекса. Прецизније, представљају се лева и десна језгарна-ЕП ортогоналност и m-слабо групна ортогоналност и њихове релације са постојећим концептима ортогоналности. Различите карактеризације нових ортогоналности су изучаване. Значај нових појмова ортогоналности је у изучавању особина адитивности и пре-уређења. Разматране су и нове особине језгарног-ЕП пре-уређења. Тачније, представљени су еквивалентни услови под којима важи језгарно-ЕП пре-уређење, као и услови под којима језгарно-ЕП уређење имплицира да важе закони обрнутог и директног редоследа за језгарни-ЕП инверз. У прстену са инволуцијом, истражени су нови појамови ортогоналности који представљају уопштења постојећих појмова ортогоналности за операторе и елементе прстена са инволуцијом. Различите особине и карактеристике ортогоналних елемената су доказане, а такође су представљени и њихови матрични облици. У случају када важе нове уопштене ортогоналности, изучавају се и одговарајуће адитивне особине. Истражене су и особине језгарног-ЕП пре-уређења и закони обрнутог и директног редоследа за језгарни-ЕП инверз. Резултати ове докторске дисертације се односе на уопштења постојећих појмова ортогоналности на нове појмове ортогоналности за операторе и елементе прстена са инволуцијом. Постојећи резултати се уопштавају и допуњују новим.
Датум прихватања теме, **ДП**:	12.01.2026.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Прилог 4/2

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Olivera M. Stanimirović
Mentor, **MN**:	Dijana Mosić
Title, **TI**:	Generalizations of the core-EP orthogonality and properties of the core-EP pre-order
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2026
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7/106/99/0/0/0/0
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	functional analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	operator theory
UC	517.984/.4:512.552(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	\

Abstract, **AB**:

The subject of the scientific research in this doctoral dissertation are various generalizations of the concept of core-EP orthogonality, as well as the properties of the core-EP pre-order. The core-EP inverse was first defined for square matrices of an arbitrary index as a generalization of the core inverse for square matrices of index 1. This concept was subsequently studied for Drazin invertible operators, elements of a ring with involution, and elements of a Banach algebra. The core-EP inverse is applied in solving systems of equations and minimization problems, as well as for defining core-EP orthogonality and the core-EP pre-order.

The aim of this dissertation is, primarily, the generalization of the concepts of one-sided core orthogonalities and core-EP orthogonality. One-sided core orthogonalities are introduced for square matrices of index 1, while this dissertation investigates orthogonality concepts for Drazin invertible operators of an arbitrary index. More precisely, left and right core-EP orthogonality and m-weak group orthogonality are presented, along with their relations to existing orthogonality concepts. Various characterizations of these new orthogonalities are studied. The significance of these new concepts of orthogonality lies in the study of additivity properties and pre-orders.

New properties of the core-EP pre-order are also considered. Specifically, equivalent conditions under which the core-EP pre-order holds are presented, as well as conditions under which the core-EP order implies that the reverse order and forward order laws for the core-EP inverse hold.

In a ring with involution, new concepts of orthogonality, which represent generalizations of existing orthogonality concepts for operators and elements of a ring with involution, are explored. Various properties and characteristics of orthogonal elements are proven, and their matrix forms are also presented. In cases where the new generalized orthogonalities hold, the corresponding additive properties are also studied. Furthermore, the properties of the core-EP pre-order and the reverse order and forward order laws for the core-EP inverse are investigated.

The results of this doctoral dissertation relate to the generalizations of existing orthogonality concepts to new concepts of orthogonality for operators and elements of a ring with involution. Existing results are generalized and supplemented with new ones.

Abstract, **AB**:		supplemented with new ones.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		12.01.2026.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Istorijski razvoj uopštenih inverza započinje radovima E. H. Moore-a (1920) i R. Penrose-a (1955) [66], čiji je prvi doprinos definisanje onoga što danas poznajemo kao Mur-Penrouzov inverz. Nekoliko godina kasnije, tačnije 1958. godine, M. P. Drazin [16] uvodi novi koncept uopštenih inverza u okviru teorije polugrupa, poznat kao Drejzinov inverz.

Proučavanje jezgarnog inverza počelo je u okviru matrične teorije, ali je ubrzo uopšteno na apstraktnije strukture poput prstena sa involucijom i operatora na Hilbertovim prostorima [72, 73]. Nakon što su O. M. Baksalary i G. Trenkler (2010) u [1] definisali pojam jezgarnog inverza za kompleksne kvadratne matrice, ključni korak ka apstraktnoj algebri napravljen je nekoliko godina kasnije. Koncept jezgarnog inverza uveli su O. M. Baksalary i G. Trenkler kao alternativu grupnom inverzu, fokusirajući se na matrice indeksa 1.

D. S. Rakić, N. Č. Dinčić i D. S. Đorđević su u radu [73] uveli definiciju jezgarnog inverza za elemente prstena sa involucijom. Oni su pokazali da za element a prstena $\mathcal{R}$, jezgarni i dualni jezgarni inverz istovremeno postoje ako i samo ako je a istovremeno grupno i Mur-Penrouz invertibilan.

Istraživanje se nastavlja za ograničene linearne operatore na Hilbertovom prostoru $\mathcal{B}(H)$, gde su geometrijska svojstva (jezgro i slika operatora) omogućila razumevanje veze između ortogonalnih projektora i ovog inverza.

Definisanje jedinstvenog uopštenog inverza koji ima osobine Mur-Penrouzovog i grupnog inverza bilo je motivacija za uvođenje jezgarnog-EP inverza kako bi se prevazišlo ograničenje jezgarnog inverza (koji postoji samo za matrice indeksa 1). K. M. Prasad i K. S. Mohana su uveli novi tip uopštenog inverza matrica koji su nazvali jezgarni–EP inverz 2014. godine u radu [67]. Kasnije, ovi rezultati su uopšteni za elemente u Banahovoj algebri i operatore na beskonačno-dimenzionalnim prostorima [47].

Dva elementa unitarnog prostora su ortogonalna ako je njihov skalarni proizvod nula. Koncept ortogonalnosti može biti proširen na elemente normiranog linearnog prostora na razne načine. Jedan od najvažnijih je koncept Birkhoff–James-ove ortogonalnosti [5, 30].

Neka je X kompleksan Banach-ov prostor. Element $x \in X$ je Birkhoff–James ortogonalan elementu $y \in X$ ako je $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ za svaki kompleksan broj λ.

Za $A, B \in \mathcal{B}(H)$, operator A je Birkhoff-James ortogonalan sa operatorom B, označavamo sa $A \perp B$, ako je $A + \lambda B \geq A$ za sve kompleksne brojeve λ. U unitranom prostoru (kao što je Hilbertov prostor), ova ortogonalnost je ekvivalentna sa običnim pojmom ortogonalnosti. Očigledno, Birkhoff-James-ova ortogonalnost jeste nedegenerativna, pa je $A \perp A \Leftrightarrow A = 0$. Homogena je, dakle $A \perp B \Leftrightarrow \lambda A \perp \mu B$ za svako $\lambda, \mu \in C$, i nije simetrična, dakle $A \perp B$ ne mora da implicira $B \perp A$ [46]. Štaviše, Turnšek u [81] dokazuje da $A \perp B$ uvek implicira $B \perp A$ ako i samo ako je B skalarni umnožak izometrije ili ko-izometrije.

Koncepti ortogonalnosti zasnovani na uslovima jednostrane ili dvostrane ortogonalnosti do sada su izučavani za matrice i operatore. U ovoj disertaciji se uopštavaju neki raniji rezultati dokazani za ortogonalnost matrica.

Zasnovano na jezgarnom-EP inverzu, D. Mosić, G. Dolinar, B. Kuzma i J. Marovt uopštavaju koncept jezgarne ortogonalnosti i uvode jezgarnu-EP ortogonalnost za Drejzin invertibilne operatore A i B na Hilbertovom prostoru.

Rezultati istraživanja ove doktorske disertacije jesu različita uopštenja jezgarne-EP ortogonalnosti za operatore na Hilbertovom prostoru, kao i za elemente prstena sa involucijom.

Poznato je da binarna relacija na nepraznom skupu jeste pre-uređenje ako je refleksivna i tranzitivna. Ako je takođe i antisimetrična, onda se naziva parcijalno uređenje.

Mnoga parcijalna uređenja i pre-uređenja istražena su ranije koristeći različite vrste uopštenih inverza [50]. Jezgarno parcijalno uređenje je predstavljeno u [1]. Jezgarno uređenje je takođe uopšteno za operatore na Hilbertovom prostoru u [72].

Pored pojma jezgarne-EP ortogonalnosti, uvodi se i odgovarajuće jezgarno-EP pre-uređenje za operatore. Koristeći jezgarni-EP inverz, jezgarno-EP pre-uređenje je definisano u [54], za operatore $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, kao $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ kada je $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$ i $A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B$. Za razne karakterizacije jezgarnog-EP pre-uređenja pogledati [83] za slučaj kompleksnih matrica, [49, 54] za operatrore, [53] za elemente C^*-algebre i [14, 23, 48] za elemente u prstenu sa involucijom. U opštem slučaju, kada su $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, jezgarno parcijalno uređenje je dato u [1, 72] kao $A \leq^{\textcircled{\#}} B$ kada je $AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}}$ i $A^{\textcircled{\#}}A = A^{\textcircled{\#}}B$. Interesantne osobine jezgarnog parcijalnog uređenja mogu se videti u [19].

Ovde su takođe izučavane nove osobine jezgarnog–EP pre–uređenja za operatore.

Doktorska disertacija je podeljena u sedam poglavlja, gde je svako poglavlje podeljeno na odeljke.

- U prvom, uvodnom poglavlju dat je kratak pregled disertacije. Takođe, date su definicije uopštenih inverza operatora i elemenata prstena.

- Drugo poglavlje predstavlja rezultate istraživanja ortogonalnosti operatora na Hilbertovom prostoru. Jasno je da jednostrana jezgarna ortogonalnost jeste uvedena za matrice indeksa 1 a ovde je istražen koncept ortogonalnosti za Drejzin invertibilne operatore proizvoljnog indeksa. Takođe, uopšten je koncept jednostrane jezgarne ortogonalnosti i jezgarne-EP ortogonalnosti definišući verzije jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti. Na ovaj način, uopšteni su neki poznati rezultati i predstavljeno je nekoliko novih rezultata za jednostrane jezgarne ortogonalnosti.

Predstavljene su matrične forme jednostranih jezgarno-EP ortogonalnih operatora. Takođe, istraženi su dodatni uslovi koji sa jednostranom jezgarnom-EP ortogonalnošću impliciraju $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$. Dakle, pojam jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti jeste korišćen i u proučavanju osobina aditivnosti jezgarnih-EP inverza.

- Treće poglavlje jeste istraživanje novog koncepta jezgarne-EP ortogonalnosti za elemente u prstenu sa involucijom. Različite osobine i karakteristike jezgarno-EP ortogonalnih elemenata su dokazane, a takođe su predstavljeni i njihovi matrični oblici.

  Za par jezgarno–EP ortogonalnih elemenata, predloženi su ekvivalentni uslovi za jezgarnu-EP aditivnost. Pomoću jezgarne-EP ortogonalnosti, istražena je i proučavana stroga jezgarna-EP ortogonalnost za elemente prstena sa involucijom. Zatim, uopšteni su neki rezultati za operatore i dat je niz novih rezultata.

- Četrvto poglavlje govori o jednom od bitnih problema u teoriji uopštenih inverza, tj. nalaženju uopštenog inverza proizvoda. Za jezgarni inverz, potrebni i dovoljni uslovi da zakon obrnutog redosleda $(AB)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}}$ i zakon direktnog redosleda $(AB)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$ važe jesu istraženi od strane mnogih autora [1].

  Podsetimo se da jezgarno parcijalno uređenje $A \leq^{\textcircled{\#}} B$ implicira

  $$(AB)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}} = (BA)^{\textcircled{\#}}.$$

  Pretpostavke pod kojima zakon obrnutog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$ važi za jezgarni-EP inverz su predstavljene.

  Prvi cilj bio je da se pronađu nove karakteristike za jezgarno-EP pre-uređenje $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ koristeći odgovarajuće samo-adjungovane operatore i jezgarne-EP inverze. Dalje, u slučaju da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$, pokazane su karakteristike zakona $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$.

  Potrebni i dovoljni uslovi za ekvivalenciju između zakona direktnog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ i zakona obrnutog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$ su posmatrani.

  Pod uslovom $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$, dobijeni su uslovi pod kojima bi važila sledeća jednakost:

  $$(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}} - A^{\textcircled{\dagger}}.$$

  Primenjujući prethodno pomenute uslove, dobijene su i karakteristike za jezgarno parcijalno uređenje i osobine zakona direktnog redosleda za jezgarne inverze.

- Peto poglavlje je uopštenje koncepta jezgarne-EP ortogonalnosti na m-slabo grupnu ortogonalnost za ograničene linearne Drejzin invertibilne operatore na Hilbertovom prostoru, koristeći m-slabo grupni inverz. Različite osobine i karakteristike m-slabo grupno ortogonalnih operatora su dokazane isto kao njihove matrične forme.

  Veza između m-slabo grupne binarne relacije i m-slabo grupne ortogonalnosti je data i predstavljene su osobine aditivnosti za m-slabo grupni inverz.

- Šesto poglavlje je uopštenje koncepta leve i desne jezgarne–EP ortogonalnosti na elemente prstena sa involucijom. Na ovaj način, uopšteni su pojmovi jednostrane jezgarne–EP ortogonalnosti za operatore i jezgarne–EP ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom. Mnoge osobine i karakteristike leve i desne jezgarne–EP ortogonalnosti su date.
- Sedmo poglavlje sadrži zaključna razmatranja ove doktorske disertacije.

◊ ◊ ◊

Koristim priliku da izrazim veliku i iskrenu zahvalnost svojoj mentorki dr Dijani Mosić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, Univerziteta u Nišu, koja mi je svojim savetima, idejama i sugestijama pomogla u izradi moje doktorske disertacije.

Posebno joj se zahvaljujem na pruženoj motivaciji i podršci za vreme mog studiranja kao i na iskustvima koje sam stekla tokom našeg zajedničkog rada.

Svoju zahvalnost dugujem takođe i članovima komisije dr Draganu Đorđeviću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu i dr Draganu Rakiću, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu na korisnim savetima koji su značajno uticali na kvalitet ove disertacije.

Posebno se zahvaljujem svojim ćerkama Emiliji, Nikoliji i Vasiliji i suprugu Ivanu na strpljenju, razumevanju i ljubavi, kao i ostalim članovima familije na pruženoj podršci.

1.1 Osnovne definicije uopštenih inverza operatora

Neka su X i Y proizvoljni Hilbertovi prostori. Označimo sa $\mathcal{B}(X,Y)$ skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y. Specijalno, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$ označava skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u X.

Za operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, koriste se sledeće standardne oznake:

- A^* – adjungovani operator operatora A definisan relacijom $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $x \in X$, $y \in Y$;
- $\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ — jezgro operatora A;
- $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in X\}$ — slika operatora A [32].

Operator $P \in \mathcal{B}(X)$ naziva se idempotent (ili projektor) ako važi $P^2 = P$. Ako dodatno važi $P = P^*$, tada je P ortogonalni projektor [9].

Definicija 1.1.1. Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Ako postoji operator $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ tako da je $ABA = A$, onda je B unutrašnji inverz operatora A, a operator A je regularan.

Skup svih unutrašnjih inverza regularnog operatora A označava se sa $A\{1\}$ [3], tj. $A\{1\} = \{B \in \mathcal{B}(Y,X) : ABA = A\}$.

Definicija 1.1.2. [51] Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Ako je $BAB = B$ za neko $B \in \mathcal{B}(Y,X)$, $B \neq 0$, onda je B spoljašnji inverz operatora A.

Ako je $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ unutrašnji i spoljašnji inverz operatora $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, tada je B refleksivni uopšteni inverz od A [51].

Ako su X i Y Hibertovi prostori, tada je A regularan ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren potprostor od Y. Unutrašnji inverz operatora nije jedinstven ako fiksiramo sliku i jezgro kod unutrašnjeg inverza. Refleksivni uopšteni inverz je jedinstveno određen svojom slikom i jezgrom. Ovo je takođe osobina spoljašnjeg inverza [51].

Nenula operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ uvek ima nenula spoljašnji inverz $B \in \mathcal{B}(Y,X)$. Ako je $BAB = B$, $T = R(B)$ i $S = N(B)$, tada je B poznat kao $A^{(2)}_{T,S}$ spoljašnji inverz od A.

Sada su date definicije veoma poznatih spoljašnjih inverza.

Definicija 1.1.3. [3, 51] Mur-Penrouzov inverz od $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je jedinstven operator $B = A^\dagger \in \mathcal{B}(Y,X)$ koji zadovoljava uslove

$$ABA = A, \qquad BAB = B, \qquad (AB)^* = AB, \qquad (BA)^* = BA.$$

Poznato je da $A^\dagger$ postoji ako i samo ako $R(A)$ jeste zatvoren u Y, što je ekvivalentno sa $A\{1\} \neq \emptyset$.

Mur-Penrouzov inverz može biti primenjen u restauraciji slika, graficima, kriptografiji, teoriji kodiranja, robotici [3, 8].

Definicija 1.1.4. [51] Drejzinov inverz od $A \in \mathcal{B}(X)$ je jedinstven operator $B = A^D \in \mathcal{B}(X)$ takav da je

$$AB = BA, \quad BAB = B \quad \text{i} \quad A^{k+1}B = A^k,$$

gde je $k = ind(A)$ indeks od A, tj. najmanji pozitivan ceo broj u ovoj definiciji.

Grupni inverz je specijalan slučaj Drejzinovog inverza za koji je $A = A^2B$ (ili $ind(A) \leq 1$) i grupni inverz se označava sa $A^{\#}$. Dakle, za grupni inverz $A^{\#}$ važe sledeće jednakosti:

$$AA^{\#}A = A, \quad A^{\#}AA^{\#} = A^{\#} \quad \text{i} \quad AA^{\#} = A^{\#}A.$$

Simboli $\mathcal{B}(X)^D$ i $\mathcal{B}(X)^{\#}$, redom, označavaju skupove svih Drejzin invertibilnih i grupno invertibilnih operatora u $\mathcal{B}(X)$. Drejzinov inverz je korišćen u teoriji lanca Markova, diferentnim i diferencijalnim jednačinama, kriptografiji [3, 6, 27].

Definicija 1.1.5. [70] Operator $A \in \mathcal{B}(X)$ ima jezgarni inverz $B \in \mathcal{B}(X)$ ako važe sledeći uslovi:

$$ABA = A, \quad R(A) = R(B) \quad \text{i} \quad N(A^*) = N(B).$$

Jezgarni inverz od A je jedinstven, ako postoji, i označava se sa $A^{\textcircled{\#}}$. Operator A ima jezgarni inverz ako i samo ako je $ind(A) \leq 1$.

Definicija 1.1.6. Operator sa zatvorenom slikom $A \in \mathcal{B}(X)$ je EP operator ako važi jednakost

$$R(A^*) = R(A).$$

Primetimo da operator sa zatvorenom slikom $A \in \mathcal{B}(X)$ jeste EP ako i samo ako je: $AA^\dagger = A^\dagger A$, odnosno ako i samo ako je $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $A^\dagger = A^{\#}$ [50].

Pojam jezgarnog-EP inverza je predstavljen za kvadratne matrice [67] i uopšten na Drejzin invertibilne operatore na Hilbertovom prostoru u [54, 58].

Definicija 1.1.7. Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $ind(A) = k$, postoji jedinstven jezgarni-EP inverz $B \in \mathcal{B}(X)$ od A (označen sa $A^{\textcircled{\dagger}}$) koji zadovoljava [54]

$$BAB = B \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A^k),$$

i predstavljen je sa [22]

$$A^{\textcircled{\dagger}} = A^D A^k (A^k)^\dagger.$$

Kada je $ind(A) \leq 1$, $A^{\textcircled{\dagger}}$ se poklapa sa jezgarnim inverzom $A^{\textcircled{\#}} = A^{\#}AA^\dagger$ [1].

Zanimljive osobine jezgarnog–EP inverza jesu date u [14, 34, 42, 53, 62, 93, 94, 95, 96]. Jezgarni–EP inverz je primenjen za rešavanje nekih aproksimativnih problema u [60].

1.2 Osnovne definicije i osobine uopštenih inverza u prstenima

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom 1. Element $x \in \mathcal{R}$ je inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ ako važi $ax = xa = 1$ i tada se kaže da je element a invertibilan. Označimo sa a^{-1} inverz elementa a a sa $\mathcal{R}^{-1}$ skup svih invertibilnih elemenata prstena $\mathcal{R}$ [51].

Najmanji prirodan broj $k \in \mathcal{N}$ za koji važi da je $a^k = 0$ naziva se indeks nilpotentnosti elementa a. Neka $\mathcal{R}^{nil}$ označava skup svih nilpotentnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$ [51].

Za $a \in \mathcal{R}$, definisani su sledeći skupovi:

$$a\mathcal{R} = \{ax : x \in R\}, \quad \mathcal{R}a = \{xa : x \in \mathcal{R}\}$$

i

$$a^\circ = \{x \in \mathcal{R} : ax = 0\}, \quad {}^\circ a = \{x \in \mathcal{R} : xa = 0\}.$$

Različite vrste uopštenih inverza jesu definisane u prstenu.

Definicija 1.2.1. [51] Element $a \in \mathcal{R}$ ima unutrašnji inverz ukoliko postoji $x \in \mathcal{R}$ tako da važi jednakost $axa = a$. U tom slučaju element $a \in \mathcal{R}$ jeste regularan u prstenu $\mathcal{R}$.

Neka $\mathcal{R}^-$ označava skup svih regularnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$. Može se primetiti da je $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^-$.

Definicija 1.2.2. [51] Element $a \in \mathcal{R}$ ima spoljašnji inverz ukoliko postoji $x \in \mathcal{R}$ tako da važi da je $xax = x$.

Definicija 1.2.3. [51] Ako je element prstena $x \in \mathcal{R}$ unutrašnji i spoljašnji inverz elementa $a \in \mathcal{R}$, onda se on naziva refleksivni uopšteni inverz od a.

Za regularni element u prstenu uvek postoji refleksivni uopšteni inverz [13].

Definicija 1.2.4. [51] Drejzinov inverz od $a \in \mathcal{R}$ (ako postoji) jeste jedinstven element $x = a^D \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava

$$x = xax, \qquad ax = xa, \qquad a^k = a^{k+1}x,$$

gde je $k = ind(a)$ indeks od a, tj. najmanji pozitivan ceo broj u ovoj definiciji.

Za element $a \in \mathcal{R}$ kaže se da je Drejzin invertibilan ukoliko postoji njegov Drejzinov inverz.

Označimo sa $\mathcal{R}^D$ skup svih Drejzin invertibilnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$.

Ako je $ind(a) \leq 1$, Drejzinov inverz od a jednak je grupnom inverzu od a, tj. $a^\# = a^D$. Skup svih grupno invertibilnih elemenata skupa $\mathcal{R}$ označava se sa $\mathcal{R}^\#$.

Definicija 1.2.5. [51] Involucija $a \mapsto a^*$ u prstenu $\mathcal{R}$ jeste anti-izomorfizam stepena 2. To je preslikavanje $a \to a^*$ za koje važi:

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad 0^* = 0, \quad 1^* = 1,$$

pri čemu su $a, b \in \mathcal{R}$.

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom. Element $a \in \mathcal{R}$ je samo-adjungovan ako je $a^* = a$. Element $e \in \mathcal{R}$ je idempotent ako je $e^2 = e$.

Element $a \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava jednakost $aa^* = a^*a$ naziva se normalan.

Definicija 1.2.6. [51] Mur-Penrouzov inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ (ako postoji) jeste jedinstveni element $x = a^\dagger \in \mathcal{R}$ takav da važi:

$$axa = a, \quad xax = x, \quad (ax)^* = ax \quad \text{i} \quad (xa)^* = xa.$$

Ukoliko postoji Mur-Penrouzov inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ kaže se da je element a Mur-Penrouz invertibilan (ili MP-invertibilan). Skup svih Mur-Penrouz invertibilnih elementa u $\mathcal{R}$ biće označen sa $\mathcal{R}^\dagger$.

Definicija 1.2.7. [70] Neka je $a \in \mathcal{R}$. Element $x = a^{\textcircled{\#}} \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava uslove

$$axa = a, \quad xax = x, \quad (ax)^* = ax, \quad xa^2 = a, \quad \text{i} \quad ax^2 = x$$

se zove jezgarni inverz od a.

Napomenimo da prve dve jednačine iz prethodne definicije mogu biti izostavljene na osnovu rada [87].

Jezgarni–EP inverz je uveden za elemente prstena sa involucijom u [22], uopštavajući isti koncept za kvadratne matrice predstavljen u [67].

Definicija 1.2.8. [22] Element $x = a^{\textcircled{\dagger}} \in \mathcal{R}$ jeste jedinstven jezgarni–EP inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ ako zadovoljava sledeće jednačine:

$$ax^2 = x, \quad (ax)^* = ax, \quad xa^{k+1} = a^k,$$

za neki pozitivan ceo broj k.

Najmanji takav k se poklapa sa $ind(a)$ [22, Theorem 2.3], i podsetimo se da važi

$$a^{\textcircled{\dagger}} = a^D a^k (a^k)^\dagger.$$

Ako je $ind(a) \leq 1$, $a^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\#}}$ jeste jezgarni inverz od a [1]. Skupovi svih jezgarnih-EP i jezgarno invertibilnih elemenata skupa $\mathcal{R}$ su označeni sa $\mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $\mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, redom.

Definicija 1.2.9. [51] Element $a \in \mathcal{R}$ jeste $*$-skrativ ako

$$a^*ax = 0 \Rightarrow ax = 0 \quad \text{i} \quad xaa^* = 0 \Rightarrow xa = 0, \tag{1.1}$$

Primenom involucije na (1.1) , uočavamo da je element a $*$-skrativ ako i samo ako je a^* $*$-skrativ.

Teorema 1.2.1. [50] Za $a \in \mathcal{R}^\dagger$ sledeće jednakosti važe:

(i) $(a^\dagger)^\dagger = a$;

(ii) $(a^*)^\dagger = (a^\dagger)^*$;

(iii) $(a^*a)^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*$;

(iv) $(aa^*)^\dagger = (a^\dagger)^*a^\dagger$;

(v) $a^* = a^\dagger aa^* = a^*aa^\dagger$;

(vi) $a^\dagger = (a^*a)^\dagger a^* = a^*(aa^*)^\dagger = (a^*a)^\# a^* = a^*(aa^*)^\#$;

(vii) $(a^*)^\dagger = a(a^*a)^\dagger = (aa^*)^\dagger a$.

Definicija 1.2.10. [50, 70] Element $a \in \mathcal{R}^\dagger \cap \mathcal{R}^\#$ je EP element ako je $a^\dagger = a^\#$.

EP matrice i EP operatori su opširno ispitivani od strane mnogih istraživača. U skorašnje vreme, EP elementi su dosta proučavani i u kontekstu prstena sa involucijom [50, 55, 56, 57].

Dekompozicija jedinice je jednakost: $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ sa idempotentima $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathcal{R}$ takvim da je $e_ie_j = 0$ za $i \neq j$.

Za dve dekompozicije jedinice $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ i $1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, proizvoljno $x \in \mathcal{R}$ ima jedinstvenu matričnu formu [71]:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}_{e\times f}, \tag{1.2}$$

gde je $x_{ij} = e_ixf_j \in e_i\mathcal{R}f_j$. Ako je $x = (x_{ij})_{e\times f}$ i $y = (y_{ij})_{e\times f}$, onda je $x + y = (x_{ij} + y_{ij})_{e\times f}$.

