УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

Бојана С. Стојчетовић

ПСЕУДО КОСО-СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ НАД МАКС-ПЛУС АЛГЕБРАМА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2026.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Bojana S. Stojčetović

PSEUDO SKEW-SYMMETRIC MATRICES OVER MAX-PLUS ALGEBRAS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2026.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Јелена Игњатовић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет у Нишу
Наслов:	Псеудо косо-симетричне матрице над макс-плус алгебрама
Резиме:	Макс-плус алгебра представља аналог класичне линеарне алгебре који омогућава да се многи нелинеарни проблеми посматрају и решавају користећи линеаран приступ. Ова дисертација се бави дефинисањем и анализом специфичне класе матрица у оквиру макс-плус алгебре – макс-алгебарских псеудо косо-симетричних (MAPSS) матрица. Оне се дефинишу као квадратне матрице са нула дијагоналом које не садрже симетричне негативне елементе. Уз основну класу, разматра се и проширена класа слабих MAPSS матрица, које немају нула дијагоналу али је задржан услов непостојања симетричних негативних елемената. Њихову структуру карактерише низ особина које се одражавају и на одговарајуће диграфове. Посебна пажња посвећена је примени MAPSS матрица у одређивању горње границе броја итерација код Наизменичног метода за решавање двостраних макс-линеарних система са целобројним коефицијентима, са циљем редукције те границе.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Алгебра
Кључне речи:	Макс-плус алгебра, псеудо косо-симетричне матрице, слабе псеудо косо-симетричне матрице, конјугација, максимална средња вредност циклуса, диграфови, макс-линеарни системи, Наизменични метод, број итерација.
УДК:	512.643:519.177(043.3)
CERIF класификација:	P 120 Теорија бројева, теорија поља, алгебарска геометрија, алгебра, теорија група
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Jelena Ignjatović, PhD, full professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Title:	Pseudo skew-symmetric matrices over max-plus algebras
Abstract:	Max-plus algebra represents an analogue of classical linear algebra that allows many non-linear problems to be viewed and solved using a linear approach. This dissertation deals with the definition and analysis of a specific class of matrices within max-plus algebra – max-algebraic pseudo skew-symmetric (MAPSS) matrices. They are defined as square matrices with a zero diagonal that do not contain symmetric negative elements. Along with the basic class, an extended class of weakly MAPSS matrices is considered, which do not have a zero diagonal but retain the condition of the non-existence of symmetric negative elements. Their structure is characterized by a series of properties that are also reflected in the corresponding digraphs. Special attention is dedicated to the application of MAPSS matrices in determining the upper bound of the number of iterations in the Alternating method for solving two-sided max-linear systems with integer coefficients, with the aim of reducing that bound.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Algebra
Key Words:	Max-plus algebra, pseudo skew-symmetric matrices, weakly pseudo skew-symmetric matrices, conjugation, maximum cycle mean, digraphs, max-linear systems, Alternating method, number of iterations.
UDC:	512.643:519.177(043.3)
CERIF Classification:	P 120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Бојана С. Стојчетовић
Ментор, **МН**:	Јелена М. Игњатовић
Наслов рада, **НР**:	Псеудо косо-симетричне матрице над макс-плус алгебрама
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2026.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/110/111/5/8/0/0
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	алгебра
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Макс-плус алгебра, псеудо косо-симетричне матрице, слабе псеудо косо-симетричне матрице, конјугација, максимална средња вредност циклуса, дирафови, макс-линеарни системи, Наизменични метод, број итерација.
УДК	512.643:519.177(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:		Макс-плус алгебра представља аналог класичне линеарне алгебре који омогућава да се многи нелинеарни проблеми посматрају и решавају користећи линеаран приступ. Ова дисертација се бави дефинисањем и анализом специфичне класе матрица у оквиру макс-плус алгебре – макс-алгебарских псеудо косо-симетричних (MAPSS) матрица. Оне се дефинишу као квадратне матрице са нула дијагоналом које не садрже симетричне негативне елементе. Уз основну класу, разматра се и проширена класа слабих MAPSS матрица, које немају нула дијагоналу али је задржан услов непостојања симетричних негативних елемената. Њихову структуру карактерише низ особина које се одражавају и на одговарајуће диграфове. Посебна пажња посвећена је примени MAPSS матрица у одређивању горње границе броја итерација код Наизменичног метода за решавање двостраних макс-линеарних система са целобројним коефицијентима, са циљем редукције те границе.
Датум прихватања теме, **ДП**:		11.02.2026.
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	
	Члан:	
	Члан:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Bojana S. Stojčetović
Mentor, **MN**:	Jelena M. Ignjatović
Title, **TI**:	Pseudo skew-symmetric matrices over max-plus algebras
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2026.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5/110/111/5/8/0/0
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	algebra
Subject/Key words, **S/KW**:	Max-plus algebra, pseudo skew-symmetric matrices, weakly pseudo skew-symmetric matrices, conjugation, maximum cycle mean, digraphs, max-linear systems, Alternating method, number of iterations.
UDC	512.643:519.177(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		Max-plus algebra represents an analogue of classical linear algebra that allows many non-linear problems to be viewed and solved using a linear approach. This dissertation deals with the definition and analysis of a specific class of matrices within the framework of max-plus algebra – max-algebraic pseudo skew-symmetric (MAPSS) matrices. They are defined as square matrices with a zero diagonal that do not contain symmetric negative elements. Along with the basic class, an extended class of weakly MAPSS matrices is considered, which do not have a zero diagonal but retain the condition of the non-existence of symmetric negative elements. Their structure is characterized by a series of properties that are also reflected in the corresponding digraphs. Special attention is dedicated to the application of MAPSS matrices in determining the upper bound on the number of iterations in the Alternating Method for solving two-sided max-linear systems with integer coefficients, with the aim of reducing that bound.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		11.02.2026.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	
	Member:	
	Member:	

Садржај

Увод **3**
Преглед литературе . . . 3
Преглед дисертације . . . 5

1 Макс-плус алгебра **8**
1.1 Полупрстени . . . 8
1.1.1 Кључни појмови и својства полупрстена . . . 8
1.1.2 Примери полупрстена . . . 10
1.1.3 Матрице над полупрстенима . . . 12
1.2 Основни појмови и дефиниције макс-алгебре . . . 13
1.3 Диграфови и матрице . . . 17
1.4 Фундаментални макс-алгебарски концепти и методе . . . 20
1.4.1 Максимална средња вредност циклуса . . . 20
1.4.2 Транзитивна затворења . . . 22
1.4.3 Проблем додељивања . . . 24
1.4.4 Дуалне операције и конјугација . . . 25

2 Макс-линеарни системи **30**
2.1 Моделирање реалних система применом макс-алгебре . . . 30
2.2 Једнострани макс-линеарни системи . . . 36
2.2.1 Комбинаторни метод . . . 36
2.2.2 Алгебарски метод . . . 38
2.2.3 Нерешиви системи . . . 42
2.3 Двострани макс-линеарни системи . . . 42
2.3.1 Неки специјални случајеви . . . 43
2.3.2 Системи са раздвојеним променљивама - Наизменични метод . . . 44
2.3.3 Коначна генерисаност скупа решења . . . 47

3 Макс-алгебарске псеудо косо-симетричне матрице **52**
3.1 Симетричне и косо-симетричне матрице над макс-плус алгебрама . . . 52
3.2 Појам макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица . . . 57
3.3 Операције са макс-алгебарским псеудо косо-симетричним матрицама . . . 59
3.4 Слабе псеудо косо-симетричне матрице . . . 62
3.5 Псеудо косо-симетричне матрице са бесконачним елементима . . . 64
3.6 Конструктивност псеудо косо-симетричних матрица . . . 69
3.6.1 Матрице димензија 2×2 . . . 69
3.6.2 Матрице димензија 3×3 . . . 70

4 Диграфови псеудо косо-симетричних матрица **81**
4.1 Основна својства 81
4.1.1 Циклуси дужине два 83
4.2 Веза са другим класама матрица 85
4.3 Елементарне трансформације 86
4.4 Диграфови слабих $MAPSS$ матрица 88

5 Горња граница броја итерација код Наизменичног метода **91**
5.1 Рачунање горње границе 91
5.2 Избор почетног вектора 92
5.3 Нумеричко тестирање 96
5.4 О првој итерацији код Наизменичног метода 98

Закључак **100**

Литература **102**

Индекс појмова **108**

Биографија **109**

Библиографија радова аутора **110**

Увод

Макс-плус алгебра представља аналог линеарне алгебре, развијен за пар операција означених као $\oplus = \max$ и $\otimes = +$, које називамо макс-алгебарским сабирањем и множењем, редом. Ове операције, када се прошире на векторе и матрице, преобликују класичан приступ линеарним алгебарским операцијама. Конкретно, замена сабирања и множења макс-плус операцијама резултира новим математичким оквиром који омогућава да се нелинеарни проблеми анализирају и решавају на линеаран начин. Напоменимо одмах на почетку да када у овој дисертацији кажемо макс-алгебра, мислимо на макс-плус алгебру (ако то није случај, биће посебно наглашено).
Предмет ове дисертације јесте опис нове класе матрица над макс-плус алгебрама - макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица, са циљем примене њихових својстава у решавању основних проблема у макс-алгебри. У наставку дајемо преглед литературе, као и преглед ове дисертације по главама.

Преглед литературе

Овде ћемо навести неке од најзначајнијих радова из области макс-алгебре, најпре оне којима је постављен темељ за развој ове области, затим радове који се баве могућностима примене макс-алгебре у различитим аспектима науке и праксе, као и радове значајне за посебне области у макс-алгебарском контексту, као што су, на пример, макс-линеарни системи и сопствене вредности.
Од половине прошлог века почињу да се појављују први радови из области макс-алгебре. По многима, први значајан рад, којим се и званично поставља темељ за даљи развој ове области математике, објавио је Канингем-Грин 1960. године [42]. У наредним годинама, уследили су додатни радови овог аутора, као што су [43, 45, 46]. Осим Грина, овом проблематиком се у том периоду баве и Воробјов [107], Гондран и Минокс [69, 70], Каре [37], Гифлер [65, 66], Енгел и Шнајдер [55, 56], итд.
Неки аутори макс-алгебру називају и „екстремална алгебра (extremal algebra)“ [107], „алгебра путање (path algebra)“ [37] или „алгебра распореда (schedule algebra)“ [65]. Термин „тропска алгебра“ се у новије време користи као уобичајен синоним за „макс-алгебру“, иако у зависности од контекста могу постојати разлике.
Након ових првих радова, који су дали основу за даља истраживања ове области, уследили су радови У. Зимермана [110] из 1981. године, Бутковича и Хегедуса [25] из 1984. године, Бачелија [10] из 1992. године, итд. У релативно новије време, 2010. године објављена је монографија Бутковича [34], која обједињује класична сазнања и савремене резултате.
Значај макс-алгебре произлази из њене способности да проблеме који су у класичној линеарној алгебри нелинеарни представи у линеарном облику [60]. Посебно је важна у проучавању дискретних система [6, 51], који се у конвенционалној алгебри

третирају као нелинеарни, чиме се омогућава једноставније моделирање и анализа сложених процеса. Проблеми који се решавају помоћу макс-алгебре често имају управљачки карактер и јављају се у различитим подручјима: производња [42], транспорт [37], контрола саобраћаја [39], расподела ресурса [1], агрикултура [9], као и у природним наукама [17, 41, 47]. Осим тога, због идемпотентности прве операције, макс-алгебра припада и идемпотентној математици [83, 84].

Један од најпознатијих примера примене је моделирање комплетног железничког система у Холандији [73], што показује практичну примењивост макс-алгебре у великим инфраструктурним пројектима. Осим тога, макс-алгебра и сродна тропска геометрија нашле су примену и у финансијама - пример је Клемперерова аукција производа из 2008. године [77]. Такође, постоје и друге апликације у банкарству и ширем спектру економских система [62]. Све ове примене потврђују да макс-алгебра није само теоријски концепт, већ моћан алат за решавање реалних проблема у различитим дисциплинама - од производње и транспорта, преко биологије, па све до банкарства и економије.

Матрице, као један од основних математичких појмова, биле су интензивно проучаване у истраживањима из области макс-алгебре. Већ у првим радовима дефинисана је и описана конјугована матрица, која има посебан значај у решавању проблема [42]. У каснијим радовима, у контексту макс-алгебре, истраживачи су разматрали питања као што су степени матрица [26], слабо и јако стабилне (робустне) матрице [23, 27], макс-нумерички ранг матрица [104], корени матрица [74], тотално позитивне матрице [61], комплементарне матрице [59], и слично.

Када се почела развијати макс-алгебра, одмах се као кључно наметнуло питање да ли се својства из линеарне алгебре могу пренети на макс-алгебру, као и да ли ће та својства важити непромењена или треба увести неке додатне услове, итд. Испоставља се да се многе особине из класичне линеарне алгебре могу пренети на макс-алгебру заменом уобичајених операција макс-плус операцијама. Међу тим особинама истичу се сопствене вредности и сопствени вектори (нпр. Глава 4. у [34]), као и Крамерово правило и Кејли-Хамилтонова теорема [88].

Од огромног значаја у макс-алгебри је проблем одређивања сопствених вредности и сопствених вектора (eigenproblem) [3, 45, 107]. Резултати показују да у овом контексту постоји разлика између иредуцибилних [45, 69] и редуцибилних матрица [12]. У [45] показано је да највећа сопствена вредност представља уствари максималну средњу вредност циклуса, која је код коначних матрица још и јединствена. У истом раду је доказано да ако је матрица иредуцибилна, онда она има само коначне сопствене векторе. У новије време разматран је и проблем суперсопствених вредности и вектора (supereigenproblem) [33, 95]. Када је у питању максимална средња вредност циклуса, за њено одређивање развијено је више метода, од којих вреди поменути Воробјову $O(n^4)$ формулу [107], као и Карпов $O(n|E|)$ алгоритам [76], који је и најефикаснији. Касније су аутори покушавали да побољшају овај алгоритам [50]. За неке посебне класе матрица развијени су и другачији начини одређивања максималне средње вредности циклуса, као на пример за бивалентне [64] и Монгеове матрице [30]. Проблем додељивања је још један од кључних проблема који је разматран у радовима више аутора [13, 19–21, 32, 80, 89].

Као и у класичној линеарној алгебри, једно од кључних питања и у оквиру макс-алгебре је решавање система једначина и неједначина. У контексту макс-алгебре, може се говорити о једностраним и двостраним макс-линеарним системима. Једнострани системи поручавани су још у првим радовима из ове области [42, 107, 111], као и у [24]. Комбинаторна метода за решавање ових система изложена је у [23].

Такође, у [29, 35] и [23] разматрано је да ли овај систем има бесконачно решења или нема решење, као и под којим условима може имати јединствено решење.
Када се ради о двостраним системима, они почињу интензивније да се поручавају од 1980. године. У [25] изложен је метод елиминације за решавање ових система. У истом раду је такође показано да је скуп решења коначно генерисан. Касније је развијен ефикасни метод за решавање двостраних система са раздвојеним променљивама - Наизменични метод [48]. Пошто се и други двострани системи могу свести на систем са раздвојеним променљивама, Наизменични метод је од значаја генерално за двостране макс-линеарне системе. Овај метод налази решење постављеног система или указује да решење не постоји. Такође, ако су матрице које учествују у систему целобројне, може се одредити горња граница броја итерација. У [94], Наизменични метод је примењен за генерализоване системе.
Наводимо још неколико битних питања која су била, а нека су и данас, предмет истраживања различитих аутора у области макс-алгебре: теорема о цикличности [40], макс-линеарно програмирање [31], конвексност [52], генерализовани сопствени проблем (GEP - Generalised eigenproblem) [37], као и веза двостраних макс-линеарних система са mean payoff играма, које су полиномијално еквивалентне проблемима из класе $NP \cap co{-}NP$ [4, 16]. Све наведене теме показују да се макс-алгебра развила од иницијалних теоријских радова до савремене дисциплине која обухвата широк спектар проблема - од алгоритамске сложености и теорије игара, преко линеарних система и матрица, па све до примена у економији и инжењерству. Макс-алгебра се примењује и у теорији аутомата кроз проучавање редукције стања [49, 86], као и у анализи слабих линеарних система матричних неједначина над макс-плус кванталима [97]. Савремени доприноси обухватају и примену у модерној роботици, где се макс-алгебра користи за координацију и планирање подводних истраживачких операција [14].
Широке могућности примене макс-алгебре у различитим аспектима и областима, не само науке већ и свакодневног живота, инспиришу и данас велики број истраживача да даље продубљују резултате из ове области математике [5, 74, 75, 79, 82, 105, 108].
На крају, напоменимо да се поред макс-плус алгебре, у литератури разматрају и друге сродне структуре [34, 44, 45], као што су макс-пута алгебра, мин-плус алгебра и мин-пута алгебра. Све ове алгебре припадају класи идемпотентних полупрстена. Њихова примена обухвата оптимизацију, распоређивање, анализу дискретних система и тропску геометрију.

Преглед дисертације

Дисертација је подељена у пет глава. У првој и другој глави изложена је материја која је позната, док преостале три главе садрже оригиналне резултате, при чему је на почетку ових глава наглашено у којим радовима су ти резултати публиковани.

У првој глави уводимо основне појмове, дефиниције и ознаке из области макс-алгебре, које ће се користити кроз читаву дисертацију. На почетку је дато поглавље које се односи на полупрстене, с обзиром да макс-алгебра по својој структури представља полупрстен. Затим су дате главне дефиниције које се односе на диграфове, максималну средњу вредност циклуса, транзитивна затворења, проблем додељивања, дуалне операције и конјугацију, што ће бити основа за резултате представљене у осталим главама.

Друга глава посвећена је макс-линеарним системима: једностраним и двостраним. У оквиру једностраних, описани су комбинаторни и алгебарски приступ решавања. Када су у питању двострани системи, разматрани су специјални случа-

јеви, системи са раздвојеним променљивама и уопштени системи. Најзначајни су системи са раздвојеним променљивама, који се могу решавати ефикасним Наизменичним методом. Овај метод нас доводи до решења постављеног проблема или до закључка да решење не постоји. Нови резултати везани за Наизменични метод изложени су у последњој глави.

У трећој глави уводимо кључни појам ове дисертације - појам макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица. У макс-плус алгебри инверзне матрице у општем случају не постоје. Стога, многи поступци и методе из класичне линеарне алгебре не могу да се примене. Делимично, улогу инверзне матрице преузима конјугована матрица, која се дефинише као негативна транспонована матрица дате матрице. Имајући у виду улогу конјуговане матрице, у раду се разматрају особине оних матрица које су добијене као макс-алгебарски збир или макс-аглебарски производ неке матрице и њој одговарајуће конјуговане матрице. Тако долазимо до матрица које су назване макс-алгебарске псеудо косо-симетричне матрице (max-algebraic pseudo skew-symmetric ($MAPSS$) matrices). Дефинишемо их као квадратне матрице са нула дијагоналом које немају симетричне негативне елементе. Истраживање даље обухвата разматрање структурних и алгебарских особина $MAPSS$ матрица. Испитано је да ли матрица задржава $MAPSS$ својства након транспоновања, конјугације, као и у макс-алгебарском збиру и производу са другом $MAPSS$ матрицом. Осим тога, у овој глави су истражене и матрице које су назване слабе макс-алгебарске псеудо косо-симетричне матрице (weakly $MAPSS$), које за разлику од $MAPSS$ матрица немају нула дијагоналу, али је задржан услов непостојања симетричних негативних елемената. Урађена је компарација у односу на $MAPSS$ матрице и истакнуто је које особине ће важити и код слабих $MAPSS$ матрица, а које неће бити очуване. Све горе наведено најпре је истражено за матрице које имају коначне елементе. Међутим, како се макс-алгебарске операције дефинишу на скупу реалних бројева којем је придружен елемент $-\infty$, то наредни део истраживања обухвата резултате добијене за матрице које могу садржати бесконачне уносе. У зависности од позиције и броја ових уноса унутар $MAPSS$ матрице, проистичу одређена својства која су доказана у овом делу дисертације. На крају ове главе, разматрамо конструктивност $MAPSS$ матрица у случају димензија 2×2 и 3×3. Другим речима, истражено је да ли се, и на који начин, за дату $MAPSS$ матрицу може одредити она матрица која би у макс-алгебарском производу са својом конјугованом матрицом дала управо почетну $MAPSS$ матрицу.

Четврта глава се бави дирафовима који одговарају $MAPSS$ и слабим $MAPSS$ матрицама. С обзиром на њихове дефиниције, одговарајући дирафови имаће неке специфичне особине. Због услова да ове матрице не садрже негативне симетричне елементе, циклуси дужине два у одговарајућим дирафовима одликоваће се посебним својствима. У контексту $MAPSS$ матрица, разматрају се и максимална средња вредност циклуса, тежине циклуса, макс-алгебарски перманент, критични чворови и критични циклуси. Још једно питање које је истражено су и елементарне трансформације $MAPSS$ и слабих $MAPSS$ матрица, са акцентом на услове при којима ће матрица задржати $MAPSS$ својства при елементарним трансформацијама. Такође, изложена је и веза $MAPSS$ матрица са другим, већ познатим класама матрица у макс-алгебри, при чему су истакнута заједничка својства, као и услови под којима ће класа $MAPSS$ матрица припадати некој од тих класа.

Пета глава посвећена је разматрању могућности примене особина $MAPSS$ матрица код макс-линеарних система. Решавање система једначина у макс-алгебри је генерално сложеније у односу на класичну линеарну алгебру, због непостојања

инверзних матрица и чињенице да макс-алгебарско сабирање није инвертибилна операција. Један од метода за решавање двостраних система једначина је Наизменични метод, итеративни поступак описан у другој глави. Ако се за матрице које учествују у задатом двостраном систему поставе одређени услови, може се одредити горња граница броја итерација код Наизменичног метода. У формули за одређивање горње границе јавља се управо матрица која је по својој структури $MAPSS$. Имајући у виду особине $MAPSS$ матрица, у истраживању је предложено да Наизменични метод не почиње, као иначе, са случајно изабраним вектором, већ са вектором који бирамо на основу елемената одговарајуће $MAPSS$ матрице. Овај предлог има за циљ да се поменута горња граница броја итерација смањи што је више могуће. С тим у вези, урађено је нумеричко тестирање где Наизменични метод почиње са случајно изабраним вектором, а затим почиње са вектором који је предложен у истраживању. Добијени резултати су анализирани и иду у прилог избору почетног вектора на основу елемената одговарајуће $MAPSS$ матрице.

На крају дисертације укратко је сумирана целокупна разматрана материја, при чему су указани правци који могу бити предмет даљих истраживања.

Пре самог текста дисертације, желим да изразим дубоку захвалност свима који су допринели да овај рад успешно приведем крају. Најпре, хвала Богу, од Кога долази свака инспирација, снага и подстрек за било какав успех и постигнуће у свему, па и у науци. Најискреније се захваљујем својој менторки, професорици Јелени Игњатовић, за пружену подршку, разумевање и корисне савете при писању дисертације, као и током целокупних студија. Уз њену помоћ и усмеравање, уз љубазност и предусретљивост, препреке које су ми изгледале непремостиво биле су лако решене. Велику захвалност дугујем и професору Мирославу Ћирићу, који ме је први упутио на макс-алгебру и дао почетне смернице и идеје за истраживања из ове области. Захваљујем се и свим колегама са Одсека за математику на Природно-математичком факултету Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици на драгоценим саветима и дељењу искуства са мном. На крају, највећу захвалност дугујем својој породици, за пружену љубав, подршку, разумевање и охрабрење од самог почетка мог школовања па све до овог тренутка.

Глава 1

Макс-плус алгебра

У овој глави најпре наводимо најважније дефиниције везане за полупрстене, међу којима се и макс-плус структура препознаје као посебан пример. Након тога, у осталим поглављима наводимо кључне појмове, особине и нотацију из области макс-плус алгебре, који дају основу за даља разматрања у дисертацији. Нотација је највећим делом усклађена са монографијом Бутковича из 2010. године [34].

1.1 Полупрстени

Полупрстен са нулом и јединицом је алгебарска структура која генерализује прстен. Наиме, док је прстен у односу на сабирање група, полупрстен је само моноид. Полупрстени имају бројне примене у различитим областима математике и информатике, као што је, на пример, теорија формалних језика и аутомата [81]. Док са једне стране поједине њихове особине подсећају на својства прстена, са друге стране је посебно значајно да се свака дистрибутивна мрежа са најмањим елементом може интерпретирати као идемпотентан полупрстен. У случају када је сабирање идемпотентно, полупрстен показује блиску везу са полумрежама и мрежама, што омогућава преношење одређених структурних резултата из теорије мрежа у теорију полупрстена. Прву формалну дефиницију дао је Вандивер у [106] 1934. године, а до данас је објављен значајан број радова посвећених овој алгебарској структури. Више о полупрстенима може се пронаћи, на пример, у [67].

1.1.1 Кључни појмови и својства полупрстена

Нека је S непразан скуп и $*$ бинарна операција. Уређени пар $(S,*)$ јесте *полугрупа* ако је операција $*$ асоцијативна, тј. таква да за свако $a,b,c \in S$ важи $(a*b)*c = a*(b*c)$. Ако за свако $a \in S$ постоји елемент e такав да је $e*a = a*e = a$, тада за елемент e кажемо да је јединични елемент (јединица), док за $(S,*)$ кажемо да је полугрупа са јединицом или *моноид*. За елемент $a \in S$ кажемо да је *идемпотентан* ако је $a*a = a$. За елементе $a,b \in S$ кажемо да комутирају ако је $a*b = b*a$, а полугрупа S је *комутативна* ако сви њени елементи имају ову особину. Моноид $(S,*)$ је *парцијално уређен* ако на S постоји релација парцијалног уређења $\leq$ која очувава операцију моноида, тј. ако из $a_1 \leq a_2$ следи $a_1 * a \leq a_2 * a$ и $a * a_1 \leq a * a_2$.
Мрежа је уређени скуп $(L,\leq)$ у којем за свака два елемента постоји инфимум и супремум. Мрежа је *комплетна (потпуна)* ако инфимум и супремум постоје за произвољан подскуп, укључујући празан скуп и сам скуп L. Мрежу можемо дефинисати и као алгебарску структуру $(L,\wedge,\vee)$ у којој за операције $\wedge$ и $\vee$ важе дуални закони кому-

тативности, асоцијативности и апсорпције.
Мрежа је *модуларна* ако је за свако $x, y, z \in L$ задовољен идентитет

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge (x \vee z)). \tag{1.1.1}$$

Мрежа је *дистрибутивна* ако за свако $x, y, z \in L$ важи:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, односно еквивалентно $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Прстен је алгебарска структура $(R, +, \cdot)$ у којој:

1. $(R, +)$ је комутативна група;
2. $(R, \cdot)$ је моноид;
3. важи дистрибутивност „$\cdot$“ према „$+$“.

Полупрстен је непразан скуп $(S, +, \cdot)$ на којем су операције сабирања и множења дефинисане тако да важе следећи услови:

1. $(S, +)$ је комутативан моноид са неутралним елементом 0;
2. $(S, \cdot)$ је полугрупа (односно моноид са јединицом 1);
3. важи дистрибутивност „$\cdot$“ према „$+$“;
4. $0 \cdot s = 0 = s \cdot 0$, за свако $s \in S$.

При томе, претпостављамо да је $1 \neq 0$, јер у супротном имамо тривијалан случај $S = \{0\}$. Подскуп P полупрстена S је *подполупрстен* од S ако садржи 0 и 1, и затворен је за операције сабирања и множења у S.
Центар полупрстена S је

$$C(S) = \{s \in S | s \cdot s' = s' \cdot s, \text{ за свако } s' \in S\}.$$

Важи да је $C(S) \neq \emptyset$, јер $0 \in C(S)$. Ако је S полупрстен онда $1 \in C(S)$ и $C(S)$ је подполупрстен од S. Полупрстен S је *комутативан* ако и само ако је $C(S) = S$.

Теорема 1.1.1 *Скуп S са два различита елемента 0 и 1 на којем су дефинисане операције „$+$“ и „$\cdot$“ представља комутативан полупрстен ако и само ако су за свако $s, t, u, v, w \in S$ испуњени услови:*

1. $s + 0 = 0 + s = s$;
2. $s \cdot 1 = s$;
3. $0 \cdot s = 0$;
4. $[(s \cdot w + t) + u] \cdot v = v \cdot t + \big[s \cdot (w \cdot v) + u \cdot v \big]$.

За елемент s полупрстена S кажемо да је *идемпотентан* ако је $s + s = s$, док је полупрстен S *идемпотентан* ако сви његови елементи имају ову особину. Идемпотентни полупрстени називају се *диоиди*. *Комутативан диоид* D је онај за који важи $s \cdot t = t \cdot s$, за свако $s, t \in D$.
Полупрстен S је *прост* ако и само ако је $s + 1 = 1$, за свако $s \in S$. За елемент

t полупрстена S кажемо да је *адитивно инверзан* за s ако и само ако је $s+t=0$. Скуп свих елемената из S који имају адитивни инверз означавамо са $V(S)$. *Директан производ* $S=\times_{i\in\Omega}S_i$ фамилије полупрстена $\{S_i|i\in\Omega\}$ има структуру полупрстена са операцијама сабирања и множења које су дефинисане по компонентама.
За елемент s полупрстена S кажемо да је *леви (десни) делитељ* нуле ако и само ако постоји ненула елемент t из S за који је $s\cdot t=0$ ($t\cdot s=0$). Уколико је s истовремено леви и десни делитељ нуле, кажемо да је *делитељ нуле*. Полупрстен S који нема делитеље нуле назива се *цео*.
Деривација на полупрстену S је функција $d:S\to S$, при чему за свако $s,s'\in S$ важи:

$$d(s+s')=d(s)+d(s') \qquad \text{и} \qquad d(ss')=d(s)s'+sd(s').$$

Полупрстен S је *алгебарски затворен* ако за свако $t\in S$ и за сваки позитиван цео број n постоји елемент $s\in S$ који задовољава $s^n=t$.
Елемент s полупрстена S је *нилпотентан* ако и само ако постоји позитиван цео број n тако да је $s^n=0$. Најмањи цео број који задовољава ову особину јесте *индекс нилпотентности* за s. Са $U(S)$ означавамо скуп свих елемената s из S за које постоји s' тако да је $s\cdot s'=s'\cdot s=1$. Ако је $U(S)=S\setminus\{0\}$, онда је S полупрстен дељења.
Полупрстен S назива се *антипрстен* ако из $s+t=0$, за $s,t\in S$, следи да је $s=t=0$.
Ако су P_1 и P_2 непразни подскупови полупрстена S, онда подскупове P_1+P_2 и P_1P_2 дефинишемо на следећи начин:

$$P_1+P_2=\{p_1+p_2|p_1\in P_1,p_2\in P_2\}$$

и

$$P_1P_2=\left\{p_1^{(1)}p_2^{(1)}+\ldots+p_1^{(n)}p_2^{(n)}|n<\infty;p_1^{(i)}\in P_1,p_2^{(i)}\in P_2\right\}.$$

Непразан подскуп I полупрстена S назива се *леви (десни) идеал* од S ако је $a+b\in I, sa\in I$ ($a+b\in I, as\in I$) за свако $a,b\in I$ и $s\in S$. Подскуп I се назива *идеал* од S ако је он истовремено леви и десни идеал од S. Са $\mathbf{Id}(S)$ означавамо скуп свих идеала полупрстена S.

1.1.2 Примери полупрстена

Сваки прстен је полупрстен. Неки од познатијих примера полупрстена су:

- Булов полупрстен $\mathbb{B}=(\{0,1\},+,\cdot)$, са неутралним елементима 0 и 1, где је $1+1=1\cdot 1=1$.

- Арктички полупрстен или $min-plus$ полупрстен $Arc=(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\min,+)$, са неутралним елементима ∞ и 0, где се min и + на природан начин проширују на $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

- Тропски полупрстен[1] или $max-plus$ полупрстен $Trop=(\mathbb{N}\cup\{-\infty\},\max,+)$, са неутралним елементима $-\infty$ и 0, где се max и + на природан начин проширују на $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$.

[1] У литератури старијег датума често се прави разлика у терминологији: арктички полупрстен се тада односио на макс-плус структуру, а тропски на мин-плус. Међутим, у новијим радовима под тропским полупрстеном, а тиме и тропском алгебром, уобичајено се подразумева макс-плус структура. У складу са тим, у овој дисертацији усвајамо управо тај савремени конвенционални приступ.

- Витербијев полупрстен $([0,1], \max, \cdot)$, са неутралним елементима 0 и 1, који се користи за множење вероватноћа.
- Полупрстен $(2^{X^*}, \cup, \cdot)$ формалних језика над коначним алфабетом X, са неуталним елементима $\emptyset$ и $\{e\}$.
- Полупрстен $(2^{U\times U}, \cup, \circ)$ бинарних релација на скупу U, са неутралним елементима $\emptyset$ и Δ.
- Полупрстен Лукашијевича $([0,1], \max, \otimes)$ са неутралним елементима 0 и 1, где је операција $\otimes$ дефинисана са $x \otimes y = \max\{x + y - 1, 0\}$.
- Идемпотентан комутативан полупрстен који је природно уређен $(\{0, 1, a, \infty\}, +, \cdot)$, са неутралним елементима 0 и 1, где је $0 \leq 1 \leq a \leq \infty$ и $a \cdot a = a$.

Пример 1.1.1 $([0,1], +, \cdot)$ *је полупрстен, где је* $[0,1]$ *јединични интервал реалних бројева и*

- $a + b = \max\{a, b\}, a \cdot b = \min\{a, b\}$,
- $a + b = \min\{a, b\}, a \cdot b = \max\{a, b\}$.

Пример 1.1.2 *[15] Сви двоелементни комутативни полупрстени дефинисани су на следећи начин:*

Z_1

$+$	0	1
0	0	0
1	0	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	0

Z_2

$+$	0	1
0	0	0
1	0	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Z_3

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	0

Z_4

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot$	0	1
0	1	1
1	1	1

Z_5

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

Z_6

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Z_7

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	0

Z_8

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример 1.1.3 *За произвољан непразан скуп* S*, систем* $(P(S), \cup, \cap)$ *који се састоји од партитивног скупа од* S *заједно са бинарним операцијама* $\cup$ *и* $\cap$ *јесте комутативан полупрстен, где се за* $S_1, S_2 \in P(S)$*,* $S_1 \cup S_2$ *може сматрати адицијом, а* $S_1 \cap S_2$ *мултипликацијом на* $P(S)$*. Систем* $(P(S), \cap, \cup)$ *је такође полупрстен, а разлика је у томе што први јесте антипрстен а други није, јер ако је* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ *не следи* $S_1 = \emptyset$ *и* $S_2 = \emptyset$*.*

Пример 1.1.4 *[38] Сваки комутативан прстен јесте комутативан полупрстен.* $\mathbf{N}_0 = (\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ *јесте комутативан полупрстен који није прстен, јер* 1 *нема адитивни инверз. Штавише,* $2\mathbb{N}_0 \in \boldsymbol{Id}(\mathbf{N}_0)$.
Свака дистрибутивна мрежа са 0 *јесте комутативан полупрстен који је прстен само ако је једноелементни. Ако су* $\mathbf{L}_1 = (L_1, \vee, \wedge)$ *и* $\mathbf{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge)$ *дистрибутивне мреже са* 0*, онда је* $\{0\} \times L_2 \in \boldsymbol{Id}(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)$.

Пример 1.1.5 *Нека је* $S \neq \emptyset$*. Дефинишимо на* S *операције „*$+$*“ са* $a + b = b$ *и „*$\cdot$*“ са* $a \cdot b = a$*, за свако* $a, b \in S$*. Тада је* $(S, +, \cdot)$ *полупрстен који није комутативан.*

Пример 1.1.6 *Скупови свих ненегативних целих бројева* $\mathbb{Z}_+$*, ненегативних рационалних бројева* $\mathbb{Q}_+$*, ненегативних реалних бројева* $\mathbb{R}_+$*, са уобичајеним операцијама сабирања и множења јесу комутативни полупрстени. Ниједан од њих није прстен.*

Наведени примери илуструју ширину примене полупрстена и служе као полазна основа за дубље проучавање унутрашње структуре и релација које генеришу специфичне класе полупрстена у оквиру ове дисертације.

1.1.3 Матрице над полупрстенима

Нека $\mathbb{N}$ означава скуп природних бројева, а нека је S полупрстен. За свако $m, n \in \mathbb{N}$, $m \times n$ *матрица* са елементима у S (или над S) дефинише се као пресликавање

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to S,$$

где се за произвољно $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ вредност a_{ij} назива (i, j)-*елемент* или (i, j)-*унос* матрице A. Скуп свих $m \times n$ матрица са елементима у S означава се са $S^{m\times n}$. Слично томе, *вектор* дужине m над S, за дато $m \in \mathbb{N}$, јесте пресликавање

$$\upsilon : \{1, \ldots, m\} \to S.$$

Ознака S^m користи се за скуп свих вектора дужине m над S. Дакле, $1 \times n$ матрица је *вектор врста* (дужине n), а $m \times 1$ матрица је *вектор колона* (дужине m).
Идентична или *јединична матрица* реда n је $n \times n$ матрица I над S чији је (j, k)-елемент једнак 1 ако је $j = k$, односно једнак 0 ако $j \neq k$, за свако $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Транспонована матрица од $A \in S^{m\times n}$ јесте матрица $A^\top \in S^{n\times m}$ чији је (i, j)-елемент једнак (j, i)-елементу матрице A, за свако $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$.
За $m, n \in \mathbb{N}$, *збир матрица* је бинарна операција на $\mathbb{S}^{m\times n}$ дефинисана за $A, B \in \mathbb{S}^{m\times n}$ тако да је $C = A \oplus B$, при чему је:

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \tag{1.1.2}$$

за свако $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ово је асоцијативна и комутативна операција на $\mathbb{S}^{m\times n}$, па $(\mathbb{S}^{m\times n}, \oplus)$ чини комутативну полугрупу чији је јединични елемент нула-матрица $O_{m\times n}$.
За произвољне $m, n, p \in \mathbb{N}$, *производ матрица* дефинише се између матрица из $\mathbb{S}^{m\times n}$ и $\mathbb{S}^{n\times p}$ на следећи начин: за $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{S}^{n\times p}$, њихов производ је матрица $C = A \otimes B \in \mathbb{S}^{m\times p}$ са елементима

$$c_{ik} = \overset{\oplus}{\sum_{j=1}^{n}} a_{ij} \otimes b_{jk}, \tag{1.1.3}$$

за свако $(i,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,p\}$. Кад год је производ матрица дефинисан, он је асоцијативан, тј. за свако $A \in \mathbb{S}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{S}^{n\times p}$ и $C \in \mathbb{S}^{p\times q}$ важи:

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

Пример 1.1.7 *За сваки позитиван цео број n, скуп $M_n(S)$ свих $n \times n$ матрица над полупрстеном S јесте полупрстен у односу на уобичајене матричне операције.*

Матричне структуре над полупрстенима представљају значајан алат за решавање основних алгебарских проблема, о чему се више може наћи, на пример, у [8, 11, 18, 68, 72, 96, 109].

