Radoslav Dimitrijević

Analiza
realnih funkcija
više promenljivih

N i š, 2010.

Dr Radoslav Dimitrijević, vanredni profesor Filozofskog fakulteta u Nišu
ANALIZA REALNIH FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

Recenzenti:
Dr Vladimir Rakočević, redovni profesor Filozofskog fakulteta u Nišu
Dr Ivan Jovanović, vanredni profesor Filozofskog fakulteta u Nišu

Izdavač: **autor**

Lektor: **Verica Milanović**

Obrada teksta: **autor**
Obrada slika: **Ivan Stanković**
Korice: **Miroslav Dimitrijević**

ISBN 86–902017–1–8

Ova knjiga posvećena je uspomeni na
Miroslavu Jovanović, majku Radoslava i
baku Miroslava i Vladimira Dimitrijevića

S A D R Ž A J

II. REDOVI

III. VIŠESTRUKI INTEGRALI

IV FURIJEOVI REDOVI

P R E D G O V O R

Ovaj udžbenik namenjen je studentima matematike. Materjal obuhvaćen ovim užbenikom sadrži lekcije koje su predviđene važećim programom za predmet Matematička analiza II za studente Studijske grupe matematika Filozofskog fakulteta Univerziteta u Nišu. Najveći deo poslednje glave čini sadržaj izbornog predmeta Furijeovi redovi i Furijeove transformacije koji je povremeno držan za studente matematike. Nadam se da će ovaj udžbenik moći da koriste i studenti Studijske grupe fizika, a takođe i studenti tehničkih fakulteta na kojima je matematička analiza predmet izučavanja.

Realna analiza funkcija više promenljivih sasvim prirodno uopštava osnovne pojmove realne analize funkcija jedne promenljive. U izlaganju se induktivno uvode najpre osnovni pojmovi vezani za funkcije više promenljivih i izlažu stavovi koji su karakteristični za te pojmove. Na kraju se, kada je to moguće, ovi pojmovi uvode za vektorske funkcije i izlažu njihova svojstva. Na taj način se dobija potpun uvid u osnove realne analize kao zaokružene celine, na koju se dalje nadograđuje teorije mera i integracije, funkcionalna analiza, kao i druge oblasti savremene analize. S obzirom na ovakvu koncepciju izlaganja, teorija izložena u ovom udžbeniku prirodno se nadovezuje na sadržaje koji se izučavaju u okviru Matematičke analize I, pa je poznavanje pre svega ove materije neophodno za uspešno praćenje sadržaja izloženih u ovom udžbeniku.

Celokupna materija sadržana u ovom udžbeniku podeljena je u četiri glave. Svaka glava sastoji se od manjih delova-poglavlja kao logičkih celina, a svako poglavlje na odeljke. Izuzetno, kada je za to postojala potreba, odeljci su podeljeni na pododeljke. Izložena materija protkana je mnogobrojnim primerima koji ilustruju svrsishodnost uvedenih pojmova ili metoda, kao i njihovu primenu. Brojnim kontraprimerima, koji su neophodni u uzlaganju ovakve materije, čitaocu se pruža mogućnost dubljeg razumevanje pojedinih pojmova ili tvrđenja. Po pravilu, iza svakog odeljka dati su zadaci za utvrđivanje izloženog gradiva. Pored klasičnih zadataka koji prate izlaganje materije i koji su sistematizovani prema težini, dati su i zadaci teorijskog karaktera čiji je cilj ne samo proširivanje izložene materije, već i uvođenje *čitaoca u samostalan rad.*

Numeracija poglavlja, odeljaka, odn. pododeljaka ide prirodnim redosledom u okviru svake glave. Definicije, teoreme i primeri numerisani su rednim brojevima u okviru svakog odeljka, odn. pododeljka posebno. Pri pozivanju, na primer, na na teoremu 2., II.3.4., reč je o teoremi 2. četvrtog odeljka trećeg poglavlja druge glave. Ako se pozivanje vrši u okviru iste glave, paragrafa ili odeljka, onda se redni broj glave, paragrafa, odn. odeljka izostavlja. Međutim, često se vrši pozivanje i na stavove koji zbog svoje važnosti nose posebne nazive, što od čitaoca zahteva dodatan, ali i koristan napor.

Prijatna mi je dužnost da se ovom prilikom zahvalim svima koji su mi pomogli pri radu na ovoj knjizi. Primedbe i sugestije koje su mi u svojstvu recenzenata dali kolege prof. Vladimir Rakočevići i prof. Ivan Jovanović značajno su doprinele da pojedina mesta u izlaganju budu jasnija i preciznija, zbog čega im dugujem posebnu zahvalnost. Studenti Miloš Milosavljević i Miroslav Dimitrijević pažljivo su pročitali sređen tekst. Osim što su otklonili mnogobrojne greške nastale pri kucanju teksta, svojim primedbama doprineli su da mnoga mesta budu znatno razumljivija za čitaoca. Student Ivan Stanković je uložio ogroman trud da slike u knjizi budu urađene na zavidnom nivou. Podsticaj za rad na ovom uđbeniku dali su mi studenti koji su pre više godina izdali skripta lekcija koje sam držao iz Analize II. Pitanja koja su mi studenti postavljali u okviru konsultacija, ali i njihovi odgovori na ispitu, doprineli su da mnogi detalji u knjizi budu jasniji, precizniji i pristupačniji čitaocu. Svima izražavam svoju najveću zahvalnost.

Na kraju se posebno zahvaljujem mom sinu Vladimiru Dimitrijeviću, bez čije finansijske pomoći ova knjiga još uvek ne bi ugledala svetlo dana.

Znajući za anegdotu da svaka knjiga ima beskonačno mnogo grešaka (bar štamparskih), jer se u svakom čitanju otkrije bar po jedna nova greška, autor je svestan da ovako obiman tekst svakako ima niz nedostataka i propusta. Unapred se zahvaljujem svima koji mi ukažu na uočene propuste i nedostatke.

U Nišu, juna 1998. godine *Autor*

P R E D G O V O R
D R U G O M   I Z D A N J U

Ovo izdanje razlikuje se od prethodnog uglavnom po tome što su otklonjene štamparske greške učinjene pri kucanju prvog izdanja. Gde god je postojala mogućnost nesporazuma ili je tekst bio nejasan, isti je izmenjen, čime su formulacije definicija i teorema dobile na preciznosti i jasnoći. Izmenjeni su i dokazi malog broja teorema, a sve u cilju jasnijeg izlaganja.

Ovo izdanje razlikuje se od prethodnog i po tome što materjal obuhvaćen ovim užbenikom sada sadrži lekcije koje su predviđene važećim programom za predmete Matematička analiza III i Matematička analiza IV za studente druge godine Studijske grupe matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu.

Za otklanjanja uočenih grešaka i propusta nastalih u prvom izdanju veliku zahvalnost dugujem pre svega studentima koji su mi tokom konsultacija ukazivali na iste, zbog čega im se ovom prilikom najiskrenije zahvaljujem.

Posebnu zahvalnost dugujem dr Draganu Živkoviću koji mi je pomogao da prevaziđem teškoće u pripremi ovog teksta nastale zbog vremenske distance između ovog i prvog izdanja koje je kucano u programskom paketu TEX-a.

Ovo izdanje razlikuje se od prethodnog i po tome što je predviđeno da bude predstavljeno samo u elektronskom obliku na sajtu Prirodno-matematičkog fakulteta i na taj način postane dostupno ne samo studentima Prirodno-matematičkog fakulteta, kojima je prvenstveno i namenjeno, već i široj matematičkoj javnosti.

I ako su greške u prvom izdanju ispravljane više od deset godina, sigurno je da i u ovom izdanju ima, ako ne starih, a ono sigurno novih gresaka koje su nastale pri ispravljanju starih grešaka. Takođe je sigurno da se tekst može i dalje poboljšavati, pa su sve sugestije u tom smislu dobrodošle. Iste možete slati na e-mail: race@EUnet.rs, na čemu vam se unapred najtoplije zahvaljujem.

U Nišu, novembra 2010. godine *Autor*

I DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

Prva glava ove knjige je osnova za izlaganja koja slede. U prvom poglavlju izučava se struktura n-dimenzionalnog euklidovog prostora $\mathbb{R}^n$. Drugo poglavlje je posvećeno proučavanju osobina neprekidnih funkcija. U naredna dva poglavlja izloženi su osnovi diferencijalnog računa realnih funkcija više promenljivih. Poslednja dva poglavlja sadrže problematiku izloženu u prethodna tri poglavlja koja se sada odnose na vektorske funkcije.

1. STRUKTURA PROSTORA $\mathbb{R}^n$

Kao što je za izučavanje realnih funkcija jedne promenljive neophodno poznavanje strukture realne prave, tako je za izučavanje funkcija više promenljivih neophodno poznavanje strukture prostora $\mathbb{R}^n$. Materija izložena u ovom poglavlju usmerena je ka upoznavanju osnovnih pojmova prostora $\mathbb{R}^n$.

1.1. POJAM n-DIMENZIONALNOG EUKLIDOVOG PROSTORA

Definicija 1. *Pod* ***realnim n-dimenzionalnim prostorom*** $\mathbb{R}^n$ *podrazumevamo ukupnost uređenih n-torki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.*

Elemente tog prostora nazivamo tačkama ili vektorima. Brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su koordinate tačke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u datom redosledu. U daljem tekstu često ćemo tačke u koordinatnom zapisu kraće označavati sa $x = (x_i)$, ukoliko to ne dovodi do zabune.

U prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo operacije $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ i $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ na sledeći način. Ako su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tačke prostora $\mathbb{R}^n$, a $\lambda \in \mathbb{R}$, tada je

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

i

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Lako je proveriti da je $(\mathbb{R}^n, +)$ Abelova grupa sa neutralnim elementom $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ i inverznim elementom

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

za element $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Operaciju $+$ nazivamo sabiranjem u $\mathbb{R}^n$. Druga operacija, koju nazivamo množenjem elemenata iz $\mathbb{R}^n$ skalarom iz $\mathbb{R}$, ima sledeća svojstva koja se lako proveravaju.

$(V.1)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y)$;
$(V.2)$ $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^n)((\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x)$;
$(V.3)$ $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^n)((\lambda\mu)x = \lambda(\mu x))$;
$(V.4)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(1 \cdot x = x)$.

Vidimo da je $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ **vektorski prostor nad poljem realnih brojeva**. Lako se može dokazati da vektori $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ razapinju prostor $\mathbb{R}^n$, odn. da je lineal $L(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$, što dokazuje da je $\mathbb{R}^n$ konačno dimenzionalan prostor. Ovi vektori su i linearno nezavisni, pa čine bazu prostora $\mathbb{R}^n$ koju obično nazivamo **standardnom bazom**. Stoga je dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n, što opravdava naziv prostora $\mathbb{R}^n$.

Algebarska struktura uvedena u $\mathbb{R}^n$ sa kojom on postaje vektorski prostor nedovoljna je za sagledavanje strukture skupova u $\mathbb{R}^n$. Da bi smo to postigli, neophodno je znati rastojanje između tačaka tog prostora. Rastojanje između tačaka prostora $\mathbb{R}^n$ uvešćemo na način koji je uobičajen u konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima.

Definišimo najpre **skalarni priozvod** vektora iz $\mathbb{R}^n$ kao preslikavanje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ koje svakom uređenom paru vektora (x, y), $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pridružuje realan broj

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{1}$$

Lako je proveriti da skalarni proizvod ima sledeća svojstva:
$(U.1)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \mid x) \geq 0$;
$(U.2)$ $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
$(U.3)$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(x \mid y) = (y \mid x)$ (simetričnost);
$(U.4)$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\forall \lambda \in R)(\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$ (homogenost);
$(U.5)$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$ (aditivnost).

U opštem slučaju, preslikavanje $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$, gde je V ma koji vektorski prostor, naziva se **skalarnim proizvodom** na V, ako su zadovoljeni uslovi $(U.1) - (U.5)$.

Definicija 2. *Uređeni par $(V, (\cdot \mid \cdot))$, gde je V realan vektorski prostor, a $(\cdot \mid \cdot)$ skalarni proizvod na V je* ***unitaran*** *ili* ***predhilbertov prostor****.*

Za vektore x i y unitarnog prostora kažemo da su **ortogonalni**, ako je $(x \mid y) = 0$.

Definicija 3. *Realan n-dimenzionalan vektorski prostor je* ***n-dimenzionalan Euklidov prostor*** *ako je skalarni proizvod u njemu definisan relacijom* (1).

Stav 1. *U svakom unitarnom vektorskom prostoru V važe sledeće nejednakosti:*
(a) **(Koši*-Švarc **)** $|(x|y)| \leq (x|x)^{1/2}(y|y)^{1/2}$
(b) **(Helder***)** $(x + y \mid x + y)^{1/2} \leq (x \mid x)^{1/2} + (y \mid y)^{1/2}$ **.**

Dokaz. (a) Na osnovu $(U.1)$ za svako $\lambda \in R$ i svaka dva elementa $x, y \in V$ važi nejednakost $(x+\lambda y \mid x+\lambda y) \geq 0$, odn. $\lambda^2(y \mid y)+2\lambda(x \mid y) + (x \mid x) \geq 0$. Poslednji izraz pretstavlja kvadratni trinom koji je uvek nenegativan, pa je $(x \mid y)^2 - (x \mid x)(y \mid y) \leq 0$, čime je Švarcova nejednakost dokazana.

(b) Očigledno je
$(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) \leq (x \mid x) + 2|(x|y)| + (y|y).$
Primenom Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$(x + y|x + y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y, y)| \leq$$
$$\leq (x|x) + 2(x|x)^{1/2}(y|y)^{1/2} + (y|y) = ((x|x)^{1/2} + (y|y)^{1/2})^2,$$

* Cauchy A. L. (11798-1857)-francuski matematičar
** Schwarc H. A. (1843-1921)-nemački matematičar
*** Hőlder O. (1859-1937)-nemački matematičar

čime je i druga nejednakost dokazana. ■

Koristeći definiciju skalarnog proizvoda u $\mathbb{R}^n$, dokazane nejednakosti se mogu zapisati u sledećem obliku:

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Za svaki vektor x unitarnog prostora V je $(x|x) \geq 0$, pa je jednoznačno određen broj $\|x\| = (x|x)^{1/2} \geq 0$. Lako je proveriti da preslikavanje $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$ ima sledeća svojstva:

$(N.1)$ $(\forall x \in V)\|x\| \geq 0$;
$(N.2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
$(N.3)$ $(\forall \lambda \in R)(\forall x \in V)\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenost);
$(N.4)$ $(\forall x, y \in V)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trougla).

Preslikavanje $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$ je **norma** na V generisana skalarnim proizvodom, a broj $\|x\|$ je **norma vektora**. Za vektor x normiranog prostora kažemo da je **normiran**, ako je $\|x\| = 1$. U $\mathbb{R}^3$ norma vektora predstavlja dužinu vektora, što nam govori da norma u vektorskom prostoru omogućava određivanje rastojanja između tačaka tog prostora. Norma se, međutim, može uvesti na ma kom vektorskom prostoru. Preciznije, važi sledeća

Definicija 4. *Preslikavanje $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$ koje zadovoljava uslove $(N.1) - (N.4)$ zove se **norma** vektorskog prostora V. Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ je **normirani vektorski prostor**.*

Sistem vektora x_i, $i \in I$, unitarnog prostora je **ortonormiran**, ako je

$$(x_i|x_j) = \delta_{i,j},$$

gde je $\delta_{i,j}$ Kronekerov* δ-simbol.

Očigledno je svaki element ortonormiranog sistema normiran u odnosu na normu generisanu skalarnim proizvodom unitarnog prostora.

---

* Kronecker L. (1823- 1891)-nemački matematičar

U n-dimenzionalnom euklidovom prostoru norma vektora određena je izrazom

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} . \tag{2}$$

Standardna baza u $\mathbb{R}^n$ čini ortonormiran sistem vektora u odnosu na tu normu.

U svakom normiranom prostoru na posve prirodan način izvire pojam rastojanja. Naime, ako su $x, y \in V$ elementi normiranog vektorskog prostora V, definišimo preslikavanje $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$d(x, y) := \|x - y\| . \tag{3}$$

Na osnovu osobina norme sada je lako proveriti da ovako definisano preslikavanje ima sledeća svojstva

$(M.1)$ $(\forall x, y \in V)$ $d(x, y) \geq 0$;

$(M.2)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$(M.3)$ $(\forall x, y \in V)(d(x, y) = d(y, x))$ (simetričnost);

$(M.4)$ $(\forall x, y, z \in V)\,(d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$ (nejednakost trougla) .

Preslikavanje $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ definisano relacijom (3) je **metrika** definisana normom vektorskog prostora V, a $d(x, y)$ je **rastojanje** između tačaka x i y. Metrika ili rastojanje se može definisati na proizvoljnom skupu.

Definicija 5. *Preslikavanje $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ koje ima svojstva $(M.1)-(M.4)$ zove se* ***metrika*** *ili* ***rastojanje*** *na V. Uređeni par (V, d) zove se* ***metrički prostor****.*

Rastojanje u n-dimenzionalnom euklidovom prostoru generisano normom (3) definisano je sa

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} . \tag{4}$$

Na kraju ovog odeljka navedimo nekoliko primera metričkih prostora.

Primer 1. U prostoru $\mathbb{R}^n$ funkcija d_1

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

definiše metriku u $\mathbb{R}^n$, što je lako proveriti. Ova metrika generisana je normom

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Primer 2. U prostoru $\mathbb{R}^n$ rastojanje se može uvesti i na sledeći način

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Dokažimo samo relaciju trougla. Kako je

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \le \max|x_i - y_i| + \max|y_i - z_i|,$$

to je i

$$\max|x_i - z_i| \le \max|x_i - y_i| + \max|y_i - z_i|,$$

što dokazuje da je

$$d_\infty(x,z) \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z).$$

Metrika d_∞ generisana je normom $\|\cdot\|_\infty$ koja je definisana sa $\|x\| = \max|x_i|$. Uobičajeno se ovaj prostor označava sa $\mathbb{R}^n_\infty$

Primer 3. Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz (x_n) kažemo da je konvergentan, ako postoji $x \in X$ tako da $d(x_n,x) \to 0$ kada $n \to +\infty$. Označimo sa c skup svih konvergentnih nizova u X. U skupu c definišimo preslikavanje $\overline{d} : c \times c \mapsto \mathbb{R}$ sa

$$\overline{d}((x_n),(y_n)) = \sup_n d(x_n,y_n).$$

Da je ovo rastojanje u c, dovoljno je dokazati nejednakost trougla, jer su ostala svojstva metrike očigledna. Ovo neposredno sledi iz nejednakosti

$$d(x_n,z_n) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n) \le \sup d(x_n,y_n) + \sup d(y_n,z_n)\,.$$

Primer 4. U skupu $\mathcal{C}([a,b])$ realnih funkcija koje su neprekidne na $[a,b]$, sa

$$d(x,y) = \sup_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)|$$

definisana je metrika.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je Y^X skup svih preslikavanja skupa X u vektorski prostor Y nad poljem K. Dokazati da je $(Y^X, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem K, ako su operacije $+$ i $\cdot$ definisane formulama $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ i $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

2. Dokazati da je svaki ortonormiran sistem vektora unitarnog prostora linearno nezavisan.

3. Dokazati da u stavu 1. u Švarcovoj nejednakosti znak jednakosti važi onda i samo onda ako su vektori x i y linearno zavisni.

4. Dokazati da u svakom realnom unitarnom prostoru za normu $\|\cdot\| = (x|x)^{1/2}$ važe sledeće jednakosti:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

i

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)\,.$$

5. Dokazati da je skup $\mathcal{C}[a,b]$ neprekidnih funkcija $x : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{[a,b]}$ u kome je formulom $(x|y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ definisan skalarni proizvod na ovom prostoru.

6. Dokazati da je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{sint}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ortonormiran sistem vektora u unitarnom prostoru $\mathcal{C}[0,2\pi]$ iz prethodnog zadatka.

7. Neka je X unitaran prostor. Za sistem vektora $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz X neka je $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Gramova matrica sa elementima $c_{ij} = (x_i|x_j)$. Dokazati da je sistem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linearno zavisan onda i samo onda ako je

$$\det G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

(Uputstvo: posmatrati sistem linearnih jednačina $\sum_{j=1}^n \lambda_j (x_i|x_j) = 0$)

8. Neka je $B(X,Y)$ skup funkcija $x : X \mapsto Y$ koje preslikavaju skup X u normiran vektorski prostor Y i koje su ograničene po normi prostora Y . Dokazati da je sa

$$\|x\| = \sup_{t\in T} \|x(t)\|$$

definisana norma na $B(X,Y)$.

9. Neka su X i Y normirani vektorski prostori sa normama $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$. Dokazati da je svakom od formula

$$\|(x|y)\|_2 = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}\,,$$
$$\|(x|y)\|_\infty = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)\,,$$
$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y\,,$$

definisana norma na proizvodu $X \times Y$.

10. Ako vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ unitarnog prostora X čine ortogonalan sistem, dokazati da je tada

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

11. Dokazati da u svakom normiranom prostoru X rastojanje $d(x,y) = \|x-y\|$ ima sledeća svojstva:

a) $(\forall a \in X)\ d(x+a, y+a) = d(x,y)$

b) $d(x,y) = d(-x,-y)$

12. Ako je (X,d) metrički prostor, tada je sa

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

definisana metrika na X. Dokazati.

13. Neka je X skup, a $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$ preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove: 1) $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$, 2) $d(x,y) = d(y,x)$ i 3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Dokazati *a*) da je sa

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$$

u X definisana relacija ekvivalencije i *b*) da je $d_1(C_x, C_y) := d(x,y)$ metrika na $X/\sim$.

1.2. OKOLINA TAČKE. NIZOVI U $\mathbb{R}^n$

Definicija 1. *Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Ukupnost tačaka $y \in \mathbb{R}^n$ za koje je $d(x,y) < \varepsilon$ je* ***otvorena kugla*** *u $\mathbb{R}^n$ sa središtem u tački x i poluprečnikom ε, ili ε- okolina tačke x. Označavamo je sa $K(x,\varepsilon)$.*

Prema tome, $K(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \varepsilon\}$. Skup $K[x,\varepsilon] = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \le \varepsilon\}$ je **zatvorena kugla** sa središtem u tački x i plupre čnikom ε. Da je za otvorenu kuglu $K(x,\varepsilon)$ opravdan naziv "ε-okolina", videćemo nešto kasnije.

U slučaju $\mathbb{R}^1$ otvorena kugla $K(x,\varepsilon)$ je otvoreni interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. U $\mathbb{R}^2$, $K(x,\varepsilon)$ je kružnica sa središtem u tački $x = (x_1, x_2)$ i poluprečnikom ε, a u $\mathbb{R}^3$ to je upravo onakav skup, kako ga u geometrijskom smislu podrazumevamo.

Pojam okoline može se uvesti i na sledeći način.

Definicija 2. *Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Skup*

$$P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \delta_i, i = \overline{1,n}\}$$

je ***otvoreni n-dimenzionalni paralelepiped*** *sa središtem u tački $x = (x_i)$.*

Stranice ovog paralelepipeda paralelne su koordinatnim osama i dužine su $2\delta_i$, $i = \overline{1,n}$. Ako je $\delta_i = \delta$ za svako $i = \overline{1,n}$, paralelepiped $P(x; \delta, \ldots, \delta)$ predstavlja n-dimenzionalnu kocku $P(x; \delta)$. Otvoreni n-dimenzionalni paralelepiped nazivamo pravougaonom okolinom tačke.

Pojmovi ε-okoline i pravougaone okoline ekvivalentni su u smislu da se za okolinu tačke može izabrati bilo koja od njih. Preciznije, važi sledeći

Stav 1. *U svaku otvorenu kuglu $K(x, \varepsilon)$ može se upisati otvoreni paralelepiped $P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ i obratno, u svaki otvoreni paralelepiped $P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ može se upisati otvorena kugla $K(x, \varepsilon)$.*

Dokaz. Neka je $K(x, \varepsilon)$ ε-okolina tačke $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je $P(x; \varepsilon/\sqrt{n}) \subset K(x, \varepsilon)$. Zaista, ako je $y \in P(x, \varepsilon/\sqrt{n})$, tada je $|y_i - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$ za svako $i = \overline{1,n}$, pa je stoga

$$d(x, y) = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\}^{\frac{1}{2}} < \{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2/n\}^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,$$

što dokazuje da je $y \in K(x, \varepsilon)$. Obratno, neka je $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ pravougaona okolina tačke x i neka je $\varepsilon = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Tada je $K(x, \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Da to dokažemo, uočimo priozvoljnu tačku $y \in K(x, \varepsilon)$. Za nju je $d(x, y) = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Kako je

$$|x_i - y_i| \leq \{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\}^{1/2} < \varepsilon \leq \delta_i\,, \quad i = \overline{1,n},$$

to je $y \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. ■

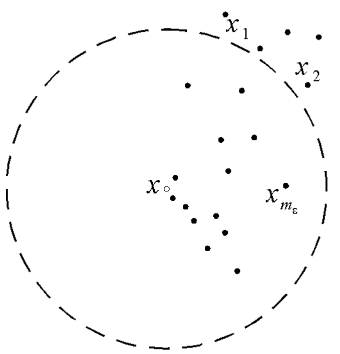
Definicija 3. *Preslikavanje $x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^n$ nazivamo* **nizom** *tačaka u $\mathbb{R}^n$. Uobičajeno je da se element $x(n)$ tog niza označava sa x_n i naziva* ***opštim članom niza****. Sam niz označavamo sa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili samo sa (x_n).*

Niz (y_k) je **podniz niza** *(x_n), ako za svako k postoji n_k tako da je $y_k = x_{n_k}$, pri čemu je za $k_1 < k_2$ i $n_{k_1} < n_{k_2}$.*

Definicija 4. *Niz tačaka* (x_n) *iz* $\mathbb{R}^n$ *je* ***konvergentan*** *ako postoji* $x \in \mathbb{R}^n$ *tako da je*

$$\lim_{m\to+\infty} d(x_m, x) = 0\,.$$

U tom slučaju pišemo $\lim_{m\to+\infty} x_m = x$ i kažemo da je x granična vrednost niza $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.



Sl. 1

Prethodnu definiciju možemo iskazati i na sledeći način. Niz (x_n) je konvergentan i ima graničnu vrednost x, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_m, x) < \varepsilon$ za svako $m \geq m_\varepsilon$, odn. da je $x_m \in K(x,\varepsilon)$ za svako $m \geq m_\varepsilon$. Drugim rečima, x je granična vrednost niza (x_m), ako za svaku okolinu $K(x,\varepsilon)$ tačke x postoji indeks počev od koga su svi članovi niza (x_m) u ε-okolini tačke x.

Definicija 5. *Niz* (x_m) *tačaka prostora* $\mathbb{R}^n$ *konvergira ka beskonačno dalekoj tački* ∞ *ako je*

$$\lim_{m\to+\infty} d(O, x_m) = +\infty\,,$$

gde je $O = (0, 0, \ldots, 0)$.

U tom slučaju pišemo $\lim_{m\to+\infty} x_m = \infty$. Ako je $\lim_{m\to+\infty} x_m = \infty$, tada za svako $L > 0$ postoji indeks $m_L \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_m, O) \geq L$ za svako $m \geq m_L$, odn.

$$\{\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^2\}^{1/2} \geq L.$$

Kako je

$$L \leq \{\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^2\}^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^m| \leq n \max_i |x_i^m|,$$

to je $|x_i^m| \geq L/n$ za neko $i \leq n$, što znači da bar jedan koordinatni niz (x_i^m) određeno divergira ka $+\infty$ ili $-\infty$.

Iz definicije granične vrednosti niza vidimo da ona važi i u proizvoljnom metričkom prostoru. Međutim, konvergencija niza može se uvesti u proizvoljnom normiranom prostoru. Za niz (x_n) normiranog vektorskog prostora $(X, \|\cdot\|)$ kažemo da konvergira po normi (ili jednostavnije, da konvergira) ka tački $x \in X$, ako

$$\|x_n - x\| \to 0\,, \qquad n \to +\infty\,.$$

U svakom n-dimenzionalnom euklidskom prostoru prirodno se nameće pitanje efektivnog određivanja granične vrednosti niza, što je na osnovu same definicije praktično dosta teško. Jednostavno rešenje ovog pitanja daje

Stav 2. *Niz $(x_m)_{m\in N}$ tačaka $x_m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$ prostora $\mathbb{R}^n$ je konvergentan i ima graničnu vrednost $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onda i samo onda ako je $\lim_{m\to+\infty} x_i^m = x_i$ za svako $i = \overline{1,n}$. Drugim rečima, niz tačaka prostora $\mathbb{R}^n$ konvergentan je ako i samo ako su mu svi koordinatni nizovi konvergentni.*

Dokaz. Neka je $\lim_{m\to+\infty} x_m = x$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da $x_m \in P(x,\varepsilon)$ za svako $m \geq m_\varepsilon$, odn. $|x_i^m - x_i| < \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$, što dokazuje da je $\lim_{m\to+\infty} x_i^m = x_i$ za svako $i = \overline{1,n}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\lim_{m\to+\infty} x_i^m = x_i$ za svako $i = \overline{1,n}$ i neka je $P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ proizvoljna okolina tačke x. Za svako $\delta_i > 0$ postoji indeks $m_{\delta_i} \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_i^m - x_i| < \delta_i$ za svako $m \geq m_{\delta_i}$. Označimo sa $m_\delta = \max\{m_{\delta_1}, m_{\delta_2}, \ldots, m_{\delta_n}\}$ i neka je $m \geq m_\delta$. Tada je $|x_i^m - x_i| < \delta_i$ za svako $i = \overline{1,n}$, pa je $x_m \in P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ za svako $m \geq m_\delta$, što dokazuje da je $\lim_{m\to+\infty} x_m = x$. ■

Iz dokazanog stava neposredno sledi jedinstvenost granične vrednosti konvergentnog niza tačaka prostora $\mathbb{R}^n$.

Kao i na realnoj pravoj, tako i u $\mathbb{R}^n$ važi Bolcano*-Vajerštrasova** teorema. Za njenu formulaciju neophodna nam je sledeća

Definicija 6. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **ograničen** ako se može smestiti u neku kuglu (ili kocku) sa središtem u koordinatnom početku.*

Pre formulacije Bolcano-Vajerštrasove teoreme dokažimo sledeću lemu.

* Bolzano B. (1781-1848)-češki matematičar i filozof
** Weierstrass K. (1815-1897)-nemački matematičar

Lema 1. *Ako je niz tačaka* (x_m) *ograničen u* $\mathbb{R}^n$*, onda su svi koordinatni nizovi* (x_i^m) *ograničeni u* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Kako je niz (x_m) ograničen u $\mathbb{R}^n$, postoji $L > 0$ tako da je $x_m \in K(O, L)$ za svako $m \in \mathbb{N}$. No onda je $d(x_m, O) < L$ za svako $m \in \mathbb{N}$. Kako je

$$|x_i^m| \leq \{\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^2\}^{1/2} = d(O, x_m) < L$$

za svako $i = \overline{1, n}$ i svako $m \in \mathbb{N}$, to je svaki niz $(x_i^m)_{m \in \mathbb{N}}$ ograničen u $\mathbb{R}$. ■

Teorema 3. (Bolcano-Vajerštras) *Svaki ograničen niz tačaka u* $\mathbb{R}^n$ *sadrži bar jedan konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $x_m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$, $m \in \mathbb{N}$, proizvoljan ograničen niz tačaka u $\mathbb{R}^n$. Prema predhodnoj lemi svi koordinatni nizovi (x_i^m), $i = \overline{1, n}$ su ograničeni, pa svaki od njih na osnovu Bolcano-Vajerštrasove teoreme sadrži bar jedan konvergentan podniz.

Neka je $(x_1^{m_{k_1}})$ konvergentan podniz niza (x_1^m). Uočimo podniz $(x_2^{m_{k_1}})$ niza (x_2^m) koji je ograničen, jer je takav niz (x_2^m). Prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi ovaj niz sadrži bar jedan konvergentan podniz. Označimo ga sa $(x_2^{m_{k_2}})$. Slično, iz podniza $(x_3^{m_{k_2}})$ niza (x_3^m) izdvojimo konvergentan podniz $(x_3^{m_{k_3}})$. Nastavljajući opisani postupak, posle n koraka izdvojimo iz niza (x_n^m) konvergentan podniz $(x_n^{m_{k_n}})$. Niz $(x_i^{m_{k_n}})$ je podniz niza $(x_i^{m_{k_i}})$ za svako $i = \overline{1, n}$. Kako je svaki od podnizova $(x_i^{m_{k_i}})$ konvergentan, to je i svaki od podnizova $(x_i^{m_{k_n}})$, $i = \overline{1, n}$, konvergentan. No onda je prema stavu 2. $(x_{m_{k_n}})$ konvergentan podniz niza (x_m). ■

Definicija 7. *Niz* (x_m) *tačaka prostora* $\mathbb{R}^n$ *je* ***fundamentalan*** *ili* ***Košijev*** * *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tako da je* $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ *za svako* $p, q > m_\varepsilon$.

Očigledno je da se pojam fundamentalnog niza može uvesti u ma kom metričkom prostoru.

---

* *Cauchy A. L. (1789-1857)-francuski matematičar*

Stav 4. *Niz* (x_m) *tačaka prostora* $\mathbb{R}^n$ *je fundamentalan onda i samo onda, ako su svi njegovi koordinatni nizovi* (x_i^m) *fundamentalni.*

Dokaz. Uslov je neophodan. Zaista, neka je (x_m) fundamentalan niz tačaka u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\varepsilon > 0$. Kako je niz (x_m) fundamentalan, postoji $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ za svako $p, q > m_\varepsilon$. No onda je

$$|x_i^p - x_i^q| \leq \{\sum_{i=1}^n |x_i^p - x_i^q|^2\}^{1/2} = d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

za svako $p, q \geq m_\varepsilon$ i svako $i = \overline{1, n}$, što dokazuje da je svaki koordinatni niz (x_i^m) fundamentalan.

Da dokažemo da je uslov dovoljan, pretpostavimo da su svi koordinatni nizovi fundamentalni i neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svako $i = \overline{1, n}$ postoji $m_i^\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_i^p - x_i^q| < \varepsilon/\sqrt{n}$ za svako $p, q \geq m_i^\varepsilon$. Neka je $m_\varepsilon = \max\{m_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon, \ldots, m_n^\varepsilon\}$. Tada za svako $p, q \geq m_\varepsilon$ važi

$$d(x_p, x_q) = \{\sum_{i=1}^n (x_i^p - x_i^q)^2\}^{1/2} \leq \sqrt{n} \max_i |x_i^p - x_i^q| < \varepsilon,$$

što dokazuje da je (x_m) Košijev niz u $\mathbb{R}^n$. ∎

Teorema 5. *Niz* (x_m) *tačaka prostora* $\mathbb{R}^n$ *je fundamentalan onda i samo onda, ako je on konvergentan u* $\mathbb{R}^n$*.*

Dokaz. Niz (x_m) je prema stavu 4. fundamentalan u $\mathbb{R}^n$ onda i samo onda ako su mu svi koordinatni nizovi fundamentalni $\mathbb{R}$. Međutim, niz je fundamentalan u $\mathbb{R}$ onda i samo onda ako je on konvergentan u $\mathbb{R}$. Stoga će niz (x_m) na osnovu stava 2. biti konvergentan onda i samo onda ako su mu svi koordinatni nizovi konvergentni. ∎

Fundamentalni nizovi igraju važnu ulogu u karakterizaciji raznih prostora. Naime, svojstvo prostora $\mathbb{R}^n$ da je svaki fundamentalan niz u njemu konvergentan uzima se kao definiciono svojstvo važne klase metričkih prostora. Ovo se radi iz jednostavnog razloga, što u metričkim prostorima svaki Košijev niz ne mora biti konvergentan. Da to pokažemo, dovoljno je uočiti skup racionalnih brojeva sa uobičajenom metrikom realne prave. Niz (r_n) racionalnih brojeva, gde je r_n decimalni prikaz broja $\sqrt{2}$ sa n decimala, očigledno je Košijev, jer

$$d(r_m, r_n) < \frac{1}{10^n} \to 0, \quad n \to +\infty$$

za $m > n$. Međutim, niz (r_n) ne konvergira nijednom racionalnom broju.

Navedeni primer ukazuje na svrsishodnost uvođenja sledećih pojmova.

Definicija 8. *Metrički prostor (X, d) je **kompletan**, ako je svaki fundamentalan niz iz X konvergentan u X.*

Na osnovu prethodne teoreme vidimo da je $\mathbb{R}^n$ kompletan prostor u odnosu na metriku uvedenu u 1.1. za svako $n \geq 1$.

Definicija 9. *Normiran vektorski prostor je **Banahov prostor****, *ako je kompletan u odnosu na metriku koju u njemu generiše norma. Unitaran vektorski prostor je **Hilbertov prostor*****, *ako je kompletan u odnosu na normu koja je generisana skalarnim proizvodom.*

Realan n-dimenzionzlan prostor $\mathbb{R}^n$ sa metrikom d (ali i sa d_1, d_∞) je Banahov prostor. Posmatran kao n-dimenzionalan euklidov prostor, $\mathbb{R}^n$ je Hilbertov prostor u odnosu na normu generisanu skalarnim prizvodom $(\cdot|\cdot)$.

Zadaci za vežbanje

1. Ako je niz (x_m) tačaka iz $\mathbb{R}^n$ (proizvoljnog metričkog prostora (X, d)) konvergentan, dokazati da je onda on ograničen.

2. Ako je (x_m) konvergentan niz tačaka iz $\mathbb{R}^n$ $((X, d), (X, \|\cdot\|))$, onda on ima jedinstvenu graničnu vrednost. Dokazati.

3. Ako je niz (x_m) konvergentan u $\mathbb{R}^n$ $((X, d), (X, \|\cdot\|))$, dokazati da je onda i svaki njegov podniz konvergentan i ima istu graničnu vrednost kao i sam niz.

4. Neka su (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi normiranog vektorskog prostora X nad poljem $\mathbb{K}$. Dokazati da su tada nizovi (λx_n), $\lambda \in \mathbb{K}$, i $(x_n + y_n)$ konvergentni u X, pri čemu važe jednakosti

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n\,, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n\,.$$

5. Ako je niz (x_m) konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X ka x, dokazati da je tada $\lim \|x_m\| = \|x\|$.

---

* *Banach St. (1892-1945)-poljski matematičar*

** *Hilbert D. (1862-1943)-nemački matematičar*

6. Ako su (x_m) i (y_m) nizovi u $\mathbb{R}^n$ odn. (X, d), koji konvergiraju ka x i y respektivno, dokazati da tada $d(x_m, y_m) \to d(x, y)$.

7. Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u metričkom prostoru (X, d) i neka je (x_n) konvergentan niz. Dokazati da niz (y_n) konvergira ka $\lim x_n$ onda i samo onda ako $d(x_n, y_n) \to 0$.

8. Prostor $C([a, b])$ je kompletan u odnosu na metriku definisanu sa $d(x, y) := \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$. Dokazati.

9. Dokazati da je normiran vektorski prostor $B(X, Y)$ definisan u zadatku 8. prethodnog odeljka Banahov, ako je Y Banahov prostor.

10. Prostor $E = (0, 1)$ nije kompletan u odnosu na metriku $d(x, y) = |x - y|$. Dokazati.

1.3. STRUKTURA SKUPOVA U $\mathbb{R}^n$

U dosadašnjem izlaganju izgrađena je struktura u $\mathbb{R}^n$ koja nam omogućava sagledavanje "geometrije" u $\mathbb{R}^n$. U ovom odeljku razmotrićemo različite tipove skupova u $\mathbb{R}^n$ kao i njihove osobine.

Definicija 1. *Tačka x je* ***unutrašnja tačka*** *skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ ako postoji otvorena kugla $K(x, \varepsilon)$ koja je sadržana u skupu E. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa E naziva se* ***unutrašnjost skupa*** *i označava se sa $\overset{\circ}{E}$ ili sa $intE$*

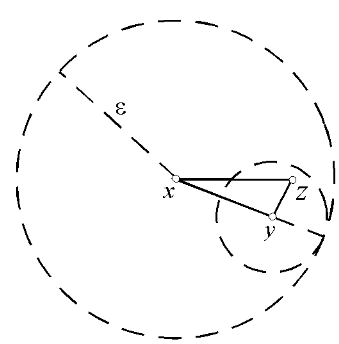
Ako je x unutrašnja tačka skupa E, onda je jasno $x \in E$, odn. važi $intE \subset E$. Da obrat u opštem slučaju ne važi, pokazuje sledeći

Primer 1. Za skup $E = [0, 1)$ jedino $x = 0$ nije unutrašnja tačka skupa E, pa $E \subsetneqq intE = (0, 1)$.

Definicija 2. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* ***otvoren*** *ako su mu sve tačke unutrašnje, odn. ako je $E \subset intE$.*

Stav 1. *Otvorena kugla je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $y \in K(x, \varepsilon)$. Tada je kugla $K(y, \varepsilon - d(x, y)) \subset K(x, \varepsilon)$. Zaista, ako je $z \in K(y, \varepsilon - d(x, y))$, tada je $d(z, y) < \varepsilon - d(x, y)$, odakle je $d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon$. Kako je $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$, to je $z \in K(x, \varepsilon)$. Time smo dokazali da je y unutrašnja tačka skupa $K(x, \varepsilon)$. Kako je y priozvoljna tačka skupa $K(x, \varepsilon)$, on je otvoren. ■



Sl. 2

Stav 2. *Familija $\mathcal{G}$ svih otvorenih skupova prostora $\mathbb{R}^n$ ima sledeća svojstva:*

(*i*) $\varnothing$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{G}$,

(*ii*) *ako je* $\{G_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{G}$, *tada je* $\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{G}$,

(*iii*) *ako je* $\{G_i\}_{i=1}^{i=n} \subset \mathcal{G}$, *onda je* $\cap_{i=1}^{i=n} \in \mathcal{G}$.

Dokaz. (i) Očigledno. (ii) Neka je $x \in \cup_{i\in I} G_i$. Tada postoji indeks $i_0 \in I$, tako da je $x \in G_{i_0}$. Skup G_{i_0} je otvoren, pa postoji $K(x,\varepsilon) \subset G_{i_0} \subset \cup_{i\in I} G_i$. Skup $\cup G_i$ je dakle otvoren. (iii) Ako je $x \in \cap_{i=1}^n G_i$, tada je $x \in G_i$ za svako $i = \overline{1,n}$. Stoga za svako $i = \overline{1,n}$ postoji otvorena kugla $K(x,\varepsilon_i) \subset G_i$. Neka je $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Tada je $K(x,\varepsilon) \subset K(x,\varepsilon_i)$ za svako $i = \overline{1,n}$, pa je $K(x,\varepsilon) \subset G_i$ za svako $i = \overline{1,n}$. Odavde sledi da je $K(x,\varepsilon) \subset \cap_{i=1}^n G_i$, pa je $\cap_{i=1}^n G_i$ otvoren skup. ■

Kada su u pitanju otvoreni skupovi, napomenimo da se svojstvo otvorenosti skupa ne prenosi iz podprostora na prostor, što pokazuje sledeći

Primer 2. Skup (a,b) je otvoren u $\mathbb{R}$, ali nije otvoren u $\mathbb{R}^2$.

Definicija 3. *Skup U je* ***okolina tačke*** *$x \in \mathbb{R}^n$ ako postoji otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$ tako da je $x \in G \subset U$.*

Očigledno je otvoren skup okolina svake svoje tačke. Otvorena kugla $K(x,\varepsilon)$ i otvoreni paralelepiped $P(x;\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)$ su okoline svih svojih tačaka. Stoga su definicije 1. i 2. u prethodnom odeljku opravdane.

Okolina tačke u opštem slučaju ne mora biti otvoren skup, što pokazuje sledeći

Primer 3. $K[x,\varepsilon]$ je okolina tačke x, jer je $K(x,\frac{\varepsilon}{2}) \subset K[x,\varepsilon]$, ali $K[x,\varepsilon]$ očigledno nije otvoren skup.

Sada možemo dati sledeću definiciju granične vrednosti niza. Niz (x_n) je konvergentan i ima graničnu vrednost x, ako za svaku okolinu U_x tačke x postoji prirodan broj n_ε tako da je $x_n \in U_x$ za svako $n \geq n_\varepsilon$.

Definicija 4. *Tačka $x \in \mathbb{R}^n$ je* ***adherentna tačka*** *skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ ako u svakoj okolini tačke x postoji bar jedna tačka skupa E. Ukupnost* *svih adherentnih tačaka skupa E je* **adherencija** *ili* **zatvorenje** *skupa E. Zatvorenje skupa E označavamo sa $\overline{E}$ ili sa cl$E$.*

Iz same definicije očigledno sledi da je svaka tačka skupa istovremeno i adherentna tačka istog, odn. $E \subset \overline{E}$. Obrat u opštem slučaju ne važi, što dokazuje sledeći

Primer 4. Sve tačke skupa $S(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = \varepsilon\}$ su adherentne tačke skupa $K(x,\varepsilon)$, ali nijedna nije u $K(x,\varepsilon)$.

Definicija 5. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* **zatvoren** *ako sadrži sve svoje adherentne tačke, odn. ako je $\overline{E} \subset E$.*

Stav 3. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ otvoren je onda i samo onda ako je njegov komplement zatvoren.*

Dokaz. Uslov je neophodan. Neka je E otvoren i neka je x proizvoljna tačka skupa E. Kako je E otvoren skup, postoji okolina U_x tačke x tako da je $U_x \subset E$. Stoga u okolini U_x nema tačaka skupa $\mathbb{R}^n \setminus E$, pa x nije adherentna tačka skupa $\mathbb{R}^n \setminus E$. Dakle, nijedna tačka skupa E ne može biti adherentna tačka skupa $\mathbb{R}^n \setminus E$, pa su stoga sve adherentna tačke skupa $\mathbb{R}^n \setminus E$ u $\mathbb{R}^n \setminus E$, što je i trebalo dokazati.