Kada $1 = g_1 + \cdots + g_n$ jeste treća dekompozicija jedinice i $z = (z_{ij})_{f\times g}$, $xz = \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}z_{kj}\right)_{e\times g}$, onda, česte algebarske operacije u skupu $\mathcal{R}$ mogu biti predstavljene kao jednostavne operacije između odgovarajućih $n \times n$ matrica preko $\mathcal{R}$.

Takođe,

$$x^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{n1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{bmatrix}_{f^*\times e^*},$$

gde je ova matrična reprezentacija od x^* data u odnosu na dekompozicije jedinice $1 = f_1^* + \cdots + f_n^*$ i $1 = e_1^* + \cdots + e_n^*$.

U slučaju da je $n = 2$ i $p \in \mathcal{R}$ jeste idempotent, piše se:

$$x = pxq + px(1-p) + (1-p)xp + (1-p)x(1-p) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $x_{11} = pxp$, $x_{12} = px(1-p)$, $x_{21} = (1-p)xp$ i $x_{22} = (1-p)x(1-p)$.

Definicija 1.2.11. [70] Za binarnu relaciju ρ na skupu X kaže se da je:

(i) refleksivna ako je $x\rho x$, za svako $x \in X$;

(ii) simetrična ako za sve $x, y \in X$, iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$;

(iii) antisimetrična ako za sve $x, y \in X$, iz $x\rho y$ i $y\rho x$ sledi $x = y$;

(iv) tranzitivna ako za sve $x, y, z \in X$, iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$.

Definicija 1.2.12. [70] Relacija ρ na X je relacija ekvivalencije ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Definicija 1.2.13. [70] Relacija ρ na X je relacija poretka, odnosno relacija parcijalnog uređenja, ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Definicija 1.2.14. [70] Relacija ρ na X se zove pre-uređenje ako je ona refleksivna i tranzitivna.

Poglavlje 2

Jednostrano jezgarno-EP ortogonalni operatori

2.1 Definicije ortogonalnosti i jezgarnog-EP pre-uređenja

U ovoj disertaciji se posmatra prvenstveno ortogonalnost ograničenih linearnih operatora. Za operatore na Hilbertovom prostoru moguće je definisati nekoliko vrsta ortogonalnosti.

Podsetimo se sada koncepta obostrane ortogonalnosti za $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

Definicija 2.1.1. Dva operatora $A, B \in \mathcal{B}(X)$ su ortogonalna (označavamo sa $A \perp B$) ako je

$$AB = 0 \quad \text{i} \quad BA = 0.$$

Uočimo da, kada $A^{\#}$ postoji, $A \perp B$ (tj. A i B su $\#$-ortogonalni) ako i samo ako je

$$A^{\#}B = 0 \quad \text{i} \quad BA^{\#} = 0.$$

$*$-ortogonalnost je uvedena u [29] radi istraživanja spektralne teorije kvadratnih matrica. $*$-ortogonalnost je primenjena za istraživanje aditivnosti Mur-Penrouzovog inverza, parcijalnih uređenja i drugih problema [28].

Definicija 2.1.2. Dva operatora $A, B \in \mathcal{B}(X)$ su $*$-ortogonalna (označavamo sa $A \perp_* B$) ako je

$$A^*B = 0 \quad \text{i} \quad BA^* = 0.$$

Podsetimo se da matrice A i B jesu $*$-ortogonalne ako i samo ako je

$$(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger} \quad \text{i} \quad rank(A+B) = rank(A) + rank(B),$$

gde rang matrice, u oznaci $rank(A)$, označava maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (ili kolona) te matrice [29].

Zasnovano na jezgarnom inverzu, koncept jezgarno ortogonalnih matrica je dat u [20].

Definicija 2.1.3. [20] Ako su $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, onda A jeste jezgarno ortogonalno sa B (označavamo sa $A \perp_{\textcircled{\#}} B$) ako je

$$A^{\textcircled{\#}} B = 0 \quad \text{i} \quad BA^{\textcircled{\#}} = 0$$

ili ekvivalentno sa

$$A^* B = 0 \quad \text{i} \quad BA = 0.$$

Shodno tome, $A \perp_{\textcircled{\#}} B$ implicira ortogonalnost potprostora $R(A)$ i $R(B)$ i ortogonalnost potprostora $R(A)$ i $R(B^*)$.

Ortogonalnost i $*$-ortogonalnost jesu simetrične relacije, ali jezgarna ortogonalnost nije simetrična [39].

U [20] je pokazano da stroga jezgarna ortogonalnost definisana sa:

$$A \perp_{\textcircled{\#}} B \quad \text{i} \quad B \perp_{\textcircled{\#}} A$$

implicira

$$(A + B)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}} + B^{\textcircled{\#}} \quad \text{(jezgarna aditivnost)}.$$

Jezgarna ortogonalnost je proučavana takođe u [37].

Pojam jezgarne ortogonalnosti uopšten je na jezgarnu-EP ortogonalnost u [59], koristeći jezgarni-EP inverz umesto jezgarnog inverza. Sledi definicija jezgarne-EP ortogonalnosti za dva ograničena linearna operatora na Hilbertovom prostoru.

Definicija 2.1.4. [59] Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$. Tada je A jezgarno-EP ortogonalno sa B, što se označava sa $A \perp_{\textcircled{\dagger}} B$, ako je

$$A^{\textcircled{\dagger}} B = 0 \quad \text{i} \quad BA^{\textcircled{\dagger}} = 0.$$

Mnogobrojne karakterizacije jezgarne-EP ortogonalnosti su već dokazane u [59]. Veza između jezgarne-EP ortogonalnosti i jezgarne-EP aditivnosti je data takođe u [59].

Imamo da $A \perp_{\textcircled{\dagger}} B$ znači ortogonalnost potprostora $R(A^k)$ i $R(B)$ i ortogonalnost potprostora $R(A^k)$ i $R(B^*)$. U slučaju da je $A \perp_{\textcircled{\dagger}} B$, ekvivalentni uslovi za $(A + B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$ jesu izučavani u [59]. Koncepti jezgarne i jezgarne-EP ortogonalnosti jesu veoma važni za istraživanje aditivnih osobina jezgarnog inverza i jezgarnog-EP inverza, kao i parcijalnih uređenja [78, 99].

Cilj ove disertacije je da se istraži ortogonalnost ograničenih linearnih Drejzin invertibilnih operatora na Hilbertovom prostoru i uopšte raniji rezultati za jezgarnu-EP ortogonalnost.

Jednostrane jezgarne ortogonalnosti jesu uvedene za matrice indeksa 1 u [17]. Zbog toga se javilo interesovanje za istraživanje koncepata jednostranih ortogonalnosti za Drejzin invertibilne operatore proizvoljnog indeksa.

U ovom poglavlju, uopštavaju se koncepti jednostrane jezgarne ortogonalnosti i jezgarne-EP ortogonalnosti definišući jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti. Na ovaj način, uopštavaju se neki noviji rezultati i predstavlja nekoliko novih rezultata za tipove jednostrane jezgarne ortogonalnosti.

Preciznije, definiše se leva i desna jezgarna-EP ortogonalnost i prezentuje njihova veza sa postojećim konceptima ortogonalnosti operatora. Predstavljene su matrične forme jednostranih jezgarno-EP ortogonalnih operatora. Istraženi su dodatni uslovi koji sa jednostranim jezgarnim-EP ortogonalnostima impliciraju $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$. Dakle, pojmovi jednostranih jezgarnih-EP ortogonalnosti su korišćeni za proučavanje osobina aditivnosti jezgarnog-EP inverza.

Rezultati dati u ovom poglavlju dokazani su u radu [77].

Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, jezgarno parcijalno uređenje je definisano na sledeći način:

$$A \leq^{\textcircled{\#}} B \quad \text{kada} \quad AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}} \quad \text{i} \quad A^{\textcircled{\#}}A = A^{\textcircled{\#}}B.$$

Koristeći jezgarni-EP inverz, jezgarno-EP pre-uređenje je definisano u [53]. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{D}$, jezgarno pre-uređenje je definisano kao

$$A \leq^{\textcircled{\dagger}} B \quad \text{kada} \quad AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}} \quad \text{i} \quad A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B.$$

2.2 Jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti

Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, poznato je da A jeste jezgarno-EP ortogonalno sa B, tj. $A\perp_{\textcircled{\dagger}}B$ ako važe jednakosti $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} = 0$. Ako se posmatra samo jedna od ove dve jednakosti, jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti mogu biti definisane.

Preciznije, u ovoj sekciji predstavljaju se i opisuju leva i desna jezgarna-EP ortogonalnost za operatore na Hilbertovom prostoru.

Definicija 2.2.1. Neka je $A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $B \in \mathcal{B}(X)$. Tada [77]

(i) A jeste levo jezgarno-EP ortogonalno sa B (označavamo sa $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$) ako je

$$A^{\textcircled{\dagger}}B = 0;$$

(ii) A jeste desno jezgarno-EP ortogonalno sa B (označavamo sa $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$) ako je

$$BA^{\textcircled{\dagger}} = 0.$$

Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, zaključujemo da je $A\perp_{\textcircled{\dagger}}B$ ako i samo ako važi $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$ i $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$.

Napominjemo da jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti mogu biti posmatrane za kvadratne matrice istih dimenzija, obzirom da su one Drejzin invertibilne.

Naznačimo da leva (ili desna) jezgarna-EP ortogonalnost ne implicira jezgarnu-EP ortogonalnost u opštem slučaju što potvrđuje sledeći primer.

Primer 2.2.1. Za matrice dimenzija 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$A^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ implicira $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} \neq 0$. Dakle, $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$, ali $A\perp_{\textcircled{\dagger}}B$ i $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$ ne važi.

Jasno je da se jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti za $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ redukuju na jednostrane jezgarne ortogonalnosti date u [17, Definition 3.3] za kvadratne matrice indeksa 1.

Definicija 2.2.2. Neka je $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B \in \mathcal{B}(X)$. Tada

(i) A jeste levo jezgarno ortogonalno sa B (označavamo sa $A\perp_{\textcircled{\#},l}B$) ako je

$$A^{\textcircled{\#}}B = 0;$$

(ii) A jeste desno jezgarno ortogonalno sa B (označavamo sa $A\perp_{\oplus,r}B$) ako je

$$BA^{\oplus} = 0.$$

Verzije jednostranih $*$-ortogonalnosti za operatore mogu biti definisane kao u [17].

Definicija 2.2.3. [77] Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$. Tada

(i) A jeste levo $*$-ortogonalno sa B (označimo sa $A\perp_{*,l}B$) ako je

$$A^*B = 0;$$

(ii) A jeste desno $*$-ortogonalno sa B (označimo sa $A\perp_{*,r}B$) ako je

$$BA^* = 0.$$

Osobine leve jezgarne-EP ortogonalnosti se pokazuju u sledećim rezultatima.

Lema 2.2.1. Ako je $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$;

(ii) $(A^k)^\dagger B = 0$;

(iii) $(A^k)^*B = 0$ (tj. $A^k\perp_{*,l}B$);

(iv) $R(B) \subseteq N((A^k)^*)$;

(v) $R(B) \subseteq N(A^{\textcircled{\dagger}})$;

(vi) $B^*A^k = 0$ (tj. $B\perp_{*,l}A^k$);

(vii) $B^*A^{\textcircled{\dagger}} = 0$ (tj. $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B^*$);

(viii) $R(A^k) \subseteq N(B^*)$;

(ix) $R(A^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq N(B^*)$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$.
Koristeći $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ i $A^{\textcircled{\dagger}} = A^DA^k(A^k)^\dagger$, što je dokazano u [22, Theorem 2.3], sledi da je

$$(A^k)^\dagger B = (A^k)^\dagger A^k(A^k)^\dagger B = (A^k)^\dagger A(A^DA^k(A^k)^\dagger)B = (A^k)^\dagger A(A^{\textcircled{\dagger}}B) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavka $(A^k)^\dagger B = 0$ implicira $(A^k)^*B = (A^k)^*A^k[(A^k)^\dagger B] = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Ova implikacija je jasna.
(iv) $\Rightarrow$ (v): Očigledno je iz $N((A^k)^*) = N(A^{\textcircled{\dagger}})$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Ovo sledi iz definicije.

(iii) $\Leftrightarrow$ (vi): Ova ekvivalencija sledi korišćenjem adjungovanog operatora.

Na sličan način završavamo ovaj dokaz. $\square$

Na osnovu Leme 2.2.1, vidimo da $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$ implicira ortogonalnost potprostora $R(A^k)$ i $R(B)$.

Ako su $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ u Lemi 2.2.1, slede ekvivalentni uslovi da važi $A\perp_{\textcircled{\#},l}B$ i tako se dobijaju neki novi uslovi u literaturi, dok su neki već postojeći uslovi u [17, Theorem 3.4].

Posledica 2.2.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\textcircled{\#},l}B$;

(ii) $A^{\dagger}B = 0$;

(iii) $A^*B = 0$ (tj. $A\perp_{*,l}B$);

(iv) $R(B) \subseteq N(A^*)$;

(v) $R(B) \subseteq N(A^{\textcircled{\#}})$;

(vi) $B^*A = 0$ (tj. $B\perp_{*,l}A$);

(vii) $B^{\dagger}A = 0$;

(viii) $R(A) \subseteq N(B^*)$;

(ix) $R(A^{\textcircled{\#}}) \subseteq N(B^*)$.

U slučaju da su $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$, dokazuje se da je $B\perp_{\textcircled{\dagger},l}A^k$.

Lema 2.2.2. Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$. Onda je $B\perp_{\textcircled{\dagger},l}A^k$, $AA^{\textcircled{\dagger}}\perp_{\textcircled{\#}}BB^{\textcircled{\dagger}}$, $A\perp_{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ i $B\perp_{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$.

Dokaz. Na osnovu Leme 2.2.1, $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$ implicira $(A^k)^*B = 0$. Ako je $p = ind(B)$, onda je

$$B^{\textcircled{\dagger}}A^k = B^D B^p (B^p)^{\dagger} A^k = B^D[(A^k)^* B^p (B^p)^{\dagger}]^* = 0$$

i shodno tome $B\perp_{\textcircled{\dagger},l}A^k$.

Pretpostavka $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ daje $AA^{\textcircled{\dagger}}BB^{\textcircled{\dagger}} = 0$ i $BB^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = (AA^{\textcircled{\dagger}}BB^{\textcircled{\dagger}})^* = 0$. Da se kompletira ovaj dokaz, uočimo da je $(AA^{\textcircled{\dagger}})^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\dagger}}$, $(BB^{\textcircled{\dagger}})^{\textcircled{\#}} = BB^{\textcircled{\dagger}}$, $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = 0$ i $B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}} = 0$. $\square$

Desna jezgarna-EP ortogonalnost je proučavana sada.

Lema 2.2.3. Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$;

(ii) $BA^D = 0$;

(iii) $BA^k = 0$;

(iv) $R(A^k) \subseteq N(B)$;

(v) $R(A^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq N(B)$;

(vi) $(A^k)^*B^* = 0$ (tj. $B\perp_{*,r}(A^k)^*$);

(vii) $A^{\textcircled{\dagger}}B^* = 0$ (tj. $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B^*$);

(viii) $R(B^*) \subseteq N((A^k)^*)$;

(ix) $R(B^*) \subseteq N(A^{\textcircled{\dagger}})$.

Lema 2.2.3 implicira neke potrebne i dovoljne uslove da bi važilo $A\perp_{\textcircled{\#},r}B$.

Posledica 2.2.2. Ako su $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\textcircled{\#},r}B$;

(ii) $BA^{\#} = 0$;

(iii) $BA = 0$;

(iv) $R(A) \subseteq N(B)$;

(v) $R(A^{\textcircled{\#}}) \subseteq N(B)$;

(vi) $A^*B^* = 0$ (tj. $B\perp_{*,r}A^*$);

(vii) $A^{\textcircled{\#}}B^* = 0$;

(viii) $R(B^*) \subseteq N(A^*)$;

(ix) $R(B^*) \subseteq N(A^{\textcircled{\#}})$.

Sada se predstavljaju operatorske matrične forme za dva levo jezgarno-EP ortogonalna operatora.

Teorema 2.2.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $k = ind(A)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\textcircled{\dagger},l}B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invetibilan;

(iii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus X_1 \oplus X_2$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{41} & B_{42} \\ B_{32} & 0 & B_{43} \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(X_1 \oplus X_2)$ je nilpotentan, $B_{41} \in \mathcal{B}(X_1)$ je invertibilan i $B_{43} \in \mathcal{B}(X_2)$ je nilpotentan;

(iv) $B = (I - AA^{\textcircled{D}})W$, za proizvoljan operator $W \in \mathcal{B}(X)$;

(v) $A^{\textcircled{D}}B$ je idempotent i $A^{\textcircled{D}}(A+B)A^{\textcircled{D}} = A^{\textcircled{D}}$;

(vi) $A^{\textcircled{D}}B$ je idempotent i $A^{\textcircled{D}}BA^{\textcircled{D}} = 0$;

(vii) $A^{\textcircled{D}}B$ je idempotent i $AA^{\textcircled{D}}BA^{\textcircled{D}}A = 0$;

(viii) $A^{\textcircled{D}}B$ je idempotent i $(A^k)^*BA^k = 0$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Prema [54, Corollary 2.2], operatori A i $A^{\textcircled{D}}$ imaju sledeće operatorske matrične forme u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ jeste invertibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan.
Neka je

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix}.$$

Onda je $0 = A^{\textcircled{D}}B$ ako i samo ako je

$$0 = \begin{bmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno sa $B_1 = 0$ i $B_2 = 0$. Kako je $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$ Drejzin invertibilan, sledi da je B_4 Drejzin invertibilan, takođe.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Zbog toga što je B_4 Drejzin invertibilan, postoji ortogonalna suma $N((A^k)^*) = R(B_4^j) \oplus N((B_4^j)^*)$, za $j = ind(B_4)$, i

$$B_4 = \begin{bmatrix} B_{41} & B_{42} \\ 0 & B_{43} \end{bmatrix},$$

gde je $B_{41} \in \mathcal{B}(R(B_4^j))$ invertibilan i $B_{43} \in \mathcal{B}[N((B_4^j)^*)]$ je nilpotentan. Ovaj deo može očigledno biti završen.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Iz

$$A^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sledi $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$. Dakle, $A \perp_{\textcircled{\dagger},l} B$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Koristeći [3, p. 52] i $A \in A^{\textcircled{\dagger}}\{1\}$, opšte rešenje jednačine $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ je $B = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})W$, za proizvoljno $W \in \mathcal{B}(X)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Jasno, za $B = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})W$, važi $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (v): Jednakost $A^{\textcircled{\dagger}}B = 0$ implicira da je $A^{\textcircled{\dagger}}B$ idempotent i $A^{\textcircled{\dagger}}(A+B)A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Primenjujući $A^{\textcircled{\dagger}}(A+B)A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}$, sledi da je $A^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}} = 0$. Zbog toga što je $A^{\textcircled{\dagger}}B$ idempotent, dobija se

$$A^{\textcircled{\dagger}}B = (A^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}})B = 0.$$

(v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii): Ovo je jasno.

(vii) $\Leftrightarrow$ (viii): Ove ekvivalencije proizilaze iz osobina jezgarnog-EP inverza. $\square$

Primenom Teoreme 2.2.1, dobijaju se sledeći ekvivalentni uslovi da bi važilo $A \perp_{\textcircled{\#},l} B$

Posledica 2.2.3. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \perp_{\textcircled{\#},l} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A) \oplus N(A^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $B_4 \in \mathcal{B}[N(A^*)]$ grupno invertibilan;

(iii) postoji ortogonalna suma $X = R(A) \oplus X_1 \oplus X_2$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{41} & B_{42} \\ B_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $B_{41} \in \mathcal{B}(X_1)$ je invertibilan;

(iv) $B = (I - AA^{\textcircled{\#}})W$, za proizvoljno $W \in \mathcal{B}(X)$;

(v) $A^{\textcircled{\#}}B$ je idempotent i $A^{\textcircled{\#}}(A+B)A^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}$;

(vi) $A^{\textcircled{\#}}B$ je idempotent i $A^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}} = 0$;

(vii) $A^{\text{\textcircled{\#}}}B$ je idempotent i $AA^{\text{\textcircled{\#}}}BA^{\text{\textcircled{\#}}}A = 0$;

(viii) $A^{\text{\textcircled{\#}}}B$ je idempotent i $A^*BA = 0$.

Matrična forma operatora koji su desno jezgarno-EP ortogonalni je data sada.

Teorema 2.2.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $k = ind(A)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \perp_{\text{\textcircled{\dag}},r} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invertibilan;

(iii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus X_1 \oplus X_2$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 & B_{43} \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(X_1 \oplus X_2)$ je nilpotentan, $B_{41} \in \mathcal{B}(X_1)$ je invertibilan i $B_{43} \in \mathcal{B}(X_2)$ je nilpotentan;

(iv) $B = W(I - A^{\text{\textcircled{\dag}}}A)$, za proizvoljno $W \in \mathcal{B}(X)$;

(v) $BA^{\text{\textcircled{\dag}}}$ je idempotent i $A^{\text{\textcircled{\dag}}}(A+B)A^{\text{\textcircled{\dag}}} = A^{\text{\textcircled{\dag}}}$;

(vi) $BA^{\text{\textcircled{\dag}}}$ je idempotent i $A^{\text{\textcircled{\dag}}}BA^{\text{\textcircled{\dag}}} = 0$;

(vii) $BA^{\text{\textcircled{\dag}}}$ je idempotent i $AA^{\text{\textcircled{\dag}}}BA^{\text{\textcircled{\dag}}}A = 0$;

(viii) $BA^{\text{\textcircled{\dag}}}$ je idempotent i $(A^k)^*BA^k = 0$.

Pored toga, ako važi jedno od tvrđenja (i)–(viii), onda, za B predstavljeno kao u (ii), važi

$$B^{\text{\textcircled{\dag}}} = \begin{bmatrix} B_2(B_4^D)^2L(B_2B_4^D)^* & B_2(B_4^D)^2L(B_4B_4^D)^* \\ B_4^DL(B_2B_4^D)^* & B_4^DL(B_4B_4^D)^* \end{bmatrix},$$

gde je $L = ((B_2B_4^D)^*B_2B_4^D + (B_4B_4^D)^*B_4B_4^D)^\dagger$.

Dokaz. Kao u Teoremi 2.2.1, pokazujemo da tvrđenja (i)–(v) jesu ekvivalentna.

Koristeći [7, Theorem 2.3], za B predstavljeno kao u (ii), imamo

$$B^D = \begin{bmatrix} 0 & B_2(B_4^D)^2 \\ 0 & B_4^D \end{bmatrix}.$$

Sada, iz [10],

$$(BB^D)^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & B_2B_4^D \\ 0 & B_4B_4^D \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L(B_2B_4^D)^* & L(B_4B_4^D)^* \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$B^{\textcircled{D}} = B^D(BB^D)^\dagger = \begin{bmatrix} B_2(B_4^D)^2L(B_2B_4^D)^* & B_2(B_4^D)^2L(B_4B_4^D)^* \\ B_4^DL(B_2B_4^D)^* & B_4^DL(B_4B_4^D)^* \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 2.2.2 implicira sledeće potrebne i dovoljne uslove za $A\perp_{\oplus,r}B$.

Posledica 2.2.4. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^\#$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\perp_{\oplus,r}B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A) \oplus N(A^*)$ tako da je:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $B_4 \in \mathcal{B}[N(A^*)]$ je grupno invertibilan;

(iii) postoji ortogonalna suma $X = R(A) \oplus X_1 \oplus X_2$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $B_{41} \in \mathcal{B}(X_1)$ je invertibilan;

(iv) $B = W(I - A^{\oplus}A)$, za proizvoljno $W \in \mathcal{B}(X)$;

(v) $BA^{\oplus}$ je idempotent i $A^{\oplus}(A+B)A^{\oplus} = A^{\oplus}$;

(vi) $BA^{\oplus}$ je idempotent i $A^{\oplus}BA^{\oplus} = 0$

(vii) $BA^{\oplus}$ je idempotent i $AA^{\oplus}BA^{\oplus}A = 0$;

(viii) $BA^{\oplus}$ je idempotent i $A^*BA = 0$.

2.3 Aditivnost jezgarnog-EP inverza

U ovoj sekciji proučavaju se uslovi pod kojima je jezgarni-EP inverz sume dva operatora jednak sumi njihovih jezgarnih-EP inverza.

Najpre, pod pretpostavkom da je $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$, predstavljaju se ekvivalentni uslovi pod kojima jednakost $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$ važi.

Teorema 2.3.1. Ako su $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}$;

(iii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(I-AA^{\textcircled{\dagger}})((A+B)^{\textcircled{\dagger}}-B^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$;

(iv) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(I-AA^{\textcircled{\dagger}})((A+B)^{\textcircled{\dagger}}-B^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $A^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$;

(v) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$ i $B^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(vi) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$ i $BB^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(vii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}BB^{\textcircled{\dagger}} = 0$.

Dokaz. Pretpostavka $A\perp_{\textcircled{\dagger},r}B$ i Teorema 2.2.2 impliciraju da postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ Drejzin invertibilan.

Zbog toga što je

$$A+B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2+B_2 \\ 0 & A_3+B_4 \end{bmatrix}$$

Drejzin invertibilan, iz [7, Theorem 2.3], mi zaključujemo da je A_3+B_4 Drejzin invertibilan.

Primenom [43, Lemma 2.3], dobija se

$$(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}(A_2+B_2)(A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & (A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.2 implicira

$$A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} + B_2(B_4^D)^2L(B_2B_4^D)^* & B_2(B_4^D)^2L(B_4B_4^D)^* \\ B_4^DL(B_2B_4^D)^* & B_4^DL(B_4B_4^D)^* \end{bmatrix},$$

gde je $L = ((B_2B_4^D)^*B_2B_4^D + (B_4B_4^D)^*B_4B_4^D)^\dagger$.

Uočimo da je $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$ ekvivalentno sa

$$0 = B_4^D L(B_2B_4^D)^*, \tag{2.1}$$

$$-A_1^{-1}(A_2+B_2)(A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} = B_2(B_4^D)^2L(B_4B_4^D)^*, \tag{2.2}$$

$$(A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} = B_4^D L(B_4B_4^D)^*. \tag{2.3}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Kako je

$$(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = (A+B)^{\textcircled{\dagger}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}(A_2+B_2)(A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & (A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix},$$

zaključuje se da je $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}$ ako i samo ako jednakosti (2.1)–(2.3) jesu zadovoljene, što je ekvivalentno sa (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Primetimo da je:

$$(I-AA^{\textcircled{\dagger}})(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}$$

i

$$(I-AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_4^D L(B_2B_4^D)^* & B_4^D L(B_4B_4^D)^* \end{bmatrix}.$$

Prema tome, $(I-AA^{\textcircled{\dagger}})((A+B)^{\textcircled{\dagger}} - B^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ važi ako i samo ako važe jednakosti (2.1) i (2.3). Iz (2.1),

$$AA^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}(A_2+B_2)(A_3+B_4)^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} B_2(B_4^D)^2L(B_2B_4^D)^* & B_2(B_4^D)^2L(B_4B_4^D)^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sledi da je $AA^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ ekvivalentno sa (2.2). Dakle, (iii) važi ako i samo ako je tvrđenje (i) zadovoljeno.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Množenjem jednakosti $AA^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ sa $A^{\textcircled{\dagger}}$ sa leve strane, dobija se $A^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Očigledno, $A^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ implicira

$$AA^{\textcircled{\dagger}}(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (v): Pretpostavka $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}$ daje

$$B^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}}) = (A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}})^2 = (A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$$

i

$$B^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = (A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}})AA^{\textcircled{\dagger}} = 0.$$

(v) $\Rightarrow$ (ii): Iz $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}})$ i $B^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledi da je $(A+B)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = B^{\textcircled{\dagger}}$.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi): To može biti pokazano kao (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

(vi) $\Leftrightarrow$ (vii): Ova ekvivalencija sledi koristeći adjungovane operatore. $\square$

Posmatramo sada pretpostavke

$$A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0 \quad \text{i} \quad BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$$

i istražujemo u konjunkciji sa kojim dodatnim uslovima impliciraju $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$.