1.2 Основни појмови и дефиниције макс-алгебре

Скуп реалних бројева проширићемо елементом $-\infty$ и означити са $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

На овом скупу, дефинишемо две бинарне операције, које ћемо редом називати макс-алгебарско сабирање и макс-алгебарско множење:

$$a \oplus b = \max\{a,b\} \qquad \text{и} \qquad a \otimes b = a + b,$$

за свако $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Макс-алгебра представља аналог линеарне алгебре развијен за пар операција $(\oplus, \otimes)$ проширених на матрице и векторе. Структура $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ представља идемпотентан полупрстен, а у наставку ћемо видети да је овај полупрстен и комутативан. Неутрални елемент за операцију $\oplus$ је $-\infty$, и он ће кроз дисертацију бити означен са ε: $a \oplus \varepsilon = a = \varepsilon \oplus a$, за $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Такође, са ε ће бити означен вектор или матрица, чији су сви елементи једнаки ε. Неутрални елемент за операцију $\otimes$ је 0. Када је реч о приоритету операција, нема разлике у односу на класичну линеарну алгебру, односно, макс-алгебарско множење има предност у односу на макс-алгебарско сабирање.
Пре него што пређемо на детаљније изучавање особина макс-плус алгебре, напоменимо да се на аналоган начин може конструисати и њена дуална структура - мин-плус алгебра. Ова структура добија се проширењем скупа реалних бројева елементом $+\infty$, при чему новонастали скуп означавамо са $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. На овом скупу базичне операције $\oplus$ и $\otimes$ дефинишемо као:

$$a \oplus b = \min\{a,b\} \qquad \text{и} \qquad a \otimes b = a + b,$$

за све елементе $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. У овом контексту, неутрални елемент за операцију $\oplus$ представља $+\infty$, док је неутрал за операцију $\otimes$ и даље реални број 0.
У наставку излагања тежиште анализе враћамо на макс-плус теорију. Иако ће предмет истраживања у овој дисертацији примарно бити фокусиран на рад са скупом $\overline{\mathbb{R}}$, у одређеним теоријским разматрањима биће неопходно увести и елемент $+\infty$. Тиме се формира такозвани комплетирани макс-плус полупрстен, у оквиру којег по конвенцији важе следеће релације:

$$(-\infty) + (+\infty) = -\infty = (+\infty) + (-\infty).$$

Поред тога, важе и следеће особине, које се лако показују из самих дефиниција:

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus c, && \text{(асоцијативност за } \oplus\text{)},\\ a \oplus b &= b \oplus a, && \text{(комутативност за } \oplus\text{)},\\ a \otimes (b \otimes c) &= (a \otimes b) \otimes c, && \text{(асоцијативност за } \otimes\text{)},\\ a \otimes b &= b \otimes a, && \text{(комутативност за } \otimes\text{)},\\ a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), && \text{(дистрибутивност)},\\ a \otimes \varepsilon &= \varepsilon, && \text{(апсорпција } \varepsilon = -\infty\text{)},\\ a \oplus a &= a, && \text{(идемпотентност за } \oplus\text{)}. \end{aligned}$$

За произвољно a из $\overline{\mathbb{R}}$ и $s \in \mathbb{N}$, дефинишемо степен броја a са:

$$a^{(s)} = a \otimes a \otimes \ldots \otimes a,$$

при чему се a појављује s пута у горњем изразу. Приметимо да, на основу овог записа, у макс-алгебри важи $a^{(s)} = sa$, за $s \in \mathbb{N}$. На пример, $3^{(4)} = 12$. Ова дефиниција степена може се проширити и на реалне бројеве, тј. за $s \in \mathbb{R}$. Одавде, $a^{-1} = -a$. Осим тога, за $a, s \in \mathbb{R}$ имамо да важи $a^{(s)} = sa = s^{(a)}$, као и $a \otimes a^{-1} = 0$.
Природно уређење на $\overline{\mathbb{R}}$ може се дефинисати помоћу операције $\oplus$:

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = b.$$

Макс-алгебарски збир и производ више различитих бројева означићемо, редом, са:

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{\oplus} a_k = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n, \qquad \text{и} \qquad \prod_{k=1}^{n}{}^{\otimes} a_k = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Такође, кроз овај рад означићемо са $M = \{1, \ldots, m\}$ и $N = \{1, \ldots, n\}$, где су $m, n \in \mathbb{N}$. Нека су A, B и C матрице одговарајућих димензија са елементима из $\overline{\mathbb{R}}$. Тада су макс-алгебарске операције сабирања, множења и множења скаларом дефинисане на следећи начин:

$$\begin{aligned} C &= A \oplus B \quad \text{ако је} \quad c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \text{за свако } i, j;\\ C &= A \otimes B \quad \text{ако је} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_k (a_{ik} + b_{kj}), \quad \text{за свако } i, j;\\ \rho \otimes A &= A \otimes \rho = (\rho \otimes a_{ij}), \quad \text{за свако } \rho \in \overline{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Особине које важе за матрице у макс-алгебри исказане су следећим изразима:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= B \oplus A, && \text{(комутативност за } \oplus\text{)},\\ A \oplus (B \oplus C) &= (A \oplus B) \oplus C, && \text{(асоцијативност за } \oplus\text{)},\\ A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C, && \text{(асоцијативност за } \otimes\text{)},\\ \alpha \otimes (A \oplus B) &= (\alpha \otimes A) \oplus (\alpha \otimes B), && \text{(дистрибутивност у односу на скалар)},\\ A \otimes (B \oplus C) &= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C), && \text{(дистрибутивност)},\\ A \otimes (\alpha \otimes B) &= (\alpha \otimes A) \otimes B, && \text{(правило асоцијације са скаларом)},\\ \alpha \otimes (\beta \otimes A) &= \beta \otimes (\alpha \otimes A), && \text{(комутативност скаларних фактора } \alpha \text{ и } \beta\text{)}. \end{aligned}$$

Дакле, када су у питању матрице, макс-алгебарско множење није комутативно. Такође, важи и $A \oplus \varepsilon = A = \varepsilon \oplus A$, где је ε матрица одговарајућих димензија чији су сви елементи једнаки $-\infty$. Ова матрица је, дакле, неутрални елемент за макс-алгебарско матрично сабирање, што је потпуно аналогно улози нула матрице у класичној линеарној алгебри.
У остатку дисертације, термини *елемент* и *компонента* користе се у истом значењу за појединачне уносе a_{ij} матрице A. Такође, термини *најмањи елемент* и *минималан елемент* сматрају се еквивалентним, уколико није другачије наглашено.
У наставку описујемо неке основне матрице у макс-алгебри, као што су идентична, дијагонална и пермутациона матрица. Пре тога, напоменимо да, као и у класичној линеарној алгебри, $A^\top$ означава *транспоновану* матрицу дате матрице A која се добија на уобичајен начин, тј. тако што одговарајуће врсте и колоне замене места. *Идентична или јединична матрица*, означена са $I \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, квадратна је матрица чији су дијагонални елементи једнаки нули, док су вандијагонални једнаки ε, односно:

$$I = (I_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i = j, \\ -\infty, & \text{ако је } i \neq j, \end{cases}$$

за $i, j \in N$. Иако се разликује од јединичне матрице у класичној линеарној алгебри, формирана је на исти начин: дијагонални елементи су сви једнаки неутралном елементу за $\otimes$, док су сви вандијагонални једнаки неутралном елементу за $\oplus$. Такође, лако се показује да за произвољну матрицу A и јединичну матрицу I које су истих димензија важи:

$$A \otimes I = A = I \otimes A.$$

Дијагонална матрица, у ознаци $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, је квадратна матрица која има вандијагоналне елементе једнаке ε, а дијагоналне $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$:

$$D_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{ако је } i = j, \\ -\infty, & \text{ако је } i \neq j, \end{cases}$$

за неке $d_i \in \mathbb{R}$ и $i, j \in N$. Јединична матрица је уствари специјалан случај дијагоналне, тј. $I = diag(0, 0, \ldots, 0)$.
За дијагоналну матрицу $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ постоји инверзна матрица $D^{-1} = diag(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$ и важи

$$D \otimes D^{-1} = I = D^{-1} \otimes D.$$

Дефиниција 1.2.1 *[23] Матрица добијена пермутовањем врста и/или колона јединичне матрице, назива се пермутациона матрица. Матрица добијена пермутовањем врста и/или колона дијагоналне матрице, назива се генерализована пермутациона матрица.*

Јасно је да за сваку генерализовану пермутациону матрицу $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ постоји пермутација π из скупа N, таква да је

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad j = \pi(i), \tag{1.2.1}$$

за свако $i, j \in N$. Ове матрице су посебно битне у макс-алгебри, јер су једине које имају инверзну матрицу, као што показује следећа теорема.

Теорема 1.2.1 *[45] Нека је $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$. Тада матрица $B = (b_{ij})$ таква да*

$$A \otimes B = I = B \otimes A \tag{1.2.2}$$

постоји ако и само ако је A генерализована пермутациона матрица.

Доказ: Претпоставимо да је A пермутациона матрица и да π представља пермутацију која задовољава (1.2.1). Дефинишемо $B = (b_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ тако да је

$$b_{\pi(i),i} = (a_{i,\pi(i)})^{-1} \quad \text{и} \quad b_{ji} = \varepsilon \text{ ако } j \neq \pi(i).$$

Лако се види да тада важи $A \otimes B = I = B \otimes A$.
Претпоставимо сада да важи (1.2.2), тј.

$$\sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj} = \sum_{k\in N}^{\oplus} b_{ik} \otimes a_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i = j, \\ \varepsilon, & \text{ако је } i \neq j. \end{cases}$$

Стога, за свако $i \in N$ постоји $r \in N$ такав да $a_{ir} \otimes b_{ri} = 0$, одакле је a_{ir}, $b_{ri} \in \mathbb{R}$. Ако би постојало $a_{il} \in \mathbb{R}$ за неко $l \neq r$, тада би важило $b_{ri} \otimes a_{il} \in \mathbb{R}$, што би имплицирало

$$\sum_{k\in N}^{\oplus} b_{rk} \otimes a_{kl} > \varepsilon,$$

а то је контрадикција. Дакле, свака врста матрице A садржи тачно један коначан елемент. На сличан начин се доказује да свака колона матрице A има исту особину. Према томе, A је генерализована пермутациона матрица. □

Дефиниција 1.2.2 *Матрица $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ назива се матрица са $\mathbb{R}-$колонама ($\mathbb{R}$-врстама) [44], ако A не садржи ниједну колону (врсту) чији су сви елементи једнаки ε, односно ако важи $\sum_{i\in M}^{\oplus} a_{ij} \in \mathbb{R}$, за свако $j \in N$ (ако $\sum_{j\in N}^{\oplus} a_{ij} \in \mathbb{R}$, за свако $i \in M$).*

Дефиниција 1.2.3 *Ако је A матрица са $\mathbb{R}-$колонама и $\mathbb{R}$-врстама, онда кажемо да је она дупла $\mathbb{R}$-матрица.*

Матрица A је *коначна* ако ниједан њен елемент није једнак ε. Исто важи и за векторе и скаларе.
За произвољну матрицу $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и $s \in \mathbb{N}$, дефинишемо *степен* матрице A са:

$$A^{(s)} = A \otimes A \otimes \ldots \otimes A,$$

при чему се A појављује s пута у горњем изразу. Макс-алгебарско степеновање матрице слично је ономе у класичној линеарној алгебри. На пример, за одређивање степена $A^{(4)}$, можемо макс-алгебарски квадрирати матрицу $A^{(2)}$, без потребе да одређујемо и матрицу $A^{(3)}$.
Индукцијом се лако доказује следеће својство, специфично за макс-алгебру:

Лема 1.2.1 *За сваку матрицу $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и ненегативан цео број s важи:*

$$(I \oplus A)^{(s)} = I \oplus A \oplus A^{(2)} \oplus \ldots \oplus A^{(s)}. \tag{1.2.3}$$

За матрице $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, поредак је у макс-алгебри дефинисан по компонентама:

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} \leq b_{ij}, \qquad \text{за свако } i \in M, j \in N.$$

Дефиниција 1.2.4 *Нека је* $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *квадратна матрица формата* $n \times n$. *Ако изаберемо скуп индекса* $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *таквих да важи:*

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

тада се квадратна матрица формата $k \times k$ *облика:*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

назива главна подматрица матрице A.

Из саме дефиниције директно следи да је свака главна подматрица нужно квадратна. Уколико подматрица није квадратна, она по дефиницији не може бити главна.
У вези са овим, једно од питања које је проучавано у оквиру макс-аглебре је и проблем најбоље главне подматрице (best principal submatrix problem - BPSM): нека је дата квадратна матрица $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и целобројна константа $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Циљ проблема је пронаћи највећу вредност проблема додељивања (*assignment problem value*) међу свим могућим главним подматрицама формата $k \times k$ матрице A. За дати избор матрице A и константе k, овај проблем се означава са $BPSM(A, k)$. Више о проблему додељивања дато је у Потпоглављу 1.4.3.
Макс-алгебарски полином је функција облика

$$x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \otimes x^{(k)}, \tag{1.2.4}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, за $k \in \{0, \ldots, d\}$. Овде x може бити скалар или квадратна матрица било које димензије. Вредност (k) назива се *степен* полинома, док је $d+1$ његова *дужина*. Скуп $P \subseteq \mathbb{R}^n$ је *макс-алгебарски потпростор* ако за свако $u_1, u_2 \in P$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ важи

$$\alpha_1 \otimes u_1 \oplus \alpha_2 \otimes u_2 \in P. \tag{1.2.5}$$

Ако је X скуп, тада $|X|$ означава кардиналност (величину) скупа X. Такође, по конвенцији, у макс-алгебри важи $\max\{\emptyset\} = \varepsilon$.

1.3 Дирафови и матрице

Иако матрице представљају примарни алгебарски објекат ове дисертације, у пракси је често ефикасније и интуитивније алгебарске проблеме формулисати у језику теорије графова. Проучавање графова је један од примарних фокуса у дискретној математици. Граф се дефинише као уређени пар (V, E), где је V скуп чворова, а E скуп грана. Ојлер је 1736. године поставио чувени „Проблем кенигсбершких мостова“ [58], и та година се сматра почетком развоја теорије графова. Два века касније, 1936. године, написана је прва књига о теорији графова [78]. Графови служе за моделовање широког спектра односа и процеса у различитим доменима [71], укључујући информационе системе [87], физичке феномене [57], друштвене интеракције [53] и биолошке структуре [91]. У рачунарским наукама, графови се користе

за представљање комуникационих мрежа, рачунарских архитектура, структура података, тока управљања, сегментације слика, кластеризације, рударења података и другог ([85], [54], [93]). Штавише, пресек теорије графова и апстрактне алгебре, конкретно алгебарска теорија графова, пружа дубоке увиде у теорију група [36], као и у тополошке инваријанте попут оних које се срећу у теорији чворова. Конкретно, усмерени графови (диграфови) служе као значајан алтернативни алат за моделирање и решавање матричних једначина. Са циљем да успоставимо чврсту везу између ове две дисциплине, у овом делу рада уводимо фундаменталне елементе теорије диграфа, са посебним освртом на тежинске графове који природно одговарају структурама матрица у макс-плус алгебри.

Дефиниција 1.3.1 *Нека су дати скупови V и E такви да је V непразан коначан скуп елемената (називамо га скуп чворова), док је $E \subseteq V \times V$ скуп уређених парова чворова (односно скуп грана). Тада уређени пар $D = (V, E)$ називамо усмерени граф или диграф.*

Дефиниција 1.3.2 *Диграф $D_s = (V_s, E_s)$ назива се поддиграф или субдиграф диграфа $D = (V, E)$ уколико су испуњене инклузије $V_s \subseteq V$ и $E_s \subseteq E$.*

За грану $t = (u, v) \in E$ кажемо да спаја чворове u и v, при чему она *излази* из чвора u и *улази* у чвор v. У случају када грана спаја чвор са самим собом, односно када је облика (u, u) за неко $u \in V$, називамо је *петља*.

Дефиниција 1.3.3 *Нека је $D = (V, E)$ диграф. Стаза или пут диграфа D је низ чворова $\eta = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$, где је $p = 1$, или $p > 1$ и $(v_i, v_{i+1}) \in E$, за свако $i = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Број $p - 1$ назива се *дужина* стазе η и означава се са $l(\eta)$. Ако је u почетни чвор, а v крајњи чвор, за η кажемо да је $u - v$ стаза (пишемо $u \to v$).

Дефиниција 1.3.4 *Нека је $D = (V, E)$ диграф. Низ чворова $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ назива се циклус ако тај низ представља стазу и важи да је $v_1 = v_p$.*

Дефиниција 1.3.5 *Нека је $D = (V, E)$ диграф. Низ чворова $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ назива се елементарни циклус ако је циклус и ако важи $v_i \neq v_j$ за $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$ и $i \neq j$.*

Ако диграф D не садржи циклусе, назива се *ацикличан диграф*.

Дефиниција 1.3.6 *Диграф D је јако повезан ако постоји стаза између свака два различита чвора, тј. ако важи $u \to v$ за свако $u, v \in V$.*

У диграфу се чвор назива *изолован* ако нема улазних ни излазних грана. Изолован чвор је јако повезан и ацикличан.

Дефиниција 1.3.7 *Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ квадратна матрица. Са F_A ћемо означавати диграф $F_A = (N, E(F_A))$, где је $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $E(F_A) = \{(i, j) \mid a_{ij} > \varepsilon\}$.*

Дефиниција 1.3.8 *Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ квадратна матрица. Са Z_A ћемо означавати диграф $Z_A = (N, E(Z_A))$, где је $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $E(Z_A) = \{(i, j) \mid a_{ij} = 0\}$. Z_A називамо нула диграф матрице A.*

Дефиниција 1.3.9 *Матрица A назива се иредуцибилна ако је одговарајући диграф F_A јако повезан. У супротном је редуцибилна.*

Лема 1.3.1 *[34] Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ иредуцибилна и $n > 1$, тада је A дупла $\mathbb{R}$-матрица.*

Доказ: Из иредуцибилности следи да за сваки чвор у F_A постоји грана која излази и грана која улази у тај чвор. Дакле, свака врста и свака колона матрице A садрже бар један коначан елемент, па је стога A дупла $\mathbb{R}$-матрица. □
Међутим, обратно не важи, матрица може бити редуцибилна чак и ако је дупла $\mathbb{R}$-матрица (на пример, јединична матрица I).

Лема 1.3.2 *[34] Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ матрица са $\mathbb{R}-$колонама и $x \neq \varepsilon$, тада је $A^{(k)} \otimes x \neq \varepsilon$ за сваки ненегативан цео број k. Стога, ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ матрица са $\mathbb{R}-$колонама, онда је $A^{(k)}$ матрица са $\mathbb{R}-$колонама за свако такво k. Ово посебно важи када је A иредуцибилна и $n > 1$.*

Доказ: Ако је $x_j \neq \varepsilon$ и $a_{ij} \neq \varepsilon$, тада је i-та компонента од $A \otimes x$ коначна и прва тврдња следи понављањем овог аргумента; друга тврдња следи када се x узме као било која колона матрице A. Трећа тврдња следи из Леме 1.3.1. □

Лема 1.3.3 *[34] Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ матрица са $\mathbb{R}$-врстама или $\mathbb{R}-$колонама, тада F_A садржи циклус.*

Доказ: Без губитка општости претпоставимо да је $A = (a_{ij})$ матрица са $\mathbb{R}$-врстама и нека је $i_1 \in N$ било који чвор. Тада важи $a_{i_1 i_2} > \varepsilon$ за неко $i_2 \in N$. Слично, $a_{i_2 i_3} > \varepsilon$ за неко $i_3 \in N$, и тако даље. Дакле, F_A има гране $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots$ Пошто је N коначан, у низу $i_1, i_2, \ldots$ неки чвор ће се поновити; то доказује постојање циклуса у F_A. □
Тежински граф дефинише се као уређена тројка $D = (V, E, \omega)$, где уређени пар (V, E) представља стандардни граф, док је $\omega : E \to \mathbb{R}$ реална функција тежине додељена гранама. Сви појмови и дефиниције који важе за класичне графове директно се пресликавају и на тежинске графове. За стазу $\eta = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ у тежинском графу D, њену *тежину* рачунамо на следећи начин:

$$\omega(\eta) = \begin{cases} \omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \ldots + \omega(v_{p-1}, v_p), & \text{ако је } p > 1, \\ \varepsilon, & \text{ако је } p = 1. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Кажемо да је пут η *позитиван* уколико важи $\omega(\eta) > 0$. Са друге стране, циклус $\sigma = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ назива се *нула циклус* ако је тежина сваке његове појединачне гране једнака нули, односно када важи $\omega(u_k, u_{k+1}) = 0$ за свако $k = 1, 2, \ldots, p-1$.
Квадратној матрици $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ придружујемо тежински граф $D_A = (N, E, \omega)$, чију структуру диктира граф $F_A = (N, E)$, док је тежинска функција задата елементима матрице, тј. $\omega(i, j) = a_{ij}$ за сваку грану $(i, j) \in E$. Тежину пута $\eta = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ унутар графа D_A означавамо са $\omega(\eta, A) \equiv \omega(\eta)$, и она износи:

$$\omega(\eta, A) = \begin{cases} a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \ldots + a_{i_{p-1} i_p}, & \text{ако је } p > 1, \\ \varepsilon, & \text{ако је } p = 1. \end{cases}$$

Овај поступак је реверзибилан. Уколико имамо тежински граф $D = (N, E, \omega)$ са тежинском функцијом $\omega : E \to \mathbb{R}$, њему можемо једнозначно придружити матрицу $A_D = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ дефинисану изразом:

$$a_{ij} = \begin{cases} \omega(i, j), & \text{ако } (i, j) \in E, \\ \varepsilon, & \text{у супротном,} \end{cases} \qquad \text{за све чворове } i, j \in N. \tag{1.3.2}$$

Матрицу A_D називамо *матрицом директних растојања* придруженом графу D.

Када посматрамо трансформације међу матрицама у макс-плус алгебри, дефинишемо следеће релације.

Дефиниција 1.3.10 *1. Матрице A и B су еквивалентне (у ознаци $A \equiv B$) ако постоји пермутациона матрица P таква да важи: $B = P^{-1} \otimes A \otimes P$. Структурно посматрано, матрица B се добија истовременом пермутацијом врста и колона матрице A.*

2. *Матрице A и B су директно сличне (у ознаци $A \sim B$) ако постоје дијагоналне матрице C и D такве да важи: $B = C \otimes A \otimes D$. То значи да се матрица B генерише додавањем коначних константи врстама и/или колонама матрице A.*

3. *Матрице A и B су сличне (у ознаци $A \approx B$) ако постоје генерализоване пермутационе матрице P и Q такве да важи: $B = P \otimes A \otimes Q$. Дакле, B се добија комбиновањем пермутације врста и колона са додавањем коначних константи врстама и колонама матрице A.*

4. *Кажемо да је матрица B добијена из матрице A дијагоналним скалирањем (или једноставније, скалирањем матрице) ако постоји дијагонална матрица X за коју важи: $B = X^{-1} \otimes A \otimes X$.*

Све наведене релације испуњавају услове релација еквиваленције (рефлексивност, симетричност и транзитивност). Треба напоменути и да сличност матрица A и B директно произилази из њихове директне сличности или еквивалентности, док дијагонално скалирање представља специфичан облик директне сличности. Осим тога, диграфови матрица које су сличне, директно сличне или еквивалентне имају нека специфична својства, што је објашњено у уводном делу Поглавља 4.3.

1.4 Фундаментални макс-алгебарски концепти и методе

У макс-алгебри операција $\oplus$ нема својство инвертибилности, па се инверзна матрица у општем случају не може дефинисати. Ова чињеница ограничава примену стандардних поступака линеарне алгебре у макс-алгебри и намеће потребу за развојем алтернативних метода које ће омогућити решавање основних макс-алгебарских проблема. Овде укратко наводимо најзначајније алате који су дефинисани у том циљу.

1.4.1 Максимална средња вредност циклуса

Дефиниција 1.4.1 *Нека је $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и нека је σ циклус у одговарајућем тежинском диграфу D_A. Средња вредност циклуса σ, у ознаци $\mu(\sigma, A)$, дефинише се као сума тежина свих грана тог циклуса подељена дужином циклуса. Симболички:*

$$\mu(\sigma, A) = \frac{\omega(\sigma, A)}{l(\sigma)}, \tag{1.4.1}$$

где је $\omega(\sigma, A)$ тежина циклуса σ у односу на A, а $l(\sigma)$ означава дужину тог циклуса.

Дефиниција 1.4.2 *Максимална средња вредност циклуса матрице A, означена са $\lambda(A)$, дефинише се као*

$$\lambda(A) = \max_{\sigma} \mu(\sigma, A), \tag{1.4.2}$$

при чему се максимум узима преко свих елементарних циклуса у D_A.

Пошто је број елементарних циклуса коначан, $\lambda(A)$ увек постоји. Како је $\max\{\emptyset\} = \varepsilon$, то је јасно да је D_A ацикличан дограф ако и само ако је $\lambda(A) = \varepsilon$. Такође, важи и следећа теорема.

Теорема 1.4.1 *Вредност $\lambda(A)$ остаје непромењена и када се максимум узима преко свих циклуса у D_A, а не само преко елементарних.*

Доказ: Потребно је показати да за сваки циклус σ у D_A важи $\mu(\sigma, A) \leq \lambda(A)$. Нека је σ произвољан циклус. Тада се σ може раставити на елементарне циклусе $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$, за неко $t \geq 1$. По дефиницији максималне средње вредности циклуса и дужине циклуса важи:

$$\omega(\sigma, A) = \sum_{i=1}^{t} \omega(\sigma_i, A) \leq \sum_{i=1}^{t} l(\sigma_i)\,\lambda(A) \qquad \text{и} \qquad l(\sigma) = \sum_{i=1}^{t} l(\sigma_i).$$

Комбиновањем добијамо

$$\mu(\sigma, A) = \frac{\omega(\sigma, A)}{l(\sigma)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{t} l(\sigma_i)\,\lambda(A)}{\sum_{i=1}^{t} l(\sigma_i)} = \lambda(A).$$

Овим је доказ завршен. □

Следеће тврђење следи директно из Леме 1.3.1 и Леме 1.3.3.

Лема 1.4.1 *[34] Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ матрица са $\mathbb{R}$-врстама или $\mathbb{R}$-колонама, тада важи $\lambda(A) > \varepsilon$. Ово важи посебно када је A иредуцибилна матрица и $n > 1$.*

Велики значај максималне средње вредности циклуса огледа се у чињеници да је $\lambda(A)$ највећа (макс-алгебарска) сопствена вредност сваке квадратне матрице A, а свака сопствена вредност матрице A представља максималну средњу вредност циклуса неке њене главне подматрице. Осим тога, то је једина сопствена вредност чији одговарајући сопствени вектори могу бити коначни.

Дефиниција 1.4.3 *Матрица $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ назива се растућа (increasing) ако су сви њени дијагонални елементи ненегативни, тј. ако за свако $i \in N$ важи $a_{ii} \geq 0$.*

Јасно је да у том случају важи и $A = I \oplus A$, где је I јединична матрица.

Лема 1.4.2 *[34] Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ растућа матрица, тада за свако $x \in \overline{\mathbb{R}}^{n}$ важи да је $x \leq A \otimes x$. Одатле следи*

$$A \leq A^2 \leq A^3 \leq \ldots.$$

Дефиниција 1.4.4 *[37,45] Матрица A се назива дефинитна (definite) ако је максимална средња вредност циклуса те матрице једнака нули, тј. важи $\lambda(A) = 0$.*

Дакле, матрица је дефинитна ако и само ако су сви циклуси у D_A непозитивни, при чему бар један има тежину нула.

Дефиниција 1.4.5 *Матрица A се назива јако дефинитна ако је истовремено дефинитна и растућа.*

Како дијагонални елементи матрице A одговарају тежинама петљи у дографу, јака дефинитност матрице имплицира да је $a_{ii} = 0$, за свако $i \in N$.
За матрицу кажемо да је непозитивна ако не садржи циклусе чија је тежина већа од нуле.

Дефиниција 1.4.6 *Матрица A се назива нормална ако је непозитивна матрица са нула дијагоналом, док је строго нормална ако је нормална матрица чији су сви вандијагонални елементи негативни.*

Дефиниција 1.4.7 *Нормална матрица која је слична матрици A назива се нормална форма матрице A и она не мора да буде јединствена.*

За матрицу $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и одговарајући дограф D_A, циклус $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ назива се *критичан* уколико његова тежина достиже максималну вредност, односно када важи $\mu(\sigma, A) = \lambda(A)$.
Скуп чворова који припадају неком од ових циклуса представља *скуп критичних (или сопствених) чворова* и симболички се дефинише као:

$$N_c(A) = \{i \in N \mid \exists \sigma \text{ у } D_A \text{ тако да је } i \in \sigma \text{ и } \mu(\sigma, A) = \lambda(A)\}.$$

Дефиниција 1.4.8 *Критични дограф у ознаци $C(A)$ јесте подграф графа D_A чији је скуп чворова цео скуп N, док је скуп грана $E_c(A)$ генерисан искључиво гранама које учествују у критичним циклусима. По конструкцији, сваки циклус у овом диграфу је критичан.*

Код матрица мањих димензија, одређивање $\lambda(A)$ по дефиницији је релативно једноставно. Међутим, са порастом димензије матрице проблем постаје све сложенији. Одређивање максималне средње вредности циклуса проучавано је и у оквиру комбинаторне оптимизације, независно од макс-алгебре, што је довело до развоја више метода. Без детаљнијег уласка у те приступе, овде напомињемо да се међу доступним техникама за одређивање $\lambda(A)$ могу користити Воробјова формула сложености $O(n^4)$ [107] и Карпов алгоритам [76]. По Воробјовој формули је

$$\lambda(A) = \max_{k\in N} \max_{i\in N} \frac{a_{ii}^{(k)}}{k},$$

где је $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), k \in N$. С друге стране, на основу Карповог алгоритма, ако је $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ иредуцибилна матрица, онда је

$$\lambda(A) = \max_{j\in N} \min_{k\in N} \frac{F_{n+1}(j) - F_k(j)}{n+1-k}.$$

Вредности $F_k(j)$ могу се рачунати по рекурентној формули

$$F_k(j) = \max_{(i,j)\in E} (F_{k-1}(i) + a_{ij}), \qquad k = 2, 3, \ldots, n+1,$$

са почетним условима $F_1(j) = a_{sj}$, за свако $j \in N$ и неко $s \in N$.

1.4.2 Транзитивна затворења

Један од кључних проблема у макс-алгебри је такозвани сопствени проблем (eigenproblem), односно проблем одређивања сопствених вредности/сопствених вектора (eigenvalue/eigenvector problem). Овај проблем разматран је већ у првим радовима из макс-алгебре [45, 107], а састоји се у следећем: за дату матрицу $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, одредити све вредности $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ (сопствене вредности) и све векторе $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$, $x \neq \varepsilon$ (сопствене векторе) тако да важи

$$A \otimes x = \lambda \otimes x. \tag{1.4.3}$$

Да бисмо описали сва решења горње једнакости, користимо матрицу коју ћемо означити са $\Gamma(A)$, а која се дефинише као бесконачни ред:

$$\Gamma(A) = A \oplus A^{(2)} \oplus A^{(3)} \oplus \dots \tag{1.4.4}$$

Осим једнакости (1.4.3), можемо посматрати и одговарајућу неједнакост:

$$A \otimes x \leq \lambda \otimes x, \qquad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.4.5}$$

Сва коначна решења ове неједнакости могу се описати помоћу матрице $\Delta(A)$, коју дефинишемо као:

$$\Delta(A) = I \oplus \Gamma(A) = I \oplus A \oplus A^{(2)} \oplus A^{(3)} \oplus \dots \tag{1.4.6}$$

Решења различита од ε у овом случају се називају *субсопствени вектори*. Скуп свих субсопствених вектора матрице $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ који одговарају вредности $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ означићемо са:

$$V^*(A,\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | A \otimes x \leq \lambda \otimes x\}. \tag{1.4.7}$$

Ако једнакости (1.4.4) и (1.4.6) конвергирају ка матрицама које не садрже $+\infty$, онда се $\Gamma(A)$ назива *слабо транзитивно затворење*, док се матрица $\Delta(A)$ назива *јако транзитивно затворење* од A.
Матрица $\Gamma(A)$ уствари представља тежине најтежих стаза било које дужине за сваки пар чворова. Због тога се $\Gamma(A)$ назива *метричка матрица* [45] која одговара матрици A. Матрица $\Delta(A)$ се често назива *Клинијева звезда* [2].
Када посматрамо слабо транзитивно затворење, разликујемо два случаја у зависности од вредности $\lambda(A)$:

- Ако је $\lambda(A) \leq 0$, сви циклуси у диграфу D_A имају непозитивне тежине. У овом случају, матрица $\Gamma(A)$ постоји и може се израчунати као $A \oplus A^{(2)} \oplus \dots \oplus A^{(n)}$.
- Ако је $\lambda(A) > 0$, у диграфу D_A постоји бар један циклус са позитивном тежином. Услед тога, вредност на најмање једној позицији у матрици $A^{(k)}$ $(k \geq 1)$ неограничено расте када $k \to \infty$. То за последицу има да је бар једна компонента матрице $\Gamma(A)$ једнака $+\infty$.

Додатно, уколико је матрица A иредуцибилна, $\Gamma(A)$ је коначна матрица.
Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ растућа матрица (Дефиниција 1.4.3), тада су матрице $\Gamma(A)$ и $\Delta(A)$ идентичне, с обзиром на то да у том случају важи релација $A = I \oplus A$.
Што се тиче матрице $\Delta(A)$, навешћемо неке њене особине које се лако доказују имајући на уму формулу из Леме 1.2.1. На основу ње, имамо да важи

$$\Delta(A) = \Gamma(I \oplus A). \tag{1.4.8}$$

Лема 1.4.3 *[34] Ако је матрица $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ јако дефинитна, онда је*

$$\Gamma(A) = \Delta(A) = A^{(n-1)} = A^{(n)} = A^{(n+1)} = \dots \tag{1.4.9}$$

Теорема 1.4.2 *[34] За произвољну матрицу $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и $\lambda(A) \leq 0$ важи:*

1. $\Delta(A) = I \oplus A \oplus A^{(2)} \dots \oplus A^{(n-1)}$,
2. $(\Delta(A))^{(k)} = \Delta(A)$, *за свако* $k \geq 1$,
3. $A \otimes \Delta(A) = \Gamma(A)$.

Као последицу претходног можемо навести чињеницу да $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ јесте Клинијева звезда ако и само ако је $A^{(2)} = A$ и $a_{ii} = 0$, за свако $i \in N$.
Напоменимо и то да се за рачунање матрица $\Gamma(A)$ и $\Delta(A)$ може користити *Флојд-Варшалов* алгоритам [44, 90].

1.4.3 Проблем додељивања

Макс-алгебарски перманент и проблем додељивања могу имати битну улогу у решању проблема у оквиру макс-алгебре, као не пример код разматрања јединствене решивости система једначина. У наставку наводимо неке од најважнијих дефиниција и особина, а више се може наћи, на пример, у [13, 19, 21, 32].
За скуп $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ означићемо са P_n скуп одговарајућих пермутација. Идентична пермутација ће бити означена са id.
Макс-алгебарски перманент (или само *перманент*) матрице $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ дефинише се као

$$maper(A) = \sum_{\pi\in P_n}{}^{\oplus} \prod_{i\in N}{}^{\otimes} a_{i,\pi(i)}, \tag{1.4.10}$$

односно у стандардном запису имамо

$$maper(A) = \max_{\pi\in P_n} \sum_{i\in N} a_{i,\pi(i)}. \tag{1.4.11}$$

За $\pi \in P_n$ *тежина пермутације* π (у односу на A) је

$$\omega(\pi, A) = \prod_{i\in N}{}^{\otimes} a_{i,\pi(i)} = \sum_{i\in N} a_{i,\pi(i)}, \tag{1.4.12}$$

па можемо писати: $maper(A) = \max_{\pi\in P_n} \omega(\pi, A)$.
Проблем додељивања (assignment problem) за матрицу A суштински се своди на проналажење оптималне пермутације $\pi \in P_n$ која има максималну тежину. Најефикаснији метод за решавање проблема додељивања је такозвани Мађарски метод [20, 21, 80, 90], са сложеношћу $O(n^3)$. Постоје и друге методе, на пример, у [89] је за проблем додељивања предложен алгоритам који је комбинација друга два алгоритма, и има сложеност $O(\sqrt{n}m\log(nA_{max}))$, при чему је m број коначних елемената у матрици A, док је A_{max} највећи елемент те матрице. Уствари, макс-алгебарски перманент од A је оптимална вредност проблема додељивања за A и, супротно перманенту у класичној линеарној алгебри, може се ефикасно пронаћи. С обзиром на то да у макс-алгебри операција одузимања није дефинисана, не можемо описати ни детерминанту матрице, што додатно даје на значају макс-алгебрском перманенту.
Ако је $\omega(\pi, A) = maper(A)$, онда кажемо да је π оптимална пермутација (оптимално решење) за проблем додељивања за матрицу A. Може постојати више од једне оптималне пермутације. Скуп свих оптималних пермутација за проблем додељивањ означићемо са:

$$ap(A) = \{\pi \in P_n | \omega(\pi, A) = maper(A)\}. \tag{1.4.13}$$

Теоријска основа Мађарског метода заснива се на инваријантности скупа оптималних решења проблема додељивања у односу на додавање константи врстама или колонама матрице A. Формалније исказано, уколико су матрице A и B директно сличне ($A \sim B$), тада су и њихови скупови оптималних решења идентични, односно важи $ap(A) = ap(B)$.

Приликом имплементације Мађарског метода, без губљења општости се претпоставља постојање барем једне пермутације $\pi \in P_n$ за коју је тежина $\omega(\pi, A)$ коначна, што је еквивалентно услову $\text{maper}(A) > \varepsilon$. Додавањем адекватних константи врстама и колонама, свака матрица која испуњава овај услов трансформише се у непозитивну матрицу B. Ова трансформација се врши тако да важи $\omega(\pi, B) = 0$ за најмање једну пермутацију $\pi \in P_n$, одакле непосредно следи $\text{maper}(B) = 0$. Будући да су матрице A и B директно сличне, њихови скупови оптималних решења се поклапају ($ap(A) = ap(B)$). Захваљујући специфичној структури матрице B, оптималне пермутације за матрицу B (па самим тим и за полазну матрицу A) проналазе се једноставним одабиром нултих елемената из B:

$$ap(A) = ap(B) = \left\{\pi \in P_n \mid b_{i,\pi(i)} = 0\right\}. \tag{1.4.14}$$

Дефиниција 1.4.9 *Матрица A има јак перманент ако је оптимална пермутација проблема додељивања јединствена тј. ако је $|ap(A)| = 1$.*

Дефиниција 1.4.10 *За матрицу кажемо да је дијагонално доминантна ако идентична пермутација припада скупу $ap(A)$, тј. ако је $id \in ap(A)$.*

Такође, лако се показује да важи и следеће: ако је $A \approx B$, онда је $|ap(A)| = |ap(B)|$. Подсетимо се да се непозитивна матрица са нула дијагоналом назива нормална, као што је описано у Дефиницији 1.4.6. Јасно је да свака нормална матрица јесте јако дефинитна, али не и обрнуто. У истој дефиницији описана је и строго нормална матрица. Очигледно, ова матрица има јак перманент. На основу ових дефиниција, закључујемо да за матрице у макс-алгебри важи:

Строго нормална	$\Rightarrow$	Нормална	$\Rightarrow$	Јако дефинитна	$\Rightarrow$	Дијаг. доминантна

Уколико матрица има коначан перманент онда је она слична са нормалном матрицом, тј. постоје генерализоване пермутационе матрице P_1 и P_2 такве да је $P_1 \otimes A \otimes P_2$ нормална. Нормална матрица слична матрици A не мора да буде јединствена. Свака таква матрица називаће се, као што је раније речено, нормална форма (Дефиниција 1.4.7) од A и она се може пронаћи применом Мађарске методе.

Теорема 1.4.3 *[35] Квадратна матрица има јак перманент ако и само ако нула дограф произвољне (а самим тим и сваке) њене нормалне форме не садржи друге циклусе осим петљи (тј. Z_B постаје ацикличан када се све петље уклоне).*

Такође, у вези са овом проблематиком може се разматрати и питање парности оптималних пермутација за проблем додељивања [32].

1.4.4 Дуалне операције и конјугација

Одсуство операције одузимања у макс-алгебри, као и чињеница да су инверзне матрице дефинисане само унутар класе генерализованих пермутационих матрица, значајно ограничавају стандардни алгебарски апарат. Како би се компензовали ови недостаци, у литератури се конструише дуалан пар операција [43].
За елементе проширеног скупа реалних бројева $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$, ови оператори се уводе следећим релацијама:

$$a \oplus' b = \min\{a, b\}, \tag{1.4.15}$$

$$a \otimes' b = a + b, \quad \text{за } \{a, b\} \neq \{-\infty, +\infty\}. \tag{1.4.16}$$

Додатно, за нестандардне комбинације бесконачних вредности усваја се аритметичко правило:

$$(-\infty) \otimes' (+\infty) = +\infty = (+\infty) \otimes' (-\infty). \tag{1.4.17}$$

Проширење пара операција $(\oplus', \otimes')$ на матрице и векторе врши се аналогно стандардном пару $(\oplus, \otimes)$. Непосредно се може проверити да сва својства која важе у оквиру алгебре $(\oplus, \otimes)$ остају на снази и након замене операција са $\oplus'$ и $\otimes'$, уз истовремену инверзију свих знакова неједнакости.

Дефиниција 1.4.11 *За матрицу $A = (a_{ij}) \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$, конјугована матрица, у ознаци A^*, дефинише се као њена негативна транспонована матрица, тј.:*

$$A^* = -A^\top \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}. \tag{1.4.18}$$

С обзиром да се конјугована матрица дефинише на скупу који садржи $-\infty$ и $+\infty$, напоменимо да важи следеће: $(-\infty)^* = +\infty$ и $(+\infty)^* = -\infty$.

Теорема 1.4.4 *[43] Ако је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$, $b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$ и $x \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n}$ онда*

$$A \otimes x \leq b \quad \text{ако и само ако} \quad x \leq A^* \otimes' b.$$

Последица 1.4.1

1. *Ако је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и $v \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$ онда је $A \otimes (A^* \otimes' v) \leq v$.*
2. *Ако је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times k}$ онда је $A \otimes (A^* \otimes' B) \leq B$.*
3. *Ако је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times k}$ онда је $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes B)) = A \otimes B$.*

Конјугација се може такође користити да се изрази $\lambda(A)$ преко њених коначних субсопствених вектора:

Лема 1.4.4 *Нека је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ и $\lambda(A) > \varepsilon$. Ако $z \in V^*(A, \lambda(A))$ онда*

$$\lambda(A) = z^* \otimes A \otimes z = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \{x^* \otimes A \otimes x\}. \tag{1.4.19}$$

У наставку ћемо доказати нека својства која важе за конјуговану матрицу у макс-алгебри. Као што ћемо видети, та својства проистичу и лако се доказују на основу самог начина на који је ова матрица дефинисана. Својства конјуговане матрице од огромног су значаја код решавања макс-линеарних система. Осим тога, матрице које су предмет ове дисертације се добијају као макс-алгебарски производ неке матрице и њене конјуговане матрице, о чему ће више речи бити у Глави 3.

Теорема 1.4.5 *За матрицу $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и скалар $\theta \in \mathbb{R}$ важи:*
1. $(A^*)^* = A$; *2.* $(\theta \otimes A)^* = -\theta \otimes A^*$.

Доказ:

1. Из Дефиниције 1.4.11, лако добијамо да је:

$$(A^*)^* = (a_{ij}^*)^* = (-a_{ji})^* = -(-a_{ij}) = (a_{ij}) = A. \tag{1.4.20}$$

2.

$$(\theta \otimes A)^* = \begin{pmatrix} \theta + a_{11} & \dots & \theta + a_{1n} \\ \vdots & & \\ \theta + a_{m1} & \dots & \theta + a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\theta - a_{11} & \dots & -\theta - a_{m1} \\ \vdots & & \\ -\theta - a_{1n} & \dots & -\theta - a_{mn} \end{pmatrix} = -\theta \otimes A^*. \tag{1.4.21}$$

Овим је доказ завршен. □

Теорема 1.4.6 *За матрице* $A, B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ *важи:*
1. $(A \oplus' B)^* = A^* \oplus B^*$; *2.* $(A \oplus B)^* = A^* \oplus' B^*$.

Доказ:

1. Нека је $C = A \oplus' B$ и $D = A^* \oplus B^*$. Доказаћемо да је $c_{ij}^* = d_{ij}$, за свако $i, j \in N$. Пре тога наводимо својство које поседују елементи скупа $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$. За произвољне елементе $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ важи:

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} = -\min\{-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n\}. \tag{1.4.22}$$

На основу овога, лако се закључује да за свако $i, j \in N$ важи:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \max\{a_{ij}^*, b_{ij}^*\} = \max\{-a_{ji}, -b_{ji}\} = -\min\{-(-a_{ji}), -(-b_{ji})\} \\ &= -\min\{a_{ji}, b_{ji}\} = -c_{ji} = c_{ij}^*. \end{aligned}$$

2. Аналогно као у случају 1.