Uslov je i dovoljan. Zaista, ako je $\mathbb{R}^n \setminus E$ zatvoren i $x \in E$, x nije adherentna tačka skupa $\mathbb{R}^n \setminus E$, pa postoji okolina U_x tačke x za koju je $(\mathbb{R}^n \setminus E) \cap U_x = \varnothing$, odn. $U_x \subset E$. Tačka x je dakle unutrašnja tačka skupa E, pa kako je ona proizvoljno izabrana, E je otvoren skup. ∎

Na osnovu dokazanog stava, stava 2. i De Morganovih* formula lako se dokazuje sledeći

Stav 4. *Familija $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skupova iz $\mathbb{R}^n$ ima sledeća svojstva*

(*i*) $\varnothing$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{F}$,
(*ii*) *ako je* $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$, *tada je* $\cap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$,
(*iii*) *ako je* $\{F_i\}_{i=1}^{i=n} \subset \mathcal{F}$, *tada je* $\cup_{i=1}^{i=n} F_i \in \mathcal{F}$.

Primetimo da za zatvoren skup F i svaki konvergentan niz tačaka (x_n) iz F i granična vrednost $\lim x_m = x$ pripada skupu F. Zaista, ako je U_x proizvoljna okolina tačke x, tada su u njoj svi sem konačno mnogo članova niza (x_n), pa kako je F zatvoren skup, to je $x \in F$.

---

* Morgan A. de (1806-1871)-škotski matematičar

Definicija 6. *Tačka $x \in \mathbb{R}^n$ je* **tačka nagomilavanja** *skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ ako u svakoj okolini tačke x postoji bar jedna tačka skupa E različita od x. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa E nazivamo* **izvodnim skupom** *skupa E i označavamo sa E'.*

Očigledno je svaka tačka nagomilavanja istovremeno i adherentna tačka skupa. Obrat u opštem slučaju ne važi, što pokazuje sledeći

Primer 5. Za skup $E = (0,1) \cup \{2\}$ tačka $2 \in \overline{E}$, ali $2 \notin E'$. $E' = [0,1] \subset \overline{E} = [0,1] \cup \{2\}$.

Definicija 7. *Tačka $x \in \mathbb{R}^n$ je* **izolovana tačka skupa** *$E \subset \mathbb{R}^n$ ako postoji okolina tačke x u kojoj sem nje nema drugih tačaka skupa E.*

Iz same definicije se vidi da izolovana tačka skupa mora pripadati skupu, pa je ona samim tim i adherentna tačka skupa. Stoga je adherentna tačka skupa ili tačka nagomilavanja ili izolovana tačka.

Definicija 8. *Tačka $x \in \mathbb{R}^n$ je* **rubna tačka skupa** *E ako je adherentna tačka skupa E i njegovog komplementa. Skup svih rubnih tačaka skupa E je* **rub skupa** *E i označava se sa $r(E)$ ili $\delta(E)$.*

Očigledno je $r(E) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$, odakle sledi inkluzija $r(E) \subset \overline{E}$. Kako je $\overline{E} \subset E \cup r(E)$, to je $\overline{E} = E \cup r(E)$. Kao presek zatvorenih skupova, rub skupa je zatvoren.

Na kraju ovog odeljka dokažimo neke stavove koji će nam kasnije biti potrebni.

Stav 5. *Neka su A i B zatvoreni, disjunktni skupovi u $\mathbb{R}^n$ od kojih je bar jedan ograničen. Tada postoji $r > 0$ tako da je $d(x,y) \geq r$ za svako $x \in A$ i svako $y \in B$.*

Dokaz. Pretpostavimo da takav broj ne postoji. To znači da za svako $n \in N$ postoji $x_n \in A$ i $y_n \in B$ tako da je $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Neka je recimo skup A ograničen. Tada je i niz (x_n) ograničen, pa prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi sadrži bar jedan konvergentan podniz (x_{n_k}). Neka je $\lim x_{n_k} = x$. Kako je A zatvoren skup, to je $x \in A$. Dokažimo da je $\lim y_{n_k} = x$. Na osnovu načina izbora nizova (x_n) i (y_n) i nejednakosti trougla imamo

$$d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) < d(x, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti vidimo da $y_{n_k} \to x$. Skup B je zatvoren, pa $x \in B$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su A i B disjunktni skupovi. ■

Definicija 9. *Za skupove $A, B \subset \mathbb{R}^n$ veličina*

$$d(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y)$$

zove se ***rastojanje između skupova*** *A i B.*

Ako je jedan od skupova u ovoj definiciji tačka, govorimo o rastojanju te tačke od skupa. Sada prethodni stav možemo formulisati i na sledeći način. Ako su skupovi A i B zatvoreni i disjunktni, pri čemu je bar jedan od njih ograničen, tada je rastojanje između njih veće od nule.

Stav 6. *Ako je rastojanje tačke $x \in \mathbb{R}^n$ od zatvorenog skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ jednako r, tada postoji tačka $y \in A$ tako da je $d(x,y) = r$.*

Dokaz. Kako je $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$, to za svako $n \in N$ postoji $y_n \in A$ tako da je $d(x,y_n) < r + \frac{1}{n}$. Niz (y_n) je ograničen, jer je $y_n \in K(x, r + \frac{1}{n}) \subset K(x, r+1)$ za svako $n \in N$. Prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi on sadrži bar jedan konvergentan podniz (y_{n_k}). Skup A je zatvoren, pa $\lim y_{n_k} = y$ pripada skupu A. Dokažimo da je $d(x,y) = r$. Kako je

$$d(x,y) \le d(x,y_{n_k}) + d(y_{n_k},y) < r + \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k},y),$$

prelaskom na graničnu vrednost kada $k \to +\infty$ dobijamo nejednakost $d(x,y) \le r$. Očigledno je međutim $d(x,y) \ge d(x,A) = r$, što dokazuje da je $d(x,y) = r$. ■

Definicija 10. Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ i $\eta > 0$, označimo sa A_η skup tačaka $y \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $d(y,A) \le \eta$.

Stav 7. *Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i ograničen skup, tada je takav i skup A_η.*

Dokaz. Kako je A ograničen skup, postoji $r > 0$ tako da je $A \subset K(O,r)$. Dokažimo da je $A_\eta \subset K(O, r+\eta)$. Neka je $x \in A_\eta$, odn.

$d(x, A) \leq \eta$. Skup A je zatvoren, pa prema prethodnom stavu postoji $y \in A$ tako da je $d(x, y) = d(x, A) \leq \eta$. No onda je $d(x, O) \leq d(x, y) + d(y, O)$. Kako je $A \subset K(O, r)$, $y \in A$, to je $d(y, O) < r$, pa je $d(x, O) < r + \eta$, odn. $x \in K(O, r + \eta)$. Time smo dokazali da je $A_\eta \subset K(O, r+\eta)$. Dokažimo da je skup A_η zatvoren. Neka je $x \in \overline{A}_\eta$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $y \in A_\eta$ tako da je $d(x, y) < \varepsilon$. Na osnovu prethodnog stava i definicije skupa A_η postoji neko $z_0 \in A$ tako da je $d(y, z_0) = d(y, A) \leq \eta$. No onda je

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leq d(x, z_0) \leq d(x, y) + d(y, z_0) < \varepsilon + \eta$$

za svako $\varepsilon > 0$. Prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti kada $\varepsilon \to 0$ dobijamo da je $d(x, A) \leq \eta$, odakle sledi da je $x \in A_\eta$. Time smo dokazali inkluziju $\overline{A}_\eta \subset A_\eta$, odn. zatvorenost skupa A_η. ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da preslikavanje $A \to intA$ ima sledeća svojstva:
   (i) $int(intA) = intA$,
   (ii) $A \subset B \Rightarrow intA \subset intB$,
   (iii) $int(A \cap B) = intA \cap intB$.
2. Dokazati da je skup otvoren onda i samo onda ako je okolina svake svoje tačke.
3. Dokazati da je skup $U \subset \mathbb{R}^n$ okolina tačke $x \in \mathbb{R}^n$ ako i samo ako za svaku koordinatu x_i, $i = \overline{1, n}$, tačke x postoji okolina $U_i \subset \mathbb{R}$ tako da je $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset U$.
4. Dokazati da su skupovi $K[x, r]$ i $S(x, r)$ zatvoreni.
5. Dokazati da operator $A \to clA$ ima sledeća svojstva:
   (i) $cl(cl(A)) = cl(A)$,
   (ii) $A \subset B \Rightarrow clA \subset clB$,
   (iii) $cl(A \cup B) = clA \cup clB$.
6. Dokazati jednakosti $\mathbb{R}^n \setminus clA = int(\mathbb{R}^n \setminus A)$, $\mathbb{R}^n \setminus intA = cl(\mathbb{R}^n \setminus A)$.
7. Dokazati da je svaki konačan skup zatvoren skup koji nema nijednu tačku nagomilavanja.
8. Dokazati da je u opštem slučaju $cl(A \cap B) \neq clA \cap clB$ i $int(A \cup B) \neq intA \cup intB$.
9. Dokazati da je $r(A \cup B) \subset r(A) \cap r(B)$, $r(A \cap B) \subset r(A) \cap r(B)$ i $r(A \setminus B) \subset r(A) \cup r(B)$
10. Dokazati da je $x \in clA \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.
11. Dokazati da je skup $F \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren onda i samo onda ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

12. Dokazati da je skup zatvoren onda i samo onda ako je $r(A) \subset A$.

13. Dokazati da se svaki neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ može prikazati kao unija prebrojivo mnogo zatvorenih skupova oblika $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

14. Ako je x tačka nagomilavanja skupa A koja ne pripada skupu A, dokazati da je tada $x \in r(A)$.

15. Dokazati da je $cl(r(A)) = r(A)$.

16. Dokazati da u svakom metričkom prostoru važi jednakost $d(A \cup B, C) = \min(d(A, C), d(B, C))$.

17. Dokazati da u $\mathbb{R}^n$ postoje zatvoreni disjunktni skupovi A i B tako da je $d(A, B) = 0$.

18. Navesti primer skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ za koji je $d(x, A) = r$, pri čemu ne postoji tačka $y \in A$ za koju je $d(x, y) = r$.

1.4. PUT POVEZANI SKUPOVI. OBLAST

Glava I: Diferencijalni račun ...,

Definicija 1. *Skup γ tačaka $x \in \mathbb{R}^n$ čije su koordinate x_i neprekidne funkcije $x_i(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, naziva se* ***krivom*** *ili* ***putanjom*** *čiji je početak u tački $x(a) = (x_i(a))$, a kraj u tački $x(b) = (x_i(b))$.*

U skupovnom zapisu je $\gamma = \{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) : x_i(t) \in C([a, b]), i = \overline{1, n}\}$. Ako su sve koordinatne funkcije linearne, onda je γ duž koja spaja tačke $x(a)$ i $x(b)$ u $\mathbb{R}^n$.Tako je, na primer, duž koja spaja tačke $x' = (x'_i)$ i $x'' = (x''_i)$ iz $\mathbb{R}^n$ definisana linearnim funkcijama

$$x_i = x'_i + t(x''_i - x'_i)\ ,\ i = \overline{1, n},\ t \in [0, 1]\,.$$

Ako je $-\infty < t < +\infty$, imamo jednačinu prave kroz tačke x' i x''. Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $x_0 \in \mathbb{R}^n$ u pravcu vektora $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\sum \alpha_i^2 > 0$, data je jednačinama

$$x_i = x_i^0 + \alpha_i t,\ \ i = \overline{1, n},\ \ -\infty < t < +\infty\,.$$

Definicija 2. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* ***put povezan*** *ako se svake dve tačke skupa E mogu spojiti putanjom koja je cela u skupu E. Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* ***konveksan*** *ako za svake dve tačke skupa E duž koja ih spaja pripada skupu E.*

Očigledno je svaki konveksan skup put povezan; obrat u opštem slučaju ne važi, što jednostavno ilustruje

Primer 1. Kružnica $x^2 + y^2 = 1$ je put povezan skup u $\mathbb{R}^2$, jer se svake dve tačke ove kružnice mogu spojiti putanjom čije su koordinate definisane neprekidnim funkcijama $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Očigledno je da kružnica nije konveksan skup.

Definicija 3. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* ***oblast*** *ako je otvoren i put povezan skup. Skup je* ***zatvorena oblast*** *ako je on zatvorenje neke oblasti.*

Primer 2. Jedan od najjednostavnijih skupova koji predstavljaju oblast je otvorena kugla $K(x_0, r)$. Taj skup je otvoren, što smo ranije već dokazali. Dokažimo da je on put povezan. Neka su $x_1, x_2 \in K(x_0, r)$. Dokažimo da sve tačke duži $x_i = x_i^1 + (x_i^2 - x_i^1)t$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [0,1]$, koja spaja tačke x_1 i x_2 pripadaju kugli $K(x_0, r)$. Primenom nejednakosti Helderove imamo

$$
\begin{aligned}
d(x(t), x_0) &= \{\sum_{i=1}^{n}(x_i(t) - x_i^0)^2\}^{1/2} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n}(tx_i^2 + (1-t)x_i^1 - tx_i^0 + (t-1)x_i^0)^2\}^{1/2} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n}((x_i^2 - x_i^0)t + (x_i^1 - x_i^0)(1-t))^2\}^{1/2} \leq \\
&\leq t\{\sum_{i=n}^{n}(x_i^2 - x_i^0)^2\}^{1/2} + (1-t)\{\sum_{i=n}^{n}(x_i^1 - x_i^0)^2\}^{1/2} = \\
&= td(x_2, x_0) + (1-t)d(x_1, x_0) < tr + (1-t)r = r.
\end{aligned}
$$

Stav 1. *Ako put povezan skup $A \subset \mathbb{R}^n$ ima neprazan presek sa skupom B i njegovim komplementom, onda on ima neprazan presek i sa njegovim rubom.*

Dokaz. Skupovi $A \cap B$ i $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$ su neprazni; neka je $x_1 \in (A \cap B)$ i $x_2 \in A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$. Kako je A putpovezan skup, postoji putanja $\gamma : [a, b] \to A$ tako da je $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$ i $\gamma(t) \in A$ za svako $t \in [a, b]$. Skup $\{t \in [a, b] : \gamma(t) \in B\}$ je ograničen, pa postoji supremum tog skupa. Označimo ga sa τ. Tada u svakoj okolini tačke $\gamma(\tau)$ ima tačaka skupa B, kao i njegovog komplementa. Zaista, ako bi postojala okolina tačke $\gamma(\tau)$ koja je cela u skupu B, tada bi zbog neprekidnosti funkcije

γ postojala okolina tačke τ koja bi se sa γ preslikavala u okolinu tačke $\gamma(\tau)$, pa τ ne bi bio supremum posmatranog skupa. Slično se dokazuje da ne postoji okolina tačke $\gamma(\tau)$ koja je cela sadržana u skupu $\mathbb{R}^n \setminus B$. Stoga je $\gamma(\tau) \in r(B)$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da skup $\mathbb{R}^n \setminus S(x,r)$, gde je $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$, nije put povezan.

2. Dokazati da svaka prosta zatvorena kriva u ravni razbija ravan na dve oblasti, od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena.

3. Dokazati da se put povezan skup u $\mathbb{R}^n$ ne mož e prikazati kao unija dva otvorena i disjunktna skupa.

1.5. KOMPAKTNI SKUPOVI U $\mathbb{R}^n$

Definicija 1. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je* **kompaktan** *ako svaki niz tačaka skupa E sadrži konvergentan podniz čija je granična vrednost sadržana u skupu E.*

Stav 1. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan onda i samo onda ako je on zatvoren i ograničen.*

Dokaz. Uslov je neophodan. Da to dokažemo, pretpostavimo da skup E nije ograničen. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in E$ tako da je $d(O, x_n) \geq n$, gde je O koordinatni početak. Očigledno je $\lim x_n = \infty$. Međutim, i svaki podniz ovog niza konvergira ka ∞, pa E nije kompaktan.

Ako skup E nije zatvoren, tada postoji tačka $x \in \overline{E}$ koja nije u E. Kako je x adherentna tačka skupa E, postoji niz (x_n) tačaka skupa E koji konvergira ka tački x. No onda i svaki podniz tog niza konvergira ka tački x, što dokazuje da E nije kompakt.

Uslov je i dovoljan. Zaista, neka je E zatvoren i ograničen skup, i neka je $(x_n) \subset E$ proizvoljan niz. Kako je skup E ograničen, takav je i niz (x_n). Prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi on sadrži bar jedan konvergentan podniz. Granična vrednost tog podniza zbog zatvorenosti skupa E pripada skupu E, pa je skup E kompaktan. ■

Dokazani stav omogućava nam da na jednostavan način utvrdimo kompaknost skupova u $\mathbb{R}^n$. Tako su na primer skupovi $K[x,r]$ i $S(x,r)$ kompaktni u $\mathbb{R}^n$.

Da bi smo dokazali jednu od značajnijih karakterizacija kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$, dokažimo sledeću

Lema 1. *Neka je $\{Q_n\}_{n\in N}$ niz umetnutih kocki u $\mathbb{R}^n$, tj, skup kocki za koje je*

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots \supseteq Q_n \supseteq \cdots .$$

Ako dužine stranica d_n kocki Q_n čine nula niz, tada postoji jedinstvena tačka $\xi \in \mathbb{R}^n$ koja pripada svim kockama.

Dokaz. Neka je $Q_m = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^m \leq x_i \leq a_i^m + d_m,\ i = \overline{1,n}\}$, $m \in \mathbb{N}$, niz umetnutih kocki, pri čemu je $\lim d_m = 0$. Očigledno je $\{[a_i^m, a_i^m + d_m]\}_{m\in N}$ niz umetnutih intervala za svako $i = \overline{1,n}$, pri čemu niz (d_m) dužina tih segmenata teži nuli kada $m \to +\infty$. Stoga za svako $i = \overline{1,n}$ postoji jedinstvena vrednost $\xi_i \in \mathbb{R}$ koja pripada segmentu $[a_i^m, a_i^m + d_m]$ za svako $m \in \mathbb{N}$. No onda tačka $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ pripada svim kockama Q_m i jednoznačno je određena. ∎

Definicija 2. *Familija $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ je* **pokrivač skupa** *$E \subset \mathbb{R}^n$ ako je*

$$E \subset \cup_{i\in I} G_i \,.$$

Pokrivač je **otvoren** *ako je svaki element te familije otvoren skup. Ako je I konačan skup, pokrivač $\mathcal{G}$ je* **konačan**. *Svaka podfamilija $\mathcal{G}'$ familije $\mathcal{G}$ je* **podpokrivač pokrivača** *$\mathcal{G}$ ako je i sama pokrivač skupa E.*

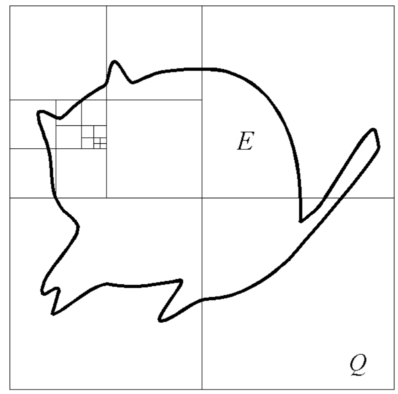
Teorema 2. (Borel*-Lebeg)** *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan onda i samo onda ako se iz svakog otvorenog pokrivača skupa E može izdvojiti konačan podpokrivač.*

Dokaz. Uslov je potreban. Da to dokažemo, neka je E kompaktan skup i pretpostavimo da postoji otvoren pokrivač $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ skupa E iz koga se ne može izdvojiti konačan podpokrivač. Kao kompaktan,

---

* Borel E. (1871-1956)-francuski matematičar

** Lebesque H. L. (1875-1941)-francuski matematičar skup E je ograničen, pa se može smestiti u neku kocku Q. Neka su dužine stranica te kocke d. Podelimo kocku Q na 2^n podudarnih kocki Q_i. Dužine stranica kocki Q_i su $d/2$. Uočimo sve neprazne skupove $E \cap Q_i$. Njihova unija je skup E, a $\mathcal{G}$ je otvoren pokrivač svakog od njih. Na bar jednom od skupova $E \cap Q_i$ iz pokrivača $\mathcal{G}$ se ne može izdvojiti konačan podpokrivač skupa $E \cap Q_i$, jer bi se u protivnom iz pokrivača $\mathcal{G}$ mogao izdvojiti konačan podpokrivač skupa E, što je suprotno pretpostavci. Označimo sa $E \cap Q_{i_1}$ skup koji ima navedeno svojstvo, i razložimo Q_{i_1} na 2^n podudarnih kocki $Q_{i_1 i}$. Istim rezonovanjem zaključujemo da postoji kocka $Q_{i_1 i_2}$ koja ima neprazan presek sa skupom E, pri čemu se iz pokrivača $\mathcal{G}$ skupa $E \cap Q_{i_1 i_2}$ ne može izdvojiti konačan podpokrivač. Nastavljajući opisani postupak, dobija se niz umetnutih kocki



Sl. 3

$$Q \supseteq Q_{i_1} \supseteq Q_{i_1 i_2} \supseteq \cdots \supseteq Q_{i_1 i_2 \ldots i_m} \supseteq \ldots$$

od kojih svaka ima napred opisana svojstva. Dužina stranice kocke $Q_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ je $d/2^m$ i teži nuli kada $m \to +\infty$. Stoga prema dokazanoj lemi postoji i jednoznačno je određena tačka ξ koja pripada svakom članu konstruisanog niza kocki.

Dokažimo da je ξ adherentna tačka skupa E. Neka je $K(\xi, \varepsilon)$ proizvoljna okolina tačke ξ. Kako $d/2^m \to 0$ kada $m \to +\infty$, postoji $m_\varepsilon \in N$ tako da je $d\sqrt{n}/2^m < \varepsilon$ za svako $m \geq m_\varepsilon$. Za svako $x \in Q_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ i svako $m \geq m_\varepsilon$ je

$$d(x, \xi) \leq \frac{d\sqrt{n}}{2^m} < \varepsilon\,,$$

pa je $Q_{i_1 i_2 \cdots i_m} \subset K(\xi, \varepsilon)$. No onda je tim pre $E \cap Q_{i_1 i_2 \cdots i_m} \subset K(\xi, \varepsilon)$, što dokazuje da u svakoj okolini tačke ξ ima tačaka skupa E, pa je ξ adherentna tačka skupa E. Kao kompaktan, skup E je zatvoren, pa je $\xi \in E$.

Familija $\mathcal{G}$ je pokrivač skupa E, pa postoji neki element $G_{i_0} \in \mathcal{G}$ tako da je $\xi \in G_{i_0}$. Skup G_{i_0} je otvoren, pa postoji otvorena kugla

$K(\xi,\varepsilon)$ koja je sadržana u skupu G_{i_0}. No onda ponovo zaključujemo da postoji neka kocka $Q_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ koja je sadržana u $K(\xi,\varepsilon)$. Stoga je

$$E \cap Q_{i_1 i_2 \cdots i_m} \subset Q_{i_1 i_2 \cdots i_m} \subset K(\xi,\varepsilon) \subset G_{i_0}\,,$$

što je u kontradikciji sa svojstvom svakog člana konstruisanog niza kocki.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da E nije kompaktan skup. To znači da u skupu E postoji niz (x_n) koji ne sadrži nijedan konvergentan podniz čija granična vrednost pripada skupu E. No onda nijedna tačka skupa E ne može biti granična vrednost nijednog podniza niza (x_n). Stoga za svaku tačku $x \in E$ postoji okolina O_x te tačke u kojoj ima samo konačno mnogo tačaka niza (x_n). Familija $\mathcal{O} = \{O_x\}_{x\in E}$ je otvoren pokrivač skupa E, pri čemu svaki njegov element sadrži samo konačno mnogo elemenata niza (x_n). Ako bi se iz njega mogao izdvojiti konačan podpokrivač, onda bi skup E sadržao samo konačno mnogo članova niza (x_n), što je nemoguće. Dakle, ako E nije kompaktan skup, onda postoji otvoren pokrivač iz koga se ne može izdvojiti nijedan konačan podpokrivač. ■

Napomenimo da je u dokazanoj teoremi zahtev da pokrivač bude otvoren suštinski. Zaista, familija $\{[1/(n+1), 1/n] : n \in \mathbb{N}\}$ je pokrivač kompaktnog skupa $[0,1]$ iz koga se ne može izdvojiti konačan podpokrivač.

Zadaci za vežbanje

1. Ne koristeći stav 1. dokazati da je svaka zatvorena kocka u $\mathbb{R}^n$ kompaktan skup.

2. Ako je A kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$, a B kompaktan skup u $\mathbb{R}^m$, dokazati da je $A \times B$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^{n+m}$.

3. Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $\eta > 0$, dokazati da je A_η kompaktan skup.

4. Dokazati da proizvoljan pokrivač kompaktnog skupa ne mora sadržati konačan podpokrivač.

5. Dokazati da za svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{G} = \{G_i : i = \overline{1,n}\}$ kompaktnog skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ postoji broj $l > 0$ tako da za svaki skup B dijametra manjeg od l postoji $G_k \in \mathcal{G}$ tako da je $B \subset G_k$.

6. Skup $M \subset \mathbb{R}^n$ je **ε-mreža skupa** $E \subset \mathbb{R}^n$, ako je $E \subset \cup\{K(x,\varepsilon) : x \in M\}$. Dokazati da svaki kompaktan skup $E \subset \mathbb{R}^n$ ima konačnu ε-mrežu za svako $\varepsilon > 0$.

7. Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren skup. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji ε-mreža skupa F, dokazati da je F kompaktan skup.

8. Ako je $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_n \supset \cdots$ niz umetnutih kompaktnih skupova, dokazati da je $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{K}_n \neq \varnothing$.

9. Neka je $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I}$ proizvoljna familija kompaktnih skupova. Ako je za svaki konačan podskup $I_0 \subset I$ $\cap\{\mathcal{K}_i : i \in I_0\} \neq \varnothing$, dokazati da je tada i $\cap\{\mathcal{K}_i : i \in I\} \neq \varnothing$.

10. Usvajajući svojstvo formulisano u teoremi 2. kao definiciono za kompaktne skupove u $\mathbb{R}^n$, dokazati Stav 1. kao i ekvivalentnost tako uvedene definicije sa definicijom 1..

2. GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJA VIŠE PROMENLjIVIH

2.1. FUNKCIJE VIŠE PROMENLjIVIH

U ovom odeljku izučavamo realne funkcije više promenljivih. To su funkcije čiji je domen podskup n-dimenzionalnog euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$, a skup vrednosti je podskup realne prave. Ako je D_f oblast definisanosti funkcije f i $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$, onda funkciju f zapisujemo u obliku $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ili kraće $y = f(x)$.

Skup $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_f,\ y = f(x)\}$ nazivamo **grafikom funkcije** f.

2.2. GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA VIŠE PROMENLjIVIH

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na skupu $X_f \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset X_f$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa E. Za funkciju f kažemo da ima* ***graničnu vrednost*** *a u tački x_0 po skupu E ako za svaki niz tačaka $(x_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ koji konvergira ka x_0, niz $(f(x_n))$ konvergira broju a.*

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = a.$$

Uvedena definicija poznata je kao Hajneova* definicija. Kao u slučaju funkcija jedne promenljive, i ovde se može uvesti Košijeva definicija.

Definicija 1'. *Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa E koji je sadržan u domenu X_f funkcije f. Broj a je* ***granična vrednost funkcije*** *f u tački x_0 po skupu E ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E \setminus \{x_0\}$*

$$d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ekvivalentnost ovih definicija dokazuje se analogno kao i u slučaju funkcija jedne promenljive.

U definiciji 1'. implicitno smo koristili pojam otvorene kugle kao okolinu tačke x_0. Lako se može dokazati da se u ovoj definiciji otvorena kugla može zameniti priozvoljnom okolinom tačke x_0. Na taj način prethodnu definiciju simbolički možemo formulisati na sledeći način:

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists O_{x_0})(\forall x \in X_f)$$
$$\left(x \in E \cap O_{x_0} \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\right).$$

Ako funkcija f definisana na skupu X_f ima graničnu vrednost po skupu $E \subset X_f$ u tački nagomilavanja x_0 skupa E, tada za svaku okolinu U_{x_0} tačke x_0 funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 po skupu $U_{x_0} \cap E$. Ukoliko navedene granične vrednosti postoje, one su jednake. Lako se može dokazati da funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 po skupu E, ako postoji bar jedna okolina U_{x_0}tačke x_0 tako da postoji granična vrednost funkcije f u tački x_0 po skupu $E \cap U_{x_0}$. To pokazuje da egzistencija granične vrednosti funkcije ne zavisi od izbora okoline U_{x_0} tačke x_0. Svojstvo funkcije koje na zavisi od izbora okoline posmatrane tačke naziva se **lokalno svojstvo funkcije**.

Ako je funkcija f definisana u nekoj okolini U_{x_0} tačke x_0 osim u tački x_0, onda granična vrednost funkcije f u tački x_0 po skupu $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ pretstavlja uobičajenu graničnu vrednost funkcije, koju u tom slučaju označavamo sa $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

---

* Heine E. (1821-1881)-nemački matematičar

Graničnu vrednost funkcije f u tački x_0 po skupu $(U_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap l$, gde je l prava kroz tačku x_0, nazivamo **graničnom vrednošću funkcije po pravoj l** u tački x_0. Ako funkcija ima graničnu vrednost u nekoj tački, ona ima graničnu vrednost u toj tački po ma kojoj pravoj koja prolazi kroz tu tačku. Da obrat u opštem slučaju ne važi, pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

ima graničnu vrednost u tački $(0,0)$ po ma kojoj pravoj kroz tu tačku, jer je

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^2 \beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = 0$$

za $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Granična vrednost funkcije f u tački $(0,0)$ ne postoji. Zaista, nizovi $(1/n, 1/n^2)$ i $(1/n, -1/n^2)$ teže tački $(0,0)$ dok

$$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to \frac{1}{2}\ ,\ f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2}) \to -\frac{1}{2},$$

pa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji.

Stav 1. *Ako funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 po skupu E, onda je ona jedinstvena.*

Dokaz. Neposredno sledi iz definicije 1. i činjenice da konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost. ■

Neka su funkcije f i g definisane na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa E. Sledeća svojstva graničnih vrednosti funkcija lako se dokazuju na osnovu definicije 1. i poznate teoreme o graničnoj vrednosti nizova.

Teorema 2. *Ako postoje granične vrednosti funkcija f i g u tački x_0 po skupu E, tada postoje granične vrednosti funkcija λf, $f \pm g$, $f \cdot g$ i važe jednakosti:*

$$(i)\ \lim_{x\to x_0, x\in E} \lambda f = \lambda \lim_{x\to x_0, x\in E} f\,,$$

$$(ii)\ \lim_{x\to x_0, x\in E} (f \pm g) = \lim_{x\to x_0, x\in E} f \pm \lim_{x\to x_0, x\in E} g\,,$$

$$(iii)\ \lim_{x\to x_0, x\in E} (f \cdot g) = \lim_{x\to x_0, x\in E} f \cdot \lim_{x\to x_0, x\in E} g\,.$$

Ako je osim toga $\lim_{x\to x_0, x\in E} g \neq 0$, *tada postoji granična vrednost funkcije* f/g *u tački* x_0 *po skupu* E *i važi*

$$(iv) \quad \lim_{x\to x_0, x\in E}(f/g) = \lim_{x\to x_0, x\in E} f \Big/ \lim_{x\to x_0, x\in E} g\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $f(x) \leq g(x)$ za svako x iz neke okoline O_a tačke a. Ako postoji $\lim_{x\to a} f = p$ i $\lim_{x\to a} g = q$, dokazati da je tada $p \leq q$.

2. Neka $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = l$. Ako postoji okolina $O_a \subset \mathbb{R}^n$ tačke a tako da je $f \leq h \leq g$ za svako $x \in O_a$, tada je $\lim_{x\to a} h = l$.

3. (Koši)Da bi funkcija f definisana na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ imala graničnu vrednost u tački x_0 po skupu $E \subset X$, $x_0 \in E'$, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x', x'' \in E \setminus \{x_0\}$

$$d(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

4. Dokazati da fukcija $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ nema graničnu vrednost u tački $(0,0)$.

5. Dokazati da funkcija $f(x,y) = (x^4 + y^2)/(x^2 + y^4)$ nema graničnu vrednost kada $x \to \infty$ i $y \to \infty$.

6. Dokazati da funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } 0 < y < x^2\,, \\ 0, & \text{u ostalim tačkama} \end{cases}$$

nema graničnu vrednost u tački $(0,0)$, ali ima jednake granične vrednosti po svim pravcima kroz tu tačku.

7. Odrediti sledeće granične vrednosti:

$$(i) \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2y^2} - 1}{x^2 + y^2} \qquad (ii) \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$$

$$(iii) \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (1 + x^2y^2)^{1/(x^2+y^2)} \qquad (iv) \lim_{\substack{x\to \infty \\ y\to \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

2.3. PONOVLJENE GRANIČNE VREDNOSTI

Pri izučavanju graničnih vrednosti funkcija, nezavisno promenljiva je konvergirala ka tački u kojoj tražimo graničnu vrednost na proizvoljan način. Međutim, nezavisno promenljiva može težiti ka tački u kojoj tražimo graničnu vrednost duž poligonalne linije kod koje je svaka stranica paralelna tačno jednoj koordinatnoj osi. Tako dolazimo do pojma ponovljene granične vrednosti.

Definicija 1. *Neka je funkcija* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *definisana u nekoj okolini tačke* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Ukoliko postoji granična vrednost*

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1^0}} \Big(\lim_{x_{i_2} \to x_{i_2^0}} \big(\cdots \big(\lim_{x_{i_n} \to x_{i_n^0}} f(x_1, \ldots, x_n) \big) \cdots \big) \Big),$$

gde je $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *neka permutacija skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *onda se ona naziva* ***ponovljenom graničnom vrednošću funkcije*** f *u tački* x_0.

U nekoliko sledećih primera pokazaćemo da između graničnih vrednosti i ponovljenih graničnih vrednosti ne mora da postoji nikakva međusobna zavisnost.

Primer 1. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ i } y \neq 0\,, \\ 0, & x = 0 \text{ ili } y = 0\,, \end{cases}$$

ima graničnu vrednost 0 u tački $(0,0)$, što neposredno sledi iz nejednakosti $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$. Međutim, nijedna od ponovljenih graničnih vrednosti ne postoji.

Primer 2. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & \text{ako je } y \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } y = 0\,, \end{cases}$$

ima graničnu vrednost 0 u tački $(0,0)$; štaviše, $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$, dok $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ ne postoji.

Primer 3. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2 + y^2 > 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2 + y^2 = 0\,, \end{cases}$$

ima obe ponovljene granične vrednosti u tački $(0,0)$ koje su jednake. Granična vrednost ove funkcije ne postoji u tački $(0,0)$, što se lako vidi ako se posmatraju granične vrednosti ove finkcije po nizovima $(1/n, 1/n)$ i $(1/n, -1/n)$ kada $n \to +\infty$.

Iz navedenih primera vidimo da egzistencija granične vrednosti ne obezbeđuje egzistenciju ponovljenih graničnih vrednosti. Takođe vidimo, da ne samo egzistencija ponovljenih graničnih vrednosti, već i njihova jednakost, ne garantuju egzistenciju granične vrednosti. Sledeća teorema daje delimičan odgovor na pitanje veze između granične vrednosti i ponovljenih graničnih vrednosti funkcija. Zbog jednostavnijeg zapisivanja, formulaciju i dokaz izvodimo za funkcije dve promenljive.

Teorema 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana u nekoj pravougaonoj okolini $P((x_0,y_0);\delta_1,\delta_2)$ tačke (x_0,y_0), osim možda u tačkama pravih $x=x_0$ i $y=y_0$. Ako postoji granična vrednost funkcije f u tački (x_0,y_0) i ako za svako $y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)\setminus\{y_0\}$ postoji*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y),$$

tada postoji ponovljena granična vrednost $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f$ i jednaka je graničnoj vrednosti funkcije f u tački (x_0,y_0).

Dokaz. Neka je $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ i neka je $\varepsilon>0$. Tada postoji pravougaona okolina $P((x_0,y_0);\eta_1,\eta_2)$ tačke (x_0,y_0), $0<\eta_1<\delta_1$, $0<\eta_2<\delta_2$ tako da za svaku tačku (x,y) iz te okoline koja je različita od (x_0,y_0) važi:

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon/2.$$

Neka je $y\neq y_0$ proizvoljna tačka za koju je $|y-y_0|<\eta_2$. Prelaskom na graničnu vrednost u prethodnoj nejednakosti kada $x\to x_0$, a zbog pretpostavljene egzistencije $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, sledi da je

$$|\varphi(y)-A|\le\varepsilon/2<\varepsilon$$

za svako y za koje je $0<|y-y_o|<\eta_2$. Time smo dokazali da je $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, odn.

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to y_0} f(x,y)\big)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\,. \;\blacksquare$$

Neposredno iz prethodne teoreme dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 1. *Ako su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme i ako za svako* $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\}$ *postoji* $\lim_{y \to y_0} f(x, y)$, *onda su ponovljene granične vrednosti jednake.*

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti graničnu vrednost i ponovljene granične vrednosti sledećih funkcija u tački $(0,0)$ ukoliko postoje:

$$(a)\; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{ako je } x+y \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x+y = 0\,, \end{cases}$$

$$(b)\; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{|x|-|y|}, & \text{ako je } |x| \neq |y|\,, \\ 0, & \text{ako je } |x| = |y|\,, \end{cases}$$

$$(c)\; f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } y \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } y = 0\,, \end{cases}$$

$$(d)\; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x = y = 0\,. \end{cases}$$

2. Da li postoje ponovljene granične vrednosti funkcija

$$a)\; f(x,y) = \frac{y + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x+y}\,,$$

$$b)\; f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\,, & \text{ako je } x \neq -y\,, \\ 0\,, & \text{ako je } x = -y\,, \end{cases}$$

u tački $(0,0)$?

3. Funkcija $f : X \mapsto \mathbb{R}$, gde je $X = \{(m,n) : m, n \in \mathbb{N}\}$, nazivamo **dvojnim nizom** i označavamo sa f_{mn}.

Neka je $f_{mn} = \cos^m 2\pi n! x$, $m, n \in \mathbb{N}\,, x \in \mathbb{R}$. Dokazati da je

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} f_{mn} = \chi(x),$$

gde je χ Dirihleova* funkcija. Da li postoje ostale dve granične vrednosti?

4. Dat je dvojni niz

$$a_{mn} = \frac{\sin m}{n}.$$

Dokazati da su ponovljene granične vrednost različite. Da li postoji dvostruka granična vrednost?

* Dirichlet L. G. (1805-1859)-nemački matematičar

2.4. NEPREKIDNOST FUNKCIJA

Definicija 1. *Funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$* ***neprekidna je u tački*** *$x_0 \in E$* ***po skupu*** *E ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E$*

$$d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funkcija je neprekidna na skupu, ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Mnoštvo svih funkcija neprekidnih na skupu E označavamo sa $\mathcal{C}(E)$.

Primetimo da je za $n = 1$ data definicija opštija od uobičajene definicije, kod koje se pretpostavlja da je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x_0. U datoj definiciji za tačku x_0 se ne pretpostavlja da je tačka nagomilavanja. Tačka x_0 može biti izolovana i u tom slučaju funkcija je očigledno prema datoj definiciji neprekidna u njoj.

Tako je na primer funkcija $y = \sqrt{\ln \cos 2\pi x}$ definisana u svim tačkama skupa Z. Svaka tačka ovog skupa je izolovana, pa je ona neprekidna po skupu Z u svakoj njegovoj tački, dok se o neprekidnosti ove funkcije u smislu ranije definicije nije moglo govoriti.

Ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa E, onda je neprekidnost funkcije f u tački x_0 po skupu E ekvivalentna sa činjenicom da je

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = f(x_0)\,. \tag{1}$$

Neprekidnost funkcije po skupu može se formulisati i pomoću nizova. Lako je proveriti da je sledeća definicija ekvivalentna sa definicijom 1. .

Definicija 1'. *Funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ je* **neprekidna u tački** *$x_0 \in E$* **po skupu** *E ako za svaki niz tačaka $(x_n) \subset E$ koji konvergira ka x_0 niz $(f(x_n))$ konvergira ka $f(x_0)$.*

Označimo sa $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ priraštaj funkcije f u tački x_0. Očigledno se uslov (1) može napisati u obliku

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} \Delta f(x_0) = 0\,.$$

Neka je $x = (x_i)$, $x_0 = (x_i^0)$, $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. Da $x \to x_0$ ekvivalentno je sa $d(x, x_0) \to 0$, odn. sa $(\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2)^{1/2} \to 0$. Poslednje će važiti onda i samo onda ako $\Delta x_i \to 0$ za svako $i = \overline{1, n}$, odn. ako $\Delta x \to 0$. Stoga možemo reći da je funkcija neprekidna u tački x_0 po skupu E, ako priraštaj funkcije f teži nuli po skupu E kada priraštaj argumenta Δx teži nuli.

Za neprekidnost funkcija više promenljivih važe analogni stavovi kao i za funkcije jedne promenljive. Navedimo neke od njih.

Stav 1. *Ako su funkcije f i g neprekidne u tački $x_0 \in E$ po skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, takve su i funkcije λf, $\lambda \in R$, $f \pm g$ i $f \cdot g$. Ako je $g(x_0) \neq 0$, tada je i funkcija f/g neprekidna u tački x_0 po skupu E.*

Stav 2. *Ako je funkcija f neprekidna u tački $x_0 \in E$ po skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i $f(x_0) \neq 0$, tada postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u kojoj je znak funkcije isti sa znakom funkcije u tački x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = |f(x_0)|/2$. Kako je funkcija f neprekidna u tački x_0 po skupu E, za dato $\varepsilon > 0$ postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 tako da $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, odn.

$$f(x_0) - |f(x_0)|/2 < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)|/2$$

za svako $x \in E \cap U_{x_0}$. Ako je $f(x_0) > 0$, tada je $f(x) > f(x_0) - f(x_0)/2 = f(x_0)/2 > 0$ za svako $x \in E \cap U_{x_0}$. Slično se zaključuje da je $f(x) < 0$ za svako $x \in E \cap U_{x_0}$ ako je $f(x_0) < 0$. ■

Funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ možemo posmatrati i kao funkciju jedne promenljive pri fiksiranim vrednostima ostalih promenljivih. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke $x_0 = (x_i^0)$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački x_0 po promenljivoj x_i, ako je funkcija

$$\varphi(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

neprekidna u tački $x_i = x_i^0$. Ako je funkcija neprekidna, ona je neprekidna i po svakoj od promenljivih. Da obrat u opštem slučaju ne važi, pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2 + y^2 > 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

je neprekidna po svakoj od promenljivih u svim tačkama ravni, ali nije neprekidna u tački $(0,0)$, jer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji.

Neka su funkcije $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ definisane na skupu $E_t \subset \mathbb{R}^m$, a funkcija $f(x)$ na skupu $E_x \subset \mathbb{R}^n$. Ako je

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$$

za svako $t \in E_t$, tada je složena funkcija $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ definisana na skupu E_t.

Teorema 3. *Neka je složena funkcija definisana na skupu E_t. Ako su funkcije $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, neprekidne u tački $t_0 \in E_t \subset \mathbb{R}^m$ po skupu E_t, a funkcija f neprekidna u tački $x_0 = (\varphi_i(t_0)) \in E_x \subset \mathbb{R}^n$ po skupu E_x, onda je složena funkcija $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ neprekidna u tački t_0 po skupu E_t.*

Dokaz. Kako je funkcija f neprekidna u tački x_0 po skupu E_x, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\eta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E_x \cap P(x_0, \eta_\varepsilon)$ važi

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Funkcije φ_i, $i = \overline{1,n}$, su neprekidne u tački t_0 po skupu E_t, pa za η_ε postoji neko $\delta^i_{\eta_\varepsilon} > 0$ tako da je

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_0)| < \eta_\varepsilon$$

za svako $t \in E_t \cap P(t_0, \delta^i_{\eta_\varepsilon})$. Neka je $\delta_\varepsilon = \min_{1\le i\le n} \delta^i_{\eta_\varepsilon}$. Za svako $t \in E_t \cap P(t_0, \delta_\varepsilon)$ je $|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_0)| < \eta_\varepsilon$, $i = \overline{1,n}$, odn.

$$|x_i - x_i^0| < \eta_\varepsilon, \tag{3}$$

gde je $x_i = \varphi_i(t)$, $x_i^0 = \varphi_i(t_0)$. Složena funkcija f je definisana na skupu E_t, pa je za $t \in E_t \cap P(t_0, \delta_\varepsilon)$ zbog (3) $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x \cap P(x_0, \eta_\varepsilon)$. No onda je zbog (2)

$$|f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon$$

za svako $t \in E_t \cap P(t_0, \delta_\varepsilon)$, gde je $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Ako su funkcije $\varphi_i : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ neprekidne za svako $i = \overline{1,n}$, dokazati da je preslikavanje $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ neprekidno. Da li važi obrat ?

2. Dokazati da je preslikavanje $\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definisano sa $\pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ neprekidno na $\mathbb{R}^n$.

3. Dokazati da je funkcija $f(x) = \|x\|$ neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

4. Neka je funkcija $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dokazati da je skup $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ otvoren u $\mathbb{R}^n$, a da su skupovi $\{x \in \ \mathbb{R}^n : x \leq c\}$ i $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ zatvoreni u $\mathbb{R}^n$.

5. Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna po promenljivoj x u oblasti G. Ako po promenljivoj y zadovoljava Lipšicov* uslov, tj. postoji $L > 0$ tako da je $|f(x,y_2) - f(x,y_1| \leq |y_2 - y_1|$, dokazati da je ona neprekidna u oblasti G.

6. Dokazati teoremu o neprekidnosti složene funkcije korišćenjem definicije $1'$.

7. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Dokazati da je funkcija $y = d(x,A)$ neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

8. Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna po svakoj promenljivoj u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ i monotona po jednoj od njih, dokazati da je onda ona neprekidna na skupu G.

9. Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < A, b < y < B\}$. Ako je funkcija $\varphi(x)$ neprekidna na intervalu (a,A) i prima vrednosti iz intervala (b,B), dokazati da je tada funkcija $f(x,\varphi(x))$ neprekidna na (a,A).

10. Neka je funkcija f ograničena na kompaktnom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ i $\delta > 0$. Označimo sa

$$m_\delta(x_0) = \inf_{x \in E \cap K(x_0,\delta)} f(x)\,,\ M_\delta(x_0) = \sup_{x \in E \cap K(x_0,\delta)} f(x)\,.$$

Graničnu vrednost

$$\omega(x_0) := \lim_{\delta \to 0^+} (M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0))$$

nazivamo **varijacijom funkcije** f **u tački** x_0. Dokazati sledeća tvrđenja:

(i) za svako $\lambda > 0$ skup $E_\lambda = \{x \in E : \omega(x) \geq \lambda\}$ je zatvoren;

(ii) funkcija f je neprekidna u tački $x_0 \in E$ onda i samo onda, ako je $\omega(x_0) = 0$.