Mogu se povezati uslovi $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ sa jednostranim jezgarnim-EP ortogonalnostima.

Lema 2.3.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $k = ind(A)$, važi:

(i) $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ ako i samo ako je $A \perp_{\textcircled{\dagger},l} (B + A)$ ako i samo ako je $R(B + A) \subseteq N((A^k)^*)$ ako i samo ako je $AA^{\textcircled{\dagger}}(B + A) = 0$ ako i samo ako je $AA^{\textcircled{\dagger}} \perp_{\textcircled{\#},l} (B + A)$;

(ii) $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ ako i samo ako je $A \perp_{\textcircled{\dagger},r} (B+A)$ ako i samo ako je $R(A^k) \subseteq N(B+A)$ ako i samo ako je $(B + A)A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$;

(iii) $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ ako i samo ako je $A \perp_{\textcircled{\dagger}} (B + A)$.

Pod pretpostavkama $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$, predstavljamo matrične forme operatora A i B.

Lema 2.3.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $k = ind(A)$, važi:

(i) $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ ako i samo ako postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan;

(ii) $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ ako i samo ako postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -A_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invertibilan. Pored toga,

$$B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} -A_1^{-1} & A_1^{-1}B_2B_4^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_4^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

(iii) $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ ako i samo ako postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invertibilan. Pored toga,

$$B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} -A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_4^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_4^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Na osnovu [54, Corollary 2.2], operatori A i $A^{\textcircled{\dagger}}$ su predstavljeni, u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$, kao:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad A^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invetibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan. Pretpostavljamo da je

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix}.$$

(i) Iz

$$A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = \begin{bmatrix} A_1^{-1}B_1 + I & A_1^{-1}(B_2 + A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ je ekvivalentno sa $B_1 = -A_1$ i $B_2 = -A_2$.

(ii) Jednakost

$$BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} B_1A_1^{-1} + I & 0 \\ B_3A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

implicira da je $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$ ako i samo ako $B_1 = -A_1$ i $B_3 = 0$. Koristeći [7, Theorem 2.3], Drejzinova invertibilnost operatora $B = \begin{bmatrix} -A_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}$ implicira Drejzinovu invertibilnost operatora B_4. Izraz za $B^{\textcircled{\dagger}}$ sledi iz [43, Lemma 2.3].

(iii) Ovaj deo je jasan iz (i) i (ii). $\square$

U slučaju da je $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$, predstavljamo potrebne i dovoljne uslove za $(A + B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$.

Teorema 2.3.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A^{\textcircled{\dagger}}B + A^{\textcircled{\dagger}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A + B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = B^{\text{\textcircled{D}}}(I - AA^{\text{\textcircled{D}}})$;

(iii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = (I - AA^{\text{\textcircled{D}}})B^{\text{\textcircled{D}}}$ i $A^{\text{\textcircled{D}}} = -AA^{\text{\textcircled{D}}}B^{\text{\textcircled{D}}}$;

(iv) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = (I - AA^{\text{\textcircled{D}}})B^{\text{\textcircled{D}}}$ i $(A^{\text{\textcircled{D}}})^2 = -A^{\text{\textcircled{D}}}B^{\text{\textcircled{D}}}$.

Dokaz. Iz Leme 2.3.2, $A^{\text{\textcircled{D}}}B + A^{\text{\textcircled{D}}}A = 0$ i $BA^{\text{\textcircled{D}}} + AA^{\text{\textcircled{D}}} = 0$, postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invertibilan. Takođe,

$$A^{\text{\textcircled{D}}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B^{\text{\textcircled{D}}} = \begin{bmatrix} -A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_4^{\text{\textcircled{D}}} \\ 0 & B_4^{\text{\textcircled{D}}} \end{bmatrix},$$

pa je

$$A^{\text{\textcircled{D}}} + B^{\text{\textcircled{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}A_2B_4^{\text{\textcircled{D}}} \\ 0 & B_4^{\text{\textcircled{D}}} \end{bmatrix}.$$

Kako je $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_3 + B_4 \end{bmatrix}$ Drejzin invertibilan, iz [7, Theorem 2.3], zaključuje se da je $A_3 + B_4$ Drejzin invertibilan i

$$(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_3 + B_4)^{\text{\textcircled{D}}} \end{bmatrix}.$$

Dakle, $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = A^{\text{\textcircled{D}}} + B^{\text{\textcircled{D}}}$ ako i samo ako je

$$0 = A_2B_4^{\text{\textcircled{D}}}, \tag{2.4}$$

$$(A_3 + B_4)^{\text{\textcircled{D}}} = B_4^{\text{\textcircled{D}}}. \tag{2.5}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Može se uočiti da

$$B^{\text{\textcircled{D}}}(I - AA^{\text{\textcircled{D}}}) = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}A_2B_4^{\text{\textcircled{D}}} \\ 0 & B_4^{\text{\textcircled{D}}} \end{bmatrix}$$

implicira $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = B^{\text{\textcircled{D}}}(I - AA^{\text{\textcircled{D}}})$ ako i samo ako (2.4) i (2.5) važe, odnosno $(A+B)^{\text{\textcircled{D}}} = A^{\text{\textcircled{D}}} + B^{\text{\textcircled{D}}}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Koristeći

$$(I - AA^{\text{\textcircled{D}}})B^{\text{\textcircled{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4^{\text{\textcircled{D}}} \end{bmatrix},$$

imamo da je $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$ ekvivalentno sa (2.5).

Dalje,

$$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} -A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_4^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

implicira $A^{\textcircled{\dagger}} = -AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ ako i samo ako (2.4) jeste zadovoljeno. Dakle, tvrđenja (i) i (iii) jesu ekvivalentna.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Uslov $A^{\textcircled{\dagger}} = -AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ implicira $(A^{\textcircled{\dagger}})^2 = -A^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = -A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Množenjem $(A^{\textcircled{\dagger}})^2 = -A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ sa A sa leve strane, sledi $A^{\textcircled{\dagger}} = -AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$. $\square$

Teorema 2.3.2 implicira sledeći rezultat za aditivnost jezgarnog inverza.

Posledica 2.3.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ takve da je $A^{\textcircled{\#}}B + A^{\textcircled{\#}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\#}} + AA^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(A+B)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}} + B^{\textcircled{\#}}$;

(ii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(A+B)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}(I - AA^{\textcircled{\#}})$;

(iii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $A^{\textcircled{\#}} = -AA^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$;

(iv) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(A^{\textcircled{\#}})^2 = -A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$.

Teorema 2.3.3 može biti dokazana slično kao Teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.3. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $BA^{\textcircled{\dagger}} + AA^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}})$;

(iii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(I - AA^{\textcircled{\dagger}})((A+B)^{\textcircled{\dagger}} - B^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}((A+B)^{\textcircled{\dagger}} - B^{\textcircled{\dagger}})(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(iv) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $(I - AA^{\textcircled{\dagger}})((A+B)^{\textcircled{\dagger}} - B^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $A^{\textcircled{\dagger}}((A+B)^{\textcircled{\dagger}} - B^{\textcircled{\dagger}})(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$.

Primenjujući Teoremu 2.3.3, dobijaju se sledeći uslovi da jednakost $(A+B)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}} + B^{\textcircled{\#}}$ važi.

Posledica 2.3.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ takve da je $BA^{\textcircled{\#}} + AA^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(A+B)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}} + B^{\textcircled{\#}}$;

(ii) $A + B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(A+B)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}(I - AA^{\textcircled{\#}})$;

(iii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, $(I - AA^{\textcircled{\#}})((A+B)^{\textcircled{\#}} - B^{\textcircled{\#}}) = 0$ i $AA^{\textcircled{\#}}((A+B)^{\textcircled{\#}} - B^{\textcircled{\#}})(I - AA^{\textcircled{\#}}) = 0$;

(iv) $A+B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$, $(I - AA^{\textcircled{\#}})((A+B)^{\textcircled{\#}} - B^{\textcircled{\#}}) = 0$ i $A^{\textcircled{\#}}((A+B)^{\textcircled{\#}} - B^{\textcircled{\#}})(I - AA^{\textcircled{\#}}) = 0$.

Sada se predstavljaju uslovi pod kojima relacija $A^2 \leq^{\textcircled{\scriptsize D}} B^2$ važi.

Teorema 2.3.4. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A^{\textcircled{\scriptsize D}}B + A^{\textcircled{\scriptsize D}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\scriptsize D}} + AA^{\textcircled{\scriptsize D}} = 0$, sledeća tvrđenja jesu ekvivalentna:

(i) $A^2 \leq^{\textcircled{\scriptsize D}} B^2$;

(ii) $AA^{\textcircled{\scriptsize D}}(A^2 + AB) = 0$;

(iii) $A^{\textcircled{\scriptsize D}}(A^2 + AB) = 0$;

(iv) $AA^{\textcircled{\scriptsize D}}(AB - BA) = 0$;

(v) $A^{\textcircled{\scriptsize D}}(AB - BA) = 0$.

Dokaz. Jasno je da, korišćenjem Leme 2.3.2, $A^{\textcircled{\scriptsize D}}B + A^{\textcircled{\scriptsize D}}A = 0$ i $BA^{\textcircled{\scriptsize D}} + AA^{\textcircled{\scriptsize D}} = 0$, postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invetibilno, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_4 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je Drejzin invertibilan. Kako je $A \in \mathcal{B}(X)^D$, zaključujemo da je $A^2 \in \mathcal{B}(X)^D$,

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 + A_2A_3 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}, \qquad B^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 - A_2B_4 \\ 0 & B_4^2 \end{bmatrix}$$

i

$$(A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najpre, uočimo da je

$$A^2(A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B^2(A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}}.$$

Dalje, na osnovu

$$(A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}}A^2 = \begin{bmatrix} I & A_1^{-2}(A_1A_2 + A_2A_3) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad (A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}}B^2 = \begin{bmatrix} I & A_1^{-2}(A_1A_2 - A_2B_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A^2 \leq^{\textcircled{\scriptsize D}} B^2$ ako i samo ako je $(A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}}A^2 = (A^2)^{\textcircled{\scriptsize D}}B^2$ što je ekvivalentno sa $A_2A_3 = -A_2B_4$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Primenjujući

$$A^{\textcircled{\scriptsize D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad AB = \begin{bmatrix} -A_1^2 & -A_1A_2 + A_2B_4 \\ 0 & A_3B_4 \end{bmatrix},$$

dobija se

$$AA^{\textcircled{\tiny D}}(A^2+AB) = AA^{\textcircled{\tiny D}}\begin{bmatrix} 0 & A_2A_3+A_2B_4 \\ 0 & A_3^2+A_3B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_2A_3+A_2B_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $AA^{\textcircled{\tiny D}}(A^2+AB)=0$ ako i samo ako je $A_2A_3=-A_2B_4$ što je ekvivalentno sa (i).

Ekvivalencije (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) i (iv) $\Leftrightarrow$ (v) jesu očigledne.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Iz $BA = \begin{bmatrix} -A_1^2 & -A_1A_2-A_2A_3 \\ 0 & B_4A_3 \end{bmatrix}$, imamo

$$AA^{\textcircled{\tiny D}}(AB-BA) = \begin{bmatrix} 0 & A_2B_4+A_2A_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je $AA^{\textcircled{\tiny D}}(AB-BA)=0$ ako i samo ako $-A_2B_4=A_2A_3$ ako i samo ako (i) važi. $\square$

Poglavlje 3

Jezgarno–EP ortogonalni elementi u prstenu sa involucijom

3.1 Relacije parcijalnog uređenja i pre-uređenja u prstenu

Relacije minus i zvezda uređenja prvobitno su definisane na polugrupi odnosno $*$-polugrupi [15, 26], a zatim na matricama [4].

Koristeći različite uopštene inverze, mnoga pre-uređenja i parcijalna uređenja jesu predstavljena u [44, 45, 50].

Definicija 3.1.1. [70] Ako su $a, b \in \mathcal{R}$, zvezda parcijalno uređenje $a \leq^* b$ važi ako je

$$aa^* = ba^* \quad \text{i} \quad a^*a = a^*b.$$

Specijalno, pretpostavka $a, b \in \mathcal{R}^\dagger$ daje $a \leq^* b$ ako i samo ako je

$$aa^\dagger = ba^\dagger \quad \text{i} \quad a^\dagger a = a^\dagger b.$$

Definicija 3.1.2. [70] Ako su $a, b \in R^\#$, onda a je manje od b u odnosu na grupno parcijalno uređenje ($a \leq^\# b$) ako je:

$$aa^\# = ba^\# \quad \text{i} \quad a^\# a = a^\# b.$$

Definicija 3.1.3. [70] Ako su $a, b \in R^{\oplus}$, onda je a manje od b u odnosu na jezgarno parcijalno uređenje ($a \leq^{\oplus} b$) ako je:

$$aa^{\oplus} = ba^{\oplus} \quad \text{i} \quad a^{\oplus} a = a^{\oplus} b.$$

Pomoću jezgarnog-EP inverza, jezgarno-EP pre-uređenje je definisano za elemente u prstenu sa involucijom.

Definicija 3.1.4. [23] Ako su $a, b \in R^{\textcircled{\dagger}}$, onda je a manje od b u odnosu na jezgarno-EP pre-uređenje ($a \leq^{\textcircled{\dagger}} b$) ako je:

$$aa^{\textcircled{\dagger}} = ba^{\textcircled{\dagger}} \quad \text{i} \quad a^{\textcircled{\dagger}}a = a^{\textcircled{\dagger}}b.$$

Posebno, ako je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, onda $a \leq^{\textcircled{\dagger}} b$ postaje $a \leq^{\textcircled{\#}} b$. Jezgarno parcijalno uređenje jeste dato u [1].

Detaljniji rezultati u vezi sa jezgarnim-EP pre-uređenjem mogu se videti u [14, 53, 54].

3.2 Definicije ortogonalnosti u prstenu

U vezi sa konceptima obostrane ortogonalnosti u prstenu, najpre se podsetimo sledećih definicija.

Definicija 3.2.1. Elementi $a, b \in \mathcal{R}$ jesu ortogonalni (označavamo sa $a \perp b$) ako je:

$$ab = 0 \quad \text{i} \quad ba = 0.$$

Specijalno, kada je $a \in \mathcal{R}^{\#}$, $a \perp b$ je ekvivalentno sa:

$$a^{\#}b = 0 \quad \text{i} \quad ba^{\#} = 0.$$

Definicija 3.2.2. Elementi $a, b \in \mathcal{R}$ jesu $*$-ortogonalni (označava se sa $a \perp_* b$) ako važi:

$$a^*b = 0 \quad \text{i} \quad ba^* = 0.$$

U slučaju da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, $a \perp_* b$ je ekvivalentno sa

$$a^\dagger b = 0 \quad \text{i} \quad ba^\dagger = 0.$$

Jezgarna ortogonalnost nije simetrična relacija. Da dobijemo simetričnost, stroga jezgarna ortogonalnost je istražena u [20].

Pojmovi jezgarne i stroge jezgarne ortogonalnosti su uopšteni za elemente prstena sa involucijom u [38].

Definicija 3.2.3. Za $a \in \mathcal{R}^{\oplus}$ i $b \in \mathcal{R}$, a je jezgarno ortogonalno sa b (označimo sa $a \perp_{\oplus} b$) ako je

$$a^{\oplus}b = 0 \qquad \text{i} \qquad ba^{\oplus} = 0.$$

Definicija 3.2.4. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\oplus}$, a je strogo jezgarno ortogonalno sa b (označimo sa $a \perp_{\oplus,s} b$) ako je

$$a \perp_{\oplus} b = 0 \qquad \text{i} \qquad b \perp_{\oplus} a.$$

Poznato je u [20], da $a \perp_{\oplus,s} b$ implicira $(a+b)^{\oplus} = a^{\oplus} + b^{\oplus}$. Obrnuto tvrđenje je tačno pod dodatnim uslovima datim u [20, 37, 41].

3.3 Jezgarna–EP ortogonalnost

Koristeći jezgarni-EP inverz umesto jezgarnog inverza u definiciji jezgarne ortogonalnosti, novi koncept jezgarne-EP ortogonalnosti je predstavljen u [59] za Drejzin invertibilne ograničene linearne operatore.

Kako je jezgarni-EP inverz uopštenje jezgarnog inverza operatora indeksa 1 na operator proizvoljnog indeksa, koncept jezgarne-EP ortogonalnosti je uopštenje jezgarne ortogonalnosti. Pomoću jezgarne-EP ortogonalnosti, pojam stroge jezgarne-EP ortogonalnosti je definisan takođe u [59] i povezan je sa jezgarnom-EP aditivnošću.

Značaj različitih tipova ortogonalnosti i skorašnji rezultati o jezgarnoj-EP ortogonalnosti za operatore i jezgarnoj ortogonalnosti za matrice i elemente u prstenu sa involucijom, motivisali su istraživanja u ovoj sekciji.

Tačnije, definisana je jezgarna-EP ortogonalnost za elemente prstena sa involucijom uopštavajući pojam jezgarne ortogonalnosti skoro predstavljene za elemente prstena sa involucijom u [41] i koncept jezgarne-EP ortogonalnosti istražen za Drejzin invertibilne ograničene linearne operatore u [59].

Potrebni i dovoljni uslovi za jezgarnu-EP ortogonalnost dva elementa dokazani su na osnovu algebarskih jednačina, idempotenata, samo-adjungovanih elemenata i jezgarnog-EP pre-uređenja. Predstavljene su i matrične reprezentacije za dva jezgarno-EP ortogonalna elementa.

Takođe, za dva jezgarno-EP ortogonalna elementa, uvode se ekvivalentni uslovi za jezgarnu-EP aditivnost $(a+b)^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\dagger}} + b^{\textcircled{\dagger}}$. Nekoliko osobina jezgarne-EP ortogonalnosti je predstavljeno u slučaju kada je a^k EP, gde je $ind(a) = k$.

Stroga jezgarna-EP ortogonalnost za elemente prstena sa involucijom je uvedena takođe kao uopštenje stroge jezgarne ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom u [41] kao i stroge jezgarne-EP ortogonalnosti za Drejzin invertibilne ograničene linearne operatore u [59]. U ovom poglavlju su prikazani rezultati pokazani u radu [78].

Najpre definišemo pojam jezgarne-EP ortogonalnosti u prstenu sa involucijom.

Definicija 3.3.1. [78] Za $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $b \in \mathcal{R}$, a je jezgarno-EP ortogonalno sa b (označava se sa $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$) ako je

$$a^{\textcircled{\dagger}} b = 0 \qquad \text{i} \qquad b a^{\textcircled{\dagger}} = 0.$$

Kada je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, jezgarna-EP ortogonalnost se poklapa sa jezgarnom ortogonalnošću definisanom u [41].

Nekoliko potrebnih i dovoljnih uslova da važi $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$ je predstavljeno.

Lema 3.3.1. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$;

(ii) $b\mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\dagger}})^{\circ}$ i $a^{\textcircled{\dagger}}\mathcal{R} \subseteq b^{\circ}$;

(iii) $(a^k)^*b = 0$ b i $a^k = 0$ (tj. $a^k \perp_{\textcircled{\#}} b$);

(iv) $b\mathcal{R} \subseteq [(a^k)^*]^{\circ}$ i $a^k\mathcal{R} \subseteq b^{\circ}$;

(v) $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b^*$ (tj. $b^*a^k = 0$ i $(a^k)^*b^* = 0$);

(vi) $a^k\mathcal{R} \subseteq (b^*)^{\circ}$ i $b^*\mathcal{R} \subseteq [(a^k)^*]^{\circ}$;

(vii) $b^{\textcircled{\dagger}}a^k = 0$ i $a^{\textcircled{\dagger}}b^* = 0$;

(viii) $a^k\mathcal{R} \subseteq (b^{\textcircled{\dagger}})^{\circ}$ i $b^*\mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\dagger}})^{\circ}$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Dokaz je jasan po Definiciji 3.3.1.
Ovaj dokaz se završava slično kao u [59, Lemma 2.1]. $\square$

Za $ind(a) \leq 1$, napominjemo da je [41, Theorem 3.3] specijalan slučaj Leme 3.3.1. Sledeće osobine jezgarne-EP ortogonalnosti slede kao u [59, Lemma 2.2].

Lema 3.3.2. Ako je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$, onda je $aa^{\textcircled{\dagger}} \perp bb^{\textcircled{\dagger}}$ i $b^{\textcircled{\dagger}}b \perp a^{\textcircled{\dagger}}a$.

Kao u [59, Theorem 2.1], potvrđuju se sledeće karakteristike jezgarne-EP ortogonalnosti u prstenu sa involucijom. Primetimo da se uopštavaju neka tvrđenja iz [59, Theorem 2.1] i dokazuju se nova tvrđenja (vi)–(ix).

Lema 3.3.3. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$;

(ii) $a \leq^{\textcircled{\dagger}} a + b$;

(iii) $b = (1 - aa^{\textcircled{\dagger}})z(1 - a^{\textcircled{\dagger}}a)$, za proizvoljno $z \in \mathcal{R}$;

(iv) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}$ su idempotenti i $a^{\textcircled{\dagger}}(a + b)a^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\dagger}}$;

(v) $a^{\textcircled{\dagger}}b = ba^{\textcircled{\dagger}}$ i $a^{\textcircled{\dagger}}(a + b)a^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\dagger}}$;

(vi) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}$ su idempotenti i $a^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(vii) $a^{\textcircled{\dagger}}b = ba^{\textcircled{\dagger}}$ i $a^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(viii) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}$ su idempotenti i $aa^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}}a = 0$;

(ix) $a^{\textcircled{\dagger}}b = ba^{\textcircled{\dagger}}$ i $aa^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}}a = 0$.

Dokaz. Ekvivalencije tvrđenja (i)–(v) slede kao u [59, Theorem 2.1]. Tvrđenja (vi) (ili (viii)) i (vii) (ili (ix)) su ekvivalentna sa (iv) i (v), redom, direktnim izračunavanjem. $\square$

Matrične reprezentacije jezgarno-EP ortogonalnih elemenata a i b su pokazane sada u prstenu sa involucijom, i delovi (iii) i (iv) u [59, Theorem 2.1] jesu uopšteni.

Teorema 3.3.1. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $p = aa^{\textcircled{\dagger}}$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_2^k = 0$ i $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$;

(iii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s_1 & s_2 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{e \times e} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24})^k = 0$, $t_1 \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{22}^m = 0$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Prema [14] i [43, Lemma 2.3], imamo, za $p = aa^{\textcircled{\dagger}}$ da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad a^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_2^k = 0$. Pretpostavimo da je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Jednakosti

$$0 = a^{\textcircled{\dagger}} b = \begin{bmatrix} t^{-1}b_1 & t^{-1}b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

i

$$0 = ba^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} b_1 t^{-1} & 0 \\ b_4 t^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

impliciraju $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ i $b_4 = 0$. Kako je $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, možemo pokazati da je $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pošto je $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\mathbb{D}}$, iz [14] i [43, Lemma 2.3], za $q = b_2 b_2^{\mathbb{D}}$ i $ind(b_2) = m$, važi

$$b_2 = \begin{bmatrix} t_1 & s_3 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{q\times q} \qquad \text{i} \qquad b_2^{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} t_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $t_1 \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$ i $b_{22}^m = 0$. Primetimo da je $1 = p + q + (1-p-q)$, $p^* = p$ i $q^* = q$.

Činjenica da je $b_2 \in (1-p)\mathcal{R}$ implicira da je $pq = pb_2b_2^{\mathbb{D}} = 0$.

Iz $q = q^* = (b_2^{\mathbb{D}})^*$, $b_2^* \in \mathcal{R}(1-p)$, zaključujemo da je $qp = 0$. Za $e_1 = p$, $e_2 = q$ i $e_3 = 1-p-q$, sledi da je $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $e_ie_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,3}$.

Može se uočiti da je:

$$\begin{aligned} b &= b_2 = t_1 + s_3 + b_{22} = qb_2q + qb_2(1-q) + (1-q)b_2(1-q) \\ &= q(1-p)b(1-p)q + q(1-p)b(1-p)(1-q) + (1-q)(1-p)b(1-p)(1-q) \\ &= qbq + qb(1-p-q) + (1-p-q)b(1-p-q), \end{aligned}$$

$t_1 = qbq$, $s_3 = qb(1-p-q)$ i $b_{22} = (1-p-q)b(1-p-q)$. Shodno tome, b ima sledeću matričnu formu:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{e\times e}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} a &= t + s + a_2 = pap + pa(1-p) + (1-p)a(1-p) \\ &= pap + paq + pa(1-p-q) + qa(1-p) + (1-p-q)a(1-p) \\ &= pap + paq + pa(1-p-q) + qaq + qa(1-p-q) \\ &+ (1-p-q)aq + (1-p-q)a(1-p-q), \end{aligned}$$

označimo: $s_1 = paq$, $s_2 = pa(1-p-q)$, $a_{21} = qaq$, $a_{22} = qa(1-p-q)$, $a_{23} = (1-p-q)aq$ i $a_{24} = (1-p-q)a(1-p-q)$. Prema tome, a može biti predstavljeno kao

$$a = \begin{bmatrix} t & s_1 & s_2 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{e\times e},$$

gde je $0 = a_2^k = (a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24})^k$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pošto je:

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e},$$

sledi da je: $a^{\textcircled{D}} b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}} = 0$. Dakle, $a \perp_{\textcircled{D}} b$. $\square$

Sada ćemo dokazati nove karakteristike za $a \perp_{\textcircled{D}} b$ pomoću samo-adjungovanih elemenata i idempotenata.

Teorema 3.3.2. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{D}} b$;

(ii) $a^{\textcircled{D}} b$ i $ba^{\textcircled{D}}$ su samo-adjungovani i $a^{\textcircled{D}}(a+b)a^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}}$;

(iii) $a^{\textcircled{D}} b$ i $ba^{\textcircled{D}}$ su samo-adjungovani i $a^{\textcircled{D}} ba^{\textcircled{D}} = 0$;

(iv) $a^{\textcircled{D}} b$ i $ba^{\textcircled{D}}$ su samo-adjungovani i $aa^{\textcircled{D}} ba^{\textcircled{D}} a = 0$;

(v) $a^{\textcircled{D}} b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je samo-adjungovan;

(vi) $aa^{\textcircled{D}} b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je samo-adjungovan;

(vii) $(a^k)^* b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je samo-adjungovan;

(viii) $a^{\textcircled{D}} b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je idempotent;

(ix) $aa^{\textcircled{D}} b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je idempotent;

(x) $(a^k)^* b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je idempotent;

(xi) $ba^{\textcircled{D}} = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je samo-adjungovan;

(xii) $ba^{\textcircled{D}} a = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je samo-adjungovan;

(xiii) $ba^k = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je samo-adjungovan;

(xiv) $ba^{\textcircled{D}} = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je idempotent;

(xv) $ba^{\textcircled{D}} a = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je idempotent;

(xvi) $ba^k = 0$ i $a^{\textcircled{D}} b$ je idempotent.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii)–(xvi): Dokaz je jasan.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Iz [14] i [43, Lemma 2.3], imamo da je:

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{i} \quad a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $p = aa^{\textcircled{D}}$, $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_2^k = 0$. Neka je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Tada je

$$a^{\textcircled{D}}b = \begin{bmatrix} t^{-1}b_1 & t^{-1}b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad ba^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} b_1t^{-1} & 0 \\ b_4t^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Kako su $a^{\textcircled{D}}b$ i $ba^{\textcircled{D}}$ samo-adjungovani, zaključujemo da je: $b_3 = 0$ i $b_4 = 0$. Hipoteza $a^{\textcircled{D}}(a+b)a^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}}$ je ekvivalentna sa $a^{\textcircled{D}}ba^{\textcircled{D}} = 0$. Iz

$$0 = a^{\textcircled{D}}ba^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1}b_1t^{-1} & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

sledi da je $b_1 = 0$. Sada $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ implicira $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$. Dakle, Teorema 3.3.1 implicira $a \perp_{\textcircled{D}} b$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Ove ekvivalencije se dokazuju jednostavnim izračunavanjima.