Тиме је комплетиран доказ овог тврђења. □
Специфичне особине матрица добијају се ако комбинујемо услове конјугације и симетричности. Иако је више о симетричним матрицама у макс-алгебарском контексту дато касније, у Поглављу 3.1, кроз следећу теорему наводимо два једноставна својства ових матрица у комбинацији са конјугацијом.

Теорема 1.4.7 *За симетричне матрице* $A, B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ *важи:*
1. $-(A \otimes B) = A^* \otimes' B^*$; *2.* $-(A \otimes' B) = A^* \otimes B^*$.

Доказ:

1. Нека је $C = A \otimes B$ и $D = A^* \otimes' B^*$. С обзиром да су матрице A и B, по услову теореме, симетричне, то важи: $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$, за свако $i, j \in N$. Имајући то у виду, као и једнакост (1.4.22), сада добијамо:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \min_{k\in N}\{a_{ik}^* + b_{kj}^*\} = \min_{k\in N}\{-a_{ki} - b_{jk}\} = \min_{k\in N}\{-(a_{ki} + b_{jk})\} \\ &= -\max_{k\in N}\{-(-(a_{ki} + b_{jk}))\} = -\max_{k\in N}\{a_{ki} + b_{jk}\} \\ &= -\max_{k\in N}\{a_{ik} + b_{kj}\} = -c_{ij}, \end{aligned}$$

одакле је јасно да важи тврђење 1. ове теореме.

2. Означимо са $E = A \otimes' B$ и $F = A^* \otimes B^*$. У овом случају за свако $i, j \in N$ важи:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \max_{k\in N}\left\{a^*_{ik} + b^*_{kj}\right\} = \max_{k\in N}\left\{-a_{ki} - b_{jk}\right\} = \max_{k\in N}\left\{-(a_{ki} + b_{jk})\right\} \\ &= -\min_{k\in N}\left\{-(-(a_{ki} + b_{jk}))\right\} = -\min_{k\in N}\left\{a_{ki} + b_{jk}\right\} \\ &= -\min_{k\in N}\left\{a_{ik} + b_{kj}\right\} = -e_{ij}, \end{aligned}$$

одакле одмах следи да важи и тврђење 2. ове теореме.

Тиме је доказ комплетиран. □
Напоменимо и то да претходна теорема неће важити без услова да су A и B симетричне матрице, у шта је лако уверити се. Такође, преко дефиниције макс-алгебарског множења матрица једноставно се проверава да важи и $(A \otimes B)^* = B^* \otimes' A^*$.

Теорема 1.4.8 *За матрицу* $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *важи:*
1. $A \oplus A^* = (A \oplus' A^*)^*$; *2.* $A \otimes A^* = (A \otimes' A^*)^*$.

Доказ:

1. На основу Теореме 1.4.6, особине $(A^*)^* = A$ и чињенице да за матрице важи комутативност операције $\oplus$, имамо да је:

$$(A \oplus' A^*)^* = A^* \oplus (A^*)^* = A^* \oplus A = A \oplus A^*.$$

2. Нека је $C = A \otimes A^*$ и $D = A \otimes' A^*$. Доказаћемо да је $D^* = C$. Имајући у виду везу (1.4.22) између максимума и минимума, важиће:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \max_{k\in N}\left\{a_{ik} + a^*_{kj}\right\} = \max_{k\in N}\left\{a_{ik} - a_{jk}\right\} = \max_{k\in N}\left\{-(-a_{ik} + a_{jk})\right\} \\ &= -\min_{k\in N}\left\{-a_{ik} + a_{jk}\right\} = -\min_{k\in N}\left\{a^*_{ki} + a_{jk}\right\} = -\min_{k\in N}\left\{a_{jk} + a^*_{ki}\right\} \\ &= -d_{ji} = d^*_{ij}. \end{aligned}$$

Овим је теорема доказана. □

Пример 1.4.1 *Нека је дата матрица*

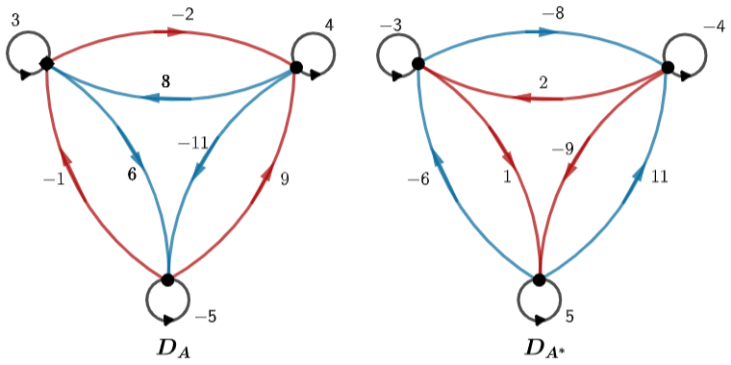
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -11 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Тада је:} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 1 \\ 2 & -4 & -9 \\ -6 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Примењујући операције $\oplus$ *и* $\otimes$*, као и* $\oplus'$ *и* $\otimes'$*, добија се:*

$$A \oplus A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -9 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{и} \qquad A \oplus' A^* = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 1 \\ 2 & -4 & -11 \\ -6 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A \otimes A^* = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 11 \\ 6 & 0 & 9 \\ 11 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{и} \qquad A \otimes' A^* = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -11 \\ -17 & 0 & -6 \\ -11 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Јасно је да и у првом и у другом случају лева страна је једнака конјугованој матрици десне стране. Следи приказ диграфова који одговарају матрицама A *и* A^*.



Слика 1.1: Дирграфови који одговарају матрицама A и A^*

Очигледно је да је број чворова и грана исти код матрица A и A^*, а тежине грана између одговарајућих чворова су „замениле места“ уз промену знака.

Такође, лако се могу доказати и следеће особине, које важе за произвољне матрице одговарајућих димензија [43]:

$$A \otimes (A^* \otimes' A) = A \otimes' (A^* \otimes A) = (A \otimes' A^*) \otimes A = (A \otimes A^*) \otimes' A = A,$$

$$A^* \otimes (A \otimes' A^*) = A^* \otimes' (A \otimes A^*) = (A^* \otimes' A) \otimes A^* = (A^* \otimes A) \otimes' A^* = A^*,$$

$$A \otimes (A^* \otimes' B) \leq B \leq A \otimes' (A^* \otimes B),$$

$$A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes X)) = A \otimes X.$$

На крају овог дела, само ћемо напоменути да у макс-алгебри поред конјугације, још један значајан алат јесте оператор балансирања. Код решавања макс-линеарних система једначина, некад је корисно увести симетризоване полупрстене [10], а управо у оквиру њих дефинише се тзв. релација балансирања, односно оператор балансирања [60], који на неки начин омогућава да се превазиђу потешкоће настале због непостојања инверзне операције за сабирање, тј. због непостојања негативних елемената. Теорија везана за ову проблематику није предмет ове дисертације, а опширнији преглед и дубља анализа могу се наћи, поред наведених радова, на пример, и у [62, 92].

Глава 2

Макс-линеарни системи

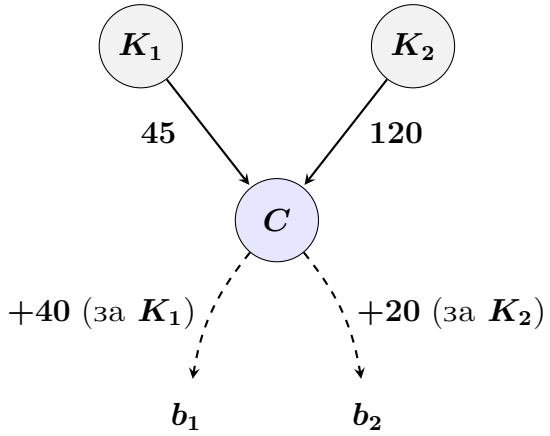
Макс-линеарни системи једначина представљају један од централних сегмената проучавања у оквиру макс-плус алгебре, где су стандардне операције сабирања и множења замењене макс-алгебарским операцијама максимума $\oplus$ и сабирања $\otimes$. У зависности од позиције непознатих променљивих, ови системи се примарно класификују на једностране [42, 107, 111] и двостране [25, 48] системе једначина. Једнострани системи имају облик $A \otimes x = b$ и знатно су једноставнији за анализу, док су двострани системи генерално тежи за решавање. До данас, бројне методе за решавање макс-линеарних система су развијене. Овде ћемо поменути најважније облике макс-линеарних система и методе за њихово решавање. У оквиру једностраних система, укратко ћемо описати комбинаторни и алгебарски метод, као и нерешиве системе. У оквиру двостраних, може се говорити о хомогеним и нехомогеним системима, као и о системима са раздвојеним променљивама. Скуп решења хомогених система је коначно генерисан, што је изложено у Потпоглављу 2.3.3. Посебан значај има тзв. Наизменични метод [48] за решавање двостраних система са раздвојеним променљивама, који је описан у Потпоглављу 2.3.2. Касније, у Глави 5, изложено је истраживање везано за број итерација код овог метода. Пре свега наведеног, са циљем да се најпре прикаже практична мотивација за увођење ових структура, прво поглавље посвећујемо моделовању неких реалних система применом техника и алата макс-плус алгебре.

2.1 Моделирање реалних система применом макс-алгебре

Као што је изложено у уводном делу дисертације, макс-плус алгебра има широку примену како у теорији, тако и у пракси. Бројни примери практичних проблема који се успешно моделирају техникама макс-алгебре могу се наћи у литератури, не пример, у [10], [40] и [98].
У овом поглављу наводимо неколико репрезентативних примера у циљу илустрације основних концепата и демонстрације начина на који се реални процеси преводе у макс-плус матричне једначине.

Пример 2.1.1 *Два доставна камиона, K_1 и K_2, стижу у дистрибутивни центар C након времена кретања од* 45 *и* 120 *минута са својих полазних тачака. Пакетима који се претоварују из K_1 у K_2 потребно је* 20 *минута за сортирање. Са друге стране, пакетима који прелазе из K_2 у K_1 потребно је* 40 *минута због додатне царинске и безбедносне контроле. Камиони морају да напусте дистрибутивни центар C у тачно планираним*

тренуцима b_1 и b_2. Када ови камиони морају најкасније да крену са својих полазних позиција?



Слика 2.1: Графички приказ логистичких токова и временских ограничења у дистрибутивном центру C.

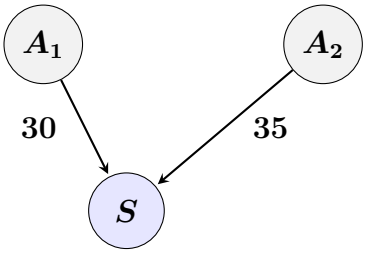
Како бисмо поставили овај модел, уводимо промењиве x_1 и x_2 које означавају времена поласка камиона са почетних локација, док b_1 и b_2 представљају времена отпремања из центра C. Добијамо следећи систем услова:

$$b_1 = \max\{x_1 + 45, x_2 + 120 + 40\},$$
$$b_2 = \max\{x_1 + 45 + 20, x_2 + 120\}.$$

Овај логистички проблем се може формално записати као линеарни систем једначина у макс-плус алгебри облика $A \otimes x = b$, где структуру система описују матрица A и вектор полазака x:

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 160 \\ 65 & 120 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Пример 2.1.2 *У аутоматизованој фабрици, две покретне траке, T_1 и T_2, раде циклично и допремају компоненте са својих почетних позиција A_1 и A_2 до заједничког роботског чвора за склапање S. Траке започињу свој радни циклус r на позицијама A_1 и A_2 у тренуцима $x_1(r)$ и $x_2(r)$, респективно. Да би робот у чвору S успешно спојио делове, компоненте са једне траке морају да сачекају 10 минута након доласка компоненти са друге траке пре него што процес може да се настави. Трака T_1 путује 30 минута од A_1 до S, док трака T_2 путује 35 минута од A_2 до S. Нека $x_1(r)$ и $x_2(r)$ означавају вре-*



Слика 2.2: Схема технолошког процеса и кашњења на тракама T_1 и T_2.

мена покретања траке T_1 и траке T_2 са својих почетних позиција у циклусу r. Како би

започео нови циклус r, претходни циклус $r-1$ мора бити потпуно завршен на обезбеђеним тракама, уз урачунато време транспорта и синхронизације у чвору S (приказано на Слици 2.2). Временска еволуција овог производног процеса развија се према следећем систему:

$$x_1(r) = \max\{x_1(r-1)+30, x_2(r-1)+35+10\}+30,$$
$$x_2(r) = \max\{x_1(r-1)+30+10, x_2(r-1)+35\}+35.$$

Користећи формализам макс-плус алгебре, овај динамички систем се може компактно представити преко линеарне рекурентне једначине облика $x(r) = A \otimes x(r-1)$, где је матрица стања система A дефинисана као:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 75 \\ 75 & 70 \end{pmatrix}, \qquad x(r) = \begin{pmatrix} x_1(r) \\ x_2(r) \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

Пример 2.1.3 *[10] Посматрајмо систем редова чекања који се састоји од четири сервера постављена у серију, означена са S_i $(i = 1,2,3,4)$. Сваки клијент пролази кроз ове сервере стриктно у наведеном редоследу: прво кроз S_1, затим кроз S_2, S_3 и на крају кроз S_4.*



Слика 2.3: Систем редова чекања са четири сервера у серији без бафера

Нека $\tau_i(k)$ означава време потребно серверу S_i да услужи k-тог клијента $(k = 1,2,\ldots)$. Клијент k стиже у систем у тренутку $u(k)$ и улази у бафер (међуспремник) испред првог сервера S_1. Кључна карактеристика овог модела јесте да између самих сервера не постоје бафери. Последица овакве топологије је следећа: ако сервер S_i $(i = 1,2,3)$ заврши услуживање клијента k, а наредни сервер S_{i+1} је још увек заузет услуживањем претходног клијента $(k-1)$, сервер S_i бива блокиран, тј. он не може започети услуживање новог клијента $(k+1)$ и приморан је да чека. Претпоставља се да су времена транспорта између самих сервера једнака нули.
Нека $x_i(k)$ означава тренутак почетка услуживања k-тог клијента на серверу S_i. Да би сервер S_i могао да започне рад на клијенту $k+1$, морају бити испуњена следећа три услова:

- *S_i мора завршити услуживање тренутног клијента k.*
- *S_{i+1} мора бити слободан (услов је празан за $i = 4$, јер након њега нема даљег блокирања).*
- *S_{i-1} мора завршити услуживање клијента $k+1$ (за $i = 1$ овај услов заправо представља тренутак доласка клијента $u(k+1)$ у систем).*

Узимајући у обзир ове синхронизационе услове и користећи операције макс-плус алгебре, вектор стања $x(k+1) = (x_1(k+1), x_2(k+1), x_3(k+1), x_4(k+1))^\top$ задовољава следећу

имплицитну векторску једначину:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1(k+1) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_2(k+1) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_3(k+1) & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes x(k+1) \tag{2.1.3}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \tau_1(k) & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_2(k) & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_3(k) & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_4(k) \end{pmatrix} \otimes x(k) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \otimes u(k+1).$$

Једначина (2.1.3) *се формално може записати у компактном облику као:*

$$x(k+1) = A_2(k+1,k+1) \otimes x(k+1) \oplus A_1(k+1,k) \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1). \tag{2.1.4}$$

Будући да се непознати вектор стања $x(k+1)$ *појављује са обе стране знака једнакости, једначину експлицитно решавамо као:*

$$x(k+1) = \Delta\left(A_2(k+1,k+1)\right) \otimes \left(A_1(k+1,k) \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)\right), \tag{2.1.5}$$

где је матрица прелаза $\Delta\left(A_2(k+1,k+1)\right)$ *израчуната као:*

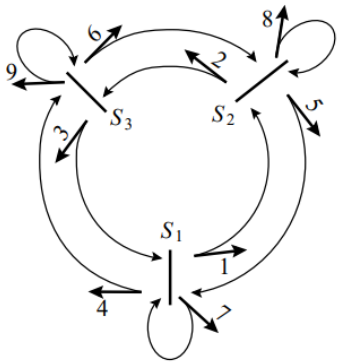
$$\Delta\left(A_2(k+1,k+1)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1(k+1) & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_1(k+1) \otimes \tau_2(k+1) & \tau_2(k+1) & 0 & \varepsilon \\ \tau_1(k+1) \otimes \tau_2(k+1) \otimes \tau_3(k+1) & \tau_2(k+1) \otimes \tau_3(k+1) & \tau_3(k+1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Овај оператор експлицитно разрешава каскадни ефекат тренутног прослеђивања и блокирања клијената кроз низ сервера у реалном времену.

Изложени пример илуструје примену макс-плус алгебре у моделовању дискретних динамичких система са синхронизацијом и блокирањем. Показано је да се сложени нелинеарни услови условљени недостатком бафера, који би у класичној алгебри захтевали употребу нелинеарних оператора (попут max функције), у макс-алгебарском контексту трансформишу у линеарне векторске једначине. Ова линеаризација је од кључног значаја јер омогућава да се динамика система, уместо преко сложених условних гранања, опише помоћу матричног рачуна. На тај начин, прорачун важних карактеристика система, као што су време чекања или пропусна моћц, постаје знатно једноставнији и своди се на анализу одговарајућих матрица или графова.

Пример 2.1.4 *[10] Посматрајмо железнички систем у једној метрополитанској области који повезује три главне станице:* S_1, S_2 *и* S_3, *као што је приказано на Слици 2.4. Овај систем се састоји од два унутрашња круга (дуж којих возови саобраћају у супротним смеровима) и три спољашња круга. Возови на спољашњим круговима служе за довоз и преузимање путника на локалним станицама. Те локалне станице нису приказане на Слици 2.4 јер немају утицаја на математичку формулацију проблема.*
У систему саобраћа укупно девет возова на девет колосека. Колосек S_iS_j *означава директну железничку везу од станице* S_i *до станице* S_j, *док колосек* S_iS_i *означава спољашњи круг повезан са станицом* S_i. *На самом почетку, на сваком од овех девет колосека налази се по један воз. На свакој станици, возови морају да сачекају долазак возова из других смерова како би се омогућило преседање путника (изузетак су возови који долазе*

управо из смера у којем тренутни воз наставља кретање). Такође, подразумева се да возови који саобраћају на истом кругу не могу претицати једни друге.



Слика 2.4: Модел железничке мреже, рута број 1

Нека $x_i(k)$ означава k-то време поласка воза у смеру i. Ова времена полазака могу се описати динамичким моделом $x(k+1) = A_1 \otimes x(k)$, где је A_1 матрица димензија 9×9:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & s_{31} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ s_{12} & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & s_{23} & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{33} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & s_{21} & \varepsilon & s_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & s_{32} & \varepsilon & s_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{13} & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & s_{33} \\ \varepsilon & \varepsilon & s_{31} & \varepsilon & s_{21} & \varepsilon & s_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ s_{12} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{32} & \varepsilon & s_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & s_{23} & \varepsilon & s_{13} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & s_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.1.6}$$

Елемент s_{ij} представља време путовања на колосеку S_iS_j, у које је урачунато и време потребно за преседање путника на станицама. Дијагонални елементи једнаки 0 моделирају чињеницу да возови не могу претицати једни друге док се налазе на истом колосеку на станици. Према почетном плану рутирања (Слика 2.4), возови на два унутрашња круга трајно остају на њима и задржавају исти смер кретања, док возови на спољашњим круговима такође не мењају своје руте.
Наравно, могућа су и другачија рутирања возова; два таква алтернативна планска решења приказана су на Слици 2.5. Ако задржимо исту интерпретацију за $x_i(k)$, времена полазака се поново описују моделом облика $x(k+1) = A \otimes x(k)$. Матрицу која одговара рути на Слици 2.5 лево означавамо са A_2, док матрицу која одговара рути са исте слике десно означавамо са A_3. Како бисмо ове матрице записали у компактном облику, уводимо субматрице F_i димензија 3×3:

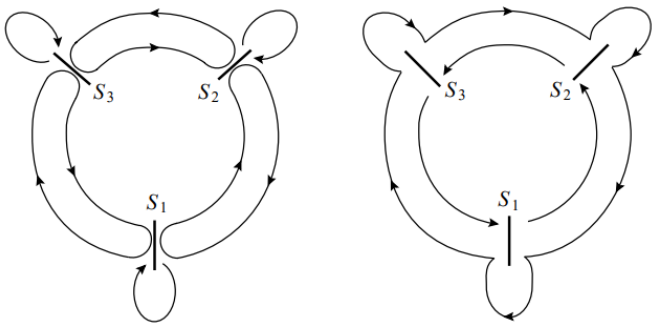
$$F_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & s_{31} \\ s_{12} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & s_{23} & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} s_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & s_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & s_{33} \end{pmatrix}, \qquad F_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & s_{21} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & s_{32} \\ s_{13} & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Сада се матрице A_1, A_2 и A_3 могу представити преко уведених блокова:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \oplus F_2 & F_1 & F_3 \\ F_1 & 0 \oplus F_4 & F_3 \\ F_2 & F_4 & F_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \oplus F_2 & F_4 & F_3 \\ F_2 & 0 \oplus F_4 & F_3 \\ F_2 & F_4 & F_3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \oplus F_2 & F_1 & F_3 \\ F_1 & 0 & F_3 \\ F_2 & F_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Јасно је да различите шеме рутирања генеришу различите математичке моделе. У зависности од конкретних нумеричких вредности времена путовања s_{ij}, временска еволуција ова три система ће се разликовати, због чега нам је потребан критеријум за избор најповољније шеме рутирања.



Слика 2.5: Модел железничке мреже, руте број 2 и 3

У реалним условима, оправдано је увести стохастичке величине за времена путовања s_{ij}. Претпоставимо, на пример, да на прузи од станице S_3 до станице S_1 постоји покретни мост (само на том колосеку). Сваки пут када воз пролази овом трасом, постоји вероватноћа p ($0 \leq p \leq 1$) да ће наићи на подигнут мост и бити одложен, што значаи да се вредност s_{31} повећава. На тај начин матрице постају зависне од корака k, односно добијамо стохастички систем са матрицама $A_i(k)$. У оваквом сценарију, анализа перформанси нам помаже да утврдимо које је од понуђених рутирања најотпорније на кашњења.

У наставку анализе вратићемо се детерминистичком моделу за Руту 1. Да бисмо избегли сложене математичке суптилности које нису кључне за ову фазу рада, увешћемо безбедносни захтев: између два узастопна поласка возова у смеровима од 1 до 6 мора постојати размак од најмање τ временских јединица ($\tau > 0$). Према томе, једначине прелазе у облик $x(k+1) = \hat{A}_1 \otimes x(k)$, где матрица $\hat{A}_1$ у потпуности одговара претходној матрици A_1, осим што је првих шест дијагоналних елемената замењено вредношћу τ (уместо нуле), док су последња три дијагонална елемента замењена изразима $s_{ii} \oplus \tau$.

Сада уводимо величину $\chi_i(t)$ која је у блиској вези са временима полазака $x_i(k)$. Аргумент t означава стварно време на сату, док функција $\chi_i(t)$ представља укупан број полазака возова у смеру i до тренутка t. Уз претпоставку да поласке бројимо почевши од 1, и да $x_i(0)$ представља време нултог (почетног) поласка, важи следећа релација:

$$\chi_i(t) = \max\{k \geq 0 \mid x_i(k) \leq t\}. \tag{2.1.7}$$

Из ове интерпретације директно следи еквивалентност: број полазака $\chi_i(t)$ до тренутка t је већи или једнак k ако и само ако се k-ти полазак догодио најкасније у тренутку t:

$$\chi_i(t) \geq k \iff x_i(k) \leq t. \tag{2.1.8}$$

Применом ове релације дуалности на оригиналне једначине система $x(k)$, добијамо сис-

тем једначина који описује понашање бројача $\chi_i(t)$*:*

$$\chi_i(t) = \min_j \left(\chi_j(t - (\hat{A}_1)_{ij}) + \delta_{ij} \right), \tag{2.1.9}$$

где је $\delta_{ij} = 1$ *ако је* $(\hat{A}_1)_{ij}$ *дијагонални елемент који је модификован безбедносним размаком* τ *(код којег се број полазака повећава за 1), док је у супротном* $\delta_{ij} = 0$*. Док је у временском домену кроз једначину* $x(k+1) = \hat{A}_1 \otimes x(k)$ *модел био линеаран у макс-плус алгебри, у бројачком домену смо преко функција* $\chi_i(t)$ *добили потпуно дуалан линеарни систем у мин-плус алгебри.*

2.2 Једнострани макс-линеарни системи

У оквиру макс-плус алгебре, под *једностраним макс-линеарним системом* подразумева се матрична једначина облика

$$A \otimes x = b \tag{2.2.1}$$

где су компоненте матрице $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ и слободног вектора $b \in \overline{\mathbb{R}}^m$ унапред познате, док $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$ представља тражени вектор непознатих.
За разлику од класичне линеарне алгебре где се системи једначина и неједначина аналитички посматрају одвојено, решавање система (2.2.1) нераскидиво је повезано са проналаском решења одговарајућег система неједначина:

$$A \otimes x \leq b. \tag{2.2.2}$$

Док су двострани системи рачунски знатно захтевнији, једнострани системи одликују се ефикасним алгоритмима за решавање. Главни разлог лежи у чињеници да скуп решења неједначине (2.2.2) никада није празан, а његов максимум директно детерминише егзистенцију и структуру решења полазног система (2.2.1).
У наставку овог поглавља биће изложена два фундаментална методолошка приступа за анализу оваквих система: алгебарски и комбинаторни приступ.

2.2.1 Комбинаторни метод

Анализа структуре и егзистенције решења система (2.2.1) захтева дефинисање одговарајућег простора стања. Скуп свих вектора који задовољавају матричну једначину називаћемо просто *скупом решења* и означити са:

$$S(A, b) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}}^n | A \otimes x = b \right\}.$$

Нека ознака A_j $(j \in N)$ представља $j-$ту колону посматране матрице A.
Пре саме анализе нетривијалних система, неопходно је размотрити граничне случајеве са бесконачним елементима. Уколико је слободни вектор $b = \varepsilon$, а колона $A_j \neq \varepsilon$, тада $j-$та компонента траженог вектора x мора експлицитно узети вредност ε. У екстремном случају када су и матрица и десна страна потпуно тривијалне $(A = \varepsilon, b = \varepsilon)$, скуп решења обухвата читав простор $\overline{\mathbb{R}}^n$. Обратно, ситуација у којој је $A = \varepsilon$ уз коначан вектор $b \neq \varepsilon$ имплицира да је $S(A, b) = \emptyset$. Из тог разлога, без губитка општости, у наставку се фокусирамо на системе где су A и b коначне $\mathbb{R}-$матрице и вектори.

Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Основа комбинаторног приступа ослања се на конструисање јединственог вектора $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})^\top \in \mathbb{R}^n$, чије се компоненте рачунају према следећем оптимизационом правилу:

$$\overline{x}_j = \min_{i\in M}\left(b_i \otimes a_{ij}^{(-1)}\right) = \min_{i\in M}(b_i - a_{ij}), \quad \text{за } j \in N.$$

Овај вектор у литератури називамо *главно решење* (или резидуат) система. Са циљем да формализујемо места где се наведени минимуми достижу, за сваку колону j дефинишемо специфичан скуп индекса врста:

$$M_j(A,b) = \{i \in M \mid \overline{x}_j = b_i - a_{ij}\}, \quad \text{за } j \in N.$$

Следећа кључна теорема поставља основу за проверу решивости и темељнији опис самог скупа $S(A,b)$.

Теорема 2.2.1 *[23, 111] Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Тада важи:*

а) $A \otimes \overline{x} \leq b$;

б) $x \leq \overline{x}$ *за свако* $x \in S(A,b)$;

в) $x \in S(A,b)$ *ако и само ако је* $x \leq \overline{x}$ *и* $\bigcup_{j:x_j=\overline{x}_j} M_j = M$;

г) $(A \otimes \overline{x})_i = b_i$ *за најмање једно* $i \in M$.

Доказ:

а) Према дефиницији макс-плус множења, $i-$та компонента вектора $A \otimes \overline{x}$ износи $\max_{j\in N}(a_{ij} + \overline{x}_j)$. Из саме дефиниције главног решења важи да је $\overline{x}_j \leq b_i - a_{ij}$ за свако $i \in M$ и свако $j \in N$. Додавањем a_{ij} са обе стране неједнакости добијамо $a_{ij} + \overline{x}_j \leq b_i$. Пошто ова неједнакост важи за свако j, важи и за њихов максимум, тј. $\max_{j\in N}(a_{ij} + \overline{x}_j) \leq b_i$, чиме је доказано да је $A \otimes \overline{x} \leq b$.

б) Нека је $x \in S(A,b)$, што значи да је $A \otimes x = b$. За сваку врсту i важи $\max_{j\in N}(a_{ij} + x_j) = b_i$. Одатле директно следи да појединачни чланови морају бити мањи или једнаки максимуму, односно $a_{ij} + x_j \leq b_i$ за све комбинације i, j. Сређивањем добијамо $x_j \leq b_i - a_{ij}$ за свако $i \in M$. Будући да је ова релација испуњена за све индексе i, она мора важити и за њихов минимум: $x_j \leq \min_{i\in M}(b_i - a_{ij}) = \overline{x}_j$. Дакле, $x \leq \overline{x}$.

в) ($\Longrightarrow$) Нека је $x \in S(A,b)$. Из дела б) већ имамо да је $x \leq \overline{x}$. Претпоставимо сада произвољан индекс врсте $i \in M$. Пошто је $A \otimes x = b$, мора постојати бар један индекс колоне j такав да је $a_{ij} + x_j = b_i$, што имплицира $x_j = b_i - a_{ij}$. Са друге стране, знамо да важи ланац неједнакости $x_j \leq \overline{x}_j \leq b_i - a_{ij}$. Да би се постигао претходни услов једнакости, ланац се мора затворити, односно мора важити $x_j = \overline{x}_j = b_i - a_{ij}$. То значи да индекс i припада скупу M_j за оно j где је $x_j = \overline{x}_j$. Дакле, свако $i \in M$ је покривено унијом, па важи $\bigcup_{j:x_j=\overline{x}_j} M_j = M$.
($\Longleftarrow$) Претпоставимо да је $x \leq \overline{x}$ и да је услов уније испуњен. Из услова $x \leq \overline{x}$ и дела а) директно следи монотоност операција: $A \otimes x \leq A \otimes \overline{x} \leq b$. Да бисмо доказали једнакост $A \otimes x = b$, довољно је показати да за свако $i \in M$ важи $(A \otimes x)_i \geq b_i$. Из услова покривања скупова, за свако $i \in M$ постоји неко j такво да је $x_j = \overline{x}_j$ и $i \in M_j$. За тај специфичан индекс важи $a_{ij} + x_j = a_{ij} + \overline{x}_j = b_i$. Будући да је $(A \otimes x)_i = \max_k(a_{ik} + x_k) \geq a_{ij} + x_j = b_i$, добијамо тражену неједнакост. Комбиновањем горња два смера закључујемо да је $A \otimes x = b$.

г) За свако $j \in N$, скуп M_j је по дефиницији непразан јер се минимум над коначним скупом M увек достиже за бар један индекс i. Нека је $i \in M_j$ за неко фиксирано j. Тада је $a_{ij} + \overline{x}_j = b_i$. На основу дела а) знамо да је $(A \otimes \overline{x})_i \leq b_i$. Истовремено, по дефиницији максимума имамо $(A \otimes \overline{x})_i = \max_k(a_{ik} + \overline{x}_k) \geq a_{ij} + \overline{x}_j = b_i$. Из ове две релације директно следи резтултат $(A \otimes \overline{x})_i = b_i$.

Овим је доказ теореме комплетиран. □

Изложени теоријски део нам омогућава да изведемо кључну законитост: главно решење $\overline{x}$ представља универзално решење система неједначина (2.2.2), док полазни систем (2.2.1) има решење ако и само ако је управо $\overline{x}$ његов члан. Важну последицу овог тврђења сумирамо кроз следећи исказ.

Последица 2.2.1 *[23] Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

$$S(A,b) \neq \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{x} \in S(A,b) \qquad \Leftrightarrow \qquad \bigcup_{j\in N} M_j = M.$$

У ситуацијама када се захтева стриктна јединственост решења, простор потенцијалних вектора се драстично сужава, што описује наредно тврђење:

Последица 2.2.2 *[23] Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Скуп $S(A,b)$ је једночлан и садржи само главно решење ($S(A,b) = \{\overline{x}\}$) ако и само ако важи:*

$$\bigcup_{j\in N} M_j = M \quad \text{и} \quad \bigcup_{j\in N'} M_j \neq M \text{ за сваки прави подскуп } N' \subset N.$$

Ови резултати експлицитно преводе проблем решавања једностраних макс-линеарних система из домена класичне алгебарске анализе у домен дискретне математике. Заправо, преклапање и уније скупова M_j показују да је решивост еквивалентна проналажењу покривача скупа, док је јединственост решења дуална идентификацији минималног покривача скупа. Пресликавање ове еквиваленције у оба смера формализује се последњом теоремом овог одељка.

Теорема 2.2.2 *[23] Нека скуп $M = \{1,\ldots,m\}$ представља универзални скуп, а фамилија $\{M_1,\ldots,M_n\}$ колекцију његових подскупова. Тада важи:*

- *Систем $A \otimes x = b$ је решив ако и само ако фамилија подскупова формира покривач скупа M (тј. $\bigcup_{j\in N} M_j = M$);*
- *Систем $A \otimes x = b$ има јединствено решење ако и само ако је наведени покривач минималан (тј. губи својство покривача уклањањем било ког подскупа).*

На крају можемо закључити да постоји двосмерна веза: сваки једнострани систем једначина у макс-плус алгебри заправо представља алгебарски запис комбинаторног проблема, и обратно.

2.2.2 Алгебарски метод

Насупрот комбинаторном приступу, *алгебарски метод* проширује анализу једностраних система на општији математички оквир који обухвата матрице из скупа $\overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и векторе из простора $\overline{\overline{\mathbb{R}}}^m$. Са циљем поједностављења записа, у наставку ћемо увести ознаку p^* која означава $p^{(-1)}$ (односно класичну супротну вредност $-p$), за сваки елемент $p \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Теорема 2.2.3 *[34] Нека су $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Тада за свако $x \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ важи следећа еквивалентност:*

$$a \otimes x \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq a^* \otimes' b.$$

Доказ: Доказ изводимо директном анализом дефиниција операција у проширеном скупу реалних бројева. Према дефиницији макс-плус множења, израз $a \otimes x$ је еквивалентан класичном сабирању $a + x$.
($\Longrightarrow$) Претпоставимо да важи неједнакост $a + x \leq b$. Како се налазимо у скупу $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, формално додавање супротне вредности $-a$ (односно a^*) са обе стране ове класичне неједнакости даје $x \leq b - a$, што је према дефиницији дуалног оператора једнако $a^* \otimes' b$.
($\Longleftarrow$) Претпоставимо да важи $x \leq a^* \otimes' b$, односно $x \leq b - a$. Додавањем вредности a са обе стране добијамо $a + x \leq b$, што се одмах трансформише у полазни макс-плус облик $a \otimes x \leq b$. Овим је еквиваленција у потпуности доказана. □

Теорема 2.2.4 *[43] Ако $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m \times n}$, $b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$ и $x \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n}$, тада је испуњен услов:*

$$A \otimes x \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq A^* \otimes' b.$$

Доказ: Матричну тврдњу доказујемо свођењем на координатни ниво и применом претходне теореме.
($\Longrightarrow$) Претпоставимо да важи матрична неједначина $A \otimes x \leq b$. То значи да за сваку врсту $i \in M$ важи појединачни услов:

$$\max_{j \in N}(a_{ij} + x_j) \leq b_i.$$

Из особина максимума следи да сваки члан у унији мора независно испуњавати ову неједнакост, односно важи $a_{ij} + x_j \leq b_i$ за свако $i \in M$ и свако $j \in N$. Применом претходне теореме на ове елементе добијамо да је $x_j \leq b_i - a_{ij}$, што можемо записати као $x_j \leq a^*_{ij} + b_i$. Будући да ова горања граница важи за свако i, она мора важити и за њихов минимум по индексу i:

$$x_j \leq \min_{i \in M}(a^*_{ij} + b_i), \quad \text{за свако } j \in N.$$

Десна страна ове неједнакости представља тачно дефиницију компоненте дуалног множења матрица $(A^* \otimes' b)_j$. Дакле, важи $x \leq A^* \otimes' b$.
($\Longleftarrow$) Претпоставимо да важи $x \leq A^* \otimes' b$. На основу дефиниције дуалног множења, за сваку компоненту имамо неједнакост $x_j \leq \min_{k \in M}(a^*_{kj} + b_k) \leq a^*_{ij} + b_i = b_i - a_{ij}$, која важи за фиксирано i и свако j. Поновним свођењем на претходну теорему, из $x_j \leq b_i - a_{ij}$ директно добијамо $a_{ij} + x_j \leq b_i$ за све комбинације i и j. Узимањем максимума по индексу j са леве стране неједнакости добијамо $\max_{j \in N}(a_{ij} + x_j) \leq b_i$, што нас враћа на полазни матрични облик $A \otimes x \leq b$, чиме је доказ комплетиран. □
Када је A дупла $\mathbb{R}$-матрица и $b \in \mathbb{R}^m$, из структуре комбинаторног приступа видели смо да компоненте главног решења задовољавају једнакост $\overline{x} = A^* \otimes' b$. Користећи предности алгебарског формализма, ову дефиницију проширујемо на општи случај. Од сада ћемо израз $A^* \otimes' b$ називати *главним решењем* система за било коју матрицу $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m \times n}$ и слободни вектор $b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$.
Особине овако дефинисаног главног решења и његову улогу у испитивању сагласности система једначина сумирамо кроз следећу последицу:

Последица 2.2.3 *[34] Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}^{m}$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Тада важе следећа тврђења:*

1. *Вектор $\overline{x}$ представља максимални елемент скупа решења неједначине $A \otimes x \leq b$, што значи да је $A \otimes (A^* \otimes' b) \leq b$;*

2. *Полазни систем једначина $A \otimes x = b$ има решење ако и само ако је главно решење $\overline{x}$ уједно и његово решење;*

3. $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes c)) = A \otimes c$.

Доказ: Доказ свих ставки ове последице директно се ослања на претходну теорему о матричној резидуацији и монотоност операција у макс-плус алгебри.

1. Да бисмо доказали да је $\overline{x} = A^* \otimes' b$ највеће решење неједначине $A \otimes x \leq b$, применићемо претходну теорему. Ако у изразу теореме:

$$A \otimes x \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq A^* \otimes' b$$

   уместо променљиве x уврстимо управо вектор $A^* \otimes' b$, десна страна еквиваленције постаје $A^* \otimes' b \leq A^* \otimes' b$, што је тривијално тачно услед рефлексивности релације $\leq$. Будући да важи смер еквиваленције с десна налево, директно следи да важи и лева страна, односно $A \otimes (A^* \otimes' b) \leq b$. Пошто теорема важи у оба смера, било које друго решење x које задовољава $A \otimes x \leq b$ мора бити мање или једнако од $\overline{x}$ ($x \leq \overline{x}$), чиме је доказано да је $\overline{x}$ највећи елемент скупа решења ове неједначине.

2. Претпоставимо најпре да систем једначина $A \otimes x = b$ има бар једно решење $x_0 \in S(A, b)$. Из једнакости директно следи да је испуњена и неједначина $A \otimes x_0 \leq b$. Применом става 1) ове последице, знамо да је $\overline{x}$ највеће решење те неједначине, па мора важити $x_0 \leq \overline{x}$. Због монотоности макс-плус множења матрица, важи:

$$b = A \otimes x_0 \leq A \otimes \overline{x}.$$

   Са друге стране, из става 1) важи и супротна неједнакост $A \otimes \overline{x} \leq b$. Комбиновањем ова два смера добијамо релацију $A \otimes \overline{x} = b$, што значи да је $\overline{x}$ такође решење полазног система једначина. Обратни смер је тривијалан: ако је $\overline{x}$ решење система, систем је по дефиницији решив ($S(A, b) \neq \emptyset$).

3. Да бисмо доказали једнакост $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes c)) = A \otimes c$, искористићемо претходну теорему тако што ћемо слободни вектор b заменити изразом $A \otimes c$. Тада теорема добија облик:

$$A \otimes x \leq A \otimes c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq A^* \otimes' (A \otimes c).$$

   Ако уместо x изаберемо сам вектор c, лева страна еквиваленције постаје $A \otimes c \leq A \otimes c$, што је увек тачно. С обзиром на то да важи смер еквиваленције слева надесно, добијамо неједнакост за десну страну: $c \leq A^* \otimes' (A \otimes c)$. Множењем ове неједнакости матрицом A са леве стране, услед монотоности операције $\otimes$, добијамо прву релацију:

$$A \otimes c \leq A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes c)).$$

   За доказ супротне неједнакости, применићемо став 1) ове последице, поново уз замену вектора b са $A \otimes c$. Тада директно добијамо:

$$A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes c)) \leq A \otimes c.$$

Спајањем добијених неједнакости у ланац, једнакост $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes c)) = A \otimes c$ је у потпуности доказана.

Овим је доказ завршен. □

Значај алгебарске методе огледа се и у томе што се поменуте законитости могу директно пренети са векторских простора на општије матричне системе, што формализује наредна последица:

Последица 2.2.4 *[34] Нека су дате матрице* $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$, $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times k}$, $C \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times l}$. *Ако дефинишемо матрицу главног решења као* $\overline{X} = A^* \otimes' B$, *тада важи:*

1. *Матрица* $\overline{X}$ *је највеће решење матричне неједначине* $A \otimes X \leq B$, *односно важи релација* $A \otimes (A^* \otimes' B) \leq B$;

2. *Матрична једначина* $A \otimes X = B$ *је решива ако и само ако је матрица* $\overline{X}$ *њено решење;*

3. $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes C)) = A \otimes C$.