2.5. SVOJSTVA NEPREKIDNIH FUNKCIJA NA SKUPOVIMA

Teorema 1. (Vajerštras) *Ako je funkcija f neprekidna na kompaktnom skupu $E \subset \ \mathbb{R}^n$, onda je ona ograničena na njemu i dostiže supremum i infimum u tačkama skupa E.*

---

* Lipschitz R. (1832-1903)-nemački matematičar

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f neograničena na skupu E. Tada za svako $n \in N$ postoji $x_n \in E$ tako da je $|f(x_n)| \geq n$. Niz $(x_n) \subset E$ je ograničen jer je E kao kompaktan skup ograničen, pa prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi on sadrži bar jedan konvergentan podniz (x_{n_k}). Skup E je zatvoren, pa je $\lim x_{n_k} = x \in E$. Funkcija f je neprekidna na skupu E, pa je $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$. Kako je $|f(x_{n_k})| \geq n_k$, to je $|f(x)| = \lim |f(x_{n_k})| \geq \lim n_k = +\infty$, što je nemoguće.

Kako je funkcija f ograničena na E, $\sup\{f(x) : x \in E\} = M$ postoji na osnovu aksiome supremuma. Pretpostavimo da je $f(x) \neq M$ za svako $x \in E$. Funkcija $\varphi(x) = 1/(M - f(x))$ je neprekidna na skupu E, jer je $M - f(x) > 0$ za svako $x \in E$. Na osnovu dokaza prvog dela tvrđenja teoreme funkcija φ je odozgo ograničena, pa postoji neko $\mu > 0$ tako da je $\varphi(x) < \mu$ za svako $x \in E$. No onda je $f(x) < M - 1/\mu$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $M = \sup\{f(x) : x \in E\}$. ■

Teorema 2. *Ako je funkcija f neprekidna na put povezanom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i ima vrednosti a i b u tačkama x_1 i x_2 skupa E, onda funkcija f prima sve vrednosti između a i b.*

Dokaz. Neka je $a < c < b$, $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$. Skup E je put povezan, pa postoji neprekidno preslikavanje $r : [\alpha, \beta] \mapsto E$ tako da je $r(\alpha) = x_1$, $r(\beta) = x_2$ i $r(t) \in E$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$. Preslikavanje $f \circ r : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidno kao kompozicija neprekidnih funkcija. Kako je $(f \circ r)(\alpha) = a$ i $(f \circ r)(\beta) = b$, prema teoremi o međuvrednosti neprekidne funkcije jedne promenljive postoji $\tau \in (\alpha, \beta)$ tako da je $(f \circ r)(\tau) = c$. Tada je $r(\tau) = \xi \in E$ i $f(\xi) = c$. ■

Posledica 1. *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenju put povezanog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ i ako u tačkama $x_1, x_2 \in \overline{E}$ prima vrednosti a i b, onda ona na skupu E prima i sve vrednosti između a i b.*

Dokaz. Neka je $a < c < b$, pri čemu je $f(x_1) = a$ i $f(x_2) = b$. Označimo sa $\varepsilon = \min\{c - a, b - c\}$. Funkcija f je neprekidna u tački x_1, pa za dato ε postoji okolina U_{x_1} tačke x_1 tako da za svako $x \in \overline{E} \cap U_{x_1}$ važi $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, odn. $f(x) - a < \varepsilon \leq c - a$. Kako je $x_1 \in \overline{E}$, postoji $y_1 \in E \cap U_{x_1}$ tako da je $f(y_1) < c$. Slično se dokazuje da postoji $y_2 \in E$ tako da je $f(y_2) > c$. No onda prema prethodnoj teoremi postoji $\xi \in E$ tako da je $f(\xi) = c$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Koristeći teoremu o međuvrednosti neprekidnih funkcija, dokazati da skup $\mathbb{R}^n \setminus S(O,r)$ nije put povezan.

2. Neka je $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za koju postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je skup $\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq \alpha\}$ neprazan i ograničen. Dokazati da postoji $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tako da je $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^m\}$.

3. Dokazati teoreme ovog odeljka u slučaju kada je $f : X \mapsto \mathbb{R}$ preslikavanje proizvoljnog metričkog prostora u $\mathbb{R}$.

2.6. RAVNOMERNA NEPREKIDNOST

Definicija 1. *Funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ je **ravnomerno neprekidna** na skupu E, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x_1, x_2 \in E$*

$$d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Očigledno je svaka ravnomerno neprekidna funkcija i neprekidna. Da obrat u opštem slučaju ne važi pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ je neprekidna na skupu $E = (0,1)$ kao kompozicija neprekidnih funkcija. Međutim, ona nije ravnomerno neprekidna na tom skupu. Zaista, uočimo tačke $x_1 = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ i $x_2 = 1/(3\pi/2 + 2n\pi)$ iz intervala $(0,1)$. Za dovoljno veliko n rastojanje između tih tačaka može se učiniti proizvoljno malim, dok je $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ za svako n.

Suštinska razlika između neprekidnosti i ravnomerne neprekidnosti je u tome, što je neprekidnost funkcije svojstvo lokalnog karaktera, dok je ravnomerna neprekidnost svojstvo funkcije globalnog karaktera.

Još jedna bitna razlika između ovih pojmova može se sagledati iz same definicije ovih pojmova. Naime, funkcija f je neprekidna na skupu E, ako

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon(x) > 0)(\forall x' \in E)$$
$$(d(x,x') < \delta_\varepsilon(x) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon),$$

dok je ravnomerno neprekidna na skupu E, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x, x' \in E)$$
$$(d(x,x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

U obe definicije zahteva se egzistencija broja δ_ε. U slučaju ravnomerne neprekidnosti taj broj zavisi samo od izbora broja ε, dok u slučaju neprekidnosti on zavisi i od izbora tačke x, što najbolje pokazuje globalan karakter prvog, te lokalan karakter drugog pojma.

Geometrijski gledano, funkcija f je ravnomerno neprekidna na skupu E, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da je na svakom skupu $A \subset E$ dijametra $d(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ manjeg od δ_ε zadovoljena nejednakost

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

za svako $x', x'' \in A$.

Definicija 2. *Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $\delta > 0$. Funkcija*

$$\omega(\delta; f, E) := \sup_{\substack{d(x',x'') \le \delta \\ x',x'' \in E}} |f(x') - f(x'')|$$

*naziva se **modul neprekidnosti funkcije** f na skupu E.*

Modul neprekidnosti funkcije f označavamo i sa $\omega(\delta; f)$ ako je jasno o kom skupu je reč, ili još kraće, sa $\omega(\delta)$ ako je jasno o kojoj se funkciji radi.

Geometrijski, modul neprekidnosti pretstavlja najbrži rast funkcije na skupovima $A \subset E$ dijametra $d(A) \le \delta$. Očigledno se modul neprekidnosti funkcije f može prikazati kao

$$\omega(\delta; f, E) = \sup_{\substack{d(x',x'') \le \delta \\ x',x'' \in E}} \{f(x') - f(x'')\}.$$

Navedimo jedan primer koji ilustruju određivanje modula neprekidnosti funkcije.

Primer 2. Odredimo modul neprekidnosti funkcije $y = x^2$ najpre na skupu $\mathbb{R}$. Za svako $x_0 \in R$ i svako $\delta > 0$ imamo

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{d(x',x'') \le \delta} (x'^2 - x''^2) \ge x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2.$$

Očigledno $\omega(\delta; x^2) \to +\infty$ kada $x_0 \to +\infty$ za svako $\delta > 0$. Stoga je $\omega(\delta, x^2) = +\infty$ na skupu $\mathbb{R}$.

Na skupu $E = [0,1]$ modul neprekidnosti funkcije $y = x^2$ je $\omega(\delta, x^2) = 2\delta - \delta^2$. Da to dokažemo, neka su $x', x'' \in [0,1]$, pri čemu je $0 \le x'' - \delta \le x' \le x'' \le 1$.Tada je

$$x''^2 - x'^2 \le x''^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \le 2\delta - \delta^2,$$

odakle je

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{d(x',x'') \le \delta} (x''^2 - x'^2) \le 2\delta - \delta^2.$$

Uzimajući $x' = 1 - \delta$ i $x'' = 1$, dobija se nejednakost

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{d(x',x'') \le \delta} (x''^2 - x'^2) \ge 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2,$$

koja sa prethodno dokazanom daje modul neprekidnosti tražene funkcije.

Iz navedenog primera vidimo da modul neprekidnosti funkcije bitno zavisi od skupa na kome se traži modul neprekidnosti.

Da je modul neprekidnosti nenegativna funkcija, neposredno sledi iz definicije. Osim toga modul neprekidnosti $\omega(\delta; f, E)$ je monotono rastuća funkcija promenljive δ. Zaista, ako je $\delta_1 < \delta_2$, tada je

$$\{f(x') - f(x'') : d(x', x'') \le \delta_1\} \subset \{f(x') - f(x'') : d(x', x'') \le \delta_2\},$$

odakle sledi da je

$$\omega(\delta_1; f) \le \omega(\delta_2; f).$$

Sledeća teorema daje karakterizaciju ravnomerne neprekidnosti pomoću modula neprekidnosti.

Teorema 1. *Funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ je ravnomerno neprekidna na skupu E onda i samo onda, ako je*

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega(\delta; f, E) = 0.$$

Dokaz. Neka je funkcija f ravnomerno neprekidna na skupu E i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x', x'' \in E$ za koje je $d(x', x'') < \delta_\varepsilon$ važi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$. No onda je

$$\omega(\delta, f) \le \omega(\delta_\varepsilon, f) = \sup_{d(x',x'') \le \delta_\varepsilon} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$$

za svako $0 < \delta < \delta_\varepsilon$. Stoga je $\lim_{\delta \to 0+} \omega(\delta; f, E) = 0$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je $\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta; f, E) = 0$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ važi

$$\sup_{d(x',x'') \le \delta} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Kako je

$$|f(x') - f(x'')| \le \sup_{d(x',x'') \le \delta} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

za svako $x', x'' \in E$ za koje je $d(x', x'') < \delta$, funkcija f je ravnomerno neprekidna na skupu E. ■

Napomenimo da se pomoću modula neprekidnosti može definisati varijacija $\omega(f, E)$ funkcije f na skupu E kao

$$\omega(f; E) := \omega(d(E); f, E),$$

gde je $d(E)$ dijametar skupa E .

Na kraju ovog odeljka dokažimo Kantorovu* teoremu.

Teorema 2. (Kantor) *Ako je funkcija f neprekidna na kompaktu $E \subset \mathbb{R}^n$, onda je ona i ravnomerno neprekidana na njemu.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na kompaktnom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako ona ne bi bila ravnomerno neprekidna na skupu E, tada bi postojalo neko $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svako $\delta > 0$ postoje $x'_\delta, x''_\delta \in E$ za koje je $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ i $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \ge \varepsilon_0$. Neka je (δ_m) nenegativan nula niz. Za svako δ_m neka su x'_m i x''_m elementi skupa E za koje je

$$d(x'_m, x''_m) < \delta_m \quad \text{i} \quad |f(x'_m) - f(x''_m)| \ge \varepsilon_0 \,.$$

* Cantor G. (1845-1918)-nemački matematičar

Niz (x'_m) je ograničen kao podskup kompaktnog skupa E, pa prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi sadrži bar jedan konvergentan podniz (x'_{m_k}) čija granična vrednost $\lim x'_{m_k} = x$ pripada skupu E. Tada i podniz (x''_{m_k}) niza (x''_m) konvergira ka x. Zaista, kako je

$$d(x''_{m_k}, x) \leq d(x''_{m_k}, x'_{m_k}) + d(x'_{m_k}, x) < \delta_{m_k} + d(x'_{m_k}, x)\,,$$

prelaskom na graničnu vrednost u ovoj nejednakosti kada $k \to +\infty$, vidimo da $d(x''_{m_k}, x) \to 0$, odn. $x''_{m_k} \to x$, kada $k \to +\infty$.

Kako je funkcija f neprekidna na skupu E, to $f(x'_{m_k}) \to f(x)$ i $f(x''_{m_k}) \to f(x)$ kada $k \to \infty$, pa

$$f(x''_{m_k}) - f(x'_{m_k}) \to 0, \quad k \to +\infty,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da je $|f(x''_{m_k}) - f(x'_{m_k})| \geq \varepsilon_0$ za svako $k \in N$. ■

Uslov kompaktnosti u Kantorovoj teoremi se ne može oslabiti. Naime, samo zatvorenost ili samo ograničenost skupa E ne obezbeđuje ravnomernu neprekidnost funkcije f na skupu E. Zaista, funkcija $1/x$ je neprekidna na ograničenom skupu $(0,1)$, funkcija x^2 je neprekidna na zatvorenom skupu R, ali nijedna od ovih funkcija nije ravnomerno neprekidna na naznačenim skupovima.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je operacija sabiranja $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ravnomerno neprekidna funkcija, dok je operacija množenja $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna, ali ne i ravnomerno neprekidna funkcija.

2. Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazan skup, dokazati da je funkcija $x \mapsto d(x, A)$ ravnomerno neprekidna na skupu $\mathbb{R}^n$.

3. Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna po promenljivoj x u oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$. Ako je F ravnomerno neprekidna funkcija promenljive y za svako x za koje je $(x,y) \in G$, dokazati da tada funkcija f neprekidna u oblasti G.

4. Ispitati ravnomernu neprekidnost sledećih funkcija u naznačenim oblastima:

$$\begin{aligned}
&(i)\; f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, |x| < +\infty, |y| < +\infty\} \\
&(ii)\; f(x,y) = \sin \pi/(1 - x^2 - y^2), \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}\,, \\
&(iii)\; f(x,y) = \sin(x^2 + y^2 + z^2), \quad E = \mathbb{R}^3\,.
\end{aligned}$$

5. Dokazati da je na skupu $E = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leq r^2\}$ funkcija $f(x,y) = \sin 1/(x^2+y^2)$ neprekidna, ali da nije ravnomerno neprekidna.

6. Odrediti modul neprekidnosti sledećih funkcija na naznačenim skupovima:

$$(i)\, y = 1/x,\ E = (0,1)\ ,(ii)\, y = \sin\frac{1}{x},\ E = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(Rešenje: (i) $\omega(\delta; f, E) = +\infty$, (ii) $\omega(\delta; f, E) = 2$)

7. Neka je G oblast u $\mathbb{R}^n$. Ako je

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\omega(\delta; f, G)}{\delta} = 0,$$

dokazati da je funkcija f konstanta na skupu G.

8. Ako je funkcija f ravnomerno neprekidna na nezatvorenom skupu G, dokazati da se ona na jedinstven način može produžiti do neprekidnosti na $\overline{G}$.

9. Dokazati Kantorovu teoremu primenom Borel-Lebegove teoreme.

10. Ako je G konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, a $f : G \mapsto \mathbb{R}$, dokazati da je tada

$$\omega(\delta_1 + \delta_2; f, G) \le \omega(\delta_1; f, G) + \omega(\delta_2; f, G).$$

11. Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom, ograničenom i konveksnom skupu $F \subset \mathbb{R}^n$, onda je modul neprekidnosti funkcije f na skupu F neprekidna funkcija. Dokazati.

12. Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i neka je za modul neprekidnosti funkcije f na skupu E $\lambda = \lim_{\delta\to 0^+}\omega(\delta; f, E)$. Dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x', x'' \in E$ za koje je $d(x', x'') < \delta$ važi $|f(x') - f(x'')| < \lambda + \varepsilon$.

13. Ako je funkcija $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna za $x = 0$ i ako zadovoljava uslov $0 \le f(\delta_2) - f(\delta_1) \le f(\delta_2 - \delta_1)$ za $0 < \delta_1 < \delta_2$, dokazati da je tada $f(\delta) = \omega(\delta, f)$.

14. Ako je F zatvoren skup, a G otvoren ograničen skup koji sadrži skup F, dokazati da postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $\{x : d(x, F) \le \varepsilon\} \subset G$.

3. DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJA

3.1. IZVOD U PRAVCU PARCIJALNI IZVODI

Neka je $\vec{a} \ne 0$ fiksirani vektor iz $\mathbb{R}^n$. Znamo da je skup $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$ prava kroz tačku x_0 u pravcu vektora $\vec{a}$. Pri tome je $d(x_0 + ta, x_0) = |t|\|a\|$.

Definicija 1. *Neka je $f : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcija definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, x_0 unutrašnja tačka skupa E, a $\vec{a} \neq 0$ zadati vektor. Graničnu vrednost*

$$f'_{\vec{a}}(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}\,,$$

ukoliko postoji, nazivamo ***izvodom funkcije*** f ***u tački*** x_0 ***u pravcu vektora*** $\vec{a}$.

Neka su zadovoljeni uslovi date definicije. Kako je x_0 unutrašnja tačka skupa E, postoji $\delta > 0$ tako da je $x_0 + \tau a \in E$ za svako $|\tau| < \delta$. Definišimo funkciju $\varphi : (-\delta, \delta) \mapsto \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$\varphi(\tau) = f(x_0 + \tau a) = f(x_1^0 + \tau a_1, \dots, x_n^0 + \tau a_n),$$

gde je $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, a $a = (a_1, \dots, a_n)$. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi'(\tau) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + (t+\tau)a) - f(x_0 + \tau a)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0 + \tau a) + ta) - f(x_0 + \tau a)}{t} = f'_{\vec{a}}(x_0 + \tau a)\end{aligned}$$

Odavde specijalno dobijamo $\varphi'(0) = f'_{\vec{a}}(x_0)$, što ćemo u daljem koristiti.

Teorema 1. *Neka su $f : E \mapsto \mathbb{R}$ i $g : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcije definisane na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $x_0 \in intE$. Ako postoje izvodi $f'_{\vec{a}}(x_0)$ i $g'_{\vec{a}}(x_0)$, tada postoje izvodi funkcija λf, $f \pm g$ i $f \cdot g$ u pravcu vektora $\vec{a}$ u tački x_0, pri čemu važe jednakosti:*

$$\begin{aligned}&(i)\ \ (\lambda f)'_{\vec{a}}(x_0) = \lambda f'_{\vec{a}}(x_0)\,,\\ &(ii)\ \ (f \pm g)'_{\vec{a}}(x_0) = f'_{\vec{a}}(x_0) \pm g'_{\vec{a}}(x_0)\,,\\ &(iii)\ \ (f \cdot g)'_{\vec{a}}(x_0) = f'_{\vec{a}}(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'_{\vec{a}}(x_0)\,.\end{aligned}$$

Ako je $g(x_0) \neq 0$, tada postoji izvod funkcije f/g i važi

$$(iv)\ \ \left(\frac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(x_0) = \frac{f'_{\vec{a}}(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'_{\vec{a}}(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Dokaz. Neposredno sledi uvođenjem funkcije φ i korišćenjem osobina izvoda realnih funkcija jedne promenljive. Čitaocu prepuštamo detaljan dokaz. ■

Teorema 2. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i neka ona u svim tačkama tog skupa ima izvod u pravcu vektora $\vec{a} \neq 0$. Tada je*

$$f(x + ta) - f(x) = f'_{\vec{a}}(x + \theta ta)t$$

za neko $\theta \in (0, 1)$.

Dokaz. Neka je $x \in E$. Kako je skup E otvoren, postoji $t > 0$ tako da je $x + \tau a \in E$ za svako $0 \leq \tau \leq t$. Stoga funkcija $\varphi(\tau) = f(x + \tau a)$ ima smisla za svako $\tau \in [0, t]$. Primenom Lagranžove* teoreme na funkciju φ na segmentu $[0, t]$ imamo

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\theta t)t$$

za neko $\theta \in (0, 1)$, odn.

$$f(x + ta) - f(x) = f'_{\vec{a}}(x + \theta ta)t \,. \blacksquare$$

Dokazana teorema pretstavlja uopštenje Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti funkcije u diferencijalnom računu.

Definicija 2. *Izvod funkcije f u pravcu vektora e_k, $1 \leq k \leq n$, gde su e_k elementi standardne baze prostora $\mathbb{R}^n$, nazivamo* ***parcijalnim izvodom funkcije*** *f po promenljivoj x_k i označavamo jednom od sledećih oznaka:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\,, \quad f'_{x_k}\,, \quad D_{x_k} f.$$

Na taj način imamo

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = f'_{\vec{e}_k}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_k) - f(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}.$$

Odavde vidimo da se parcijalni izvodi $\partial f / \partial x_k$ dobijaju kao izvod funkcije f po promenljivoj x_k, pri čemu se ostale promenljive smatraju konstantama.

---

* Lagrange J. L. (1736-1813)-francuski matematičar

Iz teoreme 1. i definicije parcijalnih izvoda neposredno proizilaze sledeća svojstva parcijalnih izvoda

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k}(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,,\\
&(ii)\ \frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(x)\,,\\
&(iii)\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(x) = g(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Ako je $g(x) \neq 0$, tada je

$$
(iv)\ \frac{\partial(f/g)}{\partial x_k}(x) = \frac{g(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) - f(x)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(x)}{g^2(x)}\,.
$$

Dobro je poznato, da ako realna funkcija jedne promenljive ima izvod u nekoj tački, onda je ona neprekidna u toj tački. Međutim, za realne funkcije više promenljivih to u opštem slučju ne važi, što pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija f definisana sa

$$
f(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{ako je } xy = 0\,,\\ 1, & \text{ako je } xy \neq 0 \end{cases}
$$

ima parcijalne izvode $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Međutim, ona nije neprekidna u tački $(0,0)$, jer granična vrednost ove funkcije u tački $(0,0)$ ne postoji.

Parcijalnom izvodu $\partial f/\partial x_k$ pridružujemo linearnu funkciju

$$
d_{x_k} f := \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\,,\ -\infty < dx_k < +\infty
$$

koju nazivamo **parcijalnim diferencijalom funkcije** f po promenljivoj x_k, $k = \overline{1,n}$.

Teorema 3. *Ako postoji izvod $f'_{\vec{a}}(x)$ funkcije f u tački x po pravcu $\vec{a}$, tada za svako $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ postoji $f'_{\lambda\vec{a}}(x)$ i važi sledeća jednakost*

$$f'_{\lambda\vec{a}}(x) = \lambda f'_{\vec{a}}(x)$$

Dokaz. Neposredno sledi iz definicije izvoda funkcije u pravcu zadanog vektora. ■

Teorema 4. *Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako postoji izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{a} \neq 0$ u svakoj tački $z \in K(x,\delta) \subset E$ pri čemu je $f'_{\vec{a}}$ neprekidna funkcija u tački x, i ako postoji $f'_{\vec{b}}(x)$, tada postoji izvod funkcije f u tački x_0 po pravcu vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i važi jednakost*

$$f'_{\vec{a}+\vec{b}}(x) = f'_{\vec{a}}(x) + f'_{\vec{b}}(x)$$

Ako je $f'_{\vec{b}}$ neprekidna funkcija u tački x, onda je i funkcija $f'_{\vec{a}+\vec{b}}$ neprekidna funkcija u tački x.

Dokaz. Kako funkcija f ima izvod u pravcu zadanog vektora $\vec{a}$ u okolini $K(x,\delta)$ tačke x, na funkciju f se može primeniti Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti, posle čega dobijamo

$$\begin{aligned} f(x + t(\vec{a}+\vec{b})) - f(x) &= \\ &= f(x + t(\vec{a}+\vec{b})) - f(x+t\vec{b}) + f(x+t\vec{b}) - f(x) = \\ &= f'_{\vec{a}}((x+t\vec{b}) + \theta t\vec{a})t + f(x+t\vec{b}) - f(x). \end{aligned}$$

No onda je

$$\frac{f(x + t(\vec{a}+\vec{b})) - f(x)}{t} = f'_{\vec{a}}((x+t\vec{b}) + \theta t\vec{a}) + \frac{f(x+t\vec{b}) - f(x)}{t}.$$

Kako je $f'_{\vec{a}}$ neprekidna funkcija u tački x, $f'_{\vec{a}}((x+t\vec{b}) + \theta t\vec{a}) \to f'_{\vec{a}}(x)$ kada $t \to 0$. Osim toga $f'_{\vec{b}}(x)$ postoji, pa prelaskom u poslednjoj jednakosti na graničnu vrednost kada $t \to 0$ dobijamo traženu jednakost. Poslednji deo tvrđenja je trivijalan. ■

Posledica 1. *Neka je E otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $x \in E$. Ako funkcija $f : E \mapsto \mathbb{R}$ ima sve parcijalne izvode u nekoj okolini tačke x i ako su oni neprekidne funkcije u tački x, tada postoji izvod funkcije f u tački x po ma kom pravcu $\vec{a} \neq 0$ i važi jednakost*

$$f'_{\vec{a}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} a_k \,, \tag{1}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dokaz. Izvodi $f'_{\vec{e}_k}$, $k = \overline{1, n}$, zadovoljavaju sve uslove teorema 3. i 4., pa je stoga

$$f'_{\vec{a}}(x) = f'_{\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{e}_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} f'_{a_k \vec{e}_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f'_{\vec{e}_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} a_k \,,$$

čime je ova posledica dokazana. ∎

Definicija 3. *Vektor*

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

nazivamo ***izvodom funkcije*** f ***u tački*** x*, ili* ***gradijentom funkcije*** f *u tački* x *i označavamo jednim od simbola*

$$f'(x) \,, \quad grad\, f(x) \,, \quad \nabla f(x).$$

Sada izraz (1) možemo napisati u obliku

$$f'_{\vec{a}}(x) = \vec{a} \cdot grad\, f = \|a\| \cdot \|grad\, f\| \cos\,(\widehat{\vec{a}, grad}\, f).$$

Ako je $\|\vec{a}\| = 1$, tada je

$$f'_{\vec{a}}(x) = \|grad\, f\| \cos\,(\widehat{\vec{a}, grad}\, f).$$

Iz poslednje jednakosti vidimo da je gradijent funkcije f u tački x pravac po kome je izvod funkcije u tački x maksimalan.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati **Teoreme 1.** i **3.**.

2. Naći izvod funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ u tački $(2,1)$ u pravcu $(1,1)$.

3. Ako funkcija $f(x,y)$ ima parcijalni izvod $f'_x(x,y)$ u nekoj okolini tačke (a,b) i ako postoji $\lim_{h\to 0} f(a+h,b)$, onda je njegova vrednost $f'_x(a,b)$. Dokazati.

4. Data je funkcija $f(x,y) = \sqrt{|x^2-y^2|}$. Odrediti sve pravce $\vec{a}$ za koje postoji $f'_{\vec{a}}(0,0)$ i izračunati njihove vrednosti.

5. Data je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x, & \text{ako je } x \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x = 0\,. \end{cases}$$

Naći $f'(0,0)$. Dokazati da funkcija f nije neprekidna u tački $(0,0)$.

6. Naći parcijalne izvode funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ i $g(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\{a_i, a_{ij}\} \subset \mathbb{R}$.

7. Dokazati da ugao između gradijenata funkcija $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ i $v = u + 2mx + 2ny + 2pz$ u tački (x_0, y_0, z_0) teži nuli kada ova teži ka beskonačno dalekoj tački.

8. Dokazati formule

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \nabla(cf) = c\nabla f\,,\\
&(ii) \quad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g\,,\\
&(iii) \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g\,,\\
&(iv) \quad \nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2\,,
\end{aligned}$$

pretpostavljajući da postoje izvodi funkcija f i g i da je $g \neq 0$.

3.2. DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJA

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija f je **diferencijabilna** u tački $x \in E$ ako postoji linearna funkcija*

$$L(x,h) = \sum_{i=1}^n L_i h_i\,,$$

$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $\{L_i\} \subset \mathbb{R}$, tako da se priraštaj $\Delta f(x,h)$ funkcije f u tački x može prikazati kao

$$(1) \qquad \Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x) = L(x,h) + o(\|h\|)\,,\ \|h\| \to 0\,.$$

*Funkcija $L(x,h) = \sum_{i=1}^n L_i h_i$ je **diferencijal funkcije** f u tački x koji se označava sa $df(x)$.*

Zamenjujući h_i sa dx_i, $1 \le i \le n$, diferencijal funkcije f najčešće pretstavljamo u obliku

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i dx_i \,.$$

Iz (1) vidimo da je funkcija f diferencijabilna u tački $x \in E$ onda i samo onda ako postoji linearna funkcija $L(x,h)$ tako da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x,h) - L(x,h)}{\|h\|} = 0\,. \tag{2}$$

Odavde je

$$\Delta f(x,h) = L(x,h) + \varepsilon(x,h)\|h\|\,, \tag{3}$$

gde je $\varepsilon(x,h)$ funkcija za koju je

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(x,h) = 0\,. \tag{4}$$

Funkcija ε nije definisana za $h = 0$. Definišimo funkciju

$$\alpha(x,h) := \varepsilon(x,h)\|h\|\,. \tag{5}$$

Lema 1. *Uslovi* (4) *i* (5) *ekvivalentni su sa*

$$\alpha(x,h) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x,h) h_i\,, \tag{6}$$

gde je $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(x,h) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Dokaz. Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi (4) i (5). Tada je

$$\alpha(x,h) = \varepsilon(x,h)\|h\| = \frac{\varepsilon\|h\|^2}{\|h\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon h_i}{\|h\|} h_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x,h) h_i\,,$$

gde je $\varepsilon_i(x,h) = \varepsilon(x,h)h_i/\|h\|$, $i = \overline{1,n}$. Kako je $|h_i|/\|h\| \le 1$, to je $|\varepsilon_i(x,h)| \le |\varepsilon(x,h)|$, odakle je zbog (4) $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(x,h) = 0$.

Pretpostavimo da je zadovoljen uslov (6) i neka je

$$\varepsilon(x,h)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x,h)\frac{h_i}{\|h\|}\,.$$

Tada se funkcija $\alpha(x,h)$ može prikazati u obliku (5), pri čemu je zbog $|h_i|/\|h\|\le 1$

$$|\varepsilon(x,h)|\le\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i(x,h)|\,.$$

Odavde sledi (4), jer je $\lim_{h\to 0}\varepsilon_i(x,h)=0$ za svako $i=\overline{1,n}$. ■

Stav 1. *Ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački x_0 otvorenog skupa $E\subset\mathbb{R}^n$, onda je ona neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Funkcija f je diferencijabilna u tački x_0, pa se priraštaj funkcije f u tački x_0 može se prikazati kao

$$\Delta f(x_0,h)=f(x)-f(x_0)=L(x_0,x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\,,\;x\to x_0.$$

Kako $\|x-x_0\|\to 0$ kada $x\to x_0$, sada očigledno $f(x)\to f(x_0)$ kada $x\to x_0$, što dokazuje neprekidnost funkcije f u tački x_0. ■

Primer 1. Obrat u opštem slučaju ne važi. Zaista, funkcija $f(x,y)=|x|+|y|$ je neprekidna u tački $(0,0)$, ali u njoj nije diferencijabilna.

Stav 2. *Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački x otvorenog skupa $E\subset\mathbb{R}^n$. Tada za svaki vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\neq 0$ postoji $f'_{\vec{a}}(x)$. štaviše, za svako $i=\overline{1,n}$ postoje parcijalni izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ i pri tome je $L_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, odn.*

$$df(x)=L(x,a)=f'_{\vec{a}}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}a_i\,. \tag{7}$$

Dokaz. Neka je $\vec{a}\neq 0$ zadati vektor i $t\in\mathbb{R}$. Primetimo da $h=t\vec{a}\to 0$ kada $t\to 0$. Kako je funkcija f diferencijabilna u tački x, to je

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ta)-f(x)-tL(x,a)}{|t|\cdot\|a\|}=0\,,$$

odakle sledi egzistencija izvoda $f'_{\vec{a}}(x)$ i jednakost

$$f'_{\vec{a}}(x) = L(x,a)\,.$$

Stavljajući u poslednjoj jednakosti $\vec{a} = \vec{e}_i$, a imajući u vidu da je $L(x, e_i) = L_i$, dobijamo da je

$$L_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

za svako $i = \overline{1,n}$. ■

Obrat u opštem slučaju ne važi, što pokazuje sledeći

Primer 2. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } y \neq x^2 \text{ ili ako je } x = y = 0\,, \\ 1, & \text{ako je } y = x^2 \text{ i } x^2 + y^2 > 0 \end{cases}$$

ima u tački $(0,0)$ izvod jednak nuli po ma kom pravcu. Funkcija f ima prekid u tački $(0,0)$, pa prema stavu 1. ona ne može biti diferencijabilna u toj tački.

Ako je funkcija diferencijabilna u nekoj tački, tada prema prethodnom stavu ima sve parcijalne izvode u toj tački. Da obrat ne važi, pokazuje recimo primer 1. odeljka 3.1. Prema tome, formalno napisan izraz (7), i ako parcijalni izvodi postoje, ne mora pretstavljati diferencijal funkcije. Samo ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački x, izraz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\,,$$

gde je izvršena zamena $a_i = dx_i$, $i = \overline{1,n}$, jeste diferencijal funkcije f u tački x. Drugim rečima, važi

Posledica 1. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x, onda je diferencijal te funkcije jednoznačno određen u toj tački i*

$$df(x) = f'_{\vec{a}}(x)\,,$$

gde je $\vec{a} \neq 0$ proizvoljan vektor.

Teorema 3. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako funkcija f ima parcijalne izvode u nekoj okolini tačke $x \in E$ i ako su oni neprekidne funkcije u toj tački, onda je funkcija f diferencijabilna u tački x.*

Dokaz. Neka funkcija f ima sve parcijalne izvode u nekoj okolini $K(x,\varepsilon) \subset E$ tačke x, pri čemu je $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \varepsilon$. Tada $x + h \in E$, $f(x+h)$ ima smisla i

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x) = f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \\
&= (f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)) + \\
&\quad + (f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2, x_3+h_3, \dots, x_n+h_n)) + \\
&\qquad\qquad + \dots + (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_n)).
\end{aligned}$$

Zbog učinjenih pretpostavki, na svaku razliku u zagradi poslednje jednakosti možemo primeniti Lagranžovu teoremu posle čega dobijamo

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) = {} & f'_{x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)h_1 + \\
& + f'_{x_2}(x_1, x_2+\theta_2 h_2, x_3+h_3, \dots, x_n+h_n)h_2 + \\
& + \dots + f'_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+\theta_n h_n)h_n,
\end{aligned}$$

gde je $0 < \theta_i < 1$ za $i = \overline{1,n}$. Označimo sa

$$\varepsilon_i(x,h) = f'_{x_i}(x+u_i) - f'_{x_i}(x)\,,\ i = \overline{1,n},$$

gde je $u_i = (0, \dots, 0, \theta_i h_i, h_{i+1}, \dots, h_n)\,,\ i = \overline{1,n}$. Zamenjujući $f'_{x_i}(x+u_i)$ iz poslednje u pretposlednju jednakost, dobija se

$$\Delta f(x,h) = L(x,h) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x,h)h_i\,. \tag{8}$$

Kako su parcijalni izvodi funkcije f neprekidne funkcije u tački x, a $\|u_i\| \le \|h\|$, to je $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(x,h) = 0$ za svako $i = \overline{1,n}$, pa je funkcija f diferencijabilna u tački x. ∎

Sada iz teorema 2. i 3. imamo sledeću posledicu.

Posledica 2. *Ako funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ ima neprekidne parcijalne izvode na skupu E, onda je ona neprekidna na tom skupu.*

Definicija 2. *Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidno diferencijabilna*** *na skupu E ako u svim tačkama skupa E ima neprekidne parcijalne izvode.*

Skup svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na skupu E označavamo sa $\mathcal{C}^1(E)$. Očigledno je $\mathcal{C}^1(E) \subset \mathcal{C}(E)$.

Definicija 3. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$, gde je $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $y \in B \subset \mathbb{R}^m$, i neka je y_0 tačka nagomilavanja skupa B. Za funkciju f kažemo da je* ***ravnomerno konvergentna*** *na skupu A kada $y \to y_0$ ako postoji funkcija $\varphi(x)$ definisana na skupu A, tako da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in A$ i svako $y \in B \diagdown \{y_0\}$*

$$d(y, y_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \,.$$

Teorema 4. *Neka je funkcija f neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $G \subset \mathbb{R}^n$. Tada se priraštaj funkcije f u svakoj tački x skupa G može prikazati u obliku (8), pri čemu funkcije $\varepsilon_i(x,h)$ ravnomerno konvergiraju nuli na svakom kompaktnom skupu $K \subset G$.*

Dokaz. Skupovi K i $\mathbb{R}^n \setminus G$ su zatvoreni i disjunktni. Zbog pretpostavljene kompaktnosti skup K je ograničen, pa je prema stavu 5.,1.3. $d(K, \mathbb{R}^n \setminus G) = \eta > 0$. Skup $K_{\eta/2}$ je kompaktan potskup skupa G. Neka je $\|h\| < \eta/2$. Kako je $\|u_i\| \le \|h\|$, to je $x + u_i \in K_{\eta/2}$ za svako $x \in K$. Zaista, $d(x, x+u_i) = \|u_i\| \le \|h\| < \eta/2$, pa je

$$d(x+u_i, K) = \inf_{z \in K} d(x+u_i, z) \le d(x+u_i, x) < \eta/2 \,.$$

No onda je prema dokazu prethodnog stava

$$|\varepsilon_i(x,h)| \le \omega(\|h\|; f'_{x_i}, K_{\eta/2}) \,,\; i = \overline{1,n} \,.$$

Funkcije f'_{x_i} su neprekidne na kompaktu $K_{\eta/2}$, pa su prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidne na $K_{\eta/2}$. Stoga je prema teoremi 1., 2.7. $\lim_{h\to 0} \omega(\|h\|; f'_{x_i}, K_{\eta/2}) = 0$ za svako $i = \overline{1,n}$. Zbog toga za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta^i_\varepsilon > 0$ tako da za svako $h \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|h\| < \delta^i_\varepsilon$ i svako $x \in K$ važi $|\varepsilon_i(x,h)| < \varepsilon$ za svako $i = \overline{1,n}$. Time smo dokazali da su sve funkcije ε_i ravnomerno konvergentne nuli na kompaktnom skupu K. ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je funkcija $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ neprekidna u $\mathbb{R}^2$, a zatim odrediti parcijalne izvode funkcije f u tački $(0,0)$.

2. Neka je $f(x) = \|x\|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$. Odrediti vrednosti α za koje je funkcija f diferencijabilna u tački $(0,0,\ldots,0)$.

3. Dokazati da je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}^2$, u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$ ima izvod po ma kom pravcu, ali nije diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

4. Dokazati da je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2+y^2 > 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

diferencijabilna, ali da nije neprekidno diferencijabilna u $\mathbb{R}^2$.

5. Dokazati da je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ako je } x^2+y^2 > 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

neprekidna u okolini tačke $(0,0)$, da ima parcijalne izvode koji su ograničeni u okolini tačke $(0,0)$, ali da nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

6. Dokazati da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y)\,, & xy \neq 0\,, \\ x^2\sin(1/x)\,, & x \neq 0 \;\; y = 0\,, \\ y^2\sin(1/y)\,, & x = 0\,, y \neq 0\,, \\ 0\,, & x = y = 0 \end{cases}$$

diferencijablna u tački $(0,0)$, ali da njeni parcijalni izvodi u tački $(0,0)$ nisu neprekidne funkcije.

7. Dokazati da funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0\,, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ima parcijalne izvode u svakoj tački $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, da su parcijalni izvodi neprekidne funkcije po svakoj promenljivoj u svakoj tački realne prave, ali da funkcija f nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

8. Ako su funkcije f i g diferencijabilne , tada su diferencijabilne i funkcije λf, $f+g$ i fg, a uz pretpostavku da je $g^2\neq 0$ i funkcija f/g i važe jednakosti:

$(i)\; d(\lambda f)=\lambda df\,,$ $\qquad (ii)\; d(f+g)=df+dg\,,$

$(iii)\; d(fg)=gdf+fdg\,,$ $\qquad (iv)\; d(f/g)=(gdf-fdg)/g^2\,.$

Dokazati.

9. Ako je funkcija f diferencijabilna na konveksnom skupu $K\subset\mathbb{R}^n$, tada za svake dve tačke $x, x+h\in K$ postoji $0<\theta<1$ tako da je

$$f(x+h)-f(x)=df(x+\theta h)\,.$$

10. Ako je funkcija f diferencijabilna na konveksnom skupu $K\subset\mathbb{R}^n$ i ako je izvod te funkcije ograničen na K, dokazati da je funkcija f ravnomerno neprekidna na K.

11. Ako je funkcija diferencijabilna na konveksnom skupu $K\subset\mathbb{R}^n$ i $df(x)=0$ za svako $x\in K$, onda je funkcija f konstanta na K. Dokazati.

12. Neka je funkcija f neprekidna na $K[O,r]$, pri čemu je jednaka nuli na rubu tog skupa. Ako je ona diferencijabilna na $K(O,r)$, tada postoji tačka $a\in K(O,r)$ u kojoj je $df(a)=0$. Dokazati.

13. Neka je funkcija f neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $G\subset\mathbb{R}^n$. Ako je

$$\Delta f(x,h)=L(x,h)+\varepsilon(x,h)\|h\|\,,\; h\to 0\,,$$

dokazati da funkcija f ravnomerno konvergira nuli na svakom kompaktnom skupu $K\subset G$.

3.3. IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

Teorema 1. *Neka je funkcija* $f:E\mapsto\mathbb{R}$ *diferencijabilna u tački* $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in intE\subset\mathbb{R}^n$. *Ako za funkciju* $g=(g_1,\dots,g_n):(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\mapsto E$, $g_i(t_0)=x_0^i\,,\; i=\overline{1,n}$, *postoji* $g_i'(t_0)$ *za svako* $i=\overline{1,n}$, *tada složena funkcija* $h(t)=f(g(t))$ *ima izvod u tački* t_0 *i*

$$h'(t_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}g_i'(t_0)\,. \tag{1}$$

Dokaz. Kako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, to je

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) + o(\|x - x_0\|)$$

kada $x \to x_0$. Stavljajući u poslednjoj jednakosti $x = g(t_0 + \Delta t) = (g_i(t_0 + \Delta t))$, $x_0 = (g_i(t_o))$, $0 < |\Delta t| < \varepsilon$, i deljenjem sa Δt dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} &= \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{g_i(t_0 + \Delta t) - g_i(t_0)}{\Delta t} + \frac{o(\|x - x_0\|)}{\Delta t}\,.\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\|x - x_0\| = O(|\Delta t|)$ kada $\Delta t \to 0$. Zaista,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|x - x_0\|}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta g_i(t_0)}{\Delta t} \right)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g'^2_i(t_0) \right\}^{1/2}$$

je konačna veličina, pa je $\|x - x_0\| = O(|\Delta t|)$ kada $\Delta t \to 0$. Kako je $o(O(|\Delta t|) = o(|\Delta t|)$ kada $\Delta t \to 0$, to je

$$\frac{\Delta h(t_0)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{\Delta g_i(t_0)}{\Delta t} + \frac{o(|\Delta t|)}{\Delta t}\,.$$

Granična vrednost izraza na desnoj strani poslednje jednakosti postoji kada $\Delta t \to 0$ i jednaka je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} g_i'(t_0)\,,$$

pa postoji granična vrednost izraza na levoj strani iste jednakosti i važi (1). ■

Posledica 1. *Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački $x_0 \in intE_x$, $E_x \subset R_x^n$. Ako za funkciju $g = (g_1, \ldots, g_n) : E_t \mapsto E_x$, $E_t \subset R_t^m$, postoje parcijalni izvodi $\partial g_i/\partial t_k$ u tački $t_0 \in intE_t$ za svako $k = \overline{1,m}$ i svako $i = \overline{1,n}$, pri čemu je $g_i(t_0) = x_i^0$, tada složena funkcija $h(t) = f(g(t))$ ima parcijalne izvode u tački t_0 koji su dati izrazima*

$$\frac{\partial h(t_0)}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(t_0)}{\partial t_i}\,, \quad i = \overline{1,m}\,. \tag{2}$$

Dokaz. Fiksirajmo $t_k = t_k^0$, $k \neq i$. Tada funkcija

$$h(t_1^0, \ldots, t_{i-1}^0, t_i, t_{i+1}^0, \ldots, t_n^0) \tag{3}$$

zadovoljava sve uslove prethodne teoreme, pa za svako $i = \overline{1,m}$ postoje parcijalni izvodi složene funkcije koji su dati izrazom (2). ■

Primetimo da se u prethodnim tvrđenjima uslov diferencijabilnosti funkcije f ne može oslabiti. Sledeći primer pokazuje da mogu postojati svi parcijalni izvodi funkcije f u tački x_0 i izvodi funkcija g_i, $i = \overline{1,n}$, u nekoj okolini tačke t_0, a da izvod složene funkcije ne postoji u tački t_0.

Primer 1. Funkcija $f(x,y) = \sqrt[4]{xy}$ u tački $(0,0)$ ima parcijalne izvode $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Funkcije $x = t^2$ i $y = t^2$ imaju izvode u tački $t = 0$, ali funkcija $f(x(t), y(t)) = |t|$ nema izvod u nuli.

3.4. INVARIJANTNOST FORME PRVOG DIFERENCIJALA

Teorema 1. *Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n{}_x$ i diferencijabilna u tački $x_0 \in intE$. Ako su funkcije x_i, $i = \overline{1,n}$, definisane na skupu $F \subset \mathbb{R}^m{}_t$ i diferencijabilne u tački $t_0 \in intF$, pri čemu je $x_0 = x(t_0) = (x_i(t_0))$, tada je složena funkcija $f(x(t))$ definisana u nekoj okolini tačke t_0, diferencijabilna je u t_0 i diferencijal te funkcije u tački t_0 može se pretstaviti u jednom od sledećih oblika*

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(t_0))}{\partial t_j} dt_j\,, \tag{1}$$

$$
(2) \qquad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i \,, \quad \textit{gde je} \quad dx_i = dx_i(t_0)\,.
$$

Dokaz. Da složena funkcija $f(x(t))$ ima smisla u nekoj okolini tačke t_0 videli smo u odeljku 2.5. Neka su $\delta > 0$ i $\eta > 0$ takvi brojevi da su funkcije x_i definisane u δ okolini tačke t_0 i da je $x(t) \in K(x_0, \eta)$ za svako $t \in K(t_0, \delta)$. Tada je složena funkcija $f(x(t))$ definisana u okolini $K(t_0, \delta)$ tačke t_0.