(v) $\Rightarrow$ (i): Koristeći reprezentacije a, $a^{\textcircled{D}}$ i b kao u (ii) $\Rightarrow$ (i), može se uočiti da je: $a^{\textcircled{D}}b = 0$ i $ba^{\textcircled{D}}$ je samo-adjungovan ako i samo ako su $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ i $b_4 = 0$. Ostalo je jasno na osnovu Teoreme 3.3.1.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii): Primenom jednakosti $a^{\textcircled{D}} = a^D a^k (a^k)^\dagger$ i direktnim izračunavanjem, mogu se proveriti ove ekvivalencije.

(viii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavke da je $a^{\textcircled{D}}b = 0$ i da je $ba^{\textcircled{D}}$ idempotent impliciraju da je $ba^{\textcircled{D}} = b(a^{\textcircled{D}}b)a^{\textcircled{D}} = 0$, tako da je $a \perp_{\textcircled{D}} b$.

Na sličan način se završava ovaj dokaz. $\square$

U slučaju da je $a \perp_{\textcircled{D}} b$, potrebni i dovoljni uslovi za $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$ jesu dokazani. Primetimo da Teorema 3.3.3 jeste uopštenje [59, Theorem 2.2] sa novim tvrđenjima u uslovima (vi)–(vii).

Teorema 3.3.3. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $ind(a) = k$. Ako je $a \perp_{\textcircled{D}} b$, sledeća tvrđenja jesu ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $(a+b)^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}}) = b^{\textcircled{D}}$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ i $a^{\textcircled{D}}a(1 - aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = 0$;

(iv) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ i $a^{\textcircled{D}}ab^{\textcircled{D}} = 0$;

(v) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ i $aa^{\textcircled{D}}ab^{\textcircled{D}} = 0$;

(vi) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ i $a^{\textcircled{D}}(a+b)^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}}) = 0$;

(vii) $a+b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(1-aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ i $aa^{\textcircled{D}}(a+b)^{\textcircled{D}}(1-aa^{\textcircled{D}}) = 0$.

Dokaz. Pretpostavka da je $a\perp_{\textcircled{D}} b$ i Teorema 3.3.1 impliciraju:

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $p = aa^{\textcircled{D}}$, $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_2^k = 0$ i $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$. Sada je

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Koristeći $a+b = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2+b_2 \end{bmatrix}_{p\times p} \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, na osnovu [43, Lemma 2.3], zaključujemo da je $a_2+b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$ i

$$(a+b)^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & -t^{-1}s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \\ 0 & (a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Prema tome, $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$ ako i samo ako je $s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = 0$ i $(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = b_2^{\textcircled{D}}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Kako je

$$1 - aa^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}_{p\times p},$$

onda je

$$(a+b)^{\textcircled{D}}(1-aa^{\textcircled{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & -t^{-1}s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \\ 0 & (a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Shodno tome, $(a+b)^{\textcircled{D}}(1-aa^{\textcircled{D}}) = b^{\textcircled{D}}$ ako i samo ako je $s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = 0$ i $(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = b_2^{\textcircled{D}}$, što je ekvivalentno sa (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (vi): Iz

$$(1-aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p\times p},$$

zaključuje se da je $(1-aa^{\textcircled{D}})(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}$ ako i samo ako je $(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = b_2^{\textcircled{D}}$.

Dalje, iz

$$a^{\textcircled{D}}(a+b)^{\textcircled{D}}(1-aa^{\textcircled{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & -t^{-2}s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

$a^{\textcircled{D}}(a+b)^{\textcircled{D}}(1-aa^{\textcircled{D}}) = 0$ je ekvivalentno sa $s(a_2+b_2)^{\textcircled{D}} = 0$. Dakle, dobija se ekvivalencija između tvrđenja (i) i (vi).

Slično, završavamo ovaj dokaz. $\square$

Poznato je da, na osnovu [59, Example 2.1], jezgarna-EP ortogonalnost nije simetrična relacija i da, u opštem slučaju, $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$ ne implicira $a\perp_{\textcircled{D}} b$.

Sledeći rezultati su pomoćni.

Lema 3.3.4. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^D$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$. Ako je $a^k b^m = 0$, onda je

(i) $a^k\mathcal{R} \cap b^m\mathcal{R} = \{0\}$;

(ii) $(a^k)^*\mathcal{R} \cap (b^m)^*\mathcal{R} = \{0\}$;

(iii) $(a^k + b^m)^\circ = (a^k)^\circ \cap (b^m)^\circ$;

(iv) $((a^k)^* + (b^m)^*)^\circ = ((a^k)^*)^\circ \cap ((b^m)^*)^\circ$.

Dokaz. Na osnovu $a, b \in \mathcal{R}^D$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$, možemo uočiti da je $a^k, b^m \in \mathcal{R}^\#$. Ostatak sledi iz [41, Lemma 3.6]. □

Uz uslov $a\perp_{\textcircled{D}} b$, Lema 3.3.4 implicira sledeći rezultat.

Teorema 3.3.4. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$. Ako je $a\perp_{\textcircled{D}} b$, onda važi

(i) $a^k\mathcal{R} \cap b^m\mathcal{R} = \{0\}$;

(ii) $(a^k)^*\mathcal{R} \cap (b^m)^*\mathcal{R} = \{0\}$;

(iii) $(a^k + b^m)^\circ = (a^k)^\circ \cap (b^m)^\circ$;

(iv) $((a^k)^* + (b^m)^*)^\circ = ((a^k)^*)^\circ \cap ((b^m)^*)^\circ$;

(v) $(a^k)^*\mathcal{R} \cap b^m\mathcal{R} = \{0\}$;

(vi) $a^k\mathcal{R} \cap (b^m)^*\mathcal{R} = \{0\}$;

(vii) $((a^k)^* + b^m)^\circ = ((a^k)^*)^\circ \cap (b^m)^\circ$;

(viii) $(a^k + (b^m)^*)^\circ = (a^k)^\circ \cap ((b^m)^*)^\circ$.

Dokaz. Prema [22], uslovi $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$ impliciraju $a, b \in \mathcal{R}^D$ i $a^k, b^m \in \mathcal{R}^\dagger$. Pretpostavka $a\perp_{\textcircled{D}} b$ i Lema 3.3.1 daju $(a^k)^*b = 0$ i $ba^k = 0$. Onda je $(a^k)^*b^m = 0$ i $b^m a^k = 0$. Koristeći Lemu 3.3.4, ovaj dokaz moze biti završen. □

Ako je a^k EP, izučavaju se ekvivalentni uslovi za $a\perp_{\textcircled{D}} b$. Primetimo da se uslovi (ii)–(iii) pojavljuju u [59, Corollary 2.3], ali uslovi (iv)–(vi) jesu novi u literaturi.

Teorema 3.3.5. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $ind(a) = k$. Ako je a^k EP, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{D}} b$;

(ii) $a^k \perp b$;

(iii) $a^k \perp_* b$;

(iv) $a^k \leq^{\text{\textcircled{\#}}} a^k + b$;

(v) $a^k \leq^{\#} a^k + b$;

(vi) $a^k \leq^* a^k + b$.

Štaviše, ako jedno od tvrđenja od (i)–(vi) važi, $ind(b) = m$ i b^m jeste EP, onda $a^k + b^m$ jeste EP.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Ove ekvivalencije slede kao u [59, Corollary 2.3].

(iv) $\Leftrightarrow$ (i): Činjenica da je a^k EP implicira da je $(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}} = (a^k)^{\#} = (a^k)^{\dagger}$.

Sada, uočimo da je $a^k \leq^{\text{\textcircled{\#}}} a^k + b$ ako i samo ako je $a^k(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}} = a^k(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}} + b(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}}$ i $(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}}a^k = (a^k)^{\text{\textcircled{\#}}}a^k + (a^k)^{\text{\textcircled{\#}}}b$, što je ekvivalentno sa $b(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}} = 0$ i $(a^k)^{\text{\textcircled{\#}}}b = 0$, tj, $ba^k = 0$ i $(a^k)^*b = 0$. Primenjujući Lemu 3.3.1, zaključujemo da (iv) jeste ekvivalentno sa (i).

Kao u dokazu (iv) $\Leftrightarrow$ (i), pokazuje se da važi (v) $\Leftrightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (vi). $\square$

3.4 Stroga jezgarna-EP ortogonalnost

U ovoj sekciji, istražuje se stroga jezgarna-EP ortogonalnost za elemente u prstenu sa involucijom, uopštavajući ovaj pojam za Drejzin invertibilne ograničene linearne operatore definisan u [59] i koncept stroge jezgarne ortogonalnosti dat u [41].

Definicija 3.4.1. Za $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $b \in \mathcal{R}$, a je strogo jezgarno-EP ortogonalno sa b (označeno sa $a\perp_{\textcircled{D},s}b$) ako je

$$a\perp_{\textcircled{D}}b = 0 \qquad \text{i} \qquad b\perp_{\textcircled{D}}a.$$

U slučaju da su $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, stroga jezgarna-EP ortogonalnost se redukuje na strogu jezgarnu ortogonalnost za elemente prstena sa involucijom predstavljenu u [41]. Poseban slučaj Definicije 3.4.1 je stroga jezgarna-EP ortogonalnost za Drejzin invertibilne ograničene linearne operatore [59].

Lema 3.4.1. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $ind(a) = k$. Ako je $a\perp_{\textcircled{D},s}b$, onda je $aa^{\textcircled{D}}\perp bb^{\textcircled{D}}$ i $a^{\textcircled{D}}a\perp b^{\textcircled{D}}b$.

Dokaz. Lema 3.3.2 implicira da je $aa^{\textcircled{D}}bb^{\textcircled{D}} = 0$, $bb^{\textcircled{D}}aa^{\textcircled{D}} = 0$ i $b^{\textcircled{D}}ba^{\textcircled{D}}a = 0$.
Takođe, iz $ab^{\textcircled{D}} = 0$, imamo $a^{\textcircled{D}}ab^{\textcircled{D}}b = 0$. $\square$

Sledeće karakteristike strogo jezgarno-EP ortogonalnih elemenata mogu se dokazati primenjujući Lemu 3.3.3 na isti način kao u [59, Theorem 3.1].

Lema 3.4.2. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{D},s}b$;

(ii) $a \leq^{\textcircled{D}} a + b$ i $b \leq^{\textcircled{D}} a + b$;

(iii) $a \leq^{\textcircled{D}} a + b$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})b^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ab^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}}) = 0$;

(iv) $a^{\textcircled{D}}b$ i $ba^{\textcircled{D}}$ su idempotenti, $a^{\textcircled{D}}(a + b)a^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})b^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ab^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}}) = 0$;

(v) $a^{\textcircled{D}}b = ba^{\textcircled{D}}$, $a^{\textcircled{D}}(a + b)a^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}}$, $(1 - aa^{\textcircled{D}})b^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ab^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}}) = 0$.

Sada istražujemo matrične forme strogo jezgarno-EP ortogonalnih elemenata u prstenu sa involucijom.

Teorema 3.4.1. Za $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $p = aa^{\textcircled{D}}$, $ind(a) = k$ i $ind(b) = m$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{D},s}b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_2^k = 0$, $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$, $b_2^{\textcircled{D}} a_2 = 0$, $s b_2^{\textcircled{D}} = 0$ i $a_2 b_2^{\textcircled{D}} = 0$;

(iii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} \end{bmatrix}_{e \times e} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24})^k = 0$, $t_1 \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{22}^m = 0$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Na osnovu Teoreme 3.3.1, imamo da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_2^k = 0$ i $b_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$.

Koristeći

$$b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p \times p},$$

dobija se da je

$$0 = b^{\textcircled{D}} a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^{\textcircled{D}} a_2 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

i

$$0 = a b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & s b_2^{\textcircled{D}} \\ 0 & a_2 b_2^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p \times p},$$

što implicira $b_2^{\textcircled{D}} a_2 = 0$, $s b_2^{\textcircled{D}} = 0$ i $a_2 b_2^{\textcircled{D}} = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Primetimo da je $a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$ i $b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p \times p}$.

Elementarnim računanjem, proverava se da je $a^{\textcircled{D}} b = b a^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}} a = a b^{\textcircled{D}} = 0$, tj. $a \perp_{\textcircled{D},s} b$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Teorema 3.3.1 implicira da postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & s_1 & s_2 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{e \times e} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24})^k = 0$, $t_1 \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{22}^m = 0$. Uočimo da je:

$$b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}.$$

Sada jednakosti

$$0 = b^{\textcircled{D}}a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1}a_{21} & t_1^{-1}a_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}$$

i

$$0 = ab^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & s_1t_1^{-1} & 0 \\ 0 & a_{21}t_1^{-1} & 0 \\ 0 & a_{23}t_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}$$

impliciraju $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $s_1 = 0$ i $a_{23} = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sledi iz:

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e} \quad \text{i} \quad b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}. \tag{3.1}$$

$\square$

Pretpostavka da je $a\perp_{\textcircled{D},s}b$ u konjunkciji sa uslovom da je $(1-aa^{\textcircled{D}}-bb^{\textcircled{D}})(a+b)$ nilpotentan implicira da je $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$.

Teorema 3.4.2. Neka je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$. Ako je $a\perp_{\textcircled{D},s}b$ i $(1-aa^{\textcircled{D}}-bb^{\textcircled{D}})(a+b)$ jeste nilpotentan, onda je

(i) $a+b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$;

(ii) $aa^D = (a+b)a^D$;

(iii) $bb^D = (a+b)b^D$.

Dokaz. Koristeći Teoremu 3.4.1, postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1+e_2+e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} t & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} \end{bmatrix}_{e\times e} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}_{e\times e},$$

gde je $t \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24})^k = 0$, $t_1 \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{22}^m = 0$. Primetimo da su $a^{\textcircled{D}}$ i $b^{\textcircled{D}}$ predstavljeni kao u (3.1). Zbog toga što je

$$(1 - aa^{\textcircled{D}} - bb^{\textcircled{D}})(a+b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24}+b_{22} \end{bmatrix}_{e\times e}$$

nilpotentan, sledi da je $a_{24}+b_{22}$ takođe nilpotentan.

(i) Može se proveriti da je:

$$(a+b)^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t & 0 & s_2 \\ 0 & t_1 & s_3 \\ 0 & 0 & a_{24}+b_{22} \end{bmatrix}^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}.$$

Prema tome, $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$.

(ii) Kako je, za neke elemente x i y,

$$a^D = \begin{bmatrix} t^{-1} & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e},$$

onda važi

$$aa^D = \begin{bmatrix} p & tx & ty \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e} = (a+b)a^D.$$

(iii) Za neko z, uočimo da je:

$$b^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1^{-1} & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}.$$

Ostali deo dokaza postaje jasan direktnim izračunavanjem. $\square$

Poglavlje 4

Nove osobine jezgarnog-EP pre-uređenja za operatore

4.1 Zakon direktnog i obrnutog redosleda za operatore

Jedan od bitnih problema u teoriji uopštenih inverza je da nađemo uopšteni inverz proizvoda [11, 12, 25, 52]. Za jezgarni inverz, potrebni i dovoljni uslovi za zakon obrnutog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}}$$

i zakon direktnog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$$

istraženi su od strane mnogih autora [35, 74, 86, 98].

Na osnovu [90, Theorem 2.10], jezgarno parcijalno uređenje $A \leq^{\textcircled{\#}} B$ implicira

$$(AB)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}} = (BA)^{\textcircled{\#}}.$$

Pretpostavke pod kojima zakon obrnutog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$$

jeste zadovoljen za jezgarni-EP inverz su predstavljene u [22, 48].

U ovoj disertaciji prikazane su mnoge nove osobine jezgarnog-EP pre-uređenja i jezgarnog parcijalnog uređenja koje su dokazane u radu [80].

Prvi cilj je da se pronađu nove karakteristike za jezgarno-EP pre-uređenje $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ koristeći odgovarajuće samo-adjungovane operatore i stepen jezgarnog-EP inverza.

Dalje, u slučaju da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$, pokazane su karakteristike zakona direktnog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$.

Potrebni i dovoljni uslovi za ekvivalenciju između zakona direktnog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\tiny D}} = A^{\textcircled{\tiny D}} B^{\textcircled{\tiny D}}$$

i zakona obrnutog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\tiny D}} = B^{\textcircled{\tiny D}} A^{\textcircled{\tiny D}}$$

su istraživani.

Pod uslovom $A \leq^{\textcircled{\tiny D}} B$, dobijamo nove ekvivalentne uslove pod kojima bi važilo

$$(B - A)^{\textcircled{\tiny D}} = B^{\textcircled{\tiny D}} - A^{\textcircled{\tiny D}}.$$

Primenjujući prethodno pomenute rezultate, dobijene su karakteristike za jezgarno parcijalno uređenje i osobine zakona direktnog redosleda za jezgarni inverz.

4.2 Karakteristike jezgarnog-EP pre-uređenja

Ova sekcija je posvećena novim karakteristikama jezgarnog-EP pre-uređenja. Na početku, predstavljamo pomoćni rezultat koji je koristan u nastavku.

Lema 4.2.1. [54, Corollary 3.7] Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\tiny D}} B$;

(ii) postoje sledeće matrične reprezentacije u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan.

U prvoj teoremi istražujemo ekvivalentne uslove, u kojima je operator $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ samo-adjungovan, da pre-uređenje $A \leq^{\textcircled{\tiny D}} B$ važi.

Teorema 4.2.1. Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna

(i) $A \leq^{\textcircled{\tiny D}} B$;

(ii) $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ je samo-adjungovan i $A^{\textcircled{\tiny D}}A = A^{\textcircled{\tiny D}}B$;

(iii) $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ je samo-adjungovan i $AA^{\textcircled{\tiny D}}A = AA^{\textcircled{\tiny D}}B$;

(iv) $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ je samo-adjungovan i $A^*A^k = B^*A^k$;

(v) $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ je samo-adjungovan i $A^*A^{\textcircled{\tiny D}} = B^*A^{\textcircled{\tiny D}}$;

(vi) $BA^{\textcircled{\tiny D}}$ je samo-adjungovan i $A^*A^D = B^*A^D$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Na osnovu [54, Corollary 2.2], operatori A i $A^{\textcircled{\tiny D}}$ mogu biti predstavljeni u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ kao

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^{\textcircled{\tiny D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan.

Neka je

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_4 & B_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^*) \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Najpre, primetimo da je

$$BA^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} B_1A_1^{-1} & 0 \\ B_4A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

samo-adjungovan ako i samo ako $B_1A_1^{-1}$ jeste samo-adjungovan i $B_4 = 0$.

Dalje, $A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B$ jeste ekvivalentno sa

$$\begin{bmatrix} I & A_1^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je, $B_1 = A_1$ i $B_2 = A_2$. Koristeći Lemu 4.2.1, zaključujemo da tvrđenja (i) i (ii) jesu ekvivalentna.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Ova ekvivalencija sledi na osnovu jednakosti

$$A^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Pomoću jednakosti $A^{\textcircled{\dagger}} = A^DA^k(A^k)^\dagger$ i $(A^k)^* = (A^k)^*A^k(A^k)^\dagger$, sledi da je $AA^{\textcircled{\dagger}}A = AA^{\textcircled{\dagger}}B$ ako i samo ako je $A^k(A^k)^\dagger A = A^k(A^k)^\dagger B$, što je ekvivalentno sa $(A^k)^*A = (A^k)^*B$, tj. $A^*A^k = B^*A^k$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Ovaj deo je jasan iz $A^{\textcircled{\dagger}} = A^kA^D(A^k)^\dagger$ i $A^k = A^{\textcircled{\dagger}}A^{k+1}$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (vi): Na osnovu osobina Drejzinovog inverza, ovo je očigledno. □

U slučaju da je $ind(A) = 1$ u Teoremi 4.2.1, uočimo da sledeće karakteristike jezgarnog parcijalnog uređenja važe.

Posledica 4.2.1. Za $A \in \mathcal{B}(X)^\#$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\#}} B$;

(ii) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A^{\textcircled{\#}}A = A^{\textcircled{\#}}B$;

(iii) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A = AA^{\textcircled{\#}}B$;

(iv) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A^*A = B^*A$;

(v) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A^*A^{\textcircled{\#}} = B^*A^{\textcircled{\#}}$;

(vi) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A^*A^\# = B^*A^\#$.

Sada su izučavani potrebni i dovoljni uslovi, koji uključuju da je $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ samo-adjungovan, da bi važila relacija $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$.

Teorema 4.2.2. Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$;

(ii) $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan i $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$;

(iii) $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan i $AA^{\textcircled{\dagger}}A = BA^{\textcircled{\dagger}}A$;

(iv) $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan i $A^{k+1} = BA^k$;

(v) $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan i $A^{\textcircled{\dagger}}A^* = A^{\textcircled{\dagger}}B^*$;

(vi) $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan i $AA^D = BA^D$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Pretpostavimo da su operatori A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B predstavljeni kao u (4.1) i (4.2). Sada, $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$ važi ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1A_1^{-1} & 0 \\ B_4A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno sa $B_1 = A_1$ i $B_4 = 0$.

Onda je

$$(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*A_1 & A_1^*B_2 \\ A_2^*A_1 & A_2^*B_2 \end{bmatrix}$$

samo-adjungovan ako i samo ako je $B_2 = A_2$. Lema 4.2.1 implicira da je (i) ekvivalentno sa (ii).

Slično kao u Teoremi 4.2.1, završavamo ovaj dokaz. $\square$

Primetimo da je uslov da je $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ samo-adjungovan ekvivalentan sa uslovom da je $A^*AA^{\textcircled{\dagger}}B$ (ili $BAA^{\textcircled{\dagger}}A$) samo-adjungovan.

Teorema 4.2.2 implicira sledeće posledice vezane za jezgarno parcijalno uređenje.

Posledica 4.2.2. Za $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\#}} B$;

(ii) A^*B je samo-adjungovan i $AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}}$;

(iii) A^*B je samo-adjungovan i $A = BA^{\textcircled{\#}}A$;

(iv) A^*B je samo-adjungovan i $A^2 = BA$;

(v) A^*B je samo-adjungovan i $A^{\textcircled{\#}}A^* = A^{\textcircled{\#}}B^*$;

(vi) A^*B je samo-adjungovan i $AA^{\#} = BA^{\#}$.

Koristeći stepene jezgarnog-EP inverza $A^{\textcircled{\dagger}}$, dokazujemo sledeće karakterizacije relacije $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$.

Teorema 4.2.3. Za $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$;

(ii) $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$ i $A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B$;

(iii) $B(A^D)^{n+1} = (A^D)^n$ i $A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B$;

(iv) $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$ i $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B$ je samo-adjungovan;

(v) $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$ i $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A - B) = 0$;

(vi) $BA^{\textcircled{\dagger}}$ je samo-adjungovan i $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A - B) = 0$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavka da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ implicira $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$ i $A^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}B$. Prema tome, $(A^{\textcircled{\dagger}})^n = A(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Iz [65, Lemma 2.1], $(A^{\textcircled{\dagger}})^n = (A^D)^n A^k (A^k)^\dagger$, što implicira

$$\begin{aligned}(A^{\textcircled{\dagger}})^n AA^D &= (A^D)^n A^k (A^k)^\dagger AA^D = (A^D)^n (A^k (A^k)^\dagger A^k)(A^D)^k \\ &= (A^D)^n A^k (A^D)^k = (A^D)^n AA^D = (A^D)^n,\end{aligned} \tag{4.3}$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Koristeći (4.3) i $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$, sledi da je

$$B(A^D)^{n+1} = (B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1})AA^D = (A^{\textcircled{\dagger}})^n AA^D = (A^D)^n.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Primenjujući $A^{\textcircled{\dagger}} = A^D A^k (A^k)^\dagger$ i $B(A^D)^{n+1} = (A^D)^n$, uočavamo da je:

$$\begin{aligned}BA^{\textcircled{\dagger}} &= BA^D A^k (A^k)^\dagger = (B(A^D)^{n+1})A^{k+n}(A^k)^\dagger \\ &= (A^D)^n A^{k+n} (A^k)^\dagger = A(A^D A^k (A^k)^\dagger) \\ &= AA^{\textcircled{\dagger}}.\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Ako su A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B predstavljeni kao u (4.1) i (4.2), primetimo da je $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$ ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} B_1 A_1^{-(n+1)} & 0 \\ B_4 A_1^{-(n+1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno sa $B_1 = A_1$ i $B_4 = 0$.

Sada, $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*B = \begin{bmatrix} A_1^*A_1 & A_1^*B_2 \\ A_2^*A_1 & A_2^*B_2 \end{bmatrix}$ je samo-adjungovan ako i samo ako je $B_2 = A_2$. Prema Lemi 4.2.1, (i) i (iv) jesu ekvivalentni.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Ako su A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B predstavljeni sa (4.1) i (4.2), kao u delu dokaza (i) $\Leftrightarrow$ (iv), $B(A^{\textcircled{\dagger}})^{n+1} = (A^{\textcircled{\dagger}})^n$ je ekvivalentno sa $B_1 = A_1$ i $B_4 = 0$. Onda, iz

$$(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A - B) = \begin{bmatrix} 0 & A_1^*(A_2 - B_2) \\ 0 & A_2^*(A_2 - B_2) \end{bmatrix},$$

$(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A-B)=0$ ako i samo je $B_2=A_2$.

(i) $\Leftrightarrow$ (vi): Neka A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B su dati kao u (4.1) i (4.2). Zbog

$$(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A-B)=\begin{bmatrix} A_1^*(A_1-B_1) & A_1^*(A_2-B_2) \\ A_2^*(A_1-B_1) & A_2^*(A_2-B_2) \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $(AA^{\textcircled{\dagger}}A)^*(A-B)=0$ ekvivalentno sa $B_1=A_1$ i $B_2=A_2$. Takođe, $BA^{\textcircled{\dagger}}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ B_4A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ je samo-adjungovan ako i samo ako je $B_4=0$. $\square$

Na osnovu Teoreme 4.2.3, sledeći rezultat važi. Primetimo da je deo (iv) u Posledici 4.2.3 predstavljen kao deo (iv) u [99, Theorem 3.10].

Posledica 4.2.3. Za $n\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B\in\mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\leq^{\textcircled{\#}} B$;

(ii) $B(A^{\textcircled{\#}})^{n+1}=(A^{\textcircled{\#}})^n$ i $A^{\textcircled{\#}}A=A^{\textcircled{\#}}B$;

(iii) $B(A^{\#})^{n+1}=(A^{\#})^n$ i $A^{\textcircled{\#}}A=A^{\textcircled{\#}}B$;

(iv) $B(A^{\textcircled{\#}})^{n+1}=(A^{\textcircled{\#}})^n$ i A^*B je samo-adjungovan;

(v) $B(A^{\textcircled{\#}})^{n+1}=(A^{\textcircled{\#}})^n$ i $A^*A=A^*B$;

(vi) $BA^{\textcircled{\#}}$ je samo-adjungovan i $A^*A=A^*B$.

Takođe dokazane su sledeće karakteristike za $A\leq^{\textcircled{\dagger}} B$.