Доказ: Доказ се изводи директним уопштењем векторских својстава на колоне посматраних матрица, користећи претходне резултате.

1. Нека је B_j означава $j-$ту колону матрице B, а $\overline{X}_j$ означава $j-$ту колону матрице главног решења $\overline{X}$. Према дефиницији дуалног множења матрица, важи да је $\overline{X}_j = A^* \otimes' B_j$. Применом прве ставке претходне последице на сваку колону појединачно, директно добијамо да је $A \otimes \overline{X}_j \leq B_j$ за свако j. Будући да ова неједнакост важи за све колоне, она важи и у целом матричном облику, односно $A \otimes (A^* \otimes' B) \leq B$. Максималност решења следи из чињенице да је свака колона $\overline{X}_j$ највеће решење за одговарајући систем са десном страном B_j.

2. Претпоставимо да је матрична једначина $A \otimes X = B$ решива и да је X_0 њено решење. Тада аутоматски важи и неједначина $A \otimes X_0 \leq B$. На основу прве ставке ове последице, матрица $\overline{X}$ је највеће решење те неједначине, па мора важити $X_0 \leq \overline{X}$. Због монотоности макс-плус множења матрица добијамо $B = A \otimes X_0 \leq A \otimes \overline{X}$. Са друге стране, из прве ставке важи и супротан смер $A \otimes \overline{X} \leq B$. Спајањем ове две релације добијамо $A \otimes \overline{X} = B$, што доказује да је $\overline{X}$ решење. Обрат је тривијалан.

3. Посматрајмо израз $A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes C))$. Означимо са C_j произвољну колону матрице C. Ако применимо трећу ставку претходне последице за векторе, где улогу вектора c узима колона C_j, директно добијамо једнакост на нивоу колона:

$$A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes C_j)) = A \otimes C_j.$$

Како ова једнакост важи независно за сваку колону j посматраних композиција пресликавања, она важи и за комплетне матрице.

Тиме је тврдња у потпуности доказана. □

2.2.3 Нерешиви системи

У ситуацијама када систем $A \otimes x = b$ нема тачно решење, истраживање се природно усмерава ка проналажењу оптималне апроксимације слободног вектора b помоћу слике пресликавања $x \to A \otimes x$. У ту сврху, неопходно је увести метрику која одређује растојање између два вектора, а у макс-плус алгебри се за то најчешће користи Чебишевљева норма. За било која два вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ из простора $\mathbb{R}^n$, *Чебишевљево растојање* се дефинише као $\xi(x, y) = \max_{j \in N} |x_j - y_j|$. Важно својство ове метрике јесте да за сваки реалан број θ важи неједнакост $\xi(\theta \otimes x, y) \leq |\theta| \otimes \xi(x, y)$. Наредне две теореме формализују кључну улогу главног решења у овом контексту, показујући да оно заправо генерише *најбољу могућу апроксимацију* вектора b у односу на израз $A \otimes x$.

Теорема 2.2.5 *[45] Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ дупла $\mathbb{R}$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, $\overline{x} = \overline{x}(A, b)$ и $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \otimes x \leq b\}$. Тада је испуњена једнакост:*

$$\xi(A \otimes \overline{x}, b) = \min_{x \in Q} \xi(A \otimes x, b).$$

Теорема 2.2.6 *[45] Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ дупла $\mathbb{R}$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, $\overline{x} = \overline{x}(A, b)$, $\mu^2 = \xi(A \otimes \overline{x}, b)$ и $y = \mu \otimes \overline{x}$. Тада важи:*

$$\xi(A \otimes y, b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \xi(A \otimes x, b).$$

2.3 Двострани макс-линеарни системи

Под *двостраним макс-линеарним системом* подразумева се општи матрични облик једначине

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d, \tag{2.3.1}$$

где структуру система одређују унапред задате матрице $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ и слободни вектори $c, d \in \overline{\mathbb{R}}^m$. У зависности од вредности слободних чланова, разликујемо следеће класе система:

- *Хомогени системи:* настају када су оба слободна вектора тривијална ($c = d = \varepsilon$), чиме се једначина (2.3.1) своди на:

$$A \otimes x = B \otimes x. \tag{2.3.2}$$

- *Нехомогени системи:* представљају општи случај у којем је испуњен услов $c \neq \varepsilon$ или $d \neq \varepsilon$.

- *Системи са раздвојеним променљивама:* представљају специфичну подкласу хомогених облика дефинисану као:

$$A \otimes x = B \otimes y, \tag{2.3.3}$$

  где су димензије матрица оперативно прилагођене векторима, односно $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ и $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times k}$.

Битно је напоменути да се нехомогени модели погодним трансформацијама могу превести у хомогене, који се потом успешно репрезентују преко система са раздвојеним

променљивама. Фокус овог поглавља усмерен је пре свега на налажење нетривијалних решења ($x \neq \varepsilon$), док ће у одређеним сегментима пажња бити посвећена искључиво коначним решењима.
Скупове решења посматраних система формално дефинишемо на следећи начин:

$$S(A,B,c,d) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}}^n \;\middle|\; A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d \right\}, \tag{2.3.4}$$

$$S(A,B) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}}^n \;\middle|\; A \otimes x = B \otimes x \right\}. \tag{2.3.5}$$

Без умањења општости теоријског излагања, у даљем раду подразумевамо да су A и B дупле $\mathbb{R}$-матрице. За потребе ефикаснијег решавања једначине (2.3.1), од кључног значаја је примена макс-алгебарског правила за редукцију чланова, познатог као *закон скраћивања* (видети, на пример, [31, 34]).

Лема 2.3.1 (Закон скраћивања) *Нека су реални параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ изабрани тако да важи релација $\alpha > \beta$. Тада за сваку вредност променљиве $x \in \mathbb{R}$ важи следећа еквиваленција:*

$$\gamma \oplus \alpha \otimes x = \delta \oplus \beta \otimes x \iff \gamma \oplus \alpha \otimes x = \delta.$$

Изложена лема даје теоријску основу за елиминацију променљиве са једне стране знака једнакости: уколико се исти елемент појављује на обе стране, онај са строго мањим мултипликативним коефицијентом може се потпуно уклонити без модификације коначног скупа решења система. Користећи исти принцип у обрнутом смеру, дозвољено је увођење нове компоненте на супротну страну једначине, под условом да јој се додели коефицијент који је мањи од већ постојећег на примарној страни.

2.3.1 Неки специјални случајеви

У овом делу изложићемо неколико специфичних класа двостраних макс-линеарних система које се, захваљујући својим структурним својствима, могу решити на релативно једноставан начин.
Прву класу чине системи облика

$$A \otimes x = \theta \otimes x,$$

где је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, док је $\theta \in \overline{\mathbb{R}}$ скалар. Решавање оваквих система директно се своди на класичан макс-алгебарски проблем сопствених вредности и сопствених вектора. Непосредна генерализација овог модела јесте систем $A \otimes x = P \otimes x$, при чему је P уопштена пермутациона матрица, па за њу постоји инверз (Теорема 1.2.1).
Следећи карактеристичан облик јесте нехомогена једначина са једном непознатом са обе стране знака једнакости:

$$x = A \otimes x \oplus b.$$

Познато је да овај систем има решење дефинисано преко Клинијеве звезде као $x = \Delta(A) \otimes b$, под условом да је максимална средња вредност матрице A непозитивна, односно $\lambda(A) \leq 0$. Уколико важи строга неједнакост $\lambda(A) < 0$, наведено решење је уједно и јединствено [10, 73].
У анализи сложенијих система важну улогу играју матрице са специфичним алгебарским особинама.

Дефиниција 2.3.1 *За матрицу $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ кажемо да је идемпотентна у макс-плус смислу уколико испуњава услов $A \otimes A = A$.*

Ако је матрица A идемпотентна, њено слабо транзитивно затворење се поклапа са њом самом ($\Gamma(A) = A$), одакле се непосредно добија да је $\lambda(A) \leq 0$. Поред тога, ако изузмемо тривијалан случај $A = \varepsilon$, свака идемпотентна матрица је уједно и дефинитна.
Следећа теорема успоставља критеријуме за решивост система у класи коначних матрица са овим својством.

Теорема 2.3.1 *[22] Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ коначне и идемпотентне матрице. Тада су следећи искази еквивалентни:*

1. *Двострани систем са раздвојеним променљивама $A \otimes x = B \otimes y$ има нетривијално решење за неке векторе $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{\varepsilon\}$.*
2. *Матрични производ $A \otimes B$ представља дефинитну матрицу.*
3. *Хомогени двострани систем $A\otimes x = B\otimes x$ поседује нетривијално решење $x \in \overline{\mathbb{R}}^n\setminus\{\varepsilon\}$.*

На крају, значајни резултати се могу постићи и када матрице у систему задовољавају услов комутативности при множењу.

Дефиниција 2.3.2 *Квадратне матрице $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ комутирају ако за њих важи релација $A \otimes B = B \otimes A$.*

Теорема 2.3.2 *Уколико матрице $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ комутирају, тада одговарајући двострани макс-линеарни систем са раздвојеним променљивама (2.3.3) увек има нетривијално решење. Штавише, ово решење се може ефикасно конструисати превођењем проблема на налажење сопственог вектора матрице A или матрице B.*

2.3.2 Системи са раздвојеним променљивама - Наизменични метод

У овом делу ћемо описати једноставан и ефикасан метод за решавање макс-линеарних система са раздвојеним променљивама:

$$A \otimes x = B \otimes y. \tag{2.3.6}$$

У овом систему, матрице A и B припадају просторима $\overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$, док су $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^k$ непознати вектори. *Наизменични метод* (*Alternating method*) омогућава да се одреде коначна решења система (2.3.6) или да покаже да она не постоје. Овај метод изложен је у раду [48]. Као и у претходним деловима дисертације, када је то било потребно, и овде ћемо претпоставити да су A и B дупле $\mathbb{R}$-матрице.
Главна идеја овог приступа јесте примена концепта главног решења једностраних система, о чему је било речи у Потпоглављу 2.2.2. Подсетимо се да је вектор $\overline{x} = A^* \otimes' b$ највеће решење система неједначина $A \otimes x \leq b$. Поред тога, систем једначина $A \otimes x = b$ има решење ако и само ако је овај највећи вектор уједно и његово решење (што је дефинисано кроз Последицу 2.2.3).
Сам алгоритам ради тако што стално мења стране и тражи главна решења. Крећемо од неког слободно изабраног почетног вектора $x(0)$. Затим узимамо да је $y(0)$ главно решење за једначину са десне стране, односно за $B\otimes y = A\otimes x(0)$. У следећем кораку рачунамо нову вредност $x(1)$ као главно решење за леву страну, тј. за $A\otimes x = B\otimes y(0)$. Овај поступак циклично (наизменично) понављамо и тако добијамо низове вектора

$\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{y(k)\}_{k=0}^{\infty}$. Под одређеним условима, ови низови конвергирају и доводе нас до тачног решења полазног система, а ако решења нема, алгоритам ће нам на то указати.

Алгоритам 2.3.1 Наизменични метод

Улаз: $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$, дупле $\mathbb{R}-$матрице.
Излаз: Решење (x, y) за (2.3.6), или индикација да такво решење не постоји.
Нека је $x(0) \in \mathbb{R}^n$ произвољан вектор.
$r := 0$
понављати:
$y(r) := B^* \otimes' (A \otimes x(r))$
$x(r+1) := A^* \otimes' (B \otimes y(r))$
Ако је $x_i(r+1) < x_i(0)$ за свако $i \in N$ онда СТОП (нема решења)
Ако је $A \otimes x(r+1) = B \otimes y(r)$ онда СТОП ($(x(r+1), y(r))$ је решење)
Иди на „понављати“.

Из самог алгоритма се јасно види да је у сваком кораку потребно одредити коњуговану матрицу, што директно указује на њен значај за функционисање овог метода.

Стабилна решења

Дефинишимо следећа пресликавања

$$\pi : y \to A^* \otimes' (B \otimes y) \qquad \text{и} \qquad \psi : x \to B^* \otimes' (A \otimes x). \tag{2.3.7}$$

Наизменични метод генерише низ $\{(x(r)), (y(r))\}_{r=0,1\ldots}$ који задовољава:

$$x(r+1) = \pi(y(r)) \qquad \text{и} \qquad y(r) = \psi(x(r)). \tag{2.3.8}$$

Дефиниција 2.3.3 *За уређени пар вектора (x, y) кажемо да је стабилан ако важи:*

$$(x, y) = (\pi(y), \psi(x)). \tag{2.3.9}$$

Уколико је овакав стабилан пар (x, y) уједно и решење полазног система, називаћемо га *стабилно решење.*

Теорема 2.3.3 *[48] Сваки стабилан пар вектора представља решење.*

Доказ: Претпоставимо да је пар (x, y) стабилан. Коришћењем неједнакости 2. из Последице 1.4.1, добијамо следећи ланац релација:

$$\begin{aligned} A \otimes x &= A \otimes \pi(y) = A \otimes (A^* \otimes' (B \otimes y)) \leq B \otimes y = B \otimes \psi(x) \\ &= B \otimes (B^* \otimes' (A \otimes x)) \leq A \otimes x. \end{aligned}$$

С обзиром на то да су први и последњи израз у овом ланцу идентични, сви чланови морају бити међусобно једнаки. Из тога директно следи да је $A \otimes x = B \otimes y$, што значи да је стабилан пар заиста решење система. □

Теорема 2.3.4 *[48] Ако је пар (x, y) решење система, тада је пар $(\pi(y), \psi(x))$ стабилно решење.*

Доказ: У доказу ћемо искористити идентитет из особине 3. Последице 1.4.1 и чињеницу да пар (x, y) по претпоставци јесте решење посматраног система. Применом оператора ψ на вектор $\pi(y)$ добијамо:

$$\psi(\pi(y)) = B^* \otimes' (A \otimes (A^* \otimes' (B \otimes y))) = B^* \otimes' (A \otimes (A^* \otimes' (A \otimes x))).$$

Свођењем израза на основу поменутог идентитета, рачун се поједностављује на:

$$\psi(\pi(y)) = B^* \otimes' (A \otimes x) = \psi(x).$$

Потпуно аналогним поступком се показује да важи и релација $\pi(\psi(x)) = \pi(y)$. На основу тога закључујемо да је пар $(\pi(y), \psi(x))$ стабилан, а према Теореми 2.3.3 он уједно представља и решење. □

Лема 2.3.2 *Низови* $\{A(x(r))\}_{r=0,1\ldots}$ *и* $\{x(r)\}$ *су нерастући.*

Доказ: Лако се доказује из својства 2. Последице 1.4.1 и једнакости (2.3.8). □

Лема 2.3.3 *Ако решење система постоји, тада је низ* $\{x(r)\}_{r=0}^{\infty}$ *одоздо ограничен за било који избор почетног вектора* $x(0)$*.*

Теорема 2.3.5 *Уколико се након одређеног броја корака Наизменичног метода све компоненте вектора* $x(r)$ *или* $y(r)$ *строго смање у односу на њихове почетне вредности, тада систем (2.3.6) нема решења.*

Следећа теорема потврђује исправност Наизменичног метода.

Теорема 2.3.6 *Низ* $\{(x(r)), (y(r))\}_{r=0,1\ldots}$ *генерисан помоћу Наизменичног метода конвергира ако и само ако решење постоји. Конвергенција је тада монотона, ка стабилном решењу, за било који избор* $x(0) \in \mathbb{R}^n$*.*

Доказ: Уколико низ конвергира, односно када $(x(r), y(r)) \to (\xi, \eta)$, на основу Леме 2.3.3 и због непрекидности операција макс-алгебре имамо:

$$(\xi, \eta) = \lim_{r\to\infty} (x(r+1), y(r)) = \lim_{r\to\infty} (\pi(y(r)), \psi(x(r))) = (\pi(\eta), \psi(\xi)).$$

Из овог ланца једнакости следи да је гранични пар (ξ, η) стабилан, што према Теореми 2.3.3 значи да он уједно представља и једно стабилно решење система. Обратно, уколико претпоставимо да решење система постоји, монотона конвергенција низа $\{x(r)\}_{r=0}^{\infty}$ директно је осигурана Лемом 2.3.2 (која гарантује да је низ нерастући) и Лемом 2.3.3 (која обезбеђује доњу границу). Конвергенција пратећег низа $\{y(r)\}_{r=0}^{\infty}$ потом непосредно следи из особина изотоности и непрекидности пресликавања ψ. □

У вези са овим, може се говорити и о броју корака тј. итерација код Наизменичног метода, под одређеним условима. Глава 5 бави се овом проблематиком, па ће у оквиру ње и бити приказана одговарајућа теорема из [48], као и нови резултати истраживања који се надовезују управо на ту теорему.

Превођење из једног облика у други

Као што је указано на почетку овог поглавља, нехомогени системи се могу превести у хомогене, а они се даље могу превести у системе са раздвојеним променљивама. Ово потпоглавље затварамо објашњењем тог поступка.

Увођењем додатне промењљиве, на пример x_{n+1}, нехомогени систем $A\otimes x\oplus c = B\otimes x\oplus d$ се може превести у хомогени систем

$$\tilde{A}\otimes z = \tilde{B}\otimes z,$$

где је $\tilde{A} = (A|c)$, $\tilde{B} = (B|d)$ и $z = (z_1, \dots z_n, z_{n+1})^\top$.
Даље, хомогени систем $A\otimes x = B\otimes x$, где су $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, без губитка општости, дупле $\mathbb{R}-$матрице, може се превести у систем са раздвојеним промењљивама на следећи начин. Овај систем је еквивалентан са

$$A\otimes x = y,$$

$$B\otimes x = y,$$

или, то можемо приказати у облику

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} \otimes y.$$

На тај начин, добили смо систем са раздвојеним промењљивама и обе матрице $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$ су дупле $\mathbb{R}-$матрице, па се Наизменични метод може одмах применити. Дакле, уопштени двострани системи се на описани начин могу свести на облик погодан за примену Наизменичног метода.

На крају, само ћемо напоменути да је у раду [28] описан још један метод за решавање двостраних макс-линеарних система (Stepping-stone метод). У [7] аутори су показали да изнад описани Наизменични метод даје боље резултате у погледу броја корака израчунавања у односу на Stepping- stone.

2.3.3 Коначна генерисаност скупа решења

У овом делу скуп

$$S(A, B) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n | A\otimes x = B\otimes x\} \tag{2.3.10}$$

ће се означавати скраћено са S. Такође, у овом одељку слово I означава индексни скуп (а не јединичну матрицу). Циљ овог одељка је да се докаже следећи фундаментални резултат:

Теорема 2.3.7 *[25] Ако су $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ тада је S коначно генерисан, тј. постоји цео број $w \geq 1$ и матрица $T \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times w}$ таква да важи*

$$S = \{T\otimes z | z \in \overline{\mathbb{R}}^w\}. \tag{2.3.11}$$

Лема 2.3.4 *[25] Ако су $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{1\times n}$ тада постоји цео број $w \geq 1$ и матрица $T \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times w}$ таква да важи*

$$S = \{T\otimes z | z \in \overline{\mathbb{R}}^w\}. \tag{2.3.12}$$

Најпре ћемо доказати теорему, па ће бити дат доказ ове леме. *Доказ*: Означимо (само у овом доказу) врсте матрица A и B са $A_1, \dots, A_m$ и $B_1, \dots, B_m$. Према Леми 2.3.4 постоји матрица $T_1 \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times w_1}$ за неки цео број $w_1 \geq 1$ таква да важи

$$\left\{x \in \overline{\mathbb{R}}^n | A_1\otimes x = B_1\otimes x\right\} = \left\{T_1\otimes z^{(1)}, \quad z^{(1)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_1}\right\}. \tag{2.3.13}$$

Слично, постоји цео број $w_2 \geq 1$ и матрица $T_2 \in \overline{\mathbb{R}}^{w_1 \times w_2}$ таква да важи

$$\left\{z^{(1)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_1} | A_2 \otimes T_1 \otimes z^{(1)} = B_2 \otimes T_1 \otimes z^{(1)}\right\} = \left\{T_2 \otimes z^{(2)}, \quad z^{(2)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_2}\right\}. \tag{2.3.14}$$

Овај процес се наставља све док на крају не добијемо да постоји цео број $w_m \geq 1$ и матрица $T_m \in \overline{\mathbb{R}}^{w_{m-1} \times w_m}$ таква да важи

$$\begin{aligned}\left\{z^{(m-1)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_{m-1}} | A_m \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_{m-1} \otimes z^{(m-1)} = B_m \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_{m-1} \otimes z^{(m-1)}\right\} \\ = \left\{T_m \otimes z^{(m)} | z^{(m)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_m}\right\}.\end{aligned}$$

Сада показујемо да за тражену матрицу T можемо узети $T_1, \ldots, T_m$ и $w = w_m$. Претпоставимо прво да је $x = T \otimes z$ за неко $z \in \overline{\mathbb{R}}^w$ и $k \in M$. Тада

$$\begin{aligned} A_k \otimes (T \otimes z) &= A_k \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_m \otimes z && (2.3.15)\\ &= (A_k \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_{k-1}) \otimes T_k \otimes (T_{k+1} \otimes \cdots \otimes T_m \otimes z) && (2.3.16)\\ &= (B_k \otimes T_1 \otimes \cdots \otimes T_{k-1}) \otimes T_k \otimes (T_{k+1} \otimes \cdots \otimes T_m \otimes z) && (2.3.17)\end{aligned}$$

по дефиницији T_k. Одавде, $A_k \otimes (T \otimes z) = B_k \otimes (T \otimes z)$ и стога $T \otimes z \in S$.
Претпоставимо сада да је $x \in S$. Тада $A_1 \otimes x = B_1 \otimes x$, па

$$x = T_1 \otimes z^{(1)}, \quad z^{(1)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_1}. \tag{2.3.18}$$

Истовремено је $A_2 \otimes x = B_2 \otimes x$ и зато важи:

$$A_2 \otimes T_1 \otimes z^{(1)} = B_2 \otimes T_1 \otimes z^{(1)}, \tag{2.3.19}$$

што имплицира

$$z^{(1)} = T_2 \otimes z^{(2)}, \quad z^{(2)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_2}, \tag{2.3.20}$$

па је стога $x = T_1 \otimes z^{(1)} = T_1 \otimes T_2 \otimes z^{(2)}$. Индукцијом добијамо

$$x = T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_m \otimes z^{(m)}, \quad z^{(m)} \in \overline{\mathbb{R}}^{w_m}. \tag{2.3.21}$$

□

Једначина облика $A \otimes x = B \otimes x$ може се записати као

$$\sum_{j \in N}^{\oplus} a_j \otimes x_j = \sum_{j \in N}^{\oplus} b_j \otimes x_j. \tag{2.3.22}$$

Према Леми 2.3.1 можемо без губитка општости претпоставити да

$$a_j \neq b_j \quad \Rightarrow \quad \min(a_j, b_j) = \varepsilon \tag{2.3.23}$$

важи за свако $j \in N$. Одавде, након погодног пренумерисања променљивих, ова једначина се може симболички записати као

$$(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, e, \ldots, e, a, \ldots, a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \otimes x = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, e, \ldots, e, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, b, \ldots, b) \otimes x.$$

Овај облик одговара подели скупа N на четири подскупа:

$$I = \{j \in N | a_j = b_j = \varepsilon\}, \quad J = \{j \in N | a_j = b_j \neq \varepsilon\}.$$

$$K = \{j \in N | a_j > b_j\}, \quad L = \{j \in N | a_j < b_j\}.$$

Сада дефинишемо пет скупова вектора:

$$e^i = (e_1^i, \ldots, e_n^i)^\top, \quad i \in I,$$

где је $e_j^i = \varepsilon$, ако је $j \neq i$ и $e_j^i = 0$, ако је $j = i$;

$$r^i = (r_1^i, \ldots, r_n^i)^\top, \quad i \in J,$$

где је $r_j^i = \varepsilon$, ако је $j \neq i$ и $r_j^i = a_i^{(-1)} = b_i^{(-1)}$, ако је $j = i$;

$$s^{k,l} = (s_1^{k,l}, \ldots, s_n^{k,l})^\top, \quad k \in K,\ l \in L,$$

где је $s_j^{k,l} = \varepsilon$, ако је $j \notin \{k, l\}$, $s_j^{k,l} = a_k^{(-1)}$, ако је $j = k$, и $s_j^{k,l} = b_l^{(-1)}$, ако је $j = l$;

$$r^{i,h} = (r_1^{i,h}, \ldots, r_n^{i,h})^\top, \quad i \in J,\ h \in K \cup L,$$

где је $r_j^{i,h} = r_j^i$, ако је $j \neq h$, $r_j^{i,h} = a_h^{(-1)}$, ако је $j = h \in K$, и $r_j^{i,h} = b_h^{(-1)}$, ако је $j = h \in L$;

$$s_j^{k,l,h} = (s_1^{k,l,h}, \ldots, s_n^{k,l,h})^\top, \quad k \in K,\ l \in L,\ h \in K \cup L \setminus \{k, l\},$$

где је $s_j^{k,l,h} = s_j^{k,l}$, ако је $j \neq h$, $s_j^{k,l,h} = a_h^{(-1)}$, ако је $j = h \in K \setminus \{k\}$, и $s_j^{k,l,h} = b_h^{(-1)}$, ако је $j = h \in L \setminus \{l\}$.

Лема 2.3.5 *[25] Једначина (2.3.22) има нетривијално решење ако и само ако*

$$I \cup J \cup (K \times L) \neq \emptyset.$$

Доказ: Ако $I \cup J \cup (K \times L) \neq \emptyset$, тада постоји бар један од вектора e^i $(i \in I)$, r^i $(i \in J)$, или $s^{k,l}$ $(k \in K, l \in L)$, и сваки од ових вектора је нетривијално решење. Ако $I \cup J \cup (K \times L) = \emptyset$, тада је $I = J = K \times L = \emptyset$. Пошто важи $I \cup J \cup K \cup L = N$ и $K \cap L = \emptyset$, имамо или $L = \emptyset$ и $K = N$, или $K = \emptyset$ и $L = N$. У првом случају, једначина (2.3.22) се своди на

$$\max_{i \in N} a_i \otimes x_i = \varepsilon,$$

при чему је $a_i > 0$ за свако $i \in N$, што имплицира да је $x = \varepsilon$ једино решење. Други случај се решава на исти начин. □

Сада можемо доказати кључну лему овог потпоглавља (Лема 2.3.4).

Доказ: Доказујемо да је $y \in \overline{\mathbb{R}}^n$ решење једначине (2.3.22) ако и само ако се може записати у облику

$$\begin{aligned} y \quad = \quad & \sum_{i \in I}^{\oplus} \pi^i \otimes e_i \ \oplus \ \sum_{i \in J}^{\oplus} \rho^i \otimes r_i \ \oplus \sum_{k \in K,\, l \in L}^{\oplus} \sigma^{k,l} \otimes s^{k,l} \\ \oplus \sum_{i \in J,\, h \in K \cup L}^{\oplus} & \rho^{i,h} \otimes r^{i,h} \ \oplus \sum_{k \in K,\, l \in L,\, h \in K \cup L \setminus \{k,l\}}^{\oplus} \sigma^{k,l,h} \otimes s^{k,l,h}, \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

где су $\pi^i, \rho^i, \sigma^{k,l}, \rho^{i,h}, \sigma^{k,l,h} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Треба напоменути да ако су индексни скупови у овој сумацији празни, тада према Леми 2.3.5 важи $S = \{\varepsilon\}$ и можемо узети било које $w > 1$ и поставити $T = \varepsilon$.

Лако се види да сваки од вектора $e_i, i \in I$; $r_i, i \in J$; $s^{k,l}, k \in K, l \in L$; $r^{i,h}, i \in J, h \in K \cup L$; $s^{k,l,h}, k \in K, l \in L, h \in K \cup L \setminus \{k,l\}$ јесте решење једначине (2.3.22), па је и њихова макс-алгебарска линеарна комбинација у S.
Остаје да се докаже да се свако решење може изразити као у (2.3.24). Нека је $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in S$ и нека

$$v = \sum_{j \in N}^{\oplus} a_j \otimes x_j = \sum_{j \in N}^{\oplus} b_j \otimes x_j.$$

Бар један од следећих случајева ће наступити:

- **Случај 1:** $v = \varepsilon$.
- **Случај 2:** $v \neq \varepsilon$ и $v = a_j \otimes x_j = b_j \otimes x_j$ за неко $j \in J$.
- **Случај 3:** $v \neq \varepsilon$ и $v = a_f \otimes x_f = b_g \otimes x_g$ за неке $f \in K$ и $g \in L$.

У Случају 1, $x_i = \varepsilon$ за свако $i \in J \cup K \cup L$ и довољно је поставити $\pi^i = x_i$ за свако $i \in I$, док се сви остали коефицијенти постављају на ε.
У Случају 2 имамо $a_j = b_j > \varepsilon$ и $a_i \otimes x_i < v$, $b_i \otimes x_i < v$ за свако $i \in N$, што имплицира

$$\begin{cases} a_j^{(-1)} \otimes a_i \otimes x_i \leq x_j, \\ b_j^{(-1)} \otimes b_i \otimes x_i \leq x_j. \end{cases} \tag{2.3.25}$$

Поставимо

$$\begin{aligned} \pi^i &= x_i, \quad i \in I, \\ \rho^i &= a_i \otimes x_i, \quad i \in J, \\ \rho^{j,h} &= a_h \otimes x_h, \quad h \in K, \\ \rho^{j,h} &= b_h \otimes x_h, \quad h \in L, \end{aligned}$$

и $\rho^{i,h} = \varepsilon$ за свако $i \in J \setminus \{j\}, h \in K \cup L$, као и све остале коефицијенте на ε.
Нека је y дефинисан као у (2.3.24), показујемо да је $y = x$. За $t \in I$ важи

$$y_t = \sum_{i \in I}^{\oplus} \pi^i \otimes e_t^i = \pi^t \otimes e_t^t = x_t \otimes 0 = x_t.$$

За $t \in J \setminus \{j\}$ и користећи (2.3.25) се на сличан начин добија се $y_t = x_t$. Аналоган је поступак и за $t \in K$ и $t \in L$.
У Случају 3 имамо $a_f, b_g > \varepsilon$ и за свако $i \in N$ важи

$$\begin{cases} a_f^{(-1)} \otimes a_i \otimes x_i \leq x_f, \\ b_g^{(-1)} \otimes b_i \otimes x_i \leq x_g. \end{cases} \tag{2.3.26}$$

Поставимо

$$\begin{aligned} \pi^i &= x_i, \quad i \in I, \\ \rho^i &= a_i \otimes x_i, \quad i \in J, \\ \sigma^{f,g} &= a_f \otimes x_f = b_g \otimes x_g, \\ \sigma^{f,g,h} &= \begin{cases} a_h \otimes x_h, & h \in K, \\ b_h \otimes x_h, & h \in L, \end{cases} \end{aligned}$$

и све остале коефицијенте на ε. Нека је y поново дефинисан као у (2.3.24) и узмимо $t \in I$. Тада се аналогним поступком као у Случају 2. показује да $y = x$ у случајевима када је $t \in J$, $t \in K \setminus \{f\}$ и $t \in L$. □

Претходни конструктивни докази практично показују како се решавају системи (2.3.2). Ипак, због експоненцијалног раста броја променљивих, метода је ефикасна само на системима мањих димензија. Развијено је и неколико побољшања ове методе.

Глава 3

Макс-алгебарске псеудо косо-симетричне матрице

Матрице су интензивно проучаване у истраживањима из области макс-алгебре. Још са првим радовима у овој области, дефинисана је и разматрана конјугована матрица [43]. У Потпоглављу 1.4.4 су дата нека њена основна својства и истакнут је њен значај у макс-алгебри. Такође, када се ради о матрицама у макс-алгебарском смислу, аутори су разматрали питања као што су степени матрица [26], слабо и јако стабилне (робусне) матрице [26], знаковно-несингуларне матрице [62], регуларне и јако регуларне матрице [35], Gondran-Minoux регуларне матрице [69], макс-нумерички ранг матрица [104], корени матрица [74], тотално позитивне матрице [61], комплементарне матрице [59], итд. Осим тога, неколико класа матрица смо већ описали у Поглављу 1.3, укључујући растуће, одређене, нормалне и строго нормалне, дијагонално доминантне и иредуцибилне матрице.
У овој глави су најпре дате неке особине симетричних и косо-симетричних матрица у макс-алгебри. С обзиром на начин на који се дефинишу операције у макс-алгебри, ове матрице имају својства која се разликују од аналогних својстава у класичној линеарној алгебри. Затим се дефинишу макс-алгебарске псеудо косо-симетричне матрице, описују се њихове основне карактеристике и операције са овим матрицама. Осим тога, уводи се и појам слабих макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица и испитују се њихова својства. Описано је и како бесконачни елементи у овим матрицама могу утицати на њихове особине. На крају ове главе, разматра се конструктивност макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица, кроз испитивање матрица димензије 2×2 и 3×3.
Резултати из ове главе објављени су у радовима [101] (Поглавља 3.1 - 3.5), [102] (Потпоглавље 3.6.1) и [103] (Потпоглавље 3.6.2).

3.1 Симетричне и косо-симетричне матрице над макс-плус алгебрама

У класичној линеарној алгебри, матрица A је симетрична ако важи $A = A^\top$. Матрица A је косо-симетрична ако важи $A = -A^\top$. Симетричне и косо-симетричне матрице су квадратне матрице. Косо-симетрична матрица има нуле на главној дијагонали. Такође, у класичној линеарној алгебри важи следеће (при чему су „$+$“ и „$\cdot$“ сабирање и множење матрица у уобичајеном смислу): ако је A квадратна матрица, тада су $A + A^\top$, $A \cdot A^\top$ и $A \cdot (-A^\top)$ симетричне, док је $A + (-A^\top)$ косо-симетрична ма-

трица. Разматрамо у наставку да ли ова својства важе и у макс-алгебри. Пре тога, навешћемо неке особине транспонованих и симетричних матрица које важе у макс-алгебри.
Када се ради о транспонованим матрицама, није тешко показати да, као и у класичној линеарној алгебри, важе следећа својства:

$$(A \oplus B)^\top = A^\top \oplus B^\top, \tag{3.1.1}$$
$$(A \otimes B)^\top = B^\top \otimes A^\top, \tag{3.1.2}$$
$$(\theta \otimes A)^\top = \theta \otimes A^\top, \tag{3.1.3}$$

за свако $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ и $\theta \in \mathbb{R}$.
Следећа теорема описује својства симетричних матрица у макс-алгебри. Ова својства имају своје аналоге у класичној линеарној алгебри.

Теорема 3.1.1 *Нека су $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ симетричне матрице и $\theta \in \mathbb{R}$. Тада важи:*

1. *$\theta \otimes A$ је симетрична матрица;*
2. *$A \oplus B$ је симетрична матрица;*
3. *Ако важи $A \otimes B = B \otimes A$, тада је $A \otimes B$ симетрична матрица;*
4. *Ако је $s \in \mathbb{N}$, тада је $A^{(s)}$ симетрична матрица.*

Доказ:

1. Ово директно следи из дефиниције симетричних матрица и макс-алгебарског множења скаларом.
2. Ако су A и B симетричне матрице, имамо $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, за свако $i, j \in N$. Нека је $C = A \oplus B$. Тада важи:
$$c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} = \max\{a_{ji}, b_{ji}\} = c_{ji}.$$
Дакле, матрица C је симетрична.
3. Означимо $C = A \otimes B$ и $D = B \otimes A$. Тада се елементи ових матрица рачунају као:
$$c_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj} \qquad \text{и} \qquad d_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} b_{ik} \otimes a_{kj},$$
за $i, j \in N$. По претпоставци $A \otimes B = B \otimes A$, па важи једнакост горњих израза. Користећи комутативност операције $\otimes$ у $\overline{\mathbb{R}}$ и симетричност матрица A и B, добијамо:
$$c_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj} = \sum_{k\in N}^{\oplus} b_{ik} \otimes a_{kj} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{kj} \otimes b_{ik} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{jk} \otimes b_{ki} = c_{ji}.$$
Стога, $C = A \otimes B$ је симетрична матрица.
4. Нека је A симетрична матрица, тј. $a_{ij} = a_{ji}$, за свако $i, j \in N$. Принципом математичке индукције доказујемо да важи $a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}$.

За $s = 1$ тврђење је тачно, јер је A симетрична. Претпоставимо да важи за $s = p$, односно:

$$a_{ij}^{(p)} = a_{ji}^{(p)}.$$

Покажимо да тврђење важи и за $s = p + 1$. Како је $A^{(p+1)} = A^{(p)} \otimes A$, користећи индукциону претпоставку и комутативност операције $\otimes$, добијамо:

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik}^{(p)} \otimes a_{kj} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ki}^{(p)} \otimes a_{jk} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{jk} \otimes a_{ki}^{(p)} = a_{ji}^{(p+1)}.$$

Закључујемо да је $A^{(s)}$ симетрична матрица.

Овим је доказ завршен. □

Напомена 3.1.1 *Ако је A симетрична, тада према тврђењу 4. Теореме 3.1.1, матрица $A^{(2)}$ је симетрична матрица. Поред тога, лако се уочава да за дијагоналне елементе ове матрице важи:*

$$a_{ii}^{(2)} = 2\max_{k\in N}\{a_{ki}\} = 2\max_{k\in N}\{a_{ik}\}, \qquad \textit{за свако } i \in N.$$

Међутим, ово не мора да важи за више степене матрице A, као што ћемо показати следећим примером.

Пример 3.1.1 *Нека је симетрична матрица A дата са:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тада је:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 4 \\ 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 17 \\ 15 & 18 & 11 \\ 17 & 11 & 15 \end{pmatrix}, \; A^4 = \begin{pmatrix} 28 & 22 & 24 \\ 22 & 24 & 18 \\ 24 & 18 & 20 \end{pmatrix}, \; A^5 = \begin{pmatrix} 35 & 29 & 31 \\ 29 & 30 & 25 \\ 31 & 25 & 27 \end{pmatrix}, \; \ldots$$

Као што је доказано у тврђењу 4. Теореме 3.1.1, све ове матрице су симетричне. Такође, приметимо да за дијагоналне елементе матрице $A^{(2)}$, према Напомени 3.1.1, важи

$$14 = 2\max\{7,1,3\}; \quad 12 = 2\max\{1,6,-2\}; \quad 10 = 2\max\{3,-2,5\}.$$

Штавише, у овом случају исто својство важи и за дијагоналне елементе матрица $A^{(3)}$ и $A^{(4)}$ (где 3, односно 4, множи максимум):

$$21 = 3\max\{7,1,3\}, \quad 18 = 3\max\{1,6,-2\}, \quad 15 = 3\max\{3,-2,5\};$$

$$28 = 4\max\{7,1,3\}, \quad 24 = 4\max\{1,6,-2\}, \quad 20 = 4\max\{3,-2,5\}.$$

Међутим, када је реч о матрици $A^{(5)}$, ова особина неће бити задовољена (јер $a_{33}^{(5)} = 27 \neq 25 = 5\max\{3,-2,5\}$). Закључујемо да наведена особина не важи у општем случају. ■

У наредне три теореме описујемо својства следећих матрица: $A \oplus A^\top$, $A \otimes A^\top$ и $A \oplus A^*$. Матрица $A \otimes A^*$ има неке посебне особине и стога ће бити посебно разматрана у наредном поглављу.

Теорема 3.1.2 *Нека је* $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$. *Тада је* $A' = A \oplus A^\top$ *симетрична матрица за чије дијагоналне елементе важи*

$$a'_{ii} = a_{ii}, \qquad \text{за свако } i \in N. \tag{3.1.4}$$

Доказ: За елементе матрица A и $A^\top$ важи $a^\top_{ij} = a_{ji}$, за свако $i, j \in N$, па имамо

$$a'_{ij} = \max\left\{a_{ij}, a^\top_{ij}\right\} = \max\left\{a^\top_{ji}, a_{ji}\right\} = a'_{ji}.$$

Дакле, A' јесте симетрична матрица. За дијагоналне елементе је јасно да важи $a'_{ii} = \max\left\{a_{ii}, a^\top_{ii}\right\} = \max\{a_{ii}, a_{ii}\} = a_{ii}$, за свако $i \in N$, чиме је доказ завршен. □

Теорема 3.1.3 *Нека је* $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$. *Тада је* $A^\lozenge = A \otimes A^\top$ *симетрична матрица и за њене дијагоналне елементе важи*

$$a^\lozenge_{ii} = 2\max_{k\in N}\{a_{ik}\} = 2\max_{k\in N}\left\{a^\top_{ki}\right\}, \qquad \text{за свако } i \in N. \tag{3.1.5}$$

Доказ: Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$, тада је $A^\top \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, па $A^\lozenge \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$. Елемент $a^\lozenge_{ij}$ рачунамо као

$$a^\lozenge_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a^\top_{kj},$$

за свако $i, j \in N$. Узимајући у обзир везу између елемената матрица A и $A^\top$, као и комутативност операције $\otimes$ за реалне бројеве, за свако $i, j \in N$ имамо

$$a^\lozenge_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a^\top_{kj} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a^\top_{ki} \otimes a_{jk} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{jk} \otimes a^\top_{ki} = a^\lozenge_{ji}, \tag{3.1.6}$$

па је $A^\lozenge$ симетрична. За дијагоналне елементе матрице $A^\lozenge$, за свако $i \in N$, важи

$$a^\lozenge_{ii} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a^\top_{ki} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a_{ik} = \max_{k\in N}\{a_{ik} + a_{ik}\} = 2\max_{k\in N}\{a_{ik}\}. \tag{3.1.7}$$

Друга једнакост у (3.1.5) је очигледна, имајући у виду да је $a_{ik} = a^\top_{ki}$. □

Пре наредне теореме, треба напоменути да када се ради о матрици A^*, претпостављамо да су елементи њој одговарајуће матрице A реални бројеви. Касније ће бити разматран случај када се у матрици A (и следствено у A^*) појављују бесконачни елементи, јер је тада потребно проширити скуп $\mathbb{R}$ не само елементом $-\infty$, него и елементом $+\infty$.

