Marko D. Petković

ALGORITMI NUMERIČKE ANALIZE

Serija: udžbenici

Univerzitet u Nišu, Prirodno-Matematički fakultet
Niš, 2013

Izdavač:
Prirodno-Matematički fakultet u Nišu
Višegradska 33, 18000 Niš

Recenzenti:
prof. dr Nebojša Stojković, red. prof. Ekonomskog fakulteta u Nišu
prof. dr Predrag Rajković, red. prof. Mašinskog fakulteta u Nišu
prof. dr Predrag Stanimirović, red. prof. PMF-a u Nišu

Serija: Udžbenici

Odlukom Nastavno-Naučnog veća Prirodno-Matematičkog fakulteta u Nišu broj 219/1-01 od 27.02.2013. godine, rukopis je odobren za štampu kao univerzitetski udžbenik.

Obrada na računaru: autor

Dizajn korica: Aleksandar Milenković

Štampa: Unigraf X-Copy

Tiraž: 100 primeraka

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.61/.65(075.8)

ПЕТКОВИЋ, Марко, 1984-
Algoritmi numeričke analize / Marko Petković. - Niš : Prirodno-matematički fakultet, 2013 (Niš : Unigraf X-Copy). - 288 str. : graf. prikazi, tabele ; 24 cm. - (Serija Udžbenici / Prirodno-matematički fakultet, Niš)

Tiraž 100. - Napomene uz tekst. - Bibliografija: str. 285-288.

ISBN 978-86-6275-015-0
а) Нумеричка анализа

COBISS.SR-ID 201584396

Predgovor

Numerička matematika (analiza) predstavlja osnovni aparat koji se koristi za analizu matematičkih modela u svim prirodnim i tehničkim naukama, a u poslednje vreme i u ekonomiji, sociologiji, itd. Na osnovu modela vrši se proračun odgovarajućih veličina koje opisuju dati problem, na osnovu kog se kasnije izvode zaključci. Da bismo konstruisali model, potrebno je da poznajemo fundamentalne zakone koje odgovarajuće veličine moraju da zadovolje (fizički zakoni, zakoni na berzi, itd.). Pomoću ovih zakona definišemo matematički problem koji zatim rešavamo primenom odgovarajućeg matematičkog aparata. Dobijene jednačine, diferencijalne jednačine, itd. najčešće nije moguće egzaktno rešiti. U tim slučajevima, rešenje se određuje približno, pri čemu se traži da je odstupanje manje od unapred zadatog "malog" broja ϵ. Upravo je to zadatak numeričke matematike.

Knjiga *Algoritmi numeričke analize* prvenstveno je namenjena studentima osnovnih i master studija prirodno-matematičkih i tehničkih nauka, kao udžbenik za predmete iz numeričke matematike. Knjiga može biti od koristi i studentima doktorskih studija kao i naučnicima i inženjerima koji razvijaju odnosno koriste numeričke metode u praksi.

Ova knjiga predstavlja algoritamski pogled na oblast numeričke matematike. Za većinu metoda data je i precizna algoritamska formulacija u obliku pseudokoda. Na osnovu ovih pseudokodova, jednostavno se formira odgovarajuća implementacija metoda (algoritma) u bilo kom programskom jeziku. Pored algoritamske formulacije, data je i analiza vremenske i prostorne složenosti algoritma. Ove dve veličine daju uvid u brzinu rasta vremena izvršenja kao i memorijskih potreba odgovarajuće implementacije.

Uz svaki metod izložena je teorija koja je potrebna da bi se dokazala korektnost navedenog metoda. Teorijski rezultati formulisani su (i dokazani) u obliku teorema, lema i posledica, i ilustrovani kroz niz primera koji pomažu čitaocu da bolje razume izloženu materiju.