Teorema 4.2.4. Za $A\in\mathcal{B}(X)^D$, $k=ind(A)$ i $B\in\mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A\leq^{\textcircled{\dagger}} B$;

(ii) $BA^{\textcircled{\dagger}}=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}$ i $A^{\textcircled{\dagger}}B=A^{\textcircled{\dagger}}A$;

(iii) $BA^{\textcircled{\dagger}}A=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}A$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}B=AA^{\textcircled{\dagger}}A$;

(iv) $BA^{\textcircled{\dagger}}=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}$ i $B^*A^k=A^*A^k$;

(v) $BA^{\textcircled{\dagger}}=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}$, $A^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}A=A^{\textcircled{\dagger}}A$ i $A^{\textcircled{\dagger}}B(I-AA^{\textcircled{\dagger}})=A^{\textcircled{\dagger}}A(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$;

(vi) $BA^{\textcircled{\dagger}}A=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}A$, $A^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}=A^{\textcircled{\dagger}}$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}B(I-AA^{\textcircled{\dagger}})=AA^{\textcircled{\dagger}}A(I-AA^{\textcircled{\dagger}})$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Neka su A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B dati sa (4.1) i (4.2). Onda je $BA^{\textcircled{\dagger}}=AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}$ ako i samo ako je $(I-AA^{\textcircled{\dagger}})BA^{\textcircled{\dagger}}=0$, što je ekvivalentno sa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_4A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}=0,$$

odnosno, $B_4 = 0$.

Kao u dokazu Teoreme 4.2.1, $A^{\textcircled{\dagger}}B = A^{\textcircled{\dagger}}A$ ako i samo ako je $B_1 = A_1$ i $B_2 = A_2$. Ostalo je jasno iz Leme 4.2.1.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Ove ekvivalencije mogu biti proverene kao u Teoremi 4.2.1.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Pretpostavimo da A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B imaju matrične forme kao u (4.1) i (4.2). Kao u delu (i) $\Leftrightarrow$ (ii), pokazujemo da je $BA^{\textcircled{\dagger}} = AA^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}$ ekvivalentno sa $B_4 = 0$. Jednakost $A^{\textcircled{\dagger}}BA^{\textcircled{\dagger}}A = A^{\textcircled{\dagger}}A$ važi ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_1A_1^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_1^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno sa $B_1 = A_1$. Takođe, $A^{\textcircled{\dagger}}B(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = A^{\textcircled{\dagger}}A(I - AA^{\textcircled{\dagger}})$ je ekvivalentno sa

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tj. $B_2 = A_2$.

(vi) $\Leftrightarrow$ (v): Ovo je jasno. □

Kao posledica, karakteriše se $A \leq^{\textcircled{\#}} B$ na sledeći način.

Posledica 4.2.4. Za $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\#}} B$;

(ii) $BA^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}$ i $A^{\textcircled{\#}}B = A^{\textcircled{\#}}A$;

(iii) $BA^{\textcircled{\#}}A = AA^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}A$ i $AA^{\textcircled{\#}}B = A$;

(iv) $BA^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}$ i $B^*A = A^*A$;

(v) $BA^{\textcircled{\#}} = AA^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}$, $A^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}A = A^{\textcircled{\#}}A$ i $A^{\textcircled{\#}}B(I - AA^{\textcircled{\#}}) = A^{\textcircled{\#}}A - AA^{\textcircled{\#}}$;

(vi) $BA^{\textcircled{\#}}A = AA^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}}A$, $A^{\textcircled{\#}}BA^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}$ i $AA^{\textcircled{\#}}B(I - AA^{\textcircled{\#}}) = A(I - AA^{\textcircled{\#}})$.

Nekoliko karakteristika relacije $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ je istraženo pomoću proizvoda $BA^{\textcircled{\dagger}}B$.

Teorema 4.2.5. Za $A \in \mathcal{B}(X)^D$, $k = ind(A)$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$;

(ii) $AA^{\textcircled{\dagger}}(BA^{\textcircled{\dagger}}B - A) = 0$ i $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$;

(iii) $A^{\textcircled{\dagger}}(BA^{\textcircled{\dagger}}B - A) = 0$ i $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$;

(iv) $AA^{\textcircled{\dagger}}A = BA^{\textcircled{\dagger}}B$ i $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Pretpostavimo da A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B imaju reprezentacije kao u (4.1) i (4.2). Kao u dokazu Teoreme 4.2.2, zaključuje se da $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$ jeste ekvivalentno sa $B_1 = A_1$ i $B_4 = 0$. Sada, iz

$$BA^{\textcircled{\dagger}}B = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$AA^{\textcircled{\dagger}}(BA^{\textcircled{\dagger}}B - A) = \begin{bmatrix} 0 & B_2 - A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$AA^{\textcircled{\dagger}}(BA^{\textcircled{\dagger}}B - A) = 0$ ako i samo ako je $B_2 = A_2$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Ovo je očigledno.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Ponovo, koristeći reprezentacije operatora A, $A^{\textcircled{\dagger}}$ i B kao u (4.1) i (4.2), $AA^{\textcircled{\dagger}} = BA^{\textcircled{\dagger}}$ ako i samo ako je $B_1 = A_1$ i $B_4 = 0$. Štaviše, $AA^{\textcircled{\dagger}}A = BA^{\textcircled{\dagger}}B$ je ekvivalentno sa

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tj, $B_2 = A_2$. $\square$

Kao posledica, opisuje se relacija $A \leq^{\textcircled{\#}} B$.

Posledica 4.2.5. Za $A \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B \in \mathcal{B}(X)$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{\#}} B$;

(ii) $AA^{\textcircled{\#}}(BA^{\textcircled{\#}}B - A) = 0$ i $AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}}$;

(iii) $A^{\textcircled{\#}}(BA^{\textcircled{\#}}B - A) = 0$ i $AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}}$;

(iv) $A = BA^{\textcircled{\#}}B$ i $AA^{\textcircled{\#}} = BA^{\textcircled{\#}}$.

4.3 Jezgarni-EP inverz proizvoda i razlike dva operatora

Pod pretpostavkom da je $A \leq^{\textcircled{D}} B$, posmatramo jezgarni-EP inverz proizvoda i razlike operatora A i B u ovoj sekciji.

Najpre izučavamo potrebne i dovoljne uslove da bi važilo $A^{\textcircled{D}} \leq^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}}$ kada je $A \leq^{\textcircled{D}} B$.

Teorema 4.3.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\textcircled{D}} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A^{\textcircled{D}} \leq^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}}$;

(ii) $A^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}} = B^{\textcircled{D}} A^{\textcircled{D}}$;

(iii) $(A^{\textcircled{D}})^2 = A^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}}$.

Dokaz. Prema Lemi 4.2.1, $A \leq^{\textcircled{D}} B$ implicira da u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$, može biti zapisano

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix},$$

gde je $k = ind(A)$, $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ je invertibilan i $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan.

Znamo da Drejzinova invertibilnost operatora B implicira Drejzinovu invertibilnost operatora B_3. Iz [43, Lemma 2.3],

$$A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 B_3^{\textcircled{D}} \\ 0 & B_3^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Uočimo da važi:

$$A^{\textcircled{D}} (A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B^{\textcircled{D}} (A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}}.$$

Zbog

$$(A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad (A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} I & -A_2 B_3^{\textcircled{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} A^{\textcircled{D}} = (A^{\textcircled{D}})^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}}$ važi ako i samo ako je $A_2 B_3^{\textcircled{D}} = 0$. Dakle, (i) je ekvivalentno sa $A_2 B_3^{\textcircled{D}} = 0$.

Iz

$$A^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & -A_1^{-2} A_2 B_3^{\textcircled{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B^{\textcircled{D}} A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $A^{\textcircled{D}} B^{\textcircled{D}} = B^{\textcircled{D}} A^{\textcircled{D}}$ ekvivalentno sa $A_2 B_3^{\textcircled{D}} = 0$, pa važi i sa (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Kako je

$$(A^{\oplus})^2 = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(A^{\oplus})^2 = A^{\oplus}B^{\oplus}$ je ekvivalentno sa $A_2B_3^{\oplus} = 0$, tj. (i). $\square$

U slučaju da je $A \leq^{\oplus} B$, predstavljamo ekvivalentne uslove da važi zakon direktnog redosleda: $(AB)^{\oplus} = A^{\oplus}B^{\oplus}$. Primetimo da je $(AB)^{\oplus} = A^{\oplus}B^{\oplus}$ povezano sa zakonom obrnutog redosleda $(AB)^{\oplus} = B^{\oplus}A^{\oplus}$.

Teorema 4.3.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\oplus} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(AB)^{\oplus} = A^{\oplus}B^{\oplus}$;

(ii) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$, $(AB)^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$ i $AA^{\oplus}B^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$;

(iii) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$, $(AB)^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$ i $A^{\oplus}B^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$;

(iv) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$, $(AB)^{\oplus} = B^{\oplus}A^{\oplus}$ i $AA^{\oplus}B^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$;

(v) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$, $(AB)^{\oplus} = B^{\oplus}A^{\oplus}$ i $A^{\oplus}B^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$.

Dokaz. Primenjujući Lemu 4.2.1, iz pretpostavke da je $A \leq^{\oplus} B$, imamo reprezentacije u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix},$$

gde je $k = ind(A)$, $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ je invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]^D$. Pošto je

$$AB = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 + A_2B_3 \\ 0 & A_3B_3 \end{bmatrix},$$

Drejzinova invertibilnost od AB implicira Drejzinovu invertibilnost od A_3B_3. Koristeći [43, Lemma 2.3], sledi

$$A^{\oplus} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B^{\oplus} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_3^{\oplus} \\ 0 & B_3^{\oplus} \end{bmatrix}$$

i

$$(AB)^{\oplus} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & -A_1^{-2}(A_1A_2 + A_2B_3)(A_3B_3)^{\oplus} \\ 0 & (A_3B_3)^{\oplus} \end{bmatrix}.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Evidentno,

$$A^{\oplus}B^{\oplus} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & -A_1^{-2}A_2B_3^{\oplus} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $(AB)^{\textcircled{D}} = A^{\textcircled{D}}B^{\textcircled{D}}$ važi ako i samo ako je $(A_3B_3)^{\textcircled{D}} = 0$ i $A_2B_3^{\textcircled{D}} = 0$.

Kako je

$$(AB)^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-2}(A_1A_2 + A_2B_3)(A_3B_3)^{\textcircled{D}} \\ 0 & (A_3B_3)^{\textcircled{D}} \end{bmatrix},$$

$(AB)^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = 0$ je ekvivalentno sa $(A_3B_3)^{\textcircled{D}} = 0$.
Jednakost

$$AA^{\textcircled{D}}B^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

implicira $AA^{\textcircled{D}}B^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = 0$ ako i samo ako je $A_2B_3^{\textcircled{D}} = 0$. Dakle, tvrđenja (i) i (ii) jesu ekvivalentna.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Direktnim izračunavanjem i jednakošću $A^{\textcircled{D}} = A^{\textcircled{D}}AA^{\textcircled{D}}$, pokazuje se ova ekvivalencija.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Koristeći

$$B^{\textcircled{D}}A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo da $(AB)^{\textcircled{D}} = B^{\textcircled{D}}A^{\textcircled{D}}$ važi ako i samo ako je $(A_3B_3)^{\textcircled{D}} = 0$. Kao u delu (i) $\Leftrightarrow$ (ii), može se pokazati da je $AA^{\textcircled{D}}B^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = 0$ ako i samo ako je $A_2B_3^{\textcircled{D}} = 0$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Ovo sledi kao i (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). $\square$

Iz [90, Theorem 2.10], $A \leq^{\textcircled{\#}} B$ implicira $(AB)^{\textcircled{\#}} = B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}} = (BA)^{\textcircled{\#}}$. Na osnovu ove činjenice, Teorema 4.3.2 daje sledeće karakteristike zakona direktnog redosleda

$$(AB)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}.$$

Posledica 4.3.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ takve da je $A \leq^{\textcircled{\#}} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $AB \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(AB)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$;

(ii) $AB \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $AA^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}(I - AA^{\textcircled{\#}}) = 0$;

(iii) $AB \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}(I - AA^{\textcircled{\#}}) = 0$;

(iv) $AB \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $B^{\textcircled{\#}}A^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$;

(v) $BA \in \mathcal{B}(X)^{\#}$ i $(BA)^{\textcircled{\#}} = A^{\textcircled{\#}}B^{\textcircled{\#}}$.

Interesantno je da sledeći rezultat sličan Teoremi 4.3.2 važi za $(BA)^{\textcircled{D}} = B^{\textcircled{D}}A^{\textcircled{D}}$, pod istom pretpostavkom $A \leq^{\textcircled{D}} B$.

Teorema 4.3.3. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\textcircled{D}} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(BA)^{\textcircled{D}} = B^{\textcircled{D}}A^{\textcircled{D}}$;

(ii) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$, $(BA)^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = 0$ i $AA^{\textcircled{D}}B^{\textcircled{D}}(I - AA^{\textcircled{D}}) = 0$;

(iii) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$, $(BA)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(iv) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$, $(BA)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ i $AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(v) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$, $(BA)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ i $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$.

Dokaz. Koristeći matrične reprezentacije za A i B kao u Lemi 4.2.1, dobija se

$$BA = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 + A_2A_3 \\ 0 & B_3A_3 \end{bmatrix}$$

i

$$(BA)^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-2} & -A_1^{-2}(A_1A_2 + A_2A_3)(B_3A_3)^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & (B_3A_3)^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

Završavamo ovaj dokaz kao u Teoremi 4.3.2. □

Koristeći Teoremu 4.3.1 i Teoremu 4.3.2, dokazujemo ekvivalencije između zakona direktnog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$ i zakona obrnutog redosleda $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$.

Posledica 4.3.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ i $A^{\textcircled{\dagger}} \leq^{\textcircled{\dagger}} B^{\textcircled{\dagger}}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(AB)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(iii) $AB \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(AB)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$.

Dokaz. Teorema 4.3.1 i pretpostavka $A^{\textcircled{\dagger}} \leq^{\textcircled{\dagger}} B^{\textcircled{\dagger}}$ impliciraju da je $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$. Ostali deo dokaza sledi iz Teoreme 4.3.2. □

Slično, iz Teoreme 4.3.1 i Teoreme 4.3.3, dobijaju se sledeći rezultati za jezgarni-EP inverz proizvoda BA.

Posledica 4.3.3. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ i $A^{\textcircled{\dagger}} \leq^{\textcircled{\dagger}} B^{\textcircled{\dagger}}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(BA)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}A^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(BA)^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(iii) $BA \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(BA)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}$.

U slučaju da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$, istražujemo ekvivalentne uslove za $(B - A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}} - A^{\textcircled{\dagger}}$.

Teorema 4.3.4. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ takve da je $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(B - A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}} - A^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}})$;

(iii) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$, $AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}$ i $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$;

(iv) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$, $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = (A^{\textcircled{\dagger}})^2$ i $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$;

(v) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$, $AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$;

(vi) $B - A \in \mathcal{B}(X)^D$, $A^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$.

Dokaz. Za $k = ind(A)$, u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$, Lema 4.2.1 i $A \leq^{\textcircled{\dagger}} B$ impliciraju

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]^D$. Koristeći [43, Lemma 2.3], sledi

$$A^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_3^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

Činjenica je da $B - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_3 - A_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(X)^D$ implicira $B_3 - A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]^D$ i

$$(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (B_3 - A_3)^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix}.$$

Dakle, tvrđenje (i), tj. $(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}} - A^{\textcircled{\dagger}}$ je ekvivalentno sa $A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} = 0$ i $(B_3 - A_3)^{\textcircled{\dagger}} = B_3^{\textcircled{\dagger}}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Na osnovu

$$B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_3^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_3^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix},$$

$(B-A)^{\textcircled{\dagger}} = B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}})$ važi ako i samo ako je $A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} = 0$ i $(B_3 - A_3)^{\textcircled{\dagger}} = B_3^{\textcircled{\dagger}}$, što je ekvivalentno sa (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Primetimo da iz

$$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & B_3^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}$ važi ako i samo ako je $A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} = 0$.

Kako je

$$(I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_3^{\textcircled{\dagger}} \end{bmatrix},$$

$(B - A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$ važi ako i samo ako je $(B_3 - A_3)^{\textcircled{\dagger}} = B_3^{\textcircled{\dagger}}$. Dakle, tvrđenja (i) i (iii) jesu ekvivalentna.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Ova ekvivalencija sledi na osnovu jednakosti $A^{\textcircled{\dagger}} = A(A^{\textcircled{\dagger}})^2$.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Pošto je

$$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{-1}A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$AA^{\textcircled{\dagger}}B^{\textcircled{\dagger}}(I - AA^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ ako i samo ako je $A_2B_3^{\textcircled{\dagger}} = 0$. Kao u delu (i) $\Leftrightarrow$ (iii), može se videti da je $(B - A)^{\textcircled{\dagger}} = (I - AA^{\textcircled{\dagger}})B^{\textcircled{\dagger}}$ ekvivalentno sa $(B_3 - A_3)^{\textcircled{\dagger}} = B_3^{\textcircled{\dagger}}$.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi): Ova ekvivalencija je očigledna. $\square$

Poglavlje 5

m-slabo grupna ortogonalnost za operatore

5.1 Osnovna definicija m-slabo grupnog inverza

Jedan od najvažnijih uopštenih inverza je grupni inverz, koji se primenjuje u rešavanju diferencijalnih jednačina i mnogih drugih problema, na primer u lancu Markova [3].

Slabo grupni inverz za kvadratne matrice sa proizvoljnim indeksom je definisan kao uopštenje grupnog inverza [84]. U radovima [64, 84], za $A \in B(X)^D$, dokazan je izraz za slabo grupni inverz:

$$A^{\textcircled{w}} = (A^{\textcircled{D}})^2 A.$$

U slučaju kada je $ind(A) = 1$, slabo grupni inverz se redukuje na grupni inverz. Mnoge osobine slabo grupnog inverza su istražene u [85, 91].

m-slabo grupni inverz je uopštenje slabo grupnog inverza, koje je definisano u [92]. Za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i $A \in B(X)^D$, m-slabo grupni inverz od A je jedinstveni operator $A^{\textcircled{w},m}$ koji zadovoljava sistem jednačina:

$$AB = (A^{\textcircled{D}})^m A^m \quad \text{i} \quad AB^2 = B.$$

Poznato je da za m-slabo grupni inverz važi:

$$A^{\textcircled{w},m} = (A^{\textcircled{D}})^{m+1} A^m$$

i on je spoljašnji inverz od A, tj.

$$A^{\textcircled{w},m} A A^{\textcircled{w},m} = A^{\textcircled{w},m}.$$

Takođe,

$$A(A^{\textcircled{w},m})^2 = A^{\textcircled{w},m}.$$

U slučaju da je $m = 0$, m-slabo grupni inverz se redukuje na jezgarni-EP inverz. Ako je $m = 1$, m-slabo grupni inverz je jednak slabo grupnom inverzu. Za primenu i osobine m-slabo grupnog inverza možete pogledati radove [31, 36, 40, 61, 63].

m-slabo grupna binarna relacija je istražena za operatore u [33] kao uopštenje jezgarnog-EP pre-uređenja za operatore. Za $A, B \in B(X)^D$ i $m \in N$, kažemo da je A ispod B u odnosu na m-slabo grupnu relaciju (označavamo sa $A \leq^{ⓦ,m} B$) ako je

$$A^{ⓦ,m}B = A^{ⓦ,m}A \qquad \text{i} \qquad BA^{ⓦ,m} = AA^{ⓦ,m}.$$

Takođe, u [33], kaže se da je A ispod B u odnosu na slabo grupnu relaciju (označimo sa $A \leq^{ⓦ} B$) ako je

$$A^{ⓦ}B = A^{ⓦ}A \quad \text{i} \quad BA^{ⓦ} = AA^{ⓦ}.$$

Pomoću m-slabo grupnog inverza kao uopštenja jezgarnog-EP inverza, pojam m-slabo grupne ortogonalnosti je istražen u radu [76] i na taj način je uopšten pojam jezgarne-EP ortogonalnosti. Različite osobine i karakteristike m-slabo grupne ortogonalnosti su date u nastavku.

Matrične forme m-slabo grupno ortogonalnih operatora su proučavane.
Proučavana je i veza m-slabo grupne binarne relacije sa m-slabo grupnom ortogonalnošću.

Za jezgarno-EP ortogonalne operatore, predstavljeni su ekvivalentni uslovi da bi važila aditivnost $(A + B)^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m} + B^{ⓦ,m}$.

Kao posledice, dobijaju se rezultati za slabo grupnu ortogonalnost, slabo grupnu relaciju i slabo grupnu aditivnost.

5.2 m-slabo grupna ortogonalnost

m-slabo grupna ortogonalnost je istražena u ovoj sekciji za operatore kao uopštenje jezgarne-EP ortogonalnosti.

Definicija 5.2.1. Za $A, B \in B(X)^D$ i $m \in \mathbb{N}$, kaže se da je A m-slabo grupno ortogonalno sa B (označimo sa $A \perp_{ⓦ,m} B$) ako je

$$A^{ⓦ,m} B = 0 \qquad \text{i} \qquad BA^{ⓦ,m} = 0.$$

U slučaju da je $m = 1$ u Definiciji 5.2.1, definiše se slabo grupna ortogonalnost.

Definicija 5.2.2. Za $A, B \in B(X)^D$, kaže se da je A slabo grupno ortogonalno sa B (označeno sa $A \perp_{ⓦ} B$) ako je

$$A^{ⓦ} B = 0 \qquad \text{i} \qquad BA^{ⓦ} = 0.$$

Sledi predstavljanje novih karakteristika m-slabo grupne ortogonalnosti.

Teorema 5.2.1. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $m \in \mathbb{N}$. Onda sledeća tvrđenja jesu ekvivalentna:

(i) $A \perp_{ⓦ,m} B$;

(ii) $A^{ⓦ,m} B$ i $BA^{ⓦ,m}$ su idempotenti i $A^{ⓦ,m}(A + B)A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}$;

(iii) $A^{ⓦ,m} B = BA^{ⓦ,m}$ i $A^{ⓦ,m}(A + B)A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}$;

(iv) $B = (I - AA^{ⓦ,m})G(I - A^{ⓦ,m}A)$, za proizvoljno $G \in B(X)$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\wedge$ (iii): Iz $A \perp_{ⓦ,m} B$, $A^{ⓦ,m} B = 0$ i $BA^{ⓦ,m} = 0$, iz čega sledi da su $A^{ⓦ,m} B$ i $BA^{ⓦ,m}$ idempotenti.

Takođe, iz $A^{ⓦ,m} A A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}$,

$$A^{ⓦ,m}(A + B)A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m} A A^{ⓦ,m} + A^{ⓦ,m} B A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Kako je $A^{ⓦ,m} A A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}$, sledi

$$A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}(A + B)A^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m} + A^{ⓦ,m} B A^{ⓦ,m}.$$

Dakle, $A^{ⓦ,m} B A^{ⓦ,m} = 0$, pa je

$$A^{ⓦ,m} B = (A^{ⓦ,m} B)^2 = 0$$

i

$$BA^{ⓦ,m} = (BA^{ⓦ,m})^2 = 0.$$

Prema tome, $A \perp_{\circledast,m} B$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Iz uslova u (iii), imamo da je

$$A^{\circledast,m} = A^{\circledast,m}(A+B)A^{\circledast,m} = A^{\circledast,m} + (A^{\circledast,m})^2 B,$$

iz čega sledi da je $(A^{\circledast,m})^2 B = 0$. Na osnovu toga, iz $A(A^{\circledast,m})^2 = A^{\circledast,m}$ sledi

$$A^{\circledast,m} B = A(A^{\circledast,m})^2 B = 0$$

i

$$BA^{\circledast,m} = A^{\circledast,m} B = 0.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iv): Jednačina $A^{\circledast,m} B = 0$ ima rešenje, na osnovu $A \in A^{\circledast,m}\{1\}$ i [3, p. 52], u obliku

$$B = (I - AA^{\circledast,m})H, \tag{5.1}$$

za proizvoljno $H \in \mathcal{B}(X)$. Kada (5.1) zamenimo u $BA^{\circledast,m} = 0$, onda sledi

$$(I - AA^{\circledast,m})HA^{\circledast,m} = 0. \tag{5.2}$$

Sada, iz $I - AA^{\circledast,m} \in (I - AA^{\circledast,m})\{1\}$ i [3, p. 52],

$$H = G - (I - AA^{\circledast,m})GA^{\circledast,m}A, \tag{5.3}$$

za proizvoljno $G \in \mathcal{B}(X)$. Jednakosti (5.1) i (5.3) daju

$$B = (I - AA^{\circledast,m})G(I - A^{\circledast,m}A).$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Ako je $B = (I - AA^{\circledast,m})G(I - A^{\circledast,m}A)$, za proizvoljno $G \in B(X)$, izračunavamo da je $A^{\circledast,m}B = 0$ i $BA^{\circledast,m} = 0$. $\square$

Iz Teoreme 5.2.1, dobijaju se karakteristike slabo grupne ortogonalnosti.

Posledica 5.2.1. Neka je $A, B \in B(X)^D$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \perp_{\circledast} B$;

(ii) $A^{\circledast}B$ i $BA^{\circledast}$ su idempotenti i $A^{\circledast}(A+B)A^{\circledast} = A^{\circledast}$;

(iii) $A^{\circledast}B = BA^{\circledast}$ i $A^{\circledast}(A+B)A^{\circledast} = A^{\circledast}$;

(iv) $B = (I - AA^{\circledast})G(I - A^{\circledast}A)$, za proizvoljno $G \in B(X)$.

Potrebni i dovoljni uslovi za $A^{\circledast,m}B = 0$ su predstavljeni sada.

Lema 5.2.1. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $ind(A) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A^{\textcircled{w},m}B = 0$;

(ii) $A^{\textcircled{\dagger}}A^mB = 0$;

(iii) $(A^k)^{\dagger}A^mB = 0$;

(iv) $(A^k)^*A^mB = 0$;

(v) $R(B) \subseteq N(A^{\textcircled{w},m})$;

(vi) $R(B) \subseteq N((A^k)^*A^m)$.

Dokaz. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Prema [63, Lemma 2.1],

$$A^{\textcircled{w},m} = (A^D)^{m+1}A^k(A^k)^{\dagger}A^m.$$

Koristeći $A^{\textcircled{\dagger}} = A^DA^k(A^k)^{\dagger}$, imamo sledeće:

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{w},m}B = 0 &\Longleftrightarrow (A^D)^{m+1}A^k(A^k)^{\dagger}A^mB = 0 \\ &\Longleftrightarrow A^DA^k(A^k)^{\dagger}A^mB = 0 \\ &\Longleftrightarrow A^{\textcircled{\dagger}}A^mB = 0. \end{aligned}$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Iz osobina jezgarnog-EP inverza, slede ekvivalencije:

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger}}A^mB = 0 &\Longleftrightarrow AA^DA^k(A^k)^{\dagger}A^mB = 0 \\ &\Longleftrightarrow A^k(A^k)^{\dagger}A^mB = 0 \\ &\Longleftrightarrow (A^k)^{\dagger}A^mB = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv): Jasno je iz osobina Mur-Penrouzovog inverza.
(i) $\Longleftrightarrow$ (v) $\Longleftrightarrow$ (vi): Očigledno je zbog $N(A^{\textcircled{w},m}) = N((A^k)^*A^m)$ iz [31]. $\square$

Mi takođe izučavamo ekvivalentne uslove za $BA^{\textcircled{w},m} = 0$.