Теорема 3.1.4 *Нека је* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $A^\bullet = A \oplus A^*$. *Тада важи:*

1. $A^\bullet$ *је квадратна матрица, али није ни симетрична ни косо-симетрична;*
2. $A^\bullet$ *не може имати два симетрична негативна елемента;*
3. *Ако* $a_{ij} \neq a_{ji}$, *за свако* $i, j \in N$, *тада је и* $a^\bullet_{ij} \neq a^\bullet_{ji}$;
4. *За дијагоналне елементе* $A^\bullet$ *важи* $a^\bullet_{ii} = |a_{ii}|$, *за свако* $i \in N$;
5. *Ако је* A *симетрична, тада је* $a^\bullet_{ij} = |a_{ij}|$, *за свако* $i, j \in N$.

Доказ:

1. Очигледно, $A^\bullet$ је квадратна матрица. Лако се може проверити да матрица, коју добијамо када се A макс-алгебарски сабере са својом негативном транспонованом матрицом, није ни симетрична ни косо-симетрична.

2. Претпоставимо да је елемент $a^\bullet_{ij}$ негативан. Тада имамо $a^\bullet_{ij} = \max\left\{a_{ij}, a^*_{ij}\right\} = \max\left\{a_{ij}, -a_{ji}\right\} < 0$. Дакле, мора важити $a_{ij} < 0$ и $-a_{ji} < 0$, тј. $a^*_{ji} > 0$ и $a_{ji} > 0$. Сада је:
$$a^\bullet_{ji} = \max\left\{a_{ji}, a^*_{ji}\right\} > 0. \tag{3.1.8}$$
Тиме смо доказали да елемент, симетричан негативном елементу у матрици $A^\bullet$, мора бити позитиван.

3. Елемент $a^\bullet_{ij}$ се рачуна као $a^\bullet_{ij} = \max\left\{a_{ij}, a^*_{ij}\right\}$, за свако $i, j \in N$. Без губитка општости, можемо претпоставити да је $\max\left\{a_{ij}, a^*_{ij}\right\} = a_{ij}$, тј. да је $a^\bullet_{ij} = a_{ij}$. Тада важи:
$$a_{ij} > a^*_{ij} \quad \Rightarrow \quad -a_{ij} < -a^*_{ij} \quad \Rightarrow \quad a^*_{ji} < a_{ji}. \tag{3.1.9}$$
Одавде, имамо $a^\bullet_{ji} = \max\left\{a_{ji}, a^*_{ji}\right\} = a_{ji}$. Пошто је $a_{ij} \neq a_{ji}$, следи да $a^\bullet_{ij} \neq a^\bullet_{ji}$.

4. За дијагоналне елементе матрице $A^\bullet$ важи:
$$a^\bullet_{ii} = \max\left\{a_{ii}, a^*_{ii}\right\} = \max\left\{a_{ii}, -a_{ii}\right\} = |a_{ii}|, \quad \text{за свако } i \in N. \tag{3.1.10}$$

5. Ако је A симетрична матрица, онда за свако $i, j \in N$, имамо:
$$a^\bullet_{ij} = \max\left\{a_{ij}, a^*_{ij}\right\} = \max\left\{a_{ij}, -a_{ji}\right\} = \max\left\{a_{ij}, -a_{ij}\right\} = |a_{ij}|. \tag{3.1.11}$$

Тиме је доказ завршен. □

На основу претходних теорема, закључујемо да су матрице $A' = A \oplus A^\top$ и $A^\Diamond = A \otimes A^\top$ симетричне, као њима одговарајуће матрице у класичној линеарној алгебри. Матрица $A^\bullet = A \oplus A^*$ није ни симетрична ни косо-симетрична, за разлику од класичне линеарне алгебре, где је одговарајућа матрица косо-симетрична.

Пример 3.1.2 *Нека је матрица $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ дата са:*
$$A = \begin{pmatrix} 3.4 & 1 & 2.6 & -3 \\ -1.1 & 6.9 & -2 & 0.8 \\ 10.2 & 4 & 9 & 7.6 \\ 12.3 & 6.7 & -5.2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тада имамо:
$$A' = \begin{pmatrix} 3.4 & 1 & 10.2 & 12.3 \\ 1 & 6.9 & 4 & 6.7 \\ 10.2 & 4 & 9 & 7.6 \\ 12.3 & 6.7 & 7.6 & -8 \end{pmatrix}, \; A^\Diamond = \begin{pmatrix} 6.8 & 7.9 & 13.6 & 15.7 \\ 7.9 & 13.8 & 10.9 & 13.6 \\ 13.6 & 10.9 & 20.4 & 22.5 \\ 15.7 & 13.6 & 22.5 & 24.6 \end{pmatrix}, \; A^\bullet = \begin{pmatrix} 3.4 & 1.1 & 2.6 & -3 \\ -1 & 6.9 & -2 & 0.8 \\ 10.2 & 4 & 9 & 7.6 \\ 12.3 & 6.7 & -5.2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Видимо да су A' и $A^\Diamond$ симетричне матрице, док $A^\bullet$ није ни симетрична ни косо-симетрична. Такође, за дијагоналне елементе ових матрица важи (на пример, за $i = 4$):
$$a'_{44} = -8 = a_{44}; \qquad a^\Diamond_{44} = 24.6 = 2\max\left\{12.3, 6.7, -5.2, -8\right\}; \qquad a^\bullet_{44} = 8 = |a_{44}|.$$

Ово је у складу са доказаним својствима о дијагоналним елементима из претходних теорема. ■

3.2 Појам макс-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица

У овом поглављу уводимо и описујемо нову класу матрица у макс-алгебри. Матрица $A \otimes A^*$ такође припада тој класи (подсетимо се да матрица A^* означава $-A^\top$), па стога најпре описујемо ову матрицу. Овде претпостављамо да су елементи матрице A реални бројеви. Случај када се у матрици A појављују бесконачни елементи биће разматран у Поглављу 3.5.

Лема 3.2.1 *Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Тада је $\tilde{A} = A \otimes A^*$ квадратна матрица са нула дијагоналом.*

Доказ: Ако је $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, тада матрица A^* припада $\mathbb{R}^{m\times n}$, па $\tilde{A}$ припада $\mathbb{R}^{n\times n}$, тј. јесте квадратна матрица. За елементе матрица A и A^* важи $a^*_{ij} = -a_{ji}$, за свако $i, j \in N$. Одавде, за дијагоналне елементе матрице $\tilde{A}$ имамо:

$$\tilde{a}_{ii} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a^*_{ki} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes (-a_{ik}) = \max_{k\in N}\{a_{ik} + (-a_{ik})\} = 0, \qquad \text{за свако } i \in N,$$

чиме је тврђење доказано. □

У класичној линеарној алгебри $A \cdot A^*$ је симетрична матрица, где је „$\cdot$“ уобичајено множење матрица. Ово својство не важи у макс-алгебри за $A \otimes A^*$, што се лако може проверити. Међутим, важи следећа особина, која ће бити кључна за опис нове класе матрица.

Теорема 3.2.1 *За матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, симетрични елементи матрице $\tilde{A} = A \otimes A^*$ не могу истовремено бити негативни.*

Доказ: Нека је $\tilde{a}_{ij}$, $i, j \in N$ негативан елемент матрице $\tilde{A}$. Овај елемент рачунамо као:

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a^*_{kj} = \max_{k\in N}\left\{a_{ik} + a^*_{kj}\right\}, \quad i, j \in N.$$

Претпоставимо да се највећи сабирак ове макс-алгебарске суме постиже за неко $p \in N$:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ip} + a^*_{pj} < 0.$$

Тада је:

$$-(a_{ip} + a^*_{pj}) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^*_{pi} + a_{jp} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{jp} + a^*_{pi} > 0.$$

Последњи израз је један од сабирака у макс-алгебарској суми при рачунању елемента $\tilde{a}_{ji}$:

$$\tilde{a}_{ji} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{jk} \otimes a^*_{ki} = \max\left\{a_{j1} + a^*_{1i}, \ldots, a_{jp} + a^*_{pi}, \ldots, a_{jn} + a^*_{ni}\right\}.$$

Дакле, бар један од сабирака у горњој суми је позитиван, па је и сама макс-алгебарска сума позитивна. То значи да је $\tilde{a}_{ji} > 0$, чиме је доказано да два си-

метрична елемента матрице $\tilde{A}$ не могу истовремено бити негативна. □
На основу доказа ове теореме, можемо извести следеће последице:

Последица 3.2.1 *Ако је елемент $\tilde{a}_{ij}$ матрице $\tilde{A}$ негативан, тада одговарајући симетрични елемент $\tilde{a}_{ji}$ мора бити строго позитиван, тј. могућност да елемент $\tilde{a}_{ji}$ буде једнак нули је искључена.*

Последица 3.2.2 *У матрици $\tilde{A}$ вандијагонални елементи не могу сви бити негативни.*

Напомена 3.2.1 *Треба напоменути да у матрици $\tilde{A}$ два симетрична елемента могу истовремено бити позитивна, тј. Теорема 3.2.1 не тврди да симетрични елементи у $\tilde{A}$ морају нужно бити различитих знакова.*

Пример 3.2.1 *Ако је матрица $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ дата са*

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 8 \\ 6 & -9 & -1 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}, \qquad \textit{тада је:} \qquad \tilde{A} = A \otimes A^* = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{13} & 18 \\ \boxed{-9} & 0 & 9 \\ -2 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дакле, у питању је квадратна матрица са нула дијагоналом. Елемент $\tilde{a}_{21}$ рачунамо:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{21} &= \max\{a_{21} + a_{11}^*, a_{22} + a_{21}^*, a_{23} + a_{31}^*\} = \max\{6 + (-15), -9 + (-4), -1 + (-8)\} \\ &= \max\{-9, -13, -9\} = -9. \end{aligned}$$

Максимум се постиже у $a_{21} + a_{11}^*$ и $a_{23} + a_{31}^*$, и ови елементи су негативни. Дакле, биће $-(a_{21} + a_{11}^*) > 0$ и $-(a_{23} + a_{31}^*) > 0$, па је $a_{11} + a_{12}^* > 0$ и $a_{13} + a_{32}^* > 0$. Ова два израза се појављују при рачунању елемента $\tilde{a}_{12}$:

$$\tilde{a}_{12} = \max\{a_{11} + a_{12}^*, a_{12} + a_{22}^*, a_{13} + a_{32}^*\} = \max\{15 + (-6), 4 + 9, 8 + 1\} = \max\{9, 13, 9\} = 13.$$

Закључујемо, елемент симетричан негативном елементу у матрици $\tilde{A}$ је позитиван. Такође, можемо уочити да симетрични елементи матрице $\tilde{A}$ могу истовремено бити позитивни, као што је наглашено у Напомени 3.2.1. ■

Због одређених сличности са косо-симетричним матрицама, горе разматране матрице називаћемо **макс-алгебарске псеудо косо-симетричне** (max-algebraic pseudo skew-symmetric - *MAPSS*) матрице.

Дефиниција 3.2.1 *Макс-алгебарска псеудо косо-симетрична (MAPSS) матрица је квадратна матрица са нула дијагоналом која не садржи два симетрична негативна елемента.*

Очигледно, $\tilde{A} = A \otimes A^*$ припада класи *MAPSS* матрица, али то не значи да се свака *MAPSS* матрица обавезно добија као макс-алгебарски производ неке матрице и њене конјуговане матрице (више о томе дато је у Поглављу 3.6).
Такође, свака квадратна матрица са нула дијагоналом, чији су сви вандијагонални елементи ненегативни јесте *MAPSS* матрица. Није тешко закључити да је свака косо-симетрична матрица такође *MAPSS* матрица. Ово не важи за симетричне матрице. Напоменимо и да матрица димензије $n \times n$ чији су сви елементи једнаки нули, такође представља *MAPSS* матрицу, имајући у виду да је она квадратна матрица са нула дијагоналом која нема симетричне негативне елементе.
Важно је истаћи следеће: на основу Последице 3.2.1, за матрицу $\tilde{A} = A \otimes A^*$ (која

припада класи $MAPSS$ матрица) важи: ако је $\tilde{a}_{ij} < 0$, тада је $\tilde{a}_{ji} > 0$. Међутим, за произвољну $MAPSS$ матрицу M важи: ако је $m_{ij} < 0$, тада је $m_{ji} \geqslant 0$, тј. могућност да m_{ji} буде нула није искључена.
Следећа лема се односи на број негативних елемената у $MAPSS$ матрици. Напомињемо да у наставку, када кажемо $MAPSS$ матрица A, мислимо на произвољну матрицу која задовољава Дефиницију 3.2.1. Уколико је таква матрица добијена као макс-алгебарски производ неке матрице и њене конјуговане, то ће бити посебно наглашено.

Лема 3.2.2 *Број негативних елемената у $MAPSS$ матрици $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ не може бити већи од $(n^2 - n)/2$.*

Доказ: Укупан број елемената у матрици $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ је n^2. Пошто су дијагонални елементи једнаки нули и има их n, број вандијагоналних елемената је $n^2 - n$. Узимајући у обзир да у $MAPSS$ матрици два симетрична елемента не могу истовремено бити негативна, закључујемо да највише половина ове вредности може бити негативна. □

3.3 Операције са макс-алгебарским псеудо косо-симетричним матрицама

У овом поглављу ћемо размотрити да ли својства која важе у класичној линеарној алгебри за симетричне/косо-симетричне матрице важе у макс-алгебри за $MAPSS$ матрице. У класичној линеарној алгебри за симетричне/косо-симетричне матрице важи следеће: транспонована и негативна транспонована матрица симетричне (косо-симетричне) матрице су симетричне (косо-симетричне); ако помножимо симетричну (косо-симетричну) матрицу скаларом, резултат ће бити симетрична (косо-симетрична) матрица; збир две симетричне (косо-симетричне) матрице је симетрична (косо-симетрична) матрица; производ две симетричне (косо-симетричне) матрице није симетрична (косо-симетрична) матрица.
За $MAPSS$ матрице, ова својства су описана следећим тврђењима у којима су елементи матрице A реални бројеви, док ће касније бити испитана иста својства у случају бесконачних уноса.

Теорема 3.3.1 *Нека је A $MAPSS$ матрица. Тада је $A^\top$ $MAPSS$ матрица, док A^* није.*

Доказ: Ако је A $MAPSS$ матрица, јасно је да ће њена транспонована матрица такође бити квадратна матрица са нула дијагоналом. Осим тога, ако A не садржи симетричне негативне елементе, ово својство ће важити и за $A^\top$, па ова матрица јесте $MAPSS$. Матрица A^* није $MAPSS$. Она јесте квадратна матрица са нула дијагоналом, али пошто A може имати два симетрична позитивна елемента, следи да A^* може садржати два симетрична негативна елемента. □

Теорема 3.3.2 *Резултат макс-алгебарског множења $MAPSS$ матрице скаларом није $MAPSS$ у општем случају.*

Доказ: Нека је A $MAPSS$ матрица и θ произвољан скалар. Тривијалан случај је када је $\theta = 0$. Тада имамо $\theta \otimes A = A$, што јесте $MAPSS$ матрица.
Ако је $\theta < 0$, услов да матрица $\theta \otimes A$ нема два симетрична негативна елемента може бити нарушен, док ће се за $\theta > 0$ овај услов очувати. Међутим, ова матрица у оба случаја има на главној дијагонали елементе који су сви једнаки θ, па закључујемо да она није $MAPSS$ матрица. □

Теорема 3.3.3 *Макс-алгебарски збир две MAPSS матрице је такође MAPSS матрица.*

Доказ: Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *MAPSS* матрице и нека је $C = A \oplus B$. Јасно је да је C квадратна матрица са нула дијагоналом. Претпоставимо да C има негативан елемент:

$$c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} < 0,$$

за неке $i, j \in N$. Ово значи да су $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$. Како су A и B *MAPSS* матрице, одговарајући симетрични елементи ће бити ненегативни: $a_{ji} \geqslant 0$ и $b_{ji} \geqslant 0$. Сада имамо:

$$c_{ji} = \max\{a_{ji}, b_{ji}\} \geqslant 0.$$

Дакле, матрица C не може имати два симетрична негативна елемента, па је *MAPSS* матрица. □

Теорема 3.3.4 *Макс-алгебарски производ две MAPSS матрице је квадратна матрица која не садржи два симетрична негативна елемента, али нема нула дијагоналу.*

Доказ: Нека су $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *MAPSS* матрице и нека је $D = A \otimes B$. Јасно је да D такође припада $\mathbb{R}^{n\times n}$. Претпоставимо да D има негативан елемент:

$$d_{ij} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max\{a_{i1} + b_{1j}, \ldots, a_{ii} + b_{ij} \ldots, a_{in} + b_{nj}\} < 0,$$

за неке $i, j \in N$. Ово значи да су сви сабирци у овој суми негативни. Како је A матрица са нула дијагоналом, имамо $a_{ii} = 0$, па мора бити $a_{ii} + b_{ij} < 0$, тј. $b_{ij} < 0$. Пошто је B *MAPSS* матрица, имамо $b_{ji} \geqslant 0$. Елемент d_{ji} рачунамо као:

$$d_{ji} = \sum_{k\in N}^{\oplus} a_{jk} \otimes b_{ki} = \max\{a_{j1} + b_{1i}, \ldots, a_{jj} + b_{ji} \ldots, a_{jn} + b_{ni}\}.$$

Како је $a_{jj} = 0$ и $b_{ji} \geqslant 0$, закључујемо да је бар један сабирак у овој суми ненегативан. Дакле, цела сума ће бити ненегативна, тј. $d_{ji} \geqslant 0$. Овим смо доказали да матрица D не може имати два симетрична негативна елемента. Међутим, ова матрица није *MAPSS*, јер дијагонални елементи у општем случају нису једнаки нули, што није тешко проверити. □

Последица 3.3.1 *Ако је A MAPSS матрица, тада $A^{(p)}$, $p \geqslant 2$, није MAPSS матрица.*

Подсетимо се да смо раније описали својства матрица $A' = A \oplus A^\top$, $A^\Diamond = A \otimes A^\top$, $A^\bullet = A \oplus A^*$ и $\tilde{A} = A \otimes A^*$ у макс-алгебри, где је A била произвољна или квадратна матрица. Сада ћемо описати ове матрице под условом да је A *MAPSS* матрица.

Теорема 3.3.5 *Нека је $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ MAPSS матрица. Тада важи:*

1. *$A' = A \oplus A^\top$ је MAPSS матрица чији су сви елементи ненегативни;*
2. *$A^\Diamond = A \otimes A^\top$ није MAPSS, али су сви њени елементи ненегативни;*
3. *$A^\bullet = A \oplus A^*$ је MAPSS матрица;*
4. *$\tilde{A} = A \otimes A^*$ је MAPSS матрица.*

Доказ: Јасно је да су наведене матрице квадратне. Остаје да проверимо да ли имају нула дијагоналу и да ли садрже симетричне негативне елементе.

1. Према Теореми 3.3.1, ако је A $MAPSS$ матрица, тада је и $A^\top$ $MAPSS$. Такође, према Теореми 3.3.3, макс-алгебарски збир две $MAPSS$ матрице је $MAPSS$ матрица, па је $A' = A \oplus A^\top$ $MAPSS$ матрица.

   Елемент a'_{ij} се рачуна као $a'_{ij} = \max\left\{a_{ij}, a_{ij}^\top\right\} = \max\left\{a_{ij}, a_{ji}\right\}$, за свако $i, j \in N$. Како је A $MAPSS$ матрица, имамо да a_{ij} и a_{ji} не могу бити истовремено негативни, тј. бар један од њих је ненегативан, па је и $a'_{ij} \geq 0$. Дакле, закључујемо да су сви елементи у A' ненегативни.

2. Лако се проверава да матрица $A^\Diamond = A \otimes A^\top$ није $MAPSS$, јер нема нула дијагоналу. Претпоставимо да је елемент $a_{ij}^\Diamond$ негативан, тј.

$$a_{ij}^\Diamond = \sum_{k \in N}^{\oplus} a_{ik} \otimes a_{kj}^\top < 0,$$

   за неке $i, j \in N$. Ово значи да је $a_{ik} \otimes a_{kj}^\top < 0$, за свако $k \in N$. За $k = i$ имамо $a_{ii} + a_{ij}^\top < 0$. Како је A $MAPSS$ матрица, она има нула дијагоналу, па је $a_{ii} = 0$. Одавде следи $a_{ij}^\top < 0$, тј. $a_{ji} < 0$. С друге стране, за $k = j$ се добија $a_{ij} + a_{jj}^\top < 0$. Пошто је $a_{jj}^\top = a_{jj} = 0$, следи да је $a_{ij} < 0$. Добијамо да је $a_{ij} < 0$ и $a_{ji} < 0$, па пошто A не може имати два симетрична негативна елемента, одбацујемо претпоставку да $A^\Diamond$ има негативан елемент.

3. Како је A $MAPSS$ матрица и A^* има нула дијагоналу, матрица $A^\bullet = A \oplus A^*$ ће такође имати нула дијагоналу. Претпоставимо да је $a_{ij}^\bullet < 0$, тј.

$$a_{ij}^\bullet = \max\left\{a_{ij}, a_{ij}^*\right\} < 0,$$

   за неке $i, j \in N$. Тада су a_{ij} и a_{ij}^* негативни. Како је A $MAPSS$ матрица и $a_{ij} < 0$, следи да је $a_{ji} \geqslant 0$. Дакле:

$$a_{ji}^\bullet = \max\left\{a_{ji}, a_{ji}^*\right\} \geqslant 0.$$

   Одавде, $A^\bullet$ не може имати два симетрична негативна елемента. Према томе, $A^\bullet$ је $MAPSS$ матрица.

4. Ово тврђење важи за произвољну матрицу A (према Леми 3.2.1 и Теореми 3.2.1), па ће важити и у случају када је A $MAPSS$ матрица.

Доказ је тиме завршен. □

Приметимо да, према Теореми 3.3.3, имамо да је макс-алгебарски збир две $MAPSS$ матрице $MAPSS$ матрица, али из доказа својства 3. претходне теореме можемо закључити више од тога: макс-алгебарски збир $MAPSS$ матрице и произвољне квадратне матрице са нула дијагоналом је $MAPSS$ матрица. Није тешко закључити да ће ова чињеница важити и у општем случају:

Последица 3.3.2 *Ако је A $MAPSS$ матрица и $A_1, A_2, \ldots$ квадратне матрице са нула дијагоналом (које су исте димензије као A), тада $A \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ јесте $MAPSS$ матрица.*

Лема 3.3.1 *Ако је A симетрична и $MAPSS$ матрица, тада важи $A^\bullet = A$.*

Доказ: Ако је A симетрична и $MAPSS$, сви вандијагонални елементи морају бити ненегативни, тј. $a_{ij} \geq 0$, за свако $i, j \in N$, $i \neq j$. Тада је $a_{ij}^* \leq 0$, за свако $i, j \in N$, $i \neq j$.

Дакле, имамо $a_{ij}^{\bullet} = \max\{a_{ij}, a_{ij}^{*}\} = a_{ij}$, па је тврђење доказано. □
На крају овог поглавља, напоменимо и следеће: имајући у виду да је $(A^{\top})^{\top} = A$ и $(A^{*})^{*} = A$, лако је закључити да сва описана својства важе и за матрице $A^{\top} \oplus A$, $A^{\top} \otimes A$, $A^{*} \oplus A$ и $A^{*} \otimes A$. Дакле, $A^{*} \otimes A$ је такође *MAPSS* матрица.

3.4 Слабе псеудо косо-симетричне матрице

На основу својстава доказаних у Теореми 3.1.4, $A^{\bullet} = A \oplus A^{*}$ (где је A произвољна матрица) је квадратна матрица која не може имати два симетрична негативна елемента. Међутим, она није *MAPSS* матрица јер нема нула дијагоналу, што није тешко доказати. Ипак, на основу теорема из претходног поглавља можемо извести закључке о класи матрица којој $A^{\bullet}$ припада, тј. о класи квадратних матрица које немају два симетрична негативна елемента (дијагонални елементи могу бити произвољни). Назовимо ову класу **класом слабих** *MAPSS* **матрица**. Пре саме дефиниције, и овде напомињемо да се ради о матрицама без бесконачних уноса.

Дефиниција 3.4.1 *Слаба макс-алгебарска псеудо косо-симетрична (слаба MAPSS) матрица је квадратна матрица која не садржи два симетрична негативна елемента.*

Имајући у виду тврђења која смо претходно доказали за *MAPSS* матрице, сада ћемо испитати да ли се та тврђења преносе и на слабе *MAPSS* матрице. Као што ћемо видети, нека својства остају непромењена, док друга неће важити због одсуства услова о нула дијагонали.
Очигледно, свака *MAPSS* матрица је и слаба *MAPSS* матрица. Када је реч о броју негативних елемената, постоји разлика у односу на *MAPSS* матрице.

Лема 3.4.1 *Број негативних елемената у слабој MAPSS матрици $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ не може бити већи од $(n^2+n)/2$.*

Доказ: У Леми 3.2.2 је показано да број негативних елемената у *MAPSS* матрици не може бити већи од $(n^2-n)/2$ (сви ти елементи су вандијагонални). Код слабих *MAPSS* матрица дијагонални елементи могу бити произвољни (тј. сви могу бити негативни), па се овом броју додаје n дијагоналних елемената:

$$(n^2-n)/2 + n = (n^2+n)/2.$$

Тиме је доказ завршен. □

Теорема 3.4.1 *Нека је A слаба MAPSS матрица. Тада је $A^{\top}$ слаба MAPSS, док A^{*} није.*

Доказ: Следи директно из доказа Теореме 3.3.1. □

Теорема 3.4.2 *Резултат макс-алгебарског множења слабе MAPSS матрице скаларом је слаба MAPSS матрица ако је тај скалар ненегативан.*

Доказ: На основу доказа Теореме 3.3.2, једноставно се закључује да ако је скалар ненегативан, тада ће резултат макс-алгебарског множења слабе *MAPSS* матрице скаларом бити слаба *MAPSS* матрица. Ако је скалар негативан, услов да не постоје два симетрична негативна елемента може (али не мора) бити нарушен, што зависи од вредности скалара и вредности елемената у матрици. □

Теорема 3.4.3 *Макс-алгебарски збир две слабе MAPSS матрице је такође слаба MAPSS матрица.*

Доказ: Следи непосредно из Теореме 3.3.3 и чињенице да је свака *MAPSS* матрица истовремено слаба *MAPSS* матрица. □

Теорема 3.4.4 *Макс-алгебарски производ две слабе MAPSS матрице није слаба MAPSS матрица у општем случају.*

Доказ: Ово се лако показује контрапримером (види Пример 3.4.1). □

Теорема 3.4.5 *Макс-алгебарски производ две MAPSS матрице је слаба MAPSS матрица.*

Доказ: Ово тврђење је доказано у Теореми 3.3.4. □

Теорема 3.4.6 *Ако је A слаба MAPSS, тада су A', $A^\bullet$ и $\tilde{A}$ такође слабе MAPSS матрице, док $A^\diamondsuit$ није.*

Доказ: На основу доказа Теореме 3.3.5, лако се закључује да тврђење важи за матрице A', $A^\bullet$ и $\tilde{A}$ (у доказу се не користи услов нула дијагонале, већ само услов непостојања симетричних негативних елемената, па ће стога тај доказ важити неизмењено и за слабе *MAPSS* матрице). За матрицу $A^\diamondsuit = A \otimes A^\top$, услов да не постоје два симетрична негативна елемента не мора бити испуњен, што није тешко показати, па ова матрица није слаба *MAPSS*. □
Лема 3.3.1 не важи за слабе *MAPSS* матрице, тј. у општем случају $A^\bullet = A \oplus A^* \neq A$, јер дијагонални елементи у $A^\bullet$ не морају бити исти као у A.

Пример 3.4.1 *Нека је дата слаба MAPSS матрица A:*

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & -4 \\ -6 & -18 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тада:

$$A' = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 3 \\ 2 & -18 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; A^\diamondsuit = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 8 \\ -7 & -6 & 6 \\ 8 & 6 & 18 \end{pmatrix}, \; A^\bullet = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -3 \\ -2 & 18 & -3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & -4 \\ 5 & 0 & -9 \\ 14 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Као што је описано, матрице A', $A^\bullet$ и $\tilde{A}$ су слабе MAPSS, док $A^\diamondsuit$ није (напомињемо да је ова матрица заправо макс-алгебарски производ две слабе MAPSS матрице A и $A^\top$, што је у складу са тврђењем да макс-алгебарски производ две слабе MAPSS матрице не мора бити слаба MAPSS (Теорема 3.4.4)). ■

Лема 3.4.2 *Ако бар један сабирак у макс-алгебарском збиру матрица јесте слаба MAPSS, тада је и сам тај збир слаба MAPSS матрица.*

Доказ: Нека је S матрица која је макс-алгебарски збир слабе *MAPSS* матрице A и произвољног броја других (не обавезно слабих *MAPSS*) матрица $B, C, \ldots$ (све матрице су димензије $n \times n$):

$$S = A \oplus B \oplus C \oplus \ldots$$

Нека је s_{ij} негативан елемент, тј.

$$s_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots\} < 0,$$

за неке $i, j \in N$. То значи да сви елементи у овом максимуму морају бити негативни:

$$a_{ij} < 0, \qquad b_{ij} < 0, \qquad c_{ij} < 0, \qquad \ldots$$

Пошто је A слаба $MAPSS$ и $a_{ij} < 0$, мора бити $a_{ji} \geqslant 0$. Сада, за s_{ji} имамо:

$$s_{ji} = \max\{a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, \ldots\}.$$

Дакле, овде је бар једна вредност ненегативна, одакле закључујемо да је и s_{ji} ненегативан. Према томе, S је слаба $MAPSS$ матрица. □

У Потпоглављу 1.4.2 дефинисали смо слабо и јако транзитивно затворење. За ове матрице, на основу претходне леме, важи следеће тврђење.

Последица 3.4.1 *Ако је A слаба $MAPSS$ матрица, тада су $\Gamma(A)$ и $\Delta(A)$ такође слабе $MAPSS$ матрице.*

Треба напоменути да је једина матрица у $\Delta(A)$ са елементима једнаким $-\infty$ матрица I, међутим то не утиче на валидност тврђења, јер је $-\infty$ неутрални елемент за $\oplus$.

3.5 Псеудо косо-симетричне матрице са бесконачним елементима

У овом поглављу усмеравамо пажњу на $MAPSS$ и слабе $MAPSS$ матрице чији елементи могу бити $-\infty$ и $+\infty$. Скуп $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ биће проширен елементом $+\infty$ и писаћемо $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Поређење на $\overline{\mathbb{R}}$ се проширује на поређење на $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, означено истим симболом $\leqslant$, тако да је $+\infty$ највећи елемент. За операцију $\oplus$ на проширеном скупу $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ важи:

$$a \oplus (+\infty) = (+\infty) \oplus a = +\infty, \qquad \text{за свако } a \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{3.5.1}$$

Осим тога, операција $\otimes$ се проширује на $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ тако да је:

$$a \otimes (+\infty) = (+\infty) \otimes a = (+\infty) \otimes (+\infty) = +\infty, \qquad \text{за свако } a \in \mathbb{R}, \tag{3.5.2}$$

а важи и

$$-\infty \otimes +\infty = +\infty \otimes -\infty = -\infty. \tag{3.5.3}$$

Такође, $(-\infty)^* = +\infty$ и $(+\infty)^* = -\infty$. Треба напоменути и да за $MAPSS$ матрице са бесконачним елементима, осим познатог услова $a_{ij} < 0 \Rightarrow a_{ji} \geqslant 0$, важи и: $a_{ij} = -\infty \Rightarrow a_{ji} \geqslant 0$, тј. $-\infty$ посматрамо као негативан елемент.
У наставку овог рада, вектор чији сви елементи узимају вредности $-\infty$ или $+\infty$ називаћемо ε-вектор. Посебно, ако је ε-вектор врста (тј. колона) неке матрице, називаћемо га ε-врста (тј. ε-колона). ε-вектор чији су сви елементи $-\infty$ означаваћемо са ε^-, а ε-вектор чији су сви елементи $+\infty$ означаваћемо са ε^+.

Теорема 3.5.1 *Ако је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$, тада је $\tilde{A} = A \otimes A^*$ слаба $MAPSS$ матрица.*

Доказ: Нека је $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$, тада је $A^* \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ и $\tilde{A} \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$. Треба доказати да матрица $\tilde{A}$ нема два симетрична негативна елемента. Претпоставимо да је $\tilde{a}_{ij}$ негативан елемент, за неке $i, j \in N$. Разликујемо два случаја:

1. $-\infty < \tilde{a}_{ij} < 0$. У овом случају $\tilde{a}_{ij}$ је негативан реалан број, па према доказу Теореме 3.2.1, $\tilde{a}_{ji}$ мора бити позитиван, тј. $\tilde{a}_{ji} > 0$. Ово својство се задржава и када се $-\infty$ појави при рачунању $\tilde{a}_{ij}$, јер се тада $+\infty$ појављује при рачунању $\tilde{a}_{ji}$, па је $\tilde{a}_{ji} = +\infty$. То су опет елементи супротних знакова.

2. $\tilde{a}_{ij} = -\infty$. Овде имамо
$$\tilde{a}_{ij} = \max_{k\in N} \left\{a_{ik} + a^*_{kj}\right\} = -\infty,$$
одакле добијамо да је $a_{ik} + a^*_{kj} = -\infty$, за свако $k \in N$. То значи: $a_{ik} = -\infty$ или $a^*_{kj} = -\infty$ (или оба), за свако $k \in N$, тј.:
$$a^*_{ki} = +\infty \qquad \vee \qquad a_{jk} = +\infty, \qquad \text{за свако } k \in N. \tag{3.5.4}$$
Сада, при рачунању $\tilde{a}_{ji}$, имамо
$$\tilde{a}_{ji} = \max_{k\in N} \left\{a_{jk} + a^*_{ki}\right\},$$
па, према (3.5.4), сви сабирци у горњем максимуму једнаки су $+\infty$, одакле закључујемо да је $\tilde{a}_{ji} = +\infty$.

Тиме је доказ завршен. □

Напомена 3.5.1 *На основу доказа претходне теореме, можемо закључити да ако је $\tilde{a}_{ij} = -\infty$ (или $\tilde{a}_{ij} \neq -\infty$, али се $-\infty$ појављује при рачунању $\tilde{a}_{ij}$), тада следи да је $\tilde{a}_{ji} = +\infty$. Обрнуто не важи, тј. ако је $\tilde{a}_{ij} = +\infty$, одговарајући симетрични елемент не мора бити $-\infty$.*

Дакле, без обзира на постојање бесконачних елемената у матрици A, матрица $\tilde{A}$ ће бити слаба $MAPSS$. У следећој теореми разматрамо да ли постојање бесконачних елемената може да наруши услов нула дијагонале у $\tilde{A}$, тј. разматрамо под којим условима је $\tilde{A}$ $MAPSS$ матрица.

Теорема 3.5.2 *Матрица $\tilde{A}$ је $MAPSS$ ако и само ако A нема ε-врсту.*

Доказ: За матрицу $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$, на основу Теореме 3.5.1, $\tilde{A} \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ је слаба $MAPSS$ у општем случају. Остаје да се размотри услов нула дијагонале.

($\Rightarrow$) : Ако A нема ε-врсту, то значи да у свакој врсти имамо бар један елемент који је различит од $\pm\infty$. Нека у i-тој врсти ($i \in N$) постоји елемент $a_{ip} \neq \pm\infty$, за неко $p \in N$. Подсетимо да је $-a_{ip} = a^*_{pi}$. Одавде закључујемо да $a^*_{pi} \neq \mp\infty$. Јасно је тада да су a_{ip} и a^*_{pi} супротни реални бројеви, тј. $a_{ip} + a^*_{pi} = 0$.
Дијагонални елемент матрице $\tilde{A}$ у i-тој врсти рачуна се као
$$\tilde{a}_{ii} = \max_{k\in N} \left\{a_{ik} + a^*_{ki}\right\} = \max\left\{a_{i1} + a^*_{1i}, \ldots, a_{pi} + a^*_{pi}, \ldots, a_{in} + a^*_{ni}\right\}.$$

У овом максимуму имамо бар једну вредност једнаку 0 ($a_{ip}+a^*_{pi} = 0$), док су све остале или нуле (ако је $a_{ik} \neq \pm\infty$, за $k \in N \setminus \{p\}$) или $-\infty$ (ако је $a_{ik} = \pm\infty$, за $k \in N \setminus \{p\}$). Дакле, максимална вредност је нула, па је $\tilde{a}_{ii} = 0$, за свако $i \in N$. Тиме је доказано да $\tilde{A}$ има нула дијагоналу.

($\Leftarrow$) : Ако је $\tilde{A}$ *MAPSS* матрица, тада има нула дијагоналу, тј.

$$\tilde{a}_{ii} = \max_{k \in N} \{a_{ik} + a^*_{ki}\} = 0, \qquad \text{за свако } i \in N,$$

што значи да за сваки $i \in N$ постоји неко $p \in N$ тако да је $a_{ip} + a^*_{pi} = 0$, тј. a_{ip} и a^*_{pi} су супротни реални бројеви (случај када су ови елементи једнаки $\pm\infty$ је немогућ, јер тада њихов збир не може бити нула). Дакле, у i-тој врсти матрице A, елемент a_{ip} је различит од $\pm\infty$, па A нема ε-врсту. □

Последица 3.5.1 *Матрица $\tilde{A}$ може бити MAPSS ако A садржи ε-колону.*

Пример 3.5.1 *За дату матрицу*

$$A = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 3 \\ -5 & -3 & +\infty \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \textit{имамо} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 11 \\ +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A нема ε-врсту и видимо да је $\tilde{A}$ MAPSS матрица: има нула дијагоналу и нема два симетрична негативна елемента. Штавише, према Теореми 3.5.1 и Напомени 3.5.1, елемент симетричан са $\tilde{a}_{12} = -\infty$ је $\tilde{a}_{21} = +\infty$, док елемент симетричан са $\tilde{a}_{23} = +\infty$ не мора бити $-\infty$ ($\tilde{a}_{32} = 7$). ■

У следећој леми, ε_1 и ε_2 означавају два различита вектора, оба са елементима $\pm\infty$, али на различитим позицијама, на пример $\varepsilon_1 = (-\infty, +\infty, +\infty, -\infty) \neq (+\infty, -\infty, +\infty, -\infty) = \varepsilon_2$.

Лема 3.5.1

1. *Ако је i-та врста матрице A једнака ε^-, тада је и i-та врста матрице $\tilde{A}$ једнака ε^-.*
2. *Ако је i-та врста матрице A једнака ε^+, тада је i-та колона матрице $\tilde{A}$ једнака ε^-.*
3. *Ако је i-та врста матрице A једнака ε_1, тада је i-та врста матрице $\tilde{A}$ једнака ε_2, где је $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и i-ти елемент $\varepsilon_2^{(i)}$ вектора ε_2 једнак је $-\infty$.*

Доказ:

1. У рачунању елемената i-те врсте матрице $\tilde{A}$ учествују елементи i-те врсте матрице A, који су сви једнаки $-\infty$. Дакле, сви сабирци у одговарајућим макс-алгебарским сумама су облика $-\infty + \lambda$, $\lambda \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, што је увек једнако $-\infty$. Тада је јасно да су и саме макс-алгебарске суме (тј. елементи i-те врсте у $\tilde{A}$) једнаке $-\infty$.

2. У овом случају матрица A^* ће имати ε^- као колону, па аналогно резоновању из случаја 1. долазимо до доказа.

3. Слично као у случају 1., у рачунању елемената i-те врсте матрице $\tilde{A}$, сабирци у одговарајућим макс-алгебарским сумама имају облик $-\infty + \lambda$ или $+\infty + \lambda$, где је $\lambda \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, што је увек једнако $-\infty$ или $+\infty$. Дакле, елементи i-те врсте матрице $\tilde{A}$ једнаки су $-\infty$ или $+\infty$, и ти елементи формирају вектор ε_2.
   За дијагонални елемент матрице $\tilde{A}$ у i-тој врсти (тј. i-ти елемент вектора ε_2), важи да одговарајућа макс-алгебарска сума садржи само сабирке облика $(-\infty) + (+\infty)$ или $(+\infty) + (-\infty)$, што је $-\infty$. Дакле, $\varepsilon_2^{(i)} = -\infty$.

Према томе, лема је доказана. □

Последица 3.5.2 *Ако матрица A има ε-врсту, тада $\tilde{A}$ има бар један дијагонални елемент који је једнак $-\infty$.*

Пример 3.5.2 *За дату матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ -\infty & +\infty & -\infty & -\infty \\ 4 & -8 & 9 & 1 \\ -11 & +\infty & -6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \textit{добијамо} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & +\infty & 13 & 14 \\ +\infty & -\infty & +\infty & -\infty \\ 11 & +\infty & 0 & 15 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

У другој врсти матрица A садржи вектор $\varepsilon_1 = (-\infty, +\infty, -\infty, -\infty)$, док матрица $\tilde{A}$ у истој врсти садржи вектор $\varepsilon_2 = (+\infty, -\infty, +\infty, -\infty)$. Очигледно је да $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.
Такође, према Последици 3.5.2, матрица $\tilde{A}$ има дијагонални елемент једнак $-\infty$ ($a_{22} = -\infty = \varepsilon_2^{(2)}$). ■

Теорема 3.5.3 *Ако је један елемент у i-тој врсти матрице A једнак $-\infty$ ($+\infty$), и A нема друге елементе једнаке $\pm\infty$, тада су сви елементи у i-тој колони (врсти) матрице $\tilde{A}$ једнаки $+\infty$, осим дијагоналног елемента, који је једнак нули.*

Доказ: Пошто $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times m}$ нема ε-врсту, тада према Теореми 3.5.2, $\tilde{A} \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ је *MAPSS* матрица, па има нула дијагоналу.
У матрици A, нека је a_{ip} елемент i-те врсте ($i \in N$) који је једнак $-\infty$, за неко $p \in N$. Тада је $a^*_{pi} = +\infty$. Елемент a^*_{pi} појављује се при рачунању елемената i-те колоне матрице $\tilde{A}$, па ће одговарајуће макс-алгебарске суме (за вандијагоналне елементе) садржати сабирке облика $\lambda + (+\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, што увек даје $+\infty$. Овде је $\lambda \in \mathbb{R}$, јер по услову теореме једини елемент из A једнак $-\infty$ је a_{ip}. Случај $a_{ip} + a^*_{pi} = -\infty + (+\infty)$ појављује се при рачунању дијагоналног елемента, па је овде λ сигурно реалан број. Дакле, све макс-алгебарске суме садрже сабирак $+\infty$, па су сви вандијагонални елементи i-те колоне у $\tilde{A}$ једнаки $+\infty$.
Ако је елемент i-те врсте матрице A једнак $+\infty$, он ће учествовати у рачунању елемената i-те врсте матрице $\tilde{A}$, па аналогним резоновањем добијамо доказ и у овом случају. □

Лако се може закључити да постојање бесконачних елемената у *MAPSS* (слабој *MAPSS*) матрици A неће утицати на број негативних елемената у тој матрици и неће утицати на својства матрица $A^\top$, A^* и $\theta \otimes A$ (где је θ скалар). Дакле, Лема 3.2.2 (Лема 3.4.1), Теорема 3.3.1 (Теорема 3.4.1) и Теорема 3.3.2 (Теорема 3.4.2) важе и за *MAPSS* (слабе *MAPSS*) матрице са бесконачним елементима.
Остаје да се размотри шта се дешава са макс-алгебарским збиром и производом две *MAPSS* (слабе *MAPSS*) матрице са бесконачним елементима.