Kako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, to je

$$
(3) \qquad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon(\Delta x) r \,,
$$

za $r = \{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2\}^{1/2} < \eta$, pri čemu je $\lim_{r\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Dodefinišimo funkciju $\varepsilon(\Delta x)$ do neprekidnosti u nuli stavljajući da je $\varepsilon(0, \ldots, 0) = 0$.

Funkcije $x_i(t)$ su diferencijabilne u tački t_0, pa se priraštaj $\Delta x_i(t_0)$ može prikazati kao

$$
(4) \quad \Delta x_i(t_0) = x_i(t_0 + \Delta t) - x_i(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + \varepsilon_i \rho \,,\; i = \overline{1, n} \,,
$$

gde je $\rho = \{\sum_{j=1}^{m} \Delta t_j^2\}^{1/2} < \delta$, pri čemu je $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_i(\Delta t) = 0$. Zamenjujući Δx_i iz (4) u (3) dobijamo

$$
(5) \qquad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta \,,
$$

gde je

$$
(6) \qquad \beta = \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon r \,.
$$

Da dokažemo diferencijabilnost funkcije f u tački t_0, dokažimo da je $\beta = o(\rho)$ kada $\rho \to 0$. Kako su funkcije $x_i(t)$ zbog pretpostavljene diferencijabilnosti neprekidne u tački t_0, to je $\lim_{\rho\to 0} \Delta x_i = 0$, $i =$

$\overline{1,n}$, odakle sledi da je $\lim_{\rho\to 0} r = 0$. Odavde je na osnovu teoreme o graničnoj vrednosti složene funkcije $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0$. Kako je

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\varepsilon_i + \varepsilon\frac{r}{\rho}\,,$$

a funkcije ε i ε_i teže nuli kada $\rho\to 0$, ostaje da dokažemo ograničenost funkcije r/ρ. Koristeći (4), izraz r/ρ možemo pretstaviti u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2\right\}^{1/2} &\le \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j}\right|\frac{|\Delta t_j|}{\rho} + |\varepsilon_i|\right)\,.\end{aligned}$$

Kako je $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_i = 0$, funkcije ε_i su ograničene u nekoj okolini tačke t_0. Osim toga je $|\Delta t_j|/\rho \le 1$, pa je r/ρ ograničena veličina, čime je dokazana diferencijabilnost složene funkcije $f(x(t))$.

Sada je iz (5)

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j}\Delta t_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}dx_i\,,$$

gde je

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j}\Delta t_j,\quad i=\overline{1,n}\,,$$

čime je dokazana formula (2). Formulu (1) neposredno dobijamo iz (5) promenom redosleda sumiranja i koristeći već dokazanu formulu za izvod složene funkcije

$$\frac{\partial f(x(t_0))}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j},\quad j=\overline{1,m}.\ \blacksquare$$

Formule (1) i (2) dobijaju se na formalno isti način: kao sume proizvoda parcijalnih izvoda i odgovarajućih diferencijala. Suštinski, te formule se razlikuju po tome, što su dt_j diferencijali nezavisno promenljivih, a dx_i su diferencijali funkcija. Upravo opisano svojstvo pretstavlja invarijantnost forme prvog diferencijala.

Invarijantnost forme prvog diferencijala često se koristi pri praktičnom izračunavanju diferencijala složenih funkcija. Korišćenjem formule (2) lako se dokazuju sledeće formule diferenciranja:

$$\begin{aligned}
&(i)\ \ d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,,\\
&(ii)\ \ d(fg) = gdf + fdg\,,\\
&(iii)\ d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2\,.
\end{aligned}$$

Zadaci za vežbanje

1. Naći parcijalne izvode i diferencijale sledećih funkcija

$$\begin{aligned}
&a)\quad u = f(\sqrt{x^2+y^2})\,, && b)\quad u = f(xy, x/y)\,,\\
&c)\quad u = f(ax+by+cz)\,, && d)\quad u = f(ax, by, cz)\,.
\end{aligned}$$

2. Dokazati formule za diferenciranje funkcija $\lambda f + \mu g$, fg i f/g, gde su f i g funkcije promenljivih $x_1, \dots, x_n$.

3. Neka je $y = F(u)$, gde je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dokazati da je $dy = F'(u)du$ pri određenim uslovima za funkcije F i u.

3.5. GEOMETRIJSKI SMISAO DIFERENCIJALA

Neka je funkcija $z = f(x)$ definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i diferencijabilna u unutrašnjoj tački $x_0 = (x_i^0)$ skupa E. Tada postoji okolina $K(x_0, r) \subset E$ tako da je za svako $x \in K(x_0, r)$

$$z - z_0 = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_i^0) + o(\|x - x_0\|)\,,\ x \to x_0\,, \tag{1}$$

gde je $z_0 = f(x_0)$, a $L_i = \partial f(x_0)/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$. Skup

$$\mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x),\ x \in E\}$$

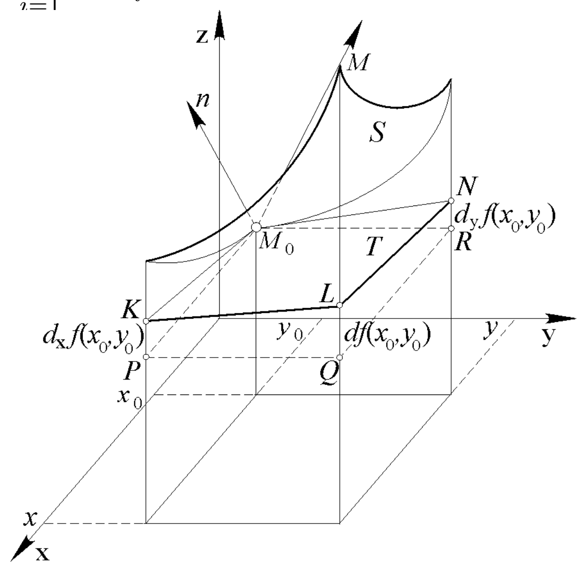
je površ koja sadrži tačku $(x_1^0, \dots, x_n^0, z_0) = M_0$.

Definicija 1. *Ravan T je* **tangentna ravan površi** $\mathcal{S}$ *u tački $M_0 \in \mathcal{S}$ ako ugao između ravni T i vektora $\overrightarrow{M_0M}$, $M \in \mathcal{S}$ teži nuli kada tačka M teži tački M_0 po površi $\mathcal{S}$.*

Stav 1. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 oblasti $E \subset \mathbb{R}^n$, tada površ $\mathcal{S} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x),\, x \in E\}$ u tački $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0)$, $z_0 = f(x_0)$, ima tangentnu ravan.*

Dokaz. Dokažimo da je tangentna ravan T površi $\mathcal{S}$ u tački x_0 data jednačinom

$$z - z_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)\,. \tag{2}$$



Sl. 4

Kako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, postoji okolina $K(x_0, r) \subset E$ tačke x_0, tako da za svako $x \in K(x_0, r)$ važi (1). Označimo sa φ ugao između vektora $\overrightarrow{M_0 M} = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0, z - z_0)$ i ravni T čija je jednačina (2). Tada je

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{M_0 M})}{\|\vec{n}\| \|\overrightarrow{M_0 M}\|},$$

gde je vektor normale ravni (2) određen sa $\vec{n} = (\partial f(x_0)/\partial x_1, \ldots, \partial f(x_0)/\partial x_n, -1)$.Iz prethodne jednačine dobija se

$$|\sin\varphi| = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) - (z - z_0)\right|}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\right)^2}\sqrt{(z - z_o)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_o^0)^2}} \leq$$

$$\leq \frac{|o(\|x - x_0\|)|}{\|x - x_0\|}\frac{1}{\|L\|} \to 0, \quad x \to x_0\,,$$

gde je $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$, a $L_i = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$. Time smo dokazali da je ravan T zadana jednačinom (2) tangentna ravan površi $\mathcal{S}$ u tački M_0, ako je funkcija f diferencijabilna u tački M_0. ■

Zbog pretpostavljene diferencijabilnosti funkcije f, jednačinu tangentne ravni (2) površi $\mathcal{S}$ možemo napisati u obliku

$$z - z_0 = df(x_0)\,,$$

odakle vidimo da diferencijal funkcije u nekoj tački pretstavlja priraštaj po tangentnoj ravni površi $\mathcal{S}$ u tački M_0. Iz jednačine (1) sledi da je greška koja se čini kada se priraštaj funkcije f aproksimira diferencijalom beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na $\|\overrightarrow{M_0M}\|$ kada $M \to M_0$. Upravo ta činjenica se koristi za približno izračunavanje vrednosti funkcija.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati obrat stava 1.
2. Dokazati da je ravan $z - z_o = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_i^0)$ tangentna ravan površi $\mathcal{S} = \{(x_1, \ldots, x_n, u) : u = f(x_1, \ldots, x_n)\}$ u tački $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^n)$ onda i samo onda ako je $u - z = o(\|x - x_0\|)$.
3. Ako površ $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ ima tangentnu ravan u tački (x_0, y_0, z_0), dokazati da je ona jedinstvena.
4. Koristeći diferencijal funkcije, dokazati sledeće približne formule u okolini tačke $(0, 0)$

   (i) $(1 + x)^\alpha(1 + y)^\beta \approx 1 + \alpha x + \beta y\,,$ $\quad (ii)$ $\arctan \frac{x+y}{1+xy} \approx x + y\,.$
5. Izračunati približno vrednosti sledećih izraza

   (i) $1,001 \cdot 2,002^2 \cdot 3,003^3\,,$ $\quad (ii)$ $1,03^2 \cdot 0,98^{-1/3} \cdot 1,05^{3/4}$.

3.6. PARCIJALNI IZVODI VIŠEG REDA

Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup, a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ fiksirani vektori iz $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Neka funkcija $f : E \mapsto \mathbb{R}$ u svakoj tački $x \in E$ ima izvod $f'_{\vec{a}}(x)$ u pravcu vektora $\vec{a}$. Tada je $f'_{\vec{a}} : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcija definisana u svim tačkama skupa E.

Definicija 1. *Izvod funkcije $f'_{\vec{a}}$ u tački $x \in E$ u pravcu vektora $\vec{b}$, ukoliko postoji, naziva se* **izvod drugog reda** *funkcije f u tački x u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i označava se sa*

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(x) := (f'_{\vec{a}})'_{\vec{b}}(x)\,.$$

Definicija 2. ***Parcijalni izvodi drugog reda*** *funkcije $f : E \mapsto \mathbb{R}$ u tački $x \in E$ definišu se kao $f''_{\vec{e}_i\vec{e}_j}(x)$, gde su $\vec{e}_i$ i $\vec{e}_j$ elementi standardne baze prostora $\mathbb{R}^m$, a označavaju se sa*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad ili \quad f''_{x_i x_j}(x)\,, \quad 1 \le i, j \le m\,.$$

Ako je $i \neq j$, parcijalne izvode nazivamo ***mešovitim parcijalnim izvodima drugog reda****.*

Mešoviti izvodi drugog reda u opštem slučaju ne moraju biti jednaki, što pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2+y^2>0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

ima prve parcijalne izvode

$$f'_x(0,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, y) - f(0,y)}{\Delta x} = -y\,,$$
$$f'_y(x,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \Delta y) - f(x,0)}{\Delta y} = x\,.$$

Drugi mešoviti parcijalni izvodi funkcije $f(x,y)$ u tački $(0,0)$ su različiti. Zaista,

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -1\,,$$

dok je

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x,0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = 1\,.$$

Prirodno se nameće pitanje određivanja uslova pod kojim su mešoviti izvodi drugog reda jednaki. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća

Teorema 1. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^m$. Ako funkcija f ima izvode $f'_{\vec{a}}$ i $f'_{\vec{b}}$ u nekoj okolini tačke $x \in E$, gde su $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, i ako su mešoviti izvodi $f''_{\vec{a}\vec{b}}$ i $f''_{\vec{b}\vec{a}}$ neprekidne funkcije u tački x, onda su oni jednaki u toj tački.*

Dokaz. Neka je $K(x,r) \subset E$ okolina tačke x u kojoj postoje izvodi $f'_{\vec{a}}$ i $f'_{\vec{b}}$. Za dovoljno male vrednosti s i t je $x+s\vec{a}, x+t\vec{b}, x+s\vec{a}+t\vec{b} \in K(x,r)$. Definišimo funkcije g i h sa

$$g(x) = f(x+s\vec{a}) - f(x)\,, \qquad h(x) = f(x+t\vec{b}) - f(x)\,.$$

Dvostrukom primenom teoreme 2., 3.1. dobija se

$$\begin{aligned} g(x+t\vec{b}) - g(x) = g'_{\vec{b}}(x+\theta_1 t\vec{b})t = (f'_{\vec{b}}(x+\theta_1 t\vec{b}+s\vec{a}) - \\ - f'_{\vec{b}}(x+\theta_1 t\vec{b}))t = f''_{\vec{b}\vec{a}}(x+\theta_1 t\vec{b}+\theta_2 s\vec{a})st\,,\ 0<\theta_1\,,\ \theta_2<1\,, \end{aligned}$$

i slično

$$h(x+s\vec{a}) - h(x) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(x+\theta_3 t\vec{b}+\theta_4 s\vec{a})st,\, 0<\theta_3,\theta_4<1\,.$$

Kako je $g(x+t\vec{b}) - g(x) = h(x+s\vec{a}) - h(x)$, to je

$$f''_{\vec{b}\vec{a}}(x+\theta_1 t\vec{b}+\theta_2 s\vec{a}) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(x+\theta_3 t\vec{b}+\theta_4 s\vec{a})$$

odakle zbog neprekidnosti drugih mešovitih izvoda u tački x, prelaskom na graničnu vrednost kada $(s,t) \to (0,0)$ sledi jednakost mešovitih izvoda u tački x po pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. ■

Definicija 3. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup. Ako funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda na skupu E, onda za funkciju f kažemo da je* **dvaput neprekidno diferencijabilna** *na skupu E i to označavamo sa $f \in \mathcal{C}^{(2)}(E)$.*

Očigledno je $\mathcal{C}^{(2)}(E) \subset \mathcal{C}^{(1)}(E) \subset \mathcal{C}(E)$.

Definicija 4. ***Izvod drugog reda*** *funkcije $f : E \mapsto \mathbb{R}$ u tački $x \in E$ je matrica*

$$f''(x) := \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Ako je $f \in \mathcal{C}^{(2)}(E)$ i $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, tada je

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(x) = f''_{\vec{b}\vec{a}}(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_i b_j,$$

pa je matrica kvadratne forme koja daje drugi izvod funkcije f u tački x u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ upravo drugi izvod funkcije f u tački x.

Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup i neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektori u $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Pretpostavimo da je za svako $x \in E$ određen izvod funkcije f u tački x $(n-1)$-vog reda u pravcu vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$:

$$f^{(n-1)}_{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}}(x).$$

Definicija 5. ***Izvod n-tog reda*** *funkcije f u tački $x \in E$ po pravcu vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ je izvod*

$$f^{(n)}_{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n}(x) := (f^{(n-1)}_{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}})'_{\vec{a}_n}(x)\,,$$

ukoliko on postoji.

Ako su vektori $\vec{a}_i$ elementi standardne baze, onda izvod n-tog rada po pravcima vektora $\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_n}$ standardne baze prostora $\mathbb{R}^m$ nazivamo **parcijalnim izvodom funkcije f n-tog reda** po argumentima $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ i označavamo sa

$$f^{(n)}_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}}(x) \quad \text{ili} \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_n}}.$$

n-dimenzionalnu matricu

$$f^{(n)}(x) := \left(\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_n}}\right)_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{m}$$

nazivamo **izvodom n-tog reda funkcije f**.

Sa $\mathcal{C}^{(n)}(E)$ označavamo skup funkcija čiji su svi parcijalni izvodi zaključno do n-tog reda neprekidne funkcije na skupu E. Očigledno je $\mathcal{C}^{(n)}(E) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{(1)}(E) \subset \mathcal{C}(E)$.

Teorema 2. *Neka funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^m$ ima na njemu izvode $(n-1)$-vog reda po pravcima vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$. Ako su n-ti izvodi funkcije f po pravcima vektora $\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_n}$ neprekidne funkcije, onda su oni međusobno jednaki.*

Dokaz. Za $k = 2$ tvrđenje sledi iz teoreme 1. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $k = n-1$ i dokažimo da je tačno i za $k = n$. Po definiciji je

$$f^{(n)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n}(x) = (f^{(n-1)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}})'_{\vec{a}_n}(x),$$

pa kako $f^{(n-1)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1}}(x)$ ne zavisi od redosleda nalaženja izvoda, dovoljno je dokazati da $\vec{a}_{n-1}$ i $\vec{a}_n$ mogu zameniti mesta. Kako je

$$f^{(n)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1},\vec{a}_n}(x) := ((f^{(n-2)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-2}})'_{\vec{a}_{n-1}})'_{\vec{a}_n}(x)\,,$$

to je na osnovu teoreme 1.

$$f^{(n)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n-1},\vec{a}_n}(x) = f^{(n)}_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n,\vec{a}_{n-1}}(x)\,. \blacksquare$$

3.7. DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

Definicija 1. *Funkcija f je n-**puta diferencijabilna** u tački $x_0 = (x_1^0, \ldots . x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ako su svi parcijalni izvodi zaključno do $(n-1)$-vog reda diferencijabilne funkcije u tački x_0.*

Ako je $f \in \mathcal{C}^{(2)}(E)$, $E \subset \mathbb{R}^m$, tada ima smisla razmatrati diferencijal funkcije $df(x) = f'_{\vec{a}}(x)$:

$$\begin{aligned} d(df(x)) &= d\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) a_i\right) = \sum_{i=1}^m d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} a_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) a_i = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)'_{\vec{a}} a_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a_j\right) a_i = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Poslednja suma u (1) je **diferencijal drugog reda** funkcije f u tački x. Zamenjujući a_i sa dx_i, vidimo da je drugi diferencijal kvadratna forma promenljivih dx_i:

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \,. \tag{2}$$

Jasno je $d^2 f(x) = f''_{\vec{a}\vec{a}}(x)$. Induktivno se definiše n-ti diferencijal funkcije f u tački x kao $d^n f(x) := d(d^{n-1} f)(x)$ ili $d^n f(x) := d(f^{n-1}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}})(x) = (f^{n-1}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}})'_{\vec{a}}(x) = f^{n}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}}(x)$, naravno, pod pretpostavkom da je $f \in \mathcal{C}^{(n)}(E)$. Za $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ indukcijom se može dokazati da je

$$df^{(n)}(x) = f^{(n)}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}}(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \,. \tag{3}$$

Uvedimo oznaku

$$f^{(n)}(x)a^n := f^{(n)}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}}(x) = d^n f(x) \,,$$

koju ćemo u daljem izlaganju koristiti.

Izraz (2) se može prikazati kao

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \,.$$

Indukcijom se može dokazati da je

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Pretpostavimo da je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^m$, da su funkcije $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_p)$, $i = \overline{1,m}$, definisane na skupu $E_t \subset \mathbb{R}^p$, i da složena funkcija ima smisla. Za funkcije f i x_i pretpostavimo da su klase $\mathcal{C}^{(2)}$ na odgovarajućim skupovima. Na osnovu teoreme o invarijantnosti forme prvog diferencijala je

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \,,$$

pri čemu je $dx_i = dx_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. Diferencijal drugog reda funkcije f je sada

$$d^2 f = d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i \,.$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da diferencijal višeg reda složene funkcije u opštem slučaju nema svojstvo invarijantnosti forme. Ako su $x_i(t)$ linearne funkcije, onda diferencijali višeg reda zadržavaju formu, jer je u tom slučaju očigledno $d^k x_i(t) = 0$ za $k \geq 2$. Upravo tu činjenicu iskazuje

Stav 1. *Neka je $f \in \mathcal{C}^{(n)}(E)$, gde je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren i konveksan skup. Tada funkcija $\varphi(t) := f(x + t\vec{a})$, $t \in [0, 1]$, u svakoj tački segmenta $[0, 1]$ ima izvod $\varphi^{(i)}(t)$, $1 \leq i \leq n$, i važi*

$$\varphi^{(i)}(t) = f^{(i)}_{\vec{a},\ldots,\vec{a}}(x + t\vec{a}) = d^{(i)} f(x + t\vec{a}) = f^{(i)}(x + ta)a^i$$

za svako $x, x + ta \in E$.

Dokaz. Neposredno sledi iz definicije funkcije φ i izvoda funkcije u pravcu zadatog vektora. ■

Zadaci za vežbanje

1. Da li funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2 + y^2 > 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ima mešovite izvode drugog reda u tački $(0, 0)$?

2. (Banah) Dokazati da ne postoji funkcija $z = z(x, y)$ čiji su parcijalni izvodi $\partial z/\partial x = y$, $\partial z/\partial y = 2x$.

3. Naći f' i f'' za funkciju $f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} x_i x_j$, ako je $\{c_0, c_i, c_{ij}\} \subset \mathbb{R}$.

4. Ako funkcije φ i ψ imaju prve i druge izvode, dokazati da funkcija

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

zadovoljava jednačinu

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \, .$$

5. Korišćenjem diferenciranja eliminisati funkcije φ i ψ iz sledećih jednačina

$$(i)\, u = \varphi(x-y, y-z)\,, \quad (ii)\, z = \varphi(x)\psi(y)\,,$$
$$(iii)\, z = \varphi(xy) + \psi(\frac{x}{y})\,.$$

6. Ako funkcija $f(x,y)$ zadovoljava jednačinu Laplasa*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,,$$

dokazati da funkcija $F = f(x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2))$ takođe zadovoljava jednačinu Laplasa.

7. Naći $d^n u$ ako je

$$a)\ u = f(ax+by+cz)\,,$$
$$b)\ u = f(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)\,.$$

8. Funkcija $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, je homogena stepena homogeniteta $\alpha \in \mathbb{R}$, ako je $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

(i) Ako je funkcija f diferencijabilna na skupu E i za svako $x \in E$ zadovoljava uslov

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f\,,$$

dokazati da je funkcija f stepena homogeniteta α.

(ii) Ako je f diferencijabilna funkcija stepena homogeniteta α, dokazati da su parcijalni izvodi funkcije f homogene funkcije stepena homogeniteta $\alpha - 1$.

(iii) Ako je $f \in \mathcal{C}^{(m)}(E)$ homogena funkcija stepena homogeniteta $n \in \mathbb{N}$, dokazati da je tada

$$d^m f(x) = n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x).$$

9. Naći $d^n u$, ako je

$$(i)\, u = f(\sum_{i=1}^{m} x_i)\,, \quad (ii)\, u = f(a_1x_1, \ldots, a_mx_m)\,.$$

* Laplace P.S. (1749-1827)-francuski mehaničar i matematičar

3.8. TEJLOROVA* FORMULA

Teorema 1. *Neka je $f \in \mathcal{C}^{(n)}(E)$, gde je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren i konveksan skup. Ako je $x \in E$ i $\vec{a} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ vektor za koji $x + a \in E$, tada postoji $\theta \in (0,1)$ tako da je*

$$\Delta f(x) = f(x+a) - f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) a^k + r_{n-1}(x,a)\,, \tag{1}$$

gde je

$$r_{n-1}(x,a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x + \theta a) a^n\,.$$

Dokaz. Za funkciju $\varphi(t) = f(x + ta)$, $t \in [0,1]$, prema stavu 1.,3.7. važi

$$\varphi^{(i)}(t) = f^{(i)}(x+ta)a^i, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{2}$$

Funkcija φ zadovoljava sve uslove Tejlorove teoreme za razvoj funkcije u okolini tačke $t = 0$, pa primenom iste dobijamo

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!}\,,\ \ 0 \le \theta \le 1\,,$$

gde je ostatak prikazan u Lagranžovom obliku. Ako sada iskoristimo formulu (2) dobijamo (1). ■

Posledica 1. *Ako su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme, tada se priraštaj $\Delta f(x)$ funkcije f u tački x može prikazati u obliku*

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) a^k + r_n(x,a)\,,$$

pri čemu se ostatak $r_n(x,a)$ može prikazati u jednom od sledećih oblika:

$$r_n(x,a) = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a) a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}\,, \tag{3}$$

---

* Taylor B. (1685-1731)-engleski matematičar

$$\lim_{a\to 0} \varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a) = 0\,,$$

ili

$$r_n(x,a) = \varepsilon(x,a)\|a\|^n\,, \quad \lim_{a\to 0} \varepsilon(x,a) = 0, \tag{4}$$

odnosno

$$r_n(x,a) = o(\|a\|^n)\,, \quad a \to 0\,. \tag{5}$$

Dokaz. Transformišimo ostatak $r_{n-1}(x,a)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x,a) &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x+\theta a)a^n = \frac{1}{n!} d^{(n)} f(x+\theta a) = \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}a_m\right)^{(n)} f(x+\theta a) = \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} C^n_{k_1,\ldots,k_m}\frac{\partial^n f(x+\theta a)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}} a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m} = \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)a^n + \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a)a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m}, \end{aligned}$$

gde je

$$\varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a) = \frac{1}{n!}C^n_{k_1,\ldots,k_m}\left(\frac{\partial^n f(x+\theta a)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}} - \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}\right).$$

Kako su parcijalni izvodi n-tog reda funkcije f neprekidne funkcije, to je $\lim_{a\to 0}\varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a) = 0$, čime je formula (3) dokazana. Da dokažemo (4), napišimo $r_n(x,a)$ u obliku

$$\begin{aligned} r_n(x,a) &= \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a)a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m} = \\ &= \|a\|^n \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a)\left(\frac{a_1}{\|a\|}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{a_m}{\|a\|}\right)^{k_m}, \end{aligned}$$

i označimo sa $\varepsilon(x,a)$ izraz

$$\varepsilon(x,a)=\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a)\left(\frac{a_1}{\|a\|}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{a_m}{\|a\|}\right)^{k_m}.$$

Očigledno je $\lim_{a\to 0}\varepsilon(x,a)=0$, odakle sledi (4) i (5). ■

Ostatak $r_n(x,a)$ pretstavljen u obliku (5) nazivamo Peanovim* oblikom ostatka.

Zadaci za vežbanje

1. Izvesti približne formule za izraze

$$(i)\ \frac{\cos x}{\cos y}\,,\qquad (ii)\ \operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}\,,$$

sa tačnošću do članova drugog reda. (Rešenja: (i) $1-(x^2+y^2)/2$ (ii) $\pi/4-x-xy$)

2. Uprostiti izraz $\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$ smatrajući x, y i z malim veličinama. (Rešenje:$-(xy+yz+zx)$)

3. Razložiti u Maklorenov** red funkciju $f=\ln(1+x+y)$. (Rešenje : $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}((-1)^n(n-1)!/m!(n-m)!)x^m y^{n-m}$, $|x+y|<1$)

4. Dokazati da funkcije $\varepsilon(x,a)$ i $\varepsilon_{k_1,\ldots,k_m}(x,a)$ formulisane u posledici prethodnog odeljka ravnomerno konvergiraju nuli na svakom kompaktu $K\subset E$ kada $a\to 0$.

5. Neka je $f\in\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Dokazati formulu

$$f(x,y)-f(0,0)=\int_0^1(f'_x(tx,ty)x+f'_y(tx,ty)y)dt.$$

6. Ako je $f\in\mathcal{C}^{(s)}(E)$ dokazati da

$$\frac{1}{s!}f^{(s)}(x)a^s=o(\|a\|^s),a\to 0\Leftrightarrow(\forall 1\le i_1\le\cdots\le i_s\le m)\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{1_1}\cdots\partial x_{i_s}}=0.$$

7. Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 1. i ako postoji $c\in\mathbb{R}$ tako da je $|f^{(s)}_{i_1,\ldots i_s}(x)|\le c$ za svako $1\le i_1\le\cdots\le i_s\le m$ i svako $x\in E$, dokazati da je tada

$$\left|\frac{1}{s!}f^{(s)}(x)a^s\right|\le c\frac{m^{s/2}}{s!}\|a\|^s\,.$$

* Peano J.G. (1858-1932)-italijanski matematičar
** Maclaurin C. (1668-1746)-škotski matematičar

8. Neka je $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(U_x)$, gde je U_x konveksna okolina tačke x koja sadrži tačku $x+h$. Dokazati da se ostatak $r_n(x,h)$ može prikazati u obliku

$$r_n(x,h) = \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n d^{(n+1)} f(x+th)dt\,.$$

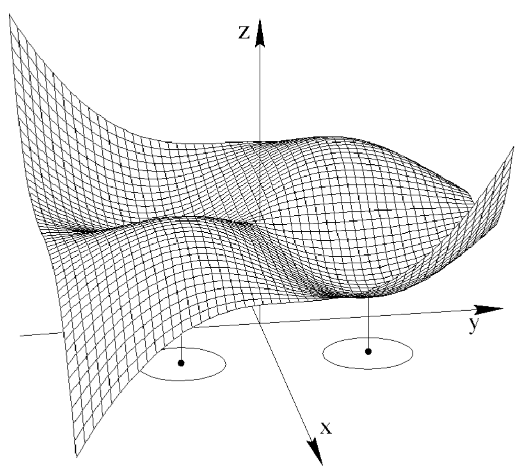
4. EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJA VIŠE PROMENLjIVIH

4.1. POTREBNI USLOVI ZA EGZISTENCIJU EKSTREMNIH VREDNOSTI

Neka je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^m$. Da bi smo odredili neophodne uslove za egzistenciju ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih, uvedimo najpre neke osnovne pojmove.

Definicija 1. *Ako postoji tačka $x_0 \in E$ tako da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svako $x \in E$, onda kažemo da funkcija f ima u tački x_0* ***apsolutni maksimum****. Vrednost $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in E\}$ je* ***najveća vrednost*** *funkcije f na skupu E. Analogno se definiše* ***apsolutni minimum*** *i* ***najmanja vrednost*** *funkcije f na skupu E.*

Definicija 2. *Funkcija f ima* ***lokalni maksimum*** *u tački $x_0 \in E$ ako postoji okolina $U_{x_0} \subseteq E$ tačke x_0 tako da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svako $x \in U_{x_0} \cap E$. Ako je $f(x) < f(x_0)$ za svako $x \in U_{x_0} \cap E$, $x \neq x_0$, tada je x_0 tačka* ***strogog lokalnog maksimuma****. Analogno se definišu* ***lokalni minimum*** *i* ***strogi lokalni minimum****. Tačke lokalnog maksimuma i lokalnog minimuma funkcije f kraće se nazivaju* ***tačkama ekstremnih vrednosti funkcije*** *f.*



Sl. 5

Teorema 1. *Neka je x_0 tačka lokalnog ekstremuma funkcije f. Ako postoji $f'(x_0)$, onda je $f'(x_0) = 0$. Specijalno, ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, onda je $df(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 tačka lokalnog maksimuma funkcije f. Tada postoji okolina $K(x_0, r) \subset E$ tako da je $f(x) \le f(x_0)$ za svako $x \in K(x_0, r)$. Za fiksirano k, $1 \le k \le m$, funkcija

$$g_k(t) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0)\,, \;\; t \in (-r, r)$$

zadovoljava uslov:

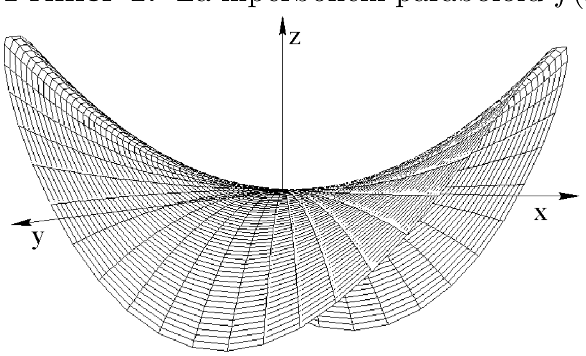
$$g_k(t) \le g_k(0)\,, \qquad t \in (-r, r)\,,$$

pri čemu je $g_k'(0) = f_{x_k}'(x_0)$. Stoga funkcija g_k ima lokalni maksimum u tački $t = 0$, pa kako $g_k'(0)$ postoji, to je prema Fermaovoj* teoremi $g_k'(0) = 0$, odn. $f'(x_0) = 0$. Slučaj lokalnog minimuma prepuštamo čitaocu. ■

Definicija 3. *Unutrašnja tačka x_0 skupa E je* ***kritična*** *ili* ***stacionarna tačka*** *funkcije f ako je $f'(x_0) = 0$.*

Stacionarna tačka funkcije u opštem slučaju ne mora biti tačka lokalne ekstremne vrednosti, što se vidi iz sledećeg primera.

Primer 1. Za hiperbolički paraboloid $f(x, y) = x^2 - y^2$ očigledno je $f_x'(x, y) = f_y'(x, y) = 0$ za $x = y = 0$, pa je $(0, 0)$ stacionarna tačka funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$, ali nije tačka lokalnog ekstremuma, jer u svakoj okolini te tačke ima tačaka u kojima je funkcija pozitivna, kao i tačaka u kojima je funkcija negativna.



Sl. 6

Funkcija može imati ekstremne vrednosti i u tačkama u kojima ne postoje parcijalni izvodi, što pokazuje

* Fermat P. (1601-1665)-francuski matematičar

Primer 2. Funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ima strogi lokalni minimum u tački $(0, \ldots, 0)$. Međutim, parcijalni izvodi ove funkcije u toj tački ne postoje.

Zadaci za vežbanje

1. Naći najmanju i najveću vrednost funkcija na ukazanim skupovima

$$(i)\, z = x - 2y - 3\,,\; 0 \le x \le 1\,,\; 0 \le y \le 1\,,\; 0 \le x + y \le 1\,,$$
$$(ii)\, z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4\,,\; 0 \le x \le y \le 4\,,$$
$$(iii)\, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,,\; x^2 + y^2 \le 1\,,$$
$$(iv)\, u = x + y + z\,,\; x^2 + y^2 \le z \le 1\,.$$

2. Neka je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ i neka je za neko $a \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \le a\}$ neprazan i ograničen. Dokazati da funkcija f ima najmanju vrednost u $\mathbb{R}^m$.

3. Neka je D zatvoren skup u $\mathbb{R}^m$, a $f \in \mathcal{C}(D)$. Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n) \subset D$ za koji $\|x_n\| \to +\infty$ kada $n \to +\infty$ važi: $f(x_n) \to +\infty$ kada $n \to +\infty$. Dokazati da funkcija f dostiže apsolutni minimum u nekoj tački skupa D.

4. Naći stacionarne tačke sledećih funkcija

$$(i) \quad z = x^2 + y^2\,, \qquad\qquad (ii) \quad z = x^2 - y^2\,,$$
$$(iii) \quad u = (x + y + z)^2\,, \qquad\qquad (iv) \quad z = x_1 x_2 \cdots x_n\,,$$

i ispitati njihov karakter.

5. Dokazati da funkcija $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ nema ekstremnu vrednost u tački $(0, 0)$, iako je njena restrikcija na svakoj pravoj koja prolazi kroz tačku $(0, 0)$ ograničena i ima strogi lokalni minimum u toj tački.

6. Neka je $f \in \mathcal{C}(K[O, 1])$. Ako je funkcija f diferencijabilna na skupu $K(O, 1)$ i $f(x) = 0$ u tačkama u kojima je $\|x\| = 0$. Dokazati da funkcija ima stacionarnu tačku u skupu $K(O, 1)$.

4.2. DOVOLJNI USLOVI ZA EGZISTENCIJU EKSTREMNIH VREDNOSTI FUNKCIJA

Pre formulacije teoreme koja određuje dovoljne uslove za egzistenciju strogih lokalnih ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih, navedimo neke pojmove koje ćemo koristiti.

Realna funkcija $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ oblika

$$\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j \tag{1}$$

je **kvadratna forma** promenljivih $x_1, \dots, x_n$. Kvadratna forma je **simetrična** ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za svako $1 \leq i, j \leq n$. Za kvadratnu formu kažemo da je **pozitivno definitna** ako je $\Phi(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Kvadratna forma je **negativno definitna** ako je kvadratna forma $-\Phi$ pozitivno definitna. Kvadratna forma je **određena** ako je ona ili pozitivno ili negativno definitna. Ako kvadratna forma prima kako pozitivne, tako i negativne vrednosti, onda je ona **neodređena**. Za određivanje karaktera kvadratne forme koristi se

Teorema 1. (Silvester)* *Simetrična kvadratna forma je pozitivno definitna onda i samo onda, ako su svi glavni minori matrice $\|a_{ij}\|_{n\times n}$ kvadratne forme $\Phi(x)$ pozitivni.*

Iz teoreme Silvestera sledi da je kvadratna forma negativno definitna onda i samo onda ako je $(-1)^k det\|a_{ij}\|_{k\times k} > 0$ za svako $1 \leq k \leq n$, gde se determinante računaju po glavnim minorima matrice kvadratne forme.

Lema 1. *Ako je kvadratna forma* (1) *određena, onda je*

$$\inf_{x\in S} |\Phi(x)| = \mu > 0\,,$$

gde je $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ jedinična sfera.

Dokaz. Kao zatvoren i ograničen, skup S je kompaktan. Funkcija $|\Phi(x)|$ je neprekidna na kompaktnom skupu S, pa prema Vajerštrasovoj teoremi ona dostiže infimum na skupu S. Stoga postoji tačka $x_0 \in S$ u kojoj je $|\Phi(x_0)| = \inf_{x\in S} |\Phi(x)| = \mu$. Kvadratna forma $\Phi(x)$ je određena, pa je $|\Phi(x)| > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, odakle je $\mu > 0$. ■

Teorema 2. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $a \in E$ stacionarna tačka funkcije $f \in \mathcal{C}^{(2)}(E)$, a $\|\partial^2 f(a)/\partial x_i \partial x_j\|$ matrica kvadratne forme Φ. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) ako je kvadratna forma Φ pozitivno (negativno) definitna, onda funkcija f ima strogi lokalni minimum (maksimum) u tački a;

(ii) ako je kvadratna forma neodređena, onda funkcija f nema lokalnu ekstremnu vrednost u tački a.

---

* Sylvester J.J. (1814-1897)-engleski matematičar

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je kvadratna forma Φ pozitivno definitna. Neka je $K(a,r) \subset E$ i neka je $\|h\| < r$. Tada je $a+h \in K(a,r)$, pa je prema Tejlorovoj formuli sa ostatkom u Peanovom obliku

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} + o(1) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\|h\|^2 (\Phi(\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_n) + o(1))\,,\ h \to 0\,, \tag{2}$$

gde $o(1) \to 0$ kada $h \to 0$, pri čemu je $\overline{h}_i = h_i/\|h\|$. Očigledno je $(\overline{h}_i) = \overline{h} \in S$, pa je prema dokazanoj lemi $\inf_{\overline{h} \in S} |\Phi(\overline{h})| = \mu > 0$. Kako $o(1) \to 0$ kada $h \to 0$, to postoji $\delta > 0$, tako da za $\|h\| < \delta < r$ važi $|o(1)| < \mu$. Za svako takvo h je $f(a+h) > f(a)$, pa je a tačka strogog lokalnog minimuma. Ako je kvadratna forma negativno definitna, analogno se dokazuje da je tada a tačka strogog lokalnog maksimuma.

(ii) Ako je kvadratna forma Φ neodređena, tada postoje $h, k \in \mathbb{R}^n$ tako da je $\Phi(h) > 0$ i $\Phi(k) < 0$. No onda je $\Phi(h/\|h\|) = \Phi(h)/\|h\|^2 = \mu > 0$, $\Phi(k/\|k\|) = \Phi(k)/\|k\|^2 = \nu < 0$, pri čemu je $\overline{h} = h/\|h\|, \overline{k} = k/\|k\| \in S$. Označimo sa $r = t\overline{h}$, $s = t\overline{k}$, $t > 0$. Tada je

$$f(a+r)-f(a) = \frac{1}{2}t^2(\mu + o(1))\,,\ f(a+s)-f(a) = \frac{1}{2}t^2(\nu + o(1))$$

za dovoljno malo t. Kako je prva razlika pozitivna, a druga negativna, funkcija f nema lokalnu ekstremnu vrednost u tački a. ■

Na osnovu Silvesterove teoreme i dokazane teoreme neposredno proizilazi sledeća posledica za funkcije dveju promenljivih.

Posledica 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana u nekoj okolini stacionarne tačke (x_0,y_0) u kojoj ima neprekidne prve i druge parcijalne izvode. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) Ako je $f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ u tački (x_0,y_0), tada funkcija f u tački (x_0,y_0) ima strogi lokalni maksimum (minimum) ako je $f''_{xx} < 0$ $(f''_{xx} > 0)$ u tački (x_0,y_0).

(ii) Ako je $f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$ u tački (x_0,y_0), funkcija f nema ekstremnu vrednost u tački (x_0,y_0).

(iii) Ako je $f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy} = 0$ u tački (x_0, y_0), funkcija može, ali ne mora imati ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0).

Dokaz. Dovoljno je dokazati poslednje tvrđenje, jer prva dva neposredno slede iz prethodno dokazane teoreme i Silvesterove teoreme. Da dokažemo poslednje tvrđenje u navedenoj posledici, razmotrimo sledeće primere.

Primer 1. Za funkciju $z = xy^3$ je $z'_x = y^3$, $z'_y = 3xy^2$, pa je $(0,0)$ stacionarna tačka. U njoj je vrednost izraza $z''_{xx}z''_{yy} - z''^2_{xy} = 0$, ali u toj tački funkcija nema lokalnu ekstremnu vrednost.

Primer 2. Funkcija $z = (x+y)^2$ ima lokalni minimum u tački $(0,0)$, ali je u toj tački $z''_{xx}z''_{yy} - z''^2_{xy} = 0$.

Napomenimo na kraju da su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju lokalnih ekstremnih vrednosti funkcija dati samo za unutrašnje tačke oblasti definisanosti funkcija. Stoga je pri određivanju apsolutnih ekstremnih vrednosti funkcija neophodno ispitati funkciju ne samo u stacionarnim tačkama, već i u graničnim tačkama oblasti definisanosti funkcije.

Zadaci za vežbanje

1. Naći najmanju i najveću vrednost funkcije $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ u oblasti $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

2. Ispitati lokalne ekstreme funkcije

$$z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$$

na kvadratu $0 \le x \le 3\pi/2$, $0 \le y \le 3\pi/2$.

3. Dokazati da je $(-2, -2)$ stacionarna tačka funkcije $z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$, ali da funkcija u toj tački nema lokalnu ekstremnu vrednost.

4. Ispitati lokalne ekstremne vrednosti funkcija:

$$(i)\; z = x^2y^3(6 - x - y)\,, \quad (ii)\; z = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z),\; a > 0\,,$$

$$(iii)\; u = x_1x_x^2 \cdots x_n^n(1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)\,.$$

5. Dokazati da funkcija

$$u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n},\; x_i > 0,\; i = \overline{1,n}$$

ima lokalni minimum koji je jednak $(n + 1)2^{(n+1)^{-1}}$.

6. Neka je $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$. Naći najmanju vrednost funkcije

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x} - \vec{a}_k\|^2\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^m\,.$$

7. Neka je

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{m} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$$

funkcija sa realnim koeficijentima. Ako je $\|a_{ij}\|$ simetrična matrica, a kvadratna forma $\sum_{ij}^{m} a_{ij} x_i x_j$ pozitivno definitna, dokazati da tada funkcija f ima najmanju vrednost na $\mathbb{R}^m$.

5. VEKTORSKE FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

U ovom poglavlju izložićemo osnovne pojmove i rezultate koji se odnose na vektorske funkcije više promenljivih, koje ćemo u daljem kraće nazivati preslikavanjima. Za euklidske prostore na kojima ćemo proučavati preslikavanja smatraćemo da su snabdeveni uobičajenom metrikom.

Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$. Pod **preslikavanjem** $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ podrazumevamo funkciju koja svakoj tački $x = (x_1, \dots, x_n)$, ili vektoru $\vec{x} \in E$ pridružuje neku tačku $y = (y_1, \dots, y_m)$, odn. vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ po zakonu f i to preslikavanje kratko označavamo sa $y = f(x)$. Zadati preslikavanje f ne znači ništa drugo do uspostaviti korespodenciju kojom svakom vektoru $\vec{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ pridružujemo vektor

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \in \mathbb{R}^m\,.$$

Funkcije $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, nazivamo **koordinatnim funkcijama** preslikavanja f.

5.1. NEPREKIDNOST PRESLIKAVANJA

Definicija 1. *Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, je* ***neprekidno*** *u tački $x_0 \in E$ ako za svaku okolinu $O_{f(x_0)}$ tačke $f(x_0)$ postoji okolina O_{x_0} tačke x_0 tako da je*

$$f(E \cap O_{x_0}) \subset O_{f(x_0)}.$$

Kako je u svakoj okolini tačke sadržana neka sferna okolina te tačke, očigledno se prethodna definicija može formulisati i na sledeći način.

Definicija 2. *Preslikavanje f skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je neprekidno u tački $x_0 \in E$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E$*

$$d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Ovo je Košijeva definicija neprekidnosti. Neprekidnost se može definisati i pomoću nizova. Tako imamo Hajneovu definiciju neprekidnosti funkcije.

Definicija 3. *Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ je neprekidno u tački $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ ako za svaki niz (x_k) tačaka skupa E koji konvergira ka x_0 niz $(f(x_k))$ konvergira ka $f(x_0)$.*

Dokažimo ekvivalentnost Košijeve i Hajneove definicje. Neka je preslikavanje f neprekidno u smislu Košijeve definicije i neka je (x_k) niz tačaka skupa E koji konvergira tački x_0. Tada postoji $k_0 \in N$ tako da je $x_k \in O_{x_0}$ za svako $k \geq k_0$. Ali tada je $f(x_k) \in O_{f(x_0)}$ za svako $k \geq k_0$, pa niz $(f(x_k))$ konvergira ka $f(x_0)$.

Obratno, pretpostavimo sada da funkcija f nije neprekidna u tački $x_0 \in E$ u smislu Košijeve definicije. Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svako $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in E \cap K(x_0, \delta)$ tako da je $d(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Za svako $n \in N$, izaberimo $x_n \in E \cap K(x_0, 1/n)$ tako da je $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Kako je $x_n \in E \cap K(x_0, 1/n)$ za svako $n \in N$, to je $\lim x_n = x_0$. Niz $(f(x_n))$ međutim ne konvergira ka $f(x_0)$, jer je $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_o$ za svako $n \in N$.