Celokupna materija sadržana u ovoj knjizi, podeljena je u osam glava. Svaka glava je podeljena na nekoliko manjih celina - odeljaka, koji su podeljeni na pododeljke. Za razumevanje i uspešno praćenje materije izložene u ovoj knjizi, poželjno je poznavanje gradiva standardnih kurseva realne analize, linearne algebre i osnovne teorije algoritama. Prva glava sadrži osnovne teoreme i definicije iz ovih oblasti, koje mogu poslužiti kao podsetnik.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svima koji su mi pomogli pri radu na ovoj knjizi. Primedbe i sugestije koje su dali recenzenti prof. dr Nebojša Stojković, prof. dr Predrag Rajković i prof. dr Predrag Stanimirović doprinele su da tekst bude precizniji i razumljiviji, zbog čega im se posebno zahvaljujem. Zahvalnost dugujem i studentima Prirodno-Matematičkog fakulteta u Nišu, čija su pitanja postavljana tokom predavanja i na konsultacijama, kao i odgovori na ispitu, značajno doprineli da delovi teksta budu jasniji i pristupačniji čitaocu.

Kao osnova za pisanje ove knjige, poslužile su sada već klasične knjige *Numerička analiza I, II i III* akademika prof. dr Gradimira V. Milovanovića, kao i knjige prof. dr Miodraga S. Petkovića i prof. dr Ljiljane D. Petković. Ovom prilikom autor posebno skreće pažnju i na knjigu *Numerical recipes - The art of scientific computing* (autori W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling i B. Flannery), u kojoj je dat algoritamski osvrt na gotovo sve, za praktične primene važne numeričke metode.

Kako je ovo prvo izdanje, verovatno postoje greške i propusti. Zato se autor unapred zahvaljuje svim čitaocima koji mu na iste ukažu. Za sve komentare, primedbe, sugestije, itd. koje su više nego dobrodošle, čitaoci mogu kontaktirati autora putem e-maila na adresu **dexterofnis@gmail.com**.

U Nišu, Autor
April 2013.

Sadržaj

Spisak algoritama

6.3 Aproksimativna svojstva interpolacionih polinoma

Do sada smo razmatrali problem nalaženja jedinstvenog polinoma $p_n(x)$ stepena manjeg ili jednakog n, koji zadovoljava $p_n(x_k) = y_k$, gde su x_k i y_k dati realni ili kompleksni brojevi a $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. U ovom odeljku razmotrićemo aproksimativna svojsva interpolacionog polinoma $p_n(x)$, tj. izvešćemo izraze za procenu greške aproksimacije funkcije $f(x)$ odgovarajućim inteprolacionim polinomom $p_n(x)$.

Teorema 6.3.1. *Neka je $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}[a, b]$ i neka je $p_n(x)$ intepolacioni polinom za funkciju $f(x)$ i čvorove interpolacije $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Tada za svako $x \in [a, b]$ postoji tačka $\xi \in [a, b]$ takva da je*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \qquad w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Dokaz. Neka je $\bar{x} \in [a, b]$ proizvoljna tačka takva da je $\bar{x} \ne x_i$ za svako $i = 0, 1, \ldots, n$ i neka je

$$K = \frac{f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})}{w(\bar{x})}. \tag{6.31}$$

Funkcija $F(x) = f(x) - p_n(x) - Kw(x)$ ima $n+2$ različite nule na segmentu $[a, b]$ (to su $\bar{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$). Na osnovu Rolleove teoreme sledi da se između svake dve uzastopne nule funkcije $F(x)$ nalazi jedna nula funkcije $F'(x)$, odnosno da $F'(x)$ ima bar $(n+1)$-nu različitu nulu. Daljom primenom Rolleove teoreme i prethodnog razmatranja dobijamo da $F^{(k)}(x)$ ima bar $n + 2 - k$ različitih nula, pa $F^{(n+1)}(x)$ ima bar jednu nulu $\xi \in [a, b]$. Tada je

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Iz (6.31) sledi

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = Kw(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\bar{x}),$$

čime je teorema dokazana. $\square$

Posmatrajmo sada slučaj ekvidistantnih čvorova $x_k = x_0 + kh$, gde je $h = x_1 - x_0$. Pre nego što izvedemo odgovarajuću posledicu Teoreme 6.3.1.

