UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

05.09.2022.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE SA REŠENJIMA

1. Odrediti realni parametar m tako da je zbir kvadrata nula polinoma $p(x) = x^2 - (m+1)x + m$ jednak 10.

   Rešenje: Označimo sa x_1 i x_2 nule polinoma $p(x) = x^2 - (m+1)x + m$. Na osnovu Vijetovih formula imamo da važi:

   $$x_1 + x_2 = m + 1, \;\; x_1 x_2 = m.$$

   Kako je
   $$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1,$$
   sledi $m^2 + 1 = 10$, tj. $m = \pm 3$.

2. Rešiti jednačinu
   $$\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7.$$

   Rešenje: Najpre treba odrediti oblast definisanosti jednačine. Kako potkorena veličina mora biti nenegativna, važi $x + 5 \geq 0$ i $20 - x \geq 0$, tj. $x \in [-5, 20]$.

   Kvadriranjem jednačine dobijamo

   $$x + 5 + 20 - x + 2\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{20-x} = 49$$

   tj.
   $$\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{20-x} = 12.$$

   Ponovnim kvadriranjem poslednje jednačine dobijamo $(x+5)(20-x) = 144$, tj. kvadratnu jednačinu $x^2 - 15x + 44 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 4, \; x_2 = 11$. Kako se oba ova rešenja nalaze u oblasti definisanosti polazne jednačine, ona su i njena rešenja.

3. Dokazati sledeću jednakost metodom matematičke indukcije

   $$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

   Rešenje: Označimo sa $P(n)$ tvrđenje koje je potrebno dokazati, a koje se može sažetije zapisati kao
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

   Baza indukcije: za $n = 1$ imamo da važi

   $$\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!},$$

   što znači da je tvrđenje $P(1)$ istinito.

Pretpostavimo sada da je tvrđenje $P(n)$ istinito za prirodan broj n, i pokažimo da je onda i $P(n+1)$ istinito:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}\\ &= 1+\frac{n+1}{(n+2)!}-\frac{n+2}{(n+2)(n+1)!}\\ &= 1+\frac{n+1}{(n+2)!}-\frac{n+2}{(n+2)!} = 1-\frac{1}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

Dakle, $P(n)$ važi za sve prirodne brojeve n.

4. Dat je kompleksni broj

$$z=\frac{3-2i}{2+i}+\frac{2-i}{3+i}.$$

Odrediti $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$.

Rešenje: Kako je

$$\begin{aligned}z=\frac{3-2i}{2+i}+\frac{2-i}{3+i} &= \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}+\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\\ &= \frac{4-7i}{5}+\frac{5-5i}{10}=\frac{13-19i}{10},\end{aligned}$$

sledi da je $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{13}{10}$ and $\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{19}{10}$

5. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $A(-4,5)$ i $B(2,1)$, kao i površinu trougla između te prave i koordinatnih osa.

Rešenje: Jednačina prave kroz dve date tačke (x_1,y_1) i (x_2,y_2) data je formulom

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Dakle, jednačina prave kroz tačke A i B ima oblik

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}.$$

Tačke preseka te prave sa koordinatnim osama su $S(0,\frac{7}{3})$ i $T(\frac{7}{2},0)$. Sada je $|OS|=\dfrac{7}{3}$ i $|OT|=\dfrac{7}{2}$, te je površina trougla OST, $P=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{7}{2}=\dfrac{49}{12}$.

6. Za koje realne vrednosti m i n je ostatak pri deljenju polinoma

$$P(x)=x^4-3x^3+x^2+m\,x+n$$

polinomom $F(x)=x^2-2x+2$ jednak $R(x)=x$.

Rešenje: Direktnim deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $F(x)$, dobijamo da je $m=5$, $n=-6$.

7. Rešiti nejednačinu

$$\log_x(x(2x^2-7x+3))<3.$$

Rešenje: Nejednačina je definisana za ono x koje zadovoljava sledeća tri uslova:

$$x>0,\ x\neq 1,\ x(2x^2-7x+3)>0,$$

tj.

$$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty).$$

Nejedanačina je ekvivalentna sa nejednačinom

$$\log_x(2x^2-7x+3)<2.$$

Kako osnova ovog logaritma može biti i manja i veća od 1 razmatramo dva slučaja. U prvom slučaju, kada je $x\in(0,\frac{1}{2})$, dobijmo

$$\begin{aligned}x^2-7x+3>0 &\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{37}}{2},+\infty\right)\\ &\overset{x\in(0,\frac{1}{2})}{\Leftrightarrow} x\in\left(0,\frac{7-\sqrt{37}}{2}\right).\end{aligned}$$

U drugom slučaju, kada je $x\in(3,+\infty)$, imamo

$$\begin{aligned}x^2-7x+3<0 &\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7-\sqrt{37}}{2},\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right)\\ &\overset{x\in(3,+\infty)}{\Leftrightarrow} x\in\left(3,\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right).\end{aligned}$$

Konačno, rešenje polazne nejednačine je $x\in\left(0,\frac{7-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(3,\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right)$.

8. Rešiti jednačinu

$$2\sin x+\sin 7x-\sin 5x=0.$$

Rešenje: Jednačina je definisana za $x\in\mathbb{R}$. Primenom adicione formule dobijamo:

$$\begin{aligned}2\sin x+\sin 7x-\sin 5x=0 &\Leftrightarrow 2\sin x+2\cos 6x\sin x=0\\ &\Leftrightarrow \sin x(1+\cos 6x)=0\\ &\Leftrightarrow \sin x=0\vee\cos 6x=-1\\ &\Leftrightarrow x=k\pi\vee 6x=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

9. Osnovna ivica pravilne šestostrane piramide jednaka je a. Izračunati zapreminu piramide ako je poznato da je njena površina omotača sedam puta veća od površine osnove.

Rešenje: Označimo sa H visinu, h apotemu, r_u poluprečnik upsane kružnice osnove, M površinu omotača, B površinu baze i V zapreminu date piramide. Iz uslova zadatka imamo da je $M=7B$, odnosno

$$3ah = 7 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Odavde dobijamo da je $h = \frac{7\sqrt{3}a}{2}$.

Kako je $h^2 = H^2 + r_u^2$, dobijamo da je

$$H = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 6a.$$

Konačno, tražena zapremina je $V = \frac{BH}{3} = 3\sqrt{3}a^3$.

10. Tri broja čiji je zbir 26 obrazuju geometrijski niz. Ako se tim brojevima doda redom 1, 6, 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Naći te brojeve.

Rešenje: Neka brojevi a, aq i aq^2 obrazuju geometrijski niz. Tada brojevi $a+1$, $aq+6$ i aq^2+3 obrazuju aritmetički niz. Dakle dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 &= 26, \\ aq + 6 - (a+1) &= aq^2 + 3 - (aq+6), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a(q-1)^2 + 3aq &= 26, \\ a(q-1)^2 &= 8. \end{aligned}$$

Rešenja ovog sistema jednačina su $a_1 = 18$, $q_1 = \frac{1}{3}$ i $a_2 = 2$, $q_2 = 3$. U prvom slučaju dobijamo geometrijski niz 18, 6, 2, a u drugom geometrijski niz 2, 6, 18.