Stav 1. *Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ je neprekidno u tački $x_0 \in E$ onda i samo onda ako su sve koordinatne funkcije f_i neprekidne u tački x_0.*

Dokaz. Neka je preslikavanje f neprekidno u tački $x_0 \in E$ i neka je (x_k) niz tačaka skupa E koji konvergira ka x_0. Niz $(f(x_k))$ prema stavu 2., 1.2. konvergira ka $f(x_0)$ onda i samo onda, ako niz $(f_i(x_k))$ konvergira ka $f_i(x_0)$ za svako $i = \overline{1, m}$, odn. ako su sve koordinatne funkcije f_i neprekidne u tački x_0. ■

Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ je neprekidno na skupu E, ako je neprekidno u svakoj tački skupa E. Sa $\mathcal{C}(E)$ označimo skup svih preslikavanja neprekidnih na skupu E.

Stav 2. *Preslikavanje f otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je neprekidno na skupu E onda i samo onda ako je inverzna slika svakog otvorenog skupa iz $\mathbb{R}^m$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka je f neprekidno preslikavanje otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ i neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^m$. Ako je $f^{-1}(U) = \varnothing$, onda je tvrđenje dokazano. U protivnom, neka je $x \in E \cap f^{-1}(U)$. Tada je $f(x) \in U$, pa kako je preslikavanje neprekidno, postoji okolina V tačke x tako da je $f(E \cap V) \subset U$, odn. $V \cap E \subset f^{-1}(U)$, što dokazuje da je $f^{-1}(U)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je inverzna slika svakog otvorenog skupa iz $\mathbb{R}^m$ preslikavanjem f otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Neka je $U_{f(x_0)}$ proizvoljna okolina tačke $f(x_0)$, $x_0 \in E$. Skup $f^{-1}(U_{f(x_0)}) \cap E$ je okolina tačke x_0 za koju je zadovoljen uslov $f(f^{-1}(U_{f(x_0)}) \cap E) \subset U_{f(x_0)}$, pa je preslikavanje f neprekidno u tački x_0. Kako je $x_0 \in E$ proizvoljna tačka, preslikavanje f je neprekidno na skupu E. ∎

Neka su zadana preslikavanja $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ i $g : F \mapsto \mathbb{R}^p$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$. Ako je $f(E) \subset F$, kompozicija $g \circ f$ preslikavanja f i g ima smisla i definiše se na uobičajen način sa $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Napomenimo da za neprekidno preslikavanje f u tački x_0 i preslikavanje g definisano u nekoj okolini tačke $f(x_0)$ kompozicija $g \circ f$ ima smisla u nekoj okolini tačke x_0.

Definicija 4. *Obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je* ***homeomorfizam*** *skupa E na skup $f(E)$ ako je zajedno sa preslikavanjem f neprekidno i njemu inverzno preslikavanje.*

Stav 3. *Neka su $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ i $g : F \mapsto \mathbb{R}^p$, $F \subset \mathbb{R}^m$ preslikavanja za koja je $f(E) \subset F$. Ako je preslikavanje f neprekidno u tački $x_0 \in E$, a preslikavanje g u tački $y_0 = f(x_0) \in F$, onda je kompozicija $g \circ f$preslikavanje neprekidno u tački x_0.*

Dokaz. Neka je (x_k) niz tačaka skupa E koji konvergira tački $x_0 \in E$. Kako je preslikavanje f neprekidno u tački x_0, niz $(f(x_k))$ konvergira ka $f(x_0)$. Preslikavanje g je neprekidno u tački $f(x_0)$, pa niz $(g(f(x_k)))$ konvergira ka $g(f(x_0))$, čime je dokazana neprekidnost kompozicije $g \circ f$ u tački x_0. ∎

Dokažimo sada neka osnovna svojstva neprekidnih preslikavanja.

Stav 4. *Ako je* $f : K \mapsto \mathbb{R}^m$ *neprekidno preslikavanje kompaktnog skupa* $K \subset \mathbb{R}^n$*, onda je* $f(K)$ *kompaktan skup u* $\mathbb{R}^m$*.*

Dokaz. Neka je (y_k) proizvoljan niz tačaka skupa $f(K)$. Za svako $k \in N$ neka je $x_k \in f^{-1}(y_k)$. Kako je K kompaktan skup, niz $(x_k) \subset K$ sadrži bar jedan konvergentan podniz (x_{n_k}) čija granična vrednost x_0 pripada skupu K. Preslikavanje f je neprekidno, pa je

$$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in f(K)\,.$$

Prema tome, $f(K)$ je kompaktan skup. ■

Stav 5. *Neka je* $E \subset \mathbb{R}^n$ *put povezan skup. Ako je* $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ *neprekidno preslikavanje, tada je* $f(E)$ *put povezan skup u* $\mathbb{R}^m$*.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in f(E)$. Tada postoje tačke $x_1, x_2 \in E$ tako da je $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Kako je E put povezan skup, postoji neprekidna kriva $\gamma = \{r(t) : r \in \mathcal{C}([a,b])\} \subset E$ koja spaja tačke x_1 i x_2. Kompozicija $f \circ r : [a,b] \to f(E)$ je neprekidna kriva u skupu $f(E)$ koja spaja tačke y_1 i y_2, što dokazuje put povezanost skupa $f(E)$. ■

Definicija 5. *Preslikavanje* $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ *je* ***ravnomerno neprekidno*** *na skupu* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta_\varepsilon > 0$ *tako da za svako* $x', x'' \in E$

$$d(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Stav 6. *Neka je* K *kompaktan skup u* $\mathbb{R}^n$*. Ako je* $f : K \mapsto \mathbb{R}^m$ *neprekidno preslikavanje, onda je ono i ravnomerno neprekidno na* K*.*

Dokaz. Neka je $f = (f_1, \ldots, f_m)$ neprekidno preslikavanje definisano na kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema stavu 1. koordinatne funkcije f_i preslikavanja f su neprekidne na kompaktnom skupu K, pa su prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidne na istom. Stoga za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon^i > 0$ tako da za svako $x', x'' \in K$

$$d(x', x'') < \delta_\varepsilon^i \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\ , \ \ i = \overline{1, m}\,.$$

Neka je $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^1, \ldots, \delta_\varepsilon^m\}$. Tada za svake dve tačke $x', x'' \in K$ koje zadovoljavaju uslov $d(x', x'') < \delta_\varepsilon$ važi

$$d(f(x'), f(x'')) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} (f_i(x') - f_i(x'')^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon,$$

pa je preslikavanje f ravnomerno neprekidno na K. ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati stavove 1. i 3. ne koristeći Hajneovu definiciju neprekidnosti.

2. Dokazati stav 6. ne koristeći Stav 1. .

3. Dokazati da je preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, ravnomerno neprekidno na skupu E onda i samo onda ako su mu koordinatne funkcije ravnomerno nepre kidne na skupu E. Koristeći tu činjenicu, dokazati Kantorovu teoremu.

4. Dokazati stav 5. primenom Borel-Lebegove teoreme.

5. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ je izometrija, ako za svako $x, y \in \mathbb{R}^m$ važi $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Dokazati da je izometrija neprekidno preslikavanje.

6. Neka je D matrica tipa $m \times n$, a $\vec{x}_0$ fiksirani vektor u $\mathbb{R}^n$. Preslikavanje

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}_0 + D\vec{x}\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

je **afino preslikavanje**. Dokazati da je afino preslikavanje $\vec{f}$ neprekidno na $\mathbb{R}^m$. Dokazati da je svaka izometrija afino preslikavanje sa ortogonalnom matricom.

7. Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, zadovoljava uslov Heldera* ili Lipšicov** uslov reda α, $0 < \alpha \leq 1$, ako postoji $L > 0$ tako da je $d(f(x), f(y)) \leq Ld^\alpha(x, y)$ za svako $x, y \in E$. Dokazati da je preslikavanje ravnomerno neprekidno, ako zadovoljava jedan od gore navedenih uslova.

8. Dokazati da stavovi 2.,4.,5. i 6. važe u proizvoljnim metričkim prostorima.

9. Dokazati da je otvoren skup oblast onda i samo onda ako se svake dve tačke tog skupa mogu spojiti poligonalnom linijom koja je sadržana u tom skupu.

5.2. BANAHOVA TEOREMA O FIKSNOJ TAČKI

Banahova teorema o fiksnoj tački svakako predstavlja jedan od najvećih rezultata ne samo u analizi, već gotovo u svim oblastima matematike. Značaj ove teoreme, kao i njenu univerzalnost u rešavanju fundamentalnih problema videćemo u narednim izlaganjima. Pre formulacije teoreme, uvedimo pojmove koji su nam neophodni.

---

* H őlder O. (1859-1937)-nemački matematičar
** Lipschitz R(1832-1903)-nemački matematičar

Definicija 1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tačka $x \in X$ je* ***nepokretna*** *ili* ***fiksna tačka*** *preslikavanja $f : X \mapsto X$ ako je $f(x) = x$.*

Definicija 2. *Preslikavanje f metričkog prostora X u samog sebe je* ***sažimajuće preslikavanje*** *ili* ***kontrakcija*** *ako postoji $\lambda \in [0, 1)$ tako da je*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

za svako $x, y \in X$.

Teorema 1 (Banah). *Svako sažimajuće preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X, d) u sebe ima jedinstvenu nepokretnu tačku.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Posmatrajmo niz

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$$

i dokažimo da je on fundamentalan. Primetima najpre da važe sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}) &\leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \\ &\leq \cdots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)\,, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Tada je za $n \geq m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \leq \\ &\leq \lambda^m d(x_1, x_0) + \lambda^{m+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \lambda^{n-1} d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq d(x_1, x_0)(\lambda^m + \lambda^{m+1} + \cdots) = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Kako je $\lim_{m\to+\infty} \lambda^m = 0$, niz (x_n) je fundamentalan. Prostor X je kompletan, pa je niz (x_n) konvergentan. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Da je x nepokretna tačka preslikavanja f neposredno sledi iz jednakosti

$$x_{n+1} = f(x_n)\,.$$

Zaista, kako je f neprekidno preslikavanje, prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj jednakosti kada $n \to +\infty$ dobijamo da je $x = f(x)$. Tačka x je jedinstvena nepokretna tačka, jer ako bi postojala još jedna nepokretna tačka $x' \neq x$, imali bi smo

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x')\,,$$

pa je $\lambda \geq 1$, što je kontradikcija. ■

Posledica 1. *Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor. Ako za preslikavanje* $f : X \mapsto X$ *postoji* $m \in N$ *tako da je* $f^m : X \mapsto X$ *kontrakcija, onda preslikavanje* f *ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme preslikavanje f^m ima nepokretnu tačku x_0. Dokažimo da je x_0 nepokretna tačka preslikavanja f. Zaista, iz

$$d(x_0, f(x_0)) = d(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) \leq \lambda d(x_0, f(x_0)) \,,$$

sledi $d(x_0, f(x_0)) = 0$, odn. $f(x_0) = x_0$. Kako je svaka nepokretna tačka preslikavanja f nepokretna tačka preslikavanja f^m, to je x_0 jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f. ■

Primer 1. Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m\times m}$ matrica čiji su elementi realni brojevi koji zadovoljavaju uslov

$$\lambda^2 = \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})^2 < 1 \,, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \,, \\ 0, & i \neq j \,. \end{cases}$$

Tada jednačina

$$A\vec{x} = \vec{a}$$

ima jedinstveno rešenje za svako $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$. Dokažimo da je preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ kompletnog metričkog prostora $\mathbb{R}^m$ u sebe definisano sa

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{x} - \vec{a} \quad , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

sažimajuće. Zaista, za svako $x, y \in \mathbb{R}^m$ je

$$\begin{aligned} d^2(f(x), f(y)) &= \sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(y))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + x_i - a_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - y_i + a_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})(x_j - y_j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})^2 \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2 = \lambda^2 d^2(x, y) \,, \end{aligned}$$

pa je preslikavanje f sažimajuće. Stoga postoji jedinstvena tačka $x_0 \in \mathbb{R}^m$ za koju je $f(x_0) = x_0$, odn. $A\vec{x}_0 = \vec{a}$.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je u Banahovoj teoremi uslov $\lambda < 1$ suštinski, i da Banahova teorema ne važi ako preslikavanje f zadovoljava uslov

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)\,.$$

(Uputstvo: posmatrati funkciju $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ u $(\mathbb{R}, d)$)

2. Dokazati da preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definisano sa

$$f(x, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$\varphi \in \mathbb{R}$ fiksirano, nije sažimajuće, ali ima nepokretnu tačku.

3. Neka je u prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), d)$

$$(i)\ f(x) = -x\,, \qquad (ii)\ f(x) = |x|,$$

$x \in \mathcal{C}([a, b])$. Da li preslikavanje f ima nepokretne tačke? Da li je f sažimajuće?

4. Neka je u $(\mathcal{C}([a, b]), d)$

$$f(x)(t) = \int_a^t x(s)ds\,,\ a \le t \le b\,,\ x \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Odrediti nepokretnu tačku preslikavanja f. Da li su preslikavanja f, f^2 sažimajuća?

5. Neka je $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ diferencijabilna funkcija na $[a, b]$. Dokazati da je preslikavanje$f$ sažimajuće onda isamo onda, ako je $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \le \lambda$ za neko $\lambda < 1$.

6. Dokazati da je svako sažimajuće preslikavanje f metričkog prostora u sebe ravnomerno neprekidno.

7. Neka je $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $[a, b]$ sa pozitivnim izvodom na istom. Ako na krajevima segmenta funkcija f prima vrednosti različitog znaka, onda jednačina $f(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje na $[a, b]$. Dokazati. (Uputstvo: posmatrati preslikavanje $x \mapsto A(x) = x - f(x)/f'(x)$)

8. Neka je $K \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$, $\mu = sup\{K(s, t) : (s, t) \in [a, b] \times [a, b]\}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$x(s) = f(x) + \lambda \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

Fredholmova integralna jednačina. Dokazati da za $|\lambda| < \frac{1}{\mu(b-a)}$ postoji jedinstveno određena neprekidna funkcija $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ koja je rešenje te jednačine.(Uputstvo: Dokazati da je sa $F(x)(s) = f(s)+\lambda \int_a^b K(s, t)x(t)dt$ definisano sažimajuće preslikavanje $\mathcal{C}([a, b])$ u $\mathcal{C}([a, b])$)

5.3 LINEARNA PRESLIKAVANJA

Definicija 1. *Preslikavanje* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *je* **linearno** *ako za svaka dva vektora* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *i svaka dva realna broja* λ *i* μ *važi*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\,.$$

Č esto se linearno preslikavanje naziva **linearan operator**. Očigledno je kompozicija linearnih operatora linearan operator.

Neka je $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ linearan operator. Slika svakog vektora e_j standardne baze prostora $\mathbb{R}^n$ je vektor $f(e_j)$ koji se u $\mathbb{R}^m$ razlaže po elementima ε_i standardne baze tog prostora recimo u obliku

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i\,, \quad j = \overline{1, n}\,.$$

Neka je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, a $y = f(x) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i y_i$. Tada je zbog linearnosti preslikavanja f

$$\begin{aligned} y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} e_j x_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\varepsilon_i\,, \end{aligned}$$

odakle sledi da su koordinatne funkcije linearnog operatora linearne funkcije oblika

$$(1) \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,, \quad i = \overline{1, m}\,,$$

što opravdava naziv posmatrane klase preslikavanja. Ako sa A označimo matricu $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ preslikavanja (1), onda je očigledno

$$(2) \qquad \vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Matricu A nazivamo **matricom linearnog preslikavanja**. Iz izloženog vidimo da svako linearno preslikavanje jednoznačno određuje matricu tog preslikavanja. Važi i obrat. Naime, svaka matrica $\|a_{ij}\|$ formulom (2) definiše linearno preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$.

Primer 1. Jednostavan primer linearnog preslikavanja je operator $\pi_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ projekcije na i-tu kordinatnu osu definisan sa

$$\pi_i(x) = \pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i\,, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

Matrica ovog operatora je tipa $1 \times n$ i svi njeni elementi su jednaki nuli, osim elementa na i-tom mestu koji je jednak jedinici.

Ako je $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ preslikavanje čije su koordinatne funkcije f_k, $k = \overline{1,m}$, tada se one mogu prikazati kao kompozicija $f_k = \pi_k \circ f$.

Navedimo neka svojstva linearnih operatora koja će nam u daljem radu biti neophodna.

Stav 1. *Ako su $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ linearni operatori sa matricama A i B, a λ i μ realni brojevi, tada je $\lambda f + \mu g$ linearan operator sa matricom $\lambda A + \mu B$.*

Dokaz. Neka su

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \qquad g_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j\,, \qquad i = \overline{1,m}\,,$$

koordinatne funkcije linearnih operatora f i g sa matricama preslikavanja $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{m\times n}$. Tada su

$$\lambda f_i + \mu g_i = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_j\,, \qquad i = \overline{1,m}\,,$$

koordinatne funkcije preslikavanja $\lambda f + \mu g$ čija je matrica preslikavanja $\|\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}\|_{m\times n} = \lambda A + \mu B$. ■

Stav 2. *Ako su $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^s$ linearni operatori sa matricama preslikavanja A i B respektivno, onda je $g \circ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^s$ linearan operator čija je matrica preslikavanja BA.*

Dokaz. Neka su

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,,\ i = \overline{1,m} \quad \text{i} \quad z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} y_i\,,\ k = \overline{1,s}\,.$$

koordinatne funkcije preslikavanja f i g čije su matrice preslikavanja $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ i $B = \|b_{ki}\|_{s\times m}$. Koordinatne funkcije kompozicije $g\circ f$ su

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right) x_j\,,\ k=\overline{1,s}\,,$$

i linearne su funkcije, pa je $g\circ f$ linearno preslikavanje čija je matrica preslikavanja očigledno BA. ■

Neka je $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ linearan operator, a $K^n = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ jedinična kugla. Kako je $x\mapsto \|x\|$ neprekidna funkcija, to je i $\|f(x)\|$ neprekidna funkcija. Jedinična kugla K^n je kompaktan skup, pa je funkcija $x\mapsto \|f(x)\|$ prema Vajerštrasovoj teoremi ograničena na K^n. Stoga je sledeća definicija korektna.

Definicija 2. ***Norma linearnog operatora*** *$f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ je broj definisan sa*

$$\|f\| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|\,. \tag{3}$$

Korišćenjem osobina linearnog operatora, za svaki vektor $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ imamo sledeću ocenu za $\|f(x)\|$:

$$\begin{aligned}\|f(x)\| = \left\|f\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\|\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \\ \leq \|x\| \sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\| = \|x\|\|f\|\,,\end{aligned}$$

odn.

$$\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|\,. \tag{4}$$

Primetimo da se norma linearnog operatora može prikazati i u sledećem obliku:

$$\|f\| = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\,. \tag{5}$$

Zaista, kako je K^n kompaktan skup, funkcija $\|f(x)\|$ dostiže svoj maksimum na K^n, pa je

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|f(x)\| = \max_{\|x\|\le 1} \|f(x)\|\,.$$

Ako je $\|x\| < 1$, onda je $\|f\| > \|f(x)\|$, pa je

$$\|f\| = \max_{\|x\|=1} \|f(x)\|\,.$$

Sada se iz poslednje jednakosti lako dobija (5).

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je svako linearno preslikavanje ravnomerno neprekidno.

2. Neka je $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje sa matricom preslikavanja A. Ako je $\det A \neq 0$, dokazati da je preslikavanje f obostrano jednoznačno, i da je inverzno preslikavanje f^{-1} linearno sa matricom preslikavanja A^{-1}.

3. Neka je $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje sa matricom preslikavanja $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$. Označimo sa

$$\|A\| = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right\}^{1/2} .$$

Dokazati da je $\|f(x)\| \le \|A\| \|x\|$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$, a zatim dokazati formulu (5) poslednjeg odeljka.

5.4. DIFERENCIJABILNOST PRESLIKAVANJA

Pojam diferencijabilnosti preslikavanja uvodi se po analogiji sa pojmom diferencijabilnosti funkcija više promenljivih.

Definicija 1. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ kažemo da je* ***diferencijabilno u tački*** *$x \in E$ ako postoji linearno preslikavanje $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ tako da se priraštaj $\Delta f(x,h)$ preslikavanja f u tački x može prikazati u sledećem obliku:*

$$(1) \qquad \Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x) = L(x,h) + o(h)\,, \quad h \to 0\,.$$

Linearan operator L u tom slučaju zovemo ***diferencijalom preslikavanja*** *f u tački x i označavamo sa $df(x)$. Matricu diferencijala*

$df(x)$ nazivamo ***izvodom preslikavanja*** *f u tački x i označavamo sa $f'(x)$.*

Imajući u vidu činjenicu da je zapis (1) dat u vektorskom obliku, lako se pokazuje da se on može pretstaviti na sledeći način u skalarnom obliku:

$$\|f(x+h) - f(x) - L(x,h)\| = o(\|h\|)\,, \quad h \to 0\,. \tag{2}$$

Teorema 1. *Preslikavanje $f = (f_1, \dots, f_m)$ otvorenog skupa E iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je diferencijabilno u tački $x \in E$ onda i samo onda ako su sve koordinatne funkcije f_i diferencijabilne u tački x. Tada je preslikavanje neprekidno u tački x i*

$$f'(x) = \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}\,. \tag{3}$$

Dokaz. Primetimo da su koordinatne funkcije f_i diferencijabilne u tački $x \in E$ onda i samo onda ako se priraštaj $\Delta f_i(x,h)$ može prikazati u obliku

$$f_i(x+h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} h_j + \varepsilon_i(x,h)\|h\|\,,\ h \to 0\,, \tag{4}$$

gde je $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(x,h) = 0$. Sada je očigledno da za svako $i = \overline{1,m}$ važe sledeće nejednakosti

$$|f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} h_j| \le$$
$$\le \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| = \|h\| \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2(x,h) \right\}^{1/2}\,,$$

gde je $f'(x)$ matrica data izrazom (3). Ako su sve koordinatne funkcije diferencijabilne u tački x, onda zbog (4) važi (2), pa je preslikavanje f diferencijabilno u tački x, pri čemu je izvod $f'(x)$ dat matricom (3). Ako je preslikavanje f diferencijabilno u tački x, onda diferencijabilnost koordinatnih funkcija sledi iz poslednje nejednakosti i (2). Neprekidnost preslikavanja f sada sledi iz diferencijabilnosti koordinatnih funkcija f_i i stavova 1., 3.2. i 1., 5.1. ■

Teorema 2. *Ako je preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u tački x skupa $E \subset \mathbb{R}^n$, onda je diferencijal tog preslikavanja jednoznačno određen.*

Dokaz. Kako je preslikavanje f diferencijabilno u tački $x \in E$, to su prema prethodnoj teoremi sve koordinatne funkcije f_i diferencijabilne u toj tački, pa su diferencijali $df_i(x)$ prema posledici stava 2., 3.2. jednoznačno određeni i važi

$$f_i(x+h) - f_i(x) = df_i(x)(h) + o(h)\,, \quad h \to 0\,.$$

Stoga za preslikavanje f važi (1), gde je diferencijal

$$df(x) = (df_1(x), \ldots, df_m(x))$$

jednoznačno određen. ■

Teorema 3. *Neka je f preslikavanje otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Ako postoje parcijalni izvodi $\partial f_i/\partial x_j$ za svako $i = \overline{1,m}$ i $j = \overline{1,n}$ i neprekidne su funkcije na skupu E, onda je preslikavanje f diferencijabilno na skupu E.*

Dokaz. Koordinatne funkcije f_i preslikavanja f su diferencijabilne na skupu E zbog učinjenih pretpostavki i teoreme 3., 3.2., pa je prema teoremi 1. preslikavanje f diferencijabilno na skupu E. ■

Definicija 2. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ je klase $\mathcal{C}^{(k)}(E)$, $k \in N \cup \{0\}$ ako su sve koordinatne funkcije f_i preslikavanja f klase $\mathcal{C}^{(k)}(E)$.*

Definicija 3. *Neka je preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u tački $x \in E \subset \mathbb{R}^n$. Matricu*

$$f'(x) = \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$$

nazivamo ***matricom Jakobija*****. Ako je $m = n$, onda determinantu*

$$det f'(x) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}$$

nazivamo ***jakobijanom preslikavanja*** *f.*

* Jacobi K.G.J. (1804-1854)-nemački matematičar

Teorema 4. *Ako su preslikavanja $f, g : E \mapsto \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u tački $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, tada je i preslikavanje $\lambda f + \mu g$ diferencijabilno u tački x za svako $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i važi*

$$d(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda df(x) + \mu dg(x)\,. \tag{4}$$

Dokaz. Preslikavanja f i g su diferencijabilna u tački $x \in E$, pa je

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + o(h)\,, \quad h \to 0\,,$$

i

$$g(x+h) - g(x) = dg(x)(h) + o(h)\,, \quad h \to 0\,.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x+h) - (\lambda f + \mu g)(x) = \\ &= \lambda(f(x+h) - f(x)) + \mu(g(x+h) - g(x)) = \\ &= \lambda df(x)(h) + \mu dg(x)(h) + o(h) = \\ &= (\lambda df(x) + \mu dg(x))(h) + o(h), \quad h \to 0\,.\end{aligned}$$

Preslikavanje $\lambda df + \mu dg$ je prema stavu 1., 5.3. linearno, pa je stoga $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$. ■

Teorema 5. *Naka su $E \subset \mathbb{R}^n$ i $F \subset \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi. Ako je preslikavanje $f : E \mapsto F$ diferencijabilno u tački $x \in E$, a $g : F \mapsto \mathbb{R}^p$ diferencijabilno u tački $y = f(x)$, tada je preslikavanje $h = g \circ f : E \mapsto \mathbb{R}^p$ diferencijabilno u tački $x \in E$ i važi*

$$dh(x) = d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)\,,$$

odnosno

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Dokaz. Neka je $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektor za koji je $x + h \in E$. Kako je preslikavanje f diferencijalno u tački x, to je

$$f(x+h) - f(x) = df(x)(h) + o(h)\,, \quad h \to 0\,.$$

Neka je $k = f(x+h) - f(x)$. Zbog pretpostavljene diferencijabilnosti preslikavanje f je neprekidno u tački x, pa $k \to 0$ kada $h \to 0$. Preslikavanje g je diferencijabilno u tački $y = f(x)$, pa je

$$g(y+k) - g(y) = dg(y)(k) + o(k)\,, \quad k \to 0\,.$$

No onda je

$$\begin{aligned}
h(x+h) - h(x) &= (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = \\
&= g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y) = \\
&= dg(y)(k) + o(k) = dg(y)(f(x+h) - f(x)) + o(k) = \\
&= dg(y)(df(x)(h) + o(h)) + o(k) = \\
&= dg(y)(df(x)(h)) + dg(y)(o(h)) + o(k) = \\
&= (dg(y) \circ df(x))(h) + dg(y)(o(h)) + o(k)\,.
\end{aligned}$$

Kao linearno, preslikavanje $dg(y)$ je ograničeno po normi. Na osnovu (4) 5.3. važi nejednakost $\|dg(y)(o(h))\| \leq \|dg(y)\|\|o(h)\|$, pa je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|dg(y)(o(h))\|}{\|h\|} = 0\,,$$

odakle dobijamo da je $dg(y)(o(h)) = o(h)$. Preslikavanje f je zbog pretpostavljene diferencijabilnosti neprekidno u x, pa stoga $k \to 0$ kada $h \to 0$. Imajući to u vidu, kao i sledeću ocenu,

$$\begin{aligned}
\frac{\|o(k)\|}{\|h\|} &= \frac{\|o(k)\|}{\|k\|} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \frac{\|o(k)\|}{\|k\|} \frac{\|df(x)(h) + o(h)\|}{\|h\|} \leq \\
&\leq \frac{\|o(k)\|}{\|k\|} \left(\|df(x)\| + \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \right) \to 0\,,\ h \to 0\,,
\end{aligned}$$

zaključujemo da važi jednakost $o(k) = o(h)$. Prema tome,

$$h(x+h) - h(x) = dg(y)(df(x)(h)) + o(h)\,, \quad h \to 0\,,$$

pa je preslikavanje $h = g \circ f$ diferencijabilno u tački x i

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Odavde se neposredno dobija jednakost

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,. \ \blacksquare$$

Za $m = n = p$ imamo sledeću posledicu.

Posledica 1. *Neka su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme. Ako je $m = n = p$, tada je*

$$\frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(f_1,\ldots,f_n)}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\,.$$

Razmotrimo sada identično preslikavanje $i : E \mapsto E$, $E \subset \mathbb{R}^n$, čije su koordinatne funkcije i_k, $k = \overline{1,n}$, zadate sa $i_k(x_1,\ldots,x_n) = x_k$. Identično preslikavanje je diferencijabilno u svim unutrašnjim tačkama skupa E, jer su mu koordinatne funkcije diferencijabilne u unutrašnjim tačkama skupa E. Kako je $\partial i_k/\partial x_j = \delta_{kj}$, matrica identičnog preslikavanja je jedinična matrica.

Neka je $f : U \mapsto V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$, obostrano jednoznačno preslikavanje, a $f^{-1} : f(U) \to U$ njemu inverzno preslikavanje. Neka je osim toga preslikavanje f diferencijabilno u tački $x \in intU$, a f^{-1} neka je diferencijabilno u tački $y = f(x)$. Kako je $f^{-1} \circ f = i_U$, to je prema prethodnoj teoremi

$$i_U' = (f^{-1} \circ f)' = (f^{-1})' \cdot f'\,,$$

odakle sledi jednakost

$$det(f^{-1})' \cdot det f' = 1\,.$$

Ako su $y_i(x)$ koordinatne funkcije preslikavanja f, a $x_i(y)$ koordinatne funkcije preslikavanja f^{-1}, onda prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = 1\,.$$

Dobijena jednakost uopštava dobro poznatu formulu za izvod inverzne funkcije. Pri učinjenim pretpostavkama iz nje sledi da je jakobijan kako preslikavanja f, tako i preslikavanja f^{-1} različit od nule u unutrašnjim tačkama skupa U.

Definicija 4. *Homeomorfno preslikavanje f otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ na otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$ je* **difeomorfno preslikavanje** *ako su f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja.*

Teorema 6 (Lagranž). *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na skupu E, a x i h tačke iz $\mathbb{R}^n$ za koje je $[x, x+h] = \{x + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset E$. Tada je*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x+th)\| \|h\|. \tag{5}$$

Dokaz. Za fiksirani vektor $z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ definišimo realnu funkciju φ na segmentu $[0, 1]$ sa

$$\varphi(t) = z \cdot f(x + th)$$

za koju je lako proveriti jednakost

$$\varphi'(t) = z \cdot df(x + th).$$

Zbog učinjenih pretpostavki $\varphi' \in \mathcal{C}([0, 1])$, pa je prema Njutn* -Lajbnicovoj formuli

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(t) dt \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| \, .$$

Koristeći Košijevu nejednakost i prethodnu nejednakost, imamo sledeću ocenu:

$$\begin{aligned} |z(f(x+h) - f(x))| &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|z\| \|df(x+th)\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|z\| \|f'(x+th)\| \|h\| = \\ &= \|z\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x+th)\| \|h\|. \end{aligned}$$

Ako je $\|f(x+h) - f(x)\| = 0$, nejednakost (5) očigledno važi. Ako je pak $\|f(x+h) - f(x)\| \neq 0$, tada stavljajući u poslednjoj nejednakosti $z = f(x+h) - f(x)$ i deljenjem iste sa $\|z\|$ dobijamo traženu nejednakost. ■

---

* Newton I. (1643-1727)-engleski fizičar, mehaničar, astronom i matematičar

Zadaci za vežbanje

1. Neka je preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u tački $x \in E$. Ako je funkcija $g : E \mapsto \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $x \in E$, dokazati da je tada

$$(g\vec{f})'(x) = g(x) \cdot \vec{f}'(x) + \vec{f}(x) \cdot g'(x).$$

2. Neka je preslikavanje $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u tački $x \in E$. Ako je $A = \|a_{ij}\|_{k\times m}$ matrica sa realnim članovima, dokazati da za preslikavanje $A \cdot \vec{f} : E \mapsto \mathbb{R}^k$ važi

$$(A \cdot \vec{f})'(x) = A \cdot f'(x).$$

3. Dokazati da se diferencijal linearnog preslikavanja, ako postoji, poklapa sa samim preslikavanjem.

4. Neka je $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}^p$ preslikavanje definisano na skupu $X \times Y$, gde su $X \subset \mathbb{R}^m$ i $Y \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi. Ako je preslikavanje f diferencijabilno u tački $(x_0, y_0) \in X \times Y$, dokazati da se priraštaj preslikavanja f u tački (x_0, y_0) može prikazati u obliku

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k + o(\|h\|) + o(\|k\|)\,,\ \ h, k \to 0\,,\end{aligned}$$

gde su $f'_x(x_0, y_0) = \|\partial f(x_0, y_0)/\partial x_j\|_{p\times m}$ i $f'_y(x_0, y_0) = \|\partial f(x_0, y_0)/\partial x_k\|_{p\times n}$ matrice linearnih preslikavanja $L_x : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ i $L_y : \mathbb{R}^{\ n} \mapsto \mathbb{R}^p$.

5. Neka je (i) $A = \{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, (ii) $A = \{(r, \varphi, z) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$, (iii) $A = \{(r, \varphi, \psi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$, a $f : A \mapsto \mathbb{R}^k$ preslikavanje definisano sa

$$\begin{aligned}&(\,i\,)\ f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),\\ &(\,ii\,)\ f(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\\ &(iii)\ f(r, \varphi, \psi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi).\end{aligned}$$

Naći det f' u svakom od navedenih slučajeva.

6. Izračunati jakobijan preslikavanja $\partial(s_1, \ldots, s_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$, gde su $s_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $s_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n$, ... , $s_n = x_1 \cdots x_n$ simetrične funkcije. (rezultat: $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$)

7. Neka su $f, g \in \mathcal{C}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, funkcije za koje je definisana njihova kompozicija. Dokazati da je $g \circ f \in \mathcal{C}^{(k)}$.

8. Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 6., dokazati da je tada

$$\|f(x + h) - f(x) - f'(x)h\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|f'(x + th) - f'(x)\|\|h\|.$$

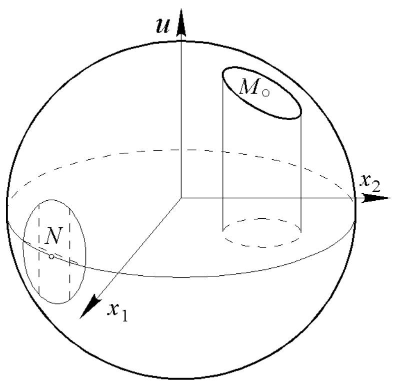
9. Neka je $f(x) = (\sin x, \cos x)$, $x \in [0, 2\pi]$. Dokazati da ne postoji $\theta \in [0, 2\pi]$ tako da je $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(\theta)$.

6. IMPLICITNE FUNKCIJE

6.1. POJAM IMPLICITNE FUNKCIJE

U mnogim razmatranjima, kako u matematici, tako i u drugim naučnim oblastima, često je funkcija u argumenata $x_1, \dots, x_n$ zadata jednačinom oblika $F(u, x_1, \dots, x_n) = 0$. U tom slučaju kažemo da je funkcija u implicitno definisana tom jednačinom.

Izučavanje takvih funkcija najjednostavnije je ako se data jednačina može prevesti na eksplicitni oblik $u = f(x_1, \dots, x_n)$, što naravno nije uvek moguće. Stoga se prirodno postavlja problem određivanja uslova pri kojima je to moguće. Ovaj problem je dosta složen, pa se najčešće razmatra nešto jednostavniji problem. Naime, ne zahteva se određivanje veze između funkcije i promenljivih, već samo uslovi pri kojima takva veza postoji. Naravno da je pored ovako definisanog problema, koji je inače egzistencijalnog karaktera, od nesumnjive važnosti jedinstvenost rešenja. Međutim, ova pitanja nisu jednostavna, a odgovor na njih nije uvek pozitivan, što najbolje ilustruje sledeći jednostavan primer.



Sl. 7

Posmatrajmo funkciju $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ koja u $\mathbb{R}^3$ predstavlja jednačinu sfere. Ova jednačina određuje u krugu $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ beskonačno mnogo funkcija $f(x_1, x_2)$ za koje je

$$F(f(x_1, x_2), x_1, x_2) \equiv 0\,.$$

Takve su recimo funkcije

$$u = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

ali i sve funkcije koje na nekom podskupu skupa $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ primaju vrednosti $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, a na komplementu vrednosti $-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Navedeni primer ukazuje na značaj problema jedinstvenosti rešenja jednačine $F(u, x_1, \dots, x_n) = 0$, bez obzira da li se iz iste može dobiti eksplicitno zadana funkcija $u = f(x_1, \dots, x_n)$.

Ako je u prethodnom primeru $M(x_1, x_2, u)$ proizvoljna tačka fiksirana na sferi koja nije u ravni Ox_1x_2, onda očigledno postoji deo sfere oko tačke M koji se obostrano jednoznačno projektuje na ravan Ox_1x_2. Drugim rečima, postoji okolina tačke (x_1, x_2) u kojoj je zadana jednačina rešiva po u, ali uz uslov da je $u > 0$ ili $u < 0$. Za tačke $N(x_1, x_2, 0)$ sfere koje su u ravni Ox_1x_2 ni uz taj dodatni uslov nije moguće naći okolinu tačke N na sferi koja se obostrano jednoznačno preslikava na ravan Ox_1x_2. Stoga iz jednačine $F(u, x_1, x_2) = 0$ nije moguće jednoznačno odrediti u u zavisnosti od x_1 i x_2.

U ovom poglavlju izučavaćemo problem egzistencije i jedinstvenosti implicitnih funkcija, kao i njihova svojstva. U tom cilju definišimo najpre pojam implicitne funkcije.

Neka je $F : X \times Y \mapsto Z$ preslikavanje skupa $X \times Y$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ u skup $Z \subset \mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $y = f(x)$ skupa $E \subset X$ u skup $F \subset Y$ kažemo da je implicitno definisano jednačinom

$$F(x, y) = 0\,,$$

ako je $F(x, f(x)) \equiv 0$ za svako $x \in E$.

6.2. IMPLICITNE FUNKCIJE SA REALNIM VREDNOSTIMA

Dokažimo najpre teoremu o egzistenciji implicitne funkcije u najjednostavnijem slučaju.

Teorema 1. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $(x_0, y_0) \in E$ i neka su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(i) funkcija $F : E \mapsto \mathbb{R}$ je neprekidna,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) postoji parcijalni izvod $\partial F/\partial y$ i neprekidna je funkcija na skupu E,

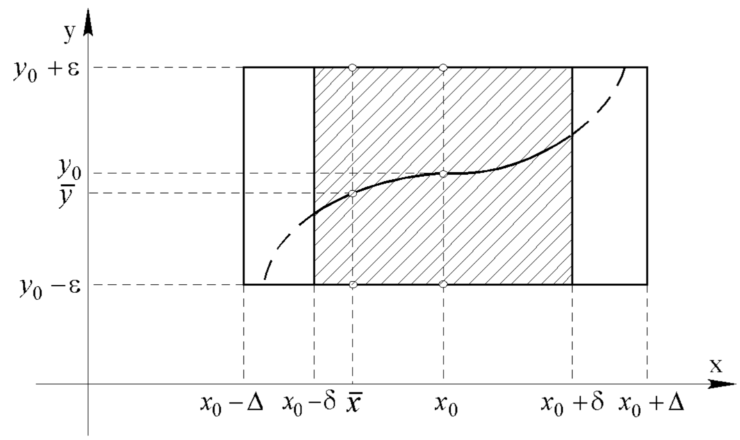
(iv) $\partial F(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$.

Tada postoji okolina $W_{(x_0,y_0)} = U_{x_0} \times V_{y_0}$ tačke (x_0, y_0) i jednoznačno određena neprekidna funkcija $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$ tako da je $y_0 = f(x_0)$ i $F(x, f(x)) = 0$ za svako $x \in U_{x_0}$.

Dokaz. Određenosti radi, možemo pretpostaviti da je $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Kako je funkcija F'_y neprekidna na skupu E, postoji pravougaona okolina $P((x_0, y_0); \Delta, \varepsilon)$ tačke (x_0, y_0) u kojoj je $F'_y(x, y) > 0$. Funkcija $\varphi(y) := F(x, y)$ je neprekidna na segmentu $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ i na njemu ima izvod $\varphi'(y) = F'_y(x, y) > 0$ za svako $x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$, pa je stoga strogo monotono rastuća na segmentu $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. No onda je takva i funkcija $F(x, y)$ za svako $x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$, i s obzirom na to da je $F(x_0, y_0) = 0$, to je

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{i} \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0\,.$$

Funkcija $F(x, y)$ je neprekidna, pa su stoga i funkcije $F(x, y_0 - \varepsilon)$ i $F(x, y_0 + \varepsilon)$ neprekidne. Stoga postoji okolina $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ tačke



Sl. 8

x_0 tako da je $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ za svako $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Takođe postoji okolina $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ tačke x_0 tako da je $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ za svako $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Neka je $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Tada je za svako $x \in U_{x_0} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0 < F(x, y_0 + \varepsilon)\,.$$

Funkcija $\varphi(y) = F(x, y)$ je neprekidna strogo monotono rastuća na segmentu $V_{y_0} = [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ za svako $x \in U_{x_0}$, na krajevima istog prima vrednosti različitog znaka, pa za svako $x \in U_{x_0}$ postoji jedinstveno određena vrednost $y = f(x) \in V_{y_0}$ tako da je $\varphi(y) = \varphi(f(x)) = F(x, f(x)) = 0$. Kako je $F(x_0, y_0) = 0$, to je $y_0 = f(x_0)$ zbog jednoznačne određenosti funkcije f.

Dokažimo da je funkcija $f : U_{x_0} \mapsto V_{y_0}$ neprekidna. Ona je očigledno neprekidna u tački x_0. Zaista, za svako $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, ponavljajući napred proveden postupak, dobijamo $\delta_{\varepsilon'} > 0$ tako da je

$|f(x)-y_0| < \varepsilon'$ za svako $|x-x_0| < \delta_{\varepsilon'}$. Kako za svako $x \in U_{x_0}$ i svako $y = f(x) \in V_{y_0}$ važe svi uslovi teoreme, funkcija f je neprekidna na skupu U_{x_0}. ■

Teorema 2. *Neka funkcija $F(x,y)$ zadovoljava sve uslove prethodne teoreme. Ako je osim toga zadovoljen uslov*

(v) $\partial F/\partial x$ postoji i neprekidna je funkcija na skupu E,

tada je $f \in \mathcal{C}^{(1)}(U_{x_0})$ i za svako $x \in U_{x_0}$ važi:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}\,. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $x \in U_{x_0}$, $x+h \in U_{x_0}$ i $k = f(x+h) - f(x)$. Kako su $F'_x, F'_y \in \mathcal{C}(E)$, funkcija F je diferencijabilna na skupu $W_{(x_0,y_0)} = U_{x_0} \times V_{y_0}$, pa je

$$F(x+h,y+k) - F(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k\,,$$

pri čemu je $\lim_{a\to 0} \varepsilon_1 = \lim_{a\to 0} \varepsilon_2 = 0$, gde je $a = (h,k)$. Sada iz

$$F(x+h,y+k) - F(x,y) = F(x+h, f(x+h)) = 0$$

i prethodne jednakosti sledi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \varepsilon_1(x,a)}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \varepsilon_2(x,a)}\,.$$

Funkcija f je neprekidna, pa $k \to 0$ kada $h \to 0$. Ali tada i $a \to 0$ kada $h \to 0$. No onda prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj jednakosti kada $h \to 0$ dobijamo jednakost (1).

Osim toga, funkcije F'_x i F'_y su neprekidne na E, funkcija f je neprekidna na skupu U_{x_0}, a $F'_y \neq 0$ na istom, pa je stoga funkcija $f'(x)$ neprekidna na skupu U_{x_0}. ■

Teorema 3. *Neka je funkcija $F : E \mapsto \mathbb{R}$ definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(i) funkcija F je neprekidna na skupu E,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \in E$,

(iii) F'_y postoji na skupu E i neprekidna je funkcija u tački (x_0, y_0),

(iv) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

tada postoji okolina $W_{(x_0,y_0)} = U_{x_0} \times V_{y_0}$ tačke (x_0, y_0) i jednoznačno određena neprekidna funkcija $f : \overline{U}_{x_0} \mapsto \overline{V}_{y_0}$ za koju je $f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$ za svako $x \in \overline{U}_{x_0}$.

Dokaz. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da su uslovi teoreme zadovoljeni na skupu $\overline{K(x_0, a)} \times \overline{K(y_0, b)} \subset E$. Jednačina

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

ekvivalentna je sa jednačinom

$$y = Ay \ , \tag{3}$$

gde je A operator definisan sa

$$Ay = y - \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)} = G(x, y) \ , \tag{4}$$

$x \in \overline{K(x_0, a)}$, $y \in \overline{K(y_0, b)}$. Funkcija G je neprekidna prema uslovima teoreme, ima parcijalni izvod

$$G'_y(x, y) = 1 - \frac{F'_y(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)} \ ,$$

i $G'_y(x_0, y_0) = 0$. Kako je funkcija F'_y neprekidna u tački (x_0, y_0), za svako $\theta \in [0, 1)$ postoji pozitivan broj $\varepsilon < \min(a, b)$ tako da je

$$|G'_y(x, y)| = \left| 1 - \frac{F'_y(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)} \right| \leq \theta < 1 \ , \tag{5}$$

za svako $(x,y) \in \overline{K(x_0,\varepsilon)} \times \overline{K(y_0,\varepsilon)}$. Kako je $F(x_0,y_0)=0$, a funkcija $F(x,y_0)$ je neprekidna, postoji $\delta \le \varepsilon$ tako da je

$$|y_0 - Ay_0| = \left| \frac{F(x,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \right| < (1-\theta)\varepsilon \tag{6}$$

za svako $x \in \overline{U}_{x_0} = \overline{K(x_0,\delta)}$. Označimo sa $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ skup svih neprekidnih funkcija koje preslikavaju $\overline{K(x_0,\delta)}$ u $\overline{K(y_0,\varepsilon)} = \overline{V}_{y_0}$ sa uobičajenom metrikom

$$d(g,h) = \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |g(x) - h(x)| \ .$$

Dokažimo najpre da je A operator sažimanja. Neka su $y, z \in \overline{K(y_0,\varepsilon)}$ proizvoljne tačke. Tada je prema Lagranžovoj teoremi

$$Ay - Az = y - z - \frac{F(x,y) - F(x,z)}{F'_y(x_0,y_0)} = \left(1 - \frac{F'_y(x,\xi)}{F'_y(x_0,y_0)}\right)(y-z) \ ,$$

gde je $\xi = z + t(y-z)$, $0 < t < 1$ i $x \in \overline{K(x_0,\delta)}$. Za $y : x \mapsto g(x)$, $z : x \mapsto h(x)$ imamo nejednakost

$$\begin{aligned} |Ag(x) - Ah(x)| &= \left| 1 - \frac{F'_y(x,\xi(x))}{F'_y(x_0,y_0)} \right| |g(x) - h(x)| \le \\ &\le \theta \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |g(x) - h(x)| = \theta d(g,h) \ , \end{aligned}$$

iz koje sledi

$$d(Ag, Ah) = \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |Ag(x) - Ah(x)| \le \theta d(g,h),$$

čime smo dokazali da je A operatpor sažimanja. Dokažimo sada da je A preslikavanje $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ u $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Neka je $h \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Dokažimo da je $Ah \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$, odn. da je $d(Ah, y_0) \le \varepsilon$. Kako je $h \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$, to je $h(x) \in \overline{K(y_0,\varepsilon)}$ za svako $x \in \overline{K(x_0,\delta)}$. Stoga je $|h(x) - y_0| \le \varepsilon$ za svako $x \in \overline{K(x_0,\delta)}$, onda i samo onda ako je $d(h,y_0) = \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |h(x) - y_0| \le \varepsilon$.