Lema 6.3.2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $H_n(t) = |t(t-1)\cdots(t-n)|$. *Maksimum funkcije* $H_n(t)$ *za* $t \in [0, n]$ *dostiže na segmentu* $[0, 1]$, *tj. važi*

$$\max_{t\in[0,n]} H_n(t) = \max_{t\in[0,1]} H_n(t).$$

Dokaz. Neka je

$$H_k(t) = |t(t-1)\cdots(t-k)|, \qquad R_k(t) = |(t-k)(t-k-1)\cdots(t-n)|$$

za $k = 0, 1, \ldots, n$. Tada je $H_n(t) = H_{2k}(t)R_{2k+1}(t)$. Primetimo dalje da važi $H_n(t) = H_n(n-t)$ za svako $t \in [0, n]$ kao i $H_k(t) = H_k(k-t)$ za svako $t \in [0, k]$.

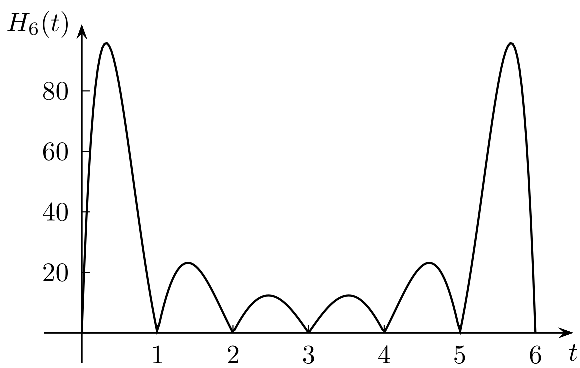
Neka je $t^* \in (0, n/2) \setminus \mathbb{N}_0$ tačka u kojoj se dostiže maksimalna vrednost funkcije $H_n(t)$ i neka je $k = \lfloor t^* \rfloor$. Očigledno je $t^* \in (k, k+1)$. Pretpostavimo suprotno, da se maksimum ne dostiže na $(0, 1)$, tj. da je $k > 0$.

Ideja je da pronađemo tačku t' na intervalu $(k-1, k)$ za koju je $H_n(t') > H_n(t^*)$. Neka je $t' = 2k - t^* \in (k-1, k)$. Već smo pokazali da važi $H_{2k}(t^*) = H_{2k}(t')$. Međutim, funkcija $R_{2k+1}(t)$ je očigledno opadajuća za $t < 2k+1$ pa važi $R_{2k+1}(t') > R_{2k+1}(t^*)$ što implicira

$$H_n(t') = H_{2k}(t')R_{2k+1}(t') < H_{2k}(t^*)R_{2k+1}(t^*) = H_n(t^*).$$

Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je t^* maksimalna vrednost funkcije $H_n(t)$. $\square$

Na slici 6.2 dat je grafik funkcije $H_n(t)$ iz Leme 6.3.2 za $n = 6$. Vidimo da se maksimum zaista dostiže za $t \in (0, 1)$ (i to za $t = 0.321962$).



Slika 6.2: Grafik funkcije $H_6(t) = |t(t-1)\cdots(t-6)|$.

Sada možemo da dokažemo odgovarajuću posledicu Teoreme 6.3.1 koja daje procenu greške kada su čvorovi ekvidistantni.

Posledica 6.3.3. *Ako važe uslovi Teoreme 6.3.1 i ako su čvorovi ekvidistantni, tada važi sledeća nejednakost*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|h|^{n+1}M}{4(n+1)}, \qquad M = \max_{x\in[x_0,x_0+nh]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Dokaz. Uvedimo smenu $t = (x - x_0)/h$. Na osnovu Teoreme 6.3.1 je

$$|f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|t(t-1)\cdots(t-n)||h|^{n+1}.$$

Primenom Leme 6.3.2 dobijamo

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &= \frac{|h|^{n+1}|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}H_n(t) \leq \frac{|h|^{n+1}M}{(n+1)!} \max_{q\in[0,n]} H_n(q) \\
&= \frac{|h|^{n+1}M}{(n+1)!} \max_{q\in[0,1]} H_n(q) \\
&\leq \frac{|h|^{n+1}M}{(n+1)!} \max_{q\in[0,1]} |q(q-1)| \max_{q\in[0,1]} |(q-2)(q-3)\cdots(q-n)| \\
&\leq \frac{|h|^{n+1}M}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{4} \cdot n!
\end{aligned}$$

Ovim je posledica dokazana. □

Primetimo da se u terminima podeljenih razlika, greška interpolacije može zapisati u obliku