Lema 5.2.2. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $ind(A) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $BA^{\textcircled{w},m} = 0$;

(ii) $BA^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(iii) $BA^D = 0$;

(iv) $BA^k = 0$;

(v) $R(A^{\textcircled{w},m}) \subseteq N(B)$;

(vi) $R(A^k) \subseteq N(B)$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Primenjujući $A^{ⓦ,m} = (A^D)^{m+1}A^k(A^k)^\dagger A^m$, $BA^{ⓦ,m} = 0$ je ekvivalentno sa $B(A^D)^{m+1}A^k(A^k)^\dagger A^m = 0$, što daje

$$BA^DA^k = B(A^D)^{m+1}A^kA^m = B(A^D)^{m+1}A^k(A^k)^\dagger A^mA^k = 0.$$

Kako je $A^{Ⓓ} = A^DA^k(A^k)^\dagger$, sledi da je

$$BA^{Ⓓ} = BA^DA^k(A^k)^\dagger = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Primetimo da $BA^{Ⓓ} = 0$ implicira

$$BA^{ⓦ,m} = B(A^{Ⓓ})^{m+1}A^m = 0.$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Ova ekvivalencija sledi iz $A^{Ⓓ} = A^DA^k(A^k)^\dagger$.
Ostalo je jasno. $\square$

Ako se kombinuju uslovi Leme 5.2.1 i Leme 5.2.2, može se okarakterisati m-slabo grupna ortogonalnost.

Teorema 5.2.2. Neka je $A, B \in B(X)^D$, $m \in N$ i $ind(A) = k$. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $A \perp_{ⓦ,m} B$;

(ii) $A^{Ⓓ}A^mB = 0$ i $BA^{Ⓓ} = 0$;

(iii) $(A^k)^\dagger A^mB = 0$ i $BA^D = 0$;

(iv) $(A^k)^*A^mB = 0$ i $BA^k = 0$;

(v) $R(B) \subseteq N(A^{ⓦ,m})$ i $R(A^{ⓦ,m}) \subseteq N(B)$;

(vi) $R(B) \subseteq N((A^k)^*A^m)$ i $R(A^k) \subseteq N(B)$.

Posledično, mogu se dobiti karakteristike za slabo grupnu ortogonalnost.

Posledica 5.2.2. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $ind(A) = k$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \perp_{ⓦ} B$;

(ii) $A^{Ⓓ}AB = 0$ i $BA^{Ⓓ} = 0$;

(iii) $(A^k)^\dagger AB = 0$ i $BA^D = 0$;

(iv) $(A^k)^*AB = 0$ i $BA^k = 0$;

(v) $R(B) \subseteq N(A^{ⓦ})$ i $R(A^{ⓦ}) \subseteq N(B)$;

(vi) $R(B) \subseteq N((A^k)^*A)$ i $R(A^k) \subseteq N(B)$.

Pretpostavka $A \perp_{ⓦ,m} B$ implicira sledeće jednakosti vezane za proizvode nekih idempotenata.

Lema 5.2.3. Neka su $A, B \in B(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $A \perp_{ⓦ,m} B$. Onda, sledeća tvrđenja važe:

(i) $B^D B A^D A = 0$;

(ii) $AA^{ⓦ,m} BB^{ⓦ,m} = 0$;

(iii) $B^{ⓦ,m} BA^{ⓦ,m} A = 0$.

Dokaz. (i) $BA^D BA^D A = 0$ sledi iz $BA^D = 0$, što je dokazano u Lemi 5.2.2.

(ii) $AA^{ⓦ,m} BB^{ⓦ,m} = 0$ sledi iz $A^{ⓦ,m} B = 0$.

(iii) $B^{ⓦ,m} BA^{ⓦ,m} A = 0$ sledi iz $BA^{ⓦ,m} = 0$. □

Sledeća matrična forma Drejzin invertibilnog operatora je predstavljena u [54], a reprezentacija njegovog m-slabo grupnog inverza u radu [31].

Lema 5.2.4. Ako je $A \in B(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $ind(A) = k$, postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

gde je $A_1 \in B(R(A^k))$ invertibilan i $A_3 \in B(N((A^k)^*))$ je nilpotentan. Dodatno,

(i) $A^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(ii) $AA^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} I & A_1^{-m} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(iii) $A^{ⓦ,m} A = \begin{bmatrix} I & A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m} A_1^j A_2 A_3^{m-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dokaz. Da jednakost (5.4) važi sledi iz [54, Corollary 2.2]. Izrazi (i), (ii) i (iii) su dokazani u [31]. □

Matrične forme operatora A i B koji zadovoljavaju $A \perp_{ⓦ,m} B$ su date.

Teorema 5.2.3. Neka je $A, B \in B(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $ind(A) = k$. Onda sledeća tvrđenja jesu ekvivalentna:

(i) $A \perp_{ⓦ,m} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-m} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} B_4 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in B(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in B(N((A^k)^*))$ je nilpotentan i $B_4 \in B(N((A^k)^*))^D$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Neka A ima formu kao u (5.4) u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ i

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^k) \\ N((A^k)^* \end{bmatrix}.$$

Onda $A^{ⓦ,m}$ jeste predstavljeno kao u Lemi 5.2.4 (i). Kada uslov $A \perp_{ⓦ,m} B$ važi, onda je

$$0 = BA^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 A_1^{-1} & B_1 A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ B_3 A_1^{-1} & B_3 A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \end{bmatrix},$$

što implicira $B_1 = 0$ i $B_3 = 0$. Iz

$$0 = A^{ⓦ,m} B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & A_1^{-1} B_2 + A_1^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} B_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dobija se da je $B_2 = -A_1^{-m} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} B_4$. Tako da, može se koristiti sledeća matrična forma operatora B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-m} \sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} B_4 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Ovo je jasno iz direktnih izračunavanja. $\square$

Teorema 5.2.3 daje sledeće ekvivalentne uslove za $A \perp_{\textcircled{w}} B$.

Posledica 5.2.3. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $ind(A) = k$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \perp_{\textcircled{w}} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -A_1^{-1}A_2B_4 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in B(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in B(N((A^k)^*))$ je nilpotentan i $B_4 \in B(N((A^k)^*))^D$.

Sledeće karakterizacije m-slabo grupne relacije mogu biti potvrđene kao u Lemi 5.2.1 i Lemi 5.2.2.

Teorema 5.2.4. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$, $m \in \mathbb{N}$ i $ind(A) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{w},m} B$;

(ii) $A^{\textcircled{D}} A^m B = A^{\textcircled{D}} A^{m+1}$ i $BA^{\textcircled{D}} = AA^{\textcircled{D}}$;

(ii) $(A^k)^\dagger A^m B = (A^k)^\dagger A^{m+1}$ i $BA^D = AA^D$;

(iv) $(A^k)^* A^m B = (A^k)^* A^{m+1}$ i $BA^k = A^{k+1}$;

(v) $R(B - A) \subseteq N(A^{\textcircled{w},m})$ i $R(A^{\textcircled{w},m}) \subseteq N(B - A)$;

(vi) $R(B - A) \subseteq N((A^k)^* A^m)$ i $R(A^k) \subseteq N(B - A)$.

Posledično, dobijaju se rezultati za slabo grupnu relaciju.

Posledica 5.2.4. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $ind(A) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{w}} B$;

(ii) $A^{\textcircled{D}} AB = A^{\textcircled{D}} A^2$ i $BA^{\textcircled{D}} = AA^{\textcircled{D}}$;

(ii) $(A^k)^\dagger AB = (A^k)^\dagger A^2$ i $BA^D = AA^D$;

(iv) $(A^k)^* AB = (A^k)^* A^2$ i $BA^k = A^{k+1}$;

(v) $R(B - A) \subseteq N(A^{\textcircled{w}})$ i $R(A^{\textcircled{w}}) \subseteq N(B - A)$;

(vi) $R(B - A) \subseteq N((A^k)^* A)$ i $R(A^k) \subseteq N(B - A)$.

Karakterišemo $A\perp_{\textcircled{w},m}B$ pomoću m-slabo grupne relacije.

Teorema 5.2.5. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $m \in \mathbb{N}$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{w},m} A + B$;

(ii) $A\perp_{\textcircled{w},m}B$;

(iii) $A \leq^{\textcircled{w},m} A - B$.

Dokaz. Posmatramo da je

$$\begin{aligned} A \leq^{\textcircled{w},m} A+B &\Longleftrightarrow (A+B)A^{\textcircled{w},m} = AA^{\textcircled{w},m} \qquad \text{i} \qquad A^{\textcircled{w},m}(A+B) = A^{\textcircled{w},m}A \\ &\Longleftrightarrow BA^{\textcircled{w},m} = 0 \qquad \text{i} \qquad A^{\textcircled{w},m}B = 0 \Longleftrightarrow A\perp_{\textcircled{w},m}B \\ &\Longleftrightarrow A^{\textcircled{w},m}(A-B) = A^{\textcircled{w},m}A \qquad \text{i} \qquad (A-B)A^{\textcircled{w},m} = AA^{\textcircled{w},m} \\ &\Longleftrightarrow A \leq^{\textcircled{w},m} (A-B) \end{aligned}$$

□

U slučaju da je $A \leq^{\textcircled{w},m} B$, iz [33], postoje matrične forme operatora A i B i sada istražujemo formu od $B^{\textcircled{w},m}$.

Teorema 5.2.6. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $m \in \mathbb{N}$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\textcircled{w},m} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 + A_1^{-m}\sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j}(A_3 - B_4) \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in B(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in B(N((A^k)^*))$ je nilpotentan i $B_4 \in B(N((A^k)^*))^D$.

Štaviše,

$$B^{\textcircled{w},m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \sum\limits_{i=0}^{m-1} A_1^{-i-2}B_2B_4^i - \sum\limits_{i=0}^{m} A_1^{-(m+1)+i}B_2(B_4^{\textcircled{D}})^{i+1}B_4^m \\ 0 & B_4^{\textcircled{w},m} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Operator A može biti zapisan kao u (5.4) u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$ i $A^{\textcircled{w},m}$ je predstavljen u Lemi 5.2.4 (i). Iz [33], možemo koristiti matričnu formu operatora B:

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $B_2 = A_2 + A_1^{-m}\sum_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j}(A_3 - B_4)$. Pretpostavka $B \in B(X)^D$ daje Drejzinovu invertibilnost operatora B_4.

Sada, izračunavamo $B^{\circledW,m}$. Primenjujući [43, Lemma 2.3], imamo da je:

$$B^{\circledD} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}B_2B_4^{\circledD} \\ 0 & B_4^{\circledD} \end{bmatrix}.$$

Sada računamo:

$$(B^{\circledD})^{m+1} = \begin{bmatrix} A_1^{-(m+1)} & -\sum_{i=0}^{m} A_1^{-(m+1)+i}B_2(B_4^{\circledD})^{i+1} \\ 0 & (B_4^{\circledD})^{m+1} \end{bmatrix}$$

i

$$B^m = \begin{bmatrix} A_1^m & \sum_{i=0}^{m-1} A_1^{m-i-1}B_2B_4^i \\ 0 & B_4^m \end{bmatrix}.$$

Štaviše,

$$B^{\circledW,m} = (B^{\circledD})^{m+1}B^m = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \sum_{i=0}^{m-1} A_1^{-i-2}B_2B_4^i - \sum_{i=0}^{m} A_1^{-(m+1)+i}B_2(B_4^{\circledD})^{i+1}B_4^m \\ 0 & B_4^{\circledW,m} \end{bmatrix}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Ovaj deo dokaza sledi iz elementarnih izračunavanja. $\square$

Kao posledica Teoreme 5.2.6, dobija se sledeći rezultat.

Posledica 5.2.5. Neka su $A, B \in B(X)^D$. Onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $A \leq^{\circledW} B$;

(ii) postoji ortogonalna suma $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 + A_1^{-1}A_2(A_3 - B_4) \\ 0 & B_4 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in B(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in B(N((A^k)^*))$ je nilpotentan i $B_4 \in B(N((A^k)^*))^D$.

Štaviše,

$$B^{\circledW} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}B_2 - \sum_{i=0}^{1} A_1^{-2+i}B_2(B_4^{\circledD})^{i+1}B_4 \\ 0 & B_4^{\circledW} \end{bmatrix}.$$

Pod pretpostavkom $A \perp_{\textcircled{D}} B$, posmatraju se potrebni i dovoljni uslovi za

$$(A+B)^{\textcircled{w},m} = A^{\textcircled{w},m} + B^{\textcircled{w},m}.$$

Teorema 5.2.7. Neka su $A, B \in B(X)^D$ i $m \in \mathbb{N}$. Ako je $A \perp_{\textcircled{D}} B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{w},m} = A^{\textcircled{w},m} + B^{\textcircled{w},m}$;

(ii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{\textcircled{w},m}(I - AA^{\textcircled{D}}) = (A^{\textcircled{w},m} + B^{\textcircled{w},m})(I - AA^{\textcircled{D}})$;

(iii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $AA^{\textcircled{D}}(A+B)^{\textcircled{w},m} = A^{\textcircled{w},m}$ i $(I - AA^{\textcircled{D}})(A+B)^{\textcircled{w},m} = B^{\textcircled{w},m}$;

(iv) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$, $A^{\textcircled{D}}(A+B)^{\textcircled{w},m} = A^{\textcircled{D}}A^{\textcircled{w},m}$ i $(I - AA^{\textcircled{D}})(A+B)^{\textcircled{w},m} = B^{\textcircled{w},m}$.

Dokaz. Koristeći [59, Theorem 2.1] i $A \perp_{\textcircled{D}} B$, za $ind(A) = k$, u odnosu na ortogonalnu sumu $X = R(A^k) \oplus N((A^k)^*)$, možemo zapisati:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(R(A^k))$ invertibilan, $A_3 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]$ je nilpotentan i $B_2 \in \mathcal{B}[N((A^k)^*)]^D$. Sada,

$$A^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{\textcircled{w},m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{\textcircled{w},m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^{\textcircled{w},m} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^{\textcircled{w},m} + B^{\textcircled{w},m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & B_2^{\textcircled{w},m} \end{bmatrix}.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Drejzinova invertibilnost operatora

$$A+B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 + B_2 \end{bmatrix}$$

implicira Drejzinovu invertibilnost operatora $A_3 + B_2$. Iz [43, Lemma 2.3], za odgovarajući operator S, imamo da je

$$(A+B)^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 (A_3 + B_2)^{\textcircled{D}} \\ 0 & (A_3 + B_2)^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}$$

i

$$(A+B)^{\textcircled{w},m} = [(A+B)^{\textcircled{D}}]^{m+1}(A+B)^m = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & S \\ 0 & (A_3 + B_2)^{\textcircled{w},m} \end{bmatrix}.$$

Zbog

$$(A+B)^{ⓦ,m}(I-AA^{ⓓ}) = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & (A_3+B_2)^{ⓦ,m} \end{bmatrix}$$

i

$$(A^{ⓦ,m}+B^{ⓦ,m})(I-AA^{ⓓ}) = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & B_2^{ⓦ,m} \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $(A+B)^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}+B^{ⓦ,m}$ ako i samo ako je $S = A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j}$ i $(A_3+B_2)^{ⓦ,m} = B_2^{ⓦ,m}$ ako i samo ako je $(A+B)^{ⓦ,m}(I-AA^{ⓓ}) = (A^{ⓦ,m}+B^{ⓦ,m})(I-AA^{ⓓ})$.

(i) $\iff$ (iii): Iz dela (i) $\iff$ (ii) i $A(A^{ⓓ})^2 = A^{ⓓ}$, sledi

$$AA^{ⓓ}(A+B)^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$A^{ⓦ,m} = AA^{ⓓ}A^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, $AA^{ⓓ}(A+B)^{ⓦ,m} = A^{ⓦ,m}$ jeste ekvivalentno sa
$S = A_1^{-(m+1)} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_1^j A_2 A_3^{m-1-j}$.
Iz

$$(I-AA^{ⓓ})(A+B)^{ⓦ,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_3+B_2)^{ⓦ,m} \end{bmatrix},$$

$(I-AA^{ⓓ})(A+B)^{ⓦ,m} = B^{ⓦ,m}$ ako i samo ako je $(A_3+B_2)^{ⓦ,m} = B_2^{ⓦ,m}$.
Dakle, ekvivalencija tvrđenja (i) i (iii) važi.

(iii) $\iff$ (iv): Osobine jezgarnog–EP inverza impliciraju ovu ekvivalenciju. $\square$

Teorema 5.2.7 daje aditivne osobine za slabo grupni inverz.

Posledica 5.2.6. Neka su $A, B \in B(X)^D$. Ako je $A\perp_{ⓓ}B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{ⓦ} = A^{ⓦ}+B^{ⓦ}$;

(ii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $(A+B)^{ⓦ}(I-AA^{ⓓ}) = (A^{ⓦ}+B^{ⓦ})(I-AA^{ⓓ})$;

(iii) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $AA^{ⓓ}(A+B)^{ⓦ} = A^{ⓦ}$ i $(I-AA^{ⓓ})(A+B)^{ⓦ} = B^{ⓦ}$;

(iv) $A+B \in \mathcal{B}(X)^D$ i $A^{ⓓ}(A+B)^{ⓦ} = A^{ⓓ}A^{ⓦ}$ i $(I-AA^{ⓓ})(A+B)^{ⓦ} = B^{ⓦ}$.

Poglavlje 6

Jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom

6.1 Leva i desna ortogonalnost i svojstva aditivnosti

Koristeći uslove jednostranih ortogonalnosti, mnoge vrste jednostranih ortogonalnosti su definisane za matrice i operatore. U ovom poglavlju se uopštavaju mnogi od ovih rezultata za elemente prstena sa involucijom $\mathcal{R}$. U vezi sa konceptima jednostranih ortogonalnosti, slede definicije leve i desne ortogonalnosti.

Definicija 6.1.1. Element $a \in \mathcal{R}$ je levo ortogonalan sa $b \in \mathcal{R}$ (označava se sa $a \perp_l b$) ako je

$$ab = 0.$$

Element $a \in \mathcal{R}$ je desno ortogonalan sa $b \in \mathcal{R}$ (označava se sa $a \perp_r b$) ako je

$$ba = 0.$$

Kao uopštenja jezgarne ortogonalnosti i $*$-ortogonalnosti, njihove jednostrane verzije su posmatrane u [17] za matrice.

Znamo da su pojmovi jezgarne ortogonalnosti i jezgarne–EP ortogonalnosti uopšteni u [77] za operatore na jednostrane tipove jezgarnih–EP ortogonalnosti.

Cilj ovog poglavlja je da se istraže koncepti leve i desne jezgarne–EP ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom. Na ovaj način, uopštavaju se pojmovi jednostrane jezgarne–EP ortogonalnosti za operatore i jezgarne–EP ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom.

Data su mnoga svojstva levih i desnih jezgarno-EP ortogonalnih elemenata. Istražene su matrične forme jednostrano jezgarno–EP ortogonalnih elemenata.

Kao posledica, karakterišu se levo i desno jezgarno ortogonalni elementi. Takođe, proučavaju se ekvivalentni uslovi za aditivnost jezgarnog–EP inverza i Drejzinovog inverza. Rezultati predstavljeni u ovom poglavlju su dokazani u radu [79].

6.2 Nove osobine jednostranih jezgarnih–EP ortogonalnosti

U ovoj sekciji, definišu se jednostrane vrste jezgarne–EP ortogonalnosti za elemente prstena sa involucijom i na taj način se uopštavaju pojmovi jezgarne–EP ortogonalnosti za elemente u prstenu [78] i jednostrane jezgarne–EP ortogonalnosti za operatore [77].

Definicija 6.2.1. Za $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $b \in \mathcal{R}$, kažemo:

(i) a je levo jezgarno–EP ortogonalno sa b (označavamo sa $a \perp_{\textcircled{D},l} b$) ako je

$$a^{\textcircled{D}} b = 0;$$

(ii) a je desno jezgarno–EP ortogonalno sa b (označavamo sa $a \perp_{\textcircled{D},r} b$) ako je

$$b a^{\textcircled{D}} = 0.$$

Očigledno, ako je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $b \in \mathcal{R}$, $a \perp_{\textcircled{D}} b$ ako i samo ako važi $a \perp_{\textcircled{D},l} b$ i $a \perp_{\textcircled{D},r} b$. Prema tome, jezgarna-EP ortogonalnost implicira i levu i desnu jezgarnu–EP ortogonalnost, ali u opštem slučaju, iz Primera 2.2.1 vidi se da leva (ili desna) jezgarna-EP ortogonalnost ne impliciraju jezgarnu-EP ortogonalnost.

Za $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, leva (ili desna) jezgarna ortogonalnost za elemente prstena može biti definisana kao specijalan slučaj leve (ili desne) jezgarne–EP ortogonalnosti.

Definicija 6.2.2. Za $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $b \in \mathcal{R}$, kažemo:

(i) a je levo jezgarno ortogonalno sa b (označimo sa $a \perp_{\textcircled{\#},l} b$) ako je

$$a^{\textcircled{\#}} b = 0;$$

(ii) a je desno jezgarno ortogonalno sa b (označimo sa $a \perp_{\textcircled{\#},r} b$) ako je

$$b a^{\textcircled{\#}} = 0.$$

Podsetimo se da jednostrana jezgarna ortogonalnost i jednostrana $*$-ortogonalnost jesu predstavljene za matrice i operatore u [17, 77], a ovde za elemente prstena.

Definicija 6.2.3. Za $a, b \in \mathcal{R}$, kažemo da je:

(i) a levo $*$-ortogonalno sa b (označimo sa $a \perp_{*,l} b$) ako je

$$a^* b = 0;$$

(ii) a desno $*$-ortogonalno sa b (označimo sa $a\perp_{*,r}b$) ako je

$$ba^* = 0.$$

U slučaju kada je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, sledi da je $a\perp_{*,l}b$ ekvivalentno sa $a^\dagger b = 0$, a $a\perp_{*,r}b$ ako i samo ako je $ba^\dagger = 0$.

Najpre se može opisati $a\perp_{\textcircled{\dagger},l}b$ kao u [77, Lemma 2.1].

Lema 6.2.1. Ako je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $b \in \mathcal{R}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{\dagger},l}b$;

(ii) $(a^k)^\dagger b = 0$;

(iii) $(a^k)^* b = 0$ (tj. $a^k\perp_{*,l}b$);

(iv) $b^* a^k = 0$ (tj. $b\perp_{*,l}a^k$);

(v) $b^* a^{\textcircled{\dagger}} = 0$ (tj. $b\perp_{*,l}a^{\textcircled{\dagger}}$);

(vi) $b\mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\dagger}})^\circ$;

(vii) $b\mathcal{R} \subseteq [(a^k)^*]^\circ$;

(viii) $a^k\mathcal{R} \subseteq (b^*)^\circ$;

(ix) $a^{\textcircled{\dagger}}\mathcal{R} \subseteq (b^*)^\circ$.

Kada je $ind(a) = 1$ u Lemi 6.2.1, dobijaju se karakteristike za $a\perp_{\textcircled{\#},l}b$.

Posledica 6.2.1. Ako je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $b \in \mathcal{R}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{\#},l}b$;

(ii) $a^\dagger b = 0$;

(iii) $a^* b = 0$ (tj. $a\perp_{*,l}b$);

(iv) $b^* a = 0$ (tj. $b\perp_{*,l}a$);

(v) $b^\dagger a = 0$;

(vi) $b\mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\#}})^\circ$;

(vii) $b\mathcal{R} \subseteq (a^*)^\circ$;

(viii) $a\mathcal{R} \subseteq (b^*)^\circ$;

(ix) $a^{\textcircled{\#}}\mathcal{R} \subseteq (b^*)^\circ$.

Takođe, mogu se proveriti sledeći rezultati.

Lema 6.2.2. Ako su $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $k = ind(a)$ i $a \perp_{\textcircled{\dagger},l} b$, onda važi $b \perp_{\textcircled{\dagger},l} a^k$, $aa^{\textcircled{\dagger}} \perp_{\textcircled{\#}} bb^{\textcircled{\dagger}}$, $a \perp_{\textcircled{\dagger}} b^{\textcircled{\dagger}}$ i $b \perp_{\textcircled{\dagger}} a^{\textcircled{\dagger}}$.

Slično, dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi za $a \perp_{\textcircled{\dagger},r} b$ i $a \perp_{\textcircled{\#},r} b$ u prstenu.

Lema 6.2.3. Ako je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $b \in \mathcal{R}$ i $ind(a) = k$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\dagger},r} b$;

(ii) $ba^D = 0$;

(iii) $ba^k = 0$;

(iv) $(a^k)^* b^* = 0$ (tj. $b \perp_{*,r} (a^k)^*$);

(v) $a^{\textcircled{\dagger}} b^* = 0$ (tj. $a \perp_{\textcircled{\dagger},l} b^*$);

(vi) $a^{\textcircled{\dagger}} \mathcal{R} \subseteq b^\circ$;

(vii) $a^k \mathcal{R} \subseteq b^\circ$;

(viii) $b^* \mathcal{R} \subseteq (a^k)^\circ$;

(ix) $b^* \mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\dagger}})^\circ$.

Posledica 6.2.2. Ako je $a \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $b \in \mathcal{R}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\#},r} b$;

(ii) $ba^{\#} = 0$;

(iii) $ba = 0$;

(iv) $a^* b^* = 0$ (tj. $b \perp_{*,r} a^*$);

(v) $a^{\textcircled{\#}} b^* = 0$;

(vi) $a^{\textcircled{\#}} \mathcal{R} \subseteq b^\circ$;

(vii) $a \mathcal{R} \subseteq b^\circ$;

(viii) $b^* \mathcal{R} \subseteq a^\circ$;

(ix) $b^* \mathcal{R} \subseteq (a^{\textcircled{\#}})^\circ$.

Pokazuju se sledeće korisne osobine jezgarno–EP invertibilnih elemenata.

Lema 6.2.4. Neka je $b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $p = p^* = p^2 \in \mathcal{R}$. Ako je

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

onda je $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$.

Dokaz. Neka je

$$b^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Iz $b(b^{\textcircled{\dagger}})^2 = b^{\textcircled{\dagger}}$, zaključujemo da je $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $b_4 x_4^2 = x_4$. Kako je $bx = (bx)^*$ i

$$bx = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_4 x_3 & b_4 x_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

sledi $b_4 x_4 = (b_4 x_4)^*$. Iz činjenice da je $xb^{k+1} = b^k$, za neko k, sledi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_4 b_4^k b_3 & x_4 b_4^{k+1} \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_4^{k-1} b_3 & b_4^k \end{bmatrix}_{p\times p},$$

pa je i $x_4 b_4^{k+1} = b_4^k$. Zaključujemo da je $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$ i $b_4^{\textcircled{\dagger}} = x_4$. □

Sada, uvode se dekompozicije u matričnim formama za jednostrano jezgarno-EP ortogonalne elemente prstena sa involucijom.

Teorema 6.2.1. Ako su $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $ind(a) = k$ i $p = aa^{\textcircled{\dagger}}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\textcircled{\dagger},l} b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_3^k = 0$ i $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$;

(iii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{e\times e} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{41} & b_{42} \\ b_{32} & 0 & b_{43} \end{bmatrix}_{e\times e},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})^k = 0$, $b_{41} \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{43}^j = 0$, za neko j.

(iv) $b = (1 - aa^{\textcircled{\dagger}})w$, za proizvoljno $w \in \mathcal{R}$;

(v) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ je idempotent i $a^{\textcircled{\dagger}}(a+b)a^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\dagger}}$;

(vi) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ je idempotent i $a^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}} = 0$;

(vii) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ je idempotent i $aa^{\textcircled{\dagger}}ba^{\textcircled{\dagger}}a = 0$;

(viii) $a^{\textcircled{\dagger}}b$ je idempotent i $(a^k)^*ba^k = 0$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): U odnosu na $p = aa^{\textcircled{\dagger}}$, iz [14] i [43, Lemma 2.3], primetimo da a i $a^{\textcircled{\dagger}}$ imaju sledeće matrične forme:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p\times p} \qquad \text{i} \qquad a^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_3^k = 0$.