Koristeći ovu nejednakost, nejednakost (6) i činjenicu da je A operator sažimanja, dobijamo nejednakost

$$\begin{aligned}|y_0 - Ah(x)| &\le |y_0 - Ay_0| + |Ay_0 - Ah(x)| \le \\ &\le (1-\theta)\varepsilon + \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |Ay_0 - Ah(x)| = \\ &= (1-\theta)\varepsilon + d(Ay_0, Ah) \le \\ &\le (1-\theta)\varepsilon + \theta d(y_0, h) \le \varepsilon\end{aligned}$$

koja važi za svako $x \in \overline{K(x_0, \delta)}$ i iz koje sledi nejednakost

$$d(Ah, y_0) = \sup_{x \in \overline{K(x_0,\delta)}} |y_0 - Ah(x)| \le \varepsilon \ ,$$

što dokazuje da je $Ah \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ za svako $h \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$.

Prostor $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ je kompletan, pa prema Banahovoj teoremi jednačina (3), odn. (2) ima jedinstveno rešenje $y : \overline{K(x_0, \delta)} \mapsto \overline{K(y_0, \varepsilon)}$ u prostoru $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Kako su elementi prostora $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ neprekidne funkcije, y je neprekidna funkcija na skupu $\overline{K(x_0, \delta)}$. Zbog jedinstvenosti rešenja jednačine (2) i uslova (ii), funkcija y zadovoljava uslov $y_0 = y(x_0)$. ■

Primer 1. Data je jednačina

$$y^2 - 2x^3y + x^6 - x^4 + x^2 = 0 \,.$$

Ispitajmo da li je u okolini tačke $(0, 0)$, koja očigledno pripada datoj krivoj, y jednoznačno određeno kao neprekidna funkcija promenljive x.

Iz $F'_y(x, y) = 2y - 2x^3$ sledi $F'_y(0, 0) = 0$, pa uslovi teoreme 1. nisu zadovoljeni. Da je odgovor na postavljeno pitanje negativan, neposredo se vidi ako iz zadane jednačine odredimo y. Naime,

$$y = x^3 \pm x\sqrt{x^2 - 1}\,,$$

odakle vidimo da je funkcija y definisana za $|x| \ge 1$ i za $x = 0$. Stoga postoji okolina tačke $(0, 0)$ u kojoj sem nje nema drugih tačaka te krive.

Na kraju ovog odeljka navedimo bez dokaza teoremu o diferencijabilnosti implicitne funkcije više promenljivih. Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 2., pa čitaocu prepuštamo da sam izvede dokaz ove teoreme.

Teorema 4. *Neka su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme. Ako je osim toga zadovoljen uslov:*

(v) svi parcijalni izvodi F'_{x_i} postoje i neprekidne su funkcije na skupu E i $F'_y \neq 0$ na E,

tada je implicitna funkcija, čiju egzistenciju utvrđuje prethodna teorema, neprekidno diferencijabilna na skupu U_{x_0} i

$$y'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} \ , \quad i = \overline{1, n} \ .$$

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati da li je jednačinom

$$ye^x - x \ln y - 1 = 0$$

jednoznačno određena neprekidna funkcija u okolini tačke $x = 0$.

2. Naći prvi i drugi izvod funkcije implicitno zadane jednačinom $xe^y + ye^x = 2$, a zatim naći njihove vrednosti za $x = 0$.

3. Naći parcijalne izvode prvog i drugog reda funkcije $z(x, y)$ implicitno zadate jednačinom

$$z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$$

u tački $(0, 1)$.

4. Ako su $x(y, z)$, $y(z, x)$ i $z(x, y)$ funkcije implicitno određene jednačinom $F(x, y, z) = 0$, dokazati da je $x'_y \cdot y'_z \cdot z'_x = -1$.

5. Naći d^2z, ako je $F(x/z, y/z) = 0$.

6. Dokazati da jednačina $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $a \neq 0$, u okolini tačke $(0, 0)$ određuje diferencijabilne funkcije. Odrediti vrednost njihovih diferencijala u tački $x = 0$.

7. Neka je $x = y + \varphi(y)$, gde je $\varphi(0) = 0$ i $|\varphi'(y)| \leq |k| < 1$ za $-a < y < a$. Dokazati da za $-\varepsilon < x < \varepsilon$ postoji samo jedna diferencijabilna funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava polaznu jednačinu i za koju je $y(0) = 0$.

8. Neka je $y = y(x)$ funkcija implicitno definisana jednačinom $x = ky + \varphi(y)$, gde je $k \neq 0$ i neka je funkcija φ diferencijabilna, periodična sa periodom T za koju je $|\varphi'(y)| < |k|$. Dokazati da je $y = x/k + \psi(x)$, gde je $\psi(x)$ periodična funkcija sa periodom $|k|T$.(Uputstvo: posmatrati operator $Ay = x/k - \varphi(y)/k$)

9. Neka je $F : [a, b] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava sledeći uslov: postoje realni brojevi m i M, $0 < m \leq M$, tako da za svako $x \in [a, b]$ i svako $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$ važi

$$m \leq \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Dokazati da postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $y = f(x)$ na $[a, b]$ implicitno određeno jednačinom $F(x, y) = 0$. (Uputstvo: dokazati da je operator $(Ag)(x) = g(x) - 2F(x, g(x))/(m + M)$, $a \le x \le b$, $g \in \mathcal{C}([a, b])$ kontrakcija na metričkom prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), d)$

6.3. IMPLICITNE FUNKCIJE SA VEKTORSKIM VREDNOSTIMA

Razmotrimo sada najopštiji slučaj implicitne funkcije. Neka je zadat sistem jednačina

$$F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0\,, \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{1}$$

koji jednostavnije zapisujemo u vektorskom obliku

$$F(x, y) = 0\,, \tag{2}$$

gde je $F = (F_1, \dots, F_n)$, $x \in K(x_0, a) \subset \mathbb{R}^m$, $y \in K(y_0, b) \subset \mathbb{R}^n$. Označimo sa $E = K(x_0, a) \times K(y_0, b)$. Tada važi sledeća

Teorema 1. *Neka preslikavanje $F : E \mapsto \mathbb{R}^n$ zadovoljava sledeće uslove:*

(i) F je neprekidno na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) parcijalni izvod $F'_y(x, y)$ postoji na skupu E i neprekidno je preslikavanje u tački (x_0, y_0),

(iv) $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Tada postoji okolina $W_{(x_0, y_0)} = U_{x_0} \times V_{y_0}$ tačke (x_0, y_0) i samo jedno neprekidno preslikavanje $y = f(x) : U_{x_0} \mapsto V_{y_0}$ implicitno određeno jednačinom (2) za koje je $y_0 = f(x_0)$.

Dokaz. Jednačina (2) ekvivalentna je sa jednačinom

$$y = Ay\,, \tag{3}$$

u kojoj je A operator definisan sa

$$Ay = y - (F'_y(x_0, y_0))^{-1} F(x, y) = G(x, y)\,,$$

gde je $(F'_y(x_0,y_0))^{-1}$ matrica inverzna matrici $F'_y(x_0,y_0)$.

Preslikavanje $G : E \mapsto \mathbb{R}^n$ je prema pretpostavkama teoreme neprekidno, ima parcijalni izvod

$$G'_y(x,y) = I - (F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_y(x,y)$$

i $G'_y(x_0,y_0) = 0$. Preslikavanje $F'_y(x,y)$ je prema pretpostavci neprekidno u tački (x_0,y_0), pa stoga za svako $\theta \in [0,1)$ postoji neko $\varepsilon < \min(a,b)$, tako da je

$$\|G'_y(x,y)\| = \|I - (F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_y(x,y)\| < \theta \tag{4}$$

za svako $(x,y) \in \overline{K(x_0,\varepsilon)} \times \overline{K(y_0,\varepsilon)}$. Osim toga je $F(x_0,y_0) = 0$, pa zbog neprekidnosti preslikavanja F postoji $0 < \delta \le \varepsilon$ tako da je

$$\|y_0 - Ay_0\| = \|(F'_y(x_0,y_0))^{-1}F(x,y_0)\| < (1-\theta)\varepsilon \tag{5}$$

za svako $x \in \overline{K(x_0,\delta)} = U_{x_0}$.

Prostor $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$ svih neprekidnih preslikavanja skupa U_{x_0} u skup $V_{y_0} = \overline{K(y_0,\varepsilon)}$ je kompletan metrički prostor. Dokažimo da je A operator sažimanja na prostoru $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Zaista, na osnovu Lagranžove teoreme za vektorske funkcije, za svako $y,z \in \overline{K(y_0,\varepsilon)}$ važi nejednakost

$$\begin{aligned}\|Ay - Az\| = \|G(x,y) - G(x,z)\| &\le \sup_{\xi\in(y,z)} \|G'_y(x,\xi)\|\|y-z\| = \\ &= \sup_{\xi\in(y,z)} \|I - (F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_y(x,\xi)\|\|y-z\| .\end{aligned}$$

Stavljajući u poslednjoj nejednakosti $y : x \mapsto g(x)$, $z \mapsto h(x)$, $x \in U_{x_0}$ i koristeći pri tome (4), dobijamo

$$\begin{aligned}\|Ag(x) - Ah(x)\| \le \sup_{\xi\in(y,z)} &\|I - (F'_y(x_0,y_0))^{-1}F'_y(x,\xi)\| \times \\ &\times \sup_{x\in U_{x_0}} \|g(x) - h(x)\| \le \theta d(g,h) .\end{aligned}$$

No onda je

$$\sup_{x\in U_{x_0}} \|Ag(x) - Ah(x)\| \le \theta d(g,h) ,$$

odn.

$$d(Ag, Ah) \leq \theta d(g, h)\,,$$

čime smo dokazali da je A operator sažimanja na prostoru $\mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$.

Dokažimo sada da je $A : \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon} \mapsto \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Neka je $h \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$.Tada je očigledno $d(h, y_0) \leq \varepsilon$. No onda je

$$\begin{aligned} d(Ah(x), y_0) &\leq d(Ah(x), Ay_0) + d(Ay_0, y_0) \leq \\ &\leq (1-\theta)\varepsilon + \sup_{x\in U_{x_0}} d(Ah(x), Ay_0) = \\ &= (1-\theta)\varepsilon + d(Ah, Ay_0) \leq (1-\theta)\varepsilon + \theta d(h, y_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

pa je

$$\sup_{x\in U_{x_0}} d(Ah(x), y_0) \leq \varepsilon\,,$$

odn. $d(Ah, y_0) \leq \varepsilon$, što dokazuje da je $Ah \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$.

Time smo dokazali da jednačina (3) odn. (2) ima jedinstveno rešenje $y = f(x) \in \mathcal{C}_{\delta,\varepsilon}$. Da ono zadovoljava uslov $y_0 = f(x_0)$, sledi iz uslova (ii) i jedinstvenosti preslikavanja $y = f(x)$. ■

Teorema 2. *Neka su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme. Ako su parcijalni izvodi $F'_x(x, y)$ i $F'_y(x, y)$ neprekidna preslikavanja u oblasti E i ako je matrica $F'_y(x, y)$ invertibilna u toj oblasti, tada je preslikavanje $f : U_{x_0} \mapsto V_{y_0}$ neprekidno diferencijabilno na skupu U_{x_0}, pri čemu je*

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)).$$

Dokaz. Dokažimo diferencijabilnost preslikavanja f čiju egzistenciju daje prethodna teorema. Uočimo proizvoljnu tačku $x \in intU_{x_0}$ i neka je $h \in \mathbb{R}^m$ vektor za koji je $x + h \in U_{x_0}$. Tada su $(x, f(x))$ i $(x + h, f(x + h))$ tačke iz $K(x_0, \delta) \times K(y_0, \varepsilon)$. Kako su F'_x i F'_y neprekidna preslikavanja na E, preslikavanje F je diferencijabilno na skupu $K(x_0, \delta) \times K(y_0, \varepsilon)$. Prema tome,

$$\begin{aligned} &F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = \\ &= F'_x(x, f(x))h + F'_y(x, f(x))k + \alpha h + \beta k = 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

gde je $k = f(x + h) - f(x)$, a α i β su matrice tipa $n \times m$ i $n \times n$ respektivno, pri čemu $\|\alpha\| \to 0$ kada $h \to 0$, a $\|\beta\| \to 0$ kada $k \to 0$.

Kako je preslikavanje f neprekidno, to iz $h \to 0$ sledi $k \to 0$. No onda $\|\beta\| \to 0$ kada $h \to 0$. Kako je matrica $F'_y(x,y)$ invertibilna, jednakost (6) možemo napisati u obliku

$$k + (F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h = -(F'_y(x,f(x)))^{-1}(\alpha h + \beta k)\,,$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} &\|k + (F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h\| \le \\ &\qquad\qquad \le \|(F'_y(x,f(x)))^{-1}\|(\|\alpha\|\|h\| + \|\beta\|\|k\|)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Kako $\|\alpha\|, \|\beta\| \to 0$ kada $h \to 0$, to vektor h možemo izabrati tako da je

$$\|(F'_y(x,f(x)))^{-1}\|(\|\alpha\|\|h\| + \|\beta\|\|k\|) \le \frac{1}{2}(\|h\| + \|k\|)\,. \tag{8}$$

Ovo je moguće, jer je matrica preslikavanja $(F'_y(x,f(x)))^{-1}$ zbog neprekidnosti u zatvorenoj oblasti $\overline{K(x_0,\delta)} \times \overline{K(y_0,\varepsilon)}$ ograničena po normi, a $\|\alpha\|\|h\| + \|\beta\|\|k\| = o(\|h\|) + o(\|k\|)$. Osim toga je

$$\begin{aligned} &\|k + (F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h\| \ge \\ &\qquad\qquad \ge \|k\| - \|(F'_y(x,f(x)))^{-1}\|\|F'_x(x,f(x))\|\|h\|\,, \end{aligned} \tag{9}$$

pa iz (7), (8) i (9) imamo sledeću ocenu

$$\frac{1}{2}\|k\| \le \|h\|\left(\frac{1}{2} + \|(F'_y(x,f(x)))^{-1}\|\|F'_x(x,f(x))\|\right) \le c\|h\|\,, \tag{10}$$

gde je $c > 0$ konstanta koja ne zavisi od h. Sada nejednakost (7) dobija oblik

$$\begin{aligned} &\|k + (F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h\| \le \\ &\qquad\qquad \le \|(F'_y(x,f(x)))^{-1}\|(\|\alpha\| + 2c\|\beta\|)\|h\| = o(\|h\|)\,. \end{aligned}$$

Iz poslednje nejednakosti vidimo da se priraštaj preslikavanja f u tački x može prikazati u obliku

$$f(x+h) - f(x) = -(F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))h + o(\|h\|)$$

kada $h \to 0$, što dokazuje diferencijabilnost funkcije f u tački x. Pri tome je

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)) \,.$$

Neprekidnost preslikavanja f' sada sledi iz neprekidnosti preslikavanja $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ i $f(x)$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Preslikavanje $(x,y) \mapsto (u,v)$ implicitno je definisano jednačinama

$$u + v = x + y \quad , \quad y \sin u - x \sin v = 0.$$

Naći diferencijal tog preslikavanja.

2. Odrediti diferencijal preslikavanja $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ u tački $(1,-1)$, ako je ono definisano sistemom jednačina

$$\begin{aligned} &xu + yv = 4 \\ &yu - v = 0 \end{aligned}$$

i ako je $u(1,-1) = 2$, $v(1,-1) = -2$.

3. Da li je preslikavanje implicitno definisano sistemom jednačina

$$\begin{aligned} &u = e^x \cos y \\ &v = e^y \sin y \end{aligned}$$

obostrano jednoznačno na pravougaoniku određenom tačkama $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\pi)$, $(0,\pi)$. Naći sliku tog pravougaonika zadatim preslikavanjem.

4. Naći sliku pravougaonika čija su temena $A(1,0)$,$B(1,2)$, $C(2,2)$, $D(2,0)$ preslikavanjem

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \quad v = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Da li je to preslikavanje obostrano jednoznačno?

5. Pri kojim uslovima za funkcije f i g jednačina $y = xf(z) + g(z)$ određuje funkciju $z(x,y) \in \mathcal{C}(U)$, gde je U neka okolina tačke (x_0, y_0)? Dokazati da je tada

$$z'^2_y z''_{xx} - 2z'_x z'_y z''_{xy} + z'^2_x z''_{yy} = 0.$$

6. Dat je sistem jednačina

$$\begin{aligned} &uf'(v) = (y - f(v))^2 \\ &(x+v)f'(v) = y - f(v). \end{aligned}$$

Koje uslove mora da zadovoljava funkcija f da bi preslikavanje $(u(x,y), v(x,y))$ implicitno određeno datim sistemom bilo klase $\mathcal{C}^{(1)}(U)$, gde je U neka okolina tačke (x_0, y_0)? Dokazati da je tada $u'_x \cdot u'_y = u$ u svim tačkama skupa U.

7. Ako su zadovoljeni uslovi teorame 2. i ako je $m = n$, odrediti jakobijan preslikavanja f'.

8. Dokazati da je preslikavanje f čiju egzistenciju obezbeđuju uslovi teoreme 2. klase $\mathcal{C}^{(k)}(E)$ ako je $F \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$.

6.4. TEOREMA O INVERZNOM PRESLIKAVANJU

Teorema 1. *Neka je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^m$. Ako je $\det f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in E$, tada postoje okoline U_{x_0} i V_{y_0} tačaka x_0 i $y_0 = f(x_0)$ tako da je restrikcija $f|U_{x_0}$ funkcije f bijekcija skupa U_{x_0} na skup V_{y_0}. Inverzno preslikavanje f^{-1} je neprekidno diferencijabilno na skupu V_{y_0} i važi*

$$df^{-1}(y) = (df(x))^{-1}.$$

Dokaz. Posmatrajmo preslikavanje $F(x, y) := f(x) - y$ koje je definisano i neprekidno diferencijabilno na skupu $E \times \mathbb{R}^m$. Kako je $F(x_0, y_0) = 0$ i

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial(f_1 \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x_0} \neq 0\,,$$

preslikavanje F zadovoljava sve uslove teoreme o egzistenciji preslikavanja implicitno zadatog sistemom $F(x, y) = 0$. Stoga je taj sistem lokalno rešiv u nekoj okolini tačke (x_0, y_0), pri čemu je to rešenje jedinstveno. Drugim rečima, postoje okoline $U^*_{x_0}$ tačke x_0 i V_{y_0} tačke y_0 i jedinstveno neprekidno diferencijabilno preslikavanje $x = g(y) : V_{y_0} \to U^*_{x_0}$ koje zadovoljava uslov $F(g(y), y) = 0$, odn. $f(g(y)) = y$, za svako $y \in V_{y_0}$. Za svaku tačku $y \in V_{y_0}$ postoji i jednoznačno je određena tačka $x = g(y) \in U^*_{x_0}$ čija je slika preslikavanjem f tačka y. Dakle je $x \in f^{-1}(y) \cap U^*_{x_0}$, a preslikavanje $g(y)$ je obostrano jednoznačno, neprekidno diferencijabilno, pri čemu je $g = f^{-1}$ na skupu V_{y_0}. Neka je $U_{x_0} = U^*_{x_0} \cap f^{-1}(V_{y_0})$. Skup U_{x_0} je otvorena okolina tačke x_0 kao presek otvorenih skupova, pri čemu je preslikavanje f bijektivno na njemu.

Osim toga, preslikavanje $g = f^{-1}$ je neprekidno diferencijabilno na V_{y_0}, pa je na osnovu teoreme o diferencijabilnosti preslikavanja ono implicitno zadato sistemom $F(x,y)=0$ i

$$df^{-1}(y) = dg(y) = -[d_xF(x,y)]^{-1}d_yF(x,y) = \\ = -[df(x)]^{-1}(-I) = [df(x)]^{-1}\,,$$

za svako $x \in U_{x_0}$ i svako $y = f(x) \in V_{y_0}$. ■

Iz poslednje jednakosti neposredno sledi jednakost matrica preslikavanja $df^{-1}(y)$ i $[df(x)]^{-1}$:

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\,,$$

odakle se dobija sledeća formula:

$$\frac{\partial(f_1^{-1},\dots,f_m^{-1})}{\partial(y_1,\dots,y_m)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}}\,,$$

koja za $m=1$ pretstavlja dobro poznatu formulu za izvod inverzne funkcije.

Kako je $\det(f^{-1})'(y)\cdot\det f'(x) = 1$ za svako $(x,y) \in U_{x_0}\times V_{y_0}$, to su jakobijani preslikavanja f' i $(f^{-1})'$ različiti od nule u odgovarajućim okolinama.

Posledica 1. *Neka je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje otvorenog skupa $G \subset \mathbb{R}^m$ u prostor $\mathbb{R}^m$. Ako je jakobijan preslikavanja različit od nule na skupu G, onda je $f(G)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Neka je y_0 proizvoljna tačka skupa $f(G)$ i neka je x_0 neki element skupa $\{f^{-1}(y_0)\}$. Tada prema prethodnoj teoremi postoje okoline $U_{x_0} \subset G$ i V_{y_0} tačaka x_0 i y_0 respektivno, tako da je $f(U_{x_0}) = V_{y_0}$. Stoga je $V_{y_0} \subset f(G)$, pa je y_0 unutrašnja tačka skupa $f(G)$. ■

Napomenimo da je preslikavanje f koje zadovoljava uslove teoreme 1. difeomorfizam na skupu U_{x_0}. To svojstvo je lokalnog karaktera, pa stoga kažemo da je f lokalni difeomorfizam.

Zadaci za vežbanje

1. Naći inverzna preslikavanja za sledeća preslikavanja:

$$a)\ u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y\,, \qquad b)\ u = xy,\ v = x/y\,,$$
$$c)\ u = x^2 - y^2,\ v = 2xy\,, \qquad d)\ u = x+y,\ v = (x-y)^2\,.$$

Ispitati koje je od datih preslikavanja obostrano jednoznačno.

2. Neka je $M(x,y) \mapsto N(u,v)$ preslikavanje ravni $\mathbb{R}^2$ u samu sebe, koje svakoj tački M pridružuje tačku N tako da je $OM \cdot ON = r^2$, gde je $O(0,0)$ središte kruga poluprečnika r, pri čemu OM i ON pripadaju istoj pravoj. Odrediti analitički tako definisano preslikavanje, kao i njemu inverzno preslikavanje. U šta se preslikavaju prave, odn. kružnice ovim preslikavanjem?

3. Neka je $f = (f_1, f_2)$ preslikavanje sa $\mathbb{R}^2$ u R^2 koje zadovaljava **Koši - Rimanove jednačine**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(i) Dokazati da je $\det f'(x_0, y_0) = 0$ onda i samo onda ako je $f'(x_0, y_0) = 0$.

(ii) Ako je $f'(x_0, y_0) \neq 0$, dokazati da je f invertibilno u nekoj okolini tačke (x_0, y_0), a da inverzno preslikavanje f^{-1} zadovoljava Koši-Rimanove uslove u nekoj okolini tačke (x_0, y_0).

4. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{R}^n$ definisano sa

$$f(x) = a + \frac{r}{\|x - a\|}(x - a)$$

je **inverzija** sa centrom u tački a i poluprečnikom r. Dokazati da je f difeomorfizam za koji je

$$f(\{x : 0 < \|x - a\| < r\}) = \{x : \|x - a\| > r\}.$$

5. Dokazati da je slika oblasti neprekidno diferencijabilnim preslikavanjem čiji je jakobijan različit od nule takođe oblast.

6. Neka je A otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, a $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje za koje je $\det f'(x_0) \neq 0$ za $x_0 \in A$. Dokazati da postoji kugla $K(x_0, r) \subset A$ tako da je

$$\|f(u) - f(v)\| \geq \frac{1}{2}\|u - v\|$$

za svako $u, v \in K(x_0, r)$. Koristeći ovu nejednakost, dokazati da za svako $y \in K(f(x_0), r/4)$ postoji jednoznačno određena tačka $x \in K(x_0, r)$ tako da je $y = f(x)$. Dokazati da je f homeomorfizam skupova $K(x_0, r) \cap f^{-1}(K(f(x_0), r/4))$ i $K(y_0, r/4)$.

7. Neka je $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje koje zadovoljava nejednakost $\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$ za svako $x, y \in \mathbb{R}^m$. Dokazati da je f bijektivno preslikavanje koje svaki otvoren skup iz $\mathbb{R}^m$ preslikava u otvoren skup.

6.5. TEOREMA O RANGU PRESLIKAVANJA

Neka je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$. **Rang preslikavanja** f u tački $x \in U$ je rang matrice $f'(x)$. Označavamo ga sa $rang\, f(x)$.

Teorema 1. *Neka je $f : X \mapsto Y$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje oblasti $X \subset \mathbb{R}^m$ na oblast $Y \subset \mathbb{R}^n$, pri čemu je r rang preslikavanja f, $r \leq m$, $r < n$ za svako $x \in X$. Tada za svako $x \in X$ postoji otvoren skup $V \subset X$ koji sadrži tačku x, tako da je $f(V)$ skup tačaka prostora $\mathbb{R}^n$ sa svojstvom da se $n - r$ koordinata tačaka $y \in Y \cap f(V)$ mogu izraziti kao neprekidno diferencijabilne funkcije ostalih r kordinata te tačke.*

Dokaz. Ne umanjujući opštost dokaza, pretpostavimo da je

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} \neq 0, \tag{1}$$

za svako $x \in X$, a da su svi minori matrice $f'(x)$ reda $r + 1$ jednaki nuli.

Kako je preslikavanje f neprekidno diferencijabilno u oblasti X, jakobijan (1) je neprekidna funkcija na skupu X, pa za svaku tačku $x_0 \in X$ postoji okolina $K(x_0, \delta)$ tako da je za svako $x \in K(x_0, \delta)$ zadovoljen uslov (1), pri čemu su svi minori reda $r + 1$ matrice $f'(x)$ jednaki nuli u toj okolini.

Posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^m$ kao proizvod $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$. Tačku $x \in \mathbb{R}^m$ pretstavimo u obliku $x = (x_r, x_{m-r})$, gde je $x_r = (x_1, \ldots, x_r)$, a $x_{m-r} = (x_{r+1}, \ldots, x_m)$. Analogno, posmatrajući $\mathbb{R}^n$ kao proizvod $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, stavimo $y = (y_r, y_{n-r})$, gde je $y_r = (y_1, \ldots, y_r)$, $y_{n-r} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$. Neka je $y_0 = f(x_0) = (y_r^0, y_{n-r}^0)$, $x_0 = (x_r^0, x_{n-r}^0)$, i neka je sa $y_r = f_r(x_r, x_{m-r})$, $y_{n-r} = f_{n-r}(x_r, x_{m-r})$ određeno preslikavanje $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Zbog učinjenih pretpostavki, na osnovu teoreme 2., 6.3., postoje otvorene kugle $K(x_r^0, \delta_1) \subset \mathbb{R}^r$ i $K(x_{m-r}^0, \delta_2) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ tako da je $K(x_r^0, \delta_1) \times K(x_{m-r}^0, \delta_2) \subset K(x_0, \delta)$ i okolina $K(y_r^0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^r$ tako da je na skupu $K(y_r^0, \varepsilon) \times K(x_{m-r}^0, \delta_2)$ određeno jedinstveno neprekidno diferencijabilno preslikavanje $x_r = \varphi_r(y_r, x_{m-r}) \in K(x_r^0, \delta_1)$.

Razmotrimo preslikavanje $y_r = f_r(x_r, x_{m-r})$ kao sistem jednačina u $\mathbb{R}^{m+r}$. Zamenjujući u ovom sistemu x_r sa $\varphi_r(y_r, x_{m-r})$ dobijamo identičnost $y_r \equiv f_r(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) \equiv \psi_r(y_r, x_{m-r})$, gde je ψ funkcija promenljivih $(y_r, x_{m-r}) \in K(y_r^0, \varepsilon) \times K(x_{m-r}^0, \delta_2)$, koju možemo napisati u obliku r identiteta:

$$y_j \equiv f_j(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) \equiv \psi_j(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1} \ldots, x_m). \tag{2}$$

Diferenciranjem ovih jednakosti po x_p, $p > r$, dobijamo

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f_j}{\partial x_p} = (\mathcal{D}_p f_j, \mathcal{D}_p \varphi) \equiv 0,$$

(3) $$j = \overline{1, r} \quad , \quad p = \overline{r+1, m},$$

gde su

$$\mathcal{D}_p f_j = (\partial f_j/\partial x_1, \ldots, \partial f_j/\partial x_r, \partial f_j/\partial x_p)$$

i

$$\mathcal{D}_p \varphi = (\partial \varphi_1/\partial x_p, \ldots, \partial \varphi_r/\partial x_p, 1)$$

vektori u $\mathbb{R}^{p+1}$.

Neka je $V_0 = K(x_r^0, \delta_1) \times K(x_{m-r}, \delta_2)$, a $Y_0 = f(V_0)$. Ako je $y = (y_r, y_{n-r}) \in Y_0$ i $y_r \in K(y_r^0, \varepsilon)$, tada je $x_r = \varphi_r(y_r, x_{m-r})$, pa je $y_{n-r} = f_{n-r}(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}) = g_{n-r}(y_r, x_{m-r})$. Dokažimo da preslikavanje g_{n-r} ne zavisi od x_{m-r}. Za to je dovoljno dokazati da nijedna koordinatna funkcija

(4) $$g_s(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) \equiv f_s(\varphi_r(y_r, x_{m-r}), x_{m-r}), s > r,$$

preslikavanja g_{n-r} ne zavisi od x_{m-r}. Diferenciranjem g_s po x_p, $p > r$, imamo

(5) $$\frac{\partial g_s}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_s}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f_s}{\partial x_p} = (\mathcal{D}_p f_s, \mathcal{D}_p \varphi),$$

gde je $\mathcal{D}_p f_s = (\partial f_s/\partial x_1, \ldots, \partial f_s/\partial x_r, \partial f_s/\partial x_p)$.

Kako je $s > r$, to je zbog pretpostavke o rangu preslikavanja f svaki vektor $\mathcal{D}_p f_s$ za $s > r$ linearna kombinacija vektora $\mathcal{D}_p f_j$ iz (3):

(6) $$\mathcal{D}_P f_s = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s \mathcal{D}_p f_j,$$

gde su λ_j^s konstante iz $\mathbb{R}$. Zamenom vektora $\mathcal{D}_p f_s$ iz (6) u (5), koristeći (3), dobijamo

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_p} = \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s \mathcal{D}_p f_j, \mathcal{D}_p \varphi \right) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^s (\mathcal{D}_p f_j, \mathcal{D}_p \varphi) = 0$$

za svako $s > r$ i svako $p > r$. Zato je skup M tačaka (y_r, y_{n-r}), $y_r \in K(y_r^0, \varepsilon)$, koje pripadaju skupu Y_0 određen jednačinom $y_{n-r} = g_{n-r}(y_r)$. Skup M je slika preslikavanjem f preseka skupa V_0 i skupa tačaka $x \in y_r^{-1}(K(y_r^0, \varepsilon))$. Presek ovih skupova je otvoren skup V koji sadrži tačku x_0. ■

Posledica 1. *Ako je $x_{m-r} \in K(x_{m-r}^0, \delta_2)$ i $y_r \in K(y_r^0, \varepsilon)$, tada je na skupu $K(y_r^0, \varepsilon) \times K(x_{m-r}^0, \delta_2)$ jednoznačno određeno preslikavanje*

$$x_r : K(y_r^0, \varepsilon) \times K(x_{m-r}^0, \delta_2) \mapsto K(x_r^0, \delta_1)$$

koje pri fiksiranom y_r pretstavlja funkciju od $x_{m-r} \in K(x_{m-r}^0, \delta_2)$.

Primer 1. Neka je dat sistem jednačina $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ $z = h(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu su funkcije f, g i h neprekidno diferencijabilne u oblasti D. Neka je $x_0 = f(u_0, v_0)$, $y_0 = g(u_0, v_0)$, $z_0 = h(u_0, v_0)$ za $(u_0, v_0) \in D$. Ako je rang matrice

$$\begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix}$$

u tački (u_0, v_0) jednak 2, tada postoji neprekidno diferencijabilna funkcija φ tako da je $z = \varphi(x, y)$.

Zaista, neka je npr.

$$\begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Zbog neprekidnosti parcijalnih izvoda funkcija f i g ta determinanta je različita od nule u nekoj okolini tačke (u_0, v_0). Na osnovu teoreme o rangu preslikavanja, skup slika te okoline datim preslikavanjem u neku ukolinu tačke (x_0, y_0, z_0) može se zadati jednom neprekidno diferencijabilnom funkcijom $z = \varphi(x, y)$.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati rang preslikavanja $u = (x + y)^2 + 1$, $v = (x - y)^2 + 4$.
2. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ preslikavanje definisano sa $f(x, y) = (u, v)$, gde je

$$u = \begin{cases} x^3y^2, & \text{ako je } x \geq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x < 0\,, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} x^2y^3, & \text{ako je } y \geq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } y < 0\,. \end{cases}$$

Dokazati da je

$$rang f = \begin{cases} 2, & \text{ako je } x, y > 0\,, \\ 1, & \text{ako je } xy < 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x, y < 0\,. \end{cases}$$

3. Ako je rang preslikavanja $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ u svakoj tački $x \in U$ jednak n, dokazati da je tačka $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in intU$, unutrašnja tačka skupa $f(U)$.

4. Ako je rang preslikavanja $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ u svakoj tački skupa U jednak k, $k < n$, dokazati da postoji neka okolina tačke $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ u kojoj je

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = g_i(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)),\ i = \overline{k+1, n}.$$

5. Dokazati da je rang neprekidno diferencijabilnog preslikavanja $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ odozdo poluneprekidna funkcija, tj. $rang f(x) \geq rang f(x_0)$ u nekoj okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

6.6. FUNKCIONALNA ZAVISNOST FUNKCIJA

Definicija 1. *Neka je $\{f_j\,, j = \overline{1, n}\}$ sistem neprekidno diferencijabilnih funkcija na skupu $X \subset \mathbb{R}^m$. Ako postoji otvoren skup $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$ i neprekidno diferencijabilna funkcija F na Y tako da je*

$$(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) \in Y$$

i

$$f_n(x) \equiv F(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) \tag{1}$$

za svako $x \in X$, onda kažemo da funkcija f_n funkcionalno zavisi od funkcija $f_1, \dots, f_{n-1}$ na skupu X. Ako bar jedna od funkcija datog sistema funkcionalno zavisi od ostalih funkcija na skupu X, kažemo da je sistem funkcija $\{f_j,\ j = \overline{1, n}\}$ ***funkcionalno zavisan*** *na X; ako nijedna od funkcija sistema f_j, $j = \overline{1, n}$, ne zavisi od ostalih, kažemo da je sistem funkcija* ***funkcionalno nezavisan*** *na X.*

Linearna zavisnost funkcija izučava se u linearnoj algebri. Očigledno je linearna zavisnost samo specijalan slučaj funkcionalne zavisnosti. Svaki sistem linearno zavisnih funkcija je funkcionalno zavisan, dok obrat u opštem slučaju ne važi, što dokazuje sledeći

Primer 1. Funkcije $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1 - x_2$, $f_3 = 2x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2$ za svako $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zadovoljavaju uslov $f_3 = F(f_1, f_2)$, gde je $F(u, v) = u + v + 2uv$, pa su funkcionalno zavisne na $\mathbb{R}^2$. Očigledno one nisu linearno zavisne.

Teorema 1. *Neka je $\{f_i : i = \overline{1, n}\}$ sistem neprekidno diferencijabilnih funkcija koje su funkcionalno zavisne na otvorenom skupu $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq n$. Tada je rang preslikavanja $f = (f_1, \ldots, f_n)$ u svakoj tački skupa G manji od n.*

Dokaz. Kako je sistem funkcija f_i, $i = \overline{1, n}$, funkcionalno zavisan na otvorenom skupu G, bar jedan element tog sistema funkcionalno zavisi od ostalih. Određenosti radi, neka je to f_n. Tada postoji otvoren skup $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$ i funkcija F neprekidno diferencijabilna na skupu Y tako da je $(f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)) \subset Y$ i

$$f_n(x) = F(f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$$

za svako $x \in G$. Diferenciranjem ove jednakosti po x_k imamo

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, m}, \tag{2}$$

odakle sledi da je n-ta vrsta matrice $\|\partial f_i / \partial x_k\|_{n \times m}$ linearna kombinacija ostalih vrsta. Kako je $n \leq m$, rang preslikavanja f je manji od n. ■

Teorema 2. *Neka su f_j, $j = \overline{1, n}$, neprekidno diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subset \mathbb{R}^m$, $n \leq m$. Ako je rang preslikavanja $f = (f_1, \ldots, f_n)$ jednak n u nekoj tački $x_0 \in X$, tada je sistem funkcija f_j, $j = \overline{1, n}$, funkcionalno nezavisan u nekoj okolini tačke x_0.*

Dokaz. Na osnovu teoreme o rangu preslikavanja, postoji okolina V tačke x_0 tako da se funkcije $f_1, \ldots, f_n$ mogu smatrati slobodnim parametrima na skupu $f(V)$. Ako bi u posmatranoj okolini tačke x_0 funkcije f_j, $j = \overline{1, n}$, bile vezane relacijom (1), onda kao u dokazu prethodne teoreme zaključujemo da je n-ta vrsta matrice f' linearna kombinacija ostalih vrsti i važi (2). Kako je rang preslikavanja f jednak n, to su vrste matrice f' linearno nezavisne, što je u kontradikciji sa (2). ■

Teorema 3. *Neka su zadovoljeni uslovi teoreme o rangu preslikavanja f, pri čemu se bazni minor matrice f' nalazi u gornjem levom uglu te matrice. Tada su funkcije $f_1, \ldots, f_r$ funkcionalno nezavisne u okolini V, dok funkcije $f_{r+1}, \ldots, f_n$ funkcionalno zavise u toj okolini od funkcija $f_1, \ldots, f_r$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme o rangu preslikavanja, postoji okolina V tačke x_0 sa svojstvom da se $n-r$ koordinata tačaka skupa $Y \cap f(V)$ mogu izraziti kao funkcije ostalih r koordinata: $y_{n-r} = g_{n-r}(y_r)$. Ako poslednju jednačinu prikažemo u koordinatnom zapisu

$$y_s = g_s(y_1, \ldots, y_r), \quad s = \overline{r+1, n},$$

onda funkcije f_s na skupu V zadovoljavaju netrivijalne jednakosti

$$f_s(x) = g_s(f_1(x), \ldots, f_r(x)), \quad s = \overline{r+1, n},$$

što dokazuje zavisnost funkcija f_j, $j = \overline{r+1, n}$ od funkcija f_j, $j = \overline{1, r}$. Nezavisnost funkcija f_j, $j = \overline{1, r}$ sledi iz teoreme 2. ■

Teoreme 2. i 3. imaju lokalni karakter, za razliku od teoreme 1. koja je globalnog karaktera. Teorema 3. tvrdi postojanje zavisnosti, ali ne i jedinstvenost prikaza funkcija $f_{r+1}, \ldots, f_n$ od funkcija $f_1, \ldots, f_r$. Č ak kada je rang preslikavanja isti u svim tačkama, ne sledi da je u okolini svake tačke uvek isti podsistem funkcija funkcionalno nezavisan, što takođe ukazuje na lokalni karakter teoreme 3.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da funkcije $f_1 = x + y$ i $f_2 = x - y$ obrazuju nezavisan sistem funkcija u $\mathbb{R}^2$ neposredno, ne koristeći dokazane teoreme.

2. Dokazati da su funkcije $f_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $f_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ i $f_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ funkcionalno zavisne i odrediti njihovu zavisnost. Da li su one linearno zavisne?

3. Ispitati zavisnost funkcija $f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $f_2 = x_1x_2x_3$, $f_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, $f_4 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

4. Funkcija f je **harmonijska** u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$, ako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

za svako $(x, y) \in G$. Dokazati da su harmonijske funkcije f_1 i f_2 funkcionalno zavisne u oblasti G onda i samo onda ako su linearno zavisne u oblasti G.

5. Dokazati da je sistem funkcija $\pi_i(x_1,\dots,x_m) = x_i$, $1 \le i \le m$, funkcionalno nezavisan u ukolini svake tačke $x \in \mathbb{R}^m$.

6. Dokazati da je za svaku neprekidno diferencijabilnu funkciju $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ sistem funkcija $\pi_1,\dots,\pi_m, f$ funkcionalno zavisan i odrediti njihovu zavisnost.

7. Neka je sistem neprekidno diferencijabilnih funkcija $f_1,\dots,f_m$ funkcionalno zavisan na otvorenom skupu $G \subset \mathbb{R}^m$. Dokazati da je tada jakobijan preslikavanja $f = (f_1,\dots,f_m)$ jednak nuli na skupu G.

8. Neka su funkcije $f_1,\dots,f_m$ neprekidno diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $G \subset \mathbb{R}^n$, $m \le n$. Ako je rang preslikavanja $f = (f_1,\dots,f_m)$ bar u jednoj tački skupa G jednak m, dokazati da je tada sistem funkcija $f_1,\dots,f_m$ funkcionalno nezavisan na skupu G.

9. Neka je $f_1,\dots,f_k$, $k < m$, sistem neprekidno diferencijabilnih funkcija za koji je rang preslikavanja $f = (f_1,\dots,f_k)$ u tački $x_0 = (x_1^0,\dots,x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ jednak k. Dokazati da se u nekoj okolini tačke x_0 taj sistem može dopuniti do nezavisnog sistema $f_1,\dots,f_m$ neprekidno diferencijabilnih funkcija.

6.7. USLOVNI EKSTREMI

Neka je $A \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup i neka su $\varphi_1,\dots,\varphi_r, f : A \mapsto \mathbb{R}$ zadate funkcije. Ispitajmo ekstremne vrednosti funkcije f na skupu $E \subset A$ koji je određen funkcijama φ_i, $i = \overline{1,r}$, na sledeći način

$$E = \{x \in A : \varphi_i(x) = 0\,,\ 1 \le i \le r\}\,.$$

Za skup E kažemo da je određen jednačinama veze

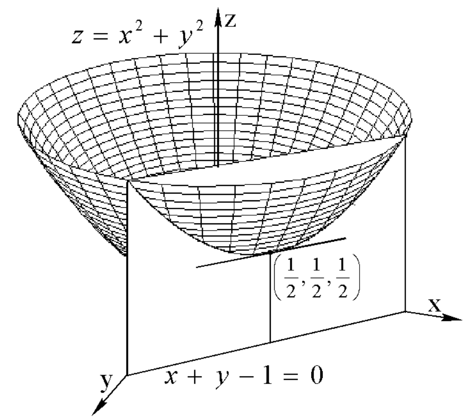
$$\varphi_i(x) = 0 \quad , \quad 1 \le i \le r\,. \tag{1}$$

Definicija 1. *Neka je $x_0 \in E$. Funkcija f ima u tački x_0* ***uslovni lokalni maksimum (minimum)*** *pri uslovima* (1)*, ako postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 tako da je $f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$ za svako $x \in E \cap U_{x_0}$. Ako je $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$ za svako $x \in E \cap (U_{x_0} \setminus \{x_0\})$, kažemo da funkcija f u tački x_0 ima* ***strogi uslovni lokalni maksimum (minimum)****.*

U definiciji su uvedeni lokalni uslovni ekstremi funkcija. U daljem tekstu izostavljaćemo u nazivu definisanih pojmova reč "lokalan".

Ilustrujmo uvedene pojmove na sledećem primeru.

Primer 1. Razmotrimo funkciju $f(x,y) = x^2 + y^2$ i jednačinu veze veze $x + y = 1$. Odredimo uslovne ekstremne vrednosti funkcije pri zadatom uslovu. U tačkama skupa E funkcija f ima sledeći oblik $f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1$. Na taj način zadata funkcija pretstavlja funkciju jedne promenljive. Lako je videti da ta funkcija dostiže svoj minimum u tački $x = 1/2$. Iz jednačine veze dobijamo tačku $(1/2, 1/2)$ u kojoj funkcija f ima lokalni minimum $y_{min} = 1/2$. U tački $(1/2, 1/2)$ funkcija f nema lokalnu ekstremnu vrednost.



Sl. 9

Navedeni postupak upućuje na metod za određivanje uslovnih ekstremnih vrednosti funkcija pri zadatim uslovima veze. Najpre je potrebno utvrditi rang preslikavanja $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, a zatim iz jednačina veze, na osnovu teoreme o egzistenciji implicitnih funkcija, izraziti promenljive $x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_m}$ u funkciji ostalih promenljivih x_{i_1} $x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$, gde je $s = rang f$. Zamenom ovih promenljivih u funkciji f dobijamo složenu funkciju promenljivih $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, pa se problem određivanja uslovnih ekstremnih vrednosti svodi na određivanja ekstremnih vrednosti. Opisani način nalaženja uslovnih ekstremnih vrednosti najčešće ne dovodi do rešenja problema. Pre svega, iz uslova veze nije uvek moguće izraziti neke od promenljivih preko ostalih, čak i u slučaju kada je rang preslikavanja φ konstantan na skupu E. A kada je to i moguće, složena funkcija za koju treba odrediti lokalne ekstremne vrednosti je takva da su u njoj neke od promenljivih nezavisne, dok su ostale zavisne od njih. Stoga drugi diferencijal te funkcije ne zadržava invarijantnu formu, pa se ne može direktno koristiti teorema koja daje dovoljne uslove za egzistenciju ekstremnih vrednosti. Navedeni nedostaci otklanjaju se primenom Lagranžove metode neodređenih činilaca.