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]. \qquad (6.32)$$

Da bismo ovo dokazali, posmatrajmo interpolacioni polinom $\tilde{p}_{n+1}(x)$ koji se dobija dodavanjem čvora $\bar{x}$ ($\bar{x} \neq x_i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$) čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tada je

$$f(\bar{x}) = \tilde{p}_{n+1}(\bar{x}) = p_n(\bar{x}) + (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\cdots(\bar{x} - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

odakle direktno dobijamo

$$f(\bar{x}) - p_{n+1}(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\cdots(\bar{x} - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}].$$

U slučaju Hermiteovog interpolacionog polinoma $h_n(x)$ važi sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 6.3.4. *Neka je $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}[a,b]$ i neka je $h_n(x)$ Hermiteov intepolacioni polinom za funkciju $f(x)$ i čvorove interpolacije $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq b$ i date vrednosti $f(x_i), f'(x_i), \ldots, f^{(n_i-1)}(x_i)$. Tada za svako $x \in [a,b]$ postoji tačka $\xi \in [a,b]$ takva da je*

$$f(x) - h_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_m)^{n_m}.$$

Na kraju ovog pododeljka, razmotrićemo na jednom primeru šta se dešava sa greškom interpolacije kada se broj interpolacionih čvorova povećava. Iz Teoreme 6.3.1 vidimo da greška interpolacije ne mora da obavezno da se smanjuje, s obzirom da u izrazu figuriše vrednost $f^{(n+1)}(\xi)$ za koju nemamo garanciju da će opadati dovoljnom brzinom da anulira proizvod članova $x - x_i$ (čak nemamo garanciju ni da će uopšte opadati).

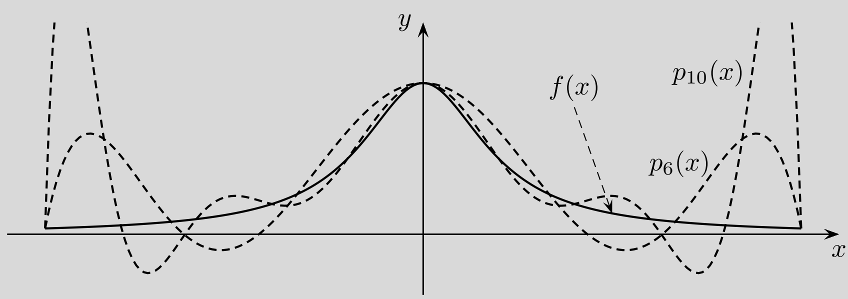
Primer 6.3.1. (Rungeov primer) Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

za $x \in [-5,5]$. Neka je $p_n(x)$ interpolacioni polinom funkcije $f(x)$ za ekvidistantne čvorove $x_k^{(n)} = -5 + \frac{10}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$. Može se pokazati da važi sledeći, na prvi pogled totalno iznenađujući rezultat

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{-5\leq x\leq 5} |f(x) - p_n(x)| = +\infty.$$

Dakle, ne samo što se sa povećanjem reda n aproksimacija ne poboljšava, nego postaje sve gora i gora. Na slici 6.3 dat je grafik funkcije $f(x)$ kao i grafici nekoliko interpolacionih polinoma $p_n(x)$.

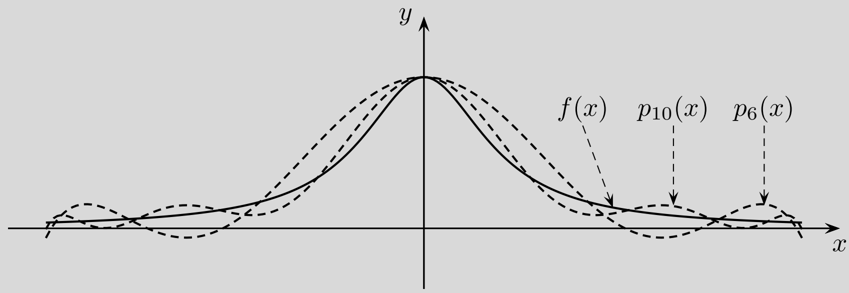


Slika 6.3: Grafik funkcije $f(x) = 1/(1+x^2)$ i njenih interpolacionih polinoma $p_6(x)$ i $p_{10}(x)$ za ekvidistantne čvorove u intervalu $[-5,5]$.