Теорема 3.5.4 *Макс-алгебарски збир две MAPSS матрице са бесконачним елементима је такође MAPSS матрица.*

Доказ: Нека је $C = A \oplus B$, где су $A, B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$ *MAPSS* матрице са бесконачним елементима. Јасно је да ће C такође бити квадратна матрица (димензије $n \times n$) са нула дијагоналом.
Ако је c_{ij} негативан реалан број, тада, према доказу Теореме 3.3.3, симетрични елемент мора бити ненегативан (појављивање $-\infty$ у рачунању c_{ij} неће утицати на тачност тврђења, што се лако може закључити). Остаје да се размотри случај када је c_{ij} једнак $-\infty$: $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} = -\infty$, за неке $i, j \in N$. Следи да је $a_{ij} = -\infty$ и

$b_{ij} = -\infty$. Пошто су A и B $MAPSS$ матрице, мора бити $a_{ji} \geqslant 0$ и $b_{ji} \geqslant 0$. Сада имамо $c_{ji} = \max\{a_{ji}, b_{ji}\} \geqslant 0$. Дакле, матрица C не може имати два симетрична негативна елемента, па она јесте $MAPSS$ матрица. □
Следеће тврђење следи директно из претходне теореме.

Теорема 3.5.5 *Макс-алгебарски збир две слабе $MAPSS$ матрице са бесконачним елементима је такође слаба $MAPSS$ матрица.*

Теорема 3.5.6 *Макс-алгебарски производ две $MAPSS$ матрице са бесконачним елементима је слаба $MAPSS$ матрица.*

Доказ: Нека су A и B $MAPSS$ матрице са бесконачним елементима и нека је $D = A \otimes B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n\times n}$. Јасно је да је D квадратна матрица и није тешко закључити да D нема нула дијагоналу.
Случај када је d_{ij} негативан реалан број разматран је у Теореми 3.3.4, и тврђење важи и у овом случају (ако се $-\infty$ појави при рачунању d_{ij}, тада ће се $+\infty$ појавити при рачунању d_{ji}. Дакле, имамо $-\infty < d_{ij} < 0$ и $d_{ji} = +\infty$, па тврђење важи).
Нека је

$$d_{ij} = \max_{k\in N}\{a_{ik} + b_{kj}\} = -\infty,$$

за неке $i, j \in N$. Дакле, мора бити $a_{ik} + b_{kj} = -\infty$, за свако $k \in N$. За $k = i$ имамо $a_{ii} + b_{ij} = -\infty$. Пошто је A $MAPSS$, онда је $a_{ii} = 0$ и одатле је $b_{ij} = -\infty$. Сада, пошто је B $MAPSS$ и $b_{ij} = -\infty$, мора бити $b_{ji} \geqslant 0$. При рачунању d_{ji} имамо:

$$d_{ji} = \max_{k\in N}\{a_{jk} + b_{ki}\} = \max\{a_{j1} + b_{1i}, \ldots, a_{jj} + b_{ji}, \ldots, a_{jn} + b_{ni}\}.$$

Пошто је $a_{jj} = 0$ и $b_{ji} \geqslant 0$, следи $a_{jj} + b_{ji} \geqslant 0$. Дакле, бар једна вредност у горњем максимуму је ненегативна, па је и d_{ji} ненегативан. Тиме смо доказали да D не може имати два симетрична негативна елемента, па је D слаба $MAPSS$ матрица. □
Када је реч о слабим $MAPSS$ матрицама са бесконачним елементима, као и за слабе $MAPSS$ матрице са реалним елементима, њихов макс-алгебарски производ није слаба $MAPSS$ матрица, што се лако проверава.
Такође, дијагонална и идентична матрица нису $MAPSS$ нити слабе $MAPSS$, јер садрже симетричне елементе једнаке $-\infty$.

На крају овог поглавља, напоменимо да се овде размотрена теорија може пренети и на дуалну структуру. Дакле, као што смо у макс-плус алгебри дефинисали класу квадратних матрица са нула дијагоналом које немају два симетрична негативна елемента, у мин-плус алгебри можемо дефинисати класу квадратних матрица са нула дијагоналом које немају два симетрична позитивна елемента, тј. класу мин-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица (можемо користити исту ознаку, $MAPSS$, за класу мин-алгебарских псеудо косо-симетричних матрица, ако то не изазива забуну). Све што је претходно речено за $MAPSS$ матрице у макс-алгебри важиће у дуалном облику и у мин-алгебри (када заменимо „максимум“ са „минимум“, „позитивно“ са „негативно“, итд.).

3.6 Конструктивност псеудо косо-симетричних матрица

Због специфичног начина на који су задате операције у макс-алгебри, својства матрица се разликују од класичне линеарне алгебре. Уместо опште анализе, фокусирамо се на матрице у следећем контексту.
Нека је $\tilde{A} = A \otimes A^*$. Поставља се питање: ако је дата $MAPSS$ матрица $\tilde{A}$, да ли је могуће, и на који начин, одредити матрицу A такву да је $A \otimes A^* = \tilde{A}$? Ово питање природно води ка проблему решавања макс-линеарног система једначина. Резултати који су у наставку приказани објављени су у [102] и [103].

3.6.1 Матрице димензија 2×2

Најпре ћемо размотрити најједноставнији случај, када је дата матрица A у описаном проблему димензије 2×2. С обзиром да тада имамо само два вандијагонална елемента, биће потребно испитати два могућа случаја, што детаљније објашњава следећа теорема.

Теорема 3.6.1 *Нека је $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ дата $MAPSS$ матрица. Матрица A таква да $A \otimes A^* = \tilde{A}$ је свака матрица чији вандијагонални елементи задовољавају један од следећа два услова:*

$$a_{11} - a_{21} = \tilde{a}_{12}, \quad a_{12} - a_{22} = -\tilde{a}_{21},$$

или

$$a_{12} - a_{22} = \tilde{a}_{12}, \quad a_{11} - a_{21} = -\tilde{a}_{21}.$$

Доказ: Нека је дата $MAPSS$ матрица $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Узимајући у обзир дефиницију макс-алгебарског множења матрица, имамо:

$$A \otimes A^* = \tilde{A} \iff \max_{i,j}\{a_{ij} + a^*_{ji}\} = \tilde{a}_{ij}, \quad i, j \in N.$$

Пошто је овде $N = \{1, 2\}$, за елементе матрице $\tilde{A}$ морају да важе следећи услови:

$$\max\{a_{11} + a^*_{11},\ a_{12} + a^*_{21}\} = 0, \tag{3.6.1}$$
$$\max\{a_{11} + a^*_{12},\ a_{12} + a^*_{22}\} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.2}$$
$$\max\{a_{21} + a^*_{11},\ a_{22} + a^*_{21}\} = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.3}$$
$$\max\{a_{21} + a^*_{12},\ a_{22} + a^*_{22}\} = 0. \tag{3.6.4}$$

С обзиром да важи $a^*_{ij} = -a_{ji}$, релације (3.6.1) и (3.6.4) су увек задовољене. Остаје да размотримо (3.6.2) и (3.6.3), које се могу записати као:

$$\max\{a_{11} - a_{21},\ a_{12} - a_{22}\} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.5}$$
$$\max\{a_{21} - a_{11},\ a_{22} - a_{12}\} = \tilde{a}_{21}. \tag{3.6.6}$$

Ако уведимо ознаке $p = a_{11} - a_{21}$, $q = a_{12} - a_{22}$, тада релације (3.6.5) и (3.6.6) добијају облик:

$$\max\{p, q\} = \tilde{a}_{12}, \quad \max\{-p, -q\} = \tilde{a}_{21}.$$

Разматрамо два случаја:

1. Ако је $\max\{p,q\} = p$, тада мора да важи $\max\{-p,-q\} = -q$. Дакле, $p = \tilde{a}_{12}$, $-q = \tilde{a}_{21}$, односно:
$$a_{11} - a_{21} = \tilde{a}_{12}, \quad a_{12} - a_{22} = -\tilde{a}_{21}. \tag{3.6.7}$$

2. Ако је $\max\{p,q\} = q$, одатле следи да мора бити $\max\{-p,-q\} = -p$. Сада имамо $q = \tilde{a}_{12}$, $-p = \tilde{a}_{21}$, односно:
$$a_{12} - a_{22} = \tilde{a}_{12}, \quad a_{11} - a_{21} = -\tilde{a}_{21}. \tag{3.6.8}$$

У оба случаја добијамо услове наведене у теореми, чиме је доказ завршен. □
Лако се долази до закључка да Теорема 3.6.1 важи и у случају када је $p = q$.

Последица 3.6.1 *Матрица A која задовољава $A \otimes A^* = \tilde{A}$ није јединствена.*

Важно је напоменути да постоје $MAPSS$ матрице које не могу бити представљене као макс-алгебарски производ неке матрице и њене конјуговане матрице. У том случају, чак и применом услова из Теореме 3.6.1, није могуће добити матрицу A.

3.6.2 Матрице димензија 3×3

Сада ћемо исти проблем размотрити за случај $MAPSS$ матрица димензије 3×3. Иако се димензија матрице повећала само за један, то већ значајно усложњава решавање проблема. За разлику од матрица димензије 2×2, где смо разматрали два случаја, код матрица димензије 3×3 могућ је много већи број случајева, као што ћемо видети у наставку.

Проблем 3.6.1 *Нека је дата $MAPSS$ матрица $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Одредити матрицу A тако да важи*
$$A \otimes A^* = \tilde{A}. \tag{3.6.9}$$

Пре него што приступимо решавању проблема, приметимо да се једначина (3.6.9) по компонентама може записати на следећи начин:
$$\tilde{a}_{ij} = \max_k \left(a_{ik} + a^*_{kj}\right) = \max_k \left(a_{ik} - a_{jk}\right), \quad i,j \in \{1,2,3\}.$$
Дакле, сваки елемент $\tilde{a}_{ij}$ представља максималну разлику између i-те и j-те врсте посматрано кроз све колоне матрице A.

Решење: Полазимо од једначине (3.6.9), коју развијамо уводећи следеће ознаке за елементе одговарајућих матрица:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} \\ a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.6.10}$$

Будући да је $\tilde{A}$ једна $MAPSS$ матрица, одатле следи да је
$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{33} = 0. \tag{3.6.11}$$

Узимајући у обзир дефиницију макс-алгебарског множења матрица, једначина (3.6.10) се може записати преко појединачних елемената матрица које у њој учествују.

Прецизније, она је еквивалентна следећем систему једначина:

$$\max\{a_{11}+a_{11}^*, a_{12}+a_{21}^*, a_{13}+a_{31}^*\} = \tilde{a}_{11}, \tag{3.6.12}$$
$$\max\{a_{11}+a_{12}^*, a_{12}+a_{22}^*, a_{13}+a_{32}^*\} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.13}$$
$$\max\{a_{11}+a_{13}^*, a_{12}+a_{23}^*, a_{13}+a_{33}^*\} = \tilde{a}_{13}, \tag{3.6.14}$$
$$\max\{a_{21}+a_{11}^*, a_{22}+a_{21}^*, a_{23}+a_{31}^*\} = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.15}$$
$$\max\{a_{21}+a_{12}^*, a_{22}+a_{22}^*, a_{23}+a_{32}^*\} = \tilde{a}_{22}, \tag{3.6.16}$$
$$\max\{a_{21}+a_{13}^*, a_{22}+a_{23}^*, a_{23}+a_{33}^*\} = \tilde{a}_{23}, \tag{3.6.17}$$
$$\max\{a_{31}+a_{11}^*, a_{32}+a_{21}^*, a_{33}+a_{31}^*\} = \tilde{a}_{31}, \tag{3.6.18}$$
$$\max\{a_{31}+a_{12}^*, a_{32}+a_{22}^*, a_{33}+a_{32}^*\} = \tilde{a}_{32}, \tag{3.6.19}$$
$$\max\{a_{31}+a_{13}^*, a_{32}+a_{23}^*, a_{33}+a_{33}^*\} = \tilde{a}_{33}. \tag{3.6.20}$$

Како важи релација (3.6.11), а уз то је $a_{ii}^* = -a_{ii}$ за свако $i \in \{1,2,3\}$, закључујемо да су једначине (3.6.12), (3.6.16) и (3.6.20) аутоматски задовољене. Због тога их није потребно узимати у обзир у даљој анализи.
Након увођења следећих ознака:

$$r = a_{11}+a_{12}^*, \quad s = a_{12}+a_{22}^*, \quad t = a_{13}+a_{32}^*,$$
$$p = a_{11}+a_{13}^*, \quad q = a_{12}+a_{23}^*, \quad m = a_{13}+a_{33}^*,$$
$$n = a_{21}+a_{13}^*, \quad k = a_{22}+a_{23}^*, \quad l = a_{23}+a_{33}^*,$$

претходни систем добија облик:

$$\max\{r,s,t\} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.21}$$
$$\max\{p,q,m\} = \tilde{a}_{13}, \tag{3.6.22}$$
$$\max\{-r,-s,-t\} = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.23}$$
$$\max\{n,k,l\} = \tilde{a}_{23}, \tag{3.6.24}$$
$$\max\{-p,-q,-m\} = \tilde{a}_{31}, \tag{3.6.25}$$
$$\max\{-n,-k,-l\} = \tilde{a}_{32}. \tag{3.6.26}$$

Овај систем ћемо у наставку рада називати *почетни систем*.
Тривијалан случај наступа када важи $r = s = t$. Тада имамо $\max\{r,s,t\} = r\,(= s = t)$, одакле директно следи да је $\max\{-r,-s,-t\} = -r\,(= -s = -t)$. Слично, уколико је, на пример, $r = s \neq t$, добијамо $\max\{r,s,t\} = r\,(= s)$, из чега следи $\max\{-r,-s,-t\} = -t$.
У нетривијалном случају, када је $r \neq s \neq t$, уколико добијемо, на пример, да је $\max\{r,s,t\} = r$, одатле следи да је:

$$\max\{-r,-s,-t\} = \begin{cases} -s, \\ -t. \end{cases}$$

Исто правило важи и за симболе p,q,m, као и за n,k,l.
Узимајући у обзир све наведене аргументе, лако се може закључити да у нетривијалном случају постоји укупно $3\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2 = 216$ различитих начина на које се могу изабрати максимуми у једначинама (3.6.13–3.6.15) и (3.6.17–3.6.19). У овом раду није спроведена комплетна анализа свих конфигурација, већ су детаљно размотрени одабрани репрезентативни случајеви који илуструју опште законитости система.

Сада ћемо усмерити пажњу на један од могућих (нетривијалних) случајева:

$$\begin{aligned} \max\{r,s,t\} &= r,\\ \max\{p,q,m\} &= q,\\ \max\{-r,-s,-t\} &= -t,\\ \max\{n,k,l\} &= k,\\ \max\{-p,-q,-m\} &= -p,\\ \max\{-n,-k,-l\} &= -n. \end{aligned} \tag{3.6.27}$$

Да би изабрана конфигурација максимума била валидна, није довољно само поставити одговарајуће једнакости. Неопходно је укључити и неједнакости које гарантују доминацију одабраних чланова.
За изабрани систем (3.6.27) имамо следеће релације:

$$\begin{aligned} \max\{r,s,t\} = r \quad &\Rightarrow \quad s \le r,\ t \le r,\\ \max\{p,q,m\} = q \quad &\Rightarrow \quad p \le q,\ m \le q,\\ \max\{-r,-s,-t\} = -t \quad &\Rightarrow \quad -r \le -t,\ -s \le -t,\\ \max\{n,k,l\} = k \quad &\Rightarrow \quad n \le k,\ l \le k,\\ \max\{-p,-q,-m\} = -p \quad &\Rightarrow \quad -q \le -p,\ -m \le -p,\\ \max\{-n,-k,-l\} = -n \quad &\Rightarrow \quad -k \le -n,\ -l \le -n. \end{aligned}$$

Комбиновањем неједнакости које садрже r,s,t, затим p,q,m и на крају n,k,l, долазимо до следећих услова који морају бити испуњени при избору ове конфигурације:

$$\begin{aligned} t \le s \le r,\\ p \le m \le q,\\ n \le l \le k, \end{aligned}$$

односно добијамо услове за елементе матрице A:

$$a_{13} - a_{23} \le a_{12} - a_{22} \le a_{11} - a_{21}, \tag{3.6.28}$$
$$a_{11} - a_{31} \le a_{13} - a_{33} \le a_{12} - a_{32}, \tag{3.6.29}$$
$$a_{21} - a_{31} \le a_{23} - a_{33} \le a_{22} - a_{32}. \tag{3.6.30}$$

Пошто су вредности $\tilde{a}_{ij}$ на десној страни почетног система унапред задате (реални бројеви), овај систем је решив под условом да су елементи матрице A компатибилни са наведеним неједнакостима. Другим речима, једнакости нам дају потребне услове, док неједнакости обезбеђују довољне услове. Изабрана конфигурација максимума води до валидног решења једино када су оба скупа услова истовремено задовољена. Уколико се сада вратимо на почетни систем, добијамо следеће једначине:

$$a_{11} - a_{21} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.31}$$
$$a_{12} - a_{32} = \tilde{a}_{13}, \tag{3.6.32}$$
$$-(a_{13} - a_{23}) = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.33}$$
$$a_{22} - a_{32} = \tilde{a}_{23}, \tag{3.6.34}$$
$$-(a_{11} - a_{31}) = \tilde{a}_{31}, \tag{3.6.35}$$
$$-(a_{21} - a_{31}) = \tilde{a}_{32}. \tag{3.6.36}$$

Овај систем, добијен након избора максимума у систему (3.6.27), називаћемо *главни систем*. Из њега, као што је речено, непосредно проистиче и одговарајући систем неједнакости који мора бити задовољен како би решење било валидно.
Елементи a_{11}, a_{21}, a_{31} и a_{32} појављују се два пута у овом систему, елементи a_{12}, a_{13}, a_{22} и a_{23} појављују се једном, док се елемент a_{33} уопште не појављује у добијеном систему. За елементе који се јављају два пута узимамо одговарајуће једнакости, елиминишемо поновљени елемент, а затим добијену једнакост упоређујемо са осталим једнакостима главног система. На овај начин можемо извести услове који морају да важе за елементе матрице $\tilde{A}$, као што је објашњено у наставку.
Из једначина (3.6.31) и (3.6.35), након елиминације елемента a_{11}, добијамо:

$$\tilde{a}_{12} + a_{21} = a_{31} - \tilde{a}_{31} \quad \Rightarrow \quad a_{21} - a_{31} = -\tilde{a}_{31} - \tilde{a}_{12}.$$

На основу последње једнакости и једначине (3.6.36), закључујемо да мора важити следеће:

$$\tilde{a}_{31} + \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{32}. \tag{3.6.37}$$

Слично, елиминацијом елемента a_{21} из једначина (3.6.31) и (3.6.36) и упоређивањем резултата са једначином (3.6.35), долазимо до следећег услова:

$$\tilde{a}_{12} - \tilde{a}_{32} = -\tilde{a}_{31}. \tag{3.6.38}$$

Лако се може уочити да су услови у једначинама (3.6.37) и (3.6.38) еквивалентни. Штавише, исти услов се добија и елиминацијом елемента a_{31} из једначина (3.6.35) и (3.6.36) и упоређивањем тог резултата са једначином (3.6.31).
Када је реч о елементу a_{32}, након његове елиминације из једначина (3.6.32) и (3.6.34), добијамо:

$$\tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{23} = a_{12} - a_{22}. \tag{3.6.39}$$

Будући да се израз $a_{12} - a_{22}$ не појављује у главном систему, овде немамо са чиме да упоредимо добијени резултат. Због тога ћемо овај услов узети у обзир тек приликом одређивања елемената друге колоне матрице A.
Дакле, да би посматрани случај уопште био могућ, елементи матрице $\tilde{A}$ морају задовољити услов из једначине (3.6.37). Уколико овај услов не важи, потребно је размотрити неки други случај, односно изабрати максимуми у систему (3.6.27) на другачији начин. За потребе ове дискусије претпоставићемо да је наведени услов испуњен, те ћемо у складу са тим описати наредне кораке.
Према томе, можемо поступити на следећи начин. Елементе a_{21} и a_{31} бирамо тако да једначина (3.6.36) буде задовољена, а затим одређујемо a_{11} из једначине (3.6.31) или (3.6.35). На овај начин смо прецизирали елементе прве колоне матрице A.
За елементе друге колоне матрице A мора важити услов из једначине (3.6.39). Како за елементе a_{12} и a_{22} нема других услова, бирамо их тако да овај услов буде испуњен, а затим одређујемо a_{32} из једначине (3.6.32) или (3.6.34).
За елементе a_{13} и a_{23} не постоје други услови осим једначине (3.6.33), па их стога бирамо у складу са том једначином.
Када је реч о елементу a_{33}, за њега не постоји никакав услов у главном систему. Због тога је неопходно вратити се на систем (3.6.27) и одатле одредити овај елемент. Из система (3.6.27) бирамо оне једнакости у којима се појављују изрази m или l, будући да они садрже елемент a_{33}.

Из друге једначине система (3.6.27) имамо:

$$\max\{p, q, m\} = \tilde{a}_{13} = q \quad \Rightarrow \quad m < q \quad \Rightarrow \quad a_{33} > a_{13} - \tilde{a}_{13}.$$

Пошто су елементи a_{12}, a_{13} и a_{32} већ изабрани, одавде добијамо први услов за елемент a_{33}.
На сличан начин, из треће, пете и шесте једначине система (3.6.27), добијамо следеће услове:

$$a_{33} > a_{23} - \tilde{a}_{23}, \qquad a_{33} < \tilde{a}_{31} + a_{13}, \qquad a_{33} < \tilde{a}_{32} + a_{23}.$$

Сумирањем свих добијених ограничења бирамо вредност за a_{33}, чиме је конструкција матрице A комплетирана.
Према томе, за задату конфигурацију максимума, решивост може захтевати услове компатибилности међу елементима матрице $\tilde{A}$. Ако су ти услови испуњени, матрица A се може конструисати колону по колону. Као што је примећено у посматраном случају, уколико је ради одређивања неког конкретног елемента потребно вратити се на систем (3.6.27), тада добијамо интервал коме тај елемент може да припада. Ово имплицира да такав елемент није јединствено одређен, већ се може изабрати било која вредност из добијеног интервала. Све матрице конструисане за различите вредности тог елемента представљају валидна решења посматраног проблема. Даља дискусија о броју решења постављеног проблема налази се у Одељку 3.6.2.

Пример 3.6.1 *Одредити матрицу A тако да важи $A \otimes A^* = \tilde{A}$ ако је дата матрица*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 6 & 0 & 15 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

У циљу детаљнијег испитивања могућности за решавање овог проблема, размотрићемо три различита случаја, односно три специфична начина за избор максимума у одговарајућем систему.
Решење 1: Најпре ћемо размотрити случај који је претходно описан; то јест, претпоставићемо да су максимуми у одговарајућем систему изабрани као у (3.6.27). Пре свега, приметимо да за ову матрицу важи $\tilde{a}_{31} + \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{32}$, што, као што смо описали, представља потребан услов у случају система (3.6.27).
Сада ћемо одредити елементе прве колоне матрице A. Из једначине (3.6.36) имамо:

$$a_{21} - a_{31} = -\tilde{a}_{32} = -15.$$

На пример, можемо изабрати да је $a_{21} = 6$, одакле следи да је $a_{31} = 21$. Даље, из једначине (3.6.31) добијамо $a_{11} = \tilde{a}_{12} + a_{21}$, одакле је $a_{11} = 17$.
Када је реч о елементима друге колоне матрице A, према поступку који је објашњен изнад, из једначине (3.6.39) добијамо:

$$a_{12} - a_{22} = \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{23} \quad \Rightarrow \quad a_{12} - a_{22} = -4.$$

Узмимо, на пример, да је $a_{12} = -5$, из чега следи да је $a_{22} = -1$. Сада из једначине (3.6.32) налазимо $a_{32} = a_{12} - \tilde{a}_{13}$, односно $a_{32} = -16$.
Коначно, из једначине (3.6.33) имамо $a_{13} - a_{23} = -\tilde{a}_{21}$. Будући да за ове елементе матрице A нема даљих ограничења, можемо их директно изабрати. На пример, нека је $a_{13} = 2$ и $a_{23} = 8$.

Преостаје још да одредимо елемент a_{33}. Вратимо се на систем (3.6.27) и заменимо све вредности које смо до сада добили. На тај начин долазимо до следећих ограничења, добијених из једнакости које садрже елемент a_{33}:

$$a_{33} > -9, \qquad a_{33} > -7, \qquad a_{33} < 6, \qquad a_{33} < 23.$$

Одавде следи да елемент a_{33} мора да задовољава услов $-7 < a_{33} < 6$. Узмимо, на пример, да је $a_{33} = 5$.
Тиме је конструкција матрице A комплетирана:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -5 & 2 \\ 6 & -1 & 8 \\ 21 & -16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пошто су максимуми у одговарајућем систему изабрани као у (3.6.27), услови који морају да важе за елементе матрице A дати су неједнакостима (3.6.28-3.6.30). Заменом добијених елемената матрице A у ове неједнакости, проверавамо да ли конструисана матрица заиста задовољава све потребне услове и да ли стога представља валидно решење постављеног проблема:

$$\begin{aligned} 2-8 \le -5-(-1) \le 17-6 \quad &\Rightarrow \quad -6 \le -4 \le 11, \\ 17-21 \le 2-5 \le -5-(-16) \quad &\Rightarrow \quad -4 \le -3 \le 11, \\ 6-21 \le 8-5 \le -1-(-16) \quad &\Rightarrow \quad -15 \le 3 \le 15. \end{aligned}$$

Како су све неједнакости задовољене, добијено решење је валидно.
Такође можемо извршити и директну проверу:

$$A \otimes A^* = \begin{pmatrix} 17 & -5 & 2 \\ 6 & -1 & 8 \\ 21 & -16 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -17 & -6 & -21 \\ 5 & 1 & 16 \\ -2 & -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 6 & 0 & 15 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Решење 2: Други случај који се може размотрити је следећи:

$$\begin{aligned} \max\{r,s,t\} = s, \qquad & \max\{-r,-s,-t\} = -t, \\ \max\{p,q,m\} = p, \qquad & \max\{-p,-q,-m\} = -q, \\ \max\{n,k,l\} = n, \qquad & \max\{-n,-k,-l\} = -k. \end{aligned} \tag{3.6.40}$$

За овај систем, одговарајуће неједнакости које морају бити задовољене гласе:

$$\begin{aligned} r \le s,\ t \le s,\ t \le r,\ t \le s \quad &\Rightarrow \quad t \le r \le s, \\ q \le p,\ m \le p,\ q \le p,\ q \le m \quad &\Rightarrow \quad q \le m \le p, \\ k \le n,\ l \le n,\ k \le n,\ k \le l \quad &\Rightarrow \quad k \le l \le n. \end{aligned}$$

Уколико се сада вратимо на уведене ознаке, добијамо следећи систем:

$$a_{12} - a_{22} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.41}$$
$$a_{11} - a_{31} = \tilde{a}_{13}, \tag{3.6.42}$$
$$-a_{13} + a_{23} = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.43}$$
$$a_{21} - a_{31} = \tilde{a}_{23}, \tag{3.6.44}$$
$$-a_{12} + a_{32} = \tilde{a}_{31}, \tag{3.6.45}$$

$$-a_{22} + a_{32} = \tilde{a}_{32}. \tag{3.6.46}$$

Елементи који се у овом систему појављују два пута су a_{12}, a_{22}, a_{31} и a_{32}. Применом исте процедуре која је описана за систем (3.6.27) и елиминацијом елемената a_{12}, a_{22} и a_{32} из одговарајућих једначина, лако се може закључити да мора важити услов $\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{31} = \tilde{a}_{32}$, док елиминација елемента a_{31} води до услова $a_{11} - a_{21} = \tilde{a}_{13} - \tilde{a}_{23}$. Како је први услов испуњен за дату матрицу, потребно је само узети у обзир други услов приликом одређивања елемената прве колоне матрице A. Приметимо да је први услов заправо идентичан оном који је добијен у случају система (3.6.27).
Пратећи горе описану процедуру, одговарајуће једначине овог система дају следеће једнакости:

$$a_{22} - a_{32} = -15, \qquad a_{12} - a_{32} = -4, \qquad a_{11} - a_{21} = -4, \qquad a_{22} - a_{12} = -11.$$

Из ових једнакости, заједно са преосталим једначинама из (3.6.41-3.6.46), одређују се елементи матрице A.
Преостаје још само да се одреди елемент a_{33}. Пошто за њега нема директних услова, враћамо се на систем (3.6.40) и одатле налазимо да мора важити следеће:

$$a_{33} \geq -13, \qquad a_{33} \geq -11, \qquad a_{33} \leq 2, \qquad a_{33} \leq 11.$$

Дакле, добијамо опсег $-11 \leq a_{33} \leq 2$.
Узимајући у обзир све наведено, једна матрица која задовољава све ове услове је:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 10 & -3 & 4 \\ -5 & 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ако се вратимо на горе поменуте неједнакости и заменимо елементе матрице A, добијамо:

$$\begin{aligned} -2 - 4 \leq 6 - 10 \leq 8 - (-3) \quad &\Rightarrow \quad -6 \leq -4 \leq 11, \\ 8 - 12 \leq -2 - (-1) \leq 6 - (-5) \quad &\Rightarrow \quad -4 \leq -1 \leq 11, \\ 3 - 12 \leq 4 - (-1) \leq 10 - (-5) \quad &\Rightarrow \quad -15 \leq 5 \leq 15. \end{aligned}$$

Све неједнакости су задовољене, што значи да је решење валидно.
Такође, можемо извршити и проверу:

$$A \otimes A^* = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 10 & -3 & 4 \\ -5 & 12 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -6 & -10 & 5 \\ -8 & 3 & -12 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 6 & 0 & 15 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Решење 3: У циљу проширења анализе, сада разматрамо још један додатни случај. Нека је овај случај представљен са:

$$\begin{aligned} \max\{r, s, t\} = t, \qquad & \max\{-r, -s, -t\} = -s, \\ \max\{p, q, m\} = p, \qquad & \max\{-p, -q, -m\} = -m, \\ \max\{n, k, l\} = k, \qquad & \max\{-n, -k, -l\} = -n. \end{aligned} \tag{3.6.47}$$

За овај систем, одговарајуће неједнакости гласе:

$$\begin{aligned} r \le t,\ s \le t,\ s \le r,\ s \le t \quad &\Rightarrow \quad s \le r \le t, \\ q \le p,\ m \le p,\ m \le p,\ m \le q \quad &\Rightarrow \quad m \le q \le p, \\ n \le k,\ l \le k,\ n \le k,\ n \le l \quad &\Rightarrow \quad n \le l \le k. \end{aligned}$$

Узимајући у обзир елементе матрице $\tilde{A}$, добијамо следећи систем:

$$a_{13} - a_{23} = \tilde{a}_{12}, \tag{3.6.48}$$
$$a_{11} - a_{31} = \tilde{a}_{13}, \tag{3.6.49}$$
$$a_{22} - a_{32} = \tilde{a}_{23}, \tag{3.6.50}$$
$$a_{22} - a_{12} = \tilde{a}_{21}, \tag{3.6.51}$$
$$a_{33} - a_{13} = \tilde{a}_{31}, \tag{3.6.52}$$
$$a_{31} - a_{21} = \tilde{a}_{32}. \tag{3.6.53}$$

Елементи који се појављују два пута су a_{13}, a_{22} и a_{31}. Њиховом елиминацијом из одговарајућих једначина добијамо услове:

$$a_{23} - a_{33} = -15, \qquad a_{32} - a_{12} = -9, \qquad a_{11} - a_{21} = 26.$$

Будући да се ниједан од ових услова не појављује у горњем систему, потребно их је само поштовати приликом одређивања елемената колону по колону. Затим се враћамо на главни систем и проналазимо преостале елементе. Треба напоменути да се у овом случају сви елементи матрице A појављују у главном систему бар једном. Због тога није потребно враћати се на систем (3.6.47), већ се матрица A може у потпуности комплетирати директно из главног система.
На овај начин комплетирамо матрицу A. Једна матрица која задовољава услове посматраног случаја је:

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 5 & 18 \\ 3 & 11 & 7 \\ 18 & -4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Сада се враћамо на услове који су претходно наведени као потребни за ову конфигурацију:

$$\begin{aligned} a_{12} - a_{22} \le a_{11} - a_{21} \le a_{13} - a_{23}, \\ a_{13} - a_{33} \le a_{12} - a_{32} \le a_{11} - a_{31}, \\ a_{21} - a_{31} \le a_{23} - a_{33} \le a_{22} - a_{32}. \end{aligned}$$

Заменом елемената из матрице A добијамо:

$$\begin{aligned} 5 - 11 \le 29 - 3 \le 18 - 7 \quad &\Rightarrow \quad -6 \le 26 \le 11, \\ 18 - 22 \le 5 - (-4) \le 29 - 18 \quad &\Rightarrow \quad -4 \le 9 \le 11, \\ 3 - 18 \le 7 - 22 \le 11 - (-4) \quad &\Rightarrow \quad -15 \le -15 \le 15. \end{aligned}$$

Пошто први ланац неједнакости не важи, ово решење није валидно. Такође, уколико

извршимо проверу, добијамо:

$$A \otimes A^* = \begin{pmatrix} 29 & 5 & 18 \\ 3 & 11 & 7 \\ 18 & -4 & 22 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -29 & -3 & -18 \\ -5 & -11 & 4 \\ -18 & -7 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 26 & 11 \\ 6 & 0 & 15 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix} \neq \tilde{A}.$$

Дакле, иако смо исправно применили целокупну процедуру, добијена матрица ипак није једнака задатој $MAPSS$ матрици $\tilde{A}$, будући да је $26 \neq \tilde{a}_{12}$. ■

Решење 3 из претходног примера истиче важност провере да ли су сви услови добијени након избора конфигурације задовољени. Провера тачности једначине $A \otimes A^* = \tilde{A}$ такође може указати на то да је решење невалидно.

У закључку, још једном ћемо сумирати процедуру за решавање постављеног проблема. Најпре бирамо максимуме $r, s, t, p, \ldots$, након чега се враћамо на уведене ознаке и долазимо до главног система. За оне елементе матрице A који се у главном систему појављују два пута, узимамо одговарајуће једначине и елиминишемо те елементе. Упоређивањем добијених једнакости са преосталим једнакостима из главног система, изводимо или услове који морају да важе за елементе матрице $\tilde{A}$, или услове које морамо поштовати при самој конструкцији матрице A. Поштујући све изведене услове, одређујемо елементе матрице A колону по колону. Уколико за неки елемент не постоји никакав услов (тј. ако се не појављује у главном систему), неопходно је вратити се на изабране максимуме и из израза који садрже тај недостајући елемент извести ограничења за њега. На тај начин се матрица A комплетира. Приликом избора специфичне конфигурације добијају се одређене неједнакости које садрже елементе матрице A. Ове неједнакости су услови који морају да важе да би конструисана матрица била стварно решење постављеног проблема. Заменом изведених елемената матрице A у ове услове проверавамо да ли је решење валидно или не.

Нејединственост решења и структурне особине

Очигледно је да решење постављеног проблема није јединствено. Штавише, посебно је занимљиво то што, уколико елементе матрице A (приликом њиховог одређивања колону по колону) изаберемо на другачији начин, добијамо матрицу која је директно слична матрици A (једна се може добити додавањем коначних елемената колонама друге матрице). Закључујемо да све матрице добијене из A додавањем коначних елемената њеним колонама представљају решење проблема. Ова тврдња важи у општем случају, тј. за матрице димензија $n \times n$.

Теорема 3.6.2 *Нека матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ задовољава услов $A \otimes A^* = \tilde{A}$. За било коју дијагоналну матрицу $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ са коначним елементима, дефинишемо:*

$$X = A \otimes D. \tag{3.6.54}$$

Тада важи:

$$X \otimes X^* = \tilde{A}. \tag{3.6.55}$$

Доказ: Будући да је $X = A \otimes D$, имамо:

$$X \otimes X^* = (A \otimes D) \otimes (A \otimes D)^*.$$

За дијагоналне елементе матрице $X \otimes X^*$ добијамо:

$$\Delta_{ii} = \max_j \{a_{ij} + \alpha_j + (-a_{ij} - \alpha_j)\} = \max_j \{a_{ij} - a_{ij}\} = 0.$$

За вандијагоналне елементе, када је $i \neq j$, имамо:

$$\Delta_{ij} = \max_k\{a_{ik} + \alpha_k + (-a_{jk} - \alpha_k)\} = \max_k\{a_{ik} - a_{jk}\} = \max_k\{a_{ik} + a^*_{kj}\} = \tilde{a}_{ij}.$$

Дакле, $X \otimes X^* = \tilde{A}$, чиме је доказ комплетиран. □
Из ове теореме непосредно проистиче следеће тврђење.

Теорема 3.6.3 *Ако постављени проблем има бар једно решење, тада он има бесконачно много решења.*

Пример 3.6.2 *Матрица*

$$X = \begin{pmatrix} 20 & -10 & 4 \\ 9 & -6 & 10 \\ 24 & -21 & 7 \end{pmatrix}$$

добија се из матрице A (из Решења 1 Примера 3.6.1) додавањем елемената $3, -5, 2$ редом првој, другој и трећој колони матрице A (тј. путем макс-алгебарског множења матрице A и дијагоналне матрице $D = \mathrm{diag}(3, -5, 2)$). Лако се проверава да $X \otimes X^*$ даје тражену матрицу $\tilde{A}$ из Примера 3.6.1.

Произвољан елемент матрице A, за било који (нетривијалан) избор $r, s, t, p, \ldots$, може се појавити у главном систему највише два пута. Главни систем има шест једнакости, од којих свака садржи два елемента из A. Према томе укупан број појављивања елемената из A у овом систему је 12.

Теорема 3.6.4 *Нека су $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ као у проблему. У било којој нетривијалној конфигурацији максимума, одговарајући главни систем састоји се од шест једнакости, од којих свака укључује два елемента матрице A. Означимо са x број елемената матрице A који се појављују два пута, са y број елемената матрице A који се појављују једном, а са z број елемената матрице A који се уопште не појављују. Тада су могуће расподеле:*

$$(x, y, z) \in \{(6, 0, 3),\ (5, 2, 2),\ (4, 4, 1),\ (3, 6, 0)\}.$$

Доказ: Будући да је A матрица димензија 3×3, имамо:

$$x + y + z = 9,$$

уз услов $x, y, z \geq 0$, као и:

$$2x + 1y + 0z = 12.$$

Под овим условима, скуп решења је тачно онакав као што је наведено у теореми. □
Уколико ове случајеве желимо да опишемо дескриптивно, имали бисмо следеће: расподела $(6, 0, 3)$ означава да се шест елемената матрице A појављује два пута у систему, нула елемената се појављује једном, док се три елемента уопште не појављују; расподела $(5, 2, 2)$ означава да се пет елемената матрице A јавља два пута, два елемента једном, а два елемента се не појављују уопште, итд. На пример, у Решењима 1 и 2 Примера 3.6.1 имамо случај $(4, 4, 1)$, док у Решењу 3 имамо случај $(3, 6, 0)$.
Матрица $\tilde{A}$ такође има димензије 3×3, али се у главном систему њени дијагонални елементи не појављују, па стога учествује само шест елемената ове матрице. За сваки елемент матрице A који се у главном систему појављује два пута, ми заправо добијамо систем од две једначине из којих се тај елемент елиминише, након чега преостају два елемента из матрице $\tilde{A}$. То значи да уколико имамо три елемента матрице

A који се појављују два пута (тј. ако је $x = 3$), може се десити да се елементи из $\tilde{A}$ не понављају у једначинама добијеним након елиминације. Међутим, ако је $x > 3$, тада се елементи из $\tilde{A}$ морају понављати у резултујућим једначинама.
На основу свега претходно реченог, поставља се питање да ли је боље да се више елемената појављује два пута у главном систему (чиме систем постаје „одређенији“) или да се појављује мање елемената, чиме се смањује број услова које елементи матрице $\tilde{A}$ морају да задовоље? Уколико се постави мање услова, да ли то повећава вероватноћу да, и поред тога што су сви потребни захтеви испуњени, провера ипак не доведе до тачног решења?