Teorema 1. *Neka su funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, f$ neprekidno diferencijabilne na otvorenom skupu $A \subset \mathbb{R}^m$, $r < m$. Ako funkcija f ima uslovnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in A$ pri uslovima veze* (1) *i ako je rang preslikavanja $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ u tački x_0 jednak r, tada postoje realni* *brojevi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *tako da je* x_0 *stacionarna tačka funkcije*

$$F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i(x)\,. \tag{2}$$

Dokaz. Neka je

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{x_0} \neq 0. \tag{3}$$

Odredimo realne brojeve $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tako da je

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, r}\,. \tag{4}$$

Zbog (3) oni su jednoznačno određeni. Iz jednačina veze (1), na osnovu teoreme 1., 6.3., promenljive $x_1, \ldots, x_r$ mogu se izraziti u funkciji promenljivih $x_{r+1}, \ldots, x_m$ u nekoj okolini U tačke $(x^0_{r+1} \ldots, x^0_m)$:

$$x_i = \psi_i(x_{r+1}, \ldots, x_m)\,, \quad 1 \leq i \leq r\,. \tag{5}$$

Diferenciranjem uslova veze, imajući pri tome u vidu veze (5) dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = \overline{r+1, m}\,,\ i = \overline{1, r}. \tag{6}$$

Kako su uslovi (1) i (5) na osnovu teoreme o implicitnim funkcijama ekvivalentni, to funkcija

$$\begin{aligned} y = f(\psi_1(x_{r+1}, \ldots, x_m), \ldots, &\psi_r(x_{r+1}, \ldots, x_m), x_{r+1}, \ldots, x_m) := \\ &:= g(x_{r+1}, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{7}$$

u tački $\widetilde{x}_0 = (x^0_{r+1}, \ldots, x^0_m)$ ima lokalnu ekstremnu vrednost. Stoga je

$$\frac{\partial f(\widetilde{x}_0)}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f(\widetilde{x}_0)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = \overline{r+1, m}\,. \tag{8}$$

Dokažimo da je x_0 stacionarna tačka funkcije F. Parcijalni izvodi funkcije F po x_j, $j = \overline{1,r}$, u tački x_0 su prema (4) jednaki nuli. Dokažimo da su oni jednaki nuli u tački x_0 i po ostalim promenljivim. Zaista, ako u jednačinama

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{r+1,m}$$

zamenimo (6) i (8), dobijamo jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} &= -\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(-\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \right) = \\ &= -\sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

koje se anuliraju zbog (4). ∎

Teorema 2. *Neka funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, f$ definisane na otvorenom skupu $A \subset \mathbb{R}^m$, $r < m$, zadovoljavaju sledeće uslove:*

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, f \in C^{(2)}(A)$,

(ii) tačka $x_0 \in A$ je stacionarna tačka funkcije (2) za neki izbor realnih brojeva $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$,

(iii) rang preslikavanja $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ u tački x_0 je r.

Za $dx_{m-r} = (dx_{r+1}, \ldots, dx_m) \in \mathbb{R}^{m-r}$ označimo sa

$$\Phi(dx_{r+1}, \ldots, dx_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

kvadratnu formu promenljivih $(dx_{r+1}, \ldots, dx_m)$ u kojoj su promenljive $dx_1, \ldots, dx_r$ određene jednačinama

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{9}$$

Ako je kvadratna forma Φ pozitivno (negativno) definitna, tada je x_0 tačka strogog uslovnog minimuma (maksimuma) funkcije f pri uslovima veze (1).

Dokaz. Primetimo najpre da za svaku tačku $x \in A$ koja zadovoljava uslove veze (1) važi

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = F(x) - F(x_0) = \Delta F(x_0)\,, \tag{10}$$

gde je x_0 stacionarna tačka funkcije f. To drugim rečima znači da funkcija F dostiže ekstremnu vrednost u tački x_0 onda i samo onda ako funkcija f u toj tački dostiže uslovnu ekstremnu vrednost.

Kako je rang preslikavanja φ jednak r, možemo pretpostaviti da je zadovoljen uslov (3), zbog čega je sistem (9) jednoznačno rešiv po $h_1, \ldots, h_r$. Sistem (9) kraće možemo zapisati u obliku

$$d\varphi = 0\,, \tag{11}$$

gde je diferencijal preslikavanja φ uzet u tački x_0. Dokažimo najpre da je $\widetilde{x}_0$ stacionarna tačka funkcije $g(x_{r+1}, \ldots, x_m)$ definisane u (7). Na osnovu teoreme o invarijantnosti forme prvog diferencijala važi

$$dg(\widetilde{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\widetilde{x}_0)}{\partial x_j} dx_j. \tag{12}$$

Kada ovoj jednačini dodamo sumu jednačina (9) od kojih je svaka pomnožena odgovarajućim realnim brojem λ_i, dobijamo

$$\begin{aligned} dg(\widetilde{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i \right) dx_j \bigg|_{x_0} &= \\ = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} dx_j &= 0\,, \end{aligned} \tag{13}$$

čime smo dokazali da je $\widetilde{x}_0$ stacionarna tačka funkcije g. Dokažimo da je

$$d^2 g(\widetilde{x}_0) = d^2 F(x_0)|_{d\varphi = 0}.$$

Primetimo najpre da je drugi diferencijal funkcije $g(x)$ u tački $\widetilde{x}_0$ dat izrazom

$$d^2 g(\widetilde{x}_0) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\widetilde{x}_0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\tilde{x}_0)}{\partial x_j} d^2 x_j\,. \tag{14}$$

Diferenciranjem jednačina (9) dobijamo

$$\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi_i(x_0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(x_0)}{\partial x_j} d^2 x_j = 0\,,\ i = \overline{1,r}\,. \tag{15}$$

Ako svaku jednačinu sistema (15) pomnožimo odgovarajućim realnim brojem λ_i, tako dobijene jednačine dodamo jednačini (14) i iskoristimo (ii), dobijamo

$$\begin{aligned} d^2 g(\widetilde{x}_0) = &\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} d^2 x_j = \\ &= d^2 F(x_0)|_{d\varphi=0}, \end{aligned} \tag{16}$$

Ako je kvadratna forma Φ pozitivno definitna, tada iz uslova (13) i (16) sledi da je $\widetilde{x}_0$ stacionarna tačka funkcije g, pri čemu je drugi diferencijal funkcije g u tački $\widetilde{x}_0$ pozitivno definitna kvadratna forma promenljivih $dx_{r+1} \ldots, dx_m$. Stoga funkcija g u tački $\widetilde{x}_0$ ima strogi lokalni minimum, pa funkcija f u tački x_0 ima strogi uslovni minimum pri uslovima veze (1). Ako je kvadratna forma Φ negativno definitna, analogno se zaključuje da je x_0 tačka strogog uslovnog maksimuma. ■

Funkciju F nazivamo **Lagranžovom funkcijom**, a realne brojeve λ_i **Lagranžovim multiplikatorima**.

Za nalaženje uslovnih ekstremnih vrednosti treba najpre odrediti stacionarne tačke iz jednačina

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0\,,\ j = \overline{1,m} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \varphi_i = 0\,,\ i = \overline{1,r} \end{cases}. \tag{17}$$

Da li u stacionarnim tačkama funkcija ima uslovne ekstremne vrednosti, utvrđuje se ispitivanjem definitnosti kvadratne forme drugog diferencijala Lagranžove funkcije pri uslovima (9). Pokažimo to na sledećem primeru.

Primer 1. Odredimo ekstremne vrednosti funkcije $f(x,y,z) = xy + yz$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, ako je $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$.

Pri zadatim uslovima veza Lagranžova funkcija je data sa

$$F(x,y,z) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)\,,$$

a njoj odgovarajuće jednačine za određivanje stacionarne tačke funkcije f i parametara λ_1, λ_2 glase:

$$\begin{aligned} &F'_x = y + 2\lambda_1 x = 0, \quad F'_y = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ &F'_z = y + \lambda_2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2\,. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema je $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1$, $x = y = z = 1$. Drugi diferencijal funkcije F je

$$\begin{aligned} d^2F &= 2\lambda_1(dx^2 + dy^2) + 2dxdy + 2dydz = \\ &= -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz \end{aligned}$$

Iz jednačina veze je $dy = -dx = -dz$, pa je

$$d^2F(1,1,1) = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0\,,$$

odakle zaključujemo da funkcija f ima strogi lokalni uslovni maksimum u tački $(1,1,1)$ koji je jednak 2 pri zadatim uslovima veza.

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti uslovne ekstremne vrednosti sledećih funkcija pri zadatim uslovima veza:

$$\begin{gathered} (i)\ z = x/a + y/b\ ,\ x^2 + y^2 = 1\,, \\ (ii)\ u = xyz\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x + y + z = 1\,, \\ (iii)\ z = x^2 + y^2\ ,\ x/a + y/b = 1\,, \\ (iv)\ u = x^2 + y^2 + z^2\ ,\ Ax + By + Cz + D = 0\,. \end{gathered}$$

2. Dokazati da je proizvod tri broja čija je suma konstantan pozitivan broj najveći onda i samo onda ako su ti brojevi jednaki. Uopštiti tvrđenje na slučaj n brojeva.

3. Ispitati ekstremne vrednosti funkcije $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^m$, ako je $\sum_{i=1}^n x_i = na$, gde je $a > 0$ i $m > 1$.

4. Naći najmanju i najveću vrednost funkcije $f(x, y) = xy$ u prstenu $\{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

5. Odrediti rastojanje tačke x_0 od hiperravni $\{x \in \mathbb{R}^m : ax = b\}$, gde je $a \in \mathbb{R}^m$ i $b \in \mathbb{R}$.

6. Za dati vektor $a \in \mathbb{R}^m$ odrediti maksimum funkcije $f = ax$ na sferi $\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$.

7. Pretstaviti broj a u obliku sabiraka $x_1, \ldots, x_n$ tako da proizvod $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ima najveću vrednost.

8. Neka je $\sum_1^m a_{ij}x_ix_j$ simetrična, pozitivno definitna kvadratna forma. Dokazati da postoji $\alpha > 0$ tako da je

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$$

za svako $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

9. Neka je $\|a_{ij}\|_{m\times m}$ simetrična, pozitivno definitna matrica sa realnim koeficijentima, $\{a, b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{R}$ i

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{m} b_ix_i + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j.$$

Dokazati da funkcija f na $\mathbb{R}^m$ dostiže najmanju vrednost.

10. Dokazati nejednakost

$$\frac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\frac{x + y}{2}\right)^n,$$

ako je $n \ge 1$, $x, y \ge 0$.

11. Dokazati da za svaku kvadratnu matricu $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ važi nejednakost Adamara*

$$(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

* Hadamard J. (1865-1963)- francuski matematičar

II REDOVI

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Redovi svakako pretstavljaju jednu od važnijih oblasti matematičke analize. U ovoj glavi izložićemo osnovne elemente teorije redova. U prvom poglavlju ove glave razmatraju se redovi na proizvoljnim normiranim vektorskim prostorima. Zbog svog značaja, u ovom poglavlju se paralelno sa izlaganjem redova na normiranim vektorskim prostorima posmatraju i numerički redovi. U drugom poglavlju ove glave proučavaju se funkcionalni redovi.

1. REDOVI U NORMIRANIM PROSTORIMA

U ovom poglavlju razmatraju se redovi na normiranim vektorskim prostorima. Pojam reda pretstavlja uopštenje konačne sume. Od interesa je koja se svojstva konačnih suma prenose na redove i pod kojim uslovima. Takođe je važno računanje sa redovima. To su osnovna pitanja koja se razmatraju u ovom poglavlju. Posebna pažnja posvećena je brojnim redovima zbog njihove važnosti.

1.1. POJAM REDA

Neka je (x_n) niz u normiranom vektorskom prostoru X. Pridružimo ovom nizu niz (s_n) čiji su članovi definisani sa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in N. \tag{1}$$

Definicija 1. *Uređeni par $((x_n), (s_n))$ koji se sastoji od niza (x_n) i niza (s_n) čiji su članovi definisani sa* (1) *nazivamo* ***redom*** *u normiranom vektorskom prostoru X i označavamo sa $\sum x_n$ ili $\sum\limits_n x_n$; x_n su* ***članovi reda****, a s_n* ***delimične sume reda*** *$\sum x_n$.*

Definicija 2. *Neka je* (x_n) *niz elemenata normiranog vektorskog prostora X. Niz* (x_n) *je* ***sumabilan*** *u* X*, odn. red* $\sum x_n$ *je* ***konvergentan*** *u* X *ako je niz* (s_n) *delimičnih suma reda* $\sum x_n$ *konvergentan u* X*. Granična vrednost* $s = \lim s_n$ *je* ***suma reda*** $\sum x_n$ *i označava se sa*

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Red $\sum x_n$ *je* ***divergentan*** *ako je niz* (s_n) *divergentan.*

Definicija 3. *Red sastavljen od članova reda* $\sum x_n$ *uzetih u istom redosledu kao u polaznom redu počev od* $(n+1)$*-vog člana , nazivamo* n*-tim* ***ostatkom reda*** $\sum x_n$ *i označavamo sa* $\sum\limits_k x_{n+k}$.

Iz definicije reda sledi da je on jednoznačno određen nizom (x_n) njegovih članova. Niz (s_n) delimičnih suma reda $\sum x_n$ jednoznačno je određen formulama (1). Međutim, red $\sum x_n$ je jednoznačno određen i nizom (s_n) svojih delimičnih suma. U tom slučaju članovi x_n reda $\sum x_n$ određeni su sa

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2 - s_1, \ldots, x_n = s_n - s_{n-1}, \ldots\ .$$

To nam govori da je izučavanje redova ekvivalentno izučavanju nizova, te da se svaki problem formulisan za nizove može na odgovarajući način formulisati za redove i obratno.

Primer 1. Jedan od važnijih brojnih redova pretstavlja geometrijski red $\sum q^n$. Delimične sume s_n tog reda

$$s_n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \to \frac{q}{1-q}, \quad n \to +\infty$$

za $|q| < 1$. Stoga je suma s tog reda $q/(1-q)$ za $|q| < 1$. Za $q = \pm 1$ geometrijski red divergira. Za q=1 to je očigledno, jer $s_n \to +\infty$ kada $n \to +\infty$. Za $q = -1$ red $-1 + 1 - 1 + \cdots$ divergira, jer niz (s_n) ima dve različite tačke nagomilavanja. Ako je $|q| > 1$ red divergira na osnovu stava 4. 1.2., jer opšti član ne teži nuli.

Primer 2. Neka je $\sum a_n$ konvergentan red u normiranom vektorskom prostoru X, s njegova suma, a $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva. Tada je red $\sum(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})$ dobijen grupisanjem članova reda $\sum a_n$ konvergentan i ima sumu s. Zaista, m-ta delimična suma novog reda jednaka je sumi s_{n_m} polaznog reda. Kako je ovaj konvergentan, niz njegovih delimičnih suma je konvergentan niz ka sumi s, pa je i svaki njegov podniz konvergentan i ima sumu s. Time smo dokazali da je red dobijen od reda $\sum a_n$ grupisanjem njegovih članova konvergentan i ima istu sumu kao i polazni red.

Da obrat u opštem slučaju ne važi, pokazuje primer brojnog reda $(1-1)+(1-1)+\cdots$

Ako su članovi prethodno razmatranog reda u okviru svake zagrade istog znaka, tada je i red dobijen uklanjanjem zagrada konvergentan. Dokaz ove činjenice prepuštamo čitaocu.

1.2. SVOJSTVA KONVERGENTNIH REDOVA

Stav 1. *Neka je $\sum x_n$ red u normiranom vektorskom prostoru X nad poljem K i neka je $\lambda \in K$. Ako je red $\sum x_n$ konvergentan, onda je konvergentan i red $\sum \lambda x_n$ i važi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n. \tag{1}$$

Dokaz. Označimo sa s_n delimične sume reda $\sum x_n$, a sa s'_n delimične sume reda $\sum \lambda x_n$. Očigledno je $s'_n = \lambda s_n$. Neka je $\lim s_n = s$. Onda je $s' = \lim s'_n = \lim \lambda s_n = \lambda \lim s_n = \lambda s$, pa je red $\sum \lambda x_n$ konvergentan i važi (1). ■

Stav 2. *Ako su redovi $\sum x_n$ i $\sum y_n$ konvergentni u normiranom vektorskom prostoru X, onda je red $\sum(x_n + y_n)$ konvergentan i važi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Dokaz. Neka su s'_n, s''_n i s_n delimične sume respektivno redova $\sum x_n$, $\sum y_n$ i $\sum(x_n + y_n)$. Tada je $s_n = s'_n + s''_n$. Kako su redovi $\sum x_n$ i

$\sum y_n$ konvergentni, to granične vrednosti $\lim s'_n = s'$ i $\lim s''_n = s''$ postoje. No onda postoji $\lim s_n = s$ i $s = s' + s''$. ■

Posledica 1. *Ako su redovi $\sum x_n$ i $\sum y_n$ konvergentni u normiranom vektorskom prostoru X nad poljem K, tada je red $\sum(\lambda x_n + \mu y_n)$ konvergentan za svako $\lambda, \mu \in K$ i važi jednakost*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Stav 3. *Red $\sum x_n$ je konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X onda i samo onda ako je red $\sum_n x_{m+n}$ konvergentan u X za svako $m \in \mathbb{N}$. Pri tome je $s = s_m + r_m$, gde je s suma reda $\sum x_n$, a r_m suma ostatka $\sum_n x_{m+n}$.*

Dokaz. Neka je $s_m^k = x_{m+1} + s_{m+2} + \cdots + x_{m+k}$ k-ta delimična suma ostatka $\sum_n x_{m+n}$. Očigledno je $s_{m+k} = s_m + s_m^k$, odakle sledi da $\lim_k s_{m+k}$ postoji onda i samo onda ako postoji $\lim_k s_m^k$. Jednakost $s = s_m + r_m$ dobijamo prelaskom na graničnu vrednost u $s_{m+k} = s_m + s_m^k$ kada $k \to +\infty$. ■

Posledica 2. *Red $\sum x_n$ je konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X onda i samo onda ako je* $\lim r_n = 0$.

Stav 4. *Ako je red $\sum x_n$ konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X, onda je* $\lim x_n = 0$.

Dokaz. Kako je red $\sum x_n$ konvergentan, a $x_n = s_n - s_{n-1}$, očigledno $x_n \to 0$ kada $n \to +\infty$. ■

Da obrat u opštem slučaju ne važi, videćemo u primeru 1., 1.3.

1.3. KOŠIJEV KRITERIJUM

Neka je red $\sum x_n$ konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X i neka je njegova suma s. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $\|s_n - s\| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. No onda je $\|s_{n+m} - s\| < \varepsilon$ za $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je

$$\|s_{n+m} - s_n\| \leq \|s_{n+m} - s\| + \|s_n - s\| < 2\varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, što dokazuje da je svaki konvergentan red u X Košijev. Da obrat u opštem slučaju ne važi, dokazuje se analogno kao i u slučaju nizova. Međutim, u Banahovim prostorima svaki Košijev niz je konvergentan, pa stoga važi sledeća

Teorema 1 (Koši). *Red $\sum x_n$ je konvergentan u Banahovom prostoru onda i samo onda ako je on Košijev, odn. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $\|s_n - s_m\| < \varepsilon$ za svako $n, m > n_\varepsilon$.*

Primer 1. Razmotrimo **harmonijski red** $\sum 1/n$ čiji opšti član $x_n = 1/n$ teži nuli kada $n \to +\infty$. Taj red je divergentan, što neposredno sledi iz Košijeve teoreme. Zaista, kako je

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

to za $\varepsilon = 1/2$ i $m = 2n$ nije zadovoljen Košijev uslov, pa je harmonijski red divergentan.

Iz navedenog primera neposredno sledi divergencija **hiperharmonijskog** reda $\sum 1/n^\alpha$ za $\alpha < 1$. Zaista, kako je $n^\alpha < n$ za $\alpha < 1$, to je

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} > \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti delimične sume sledećih redova i na osnovu toga ispitati njihovu konvergenciju

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,,$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}\,, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}\,,$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}\,, \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\,.$$

2. Neka niz (b_n) pozitivnih realnih brojeva definiše divergentan red $\sum b_n$. Ako je $\lim(a_n/b_n) = s$, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = s.$$

3. Neka je s suma reda $\sum p_n$, $p_n > 0$. Ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0,$$

dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_1 p_n + s_2 p_{n-1} + \cdots + s_n p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = s,$$

gde je (s_n) niz delimičnih suma reda $\sum p_n$.

4. Ako je s suma reda $\sum x_n$, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s.$$

5. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^2}{n^2}\,, \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}\,, \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}\,.$$

6. Ako članovi reda $\sum a_n$, $a_n > 0$, čine monotono opadajući niz, dokazati da je $\lim n a_n = 0$.

7. Ako je $\lim n a_n = a \neq 0$, dokazati da red $\sum a_n$ divergira.

8. Dokazati da za svaki konvergentan red $\sum a_n$ sa nenegativnim članovima postoji monotono rastući niz (b_n) tako da je $\lim b_n = +\infty$, a da red $\sum a_n b_n$ konvergira.

9. Č lanovi niza (a_n) zadovoljavaju rekurentnu formulu $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Dokazati da je

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arcctg} a_n^2 = \frac{\pi}{12}\,, \text{ ako je } a_1 = 2\,,\ a_2 = 8\,,$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arcctg} 2a_n^2 = \frac{\pi}{6}\,, \text{ ako je } a_1 = 1\,,\ a_2 = 3\,.$$

1.4. NUMERIČKI REDOVI SA NENEGATIVNIM ČLANOVIMA

U klasi numeričkih redova posebnu ulogu igraju numerički redovi sa nenegativnim članovima. Kao što ćemo u daljem izlaganju videti, apsolutno konvergentni redovi su zbog svojih osobina od posebnog interesa. Ispitivanje apsolutne konvergencije redova, čak i u normiranim vektorskim prostorima svodi se na ispitivanje numeričkog reda sa nenegativnim članovima. Stoga ćemo najpre izložiti osnovna svojstva ovih redova, kao i kriterijume za ispitivanje konvergencije ovih redova.

1.4.1. POREDBENI KRITERIJUMI

Stav 1. *Red $\sum a_n$ sa nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako je niz (s_n) delimičnih suma tog reda odozgo ograničen.*

Dokaz. Kako su članovi reda $\sum a_n$ nenegativni brojevi, niz s_n delimičnih suma s_n tog reda je monotono neopadajući. Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, očigledno je $s_n \leq s = \sum_1^\infty a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je niz (s_n) odozgo ograničen. Obratno, ako je niz (s_n) odozgo ograničen, onda je on prema poznatom stavu za nizove konvergentan. ■

Stav 2. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa nenegativnim članovima. Ako je $a_n \leq b_n$ počev od nekog prirodnog broja, onda iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergecija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.*

Dokaz. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $a_n \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Označimo sa A_n i B_n delimične sume redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ respektivno. Očigledno je $A_n \leq B_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je red $\sum b_n$ konvergentan. Tada su prema prethodnom stavu delimične sume B_n tog reda odozgo ograničene, pa su takve i delimične sume A_n reda $\sum a_n$. No onda je prema prethodnom stavu red $\sum a_n$ konvergentan.

Ako je red $\sum a_n$ divergentan, onda za svako $L > 0$ postoji prirodan broj n_L tako da je $A_n \geq L$ za svako $n \geq n_L$. Stoga je i $B_n \geq L$ za svako $n \geq n_L$, pa je red $\sum b_n$ divergentan. ■

Stav 3. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima za koje je*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad 0 \leq k \leq +\infty.$$

Ako je $k < +\infty$, tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencja reda $\sum a_n$; ako je $k > 0$, tada iz divergencije reda $\sum b_n$ sledi divergencija reda $\sum a_n$. Dakle, za $0 < k < +\infty$ oba reda istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

Dokaz. Kako je $\lim(a_n/b_n) = k$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $|a_n/b_n - k| < \varepsilon$, odn.

$$(k - \varepsilon)b_n < a_n < (k + \varepsilon)b_n$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$.

Neka je red $\sum b_n$ konvergentan. Ako je $k < +\infty$, tada je prema stavu 1., 1.2., red $\sum(k + \varepsilon)b_n$ konvergentan, pa je prema stavu 2. red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je red $\sum b_n$ divergentan, tada je za $k > 0$ i $\varepsilon < k$ red $\sum(k - \varepsilon)b_n$ divergentan. No onda je prema stavu 2. i red $\sum a_n$ divergentan. ■

Stav 4. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima. Ako, počev od nekog prirodnog broja, važi nejednakost*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\,,$$

onda iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

Dokaz. Na osnovu stava 3.,1.2., ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da nejednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}, \ldots$$

Množenjem prvih n nejednakosti dobijamo nejednakost

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$$

koja važi za svako $n \in \mathbb{N}$. Sada tvrđenje sledi iz stava 2. i stava 1., 1.2. .■

Stavovi 2., 3. i 4. poznati su kao poredbeni kriterijumi.

Primer 1. Red $\sum n \sin(1/n^3)$ je konvergentan. Zaista, kako je $0 < \sin x < x$ za $x \in (0, \pi/2)$, to je

$$n \sin \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$$

za svako n, pa je red konvergentan prema stavu 2., a na osnovu činjenice da je red $\sum 1/n^2$ konvergentan.

Primer 2. Red $\sum(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha$ konvergira za $\alpha>1$, a divergira za $\alpha \le 1$.

Zaista, kako je granična vrednost

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha}{1/n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}$$

konačan broj, red je konvergentan za $\alpha>1$, a divergentan za $\alpha\le 1$.

Primer 3. Red $\sum \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ je konvergentan. Zaista, za $n\ge 1$ važi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

$b_n = 1/n^2$, pa je prema poslednjem poredbenom kriterijumu dati red konvergentan.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati konvergenciju sledeći redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}), \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{n}), \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}.$$

2. Ispitati konvergenciju reda $\sum n^\alpha \mathrm{arctg} n^\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

3. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{e^n n!}.$$

4. Ispitati za koje vrednosti parametra $a>0$ red $\sum \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ konvergira, ako je $f(n)$ broj nula u dijadskom zapisu broja n.(Rešenje: $0<a<9$)

5. Ispitati konvergenciju brojnog reda $\sum \lambda_n^{-2}$, gde je (λ_n) niz pozitivnih korena jednačine $\mathrm{tg}x = x$.

6. Ako je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergentan, dokazati da su redovi $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ i $\sum\sqrt{a_n}/n$ konvergentni.

7. Neka je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergentan. Ako je (b_n) niz za koji postoji $L>0$ tako da je $0\le b_n\le L$ za svako $n\in\mathbb{N}$, dokazati da je tada red $\sum a_n b_n$ konvergentan.

8. Dokazati poredbene kriterijume korišćenjem prethodnog zadatka.

9. **(Košijeva teorema kondenzacije)** Neka (a_n) monotono nerastući, nenegativan niz. Dokazati da je red $\sum a_n$ konvergentan onda i samo onda ako je red $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergentan. Koristeći dokazani rezultat, dokazati divergenciju sledećih redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,, \alpha \le 1\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\,, \alpha \le 1\,.$$

(Uputstvo: dokazati da za sume $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ i $t_m = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}$ važe sledeće nejednakosti $s_n < s_{2^{m+1}-1} < t_m$ i $2s_{2^m} > t_m$)

10. Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima. Dokazati sledeća tvrđenja:

a) ako je $a_n = O(n^{-\alpha})$ i $\alpha > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;

b) ako je $n^{-\alpha} = O(a_n)$ i $\alpha \le 1$, red $\sum a_n$ divergira.

Koristeći rezultate pod a) i b) ispitati konvergenciju redova

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right), \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\frac{1}{n}\,, \qquad 3)\ \sum_{n=5}^{+\infty} \ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\,.$$

11. Ako je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergentan, dokazati da je tada red $\sum a_n/r_n$ divergentan, gde je $r_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$.

1.4.2. KRITERIJUMI ZA ISPITIVANJE KONVERGENCIJE REDOVA SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Teorema 1. (Košijev kriterijum) *Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima i neka je $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$. Ako postoji $q \in [0,1)$ tako da je $\mathcal{C}_n \le q$ počev od nekog prirodnog broja n, tada je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\mathcal{C}_n \ge 1$ počev od nekog indeksa, tada je red $\sum a_n$ divergentan.*

Dokaz. Neka je počev od nekog prirodnog broja $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n} \le q$, odn. $a_n \le q^n$. Kako je red $\sum q^n$ konvergentan, to je na osnovu teoreme 2., 1.4.1., red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ za $n \ge n_0$, tada je $a_n \ge 1$, pa red $\sum a_n$ divergentan prema stavu 4., 1.2. ■

Posledica 1. *Neka je* $\mathcal{C} = \lim_n \mathcal{C}_n$. *Ako je* $\mathcal{C} < 1$, *red* $\sum a_n$ *je konvergentan, a ako je* $\mathcal{C} > 1$ *red je divergentan. Za* $\mathcal{C} = 1$ *red može, ali ne mora biti konvergentan, odn. kriterijum je neodlučiv.*

Dokaz. Kako je $\lim_n \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $\mathcal{C} - \varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. Neka je $\mathcal{C} < 1$. Broj ε zbog njegove proizvoljnosti možemo izabrati tako da je $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$. Stoga je $\mathcal{C}_n < 1$ za svako $n \geq n_\varepsilon$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\mathcal{C} > 1$, izaberimo ε tako da je $\mathcal{C} - \varepsilon > 1$. Tada je $\mathcal{C}_n > 1$ i red $\sum a_n$ divergira. ∎

Da je Košijev kriterijum iskazan u terminima granične vrednosti neodlučiv kada je $\mathcal{C} = 1$, pokazuje sledeći

Primer 1. Red $\sum 1/n$ je divergentan, red $\sum 1/n^2$ je konvergentan, a za oba reda je $\mathcal{C} = 1$.

Teorema 2. (Dalamberov* kriterijum) *Za red* $\sum a_n$ *sa pozitivnim članovima označimo sa* $\mathcal{D}_n = a_{n+1}/a_n$. *Ako postoji* $q \in (0, 1)$ *i prirodan broj* n_0 *tako da je* $\mathcal{D}_n \leq q$ *za* $n \geq n_0$, *onda je red* $\sum a_n$ *konvergentan. Ako je* $\mathcal{D}_n \geq 1$, *red* $\sum a_n$ *je divergentan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}_n \leq q < 1$ za $n \geq n_0$. Tada $a_{n+1} \leq q a_n$ za $n \geq n_0$. No onda je $a_{n+p} \leq a_n q^p$ za $n \geq n_0$. Kako je red $a_n q + a_n q^2 + \cdots$ konvergentan, to je na osnovu prvog poredbenog kriterijuma konvergentan i red $a_n + a_{n+1} + \cdots$, odakle sledi konvergencija reda $\sum a_n$.

Ako je $\mathcal{D}_n \geq 1$, tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

gde je $b_n = 1/n$, pa je prema stavu 4., 1.4.1. red $\sum a_n$ divergentan. ∎

Posledica 2. *Neka je* $\mathcal{D} = \lim_n \mathcal{D}_n$. *Ako je* $\mathcal{D} < 1$, *red* $\sum a_n$ *je konvergentan, a ako je* $\mathcal{D} > 1$, *red* $\sum a_n$ *je divergentan. Za* $\mathcal{D} = 1$ *kriterijum je neodlučiv.*

Dokazi navedene posledice, kao i posledica koje slede, izvode se analogno dokazu posledice teoreme 1., pa ih prepuštamo čitaocu.

---

* D'Alambert J. (1717-1783)-francuski matematičar

Teorema 3. **(Rabeov * kriterijum)** *Neka je* $\sum a_n$ *red sa pozitivnim članovima i*

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Ako postoji $r > 1$ *i prirodan broj* n_0 *tako da je* $\mathcal{R}_n \geq r$ *za* $n \geq n_0$*, onda je red* $\sum a_n$ *konvergentan. Ako je* $\mathcal{R}_n \leq 1$ *za* $n \geq n_0$*, red* $\sum a_n$ *je divergentan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{R}_n \geq r > 1$ za $n \geq n_0$ i neka je $r > s > 1$. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s,$$

to je $r > \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1\right)/\,1/n$ za dovoljno veliko n. Stoga je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \frac{(n+1)^s}{n^s} = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n+1)^s}},$$

odn.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Red $\sum \frac{1}{n^s}$ je konvergentan za $s > 1$, pa je na osnovu teoreme 4., 1.4.1. red $\sum a_n$ konvergentan.

Ako je $\mathcal{R}_n \leq 1$, onda je $a_{n+1}/a_n \geq (n+1)^{-1}/n^{-1}$, pa je red $\sum a_n$ divergentan na osnovu prethodno navedene teoreme. ■

Rabeov kriterijum je jači od Dalamberovog kriterijuma. Zaista, iz $\mathcal{D}_n < 1$ sledi $\mathcal{R}_n > 1$. Za $\mathcal{D}_n > 1$ je $\mathcal{R}_n < 1$, odakle sledi da konvergencija, odn. divergencija reda po Dalamberovom kriterijumu povlači konvergenciju, odn. divergenciju po Rabeovom kriterijumu. Da obrat u opštem slučaju ne važi, dokazuje sledeći

Primer 2. Za red

$$\sum \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, \quad x > 0\,,$$

$\mathcal{D} = 1$, pa na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji datog reda. Kako je $\mathcal{R} = x$, red na osnovu Rabeovog kriterijuma konvergira za $x > 1$, a divergira za $x < 1$.

---

* Raabe L.J. (1801- 1859)-švajcarski matematičar

Teorema 4. (Kumerov* kriterijum) *Neka je* (c_n) *niz pozitivnih brojeva za koje red* $\sum 1/c_n$ *divergira. Za red* $\sum a_n$ *sa pozitivnim članovima označimo sa*

$$\mathcal{K}_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\,.$$

Ako je $\mathcal{K}_n \geq \delta > 0$ *počev od nekog prirodnog broja* n_0*, tada je red* $\sum a_n$ *konvergentan, a ako je* $\mathcal{K}_n \leq 0$*, onda je red* $\sum a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{K}_n \geq \delta > 0$ za $n \geq n_0$. Tada je

$$a_n c_n - a_{n+1} c_{n+1} \geq \delta a_{n+1} > 0\,,$$

pa je niz $(a_n c_n)$ monotono opadajući za $n \geq n_0$, i kako je odozdo ograničen, on je konvergentan. Delimične sume $s_n = a_1 c_1 - a_{n+1} c_{n+1}$ reda $\sum (a_n c_n - a_{n+1} c_{n+1})$ čine konvergentan niz, pa je prema stavu 2., 1.4.1. konvergentan i red $\sum \delta a_{n+1}$, odn. $\sum a_n$.

Ako je $\mathcal{K}_n \leq 0$, tada iz nejednakosti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}\,,$$

a na osnovu stava 4., 1.4.1., sledi divergencija reda $\sum a_n$. ∎

Primetimo da su Dalamberov i Rabeov kriterijum posledice Kumerovog kriterijuma.

Zaista, za $c_n = 1$ je $\mathcal{K}_n = a_n/a_{n+1} - 1 = 1/\mathcal{D}_n - 1$, pa je $\mathcal{K}_n > 0$ za $\mathcal{D}_n < 1$, odakle vidimo da iz konvergencije reda po Kumerovom kriterijumu sledi konvergencija po Dalamberovom kriterijumu. Ako je $\mathcal{D}_n \geq 1$, tada je $\mathcal{K}_n \leq 0$, pa red $\sum a_n$ divergira po Kumerovom kriterijumu.

Za $c_n = n$ je $\mathcal{K}_n = \mathcal{R}_n - 1$, pa je za $\mathcal{R}_n > 1$ red konvergentan jer je $\mathcal{K}_n > 0$, dok za $\mathcal{R}_n \leq 1$ divergira.

Neka je sada $c_n = n \ln n$. Red $\sum 1/n \ln n$ je divergentan. Da to dokažemo, primetimo najpre da je red $\sum (\ln\ln(n+1) - \ln\ln n)$ divergentan, jer je niz $s_n = \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2$ delimičnih suma tog reda divergentan. Primenom Lagranžove teoreme dobijamo nejednakost

$$\ln\ln(n+1) - \ln\ln n = \frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)} < \frac{1}{n \ln n}\,,\ \ 0 < \theta < 1\,,$$

* Kummer E.E. (1810-1893)- nemački matematičar

iz koje na osnovu stava 2., 1.4.1. zaključujemo da je red $\sum 1/n \ln n$ divergentan. Sada je

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n &= n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \\ &= \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\ln n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\ &= \mathcal{B}_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

gde je $\mathcal{B}_n = (\mathcal{R}_n - 1)\ln n$. Na osnovu Kumerovog kriterijuma sledi da je red $\sum a_n$ konvergentan za $\mathcal{B}_n > 1$, a divergentan za $\mathcal{B}_n \leq 1$. Ako u poslednjem slučaju iskoristimo Kumerov kriterijum formulisan pomoću granične vrednosti, dobijamo Bertranov kriterijum.

Teorema 5. (Bertranov* kriterijum) *Za red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima neka je $\mathcal{B} = \lim_n \mathcal{B}_n$. Ako je $\mathcal{B} > 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan, a ako je $\mathcal{B} < 1$, red je divergentan. Za $\mathcal{B} = 1$ kriterijum je neodlučiv.*

Teorema 6. (Gausovkriterijum)** *Neka se za red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima izraz a_n/a_{n+1} može prikazati u obliku*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

gde je $|\theta_n| \leq L$ za neko $L > 0$ i svako $n \in \mathbb{N}$, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada

(i) za $\lambda > 1$ red $\sum a_n$ konvergira, a za $\lambda < 1$ red divergira;
(ii) za $\lambda = 1$ i $\mu > 1$ red $\sum a_n$ konvergira;
(iii) za $\lambda = 1$ i $\mu \leq 1$ red $\sum a_n$ divergira.

Dokaz. Za $\lambda \neq 1$ tvrđenje sledi na osnovu Dalamberovog kriterijuma. Za $\lambda = 1$ i $\mu \neq 1$ tvrđenje sledi na osnovu Rabeovog kriterijuma. Neka je $\lambda = \mu = 1$. Tada je

$$\mathcal{B}_n = \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\ln n = \frac{\theta_n}{n}\ln n,$$

pa je $\mathcal{B} = \lim_n \mathcal{B}_n = 0$, odakle na osnovu Bertranovog kriterijuma sledi divergencija reda $\sum a_n$. ■

* Bertrand J. (1822-1900)
** Gauss K.F. (1777-1855)-nemački matematičar

Teorema 7. (Košijev integralni kriterijum) *Neka je funkcija* $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ *nerastuća. Tada je red* $\sum f(n)$ *konvergentan ako i samo ako je integral* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *konvergentan.*

Dokaz. Funkcija f je prema pretpostavci nerastuća, pa je $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ za svako $k \leq x \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Integracijom ove nejednakosti dobija se

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

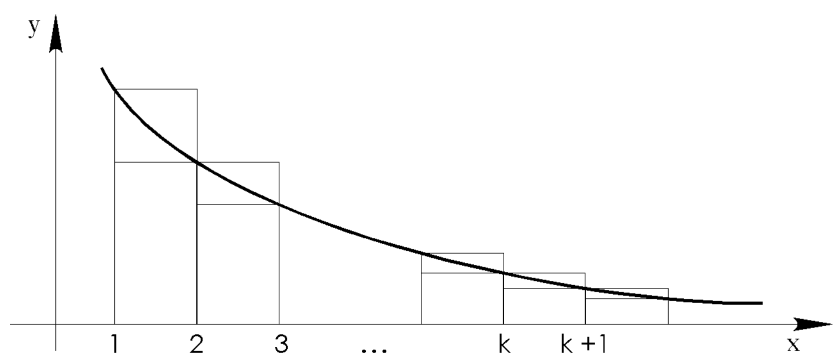
Sumiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\,,$$

odn.

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

gde je $s_n = \sum_1^n f(k)$.



Sl. 10

Ako je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan, onda je

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx\,.$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

pa je red $\sum f(n)$ konvergentan prema stavu 1., 1.4.1. .

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je red $\sum f(n)$ konvergentan i neka je njegova suma jednaka s. Tada je $s_n \leq s$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Funkcija f je nenegativna, pa je funkcija $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ neopadajuća. Stoga za svako $\xi \geq 1$ postoji $n \geq \xi$ tako da je

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq s\,,$$

pa je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan. ■

Navedimo primere koji ukazuju na način korišćenja navedenih kriterijuma.

Primer 3. Red $\sum x^n/n!$ je konvergentan za svako $x \geq 0$ jer je

$$\mathcal{D} = \lim \mathcal{D}_n = \lim \frac{x}{n+1} = 0\,.$$

Primer 4. Red $\sum n^{n^2} 2^n/(n+1)^{n^2}$ je konvergentan jer je

$$\mathcal{C} = \lim \mathcal{C}_n = 2 \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1\,.$$

Primer 5. Red $\sum((2n-1)!!/(2n)!!)^p$ je konvergentan za $p > 2$, a divergentan za $p \leq 2$. Zaista, kako je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n} + o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty\,,$$

rezultat sledi iz Gausovog kriterijuma

Primer 6. Hiperharmonijski red $\sum 1/n^\alpha$ konvergira za $\alpha > 1$. Zaista, za $\alpha > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^R = \frac{1}{\alpha-1}\,,$$

pa rezultat sledi na osnovu Košijevog kriterijuma.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da su sledeći redovi konvergentni

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}\,,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}\,,\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}\,,\quad d)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}\,.$$

2. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\,,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\,,\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p\,,$$

$$d)\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\frac{1}{n^q}\,,\quad e)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\,,\quad f)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^q}\,,$$

$$g)\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-n\ln\frac{2n+1}{2n-1}\right)\,,\ h)\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^p\,,\ i)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{n+1}\right)\,.$$

3. Ako red $\sum a_n$ konvergira po Dalamberovom kriterijumu, dokazati da tada on konvergira i po Košijevom kriterijumu. Da li važi obratno tvrđenje? Razmotriti red

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\cdots\,,$$

gde je $0<\alpha<\beta<1$.

4. Za red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima označimo sa $r = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n}$. Dokazati da red $\sum a_n$ konvergira za $r<1$, a divergira za $r>1$.

5. Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Neka je $r = \lim n\ln(a_n/a_{n+1})$. Dokazati da je red $\sum a_n$ konvergentan za $r>1$, a divergentan za $r<1$. Koristeći dobijeni rezultat, dokazati Rabeov kriterijum.

6. Neka je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima divergentan i $s_n>1$ za svako $n\in\mathbb{N}$. Dokazati da je

$$a)\ \text{red}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{s_n\ln s_n}\quad\text{divergentan}\,,\qquad b)\ \text{red}\ \sum\frac{a_n}{s_n\ln^2 s_n}\quad\text{konvergentan}\,,$$

c) red $\sum \dfrac{a_n}{s_n^\alpha}$ konvergentan za $\alpha > 1$, a divergentan za $\alpha \leq 1$.

7. Neka je red $\sum a_n$, $a_n > 0$, konvergentan. Dokazati da je red $\sum a_n/r_n^\alpha$, gde je r_n ostatak reda $\sum a_n$, konvergentan za $\alpha < 1$, a divergentan za $\alpha > 1$.

8. Ako je red $\sum a_n$, $a_n > 0$, konvergentan, ispitati konvergenciju sledećih redova

$$a)\ \sum \frac{a_n}{1+a_n}\,,\quad b)\ \sum \frac{a_n}{1+a_n^2}\,,\quad c)\ \sum \frac{a_n}{1+na_n}\,,\quad d)\ \sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}\,.$$

9. Ako je za red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima zadovoljen jedan od uslova

$$a)\ \overline{\lim}\ {}^{\ln}\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{e}\,,\qquad b)\ \overline{\lim}\ {}^{\ln\ln}\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{e},$$

dokazati da je red $\sum a_n$ konvergentan.

10. Neka je red $\sum a_n$ sa nenegativnim članovima konvergentan. Dokazati da je red $\sum \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ konvergentan.

11. Dokazati da za svaki realan broj $\xi \in [0,1]$ postoji niz (a_n) tako da je $\xi = \sum a_n/10^n$. Da li je niz (a_n) jednoznačno određen brojem ξ?

1.4.3. ALTERNATIVNI REDOVI

Definicija 1. *Red oblika*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n\,,$$

gde je $a_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, je ***alternativni red.***

Teorema 1. ***(Lajbnicov* kriterijum)*** *Neka je $\sum(-1)^{n+1}a_n$ alternativni red kod koga je $a_n \geq a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\lim a_n = 0$, onda je alternativni red konvergentan i važi ocena*

$$|r_n| \leq a_{n+1}\,.$$

Dokaz. Kako je niz (a_n) nerastući, to je

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq \\ &\leq (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = s_{2n+2}\,,\ n \geq 2\,, \end{aligned}$$

* Leibniz G.W. (1646-1716)-nemački matematičar

pa je niz (s_{2n}) neopadajući. Osim toga je

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1$$

za svako $n \ge 1$, pa je niz (s_{2n}) konvergentan, jer je monotono neopadajući i odozgo ograničen. Neka je $\lim s_{2n} = s$. Kako je $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ i $\lim a_n = 0$, to je $\lim s_{2n-1} = s$. Time smo dokazali da je niz (s_n) konvergentan i da je $\sum(-1)^{n+1}a_n = s$.

Da dokažemo drugi deo tvrđenja, primetimo da je niz (s_{2n+1}) nerastući i odozdo ograničen , pri čemu je

$$s_{2n} \le s \le s_{2m+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}\,.$$

Stoga je $s - s_{2n} \le s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ i $s_{2n-1} - s \le s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$, odakle sledi da je $|r_n| \le a_{n+1}$. ■

Primer 1. Red $\sum(-1)^{n+1}/n$ je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu, jer je niz $(1/n)$ monotono opadajući niz koji konvergira ka nuli.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati konvergeciju sledećih redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\,, \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\,, \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{n}\,,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n+1}{n}\,, \quad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}\,, \quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}\,.$$

2. Dokazati konvergenciju sledećih redova i naći njihovu sumu

$$a)\ 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots\,, \qquad b)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\,,$$
$$c)\ 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots\,.$$

3. Dokazati da je red $\sum(-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ konvergentan, a da je red

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

divergentan.