Ovaj primer nam pokazuje da ekvidistantni izbor čvorova može da bude veoma loš u određenim situacijama. Ujedno je i potvrđena pretpostavka da interpolacioni polinomi nemaju uvek dobra aproksimativna svojstva. Međutim, ukoliko samo promenimo čvorove i umesto ekvidistantnih tačaka odaberemo sledeće:

$$x_k^{(n)} = 5\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

vidimo da rezultati postaju mnogo bolji (slika 6.4).



Slika 6.4: Grafik funkcije $f(x)$ i njenih interpolacionih polinoma $p_6(x)$ i $p_{10}(x)$ kada su čvorovi nule odgovarajućeg Čebiševljevog polinoma, skalirane na segment $[-5, 5]$.

Ovi čvorovi predstavljaju nule Čebiševljevog polinoma

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x)$$

koje su skalirane na segment $[-5, 5]$. U sledećem odeljku pokazaćemo da svaku neprekidnu funkciju na segmentu možemo proizvoljno dobro aproksimirati polinomom.

6.4 Uniformna aproksimacija funkcije polinomom

U prethodnom odeljku videli smo da interpolacioni polinomi nemaju uvek dobre aproksimativne osobine (Rungeov primer). Ova činjenica nas navodi da postavimo sledeće pitanje: Da li je uopšte moguće proizvoljno "dobro" aproksimirati neku funkciju $f(x)$ polinomom? Pre nego što damo (pozitivan) odgovor na prethodno pitanje, definisaćemo pojam "dobre" aproksimacije i uvešćemo definiciju modula neprekidnosti funkcije.

Definicija 6.4.1. *Niz polinoma $p_n(x)$ uniformno (ravnomerno) aproksimira funkciju $f(x)$ na segmentu $[a,b]$ ako važi*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-p_n(x)| = 0.$$

Drugim rečima, potrebno je da maksimalno odstupanje funkcije $f(x)$ od polinoma $p_n(x)$ teži nuli kada n teži beskonačnosti.

Definicija 6.4.2. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava Lipschitzov uslov na $[a,b]$ ako postoji konstanta $L > 0$ takva da za svako $x, y \in [a,b]$ važi*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

Podsetimo se da smo ovaj pojam već definisali u (opštijem) slučaju funkcije definisane na metričkom prostoru. Sada ćemo uvesti pojam *modula neprekidnosti* funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y\in D}} |f(x)-f(y)|.$$

Funkcija f je *uniformno* (*ravnomerno*) neprekidna na (nepraznom) skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, ako važi

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_\epsilon > 0)(\forall x, y \in D)(|x-y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon).$$

Odavde direktno sledi da je

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0.$$

Trivijalno važi da je svaka ravnomerno neprekidna funkcija na nekom skupu D, ujedno i neprekidna. Međutim, ukoliko je $D = [a,b]$ onda važi i obrnuto, da je svaka neprekidna funkcija $f \in \mathcal{C}[a,b]$ [2] ujedno i uniformno neprekidna. Odgovarajuće tvrđenje **ne važi** za bilo koji skup D (npr. za interval $D = (a,b)$).

Da bismo dokazali glavnu teoremu ovog odeljka, potrebno je definisati klasu polinoma poznatu pod nazivom *Bernsteinovi polinomi.*

[2] Tvrđenje može da se uopšti na funkcije više promenljivih i pritom se kao domen funkcije uzima *kompaktan* skup $K \subset \mathbb{R}^n$.

Definicija 6.4.3. *Polinomi*

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \tag{6.33}$$

gde je $n \in \mathbb{N}$ *a* $k = 0, 1, \ldots, n$, *nazivaju se Bernsteinovi bazični polinomi. Ako je* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funkcija, onda se polinom*

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x) \tag{6.34}$$

naziva Bernsteinov polinom n*-tog reda za funkciju* $f(x)$.

Iako su definisani u odnosu na funkciju $f(x)$, Bernsteinovi polinomi ne predstavljaju interpolacione polinome n-tog funkcije $f(x)$.