Представљени резултати пружају основу за будућа истраживања, пре свега у погледу развоја рачунарског алгоритма који би се могао софтверски имплементирати за решавање овог проблема. Прецизније, такав програм би на основу улазне матрице $\tilde{A}$ применио овде изложен метод и као резултат генерисао одговарајућу матрицу A. Кроз алгоритамску реализацију овог модела било би могуће систематски анализирати потенцијалне конфигурације унутар одговарајућег система, те испитати пратеће услове усаглашености за матрицу $\tilde{A}$. Уколико су ти услови задовољени, приступило би се конструкцији матрице A, чија би се тачност накнадно потврдила провером додатних неједнакости које диктира одабрана конфигурација.
Такође, у приказаном истраживању смо се ограничили на скуп реалних бројева, иако су операције у макс-плус алгебри стандардно дефинисане над скупом $\mathbb{R}$ који је проширен елементом $-\infty$. Због тога се као природан следећи корак намеће анализа случаја у којем матрица $\tilde{A}$ поседује бесконачне вредности.
Наредни правац истраживања могао би да разматра и следеће питање: да ли за сваку $MAPSS$ матрицу $\tilde{A}$ уопште постоји матрица A која задовољава релацију $A \otimes A^* = \tilde{A}$? У случају негативног одговора, отвара се питање да ли је неопходно проћи кроз све теоријске могућности да би се стигло до тог закључка, или пак постоји специфичан показатељ који нас непосредно води до закључка. Поред тога, вредело би додатно разрадити проблематику поменуту на самом крају, а која се тиче учесталости појављивања појединих елемената у систему.
На крају, треба имати у виду да су сва изведена разматрања везана за матрице димензије 3×3. Тек предстоји испитивање како се постављени проблем понаша код матрица вишег реда - најпре за димензију 4×4, а потом и у смислу формулисања општих правила за произвољну димензију. Извесно је да се са порастом димензија матрице број потенцијалних конфигурација значајно повећава.

Глава 4

Диграфови псеудо косо-симетричних матрица

У макс-алгебри постоји значајна веза између матрица и диграфова. Та веза била је предмет проучавања већ у првим радовима из ове области, а сажети преглед постојеће материје дат је, на пример, у Поглављу 1.5 у [34]. Свака матрица може се посматрати као тежински дограф: врсте и колоне представљају чворове, док елементи матрице означавају тежине грана између тих чворова, као што је описано у Поглављу 1.3. Ова веза омогућава да се својства матрица проучавају кроз структуру диграфова. Стабилност појединих система се може анализирати преко циклуса у диграфу, јер најдужи пут у макс-алгебри игра кључну улогу у динамици. Диграфови тако постају фундаментални алат за разумевање понашања матрица у макс-алгебарском окружењу, повезујући линеарну алгебру са теоријом графова и практичним проблемима распореда и оптимизације. У овој глави, пажњу посвећујемо диграфовима који одговарају *MAPSS* матрицама.
Дефиниција *MAPSS* матрица дата је у Поглављу 3.2 (Дефиниција 3.2.1), али с обзиром да све особине диграфова који одговарају овим матрицама произилазе управо из ње, наводимо је још једном у нешто другачијем облику, задржавајући њену суштину. Услове који треба да важе за *MAPSS* матрицу ћемо посебно означити да бисмо кроз даљи рад могли да се позивамо на њих.

Дефиниција 4.0.1 *Макс-алгебарска псеудо косо-симетрична матрица - MAPSS матрица - је квадратна матрица која задовољава следеће услове:*

(M1) има нула дијагоналу;

(M2) не садржи два симетрична негативна елемента.

4.1 Основна својства

Кроз следећа тврђења испитано је како услови (M1) и (M2), из Дефиниције 4.0.1 утичу на структуру одговарајућих диграфова.

Лема 4.1.1 *Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ MAPSS матрица. Тада важи:*

1. *сваки чвор у диграфу D_A има петљу тежине нула;*

2. *D_A није ациклични дограф;*

3. *скуп грана E нултог диграфа Z_A има најмање n елемената;*
4. *за било која два различита чвора u и v у диграфу D_A, постоји бар једна грана између њих, било (u, v), (v, u), или обе;*
5. *минималан број грана у D_A је $(n^2 + n)/2$;*
6. *у диграфу D_A не постоје изоловани чворови.*

Доказ:

1. Како дијагонални елементи матрице A представљају тежине петљи, ово тврђење директно произлази из услова (M1).
2. Петље су циклуси дужине један, па и ово тврђење следи из услова (M1).
3. Скуп грана E нултог диграфа Z_A укључује оне гране чија је тежина једнака нули. Дакле, све петље припадају овом скупу, па за матрицу димензије $n \times n$, овај скуп има најмање n елемената.
4. Претпоставимо да не постоји грана (u, v) нити (v, u) између чворова u и v у диграфу D_A. Према (1.3.2), то имплицира да је $\omega(u, v) = a_{uv} = \varepsilon$ и $\omega(v, u) = a_{vu} = \varepsilon$. Међутим, пошто је A $MAPSS$ матрица, услов (M2) налаже да ако је $a_{uv} = \varepsilon$, тада $a_{vu} \geq 0$. Ово води ка контрадикцији, па почетна претпоставка не важи.
5. За $MAPSS$ матрицу димензије $n \times n$, услов (M2) обезбеђује да је најмање половина вандијагоналних елемената различита од ε. Сходно томе, одговарајући диграф D_A садржи најмање $(n^2 - n)/2$ грана између различитих чворова. Укључујући n петљи, ово даје $(n^2 + n)/2$, што је минималан укупан број грана у D_A.
6. Ово је директна последица својства 4.

Тиме је доказ завршен. □

Услов нула дијагонале обезбеђује да се ε-врсте и ε-колоне не могу појавити у $MAPSS$ матрицама, о чему говори следећа теорема.

Теорема 4.1.1 *Свака $MAPSS$ матрица је дупла $\mathbb{R}$-матрица.*

Доказ: По услову (M1), свака врста и колона у $MAPSS$ матрици садржи бар један елемент једнак нули. Дакле, ниједна врста нити колона не може садржати искључиво ε вредности. □

Последица 4.1.1 *За сваку $MAPSS$ матрицу важи $\lambda(A) > \varepsilon$.*

Доказ: Ово директно следи из Теореме 4.1.1 и Леме 1.4.1. □

Када је реч о $MAPSS$ матрицама, можемо закључити и више од овога.

Теорема 4.1.2 *За сваку $MAPSS$ матрицу важи $\lambda(A) \geq 0$.*

Доказ: Петље, које су циклуси дужине један, укључене су у рачунање $\lambda(A)$. Пошто све петље $MAPSS$ матрице имају тежину једнаку нули (Лема 4.1.1), јасно је да вредност $\lambda(A)$ мора бити ненегативна. □

Лема 4.1.2 *Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$ $MAPSS$ матрица. Тада важи:*

1. *$maper(A) \geq 0$;*
2. *$\omega(id) = 0$.*

Доказ: Оба својства директно произлазе из услова (M1). □

4.1.1 Циклуси дужине два

Услов (M2) из дефиниције *MAPSS* матрица утиче на тежине циклуса дужине два у одговарајућем диграфу, што је детаљно описано у следећим тврђењима.

Тврђење 4.1.1 *У диграфу који одговара MAPSS матрици A, не постоји циклус дужине два у којем обе гране имају негативне тежине.*

Доказ: Ово директно произлази из услова (M2). □

Ако није другачије наведено, у остатку рада претпостављамо да су i, j из скупа N.

Теорема 4.1.3 *У диграфу који одговара MAPSS матрици A, тежина било ког циклуса дужине два (ако такав циклус постоји) ограничена је одоздо најмањим елементом те матрице.*

Доказ: Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *MAPSS* матрица, а σ произвољан циклус дужине два у одговарајућем диграфу D_A. Тежина циклуса σ рачуна се као

$$\omega(\sigma, A) = a_{mn} + a_{nm}, \qquad \text{за неке } m, n \in N.$$

Очигледно је да a_{mn} и a_{nm} морају бити различити од ε, јер у супротном циклус σ не би постојао. Нека је a_{pq} најмањи елемент матрице A, за неке $p, q \in N$:

$$a_{pq} = \min_{i,j\in N} \{a_{ij}\}.$$

Треба доказати да важи

$$\omega(\sigma, A) \geq a_{pq}. \tag{4.1.1}$$

У тривијалном случају, када је најмањи елемент матрице A једнак ε, тврђење одмах важи. Такође, приметимо да a_{pq} не може бити строго позитиван због услова (M1). Дакле, у нетривијалном случају разматрамо следеће могућности.

1. $a_{pq} = 0$.
   Пошто је a_{pq} најмањи елемент, важи $a_{pq} \leq a_{mn}$ и $a_{pq} \leq a_{nm}$. Другим речима, сви елементи матрице A су ненегативни у овом случају. Дакле, важи
   $$\omega(\sigma, A) = a_{mn} + a_{nm} \geq a_{pq} + a_{pq} \geq a_{pq}.$$

2. $a_{pq} < 0$.
   Овде имамо два подслучаја.

   а) $a_{pq} \leq a_{mn} < 0$.
   Пошто је A *MAPSS* матрица и $a_{mn} < 0$, услов (M2) налаже да мора важити $a_{nm} \geq 0$. Дакле:
   $$\omega(\sigma, A) = a_{mn} + a_{nm} \geq a_{pq} + a_{nm} \geq a_{pq}.$$

   б) $a_{pq} < 0 \leq a_{mn}$.
   У овом случају, a_{mn} је ненегативан, па a_{nm} може бити било ког знака, али сигурно важи $a_{pq} \leq a_{nm}$. Следи:
   $$\omega(\sigma, A) = a_{mn} + a_{nm} \geq a_{mn} + a_{pq} \geq a_{pq}.$$

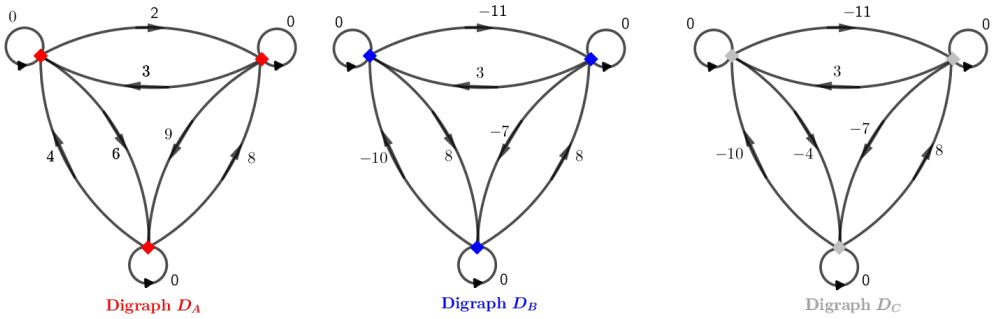
Дакле, показали смо да (4.1.1) важи за сваки циклус дужине два у диграфу који одговара *MAPSS* матрици A. □

Напомена 4.1.1 *Напоменимо да ако A није MAPSS матрица, претходна теорема не важи. У таквим случајевима, матрица A може садржати два симетрична негативна елемента, што би довело до циклуса дужине два чија укупна тежина је мања од најмањег елемента у A.*

Пример 4.1.1 *Нека су дате матрице A, B и C:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 8 \\ 3 & 0 & -7 \\ -10 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -11 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ -10 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одговарајући диграфови су:



Слика 4.1: Диграфови који одговарају матрицама A, B и C

У матрици A, најмањи елемент је 0 (тј. $a_{ii} = 0$ за $i = 1, 2, 3$), док матрица B садржи негативну минималну вредност ($b_{12} = -11$). У оба случаја, као што је описано у Теореми 4.1.3, тежина било ког циклуса дужине два није мања од најмањег елемента у тим матрицама. Матрица C није MAPSS матрица, и овде, према Напомени 4.1.1, имамо циклус дужине два чија је тежина мања од најмањег елемента у C ($c_{13} + c_{31} = -4 + (-10) < -11 = \min\{c_{ij}\}$).

Као последицу Теореме 4.1.3, имамо следећу чињеницу.

Последица 4.1.2 *У диграфу који одговара MAPSS матрици A, средња вредност било ког циклуса дужине два ограничена је одоздо половином најмањег елемента матрице A.*

Доказ: Нека је σ циклус дужине два у диграфу D_A који одговара $MAPSS$ матрици A. Тада, на основу (4.1.1), имамо:

$$\mu(\sigma, A) = \frac{\omega(\sigma, A)}{l(A)} = \frac{\omega(\sigma, A)}{2} \geq \frac{\min_{i,j}\{a_{ij}\}}{2}, \tag{4.1.2}$$

што доказује наведену чињеницу. □

Последица 4.1.2 се не може проширити на циклусе дужине веће од два. На пример, у диграфу D_B из Примера 4.1.1, који одговара $MAPSS$ матрици B, циклус $\sigma_3 = (b_{12}, b_{23}, b_{31})$ даје средњу вредност строго мању од $\min_{i,j}\{b_{ij}\}/3$:

$$\mu(\sigma_3, B) = \frac{b_{12} + b_{23} + b_{31}}{3} = \frac{-11 + (-7) + (-10)}{3} < \frac{-11}{3} = \frac{\min_{i,j}\{b_{ij}\}}{3}.$$

Поред тога, можемо извести и следећи закључак.

Последица 4.1.3 *Ако MAPSS матрица A садржи бар један циклус дужине два, тада важи следећа релација:*

$$\lambda(A) \geq \frac{\min_{i,j}\{a_{ij}\}}{2}, \qquad i,j \in N. \tag{4.1.3}$$

Доказ: Пошто $\lambda(A)$ представља максимум средњих вредности циклуса, а Последица 4.1.2 обезбеђује да (4.1.2) важи за бар једну средњу вредност циклуса, следи да важи и (4.1.3). □

Међутим, ова граница је мање значајна за *MAPSS* матрице - будући да Теорема 4.1.2 већ обезбеђује да је $\lambda(A) \geq 0$ - она постаје значајна у контексту слабих *MAPSS* матрица, о чему ће бити речи у Поглављу 4.4.

4.2 Веза са другим класама матрица

Подсетимо се да смо у уводном делу дефинисали матрице попут растуће (Дефиниција 1.4.3), дефинитне (Дефиниција 1.4.4), нормалне и строго нормалне (Дефиниција 1.4.6), иредуцибилне (Дефиниција 1.3.9), итд. У овом поглављу разматрамо њихову везу са *MAPSS* матрицама.

Лема 4.2.1 *Свака MAPSS матрица је растућа.*

Доказ: Ово је директна последица услова (M1). □

Последица 4.2.1 *У макс-алгебри, класа MAPSS матрица је подкласа класе растућих матрица.*

Одавде можемо закључити и да за *MAPSS* матрице важи Лема 1.4.2.

Теорема 4.2.1 *Ако је A MAPSS матрица, тада важи* $\Gamma(A) = \Delta(A)$.

Доказ: Пошто је свака *MAPSS* матрица растућа (Лема 4.2.1), важи $A = I \oplus A$. Дакле, тада нема разлике између слабог и јаког транзитивног затворења. □

Подсетимо да се у макс-алгебри матрица назива дефинитном ако је $\lambda(A) = 0$, тј. ако у одговарајућем диграфу: 1) бар један циклус има тежину једнаку нули и 2) сви остали циклуси су непозитивни. Када је реч о *MAPSS* матрицама димензија 2×2, први услов важи због услова (M1), па остаје да се испита други.

Теорема 4.2.2 *MAPSS матрица димензије* 2×2 *је дефинитна ако су њени симетрични елементи или оба једнака нули, или имају супротне знакове тако да негативан елемент има већу апсолутну вредност од позитивног.*

Доказ: Ако су сви елементи *MAPSS* матрице A једнаки нули, таква матрица је сигурно дефинитна, што је тривијалан случај. У осталим случајевима, где нулу посматрамо као елемент позитивног знака, вандијагонални елементи морају бити супротних знакова, јер ако су оба позитивна, добијамо позитиван циклус, док ако су оба негативна, таква матрица није *MAPSS* матрица. Ако желимо да диграф нема позитиван циклус, јасно је да негативан елемент мора имати већу апсолутну вредност од позитивног. Важно је напоменути да ако је неки вандијагонални елемент једнак ε, тада циклус дужине два не постоји, а $\lambda(A)$ се рачуна преко петљи. Дакле, матрица је и у том случају дефинитна. □

У случају *MAPSS* матрица димензија већих од 2×2, лако се долази до следећег закључка: да би таква матрица била дефинитна, потребно је да за симетричне елементе

буде испуњен услов из Теореме 4.2.2. Као што је горе објашњено, ово обезбеђује да не постоји позитиван циклус дужине два. Међутим, овај услов није довољан, јер циклуси дужине веће од два и даље могу бити позитивни.
Следеће тврђење односи се на критичне чворове и циклусе $MAPSS$ матрица.

Лема 4.2.2 *Ако је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ дефинитна $MAPSS$ матрица, тада су у одговарајућем диграфу D_A сви чворови критични и постоји најмање n критичних циклуса.*

Доказ: Ако је A дефинитна матрица, тада је $\lambda(A) = 0$. Пошто је A такође $MAPSS$ матрица, све петље имају средњу вредност једнаку нули, па су све петље критични циклуси. Дакле, имамо најмање n таквих циклуса. Јасно је да су тада и сви чворови критични. □

Лема 4.2.3 *У класи $MAPSS$ матрица не постоји разлика између дефинитних и строго дефинитних матрица.*

Доказ: Пошто је свака $MAPSS$ матрица растућа (Лема 4.2.1), јасно је из дефиниција да су у овом контексту дефинитна матрица и строго дефинитна матрица еквивалентни појмови. □

Лема 4.2.4
1. *$MAPSS$ матрица је нормална матрица ако сваки негативан вандијагонални елемент има симетричан елемент једнак нули.*
2. *$MAPSS$ матрица не може бити строго нормална матрица.*

Доказ:

1. Матрица је нормална ако, поред нула дијагонале, вандијагонални елементи нису позитивни. У $MAPSS$ матрицама, међутим, два симетрична елемента не могу бити негативна, због услова (M2). Као резултат, негативни вандијагонални елементи имплицирају да њихови симетрични парови морају бити једнаки нули.

2. Ово тврђење директно произлази из услова (M2).

Тиме је доказ леме комплетиран. □
$MAPSS$ матрица може бити иредуцибилна, али то није опште својство ове класе. $MAPSS$ матрице A и B из Примера 4.1.1 су иредуцибилне матрице: F_A и F_B су јако повезани. Контрапример се лако конструише, где одговарајући дираф нема путеве између одређених парова чворова, чиме матрица постаје редуцибилна. Осим тога, $MAPSS$ матрица може имати јак перманент, а може бити и дијагонално доминантна матрица.

4.3 Елементарне трансформације

Подсетимо да матрице A и B у макс-алгебри могу бити еквивалентне, директно сличне или сличне (Дефиниција 1.3.10). Ако су A и B еквивалентне, тада се граф D_A добија из D_B пренумерисањем чворова. Ако су директно сличне, тада важи $F_A = F_B$; ако су сличне, тада се F_A добија из F_B пренумерисањем чворова. У наставку истражујемо да ли матрица задржава $MAPSS$ својства под елементарним трансформацијама.

Теорема 4.3.1 *Ако је A $MAPSS$ матрица и $A \equiv B$, тада је и B $MAPSS$ матрица.*

Доказ: Нека су матрице A и B еквивалентне, где је A $MAPSS$ матрица. Нека D_A и D_B означавају одговарајуће диграфове који одговарају редом матрицама A и B. Као што је раније наведено, дијаграф D_B се може добити из D_A пренумерисањем чворова. Другим речима, исти дијаграф одговара обема матрицама, разликујући се само у означавању чворова. Пошто је A $MAPSS$ матрица, дијаграф D_A задовољава следеће услове: сви чворови имају петље тежине нула (Лема 4.1.1), и не постоји циклус дужине два у којем обе гране имају негативну тежину (Тврђење 4.1.1). Ова својства су очигледно очувана у D_B, што значи да B задовољава и услов (M1) и услов (M2), тј. B је такође $MAPSS$ матрица. □

Када разматрамо сличност и директну сличност, додавање одређених вредности врстама и/или колонама $MAPSS$ матрице може нарушити оба услова (M1) и (M2), што се лако показује контрапримером. Дакле, матрица која је слична или директно слична $MAPSS$ матрици не мора бити $MAPSS$ матрица у општем случају.

Међутим, у контексту $MAPSS$ матрица, од значаја је размотрити матрично скалирање, које представља посебан случај директне сличности.

Лема 4.3.1 *Ако је A $MAPSS$ матрица, а B се добија из A матричним скалирањем, тада B задовољава услов (M1), али (M2) не важи у општем случају.*

Доказ: Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ $MAPSS$ матрица, и B матрица добијена из A матричним скалирањем, тј.

$$B = X^{-1} \otimes A \otimes X,$$

где је X нека дијагонална матрица димензије $n \times n$. То уствари значи да додавање вредности $x_i \in \mathbb{R}$ i-тој врсти матрице A подразумева додавање вредности $-x_i$ i-тој колони ове матрице. Дакле, дијагонални елементи остају једнаки нули, тј.:

$$b_{ii} = -x_i + a_{ii} + x_i = a_{ii} = 0, \quad \text{за свако } i \in N.$$

Међутим, услов (M2) може бити нарушен током матричног скалирања. Елементи b_{ij} и b_{ji} рачунају се као:

$$b_{ij} = -x_i + a_{ij} + x_j \quad \text{и} \quad b_{ji} = -x_j + a_{ji} + x_i, \quad \text{за свако } i, j \in N.$$

Иако a_{ij} и a_{ji} нису оба негативна (због услова (M2)), може се десити - у зависности од вредности ових елемената и вредности елемената дијагоналне матрице - да су и b_{ij} и b_{ji} негативни. Сходно томе, услов (M2) за матрицу B може бити нарушен, па матрица не задовољава $MAPSS$ својство у општем случају. Ово је илустровано у Примеру 4.3.1 који следи. □

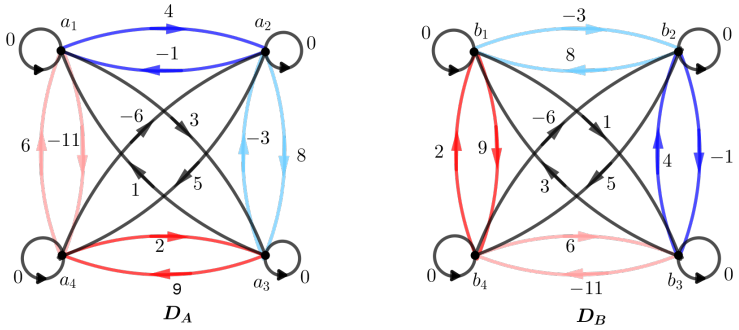
Пример 4.3.1 *Нека је дата $MAPSS$ матрица A:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & -11 \\ -1 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 6 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 9 \\ 8 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -11 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

је еквивалентна матрици A (добијена пермутовањем прве и треће врсте, као и прве и треће колоне), и она сама јесте $MAPSS$ матрица. Одговарајући дирафови ових матрица су:



Слика 4.2: Дирафови еквивалентних $MAPSS$ матрица A и B

б) Матрице C и D су обе добијене из матрице A скалирањем. Конкретно, матрица C је формирана додавањем вредности 2 првој врсти и -2 првој колони (тј. овде је дијагонална матрица $X = \mathrm{diag}(2,0,0,0)$). С друге стране, матрица D је формирана на исти начин, али коришћењем вредности 8 за прву врсту и -8 за прву колону:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & -9 \\ -3 & 0 & 8 & 5 \\ -1 & -3 & 0 & 9 \\ 4 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 11 & -3 \\ -9 & 0 & 8 & 5 \\ -7 & -3 & 0 & 9 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица C задовољава $MAPSS$ услове, док матрица D не, јер је услов (M2) нарушен.

4.4 Дирафови слабих $MAPSS$ матрица

Поред дирафова који одговарају $MAPSS$ матрицама, описујемо и дирафове који одговарају слабим $MAPSS$ матрицама (Дефиниција 3.4.1). Пошто услов (M1) не важи за ову ширу класу, одређена својства која су раније била једноставна за доказивање више неће важити, што је показано у следећим резултатима.
Напоменимо да у овом поглављу не уводимо потпоглавља, али задржавамо успостављени редослед излагања. Овај избор одражава природу тврђења: за нека ћемо једноставно констатовати да више не важе, док ће друга - она која остају важећа - бити поткрепљена претходно доказаним резултатима, и ако је потребно, допуњена. Овакав приступ обезбеђује да јаснећа излагања буде очувана током целог текста.
Леме 4.1.2-4.2.4, Теореме 4.1.1, 4.1.2, и 4.2.1, као и Последице 4.1.1 и 4.2.1, ослањају се на услов (M1) и стога уопштено не важе за слабе $MAPSS$ матрице. Ово илуструје централну улогу коју услов нула дијагонале има у обликовању структурних својстава одговарајућих дирафова $MAPSS$ матрица.
Својства $1-3$ из Леме 4.1.1 не важе за слабе $MAPSS$ матрице, док ће остала својства важити у свом садашњем или благо измењеном облику.

Лема 4.4.1 *Нека је $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ слаба $MAPSS$ матрица. Тада важи:*

4′. *за било која два различита чвора u и v у D_A, постоји бар једна грана између њих, било (u, v), (v, u), или обе;*

5′. *минималан број грана у D_A је $(n^2 - n)/2$;*

6′. *у диграфу D_A не постоје изоловани чворови.*

Доказ: Као и код *MAPSS* матрица, својства 4′ и 6′ се лако доказују из услова (M2). Што се тиче броја грана у D_A, пошто дијагонални елементи слабе *MAPSS* матрице A могу бити једнаки ε, могуће је да чворови немају петље. Дакле, најмањи могући број грана је половина укупног броја вандијагоналних елемената, тј. $(n^2 - n)/2$. □
Тврђење 4.1.1 је директна последица услова (M2), па ће важити и за слабе *MAPSS* матрице:

Тврђење 4.4.1 *У диграфу који одговара слабој MAPSS матрици A, не постоји циклус дужине два у којем обе гране имају негативне тежине.*

Теорема 4.1.3 ће важити за слабе *MAPSS* матрице; међутим, пошто најмања вредност слабе *MAPSS* матрице може бити позитивна, њен доказ захтева допуну.

Теорема 4.4.1 *У диграфу који одговара слабој MAPSS матрици A, тежина произвољног циклуса дужине два (ако такав циклус постоји) ограничена је одоздо најмањим елементом те матрице.*

Доказ: У Теореми 4.1.3, ово тврђење је доказано за *MAPSS* матрице под претпоставком да је најмањи елемент ненегативан због услова нула дијагонале (M1). Ако је матрица слаба *MAPSS*, она нема нула дијагоналу, па најмањи елемент може бити позитиван. Дакле, поред случајева описаних у Теореми 4.1.3, остаје да се испита и случај када је $a_{pq} > 0$. Овај случај је једноставан, јер a_{pq} представља најмању вредност у слабој *MAPSS* матрици. Дакле, сви елементи матрице морају бити строго позитивни. Стога, овај случај се своди на случај 1. из доказа Теореме 4.1.3, тј. важи:

$$\omega(\sigma, A) = a_{mn} + a_{nm} \geq a_{pq} + a_{pq} \geq a_{pq}.$$

Тиме је доказ завршен. □
Пошто Теорема 4.4.1 (која одговара Теореми 4.1.3 за *MAPSS* матрице) важи, лако је закључити да и Последице 4.1.2 и 4.1.3 важе ако заменимо израз „*MAPSS* матрица“ са „слаба *MAPSS* матрица“.

Последица 4.4.1 *У диграфу који одговара слабој MAPSS матрици A, средња вредност било ког циклуса дужине два ограничена је одоздо половином најмањег елемента матрице A.*

Последица 4.4.2 *Ако слаба MAPSS матрица A садржи бар један циклус дужине два, тада важи следећа релација:*

$$\lambda(A) \geq \frac{\min_{i,j}\{a_{ij}\}}{2}, \qquad i, j \in N. \tag{4.4.1}$$

Да би се одредило када је слаба *MAPSS* матрица дефинитна, потребни су додатни услови у односу на *MAPSS* матрицу. Стога теорема која одговара Теореми 4.2.2 има следећи облик.

Теорема 4.4.2 *Слаба MAPSS матрица димензије 2×2 је дефинитна ако важи један од следећих случајева:*

1. *један дијагонални елемент је једнак нули, а други је ненегативан, док су вандијагонални елементи или оба једнака нули, или имају супротне знакове тако да негативан елемент има већу апсолутну вредност од позитивног;*

2. *дијагонални елементи су негативни, а вандијагонални елементи су супротни реални бројеви.*

Доказ: Ако је испуњен један од ових услова, очигледно је да ће матрица бити дефинитна. □

Напомена 4.4.1 *У слабој MAPSS матрици, вандијагонални елементи не могу оба бити једнаки ε, због услова (M2). Међутим, у случају 1. Теореме 4.4.2, један од њих може бити ε, што имплицира да циклус дужине два не постоји; у том случају, $\lambda(A)$ се рачуна преко петљи. У случају 2., ако ниједна петља нема тежину нула, тада да би вредност $\lambda(A)$ била једнака нули, оба вандијагонална елемента морају бити различита од ε - тј. морају бити супротни реални бројеви.*

Слабе *MAPSS* матрице не морају бити растуће. Штавише, оне не могу бити нормалне нити строго нормалне.
Када је реч о елементарним трансформацијама, тврђење која одговара Теореми 4.3.1 остаје важеће и за слабе *MAPSS* матрице.

Теорема 4.4.3 *Ако је A слаба MAPSS матрица и $A \equiv B$, тада је и B слаба MAPSS матрица.*

Доказ: Аналогно резоновању из доказа Теореме 4.3.1, закључујемо да дато тврђење важи. □
Ако размотримо матрицу која је директно слична/слична или добијена скалирањем из слабе *MAPSS* матрице, лако је закључити да она сама по себи не мора бити слаба *MAPSS* матрица.

На крају ове главе, напоменимо да сва тврђења која су овде наведена важе дуално у мин-алгебарској теорији.

Глава 5

Горња граница броја итерација код Наизменичног метода

У Потпоглављу 2.3.2 описан је основни метод за решавање двостраних система са раздвојеним променљивама - Наизменични метод. Подсетимо се да је то итеративни поступак који почиње случајно изабраним вектором. Применом ове итеративне процедуре долази се до решења постављеног проблема, уколико решење постоји, или до закључка да решење не постоји. Више аутора бавило се Наизменичним методом, а главни резултати могу се наћи, на пример, у [48, 74, 94].
У [48], Канингем-Грин и Буткович су доказали да, уколико за матрице A и B из датог двостраног система важе одређени услови, онда се број итерација код Наизменичног метода може ограничити одозго. Имајући у виду то ограничење, овде је предложено да итеративни поступак код овог метода не почне од случајно изабраног вектора, већ од вектора који се бира на основу елемената одговарајуће $MAPSS$ матрице. Уз ту претпоставку, анализирали смо да ли се горња граница броја итерација може ограничити на неки други начин, и да ли постоји могућност смањења те границе. Циљ је управо минимизација границе броја итерација код Наизменичног метода. Напоменимо и то да у [48], у изразу којим се одређује горња граница броја итерација, јавља се матрица $A^* \otimes A$, која припада описаној класи $MAPSS$ матрица. У доказивању кључне теореме ове главе користићемо чињеницу да ова матрица има нула дијагоналу.
Резултати представљени у овој глави објављени су у радовима [100] (Поглавља 5.2 и 5.3) и [99] (Поглавље 5.4).

5.1 Рачунање горње границе

У следећој теореми, без губитка општости, претпоставља се да је A коначна, а B дупла $\mathbb{R}$-матрица.

Теорема 5.1.1 *([34, 48]) Ако је $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}^{m\times k}$ и Наизменични метод почиње са $x(0) \in \mathbb{Z}^n$, тада ће се метод завршити након највише*

$$\Omega = (n-1)(1 + x(0)^* \otimes A^* \otimes A \otimes x(0)) \tag{5.1.1}$$

итерација.

Доказ: Претпоставимо најпре да решење постоји. Означимо почетни вектор $x(0)$ са γ. Према Теореми 2.3.5, постоји компонента вектора γ, рецимо γ_j, која се неће мен-

јати током рада Наизменичног метода; такву компоненту називамо *успавана* (*sleeper*). Алгоритам ће се зауставити чим $A \otimes x$ престане да се мења. Ово ће се гарантовано десити најкасније када све компоненте вектора x постану толико мале у поређењу са γ_j да више неће утицати на вредност $A \otimes x$, тачније када за свако k и i важи

$$a_{ik} + x_k \leq a_{ij} + \gamma_j, \tag{5.1.2}$$

то јест, када је $x_k \leq u_{kj}$, где је

$$u_{kj} = \min_i (a_{ij} + \gamma_j - a_{ik}) = (A^* \otimes' A)_{kj} + \gamma_j. \tag{5.1.3}$$

Ова неједнакост значи да је неуспавана компонента x_k постала потиснута од стране успаване компоненте γ_j. Пошто је низ вредности x_k нерастући, ова потиснутост ће се одржати и у наредним итерацијама. Како вредност индекса j није унапред позната, потиснутост за x_k гарантујемо посматрајући све компоненте као потенцијално успаване, тако да је x_k сигурно потиснута ако њена вредност опадне испод

$$\beta_k = \min_j u_{kj} = \min_j ((A^* \otimes' A)_{kj} + \gamma_j) = (A^* \otimes' A \otimes' \gamma)_k. \tag{5.1.4}$$

Према томе, пад компоненте x_k пре него што буде потиснута износи највише

$$w_k = \gamma_k - \beta_k + 1. \tag{5.1.5}$$

Постоји највише $n-1$ неуспаваних компоненти и у свакој итерацији бар једна неуспавана компонента опада за најмање 1 (у супротном се $A \otimes x$ не мења и алгоритам се зауставља). Дакле, укупан број итерација пре наступања потиснутости не прелази

$$\begin{aligned}(n-1)\max_k w_k &= (n-1)\max_k(\gamma_k - \beta_k + 1) = (n-1)(1 + \beta^* \otimes \gamma) \\ &= (n-1)(1 + \gamma^* \otimes A^* \otimes A \otimes \gamma).\end{aligned}$$

Ако решење не постоји, тада након највише $(n-1)(1 + \gamma^* \otimes A^* \otimes A \otimes \gamma)$ итерација све компоненте вектора x опадају (јер би у супротном $A \otimes x$ остало непромењено, што би дало решење), па се алгоритам зауставља означавајући неизводљивост система. □
У овој теореми се за матрицу A претпоставља да је коначна, док је B дупла $\mathbb{R}$-матрица. Уколико бисмо посматрали систем у којем су и A и B дупле $\mathbb{R}$-матрице, онда горња граница добијена у теореми не важи. Ипак, долази се до закључка да, уколико решење постоји, оно ће бити пронађено у коначном броју корака.

5.2 Избор почетног вектора

Сада представљамо кључну теорему ове главе, која успоставља метод за избор почетног вектора и одређивање горње границе броја итерација.
Као и претходно, претпостављамо да је A коначна, а B дупла $\mathbb{R}$-матрица.

Теорема 5.2.1 *Нека је $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ и $B \in \overline{\mathbb{Z}}^{m\times k}$. Ако дефинишемо почетни колона-вектор $x(0)$ као*

$$x(0) = (x_i(0)) = \left(\max_j \{\tilde{a}_{ij}\}\right), \quad i, j \in N, \tag{5.2.1}$$

тада је број итерација код Наизменичног метода мањи или једнак

$$\Omega = (n-1)\left(1 + \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}\right), \quad i,j \in N, \tag{5.2.2}$$

где је $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = A^* \otimes A$.

Доказ: На основу Теореме 5.1.1, број итерација код Наизменичног метода за $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}^{m\times k}$ и произвољан почетни вектор $x(0) \in \mathbb{Z}^n$ је мањи или једнак (5.1.1). Најпре примећујемо да матрица $\tilde{A} = A^* \otimes A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ јесте $MAPSS$ матрица, тј. има нула дијагоналу.
Означимо $T = x(0)^* \otimes A^* \otimes A \otimes x(0) = x(0)^* \otimes \tilde{A} \otimes x(0)$, где дефинишемо вектор $x(0)$ као у (5.2.1). Сада доказујемо да је $T \leq \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}$. Узимајући у обзир димензије матрице $\tilde{A}$ и вектора $x(0)$, јасно је да ће T бити цео број.
Из (5.2.1) следи да је $x_i(0)$, за свако $i \in N$, максимални елемент у i-тој врсти матрице $\tilde{A}$. Дакле, $x_i(0) \geq \tilde{a}_{ij}$, за свако $j \in N$, тј.:

$$x_i(0) \geq \tilde{a}_{ij}, \qquad \Leftrightarrow \qquad -x_i(0) + \tilde{a}_{ij} \leq 0, \qquad \text{за свако } i,j \in N. \tag{5.2.3}$$

Пошто је $\tilde{A}$ квадратна матрица са нула дијагоналом, све координате вектора $x(0)$ су ненегативне:

$$x_i(0) \geq 0, \qquad \text{за свако } i \in N. \tag{5.2.4}$$

Нека је $x^*(0) = -x(0)^\top$. Тада, за свако $i \in N$, елементи $x^*(0)$ задовољавају $x_i^*(0) = -x_i(0)$. Дакле, из (5.2.4) имамо да $x_i^*(0) \leq 0$, за свако $i \in N$.
У даљем тексту користимо ознаке:

$$x_i^*(0) + \tilde{a}_{ij} = p_{ij}, \qquad i,j \in N, \tag{5.2.5}$$

и

$$\max_i\{p_{ij}\} = q_j, \quad j \in N. \tag{5.2.6}$$

Из (5.2.3) добијамо следећи израз за p_{ij}:

$$p_{ij} = x_i^*(0) + \tilde{a}_{ij} = -x_i(0) + \tilde{a}_{ij} \leq 0, \quad i,j \in N. \tag{5.2.7}$$

Пошто су све вредности непозитивне, сваки q_j је такође непозитиван, за свако $j \in N$. Користећи својства операције $\otimes$ и уведене ознаке, имамо:

$$\begin{aligned}
T &= x^*(0) \otimes A^* \otimes A \otimes x(0) = x^*(0) \otimes \tilde{A} \otimes x(0) = \left(x^*(0) \otimes \tilde{A}\right) \otimes x(0) \\
&= \left(\max\{p_{11}, p_{21} \ldots, p_{n1}\}, \ldots, \max\{p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{nn}\}\right) \otimes \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \\
&= \left(\max_i\{p_{i1}\}, \ldots, \max_i\{p_{in}\}\right) \otimes \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \\
&= (q_1, \ldots, q_n) \otimes \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

С обзиром да су све координате вектора q ненегативне и да за $x_i(0)$ важи (5.2.4), следи да граница броја итерација T даље задовољава:

$$\begin{aligned} T &= (q_1,\dots,q_n)\otimes\begin{pmatrix} x_1(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{pmatrix} && (5.2.8)\\ &= \max\{q_1+x_1(0),\dots,q_n+x_n(0)\} && (5.2.9)\\ &\le \max\{x_1(0),\dots,x_n(0)\} = \max_i\{x_i(0)\} && (5.2.10)\\ &= \max_i\left(\max_j\{\tilde{a}_{ij}\}\right) = \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}. && (5.2.11)\end{aligned}$$

Овим је доказано да $T \le \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}$, чиме је доказ завршен. □

На основу почетног вектора дефинисаног у Теореми 5.2.1, закључујемо да, у најгорем случају, T одговара највећем елементу матрице $\tilde{A}$, иако се ова вредност може смањити у зависности од осталих елемената матрице. Међутим, остаје неодређено да ли би вредност Ω била мања за произвољан почетни вектор (упоређивање и дискусија резултата дата је у Поглављу 5.3).

Предложени почетни вектор омогућава да се граница броја итерација израчуна користећи само стандардне макс-алгебарске операције, без потребе за алатима као што су максимална средња вредност циклуса или анализа макс-алгебарских сопствених вредности.

Последица 5.2.1 *У тривијалном случају, када је $A = \rho \otimes O$, где је O матрица чији су сви елементи једнаки 0 и $\rho \in \mathbb{Z}$ (приметимо да тада $\tilde{A}$ такође садржи елементе једнаке 0, тј. $\max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\} = 0$), број итерација код Наизменичног метода, са избором почетног вектора из Теореме 5.2.1, биће ограничен са $(n-1)(1+0) = n-1$.*

У нетривијалном случају, најмања могућа горња граница за број итерација је $2(n-1)$, јер најмања вредност коју $\max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}$ може да има јесте 1, будући да је A целобројна матрица (очигледно, $\max_{ij}\{\tilde{a}_{ij}\}$ не може бити негативан, јер $\tilde{A}$ има нула дијагоналу). Дакле, број итерација биће ограничен са: $(n-1)(1+1) = 2(n-1)$.

Пример 5.2.1 *Нека је матрица A дата као:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ -9 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Тада важи:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9\\ -3 & 1 & -4\\ -5 & -4 & -6\end{pmatrix} \quad и \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 15\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Ако изаберемо вектор $x(0)$ као у (5.2.1), добијамо

$$x(0) = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0\end{pmatrix}^\top.$$

Рачунамо:

$$T = x^*(0)\otimes\tilde{A}\otimes x(0) = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 18 & 18 & 13\end{pmatrix}^\top = 13.$$

Добијамо да је $T = 13 \le 15 = \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}$. Дакле, укупан број итерација је ограничен са

$$(3-1)(1+13) = 28.$$

Неки од добијених вредности T за случајно изабране почетне векторе су:

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}^\top \quad \Rightarrow \quad T = 20; \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}^\top \quad \Rightarrow \quad T = 19; \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 9 & 20 & 4 \end{pmatrix}^\top \quad \Rightarrow \quad T = 24; \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top \quad \Rightarrow \quad T = 15. \end{aligned}$$

Најмања вредност T се постиже када се почетни вектор бира као у (5.2.1), иако ово не мора да важи у општем случају.