Neka je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Onda, iz pretpostavke $0 = a^{\textcircled{\dagger}}b$, imamo da je

$$0 = \begin{bmatrix} a_1^{-1}b_1 & a_1^{-1}b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Dakle, $b_1 = 0$ i $b_2 = 0$. Zbog

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p} \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}},$$

primenom Leme 6.2.4, sledi da je $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Kako je $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$, za $q = b_4b_4^{\textcircled{\dagger}}$, na osnovu [14] i [43, Lemma 2.3],

$$b_4 = \begin{bmatrix} b_{41} & b_{42} \\ 0 & b_{43} \end{bmatrix}_{q\times q},$$

gde $b_{41} \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$, $ind(b_4) = j$ i $b_{43}^j = 0$. Prema tome,

$$b_4^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} b_{41}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}.$$

Uočimo da je $1 = p + q + (1-p-q)$, $p^* = p$ i $q^* = q$. Koristeći $b_4 \in (1-p)\mathcal{R}$, $pq = pb_4b_4^{\textcircled{\dagger}} = 0$.

Takođe, $q = q^* = (b_4^{\textcircled{D}})^* b_4^* \in \mathcal{R}(1-p)$ daje $qp = 0$. Neka je $e_1 = p$, $e_2 = q$ i $e_3 = 1-p-q$. Sada je, $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $e_i e_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,3}$. Ovaj deo može biti završen na sledeći način:

$$b = b_3 + b_4 = (1-p)bp + b_4 = qbp + (1-p-q)bp + b_4$$

sa

$$\begin{aligned} b_4 &= b_{41} + b_{42} + b_{43} \\ &= q(1-p)b(1-p)q + q(1-p)b(1-p)(1-q) + (1-q)(1-p)b(1-p)(1-q) \\ &= qbq + qb(1-p-q) + (1-p-q)b(1-p-q). \end{aligned}$$

Dakle, b ima sledeću matričnu formu:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{41} & b_{42} \\ b_{32} & 0 & b_{43} \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde se označava $b_{31} = qbp$, $b_{32} = (1-p-q)bp$, $b_{41} = qbq$, $b_{42} = qb(1-p-q)$ i $b_{43} = (1-p-q)b(1-p-q)$.

Takođe,

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 + a_3 = pap + pa(1-p) + (1-p)a(1-p) \\ &= pap + paq + pa(1-p-q) + qa(1-p) + (1-p-q)a(1-p) \\ &= pap + paq + pa(1-p-q) + qaq + qa(1-p-q) \\ &+ (1-p-q)aq + (1-p-q)a(1-p-q) \end{aligned}$$

i shodno tome

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $a_1 = pap \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_{21} = paq$, $a_{22} = pa(1-p-q)$, $a_{31} = qaq$, $a_{32} = qa(1-p-q)$, $b_{33} = (1-p-q)aq$, $a_{34} = (1-p-q)a(1-p-q)$ i $(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})^k = a_3^k = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Iz

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e},$$

proveravamo da je $a^{\textcircled{D}} b = 0$. Dakle, $a \perp_{\textcircled{D},l} b$.

Ostalo sledi kao u [77, Theorem 2.1]. $\square$

Koristeći Teoremu 6.2.1, pokazuju se sledeći ekvivalentni uslovi za $a \perp_{\textcircled{\#},l} b$.

Posledica 6.2.3. Ako je $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $p = aa^{\textcircled{\#}}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\oplus, l} b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\oplus}$;

(iii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{41} & b_{42} \\ b_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $b_{41} \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$;

(iv) $b = (1 - aa^{\oplus})w$, za proizvoljno $w \in \mathcal{R}$;

(v) $a^{\oplus}b$ je idempotent i $a^{\oplus}(a+b)a^{\oplus} = a^{\oplus}$;

(vi) $a^{\oplus}b$ je idempotent i $a^{\oplus}ba^{\oplus} = 0$;

(vii) $a^{\oplus}b$ je idempotent i $aa^{\oplus}ba^{\oplus}a = 0$;

(viii) $a^{\oplus}b$ je idempotent i $a^*ba = 0$.

Istražuju se matrične forme za desno jezgarno–EP ortogonalne elemente prstena sa involucijom.

Teorema 6.2.2. Ako je $b \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^{\mathcal{D}}$, $ind(a) = k$ i $p = aa^{\mathcal{D}}$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $a \perp_{\mathcal{D}, r} b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_3^k = 0$;

(iii) $b = w(1 - a^{\mathcal{D}}a)$, za proizvoljno $w \in \mathcal{R}$;

(iv) $ba^{\mathcal{D}}$ je idempotent i $a^{\mathcal{D}}(a+b)a^{\mathcal{D}} = a^{\mathcal{D}}$;

(v) $ba^{\mathcal{D}}$ je idempotent i $a^{\mathcal{D}}ba^{\mathcal{D}} = 0$;

(vi) $ba^{\textcircled{D}}$ je idempotent i $aa^{\textcircled{D}}ba^{\textcircled{D}}a = 0$;

(vii) $ba^{\textcircled{D}}$ je idempotent i $(a^k)^* ba^k = 0$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): U skladu sa [14] i [43, Lemma 2.3], za $p = aa^{\textcircled{D}}$, je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p\times p} \qquad \text{i} \qquad a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_3^k = 0$.

Pretpostavimo da je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Onda

$$0 = ba^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} b_1 a_1^{-1} & 0 \\ b_3 a_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}$$

implicira $b_1 = 0$ i $b_3 = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Kako je

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

sledi da je $ba^{\textcircled{D}} = 0$ i shodno tome je $a\perp_{\textcircled{D},r} b$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)–(viii): Ove ekvivalencije slede iz karakteristika jezgarnog–EP inverza. $\square$

Pod dodatnim uslovom $(1 - aa^{\textcircled{D}})b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, dobijaju se novi ekvivalentni uslovi za $a\perp_{\textcircled{D},r} b$.

Teorema 6.2.3. Ako je $b \in \mathcal{R}$, $a, (1 - aa^{\textcircled{D}})b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $ind(a) = k$, $p = aa^{\textcircled{D}}$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\textcircled{D},r} b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{e\times e} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{41} & b_{42} \\ 0 & 0 & b_{43} \end{bmatrix}_{e\times e},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})^k = 0$, $b_{41} \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$ i $b_{43}^j = 0$, za neko j.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Možemo predstaviti a i b kao u delu (ii) Teoreme 6.2.2. Kako je

$$(1 - aa^{\textcircled{D}})b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p} \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}},$$

zaključujemo da je $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\scriptsize D}}$.

Dalje, za $q = b_4 b_4^{\textcircled{\scriptsize D}}$,

$$b_4 = \begin{bmatrix} b_{41} & b_{42} \\ 0 & b_{43} \end{bmatrix}_{q \times q},$$

gde je $b_{41} \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$, $b_{43}^j = 0$ i $ind(b_4) = j$.

Kao u dokazu Teoreme 6.2.1, završava se ovaj deo.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Jasno je iz

$$a^{\textcircled{\scriptsize D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e}.$$

□

Možemo okarakterisati relaciju $a\perp_{\oplus,r}b$ iz Teoreme 6.2.2 i Teoreme 6.2.3.

Posledica 6.2.4. Ako je $b \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^{\oplus}$ i $p = aa^{\oplus}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\oplus,r}b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\oplus}$;

(iii) $b = w(1 - a^{\oplus}a)$, za proizvoljno $w \in \mathcal{R}$;

(iv) $ba^{\oplus}$ je idempotent i $a^{\oplus}(a+b)a^{\oplus} = a^{\oplus}$;

(v) $ba^{\oplus}$ je idempotent i $a^{\oplus}ba^{\oplus} = 0$

(vi) $ba^{\oplus}$ je idempotent i $aa^{\oplus}ba^{\oplus}a = 0$;

(vii) $ba^{\oplus}$ je idempotent i $a^*ba = 0$.

Posledica 6.2.5. Ako je $b \in \mathcal{R}$, $a, (1 - aa^{\textcircled{\scriptsize D}})b \in \mathcal{R}^{\oplus}$ i $p = aa^{\oplus}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a\perp_{\oplus,r}b$;

(ii) postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{41} & b_{42} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $b_{41} \in (e_2\mathcal{R}e_2)^{-1}$.

6.3 Aditivnost za jezgarni–EP i Drejzinov inverz

U ovoj sekciji, predstavljaju se aditivni rezultati za jezgarni–EP inverz i Drejzinov inverz u prstenu sa involucijom.

Jednakosti $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$ mogu biti povezane sa jednostranim jezgarnim–EP ortogonalnostima na sledeći način.

Lema 6.3.1. Za $a,b\in\mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $k=ind(a)$:

(i) $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ ako i samo ako je $a\perp_{\textcircled{\dagger},l}(b+a)$ ako i samo ako je $(a+b)\mathcal{R}\subseteq[(a^k)^*]^\circ$ ako i samo ako je $aa^{\textcircled{\dagger}}(b+a)=0$ ako i samo ako je $aa^{\textcircled{\dagger}}\perp_{\textcircled{\#},l}(b+a)$;

(ii) $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$ ako i samo ako je $a\perp_{\textcircled{\dagger},r}(b+a)$ ako i samo ako je $a^k\mathcal{R}\subseteq(a+b)^\circ$ ako i samo ako je $(b+a)a^{\textcircled{\dagger}}a=0$;

(iii) $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$ ako i samo ako je $a\perp_{\textcircled{\dagger}}(b+a)$.

Dokazujemo matrične forme elemenata a i b u slučaju da je $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$.

Lema 6.3.2. Za $a,b\in\mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $k=ind(a)$ i $p=aa^{\textcircled{\#}}$:

(i) $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ ako i samo ako postoji dekompozicija jedinice $1=e_1+e_2$ sa $e_1=p$ tako da je

$$a=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{bmatrix}_{p\times p}\qquad \text{i}\qquad b=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1\in(p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_3^k=0$

(ii) $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$ ako i samo ako postoji dekompozicija jedinice $1=e_1+e_2$ sa $e_1=p$ tako da je

$$a=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{bmatrix}_{p\times p}\qquad \text{i}\qquad b=\begin{bmatrix} -a_1 & b_2\\ 0 & b_4\end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1\in(p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_3^k=0$ i $b_4\in((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{\dagger}}$. Dodatno,

$$b^{\textcircled{\dagger}}=\begin{bmatrix} -a_1^{-1} & a_1^{-1}b_2b_4^{\textcircled{\dagger}}\\ 0 & b_4^{\textcircled{\dagger}}\end{bmatrix}_{p\times p}.$$

(iii) $a^{\textcircled{\dagger}}b+a^{\textcircled{\dagger}}a=0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}}+aa^{\textcircled{\dagger}}=0$ ako i samo ako postoji dekompozicija jedinice $1=e_1+e_2$ sa $e_1=p$ i $e_2=e_2^*$ tako da je

$$a=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{bmatrix}_{p\times p}\qquad \text{i}\qquad b=\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2\\ 0 & b_4\end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_3^k = 0$ i $b_4 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{\textcircled{D}}$. Dodatno,

$$b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} -a_1^{-1} & -a_1^{-1}a_2b_4^{\textcircled{D}} \\ 0 & b_4^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Dokaz. Koristeći [14] i [43, Lemma 2.3], a i $a^{\textcircled{D}}$ su predstavljeni kao:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_3^k = 0$. Pretpostavimo da je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Ostatak sledi iz [43, Lemma 2.3] kao dokaz u [77, Lemma 3.2]. □

Pod pretpostavkama da je $a^{\textcircled{D}}b + a^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{D}} + aa^{\textcircled{D}} = 0$, istražuju se sada karakteristike za $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$.

Teorema 6.3.1. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ zadovoljavaju $a^{\textcircled{D}}b + a^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{D}} + aa^{\textcircled{D}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $(a+b)^{\textcircled{D}} = a^{\textcircled{D}} + b^{\textcircled{D}}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ i $(a+b)^{\textcircled{D}} = b^{\textcircled{D}}(1 - aa^{\textcircled{D}})$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(a+b)^{\textcircled{D}} = (1 - aa^{\textcircled{D}})b^{\textcircled{D}}$ i $a^{\textcircled{D}} = -aa^{\textcircled{D}}b^{\textcircled{D}}$;

(iv) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$, $(a+b)^{\textcircled{D}} = (1 - aa^{\textcircled{D}})b^{\textcircled{D}}$ i $(a^{\textcircled{D}})^2 = -a^{\textcircled{D}}b^{\textcircled{D}}$.

Dokaz. Primenjujući Lemu 6.3.2, pokazuje se ovaj rezultat kao [77, Theorem 3.2]. □

Sada su predstavljeni aditivni rezultati za jezgarni inverz kao posledica Teoreme 6.3.1.

Posledica 6.3.1. Ako $a, b \in R^{\textcircled{\#}}$ zadovoljavaju $a^{\textcircled{\#}}b + a^{\textcircled{\#}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{\#}} + aa^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in R^{\textcircled{\#}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}} + b^{\textcircled{\#}}$;

(ii) $a + b \in R^{\textcircled{\#}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\#}} = b^{\textcircled{\#}}(1 - aa^{\textcircled{\#}})$;

(iii) $a + b \in R^{\textcircled{\#}}$ i $a^{\textcircled{\#}} = -aa^{\textcircled{\#}}b^{\textcircled{\#}}$;

(iv) $a + b \in R^{\textcircled{\#}}$ i $(a^{\textcircled{\#}})^2 = -a^{\textcircled{\#}}b^{\textcircled{\#}}$.

Pod istim pretpostavkama kao u Teoremi 6.3.1, dobijaju se novi aditivni rezultati za Drejzinov inverz.

Teorema 6.3.2. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{D}}$ zadovoljavaju $a^{\textcircled{D}}b + a^{\textcircled{D}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{D}} + aa^{\textcircled{D}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^D$ i $(a + b)^D = a^D + b^D$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^D$ i $(a + b)^D = b^D(1 - aa^D)$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^D$, $(a + b)^D = (1 - aa^{\textcircled{D}})b^D$ i $a^D = -aa^{\textcircled{D}}b^D$;

(iv) $a + b \in \mathcal{R}^D$, $(a + b)^D = (1 - aa^{\textcircled{D}})b^D$ i $(a^D)^2 = -a^{\textcircled{D}}b^D$;

(v) $a + b \in \mathcal{R}^D$ i $((a + b)^D - b^D)(1 - aa^D) = 0$.

Dokaz. Iz Leme 6.3.2 sledi da postoji dekompozicija jedinice $1 = e_1 + e_2$ sa $e_1 = p$ i $e_2 = e_2^*$ tako da je

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p},$$

gde je $k = ind(a)$, $a_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_3^k = 0$, i $b_4 \in ((1 - p)\mathcal{R}(1 - p))^{\textcircled{D}}$. Zaključuje se da je $b_4 \in ((1 - p)\mathcal{R}(1 - p))^D$,

$$a^D = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}, \qquad b^D = \begin{bmatrix} -a_1^{-1} & s_2 \\ 0 & b_4^D \end{bmatrix}_{p \times p},$$

$$a^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \qquad \text{i} \qquad b^{\textcircled{D}} = \begin{bmatrix} -a_1^{-1} & -a_1^{-1}a_2b_4^{\textcircled{D}} \\ 0 & b_4^{\textcircled{D}} \end{bmatrix}_{p \times p},$$

za neke elemente $s_1, s_2 \in \mathcal{R}$.

Shodno tome,

$$a^D + b^D = \begin{bmatrix} 0 & s_1 + s_2 \\ 0 & b_4^D \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Zbog toga što je

$$a + b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_3 + b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

Drejzin invertibilan, sledi da je $a_3 + b_4$ takođe Drejzin invertibilan i

$$(a + b)^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a_3 + b_4)^D \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Sada je $(a + b)^D = a^D + b^D$ ekvivalentno sa

$$0 = s_1 + s_2 \tag{6.1}$$

i

$$(a_3 + b_4)^D = b_4^D. \tag{6.2}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Kako je

$$b^D(1-aa^D) = b^D \begin{bmatrix} 0 & -a_1 s_1 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} 0 & s_1+s_2 \\ 0 & b_4^D \end{bmatrix}_{p\times p},$$

$(a+b)^D = b^D(1-aa^D)$ važi ako i samo ako su jednakosti (6.1) i (6.2) zadovoljene. Dakle, (i) i (ii) jesu ekvivalentni.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Iz

$$(1-aa^{\textcircled{\dagger}})b^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} -a_1^{-1} & s_2 \\ 0 & b_4^D \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_4^D \end{bmatrix}_{p\times p},$$

$(a+b)^D = (1-aa^{\textcircled{\dagger}})b^D$ je ekvivalentno sa (6.2). Na osnovu

$$a^D + aa^{\textcircled{\dagger}}b^D = \begin{bmatrix} 0 & s_1+s_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

zaključujemo da je $a^D = -aa^{\textcircled{\dagger}}b^D$ ako i samo ako je $a^D + aa^{\textcircled{\dagger}}b^D = 0$ ako i samo ako (6.1) važi. Tako da, (i) je ekvivalentno sa (iii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Uslovi $a^D = -aa^{\textcircled{\dagger}}b^D$ i $(a^D)^2 = -a^{\textcircled{\dagger}}b^D$ jesu ekvivalentni iz poznate jednakosti $a^D = a^D aa^{\textcircled{\dagger}}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Prema

$$\begin{aligned} ((a+b)^D - b^D)(1-aa^D) &= \begin{bmatrix} a_1^{-1} & -s_2 \\ 0 & (a_3+b_4)^D - b_4^D \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 s_1 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}_{p\times p} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -s_1-s_2 \\ 0 & (a_3+b_4)^D - b_4^D \end{bmatrix}_{p\times p}, \end{aligned}$$

$((a+b)^D - b^D)(1-aa^D) = 0$ je ekvivalentno sa (6.1) i (6.2). $\square$

Teorema 6.3.2 daje aditivne rezultate za grupni inverz.

Posledica 6.3.2. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ zadovoljavaju $a^{\textcircled{\#}}b + a^{\textcircled{\#}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{\#}} + aa^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a+b)^{\#} = a^{\#} + b^{\#}$;

(ii) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a+b)^{\#} = b^{\#}(1-aa^{\#})$;

(iii) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $a^{\#} = -aa^{\textcircled{\#}}b^{\#}$;

(iv) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a^{\#})^2 = -a^{\textcircled{\#}}b^{\#}$;

(v) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $((a+b)^{\#} - b^{\#})(1-aa^{\#}) = 0$.

Takođe, možemo proveriti sledeće rezultate.

Teorema 6.3.3. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ zadovoljavaju $ba^{\textcircled{\dagger}} + aa^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\dagger}} = a^{\textcircled{\dagger}} + b^{\textcircled{\dagger}}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\dagger}} = b^{\textcircled{\dagger}}(1 - aa^{\textcircled{\dagger}})$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $(1 - aa^{\textcircled{\dagger}})((a+b)^{\textcircled{\dagger}} - b^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $aa^{\textcircled{\dagger}}((a+b)^{\textcircled{\dagger}} - b^{\textcircled{\dagger}})(1 - aa^{\textcircled{\dagger}}) = 0$;

(iv) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$, $(1 - aa^{\textcircled{\dagger}})((a+b)^{\textcircled{\dagger}} - b^{\textcircled{\dagger}}) = 0$ i $a^{\textcircled{\dagger}}((a+b)^{\textcircled{\dagger}} - b^{\textcircled{\dagger}})(1 - aa^{\textcircled{\dagger}}) = 0$.

Posledica 6.3.3. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ zadovoljavaju $ba^{\textcircled{\#}} + aa^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}} + b^{\textcircled{\#}}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ i $(a+b)^{\textcircled{\#}} = b^{\textcircled{\#}}(1 - aa^{\textcircled{\#}})$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, $(1 - aa^{\textcircled{\#}})((a+b)^{\textcircled{\#}} - b^{\textcircled{\#}}) = 0$ i $bb^{\textcircled{\#}}((a+b)^{\textcircled{\#}} - b^{\textcircled{\#}})(1 - aa^{\textcircled{\#}}) = 0$;

(iv) $a + b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$, $(1 - aa^{\textcircled{\#}})((a+b)^{\textcircled{\#}} - b^{\textcircled{\#}}) = 0$ i $a^{\textcircled{\#}}((a+b)^{\textcircled{\#}} - b^{\textcircled{\#}})(1 - aa^{\textcircled{\#}}) = 0$.

Teorema 6.3.4. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ zadovoljavaju $ba^{\textcircled{\dagger}} + aa^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{D}$ i $(a+b)^{D} = a^{D} + b^{D}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{D}$ i $(a+b)^{D} = b^{D}(1 - aa^{D})$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{D}$ i $((a+b)^{D} - b^{D})(1 - aa^{D}) = 0$.

Posledica 6.3.4. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ zadovoljavaju $ba^{\textcircled{\#}} + aa^{\textcircled{\#}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a + b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a+b)^{\#} = a^{\#} + b^{\#}$;

(ii) $a + b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a+b)^{\#} = b^{\#}(1 - aa^{\#})$;

(iii) $a + b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $((a+b)^{\#} - b^{\#})(1 - aa^{\#}) = 0$.

Kao u Teoremi 6.3.2, pokazuju se sledeći aditivni rezultati pod uslovom da je $a \perp_{\textcircled{\dagger},r} b$.

Teorema 6.3.5. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ zadovoljavaju $a \perp_{\textcircled{\dagger},r} b$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a+b \in \mathcal{R}^D$ i $(a+b)^D = a^D + b^D$;

(ii) $a+b \in \mathcal{R}^D$ i $((a+b)^D - b^D)(1-aa^D) = 0$.

Posledica 6.3.5. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\#}}$ zadovoljavaju $a\perp_{\textcircled{\#},r}b$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $(a+b)^{\#} = a^{\#} + b^{\#}$;

(ii) $a+b \in \mathcal{R}^{\#}$ i $((a+b)^{\#} - b^{\#})(1-aa^{\#}) = 0$.

U slučaju da je $a^{\textcircled{\dagger}}b + a^{\textcircled{\dagger}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}} + aa^{\textcircled{\dagger}} = 0$, izučavaju se ekvivalentni uslovi za $a^2 \leq^{\textcircled{\dagger}} b^2$.

Teorema 6.3.6. Ako $a, b \in \mathcal{R}^{\textcircled{\dagger}}$ zadovoljavaju $a^{\textcircled{\dagger}}b + a^{\textcircled{\dagger}}a = 0$ i $ba^{\textcircled{\dagger}} + aa^{\textcircled{\dagger}} = 0$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $a^2 \leq^{\textcircled{\dagger}} b^2$;

(ii) $aa^{\textcircled{\dagger}}(a^2+ab) = 0$;

(iii) $a^{\textcircled{\dagger}}(a^2+ab) = 0$;

(iv) $aa^{\textcircled{\dagger}}(ab-ba) = 0$;

(v) $a^{\textcircled{\dagger}}(ab-ba) = 0$.

Dokaz. Koristeći Lemu 6.3.2 i [43, Lemma 2.3], ovaj dokaz se kompletira kao [77, Theorem 3.4]. $\square$

Poglavlje 7

Zaključna razmatranja i predlozi za buduća istraživanja

7.1 Motivacija za izučavanje uopštenih inverza operatora i elemenata prstena

U mnogim praktičnim problemima javlja se potreba za rešavanjem sistema linearnih jednačina kod kojih operator nije invertibilan. Zbog toga je uveden koncept uopštenih inverza, koji predstavlja prirodno uopštenje klasičnog pojma inverza.

Uopšteni inverzi imaju značajnu primenu u statistici, operacionim istraživanjima, ekonomiji, fizici, elektrotehnici, obradi signala i mašinskom učenju, posebno u problemu najmanjih kvadratnih rešenja i optimizacije.

Za razliku od klasičnog inverza, koji je jedinstven kada postoji, uopšteni inverzi u opštem slučaju nisu jedinstveni. Različiti izbori uopštenog inverza odgovaraju različitim geometrijskim ili optimizacionim svojstvima rešenja.

Geometrijski posmatrano, uslovi za sliku i jezgro fiksiraju način na koji operator deluje između domena i kodomena, čime se uklanja nejedinstvenost koja se javlja kod opštih unutrašnjih ili spoljašnjih inverza. Zbog toga $\{2\}$-inverzi imaju značajnu primenu u teoriji projektora i dekompoziciji linearnih preslikavanja [3, 6].

Teorija uopštenih inverza matrica i operatora sistematično je razvijana tokom poslednjih nekoliko decenija i detaljno izložena u [82, 88, 89]. Ova teorija predstavlja snažan alat u analizi singularnih sistema, posebno u situacijama kada klasične metode linearne algebre nisu primenljive.

Pojam jezgarnog inverza prvi put su uveli O. M. Baksalary i G. Trenkler u radu [1], sa ciljem objedinjavanja osobina grupnog i Mur-Penrouzovog inverza.

Kasnije je ovaj koncept uopšten na jezgarni-EP inverz za kvadratne matrice proizvoljnog indeksa u radu [67].

Prasad i Raj predložili su novi metod za izračunavanje jezgarnog-EP inverza u [68], dok je iterativni metod aproksimacije predstavljen u radu [69].

Uopšteni inverzi imaju ključnu ulogu u problemima optimizacije i aproksimacije. Najmanje kvadratna rešenja linearnog sistema $Ax = b$ definišu se kao rešenja optimizacionog problema $\min_x \|Ax - b\|$. U skupu najmanjih kvadratnih rešenja izdvaja se jedinstveno rešenje minimalne norme. Najmanje kvadratno rešenje minimalne norme poznato je pod nazivom najbolje aproksimativno rešenje. Mur-Penrouzov uopšteni inverz $A^\dagger$ generiše najbolje aproksimativno rešenje $A^\dagger b$ sistema linearnih jednačina $Ax = b$.

Mur-Penrouzov inverz predstavlja jedan od najznačajnijih uopštenih inverza. On je istovremeno unutrašnji i spoljašnji inverz i ima posebno značenje u rešavanju problema najmanjih kvadrata. Prvobitno je uveden u kontekstu rešavanja sistema linearnih jednačina koji nemaju jedinstveno rešenje.

Drejzinov inverz predstavlja drugu važnu klasu spoljašnjih inverza, posebno pogodnu za analizu singularnih kvadratnih matrica i diferencijalnih jednačina sa singularnim operatorima. Ovaj inverz uvodi pojam indeksa matrice koji meri stepen singularnosti operatora.

Jezgarni-EP inverz predstavlja novije uopštenje spoljašnjeg inverza. Motivacija za njegovo uvođenje potekla je iz potrebe objedinjavanja osobina Drejzinovog i Mur-Penrouzovog inverza kroz uslove definisane pomoću slika operatora.

Reprezentacije jezgarnog-EP inverza, detaljno predstavljene u [94], daju formalnu teorijsku osnovu za strogo definisanje ovih inverza. Time je moguće definisati jezgarni-EP inverz i u kontekstu beskonačno dimenzionalnih prostora, čime se značajno povećava njegova primenljivost.

Nadalje, u [24] potvrđena je neprekidnost jezgarnog-EP inverza, što implicira da mali perturbacioni uticaj na originalnu matricu A dovodi do proporcionalno malih promena u njenom jezgarnom-EP inverzu. Ova osobina neprekidnosti je od posebnog značaja za numeričku linearnu algebru, gde se pri računanjima često susreću aproksimacije i numeričke greške, ali i za primene u teoriji kontrolnih sistema, optimizaciji i inženjerskim simulacijama, gde stabilnost rešenja i otpornost na perturbacije imaju ključnu ulogu u pouzdanosti modela.

Razvoj koncepta jezgarnog-EP inverza nije ograničen samo na matrične prostore. U [47], jezgarni-EP inverz je uopšten za elemente Banahove algebre, čime je omogućeno njegovo korišćenje za beskonačno dimenzionalne linearne operatore. Ovo uopštenje je značajno u funkcionalnoj analizi i teoriji operatora, gde se često susreću linearni operatori na Hilbertovim i Banahovim prostorima, a definicija inverza mora biti kompatibilna sa normom i topologijom prostora.