Lema 6.4.1. *Bernsteinovi polinomi za funkcije* $1, x, x^2$ *jednaki su redom:*

$$\begin{aligned} B_n(1;x) &= 1, \\ B_n(x;x) &= x, \\ B_n(x^2;x) &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned}$$

Dokaz. Direktnom proverom dobijamo da tvrđenje leme važi za $n = 1, 2$. Zato ćemo pretpostaviti da je $n \geq 3$.

Prva jednakost sledi direktno iz definicije Bernsteinovih polinoma (izraz (6.34)) i binomne teoreme

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Takođe, na osnovu definicionog izraza dobijamo

$$\begin{aligned} B_n(x;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x. \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu, koristili smo da je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} \tag{6.35}$$

za svako $n \geq 2$ i $k = 1, 2, \ldots, n$.

Da bismo dokazali treću jednakost, najpre definicioni izraz za $B_n(x^2; x)$ razlažemo na dve sume na sledeći način:

$$\begin{aligned}
B_n(x^2; x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Promenom granice sumiranja i korišćenjem izraza (6.35) dobijamo da je prva suma jednaka

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= \frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k} = \frac{n-1}{n}x^2.
\end{aligned}$$

Na sličan način računamo i drugu sumu

$$S_2 = \frac{1}{n}x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = \frac{1}{n}x.$$

Zamenom S_1 i S_2 dobijamo traženi izraz za $B_n(x^2; x)$. $\square$

Sledi glavna teorema ovog odeljka, čija direktna posledica daje pozitivan odgovor na pitanje da li za svaku funkciju $f \in \mathcal{C}[a, b]$ postoji niz polinoma koji uniformno aproksimira tu funkciju.

Teorema 6.4.2. (Bernstein) *Neka je $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ proizvoljna funkcija. Tada je*

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{9}{4}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Dokaz. Neka je $x_k = k/n$ za $k = 0, 1, \ldots, n$ i neka je $\delta > 0$ proizvoljan broj. Na osnovu Leme 6.4.1 sledi:

$$\begin{aligned} f(x) - B_n(f; x) &= f(x) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k) b_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(x_k)) b_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Razlikovaćemo dva slučaja. Neka je $|x_k - x| \le \delta$. Tada je $f(x) - f(x_k) \le \omega(f; \delta)$ pa važi

$$\begin{aligned} S_1 = \left| \sum_{|x_k - x| \le \delta} (f(x) - f(x_k)) b_{n,k}(x) \right| &\le \sum_{|x_k - x| \le \delta} \omega(f; \delta) b_{n,k}(x) \\ &\le \omega(f; \delta) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = \omega(f; \delta). \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $|x_k - x| > \delta$. Neka je $p = \lfloor (x - x_k)/\delta \rfloor$. Neka su tačke $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ekvidistantno raspoređene između tačaka x i x_k, i neka je c_1 najbliža tački x a c_p tački x_k. Razlika između susedne dve tačke jednaka je $|c_{i+1} - c_i| = (x - x_k)/(p + 1) < \delta$. Možemo da procenimo razliku $|f(x) - f(x_k)|$ na sledeći način

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_k)| &\le |f(x) - f(c_1)| + \sum_{i=1}^{p-1} |f(c_{i+1}) - f(c_i)| + |f(c_p) - f(x_k)| \\ &\le (p + 1)\omega(f; \delta) \le \left(\frac{|x_k - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta). \end{aligned}$$

Odgovarajuća suma je jednaka

$$\begin{aligned} S_2 &= \left| \sum_{|x_k - x| > \delta} (f(x) - f(x_k)) b_{n,k}(x) \right| \\ &\le \omega(f; \delta) \sum_{|x_k - x| > \delta} \left(\frac{|x_k - x|}{\delta} + 1 \right) b_{n,k}(x) \\ &\le \omega(f; \delta) \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{|x_k - x|}{\delta} b_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \right] \\ &\le \omega(f; \delta) \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(x_k - x)^2}{\delta^2} b_{n,k}(x) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da je $|x_k - x|/\delta > 1$, pa je

$$(x_k - x)^2/\delta^2 > |x_k - x|/\delta > 1.$$

Korišćenjem Leme 6.4.1 dobijamo sledeću ocenu

$$\sum_{k=0}^{n}(x_k - x)^2 b_{n,k}(x) = x^2 - 2x \cdot x + \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Zamenom dobijamo da je

$$S_2 \leq \omega(f;\delta)\left[\frac{1}{4n\delta^2} + 1\right]$$

odnosno

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq S_1 + S_2 \leq \omega(f;\delta)\left[\frac{1}{4n\delta^2} + 2\right].$$