Лема 5.2.1 *Нека су $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ и $B \in \overline{\mathbb{Z}}^{m\times k}$ дате матрице. Нека свака колона матрице $\tilde{A} = A^* \otimes A$ садржи максимални елемент неке врсте те матрице. Ако овај услов важи и почетни вектор $x(0)$ је дефинисан као у (5.2.1), тада ће граница броја итерација код Наизменичног метода бити једнака*

$$(n-1)\left(1 + \max_{i,j}\{\tilde{a}_{ij}\}\right), \quad i, j \in N.$$

Доказ: Пратећи нотацију из Теореме 5.2.1, неједнакост (5.2.10) прелази у једнакост ако је q нула вектор, тј. ако $q_j = 0$, за свако $j \in N$.
Координате вектора $x^*(0)$ су негативни максимуми по врстама матрице $\tilde{A}$. При рачунању s-тог елемента вектора q (за неко $s \in N$), ове координате се додају (тј. максалгебарски множе) са елементима s-те колоне матрице $\tilde{A}$. По услову леме, свака колона ове матрице садржи максимални елемент неке врсте. Нека $\tilde{a}_{ts}$ означава елемент s-те колоне који је максимум t-те врсте: $\tilde{a}_{ts} = \max\{\tilde{a}_{t1}, \tilde{a}_{t2}, \ldots, \tilde{a}_{tn}\}$, за неко $t \in N$. Међутим, према (5.2.1), ово имплицира да

$$\tilde{a}_{ts} = x_t(0) = -x_t^*(0).$$

Одавде и из (5.2.7), за фиксирани индекс $j = s \in N$, имамо:

$$\begin{aligned} q_s &= \max_i\{p_{is}\} \\ &= \max\{p_{1s}, \ldots, p_{ts}, \ldots, p_{ns}\} \\ &= \max\{p_{1s}, \ldots, x_t^*(0) + \tilde{a}_{ts}, \ldots, p_{ns}\} \\ &= \max\{p_{1s}, \ldots, -\tilde{a}_{ts} + \tilde{a}_{ts}, \ldots, p_{ns}\} \\ &= \max\{p_{1s}, \ldots, 0, \ldots, p_{ns}\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Дакле, све координате вектора q су нула у овом случају. Тиме је доказ завршен. □

Напомена 5.2.1 *Ако се максимум по врсти постиже једним елементом, тада, будући да је $\tilde{A}$ квадратна матрица, у свакој колони ће постојати тачно један максимални елемент неке врсте. С друге стране, максимум по врсти може се постићи и са више елемената истовремено. У таквим случајевима, при рачунању координата вектора q, унутар одговарајућег максимума, више од једног елемента биће једнако нули. Ипак, ово не утиче на тачност тврђења нити доказа.*

Пример 5.2.2 *Нека је матрица A дата:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Тада:} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{4} & 3 \\ 2 & 0 & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимални елементи по врстама матрице $\tilde{A}$ појављују се у различитим колонама. Ако дефинишемо почетни вектор као у (5.2.1), добијамо

$$x(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{\top}.$$

Сада имамо:

$$\begin{aligned} T &= x^*(0) \otimes \tilde{A} \otimes x(0) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 = \max_{i,j} \{\tilde{a}_{ij}\}. \end{aligned}$$

Као што је показано у Леми 5.2.1, све координате вектора q су нуле у овом случају.

Лема 5.2.1 даје потребан услов да би важило $T < \max_{i,j} \{\tilde{a}_{ij}\}$.

Последица 5.2.2 *Нека је почетни вектор изабран као у (5.2.1). Вредност T може бити мања од $\max_{i,j} \{\tilde{a}_{ij}\}$ само ако $\tilde{A}$ има бар једну колону која не садржи максимални елемент ниједне врсте.*

Пример 5.2.3 *Максимални елементи по врстама матрице $\tilde{A}$ из Примера 5.2.1 налазе се у истој колони, тј. $\tilde{A}$ има две колоне које не садрже максимални елемент ниједне врсте. Пошто овај услов важи, вредност T је мања од $\max_{i,j} \{\tilde{a}_{ij}\}$ у овом случају.*

Међутим, овај услов није довољан: смањење вредности T није загарантовано, чак и ако $\tilde{A}$ има колону која не садржи максимални елемент неке врсте.

5.3 Нумеричко тестирање

Сада упоређујемо границу броја итерација у два случаја: коришћењем случајног почетног вектора и коришћењем предложеног почетног вектора из (5.2.1). У ту сврху генерисали смо 10.000 случајних 3×3 матрица чији су елементи узети из три различита интервала целих бројева како бисмо обезбедили статистички поуздане резултате. За сваку матрицу $A(i)$, $i \in [1,\ 10.000]$, генерисали смо 10 случајних вектора, израчунали границу броја итерација за сваки од тих вектора, а затим упоредили добијене резултате са границом коју смо добили за вектор изабран према нашем предлогу.
Овде приказујемо резултате за првих 10 матрица и 10 одговарајућих случајних вектора, чији су елементи из интервала $[-10, 10]$. У табели испод, $A(i)$ означава случајно генерисане матрице, где је $i = \overline{1,10}$. Са $\Omega(i,j)$ означавамо вредност Ω (израчунату помоћу (5.1.1)) за матрицу $A(i)$ и случајни почетни вектор $x_j^{(i)}(0)$, $j = \overline{1,10}$:

$$\begin{aligned}\Omega(i,j) &= (n-1)\left(1+\left(x_j^{(i)}(0)\right)^* \otimes (A(i))^* \otimes A(i) \otimes \left(x_j^{(i)}(0)\right)\right)\\ &= 2\left(1+\left(x_j^{(i)}(0)\right)^* \otimes \tilde{A}(i) \otimes \left(x_j^{(i)}(0)\right)\right),\end{aligned}$$

за свако $i = \overline{1,10}$ и $j = \overline{1,10}$. Почетни вектор из (5.2.1) означавамо са $x(0)$, а одговарајућу границу за тај вектор са $\Omega(i)$:

$$\Omega(i) = 2\left(1 + x(0)^* \otimes (A(i))^* \otimes A(i) \otimes x(0)\right), \qquad \text{за свако } i \in N. \tag{5.3.1}$$

За израчунавање границе $\Omega(i,j)$ примењујемо формулу (5.1.1) (немамо другу опцију када се ради о случајном почетном вектору); са друге стране, ако изаберемо почетни вектор као у (5.2.1), можемо израчунати $\Omega(i)$ не само помоћу (5.1.1), већ и помоћу (5.2.2). Међутим, као што је показано у претходном поглављу (Последица 5.2.2), замена предложеног вектора у (5.1.1) може дати мању границу од оне добијене помоћу (5.2.2). Стога смо овде користили (5.1.1) за израчунавање $\Omega(i)$.
У даљем тексту, „најбољи (бољи) резултат“ односи се на најмању (мању) границу броја итерација.
$R1$ означава број случајних вектора у односу на које $x(0)$ даје бољи резултат. $R2$ је једнако 1 ако $x(0)$ даје бољи резултат од више од половине од 10 случајних вектора; у супротном је једнако 0. $R3$ је једнако 1 ако $x(0)$ даје најбољи резултат међу свим случајним векторима; у супротном је 0. $R4$ је једнако 1 ако $x(0)$ даје други најбољи резултат (тј. бољи од 9 од 10 случајних вектора); у супротном је 0.
Увођењем ових показатеља омогућава се прецизна процена и анализа успешности предложеног почетног вектора у поређењу са случајно генерисаним почетним векторима.

Табела 5.1: Приказ резултата за првих 10 случајно генерисаних матрица

A(i)	x(0)	$x_j^i(0)$	Ω(i,j)	Ω(i)	R1	R2	R3	R4
$\begin{pmatrix}-10&1&-3\\3&-10&-6\\1&3&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\13\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\6\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-5\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-10\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\5\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\8\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-10\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\8\\-6\end{pmatrix}$	28, 32, 36, 52, 42, 34, 46, 34, 46, 40	26	10	1	1	0
$\begin{pmatrix}-10&-4&5\\-1&9&2\\6&10&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}15\\9\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\-9\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-8\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-7\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-8\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-7\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\10\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\-3\end{pmatrix}$	54, 34, 40, 48, 38, 32, 24, 44, 40, 32	18	10	1	1	0
$\begin{pmatrix}-2&-2&5\\2&-3&-5\\5&7&-9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\7\\16\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\10\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\-4\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-5\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-10\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\-9\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\9\\4\end{pmatrix}$	38, 36, 44, 34, 32, 56, 46, 26, 40, 42	32	8	1	0	0
$\begin{pmatrix}-3&2&-4\\-4&-8&0\\-6&-3&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\8\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\10\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\10\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-5\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-10\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-7\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-7\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-2\\3\end{pmatrix}$	40, 16, 38, 22, 56, 30, 32, 34, 34, 32	16	9	1	0	1
$\begin{pmatrix}-6&-7&-9\\5&4&-2\\8&-3&-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\11\\12\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-8\\-1\\-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\1\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-4\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$	26, 22, 44, 50, 34, 10, 36, 26, 28, 30	20	9	1	0	1
$\begin{pmatrix}-2&6&-4\\-8&4&-5\\-6&1&-6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12\\0\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\9\\-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\10\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-8\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-8\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\7\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\5\\-8\end{pmatrix}$	54, 28, 40, 44, 24, 32, 20, 40, 54, 46	10	10	1	1	0
$\begin{pmatrix}8&1&-8\\9&4&4\\-5&-7&-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\7\\16\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9\\1\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\-5\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\6\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-10\\-3\end{pmatrix}$	68, 40, 28, 28, 30, 46, 20, 34, 24, 38	26	8	1	0	0
$\begin{pmatrix}10&-10&9\\4&-2&-4\\-10&-2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12\\20\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\3\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\8\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-9\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-5\\1\end{pmatrix}$	46, 48, 48, 36, 46, 34, 50, 76, 40, 66	32	10	1	1	0
$\begin{pmatrix}-5&-3&7\\2&7&10\\-3&-2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-8\\-3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-9\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\2\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\9\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-8\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\9\\7\end{pmatrix}$	50, 58, 28, 12, 24, 40, 26, 30, 24, 34	14	9	1	0	1
$\begin{pmatrix}9&9&-10\\1&2&2\\8&3&-10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\\19\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\4\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\10\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-10\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\8\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$	48, 56, 50, 36, 56, 50, 62, 76, 64, 50	38	9	1	0	1

У циљу даље анализе, у табели испод, $R2'$, $R3'$ и $R4'$ означавају укупан број

јединица добијених за $R2$, $R3$ и $R4$, респективно, за 10 000 генерисаних матрица.

Табела 5.2: Укупне добијене вредности за 10 000 матрица

	$[-5,5]$	$[-10,10]$	$[-100,100]$	%
$R2'$	9860	9912	9939	99%
$R3'$	3067	3832	4497	38%
$R4'$	2780	2714	2620	27%

Из приказаних резултата закључујемо да предложени почетни вектор даје боље резултате у 99% случајева. Према $R3'$, проценат случајева у којима предложени вектор даје најбољи резултат је 38%, а проценат у којима даје други најбољи резултат је 27%. Дакле, проценат да решење добијено избором предложеног вектора буде најбоље или друго најбоље решење износи 65%.
Стога, добијени резултати подржавају наш избор почетног вектора, повећавајући вероватноћу да ће граница броја итерација код Наизменичног метода бити минимизована.
Иако смањење ове теоријске горње границе не гарантује аутоматски мањи број стварних итерација у сваком појединачном систему, оно гарантује успешну контролу над максималним бројем итерација у најгорем могућем случају, при чему је стварни број итерација у пракси најчешће знатно мањи од саме границе.

5.4 О првој итерацији код Наизменичног метода

Независно од горе изложених резултата, у програмском окружењу Wolfram Mathematica извршена је анализа прве итерације Наизменичног метода. У том циљу, генерисане су матрице $A_1, \ldots, A_{100}$ и $B_1, \ldots, B_{100}$, а за сваки пар ових матрица изабрано је по 10 случајних вектора x_{ij}, $i = \overline{1,100}, j = \overline{1,10}$. На добијеним системима облика

$$A_i \otimes x_{ij} = B_i \otimes y_{ij},$$

примењен је Назменични метод и посматрано је колико координата се поклапа на левој и десној страни ових система након прве итерације. За ово истраживање су коришћене матрице димензија 5×5, што је довољно да се извуку одређени закључци. Резултати су приказани у следећим табелама, где R_i, $i = \overline{1,5}$ представља број система (од укупно 1 000 генерисаних) у којима се поклопило i координата. У циљу добијања што поузданијих података, елементи генерисаних матрица и вектора су узети из три различита интервала појединачно код реалних и целих бројева.

Табела 5.3: Резултати за реалне бројеве из различитих интервала

R_i	[-5,5]	[-10,10]	[-100,100]	%
R_1	60	56	35	5,0%
R_2	323	348	316	32,9%
R_3	448	444	481	45,8%
R_4	145	146	161	15,1%
R_5	24	6	7	1,2%

Табела 5.4: Резултати за целе бројеве из различитих интервала

R_i	[-5,5]	[-10,10]	[-100,100]	%
R_1	37	52	35	4,1%
R_2	235	286	322	28,1%
R_3	429	425	477	44,4%
R_4	246	205	154	20,2%
R_5	53	32	12	3,2%

Табела 5.5: Укупан проценат поклапања координата

R_i	Укупан проценат
R_1	4,5%
R_2	30,5%
R_3	45,1%
R_4	17,6%
R_5	2,2%

Очекивано је да је најмањи проценат добијен за R_5, тј. да се свих пет координата поклопи већ након прве итерације. Такође, низак проценат добијен је и за R_1, што значи да није велики број система код којих се поклопила само једна координата. То указује на ефикасност Наизменичног метода. Осим тога, одавде се може закључити и следеће: бар једна координата се поклапа на левој и десној страни посматраних система већ у првој итерацији. Занимљиво је даље истражити колико ће се координата поклапати у другој, трећој и наредним итерацијама Наизменичног метода.

Закључак

У овој дисертацији разматрана је нова класа матрица над макс-плус алгебрама. Матрице, које смо назвали макс-алгебарске псеудо косо-симетричне - $MAPSS$ матрице, одликују се неким карактеристичним својствима, која су кроз дисертацију детаљно истражена, описана и доказана. Као што конјугована матрица, у одређеној мери, олакшава превазилажење проблема насталих услед непостојања инверзних матрица, тако смо и $MAPSS$ матрице конструисали са намером да њихова специфична својства послуже као корисна основа за решавање отворених питања у макс-плус алгебри.

Након прве две главе, у којима је изложена кључна материја из области макс-алгебре, у трећој глави је дата формална дефиниција $MAPSS$ матрица, описане су њихове основне особине, а затим и макс-алгебарске операције са њима. Уведена је и шира класа ових матрица, названа класом слабих $MAPSS$ матрица. За разлику од $MAPSS$ матрица, слабе $MAPSS$ немају нула дијагоналу, док је услов непостојања два симетрична негативна елемента очуван. Урађено је поређење у односу на $MAPSS$ матрице и утврђено је које особине ће важити и за слабе $MAPSS$ матрице, а које неће бити очуване. Све напред речено најпре је урађено за матрице које садрже само коначне уносе. Након тога, проучено је да ли сва тврђења, доказана за $MAPSS$ матрице са коначним уносима, важе и за матрице са бесконачним уносима. Као што је изложено кроз одговарајућа тврђења и доказе, јављање бар једног бесконачног елемента у $MAPSS$ матрици значајно утиче на њена својства. Ова глава обухвата и разматрање конструктивности $MAPSS$ матрица, односно да ли и на који начин се за дату $MAPSS$ матрицу $\tilde{A}$ може одредити матрица A таква да је $A \otimes A^* = \tilde{A}$. Ово питање размотрено је у случају матрица димензија 2×2 и 3×3.

Четврта глава обухватала је диграфове који одговарају $MAPSS$ и слабим $MAPSS$ матрицама. Специфична својства која произилазе из самих дефиниција ових матрица изложена су кроз одговарајућа тврђења поткрепљена доказима. Циклуси дужине два имају неке посебне особине, због услова да $MAPSS$ матрице немају симетричне негативне елементе. Осим тога, испитано је понашање $MAPSS$ и слабих $MAPSS$ матрица при елементарним трансформацијама, као и веза ових матрица са другим макс-алгебарским класама матрица.

Пета глава односи се на Наизменични метод, основни метод за рашавање двостраних система једначна са раздвојеним променљивама. Овај метод је посебно битан, јер се и други двострани системи могу свести на системе са раздвојеним променљивама, па се могу решавати помоћу овог метода. Приказано је и анализирано истраживање које се односи на горњу границу броја итерација код Наизменичног метода, са циљем редукције те границе што је више могуће. Нумеричким тестирањем обављеним у оквиру тог истраживања показано је да овде предложени почетни вектор даје боље резултате од случајно изабраног вектора, којим у општем случају започиње Наизменични метод.

Када се ради о даљим правцима истраживања везаним за овде изложену материју, они пре свега обухватају даљу анализу структурних својстава $MAPSS$ и слабих $MAPSS$ матрица, одговарајућих диграфова, као и довођење у везу $MAPSS$ матрица са кључним макс-алгебарским појмовима. Ту се подразумева, на пример, испитивање својстава која ће имати макс-алгебарски полиноми у којима се јављају $MAPSS$ матрице, анализирање ранга, регуларности и јаке регуларности $MAPSS$ матрица, итд. Затим, разматрање сопствених вредности и вектора $MAPSS$ матрица и начина за њихово одређивање. Даље, како се у макс-алгебри за неке специфичне класе матрица максимална средња вредност може одредити по посебним формулама или поступцима, од интереса је испитати да ли се, и на који начин, то може урадити и за класу $MAPSS$ матрица.

Посебно је значајно истражити решавање система, једностраних и двостраних, у којима учествују $MAPSS$ матрице, као и то да ли ће услови који за $MAPSS$ матрице важе утицати на природу решења. Питање решавања система делом је покренуто кроз конструктивност $MAPSS$ матрица, где је потребно решити матричну једначину $A \otimes A^* = \tilde{A}$, при чему је $\tilde{A}$ дата $MAPSS$ матрица, док су A и A^* обе непознате матрице, али које су повезане на тачно утврђен начин. Даља истраживања могу обухватити формирање алгоритма који ће решавати тај проблем у општем случају, односно код матрица димензија $n \times n$, као и софтверску имплементацију тог алгоритма. Значајно је детаљо описати потребне и довољне услове који треба да важе да би описани проблем уопште имао решење. Осим тога, проблем конструктивности разматран је над скупом реалних бројева, па као још једно отворено питање остаје разматрање овог проблема над проширеним скупом реалних бројева, тј. над $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Када је у питању Наизменични метод, будућа истраживања могу обухватати разматрање даљег смањења горње границе броја итерација, на пример, одабиром почетног вектора на другачији начин, и упоређивањем добијених резултата са већ познатим, као и овде приказаним резултатима. Осим тога, при формирању вектора који је предложен као почетни, узето је у обзир да се у формули за рачунање горње границе јавља $MAPSS$ матрица, и да зато има нула дијагоналу, па је та чињеница искоришћена у даљој анализи. С тим у вези, могло би се даље истражити и да ли услов непостојања симетричних негативних елемената код $MAPSS$ матрица такође може утицати, на неки специфичан начин, на формирање почетног вектора и допринети смањењу границе броја итерација. Последњи део дисертације бави се првом итерацијом код Наизменичног метода, односно питањем колико координата се након прве итерације поклапа на левој и десној страни посматраног система са раздвојеним променљивама. Ово питање се даље може проширити на број координата које се поклапају након друге, треће, четврте... итерације, и то не само за матрице конкретних димензија, већ и у општем случају, тј. за матрице димензија $n \times n$.

Поред тога, будућа истраживања могу обухватити могућност практичне примене описане класе матрица, пре свега кроз испитивање да ли специфична структура $MAPSS$ матрица може оптимизовати системе дискретних догађаја или решавање специфичних проблема рутирања где се појављују косо-симетрични трошкови.

Литература

[1] B. Addad, S. Amari, J. J. Lesage, *Networked conflicting timed event graphs representation in (Max,+) algebra*, Discrete Event Dynamic Systems, 22(4), (2012), 429-449.

[2] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, *Max-plus algebra*, Chapter 25 in L. Hogben, R. Brualdi, A. Greenbaum, R. Mathias (eds.), Handbook of Linear Algebra, Chapman & Hall/CRC, (2007).

[3] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, *Asymptotics of the Perron eigenvalue and eigenvector using max-algebra*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 327(11), (1998), 927-932.

[4] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games*, International Journal of Algebra and Computation, 22(1), (2012), 125001.

[5] H. Al-Bermanei, *Applications of Max-Plus Algebra to Scheduling*, Åbo Akademi University, (2021).

[6] A. Aminu, S. Olowo, I. Sulaiman, N. Abu Bakar, M. Mamat, *On Application of Max-Plus Algebra to Synchronized Discrete Event System*, Mathematics and Statistics, 9(2), (2021), 81-92.

[7] A. Aminu, P. Butkovič, *Comparison of methods for solving two-sided systems in max-algebra*, University of Birmingham preprint 2008/8, (2008).

[8] S. Andrilli, D. Hecker, *Elementary Linear Algebra*, Elsevier Science, Amsterdam, 2010.

[9] N. Bacaer, *Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations*, Comptes Rendus de l'Académie d'Agriculture de France, 89(3), (2003), 52.

[10] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, J. Quadrat, *Synchronization and Linearity*, Wiley, New York, 1992.

[11] R. B. Bapat, T. E. S. Raghavan, *Nonnegative Matrices and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] R. B. Bapat, D. Stanford, P. van den Driessche, *The eigenproblem in max algebra*, DMS-631-IR, University of Victoria, British Columbia, (1993).

[13] R. B. Bapat, *Permanents, max algebra and optimal assignment*, Linear Algebra and its Applications, 226-228, (1995), 73-86.

[14] V. Bartolucci, F. Gioiello, F. Di Nardo, D. Scaradozzi, *A Max-Plus Algebra-Based Platform for Modelling Coordinated Underwater Tasks of Fish Robots*, Proc. 33rd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), IEEE, (2025).

[15] R. El Bashir, J. Hurt, A. Jancarik, T. Kepka, *Simple Commutative Semirings*, Journal of Algebra, 236, (2001), 277-306.

[16] P. A. Binding, H. Volkmer, *A generalized eigenvalue problem in the max algebra*, Linear Algebra and its Applications, 422(2-3), (2007), 360-371.

[17] C. A. Brackley, D. Broomhead, M. C. Romano, M. Thiel, *A Max-Plus Model of Ribosome Dynamics During mRNA Translation*, Journal of Theoretical Biology, 303, (2011), 128-136.

[18] R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[19] R. E. Burkard, P. Butkovič, *Max algebra and the linear assignment problem*, Mathematical Programming Series B, 98(1), (2003), 415-429.

[20] R. E. Burkard, E. Cela, *Linear Assignment Problems and Extensions*, in D. Z. Du, P. M. Pardalos (eds.), Handbook of Combinatorial Optimization, Springer, Boston, MA, (1999).

[21] R. E. Burkard, M. Dell'Amico, S. Martello, *Assignment Problems*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[22] P. Butkovič, *Necessary solvability conditions of systems of linear extremal equations*, Discrete Applied Mathematics, 10(1), (1985), 19-26.

[23] P. Butkovič, *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, Linear Algebra and its Applications, 367, (2003), 313-335.

[24] P. Butkovič, *Solution of systems of linear extremal equations*, Ekon. Mat. Obzor, 17(4), (1981), 402-416.

[25] P. Butkovič, G. Hegedus, *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekon. Mat. Obzor, 20(2), (1984), 203-215.

[26] P. Butkovič, R. A. Cuninghame-Green, *On matrix powers in max-algebra*, Linear Algebra and its Applications, 421(2-3), (2007), 370-381.

[27] P. Butkovič, *Weakly and strongly stable max-plus matrices*, Proc. 21st Int. Symp. Math. Theory Networks Syst. (MTNS), Groningen, Netherlands, (2014), 173-175.

[28] P. Butkovič, *A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra*, Discrete Applied Mathematics, 154, (2006), 437-446.

[29] P. Butkovič, *Simple image set of (max; +) linear mappings*, Discrete Applied Mathematics, 105(1-3), (2000), 73-86.

[30] P. Butkovič, R. A. Cuninghame-Green, *An $O(n^2)$ algorithm for the maximum cycle mean of an $n \times n$ bivalent matrix*, Discrete Applied Mathematics, 35(2), (1992), 157-163.

[31] P. Butkovič, A. Aminu, *Max-linear programming*, IMA Journal of Management Mathematics, 20(3), (2009), 233-249.

[32] P. Butkovič, *A note on the parity assignment problem*, Optimization, 56(4), (2007), 419-424.

[33] P. Butkovič, *On tropical supereigenvectors*, Linear Algebra and its Applications, 498, (2016), 574-591.

[34] P. Butkovič, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, London, 2010.

[35] P. Butkovič, *Strong regularity of matrices - a survey of results*, Discrete Applied Mathematics, 48(1), (1994), 45-68.

[36] P. J. Cameron, *What can graphs and algebraic structures say to each other?*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 21(3), (2024), 1-6.

[37] B. A. Carre, *An algebra for network routing problems*, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 7(3), (1971), 273-294.

[38] I. Chajda, H. Langer, *Ideals and their complements in commutative semirings*, Soft Computing, 23(14), (2019), 5385-5392.

[39] G. Cohen, S. Gaubert, E. Mancinelli, J. P. Quadrat, E. Rofman, *On traffic light control of regular towns*, Mathematicae Notae, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi", Ano XLIII, (2005), 51-62.

[40] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat, M. Viot, *A linear system-theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30(3), (1985), 210-220.

[41] J. P. Comet, *Application of Max-plus algebra to biological sequencing comparisons*, Theoretical Computer Science, 293(1), (2003), 189-217.

[42] R. A. Cuninghame-Green, *Process synchronisation in a steelworks - a problem of feasibility*, Proc. Second Int. Conf. Oper. Res., (1960), 323-328.

[43] R. A. Cuninghame-Green, *Projections in minimax algebra*, Mathematical Programming, 10(1), (1976), 111-123.

[44] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax algebra and Applications*, Advances in Imaging and Electron Physics, 90, (1994), 1-121.

[45] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 166, Springer, Berlin, 1979.

[46] R. A. Cuninghame-Green, *Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour*, Operations Research Quarterly, 13(1), (1962), 95-100.

[47] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax algebra and applications*, Advances in Imaging and Electron Physics, Vol. 90, Academic Press, New York, (1995).

[48] R. A. Cuninghame-Green, P. Butkovič, *The equation* $A \otimes x = B \otimes y$ *over* $(\max, +)$, Theoretical Computer Science, 293(1), (2003), 3-12.

[49] N. Damljanović, M. Ćirić, J. Ignjatović, *Bisimulations for weighted automata over an additively idempotent semiring*, Theoretical Computer Science, 534, (2014), 86-100.

[50] A. Dasdan, R. K. Gupta, *Faster maximum and minimum mean cycle algorithms for system-performance analysis*, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 17(10), (1998), 889-899.

[51] B. De Schutter, T. van den Boom, J. Xu et al., *Analysis and control of max-plus linear discrete-event systems: An introduction*, Discrete Event Dynamic Systems, 30(1), (2020), 25-54.

[52] M. Develin, B. Sturmfels, *Tropical convexity*, Documenta Mathematica, 9, (2004), 1-27.

[53] J. Dutta, *Application of graph theory in social network*, International Journal of Creative Research Thoughts, 12(3), (2024), 211-218.

[54] A. Elumalai, *Graph theory applications in computer science and engineering*, Malaya Journal of Matematik, S(2), (2020), 232-238.

[55] G. M. Engel, H. Schneider, *Cyclic and diagonal products on a matrix*, Linear Algebra and its Applications, 7, (1973), 301-335.

[56] G. M. Engel, H. Schneider, *Diagonal similarity and equivalence for matrices over groups with 0*, Czechoslovak Mathematical Journal, 25(3), (1975), 389-403.

[57] E. Estrada, *Graph and Network Theory in Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2013.

[58] L. Euler, *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, (1736), 128-140.

[59] M. Fiedler, F. Hall, *Max algebraic complementary basic matrices*, Linear Algebra and its Applications, 457, (2014), 287-292.

[60] S. Gaubert, *Methods and Applications of* $(\max, +)$ *Linear Algebra*, INRIA Research Report RR3088, (1997).

[61] S. Gaubert, A. Niv, *Tropically totally positive matrices*, Journal of Algebra, 515, (2018), 511-544.

[62] S. Gaubert, M. Plus, *Methods and applications of max-plus linear algebra*, Proceedings of the 14th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'97), LNCS 1200, Springer, (1997), 261-282.

[63] S. Gaubert, P. Butkovič, *Sign-nonsingular matrices and matrices with unbalanced determinant in symmetrised semirings*, Linear Algebra and Its Applications, 301, (1999), 195-201.

[64] M. Gavalec, J. Plavka, *An* $O(n^2)$ *algorithm for maximum cycle mean of Monge matrices in max-algebra*, Discrete Applied Mathematics, 127(3), (2003), 651-656.

[65] B. Giffler, *Scheduling general production systems using schedule algebra*, Naval Research Logistics Quarterly, 10(1), (1963), 237-255.

[66] B. Giffler, *Schedule algebra: a progress report*, Naval Research Logistics Quarterly, 15(2), (1968), 255-280.

[67] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[68] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.

[69] M. Gondran, M. Minoux, *Valeurs propres et vecteur propres dans les dioides et leur interpretation en theorie des graphes*, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches Serie C Mathematiques et Informatiques, 2, (1977), 25-41.

[70] M. Gondran, M. Minoux, *Linear Algebra in Dioids: A Survey of Recent Results*, North-Holland Mathematics Studies 95, Amsterdam, 1984.

[71] D. V. Gowda, K. S. Shashidhara, M. Ramesha, S. B. Sridhara, S. B. Manoj Kumar, *Recent advances in graph theory and its applications*, Advances in Mathematics: Scientific Journal, 10(3), (2021), 1407-1412.

[72] G. Hartman, *Fundamentals of Matrix Algebra*, 3rd ed., CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011.

[73] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude, *Max-plus at work: Modelling and Analysis of Synchronized Systems. A course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, Princeton, 2006.

[74] D. Jones, *Matrix roots in the max-plus algebra*, Linear Algebra and its Applications, 631, (2021), 10-34.

[75] D. Jones, *On two-sided Max-Linear equations*, Discrete Applied Mathematics, 254, (2019), 146-160.

[76] R. M. Karp, *A characterization of the minimum cycle mean in a digraph*, Discrete Mathematics, 23(3), (1978), 309-311.

[77] P. Klemperer, *The Product-Mix Auction: a New Auction Design for Differentiated Goods*, Journal of the European Economic Association, 8(2-3), (2010), 526-536.

[78] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1936).

[79] N. Krivulin, S. Sergeev, *Minimizing maximum lateness in two-stage projects by tropical optimization*, Kybernetika, 58(5), (2022), 816-841.

[80] H. W. Kuhn, *The Hungarian method for the Assignment Problem*, Naval Research Logistics Quarterly, 2(1-2), (1955), 83-97.

[81] W. Kuich, A. Salomaa, *Semirings, automata and languages*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[82] P. Li, *On sparsity of approximate solutions to max-plus linear systems*, Kybernetika, 60(3), (2024), 412-425.

[83] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, G. B. Shpiz, *Idempotent functional analysis: An algebraic approach*, Mathematical Notes, 69(5-6), (2001), 696-729.

[84] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, S. N. Sergeev (eds.), *Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics*, Vol. I, Independent University of Moscow, (2007).

[85] A. Majeed, I. Rauf, *Graph Theory: A Comprehensive Survey about Graph Theory Applications in Computer Science and Social Networks*, Inventions, 5(1), (2020), 10.

[86] J. Matejić, M. Ćirić, J. Ignjatović, I. Micić, *Truncating and Shifting Weights for Max-Plus Automata*, Axioms, 15(1), (2026), 79.

[87] B. Molnar, A. Beleczki, A. Benczur, *Information Systems Modelling Based on Graph-Theoretic Background*, Journal of Information and Telecommunication, 2(1), (2018), 68-90.

[88] G. J. Olsder, C. Roos, *Cramer and Cayley-Hamilton in the max algebra*, Linear Algebra and its Applications, 101, (1988), 87-108.

[89] J. B. Orlin, R. K. Ahuja, *New scaling algorithms for the assignment and minimum mean cycle problems*, Mathematical Programming, 54(1-3), (1992), 41-56.

[90] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial optimization-algorithms and complexity*, Dover Publications, Mineola, 1998.

[91] G. A. Pavlopoulos, M. Secrier, C. N. Moschopoulos, T. G. Soldatos, S. Kossida, J. Aerts, R. Schneider, P. G. Bagos, *Using graph theory to analyze biological networks*, BioData Mining, 4(10), (2011).

[92] M. Plus, *Linear systems in* $(\max, +)$ *algebra*, Proceedings of 29th conference on decision and control, Honolulu, (1990).

[93] F. Riaz, K. M. Ali, *Applications of graph theory in computer science*, Proceedings of the Third International Conference on Computational Intelligence, Communication Systems and Networks, Bali, Indonesia, (2011), 142-145.

[94] S. Sergeev, *Alternating Method for homogeneous systems of equations over max-algebra*, School of Mathematics preprint, University of Birmingham, 18, (2009).

[95] S. Sergeev, *Extremals of the supereigenvector cone in max algebra: a combinatorial description*, Linear Algebra and its Applications, 479, (2015), 106-117.

[96] D. Serre, *Matrices: Theory and Applications*, Springer, New York, 2002.

[97] A. Stamenković, M. Ćirić, D. Djurdjanović, *Weakly linear systems for matrices over the max-plus quantale*, Discrete Event Dynamic Systems, 32(1), (2022), 1-25.

[98] J. Stanczyk, *Max-plus algebra as a tool to modelling and performance analysis of manufacturing systems*, Operations Research and Decisions, 28(3), (2018), 77-97.

[99] B. Stojčetović, *Max-algebraic systems of equations - from basic to higher level*, The Fourth International Conference on Education in Mathematics, Physics and Related Science, November 24-26, 2023, Skopje, North Macedonia.

[100] B. Stojčetović, *On the number of iterations in the Alternating method for integer matrices in max-algebra*, Kybernetika, 61(5), (2025), 595-609.

[101] B. Stojčetović, J. Ignjatović, M. Ćirić, *Pseudo skew-symmetric matrices over max-plus algebras*, Filomat, 39(28), (2025), 9807-9826.

[102] B. Stojčetović, *On the matrix $A \otimes A^*$ of size 2×2 in max-plus algebra*, Knowledge - International Journal, 70(3), (2025), 291-295.

[103] B. Stojčetović, *On a Procedure for Constructing $A \otimes A^*$ Matrices of a Size 3×3 in Max-Plus Algebra*, AppliedMath, 6(7), (2026), 114.

[104] D. Taghizadeh, M. Zahraei, A. Peperko, N. H. Aboutalebi, *On the numerical ranges of matrices in max algebra*, Banach Journal of Mathematical Analysis, 14(4), (2020), 1773-1792.

[105] H. Tavakolipour, F. Shakeri, *On the numerical range in tropical algebra*, Linear and Multilinear Algebra, 67(10), (2019), 1985-1998.

[106] H. S. Vandiver, *Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold*, Bulletin of the American Mathematical Society, 40(12), (1934), 914-920.

[107] N. N. Vorobyov, *Extremal algebra of positive matrices*, Elektron. Inf. verarb. Kybernet., 3(1), (1967), 39-71 (in Russian).

[108] M. Zahraei, *A correction of "On the numerical ranges of matrices in max algebra"*, Banach Journal of Mathematical Analysis, 14, (2023), arXiv:2312.01048.

[109] F. Zhang, *Problems in Linear Algebra and Matrix Theory*, World Scientific, Singapore, 2021.

[110] U. Zimmermann, *Linear and combinatorial optimisation in ordered algebraic structures*, Annals of Discrete Mathematics, Vol. 10, North Holland, Amsterdam, 1981.

[111] K. Zimmermann, *Extremalni algebra*, Vyzkumna publikace Ekonomicko-matematicke laboratore pri Ekonomickem ustave CSAV, 46, Praha, (1976) (in Czech).

Индекс појмова

чвор, 18
  изолован, 18
  крајњи, 18
  критичан, 22
  почетни, 18
циклус, 18
  дужине два, 83
  елементарни, 18
  критичан, 22
  нула циклус, 19
  средња вредност, 20

граф
  ацикличан, 18
  јако повезан, 18
  критичан, 22
  нула граф, 18
  тежински, 19

макс-алгебарски
  перманент, 24
  полином, 17
  потпростор, 17
  производ, 13
  степен, 16
  збир, 13
матрица, 12
  $MAPSS$, 58
  дефинитна, 21
  дијагонална, 15
  дијагонално доминантна, 25
  директних растојања, 19
  директно слична, 20
  дупла $\mathbb{R}$, 16
  еквивалентна, 20
  генерализована пермутациона, 15
  идемпотентна, 43
  иредуцибилна, 18
  јако дефинитна, 21
  јединична, 15
  конјугована, 26
  коначна, 16
  косо-симетрична, 52
  непозитивна, 21
  нормална, 22
  растућа, 21
  са $\mathbb{R}$-колонама/$\mathbb{R}$-врстама, 16
  симетрична, 52
  слаба $MAPSS$, 62
  слична, 20
  строго нормална, 22
метод
  алгебарски, 38
  комбинаторни, 36
  Мађарски, 24
  Наизменични, 44
мрежа, 8
  дистрибутивна, 9
  комплетна, 8
  модуларна, 9

полупрстен, 9
  цео, 10
  идемпотентан, 9
  комутативан, 9
  прост, 9

систем
  двострани, 42
  хомогени, 42
  једнострани, 36
  нехомогени, 42
  нерешив, 42
  са раздвојеним променљивама, 42

вектор, 12
  ε-вектор, 13
  колона, 12
  почетни, 92
  сопствени, 22
  субсопствени, 23
  врста, 12

Биографија

Бојана С. Стојчетовић рођена је 27.01.1996. године у Приштини. Живи у месту Доња Битиња код Штрпца на Косову и Метохији. Основну школу завршила је у родном месту, а Гимназију природно-математичког смера средње школе „Јован Цвијић“ у Штрпцу као ученик генерације. Основне академске студије Математике (2014–2018) завршила је на Природно-математичком факултету Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици са просечном оценом 9.45. На истом факултету завршила је мастер академске студије (2018–2020) са просечном оценом 10.00, стекавши звање Мастер математичар. Школске 2020/2021 уписује докторске академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу на Департману за математику.

У радном односу на Природно-математичком факултету у Косовској Митровици је од 2019. године, најпре као сарадник у настави, а од 2021. године у звању асистента на Одсеку за математику. Учествовала је и излагала на домаћим и међународним скуповима, била члан интерних пројеката. Члан је Друштва математичара Србије и коаутор једног уџбеника.

Библиографија радова аутора

Радови у врхунским и истакнутим међународним часописима (M20):

1. **B. Stojčetović**, J. Ignjatović, M. Ćirić, *Pseudo skew-symmetric matrices over max-plus algebras*, Filomat, 39(28), (2025), 9807–9826. (M21)
2. **B. Stojčetović**, *On the number of iterations in the Alternating method for integer matrices in max-algebra*, Kybernetika, 61(5), (2025), 595–609. (M22)
3. **B. Stojčetović**, *On a Procedure for Constructing* $A \otimes A^*$ *Matrices of a Size* 3×3 *in Max-Plus Algebra*, AppliedMath, 6(7), (2026), 114. (M22)

Радови саопштени на међународним и домаћим научним скуповима (M30):

4. **B. Stojčetović**, *On the matrix* $A \otimes A^*$ *of size* 2×2 *in max-plus algebra*, Knowledge - International Journal, 70(3), (2025), 291–295. Presented at the 49th International scientific conference *The teacher of the future*, 30.05.–01.06.2025, Ohrid, Macedonia. (M33)
5. **B. Stojčetović**, *Max-algebraic systems of equations - from basic to higher level*, The Fourth International Conference on Education in Mathematics, Physics and Related Science, 24.11.–26.11.2023, Skopje, Macedonia. (M33)
6. D. Valjarević, **B. Stojčetović**, M. Petrović, N. Zlatanović, M. Ivanović, *Pupil's perspective of distance learning during the COVID-19 pandemic in primary school*, III International Conference on Education in Mathematics, Physics and Related Science, 06.05.–08.05.2022, Skopje, Macedonia. (M33)
7. D. Valjarević, K. Tomović, **B. Stojčetović**, A. Denić, *The use of mobile phones from the aspects of primary and high school pupils*, The Fourth International Conference on Education in Mathematics, Physics and Related Science, 24.11.–26.11.2023, Skopje, Macedonia. (M33)
8. M. Petrović, D. Valjarević, **B. Stojčetović**, *Applications of accelerated optimization models in solving the water pollution problem*, Knowledge - International Journal, 55(3), (2022), 419–422. Presented at the 39th International scientific conference *Knowledge in practice*, 16.12.–18.12.2022, Bansko, Bulgaria. (M33)
9. D. Valjarević, **B. Stojčetović**, M. Lekić, M. Petrović, *Motivisanost uchenika osnovne shkole u nastavi matematike*, Kongres mladih matematichara KMMNS2, 29.09.–01.10.2022, Novi Sad, Srbija. (M34)

Уџбеници и помоћна литература:

10. Ј. Вујаковић, **Б. Стојчетовић**, *Функционална анализа: теорија и задаци*, Природно-математички факултет, Универзитет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, 2021.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ПСЕУДО КОСО-СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ НАД МАКС-ПЛУС АЛГЕБРАМА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 22.10.2026.

Потпис аутора дисертације:

Бојана С. Стојчетовић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ПСЕУДО КОСО-СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ НАД МАКС-ПЛУС АЛГЕБРАМА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 22.10.2026 .

Потпис аутора дисертације:

Бојана С. Стојчетовић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ПСЕУДО КОСО-СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ НАД МАКС-ПЛУС АЛГЕБРАМА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (**CC BY**)
2. Ауторство – некомерцијално (**CC BY-NC**)
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (**CC BY-NC-SA**)
5. Ауторство – без прераде (**CC BY-ND**)
6. Ауторство – делити под истим условима (**CC BY-SA**)

У Нишу, 22.10.2026.

Потпис аутора дисертације:

Бојана С. Стојчетовић