Analogno uopštenje je izvršeno za elemente prstena u [22, 48], gde algebarske jednačine omogućavaju definisanje inverza i za nekomutativne algebarske elemente, čime se omogućava analiza operatora u apstraktnim algebrama i modulima. U [75] koncept je dalje uopšten za tenzore, što otvara primenu u multilinearnoj algebri i teoriji višedimenzionalnih podataka, uključujući obradu slike, analizu signala, statističke modele višedimenzionalnih promenljivih, kao i u mašinskom učenju i modeliranju višedimenzionalnih sistema.

Wang i Chen [84] su uveli pojam slabo grupnog inverza, koji predstavlja prirodno uopštenje grupnog inverza.

Slabo grupni inverz omogućava definisanje jedinstvenog operatora koji zadovoljava kombinaciju algebarskih i spektralnih uslova, čime se uopštava teorijska baza za rad sa delimično invertibilnim matricama i operatorima. Prema rezultatu iz [84], slabo grupni inverz se može eksplicitno predstaviti izrazom

$$A^{\textcircled{W}} = (A^{\textcircled{D}})^2 A,$$

što pokazuje direktnu vezu između slabo grupnog inverza i jezgarnog-EP inverza, kao i njihovu funkcionalnu kompoziciju. Ova veza omogućava efikasno numeričko računanje slabo grupnog inverza korišćenjem prethodno poznatih algoritama za jezgarni-EP inverz, čime se smanjuje složenost izračunavanja i poboljšava numerička stabilnost.

Dalje, u [91], pojam slabo grupnog inverza je uspešno uopšten i za elemente prstena, čime se otvara mogućnost primene u apstraktnoj algebri i teoriji modula, uključujući i proučavanje operatora nad modulima koji nisu striktno linearni. Ovo uopštenje omogućava definisanje inverza u kontekstu algebarskih struktura koje nemaju klasičnu matričnu reprezentaciju, što je posebno važno za teoriju nekomutativnih prstena.

Najnoviji rezultati u vezi sa slabo grupnim inverzom mogu se pronaći u [21, 64, 85], gde su detaljno razmatrane različite algebarske karakteristike, relacije sa jezgarnim-EP i grupnim inverzima, kao i primene u strukturalnoj teoriji matrica i prstena. Ovi radovi dodatno potvrđuju važnost slabo grupnog inverza u analizi parcijalno invertibilnih operatora i u teoriji perturbacione analize, posebno u situacijama kada operatori imaju višestruke nulte vrednosti.

S obzirom na sva navedena uopštavanja, jezgarni-EP i slabo grupni inverzi predstavljaju ključne alate u savremenoj linearnoj algebri, sa širokom primenom u numeričkoj analizi, teoriji kontrolnih sistema, optimizaciji, kao i u proučavanju spektralnih svojstava singularnih i parcijalno invertibilnih operatora. Njihova univerzalnost proizilazi iz sposobnosti da objedine spektralne, algebarske i geometrijske aspekte invertibilnosti, što ih čini neophodnim konceptima za dalja istraživanja u apstraktnoj i primenjenoj algebri.

Velika popularnost slabo grupnog inverza i jezgarnog-EP inverza potvrđena je u mnogim skorijim naučnim istraživanjima. Jezgarni-EP inverz je postao jedan od najpopularnijih uopštenih inverza poslednjih godina, što se vidi u [2, 18, 24, 83, 94, 97].

Mnoga parcijalna uređenja i pre-uređenja su uvedena u terminima različitih uopštenih inverza, čime se definišu hijerarhijske i geometrijske relacije između operatora i matrica. Jezgarno parcijalno uređenje je predstavljeno u [1] i uopšteno je za operatore na Hilbertovom prostoru [70].

Ove definicije parcijalnih uređenja, zajedno sa definicijama m-slabo grupnog i jezgarnog-EP inverza, formiraju bogatu algebarsku i geometrijsku teoriju, koja povezuje spektralne, projekcione i algebarske osobine operatora i matrica, čineći ih neophodnim alatima za savremena istraživanja u linearnim i apstraktnim operatorima.

Koncept uopštenih inverza ima značajnu primenu u različitim poljima matematike kao što je teorija matrica, teorija operatora, diferencijalne jednačine, i u tehnici i inžinjerstvu [3].

7.2 Analiza naučnog istraživanja disertacije

Primarni cilj disertacije je istraživanje ortogonalnosti za ograničene linearne operatore na Hilbertovom prostoru kao i ortogonalnost elemenata prstena sa involucijom.

Skorašnja istraživanja o jednostranim jezgarnim ortogonalnostima i jezgarnoj-EP ortogonalnosti, kao i njihov značaj u izučavanju osobina aditivnosti i parcijalnog uređenja, bili su motivacija da glavni cilj ovog rada bude dalje izučavanje ortogonalnosti operatora na Hilbertovom prostoru.

S obzirom da su jednostrane jezgarne ortogonalnosti uvedene za matrice indeksa 1, bilo je interesantno istražiti koncepte ortogonalnosti za Drejzin invertibilne operatore proizvoljnog indeksa.

Uopštenja predstavljena u ovoj disertaciji omogućavaju detaljnu analizu ortogonalnosti operatora i elemenata prstena, pri čemu se zadržavaju osnovne algebarske i geometrijske osobine prethodnih definicija.

Ova uopštenja omogućavaju formalno i praktično proučavanje operatora koji nisu striktno invertibilni ili imaju višetruke spektralne nule, čime se značajno povećava opseg primene jezgarnog-EP inverza i povezanih ortogonalnih koncepata u savremenoj linearnoj algebri i teoriji operatora.

U ovoj disertaciji, uopšteni su koncepti jednostranih jezgarnih ortogonalnosti i jezgarne-EP ortogonalnosti. Na ovaj način, uopšteni su neki skorašnji rezultati i predstavljeno je nekoliko novih rezultata za jednostrane jezgarne ortogonalnosti.

Preciznije, definišemo levu i desnu jezgarnu-EP ortogonalnost i prezentujemo njihovu vezu sa postojećim konceptima ortogonalnosti operatora. Takođe, ovde su predstavljene matrične forme jednostranih jezgarno-EP ortogonalnih operatora. Istraženi su dodatni uslovi koji sa jednostranim jezgarnim-EP ortogonalnostima impliciraju

$$(A+B)^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}} + B^{\textcircled{\dagger}}.$$

Dakle, pojam jednostrane jezgarne-EP ortogonalnosti je korišćen i u proučavanju osobina aditivnosti jezgarnih-EP inverza.

Naučna istraživanja predstavljena u ovoj doktorskoj disertaciji donela su značajno uopštenje pojma jezgarne-EP ortogonalnosti na m-slabu ortogonalnost za operatore, zasnovano na m-slabo grupnom inverzu kao prirodnom uopštenju jezgarnog-EP inverza. Ovo uopštenje omogućava proučavanje operatora sa višestrukim promenama ili većim indeksom, pri čemu se zadržavaju ključne algebarske i geometrijske osobine prethodnih definicija ortogonalnosti.

Dokazane su mnoge karakteristike m-slabo grupno ortogonalnih operatora, uključujući njihove eksplicitne matrične forme i relacije između m-slabo grupnih inverza i standardnih uopštenih inverza kao što su Drejzinov, Mur-Penrouzov i jezgarni-EP inverz. Analizirana je aditivnost m-slabo grupnih inverza u kontekstu jezgarno-EP ortogonalnih operatora, uključujući uslove kada je $(A+B)^{\circledS,m} = A^{\circledS m} + B^{\circledS,m}$, što predstavlja uopštenje poznatih rezultata za jezgarne i jezgarne-EP inverze. Posmatrani su novi rezultati za slabo grupnu ortogonalnost operatora, uključujući njihova parcijalna uređenja.

Jedna od ključnih prednosti uvođenja m-slabo grupnog inverza je mogućnost proučavanja operatora sa višestrukim spektralnim nulama i višim indeksom, što nije uvek moguće korišćenjem standardnog jezgarnog-EP inverza.

U daljem radu, planirano je uopštenje ovih rezultata na težinski slučaj. Ovo uopštenje uvodi dodatnu fleksibilnost u definiciju inverza, omogućavajući uključivanje težinskih faktora koji se mogu koristiti u spektralnoj dekompoziciji i analizi operatora u numeričkoj praksi.

Takvo uopštenje otvara put za dalje istraživanje:

- Analize stabilnosti i perturbacione teorije operatora sa višestrukim promenama.

- Razvoj novih tipova parcijalnih uređenja zasnovanih na m-slabo grupnim i težinskim m-slabo grupnim inverzima.

- Primene u problemima aproksimacije, tenzorskih operatora, blok-matrica i višedimenzionalnih sistema u kvantnoj teoriji, statistici i optimizaciji.

Ova strategija omogućava sistematsko uopštavanje teorije jezgarne-EP ortogonalnosti i njenog uticaja na moderne probleme linearne algebre i teorije operatora, čime se značajno povećava opseg primene pomenutih koncepata.

Literatura

[1] O. M. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear Multilinear Algebra 58(6) (2010), 681–697.

[2] R. Behera, G. Maharana, J. K. Sahoo, *Further results on weighted core-EP inverse of matrices*, Results Math. 75(4) (2020), 174.

[3] A. Ben-Israel, T. N. E. Grevile, *Generalized inverses, theory and applications, Second edition*, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Beflin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2003.

[4] P. Bhimasankaram, S. B. Malik, S. K. Mitra, *Matrix partial orders, shorted operators and applications*, World Scientic 2010.

[5] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. 1 (1935), 169–172.

[6] S. L. Campbell, C. D. Meyer, *Generalized inverse of linear transformations*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[7] N. Castro-González, J. J. Koliha, *New additive results for the g-Drazin inverse*, Proc. Roy.Soc. Edinburgh Sect. A 134(6) (2004), 1085–1097.

[8] S. Chountasis, V. N. Katsikis, D. Pappas, *Digital image reconstruction in the spectral domain utilizing the Moore-Penrose inverse*, Math. Probl. Eng. 2010(1) (2010), Article ID 750352, 14 pages.

[9] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2nd edition, Springer, New York, 2014.

[10] C. Y. Deng, H. K. Du, *Representations of the Moore-Penrose inverse of* 2×2 *block operator valued matrices*, J. Korean Math. Soc. 46(6) (2009), 1139–1150.

[11] D. S. Đorđević, *Further results on the reverse order law for generalized inverses*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 29(4) (2007), 1242–1246.

[12] D. S. Đorđević, *Unified approach to the reverse order rule for generalized inverses*, Acta Sci. Math. (Szeged) 67(3-4) (2001), 761–776.

[13] D. S. Đorđević, V. Rakočević, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, 2008.

[14] G. Dolinar, B. Kuzma, J. Marovt, B. Ungor, *Properties of core-EP order in rings with involution*, Front. Math. China 14(4) (2019), 715–736.

[15] M. P. Drazin, *Natural structures on semigroups with involution*, Bull. Amer. Math. Sec. 84 (1978), 139–141.

[16] M. P. Drazin, *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, Am. Math. Mon. 65(7) (1958), 506–514.

[17] D. E. Ferreyra, F. E. Levis, S. M. Malik, R. P. Moas, *One sided star and core orthogonality of matrices*, Linear Multilinear Algebra 73(5) (2025), 893-908.

[18] D. E. Ferreyra, F. E. Levis, N. Thome, *Revisiting the core EP inverse and its extension to rectangular matrices*, Quaest. Math. 41(2) (2018), 265–281.

[19] D. E. Ferreyra, S. B. Malik, *Some new results on the core partial order*, Linear Multilinear Algebra 70(18) (2022), 3449–3465.

[20] D. E. Ferreyra, S. Malik, *Core and strongly core orthogonal matrices*, Linear Multilinear Algebra 70(20) (2022), 5052–5067.

[21] D. E. Ferreyra, V. Orquera, N. Thome, *A weak group inverse for rectangular matrices*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fıs. Nat. Ser. A Mat. 113(4) (2019), 3727–3740.

[22] Y. Gao, J. Chen, *Pseudo core inverses in rings with involution*, Comm. Algebra 46(1) (2018), 38–50.

[23] Y. Gao, J. Chen, Y. Ke, *$*$-DMP elements in $*$-semigroups and $*$-rings*, Filomat 32(9) (2018), 3073–3085

[24] Y. Gao, J. Chen, P. Patricio, *Continuity of the core-EP inverse and its applications*, Linear Multilinear Algebra 69(3) (2021), 557–571.

[25] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product*, SIAM Rev. 8(4) (1966), 518–521.

[26] R. E. Hartwig, *How to partially order regular elements*, Math. Japon. 25(1) (1980), 1–13.

[27] R. E. Hartwig, J. Levine, *Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system*, Part III, Cryptologia 5(4) (1981), 213–228.

[28] R. E. Hartwig, G. P. H. Styan, *On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity*, Linear Algebra Appl. 82 (1986), 145–161.

[29] M. R. Hestenes, *Relative Hermitian matrices*, Pacific J. Math. 11 (1961), 224–245.

[30] R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. 12 (1945), 291–302.

[31] W. Jiang, K. Zuo, *Further characterizations of the m-weak group inverse of a complex matrix*, AIMS Mathematics 7(9) (2022), 17369–17392.

[32] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

[33] R. Kuang, C. Deng, *Common properties among various generalized inverses and constrained binary relations*, Linear Multilinear Algebra 71(8) (2023), 1295–1322.

[34] I. I. Kyrchei, *Determinantal representations of the core inverse and its generalizations with applications*, J. Math. 2019(1) (2019), Article ID 1631979, 13 pages.

[35] T. Li, D. Mosić, J. Chen, *The forward order laws for the core inverse*, Aequationes Math. 95(3) (2021), 415–431.

[36] W. Li, J. Chen, Y. Zhou, *Characterizations and representations of weak core inverses and m-weak group inverses*, Turk. J. Math. 47(5) (2023), 1453–1468.

[37] X. Liu, C. Wang, H. Wang, *Further results on strongly core orthogonal matrix*, Linear Multilinear A. 71(15) (2023), 2543–2564.

[38] Y. Liu, X. Liu, H. Jin, *Core and strongly core orthogonal elements in rings with involution*, Filomat 38(24) (2024), 8411–8432.

[39] X. Liu, C. Wang, H. Wang, *Some new results on core partial order and strong core orthogonal matrices*, Filomat 38(13) (2024), 4623–4635.

[40] X. Liu, K. Zhang, H. Jin, *The m-WG inverse in the Minkowski space*, Open Mathematics 21(1) (2023), 20230145.

[41] Y. Liu, X. Liu, H. Jin, *Core and strongly core orthogonal elements in rings with involution*, Filomat 38(24) (2024), 8411–8432.

[42] H. Ma, P. S. Stanimirović, *Characterizations, approximation and perturbations of the core-EP inverse*, Appl. Math. Comput. 359 (2019), 404–417.

[43] J. Marovt, D. Mosić, *On some orders in ∗-rings based on the core-EP decomposition*, J. Algebra Appl. 21(1) (2020), 2250010.

[44] S. K. Mitra *On group inverses and the sharp order*, Linear Algebra Appl. 92 (1987), 17–37.

[45] S. K. Mitra, P. Bhimasankaran, S. B. Malik, *Matrix partial orders, shorted operators and applications*, World Scientific Publishing Company, New-Jersey-London-Singapore-Beijing-shanghai-Hong Kong-Taipei-Chennai, 2010.

[46] M. K. Moghadam, A. R. Janfada, M. Miri *A note on the Birkhoff-James orthogonality in the operator algebras on Hilbert spaces*, Math. Rep. 19 (2017), 339–345.

[47] D. Mosić, *Core-EP inverses in Banach algebras*, Linear Multilinear Algebra 69(16) (2019), 2976-2989.

[48] D. Mosić, *Core-EP inverse in rings with involution*, Publ. Math. Debrecen 96(3–4) (2020), 427–443.

[49] D. Mosić, *Core-EP pre-order of Hilbert space operators*, Quaestiones Mathematicae 41(5) (2018), 585–600.

[50] D. Mosić, *Generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, 2018.

[51] D. Mosić, *Generalized inverses, condition factors and perturbations*, PhD thesis, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, 2009.

[52] D. Mosić, *Various types of the reverse order laws for the group inverses in rings*, Chapter in Topics in Operator (editor Dragan S. Đorđević), Zbornik radova 20(28) (2022), 89–119.

[53] D. Mosić, *Weighted core–EP inverse and weighted core-EP pre-orders in a C^*-algebra*, J. Austral. Math. Soc. 111(1) (2021), 76–110.

[54] D. Mosić, *Weighted core–EP inverse of an operator between Hilbert spaces*, Linear Multilinear Algebra 67(2) (2019), 278–298.

[55] D. Mosić, D. S. Đorđević, J. J. Koliha, *EP elements in rings*, Linear Algebra Appl. 431(5-7) (2009), 527–535.

[56] D. Mosić, D. S. Đorđević, *Further results on partial isometries and EP elements in rings with involution*, Math. Comput. Model. 54(1-2) (2011), 460–465.

[57] D. Mosić, D. S. Đorđević, *Partial isometries and EP elements in rings with involution*, Electron J. Linear Algebra 18 (2009), 761–772.

[58] D. Mosić, D. S. Đorđević, *The gDMP inverse of Hilbert space operators*, J. Spectr. Theor. 8(2) (2018), 555–573.

[59] D. Mosić, G. Dolinar, B. Kuzma, J. Marovt, *Core–EP orthogonal operators*, Linear Multilinear Algebra 73(10) (2025), 2287–2301.

[60] D. Mosić, P. S. Stanimirović, V. N. Katsikis, *Solvability of some constrained matrix approximation problems using core-EP inverses*, Comput. Appl. Math. 39(4) (2020), 311.

[61] D. Mosić, P. S. Stanimirović, L. A. Kazakovtsev, *Application of m-weak group inverse in solving optimization problems*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 118(1) (2024), 13.

[62] D. Mosić, P. S. Stanimirović, L. A. Kazakovtsev, *The m-weak group inverse for rectangular matrices*, Electronic Research Archive (ERA), 31(3) (2024), 1822–1843.

[63] D. Mosić, D. Zhang, *New representations and properties of m-weak group inverse*, Results Math. 78(3) (2023), 97.

[64] D. Mosić, D. Zhang, *Weighted weak group inverse for Hilbert space operators*, Front. Math. China 15(4) (2020), 709–726.

[65] D. Mosić, D. Zhang, J. Hu, *On operators whose core–EP inverse is n-potent*, Miskolc Math. 25(2) (2024), 921–932.

[66] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 51(3) (1955), 406–413.

[67] K. M. Prasad, K. S. Mohana, *Core–EP inverse*, Linear Multilinear Algebra 62(6) (2014), 792–802.

[68] K. M. Prasad, M. D. Raj, *Bordering method to compute core-EP inverse*, Spec. Matr. 6(1) (2018), 193–200.

[69] K. M. Prasad, M. D. Raj, M. Vinay, *Iterative method to find core-EP inverse*, Bull. Kerala Math. Assoc, Special Issue 16(1) (2018), 139–152.

[70] D. Rakić, *Partial orders based on generalized inverses and annihilators*, PhD thesis, University of Niš, 2008.

[71] D. Rakić, D. S. Đorđević, *A note on topological direct sum of subspaces*, Funct. Anal. Approx. Comput. 10(1) (2018), 9–20.

[72] D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Đorđević, *Core inverse and core partial order of Hilbert space operators*, Appl. Math. Comput. 244 (2014), 283–302

[73] D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Đorđević, *Group, Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution*, Linear Algebra Appl. 463 (2014) 115–133.

[74] J. K. Sahoo, R. Behera, *Reverse-order law for core inverse of tensors*, Comput. Appl. Math. 39(2) (2020), 97.

[75] J. K. Sahoo, R. Behera, P. S. Stanimirović, V. N. Katsikis, H. Ma, *Core and core-EP inverses of tensors*, Comput. Appl. Math. 39(1) (2020), 9.

[76] O. Stanimirović, *The m-weak group orthogonality for operators*, Hacet. J. Math. Stat. 55(1) (2026), 17–27.

[77] O. Stanimirović, D. Mosić, *One-sided core–EP orthogonal operators*, Linear Multilinear Algebra 73(13) (2025), 2917–2933.

[78] O. Stanimirović, D. Mosić, *Core–EP orthogonal elements in a ring with involution*, J. Algebra Appl. (2025), 2650103, https://doi.org/10.1142/S0219498826501033.

[79] O. Stanimirović, D. Mosić, *One-sided core-EP orthogonal elements in a ring with involution*, Int. Electron. J. Algebra (2026), accepted.

[80] O. Stanimirović, D. Mosić, *New properties of the core–EP pre-order*, Filomat 39(3) (2025), 743–754.

[81] A. Turnšek, *On operators preserving James' orthogonality*, J. Algebra Appl. 407 (2005), 189–195.

[82] G. R. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, Beijing/New York, 2004.

[83] H. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra Appl. 508 (2016), 289–300.

[84] H. Wang, J. Chen,*Weak group inverse*, Open Math. 16 (2018), 1218–1232.

[85] H. Wang, X. Liu, *The weak group matrix*, Aequationes Math. 93(6) (2019), 1261–1273.

[86] H. Wang, X. Liu, *Characterizations of the core inverse and the core partial ordering*, Linear Multilinear Algebra 63(9) (2015), 1829–1836.

[87] S. Xu, J. Chen, X. Zhang, *New characterizations for core inverses in rings with involution*, Fronth. Math. China 12(1) (2017), 231–246.

[88] D. Zhang, L. Ma, D. Mosić, *Representations of the Moore–Penrose inverse of a 2×2 block matrix based on Schur complements*, Appl. Math. Comput. 512 (2026), 129776.

[89] D. Zhang, Y. Zhao, D. Mosić, *The generalized Drazin inverse of the sum of two elements in a Banach algebra*, J. Comput. Appl. Math. 470 (2025), 116701.

[90] X. Zhang, S. Xu, J. Chen, *Core partial order in rings with involution*, Filomat 31(18) (2017), 5695–5701.

[91] M. Zhou, J. Chen, Y. Zhou, *Weak group inverses in proper *-rings* , J. Algebra Appl. 19(12) (2020), 2050238.

[92] Y. Zhou, J. Chen, M. Zhou, *m-weak group inverses in a ring with involution*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F Nat. Ser. A Mat. RACSAM 115(1) (2021), 2.

[93] M. M. Zhou, J. L. Chen, *Integral representations of two generalized core inverses*, Appl. Math. Comput. 333 (2018), 187–193.

[94] M. M. Zhou, J. L. Chen, T. T. Li, D. G. Wang, *Three limit representations of the core-EP inverse*, Filomat 32(17) (2018), 5887–5894.

[95] M. M. Zhou, J. L. Chen, N. Thome, *Characterizations and perturbation analysis of a class of matrices related to core-EP inverses*, J. Comput. Appl. Math. 393 (2021), 113496.

[96] H. Zhu, P. Patrício, *Characterizations for pseudo core inverses in a ring with involution*, Linear Multilinear Algebra 67(6) (2019), 1109–1120.

[97] H. Zhu, Q. W. Wang, *Weighted pseudo core inverses in rings*, Linear Multilinear Algebra 68(12) (2020), 2434–2447.

[98] H. Zou, J. L. Chen, P. Patrício, *Reverse order law for the core inverse in rings*, Mediterr. J. Math. 15(3) (2018), 145.

[99] H. Zou, D. Mosić, H. Zhu, K. Zuo, *Core partial order and core orthogonality comparing with star partial order and star orthogonality*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 118(4) (2024), 154.

Biografija autora

Olivera M. Stanimirović je rođena 01.09.1986. godine u Loznici. Osnovnu školu “Vuk Karadžić ” u Loznici je završila 2001. godine, često je osvajala maksimalnih 100 poena i prvo mesto na takmičenjima iz matematike, pa je još tada poželela da postane matematičar. Pohađala je Gimnaziju “Vuk Karadžić ” u Loznici u odeljenju prirodno-matematičkog smera, a zbog preseljenja srednje obrazovanje je završila u Gimnaziji “9. maj” u Nišu 2005. godine.

Maturski rad iz matematike radila je na temu “Izvodi funkcija”. Odmah po završetku srednje škole, 2005. godine, upisala je akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, smer Profesor matematike i računarstva i završila ih 2012. godine. Nakon upisa druge godine studija dobitnik je stipendije grada Loznice.

Diplomirala je sa prosečnom ocenom 8.11 i 300 ESP bodova. Odbranila je diplomski rad na temu “Uopšteni inverzi nad komutativnim prstenima”. Iste godine je upisala doktorske akademske studije na Departmanu za matematiku, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Stekla je zvanje istraživača pripravnika 2013. godine.

Marta 2013. godine počela je da radi u Gimnaziji “9. maj” u Nišu, gde je držala nastavu iz predmeta Matematika. Nakon toga se zapošljava u srednjoj Elektrotehničkoj školi ”Mija Stanimirović” u Nišu i Osnovnoj školi ”Bubanjski heroji”, takođe u Nišu, gde ostaje do prelaska na Tehnološki fakultet u Leskovcu gde radi kao asistent za računarske nauke do danas. U braku je i majka je tri devojčice.

Do sada je objavila pet radova, i to: tri rada u časopisima kategorije M21, jedan rad u časopisu kategorije M22 i jedan rad u časopisu kategorije M23. Istraživač je na projektu Ministarstva Nauke, Tehnološkog razvoja i Inovacija Republike Srbije, br. 451-03-34/2026-03/ 200133.

Naučni radovi u vrhunskim međunarodnim časopisima (M21)

1. **O. Stanimirović, D. Mosić**: *One-sided core-EP orthogonal operators*, Linear Multilinear Algebra 73(13) (2025), 2917–2933.
2. **O. Stanimirović, D. Mosić**: *New properties of the core-EP pre-order*, Filomat 39(3) (2025), 743–754.
3. **O. Stanimirović, D. Mosić**: *Core-EP orthogonal elements in a ring with involution*, J. Algebra Appl. (2025), 2650103, doi: 10.1142/S0219498826501033

Naučni radovi u istaknutim međunarodnim časopisima (M22)

1. **O. Stanimirović**: *The m-weak group orthogonality for operators*, Hacet. J. Math. Stat. 55(1) (2026), 17–27.

Naučni radovi u međunarodnim časopisima (M23)

1. **O. Stanimirović, D. Mosić**: *One-sided core-EP orthogonal elements in a ring with involution*, Int. Electron. J. Algebra (2026), accepted.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

УОПШТЕЊЕ ЈЕЗГАРНЕ-ЕП ОРТОГОНАЛНОСТИ И ОСОБИНЕ ЈЕЗГАРНОГ-ЕП ПРЕ-УРЕЂЕЊА

која је одбрањена на Природно математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивала на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредила ауторска права, нити злоупотребила интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, ______________.

Потпис аутора дисертације:

Станимировић Оливера

Др Оливера М. Станимировић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

УОПШТЕЊА ЈЕЗГАРНЕ-ЕП ОРТОГОНАЛНОСТИ И ОСОБИНЕ ЈЕЗГАРНОГ-ЕП ПРЕ-УРЕЂЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предала за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, _______________.

Потпис аутора дисертације:

Станимировић Оливера

Др Оливера М. Станимировић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

УОПШТЕЊА ЈЕЗГАРНЕ-ЕП ОРТОГОНАЛНОСТИ И ОСОБИНЕ ЈЕЗГАРНОГ-ЕП ПРЕ-УРЕЂЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучила.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, ______________.

Потпис аутора дисертације:

Станимировић Оливера

Др Оливера М. Станимировић