Ako stavimo $\delta = 1/\sqrt{n}$, dobijamo tvrđenje teoreme. □

Bernsteinova teorema ostaje u važnosti i ako je $f \in \mathcal{C}[a,b]$, samo što umesto $B_n(f;x)$ uzimamo polinom

$$B_n(f;a,b;x) = B_n(\tilde{f}; a + (b-a)x), \qquad \tilde{f}(x) = f(a + (b-a)x).$$

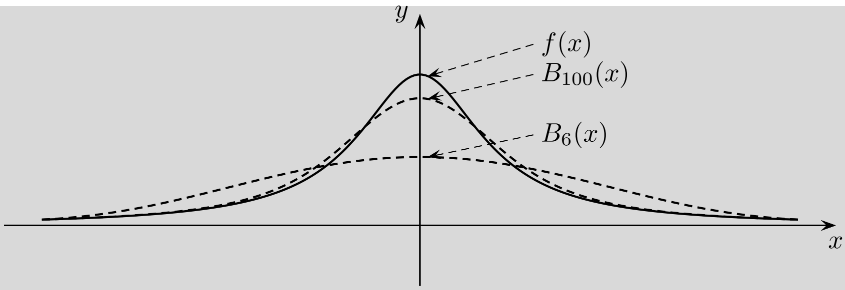
Kao direktnu posledicu Bernsteinove teoreme i činjenice da je svaka neprekidna funkcija na $[a,b]$ ujedno i uniformno neprekidna imamo sledeću teoremu.

Teorema 6.4.3. (Weierstrass) *Za svaku funkciju $f \in \mathcal{C}[a,b]$ postoji niz polinoma $p_n(x)$ koji uniformno aproksimira funkciju $f(x)$.*

Primer 6.4.1. Razmotrimo sada aproksimaciju Rungeove funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bernsteinovim polinomima $B_n(x) = B_n(f;-5,5;x)$. Kao što možemo videti na grafiku, svaki sledeći polinom daje sve bolju i bolju aproksimaciju funkcije $f(x)$.



Slika 6.5: Aproksimacija Rungeove funkcije Bernsteinovim polinomima.

Međutim, konvergencija je prilično spora, pa je za bilo koju ozbiljniju aproksimaciju potrebno posmatrati Bernsteinov polinom stepena $n \geq 100$ što je praktično neizvodljivo. Napomenimo da je $B_{100}(x)$ u ovom primeru generisan egzaktno (koeficijenti su računati u obliku razlomka), što nam je omogućilo da verno nacrtamo grafik ovog polinoma. Ukoliko bi koristili aritmetiku pokretnog zareza, bila bi nam potrebna preciznost od **najmanje 100 značajnih cifara**.

Iako aproksimacija funkcije Bernsteinovim polinomima ima samo teorijski značaj, ovi polinomi su itekako važni kad su u pitanju primene. Pomoću njih se konstruišu *Bèzierove krive i površi* koje su uspešno koriste u računarskoj grafici i dizajnu (animacije, fontovi, itd.). Više o Bèzierovim krivama i površima može se naći npr. u [31, 35].

6.5 Racionalna interpolacija

Problem racionalne interpolacije sastoji se u određivanju racionalne funkcije (*racionalnog interpolanta*):

$$r_{m,n}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \equiv \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} p_j x^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q_j x^j} \tag{6.36}$$

tako da za različite realne brojeve $x_0, x_1, \ldots, x_N$ važi

$$r_{m,n}(x_i) = f_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad N = m + n. \tag{6.37}$$

Drugim rečima, potrebno je pronaći koeficijente $p_0, p_1, \ldots, p_m$ polinoma u brojiocu kao i koeficijente $q_0, q_1, \ldots, q_n$ polinoma u imeniocu tako da su ispunjeni