4. Da li alternativni red konvergira, ako opšti član tog reda teži nuli? Kakav je red $\sum(-1)^{n+1}(1+(-1)^n)/n$?

5. Ako alternativni red $\sum(-1)^{n+1}a_n$ zadovoljava uslove Lajbnicovog kriterijuma, dokazati da je tada red

$$a_1 - \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2+a_3}{3} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} + \cdots$$

konvergentan.

1.5. APSOLUTNO KONVERGENTNI REDOVI

Definicija 1. *Red $\sum a_n$ u normiranom vektorskom prostoru X je* ***apsolutno konvergentan*** *ako je brojni red $\sum \|a_n\|$ konvergentan.*

Ako je $\sum a_n$ red čiji su članovi realni ili kompleksni brojevi, apsolutna konvergencija svodi se na konvergenciju reda $\sum |a_n|$.

Teorema 1. *Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan u Banahovom prostoru X, onda je on konvergentan u tom prostoru i važi nejednakost*

$$\|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\|. \tag{1}$$

Dokaz. Kako je red $\sum \|a_n\|$ po pretpostavci konvergentan, to na osnovu teoreme 1., 1.3. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \|a_k\| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$. No onda je

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \|a_k\| \leq \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan prema teoremi 1., 1.3. Nejednakost (1) dobija se iz nejednakosti

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$$

prelaskom na graničnu vrednost kada $n \to +\infty$. ■

Napomenimo da obrat dokazane teoreme u opštem slučaju ne važi. Zaista, red $\sum(-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ je prema Lajbnicovom kriterijumu konvergentan, ali ne apsolutno. Za takve redove kažemo da su **uslovno konvergentni**. Iz navedenog primera istovremeno vidimo da uslovno konvergentni redovi ne zadovoljavaju svojstvo komutativnosti (vid. zadatak 3., 1.4.3.).

Teorema 2. *Neka je $\sum a_n$ red u normiranom vektorskom prostoru X, i neka je $\sum \alpha_n$ brojni red sa nenegativnim članovima koji je konveregentan. Ako je $\|a_n\| \leq \alpha_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan i važi*

$$\|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \, .$$

Dokaz. Delimične sume reda $\sum \|a_n\|$ sa pozitivnim članovima su odozgo ograničene, jer je

$$\sum_{n=1}^{k} \|a_n\| \leq \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n, \quad k \in \mathbb{N} \, .$$

Na osnovu stava 2., 1.3.1. red $\sum \|a_n\|$ konvergentan, pa je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan. Prva nejednakost važi na osnovu teoreme 1., a drugu dobijamo prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti kada $k \to +\infty$. ■

Teorema 3. *Neka je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan u normiranom vektorskom prostoru X, a $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ bijekcija. Tada je red $\sum a_{s(n)}$ apsolutno konvergentan u X i ima istu sumu kao i red $\sum a_n$.*

Dokaz. Dokažimo najpre da je red $\sum a_{s(n)}$ apsolutno konvergentan. Neka je $b_n = a_{s(n)}$. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ neka je

$$l = \max\{s(1), s(2), \ldots, s(k)\}.$$

Očigledno je $\{s(1), \ldots, s(k)\} \subset \{1, 2, \ldots, l\}$, pa je

$$\sum_{n=1}^{k} \|b_n\| = \sum_{n=1}^{k} \|a_{s(n)}\| \leq \sum_{n=1}^{l} \|a_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\| \, ,$$

odakle na osnovu stava 1., 1.4.1. sledi konvergencija reda $\sum \|a_{s(n)}\|$, odn. apsolutna konvergencija reda $\sum a_{s(n)}$.

Dokažimo da redovi $\sum a_n$ i $\sum a_{s(n)}$ imaju jednake sume. Kako su oni apsolutno konvergentni, to prema Košijevoj teoremi za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $p \in \mathbb{N}$ i svako $n \geq n_\varepsilon$ važe nejednakosti

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|a_k\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad i \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} \|b_k\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2}$$

Neka je $n_1 = \max\{s(1), \ldots, s(n_\varepsilon), s^{-1}(1), \ldots, s^{-1}(n_\varepsilon)\}$. Očigledno je $n_1 \geq n_\varepsilon$ i važe inkluzije

$$\{s(1), \ldots, s(n_\varepsilon)\} \subset \{1, 2, \ldots, n_1\} \tag{3}$$

i

$$\{1, 2, \ldots, n_\varepsilon\} \subset \{s(1), \ldots, s(n_1)\}. \tag{4}$$

Za proizvoljno $n \geq n_1$ uočimo razliku

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{m=1}^{n} b_m\,. \tag{5}$$

Za $k, m \leq n$ i $k = s(m)$ važi $a_k - b_m = a_k - a_{s(m)} = 0$, pa takve članove možemo ukloniti iz (5). Preslikavanje s je bijekcija, pa u sumi (5) postoji samo jedno m za koje je $k = s(m)$. Stoga u razlici (5) možemo ukloniti sve takve članove. No onda zbog (3) i (4) u (5) neće ostati nijedan član a_k, $k \leq n_\varepsilon$ i nijedan član b_m, $m \leq n_\varepsilon$. Stoga je

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{m=1}^{n} b_m\| \leq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \|a_k\| + \sum_{m=n_\varepsilon+1}^{n} \|b_m\| < \varepsilon\,,$$

gde je $n \geq n_1$. Prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti kada $n \to +\infty$ dobijamo nejednakost

$$\|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{m=1}^{+\infty} b_m\| \leq \varepsilon$$

koja važi za svako ε. Odatle, zbog proizvoljnosti broja ε, sledi jednakost suma posmatranih redova. ■

Neka je (a_n) niz u normiranom vektorskom prostoru X. Kažemo da je (a_n) **apsolutno sumabilan niz** u X, ako postoji bijekcija $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je red $\sum a_{s(n)}$ apsolutno konvergentan. Dokazana teorema pokazuje da tada red konvergira za svaku bijekciju, a suma reda ne zavisi od izbora bijekcije.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju redova

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), \qquad b)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p},$$
$$c)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{n^n}, \qquad d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{b^n+n}.$$

2. Neka su (a_n) i (b_n) nula nizovi i $\varepsilon > 0$. Dokazati da postoji permutacija (b'_n) niza (b_n) tako da je $\sum a_n b'_n < \varepsilon$.

3. Ako su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergentni redovi, dokazati da je takav i red $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan red u normiranom prostoru X. Ako je (b_n) ograničen niz u $\mathbb{R}$, dokazati da je tada red $\sum a_n b_n$ apsolutno konvergentan u X.

5. Ako u normiranom prostoru X svaki apsolutno konvergentan red konvergira, dokazati da je X Banahov prostor.

6. Neka je (a_{n_i}) podniz niza (a_n) iz normiranog prostora X. Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, dokazati da je tada i red $\sum a_{n_i}$ apsolutno konvergentan, pri čemu važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\|a_{n_i}\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\|a_m\|.$$

7. Ako je za članove brojnog niza (a_n)

$$\lim\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \alpha \quad \text{i} \quad \lim\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \beta,$$

gde je $|\alpha\beta| < 1$, dokazati da je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan.

8. Neka je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k$$

i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n - \sigma_n|^{\alpha} < +\infty$$

za svako $\alpha > 0$. Dokazati da je red $\sum a_n$ konvergentan.

1.6. USLOVNA KONVERGENCIJA BROJNIH REDOVA

Brojnom redu

$$\sum a_n \tag{1}$$

pridružimo redove

$$\sum p_n \qquad \text{i} \qquad \sum q_n, \tag{2}$$

gde je

$$p_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0\,, \\ 0, & a_n < 0\,, \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0\,, \\ 0, & a_n \geq 0\,. \end{cases}$$

Č lanovi redova (2) su nenegativni i za njih važe jednakosti

$$a_n = p_n - q_n\,, \qquad |a_n| = p_n + q_n\,.$$

Stav 1. *Ako je red* (1) *apsolutno konvergentan, tada su redovi* (2) *konvergentni i važe jednakosti*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n\,. \tag{3}$$

Dokaz. Konvergencija redova (2) sledi iz nejednakosti $p_n \leq |a_n|$ i $q_n \leq |a_n|$, na osnovu prvog poredbenog kriterijuma. No onda su konvergentni redovi $\sum(p_n - q_n)$ i $\sum(p_n + q_n)$ prema posledici stavova 1. i 2.,1.2. i važe jednakosti (3). ■

Stav 2. *Ako je red* (1) *uslovno konvergentan, onda su redovi* (2) *divergentni.*

Dokaz. Pretpostavimo da je bar jedan od redova (2) konvergentan, recimo red $\sum p_n$. Tada je konvergentan i red $\sum q_n = \sum (p_n - a_n)$, pa je zbog (3) red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, što je suprotno pretpostavci.■

Teorema 3. (Rimanova* teorema) *Ako je red* $\sum a_n$ *uslovno konvergentan, tada za svako* $M \in \overline{\mathbb{R}}$ *postoji bijekcija* $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *tako da je* $\sum a_{s(n)} = M$*.*

Dokaz. Neka je $M > 0$. Kako je red $\sum p_n$ divergentan, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1 - 1} \leq M < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1}.$$

Red $\sum q_n$ je divergentan, pa postoji $m_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\begin{aligned}(p_1 + \cdots + p_{n_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) < M \leq \\ \leq (p_1 + \cdots + p_{n_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1 - 1}).\end{aligned}$$

Iz istih razloga postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\begin{aligned}(p_1 + \cdots + p_{n_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2 - 1}) \leq M < \\ < (p_1 + \cdots + p_{n_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}).\end{aligned}$$

Nastavljajući ovaj postupak dobićemo red $\sum a_{s(n)}$ formiran od elemenata reda $\sum a_n$ opisanom bijekcijom $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Delimične sume reda

$$\begin{aligned}&(p_1 + \cdots + p_{n_1}) - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) + \\ &\qquad + (p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}) - \cdots + (p_{n_{k-1}+1} + \cdots + p_{n_k}) - \\ &\qquad - (q_{m_{k-1}+1} + \cdots + q_{m_k}) + \cdots\end{aligned} \tag{4}$$

razlikuju se od M za broj koji je po apsolutnoj vrednosti manji p_{n_k} ili q_{m_k}:

$$|s_{2k} - M| \leq q_{m_k} \quad , \quad |s_{2k-1} - M| \leq p_{n_k}.$$

* Riemann B. (1826-1866)-nemački matematičar

Kako opšti članovi redova (2) teže nuli, takvi su i njihovi podnizovi p_{n_k} i q_{m_k}. Stoga delimične sume reda (4) teže broju M. Kako je tada red

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} - \cdots$$

konvergentan i ima istu sumu kao i red (4) (vid. primer 2., 1.1.), to je tvrđenje dokazano ako je $M > 0$ konačan broj. Tvrđenje se analogno dokazuje u slučaju kada je $M < 0$.

Ako je $M = +\infty$, tada postoji rastući niz (M_n) realnih brojeva tako da je $\lim M_n = +\infty$. Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ izabran tako da važi

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1-1} \leq M_1 < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1},$$

a zatim izaberimo $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2-1} \leq \\ \leq M_2 < p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}. \end{aligned}$$

Nastavljajući navedeni postupak dobićemo red $\sum a_{s(n)}$ čiji niz delimičnih suma očigledno teži ka $+\infty$. Za $M = -\infty$ dokaz je analogan. ■

Primer 1. Posmatrajmo red $\sum(-1)^{n+1}/n$ koji je prema Lajbnicovom kriterijumu konvergentan, ali koji nije apsolutno konvergentan.

Primetimo najpre da niz

$$\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma, \quad n \to +\infty,$$

gde je $\gamma \approx 0,577215$ Ojlerova* konstanta. Zaista, delimične sume reda

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right)$$

---

* Euler L. (1707-1783)-švajcarski matematičar, živeo i radio u carskoj Rusiji

daju niz (γ_n), a kako je

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}, \quad n \to +\infty$$

niz (γ_n) je konvergentan. Odatle dobijamo sledeće jednakosti

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\gamma_m + \frac{1}{2}\ln m,$$

i

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} &= \sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln k + \gamma_{2k} - \frac{1}{2}\gamma_k\,.\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada red

$$\begin{aligned}&1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2q} + \\ &\qquad + \frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \cdots\end{aligned} \tag{5}$$

koji je dobijen iz polaznog reda tako što je uzeto najpre p pozitivnih članova, zatim prvih q negativnih članova, pa ponovo narednih p pozitivnih članova itd. Delimične sume $\tilde{s}_{2n}$ tako dobijenog reda su oblika

$$\tilde{s}_{2n} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \alpha_n,$$

gde $\alpha_n \to 0$. Niz $\tilde{s}_{2n+1}$ je konvergentan i ima istu graničnu vrednost kao i niz $\tilde{s}_{2n}$. Stoga je $\ln(2\sqrt{p/q})$ suma reda (5). Za različite vrednosti p i q dobijamo različite sume reda (5). Za $p = 2$ i $q = 1$ imamo da je

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\ln 2,$$

a za $p = 1$ i $q = 4$ imamo

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots = 0.$$

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $\sum a_n$ divergentan red sa pozitivnim članovima. Dokazati da za svako $M \in \overline{\mathbb{R}}$ postoji niz (b_n), $b_n \in \{1, -1\}$, tako da je red $\sum a_n b_n$ divergentan.

2. Neka je red $\sum a_n$ uslovno konvergentan. Dokazati da za svako $\alpha \leq \beta$ postoji bijekcija $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tako da je $\underline{\lim}\, s_{r(n)} = \alpha$ i $\overline{\lim}\, s_{r(n)} = \beta$.

3. Neka je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima divergentan, pri čemu $a_n \to 0$. Dokazati da za svako $s \in \mathbb{R}$ postoji niz $\{\varepsilon_n : \varepsilon_n = 1$ ili $\varepsilon_n = -1$ za svako $n \in \mathbb{N}\}$ tako da je red $\sum \varepsilon_n a_n$ konvergentan, pri čemu je njegova suma jednaka s.

4. Ako je red $\sum a_{s(n)}$ konvergentan za svaku permutaciju $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, dokazati je tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

1.7. KRITERIJUMI ZA KONVERGENCIJU PROIZVOLjNIH REDOVA

Neka je $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq m\}$ skup realnih brojeva, a $\{\beta_i : 1 \leq i \leq m\}$ skup elemenata normiranog vektorskog prostora X nad poljem realnih brojeva. Označimo sa s sumu $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i$, a sa B_k označimo sume $\sum_{i=1}^{k} \beta_i$, $1 \leq k \leq m$. Tada s možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} s &= \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \cdots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m \\ &= \alpha_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i, \end{aligned}$$

koji je poznat kao Abelova* transformacija polazne sume. Tu sumu možemo pri određenim uslovima na pogodan način oceniti. Preciznije, važi sledeća

Lema 1. (Abelova lema) *Ako za elemente skupa $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq m\}$ važi $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ (ili $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$) za svako $i = \overline{1, m-1}$ i ako postoji realan broj $L > 0$ tako da je $\|B_k\| \leq L$ za svako $k = \overline{1, m}$, tada važi ocena:*

$$\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\| \leq L(2|\alpha_m| + |\alpha_1|).$$

---

* Abel N. (1802-1829)- norveški matematičar

Dokaz. Neposredno sledi iz Abelove transformacije, pri čemu su razlike $\alpha_i - \alpha_{i+1}$ u izrazu za Abelovu transformaciju istog znaka:

$$\begin{aligned}\|s\| &\le |\alpha_m|\|B_m\| + \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}|\|B_i\| \le \\ &\le L|\alpha_m| + L|\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})| \le \\ &\le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1. (Abelov kriterijum) *Neka je (a_n) monoton i ograničen niz realnih brojeva. Ako je red $\sum b_n$ konvergentan u Banahovom prostoru X, onda je takav i red $\sum a_n b_n$.*

Dokaz. Kako je niz (a_n) ograničen, to postoji $K > 0$ tako da je $|a_n| \le K$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Red $\sum b_n$ je konvergentan u Banahovom prostoru, pa na osnovu Košijeve teoreme za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

za svako $n > n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$. No onda je prema Abelovoj lemi

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \| = \| \sum_{k=1}^{m} a_{n+k} b_{n+k} \| < \frac{\varepsilon}{3K}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) < \varepsilon$$

za svako $n > n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je red $\sum a_n b_n$ konvergentan na osnovu Košijeve teoreme. $\blacksquare$

Teorema 2. (Dirihleov kriterijum) *Neka je (a_n) monoton nula niz. Ako su delimične sume reda $\sum b_n$ ograničene u Banahovom prostoru X, onda je red $\sum a_n b_n$ konvergentan u X.*

Dokaz. Kako su delimične sume reda $\sum b_n$ ograničene, to postoji $L > 0$ tako da je $\| \sum_1^n b_k \| \le L$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \| \le \| \sum_{k=1}^{n+m} b_k \| + \| \sum_{k=1}^{n} b_k \| \le 2L\,.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je (a_n) nula niz, to postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $|a_n| < \varepsilon/6L$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. Sada je na osnovu Abelove leme

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \| = \| \sum_{k=1}^{m} a_{n+k} b_{n+k} \| \leq 2L(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) < \varepsilon$$

za svako $n > n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je red $\sum a_n b_n$ konvergentan prema Košijevoj teoremi. ■

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}, \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{n}, \quad c) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

2. Dokazati da su sledeći redovi konvergentni za svako $x \in \mathbb{R}$

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x \sin nx}{n}, \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \sin nx}{n}.$$

3. Neka je (a_n) proizvoljan niz realnih brojeva. Dokazati da redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

konvergiraju za iste vrednosti x.

4. (**Kriterijum Rejmona***) Ako je red $\sum b_n$ konvergentan, a red $\sum(a_n - a_{n+1})$ apsolutno konvergentan, dokazati da je red $\sum a_n b_n$ konvergentan.

5. Ako je red $\sum(a_n - a_{n+1})$ apsolutno knvergentan, $\lim a_n = 0$ i ako su delimične sume reda $\sum b_n$ ograničene, dokazati da je red $\sum a_n b_n$ konvergentan.

6. Neka je red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergentan. Dokazati da postoji niz $b_1 \leq b_2 \leq \cdots$ tako da je $\lim b_n = \infty$, a da je red $\sum a_n b_n$ konvergentan.

1.8. PROIZVOD BROJNIH REDOVA

Neka su brojni redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni. Ako su A_n i B_n delimične sume tih redova, onda elemente $a_i b_j$ proizvoda $A_n B_n$

---

* Du Bois Raymond P. (1831-1889) -nemački matematičar

možemo rasporediti u matricu

$$
\begin{pmatrix}
a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_1b_j & a_2b_j & \dots & a_ib_j & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

od čijih elemenata možemo formirati na proizvoljan način novi red. Red sastavljen od elemenata matrice (1) nazivamo **proizvodom redova**. Preciznije, svaki red oblika $\sum a_{i(m)}b_{j(n)}$, gde su $i, j : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ bijekcije skupa $\mathbb{N}$, nazivamo proizvodom redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Teorema 1. (Koši) *Ako su brojni redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergentni, tada je proizvod tih redova apsolutno konvergentan red, a njegova suma jednaka je proizvodu suma redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.*

Dokaz. Kako su redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergentni, redovi $\sum |a_n|$ i $\sum |b_n|$ imaju konačne sume A^* i B^*. Neka je $\sum a_{i(m)}b_{j(n)}$ red sastavljen od elemenata matrice (1), gde su $i, j : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ proizvoljne bijekcije skupa $\mathbb{N}$. Uočimo proizvoljnu delimičnu sumu tog reda i primetimo da je

$$
\sum_{m,n=1}^{k} |a_{i(m)}b_{j(n)}| \le \left(\sum_{m=1}^{\nu} |a_{i(m)}| \right) \left(\sum_{n=1}^{\nu} |b_{j(n)}| \right) \le A^* B^*
$$

za svako $k \in \mathbb{N}$, gde je $\nu \ge \max\{i(1), \dots, i(k), j(1), \dots, j(k)\}$. Red $\sum a_{i(m)}b_{j(n)}$ je dakle apsolutno konvergentan na osnovu teoreme 1., 1. 4.1. No onda je na osnovu teoreme 3., 1.5. konvergentan i red

$$
a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots
$$

Delimične sume ovog reda su $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$. Niz A_nB_n je konvergentan i njegova granična vrednost jednaka je proizvodu AB suma redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Stoga je i suma reda $\sum a_{i(n)}b_{j(n)}$ jednaka AB. ■

U dokazu teoreme koristili smo grupisanje članova matrice (1) po gornjim levim kvadratima. Kod proizvoda stepenih redova zgodnije je grupisanje po sporednim dijagonalama, kako bi se proizvod mogao prikazati kao stepeni red. Upravo na taj način pretstavljen red, Koši je nazvao proizvodom redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Primer 1. Množeći geometrijski red $\sum_0^\infty x^n$, $|x| < 1$, sa samim sobom i grupišući članove proizvoda u Košijevoj formi, dobijamo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_0^\infty x^n\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots .$$

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati sledeće jednakosti

$$a)\ \left(\sum_0^\infty \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}, \quad b)\ \sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} \sum_0^\infty \frac{5^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{7^n}{n!},$$

$$c)\ \sum_0^\infty \frac{3^n}{n!} \sum_0^\infty \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}.$$

2. Dokazati da iz konvergencije redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ u opštem slučaju ne sledi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j b_{n-j})$.

3. Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 1. dokazati da je $\lim_n \sum_j a_j b_{n-j} = 0$.

4. Ako je $a(x) = \sum_0^\infty x^n/n!$ dokazati da je $a(x)a(y) = a(x+y)$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Dokazati da je

$$1 - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

6. Ako sa redovima $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergira i red $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j})$, onda je suma ovog reda jednaka proizvodu redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Dokazati.

7. Ako je bar jedan od konvergentnih redova $\sum a_n = A$ i $\sum b_n = B$ apsolutno konvergentan, dokazati da je tada konvergentan i red $\sum(\sum a_j b_{n-j})$, pri čemu je njegova suma jednaka AB. (Uputstvo: dokazati najpre da je $\{a_1 p_n + a_2 p_{n-1} + \cdots + a_n p_1\}$ nula niz, ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, a $\{p_n\}$ je nula niz)

1.9. PONOVLJENI REDOVI

Neka su $a_i^{(j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$, elementi normiranig vektorskog prostora. Poređajmo ove elemente u beskonačnu matricu

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_i^{(1)} & \dots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_i^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_1^{(j)} & a_2^{(j)} & \dots & a_i^{(j)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

Od elemenata svake vrste odn. kolone možemo formirati redove

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_i^{(j)} \quad , \quad \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(j)}, \quad i, j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Redove

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_i^{(j)} \quad , \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(j)} \tag{3}$$

nazivamo se **ponovljenim redovima**.

Ponovljeni red $\sum_i \sum_j a_i^{(j)}$ je konvergentan, ako konvergentan red $A_i = \sum_j a_i^{(j)}$ za svako $i \in \mathbb{N}$, i ako je osim toga konvergentan i red $\sum A_i$.

Od elemenata matrice (1) možemo formirati red

$$\sum_{r=1}^{+\infty} u_r, \tag{4}$$

pri čemu su elementi matrice (1) birani priozvoljnim redosledom. Redovi (3) i (4) su sastavljeni od istih članova, pa se prirodno postavlja pitanje u kakvoj su vezi ovi redovi i da li pod određenim uslovima njihove sume mogu biti jednake.

Teorema 1. *Neka su članovi matrice* (1) *elementi Banahovog prostora* X. *Ako je red* (4) *apsolutno konvergentan, tada su ponovljeni redovi* (3) *konvergentni i imaju istu sumu kao i red* (4)

Dokaz. Kako je red (4) apsolutno konvergentan, to je red $\sum \|u_r\|$ konvergentan. Neka je njegova suma U^*. Tada je za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i^{(j)}\| \leq U^*,$$

pa je prema teoremi 1., 1.3.1. red $\sum a_i^{(j)}$ apsolutno konvergentan za svako $j \in \mathbb{N}$. Neka je $A^{(j)} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{(j)}$.

Kako je red $\sum \|a_i^{(j)}\|$ apsolutno konvergentan, ostatak tog reda teži nuli. Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji $r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sum_{r=r_\varepsilon+1}^{+\infty} \|u_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5}$$

Ako je U suma reda (4), onda je

$$\|\sum_{r=r_\varepsilon+1}^{+\infty} u_r\| = \|U - \sum_{r=1}^{r_\varepsilon} u_r\| \leq \sum_{r=r_\varepsilon+1}^{+\infty} \|u_r\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Prvih r_ε članova reda (4) svakako se nalazi u prvih m kolona i prvih n vrsta matrice (1) za dovoljno velike vrednosti m i n, recimo $m \geq m_\varepsilon$ i $n \geq n_\varepsilon$. Za tako izabrane vrednosti m i n razlika

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} - \sum_{r=1}^{r_\varepsilon} u_r$$

sadrži samo one članove reda (4) čiji su indeksi veći od r_ε, pa je zbog nejednakosti (6)

$$\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} - \sum_{r=1}^{r_\varepsilon} u_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{7}$$

Prelaskom na graničnu vrednost u (7) kada $m \to +\infty$ vidimo da je

$$\|\sum_{j=1}^{n} A^{(j)} - \sum_{r=1}^{r_\varepsilon} u_r\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$. Sada iz (6) i (8) dobijamo

$$\|\sum_{j=1}^{n} A^{(j)} - U\| \leq \|\sum_{j=1}^{n} A^{(j)} - \sum u_r\| + \|\sum_{r=1}^{r_\varepsilon} u_r - U\| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$, što dokazuje da je U suma reda $\sum_j \sum_i a_i^{(j)}$. Slično se dokazuje da je U suma drugog reda u (2). ■

Sledeća teorema pretstavlja obrat dokazane teoreme, a neophodna je u dokazu teoreme o jednakosti suma ponovljenih redova.

Teorema 2. *Neka su članovi matrice* (1) *elementi Banahovog prostora X. Ako je red $\sum \sum \|a_i^{(j)}\|$ konvergentan, onda je red* (4) *apsolutno konvergentan i ima istu sumu kao i ponovljeni red.*

Dokaz. Označimo sa A^* sumu ponovljenog reda $\sum \sum \|a_i^{(j)}\|$. Za svaku delimičnu sumu reda $\sum \|u_r\|$ očigledno postoje prirodni brojevi m i n tako da je

$$\sum_{k=1}^{r} \|u_r\| \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \|a_i^{(j)}\| \leq A^*,$$

što dokazuje apsolutnu konvergenciju reda (4). Suma tog reda prema teoremi 2., 1.4. ne zavisi od redosleda članova u tom redu i njegova suma je prema teoremi 1. jednaka sumi ponovljenog reda. ■

Iz dokazanih teorema neposredno proizilazi tvrđenjo jednakosti ponovljenih redova.

Posledica 1. *Ako su članovi matrice* (1) *elementi Banahovog prostora i ako je konvergentan jedan od redova*

$$\sum_i \sum_j \|a_i^{(j)}\|\,, \quad \sum_j \sum_i \|a_i^{(j)}\|\,,$$

onda su ponovljeni redovi (3) *konvergentni i imaju jednake sume.*

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $A = \{m^n : m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1\}$. Dokazati da je

$$\sum_{q \in A} \frac{1}{q-1} = 1.$$

2. Naći sumu ponovljenog reda

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{m^k}$$

i uporediti dobijeni rezultat sa prethodnim zadatkom.

3. Naći sumu ponovljenog reda čiji je opšti član

$$a_i^{(k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\cdots(k+i)}.$$

4. Za matricu (1) označimo sa

$$A_m^{(n)} = \sum_{i,j=1}^{i=m,j=n} a_i^{(j)}.$$

Graničnu vrednost $\lim_n A_m^{(n)}$ nazivamo sumom dvostrukog reda $\sum_{i,j} a_i^{(j)}$. Dokazati sledeća tvrđenja:

(i) ako je dvojni red konvergentan, onda $\|a_i^{(j)}\| \to 0$;

(ii) ako je konvergentan dvojni red i ako je konvergentan jedan od redova (2), tada je konvergentan i odgovarajući ponovljeni red (3) ;

(iii) ako bar jedan od redova (3), (4), $\sum_{i,j} a_i^{(j)}$ apsolutno konvergira, onda konvergiraju i ostali i imaju jednake sume.

5. Ispitati konvergenciju sledećih dvojnih redova:

$$a)\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)\,, \qquad b)\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+m)^\alpha}\,, \quad (\alpha > 0)\,.$$

6. Dokazati da je

$$a)\ \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1}(p > -1)\,, \quad b)\ \sum_{m=2,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2\,,$$

$$c)\ \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2\,, \quad d)\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}\,.$$

1.10. BESKONAČNI PROIZVODI

Neka je dat niz (a_n) realnih brojeva. Za svako $n \in \mathbb{N}$ definisan je proizvod

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Definicija 1. *Uređen par koji se sastoji od nizova (a_n) i (p_n) naziva se* ***beskonačan proizvod*** *i označava sa $\prod a_n$. Opšti član niza (a_n) je* ***opšti član beskonačnog proizvoda****, dok je opšti član p_n niza (p_n)* ***n-ti delimičan proizvod*** *beskonačnog proizvoda.*

Definicija 2. *Beskonačan proizvod $\prod a_n$ je* ***konvergentan*** *ako je niz (p_n) delimičnih proizvoda konvergentan, pri čemu je $p = \lim p_n \neq 0$. Broj p je* ***vrednost beskonačnog proizvoda*** *i u tom slučaju pišemo $p = \prod_{n=1}^{+\infty} p_n$.*

Iz same definicije sledi da su svi članovi beskonačnog proizvoda različiti od nule, ukoliko je on konvergentan. Ako je $a_m = 0$, onda je $p_n = 0$ za svako $n \geq m$, pa je takav proizvod divergentan. Stoga ćemo u daljem posmatrati samo one beskonačne proizvode čiji su svi članovi različiti od nule.

Svakom beskonačnom proizvodu $\prod a_n$ možemo pridružiti beskonačan proizvod $\pi_m = \prod_n a_{m+n}$ koji se naziva **ostatak proizvoda** $\prod a_n$, ukoliko je ovaj konvergentan. Navedimo neka jednostavnija svojstva beskonačnih proizvoda.

Stav 1. *Beskonačan proizvod $\prod a_n$ je konvergentan onda i samo onda ako je ostatak π_m konvergentan za svako $m \in \mathbb{N}$. U tom slučaju je $p = p_m \pi_m$.*

Dokaz. Neka je $\pi_m^k = a_{m+1} \cdots a_{m+k}$ k-ti delimični proizvod ostatka π_m, a p_s s-ti delimičan proizvod beskonačnog proizvoda $\prod a_n$. Tada je $p_{m+k} = p_m \pi_m^k$, odakle sledi da $\lim_k p_{m+k}$ postoji onda i samo onda ako postoji $\lim_k \pi_m^k$ za svako $m \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\prod_n p_n = p_m \pi_m$. ■

Stav 2. *Ako je beskonačan proizvod $\prod a_n$ konvergentan, onda je $\lim_n \pi_n = 1$.*

Dokaz. Beskonačan proizvod $\prod a_n$ je konvergentan, pa je niz (p_n) konvergentan i $\lim_n p_n \neq 0$. Prema prethodnom stavu je $p = p_n \pi_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, odn. $\pi_n = p/p_n$, odakle sledi da je $\lim \pi_n = 1$. ■

Stav 3. *Ako je beskonačan proizvod* $\prod a_n$ *konvergentan, onda je* $\lim a_n = 1$*.*

Dokaz. $\lim a_n = \lim(p_n/p_{n-1}) = \lim p_n / \lim p_{n-1} = p/p = 1$. ■

Iz navedenih stavova vidimo da između beskonačnih proizvoda i redova postoji analogija. Pokažimo kako se može ispitivati konvergencija beskonačnih proizvoda pomoću redova. U tom cilju možemo pretpostaviti da su svi članovi beskonačnog proizvoda pozitivni, čime se ne narušava opštost razmatranja.

Stav 4. *Beskonačan proizvod* $\prod a_n$ *je konvergentan onda i samo onda ako je konvergentan red* $\sum \ln a_n$*.*

Dokaz. Označimo sa L_n n-tu delimičnu sumu reda $\sum \ln a_n$. Tada je $L_n = \ln p_n$, odn. $p_n = e^{L_n}$. Kako je eksponencijalna funkcija neprekidna, granična vrednost $\lim p_n = p$ postojaće onda i samo onda ako postoji $\lim L_n = L$ i pri tome je $p = e^L$. ■

Kako opšti član beskonačnog proizvoda teži jedinici, često je korisno da se opšti član beskonačnog proizvoda pretstavi u obliku $a_n = 1 + b_n$. Tako sa beskonačnim proizvodom

$$\prod (1 + b_n) \tag{1}$$

posmatramo njemu odgovarajući red

$$\sum \ln(1 + b_n)\,. \tag{2}$$

Stav 5. *Ako je, počev od nekog prirodnog broja,* $b_n > 0$ *(ili* $b_n < 0$*), tada je za konvergenciju beskonačnog proizvoda* (1) *potrebno i dovoljno da red*

$$\sum b_n \tag{3}$$

konvergira.

Dokaz. Kako je za konvergenciju beskonačnog proizvoda (1), a takođe i za konvergenciju redova (2) i (3) neophodno da opšti član b_n teži nuli, možemo pretpostaviti da je ovaj uslov zadovoljen. No onda je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1 + b_n)}{b_n} = 1\,,$$

pa je prema stavu 3., 1.3.1. sa redom (3) konvergentan i red (2). Odatle prema stavu 4. sledi konvergencija beskonačnog proizvoda (1). Obrat očigledno važi. ■

Ako je b_n proizvoljnog znaka, tada važi sledeći

Stav 6. *Ako sa redom* (3) *konvergira i red*

$$\sum b_n^2\,, \tag{4}$$

onda je beskonačan proizvod (1) *konvergentan.*

Dokaz. Iz konvergencije reda (3) sledi $\lim b_n = 0$, pa je na osnovu Tejlorove formule

$$\ln(1+b_n) = b_n - \frac{1}{2}b_n^2 + o(b_n^2)\,,$$

odakle sledi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n - \ln(1+b_n)}{b_n^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Kako je red (4) konvergentan, to je prema stavu 3., 1.3.1. konvergentan i red $\sum(b_n - \ln(1+b_n))$. No i red (3) je konvergentan, pa je red (2) konvergentan kao razlika dva konvergentna reda. Ali tada je prema stavu 4. konvergentan i beskonačan proizvod (1). ■

Definicija 3. *Beskonačan proizvod* $\prod a_n$ *je* ***apsolutno konvergentan****, ako je red* $\sum \ln a_n$ *apsolutno konvergentan.*

Stav 7. *Beskonačan proizvod* (1) *je apsolutno konvergentan ako i samo ako je red* (3) *apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Beskonačan proizvod (1) je apsolutno konvergentan, ako je red $\sum \ln(1+b_n)$ apsolutno konvergentan. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}\right| = 1\,,$$

to red $\sum \ln(1+b_n)$ apsolutno konvergira onda i samo onda ako red $\sum b_n$ apsolutno konvergira. ■

Na kraju ovog odeljka navedimo nekoliko primera koji ukazuju na važnost beskonačnih proizvoda.

Primer 1. Odredimo vrednost beskonačnog proizvoda

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n}\,, \quad \varphi \neq 0,$$

čiji je n-ti delimičan proizvod

$$p_n = \cos\frac{\varphi}{1}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\,.$$

Polazeći od očigledne jednakosti

$$\begin{aligned}\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} &= 2^2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2} = \cdots = \\ &= 2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdots\cos\frac{\varphi}{2}\,,\end{aligned}$$

vidimo da

$$p_n = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\varphi/2^n}{\sin\varphi/2^n} \to \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,, \quad n \to +\infty\,.$$

Za $\varphi = \pi/2$ dobijamo sledeće razlaganje

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots\,.$$

Koristeći formulu $\cos\varphi/2 = \sqrt{(1+\cos\varphi)/2}$, $cos\pi/4 = \sqrt{1/2}$ dobijamo sledeću formulu

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\,.$$

Dobijena formula zajedno sa Valisovom* formulom pretstavlja prvu reprezentaciju broja π u obliku beskonačnog proizvoda u analizi.

* Wallis J. (1616-1703)-engleski matematičar

Primer 2. Posmatrajmo beskonačan proizvod

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}\,, \quad x\neq 0\,, \quad x\neq -n\,, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Lako je proveriti da je

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}} = 1+\frac{x(x-1)}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\,,$$

odakle sledi apsolutna konvergencija beskonačnog proizvoda $\Gamma(x)$. Ako sada u n-tom delimičnom proizvodu

$$p_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,,$$

pređemo na graničnu vrednost, dobijamo Ojlerovu formulu

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

Lako je proveriti da je

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

Ako je $x=m\in\mathbb{N}$, tada iz poslednje rekurentne formule dobijamo da je $\Gamma(m+1)=m!\,$.

Primer 3. Sledeći primer transformacije beskonačnog proizvoda u red pripada Ojleru. Neka je (p_n) monotono rastući niz prostih brojeva, a $x>1$. Tada je

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-1/p_k^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x},$$

gde je $\zeta(x)=\sum 1/n^x$ Rimanova funkcija. Da dokažemo ovu formulu, primetimo najpre da je

$$\frac{1}{1-1/p_k^x} = \frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_k^m)^x}+\cdots\,.$$

Proizvod P_x^N konačnog broja takvih redova, koji odgovaraju svim prostim brojevima koji ne prelaze broj N, jednak je

$$P_x^N = \prod_{p_k \le N} \frac{1}{1 - 1/p_k^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{N+1}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^x}\,,$$

gde $\sum'$ označava sumiranje po svim prirodnim brojevima koji u svom razlaganju na proste faktore sadrže samo faktore koji imaju naznačeno svojstvo sumiranja. Sada je

$$0 < P_x^N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,,$$

pa kako je red $\sum 1/n^x$ konvergentan, ostatak tog reda teži nuli kada $N \to +\infty$, prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti kada $N \to +\infty$ dobijamo traženu jednakost.

Za $x = 1$ imamo sledeću nejednakost

$$P_1^N = \prod_{p_k \le N} \frac{1}{1 - 1/p_k} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,,$$

odakle sledi da $P_1^N \to +\infty$ kada $N \to +\infty$. Stoga je beskonačan proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 1/p_n}$$

divergentan i teži ka $+\infty$, pa je prema rečenom proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{p_n})$$

takođe divergentan i teži nuli. Na osnovu stava 5. red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$$

je i sam divergentan. Odavde sledi da prostih brojeva ima beskonačno mnogo, jer bi u protivnom poslednji red bio konvergentan.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati konvergenciju sledećih beskonačnih proizvoda i odrediti njihovu vrednost

$$a) \prod_{n=0}^{+\infty}(1+x^{2^n})\,, \quad b) \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\,, \quad c) \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^n-2}\right)\,.$$

2. Ispitati konvergenciju sledećih beskonačnih proizvoda

$$a) \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\,, \quad b) \prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{1}{n^\alpha}\,, \quad c) \prod_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

3. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju beskonačnih proizvoda

$$a) \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)\,, \quad b) \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)\,, \quad c) \prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\,.$$

4. Dokazati da važe sledeća razlaganja u beskonačne proizvode:

$$a) \sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\,, \quad b) \cos x = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\,.$$

Koristeći dobijene rezultate, dokazati da funkcija $\Gamma(x)$ definisana u primeru 2. zadovoljava jednačinu

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

5. Odrediti vrednost beskonačnog proizvoda

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{a_n}),$$

gde je $a_n = n(a_{n-1}+1)$.(Rešenje: e)

6. Dokazati da je $\sum_1^\infty a_n = \prod_1^\infty (1-a_n)$ za $0 < a_n < 1$.

7. Ako je niz (a_n) pozitivnih brojeva takav da

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \to 1\,, \quad n \to +\infty\,,$$

dokazati da je beskonačan proizvod $\prod(1+a_n)$ divergentan.

8. Dokazati da stav 5. ne važi bez uslova $b_n > 0$. (Uputstvo: posmatrati beskonačan proizvod $(1+1/\sqrt{2}+1/2)(1-1/\sqrt{2})(1+1/\sqrt{3}+1/3)(1-1/\sqrt{3})\cdots)$

9. Ako je proizvod $\prod(1+|a_n|)$ konvergentan, dokazati da je tada proizvod $\prod(1+a_n)$ apsolutno konvergentan.

10. Neka je $a_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i neka je $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ bijekcija. Ako je beskonačan proizvod $\prod(1+a_n)$ apsolutno konvergentan, dokazati da je tada i beskonačan proizvod $\prod(1+a_{s(n)})$ apsolutno konvergentan i pri tome oba proizvoda imaju jednake vrednosti.

2. FUNKCIONALNI NIZOVI I REDOVI

U ovom poglavlju izučavaju se redovi čiji su članovi funkcije, ili u opštijem slučaju preslikavanja proizvoljnog prostora u normiran vektorski prostor. Razmatraju se različiti tipovi konvergencije, odnosi između ovih tipova konvergencije, kao i uslovi za njihovu konvergenciju. Na kraju se izučavaju funkcionalna svojstva funkcionalnih redova.

2.1. KONVERGENCIJA FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

Neka su X i Y proizvoljni neprazni skupovi. Označimo sa Y^X skup svih preslikavanja iz X u Y. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \mapsto Y^X$ nazivamo **funkcionalnim nizom** i označavamo sa $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $f_n := f(n)$ **opšti član** tog niza.

Ako je Y vektorski prostor nad poljem K, tada se u Y^X na uobičajen način uvodi struktura vektorskog prostora nad poljem K (vid. zadatak 1., I.1.1.). Ako je Y normiran vektorski prostor sa normom $\|\cdot\|$, onda je u skupu $B(X,Y)$ svih ograničenih funkcija prostora Y^X formulom

$$\|f\|_{B(X,Y)} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

definisana norma tog prostora (vid. zadatak 8., I.1.1.). Ako je Y Banahov prostor, tada je $B(X,Y)$ Banahov prostor (vid. zadatak 8., I.1.2.).

U daljem izlaganju za prostor Y ćemo smatrati da je normiran, ukoliko drugačije ne naglasimo.

Definicija 1. *Funkcionalni niz* $(f_n) \subset Y^X$ *je* ***ograničen*** *na skupu* X *ako postoji realan broj* $M > 0$ *tako da je* $\|f_n(x)\| \le M$ *za svako* $x \in X$ *i svako* $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2. *Funkcionalni niz* $(f_n) \subset \mathbb{R}^X$ *je* ***monotono rastući (opadajući)*** *ako je* $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $(f_n(x) \ge f_{n+1}(x))$ *za svako* $x \in X$ *i svako* $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3. *Funkcionalni niz* $(f_n) \subset Y^X$ *je* ***konvergentan u tački*** $x \in X$ *ako je niz* $(f_n(x))$ *konvergentan u* Y. *Ako je niz* (f_n) *konvergentan u svakoj tački skupa* X*, kažemo da je* ***konvergentan na skupu*** X.

Ako je funkcionalni niz (f_n) konvergentan na skupu X, tada za svako $x \in X$ postoji $f(x) := \lim_n f_n(x)$. U tom slučaju kažemo da je f **granična funkcija funkcionalnog niza** (f_n) i pišemo $\lim_n f_n = f$.

Konvergenciju funkcionalnih nizova simbolički zapisujemo na sledeći način:

$$f_n \xrightarrow{X} f \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$(n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \le \varepsilon)\,.$$

Svakom funkcionalnom nizu $(f_n) \subset Y^X$ možemo pridružiti niz (s_n) funkcija prostora Y^X koji je definisan sa

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \quad x \in X\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Uređen par $((f_n), (s_n))$ je **funkcionalni red**; f_n je **opšti član**, a s_n n-ta **delimična suma funkcionalnog reda**. Sam red označavamo sa $\sum f_n(x)$.

Definicija 4. *Funkcionalni red* $\sum f_n$, $f_n \in Y^X$ *je* ***konvergentan u tački*** $x \in X$ *ako je red* $\sum f_n(x)$ *konvergentan u* Y. *Red je* ***konvergentan na skupu*** X *ako je konvergentan u svakoj tački tog skupa.*

Ako je funkcionalni red $\sum f_n$ konvergentan na skupu X, onda je

$$s(x) := \lim_{n\to+\infty} s_n(x)$$

suma funkcionalnog reda $\sum f_n$. Red $\sum_k f_{n+k}$ je n-ti **ostatak funkcionalnog reda** $\sum f_n$.

Definicija 5. *Funkcionalni red* $\sum f_n$, $f_n \in Y^X$, *je* ***apsolutno konvergentan u tački*** $x \in X$ *ako je brojni red* $\sum \|f_n(x)\|$ *konvergentan. Funkcionalni red je* ***apsolutno konvergentan na skupu*** *ako je apsolutno konvergentan u svakoj tački tog skupa.*

Definicija 6. *Za funkcionalni red* $\sum f_n$, $f_n \in Y^X$, *kažemo da je* ***normalno konvergentan*** *na skupu* X *ako je konvergentan brojni red* $\sum \|f_n\|_{B(X,Y)}$.

Normalna konvergencija funkcionalnog reda je svojstvo globalnog karaktera, dok su konvergencija i apsolutna konvergencija svojstva lokalnog karaktera. Ako su članovi funkcionalnog reda elementi normiranog vektorskog prostora, pojam apsolutne i normalne konvergencije se poklapaju. U opštem slučaju ovi pojmovi su različiti. Vezu između njih daje sledeći

Stav 1. *Ako je funkcionalni red* $\sum f_n$ *normalno konvergentan, on je i apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Ako je funkcionalni red $\sum f_n$ normalno konvergentan, onda je brojni red $\sum_n \|f_n\|$ konvergentan. Kako je

$$\|f_n(x)\| \leq \sup_{x \in X} \|f_n(x)\| = \|f_n\|$$

za svako $x \in X$ i za svako $n \in \mathbb{N}$, to je na osnovu stava 2., 1.4.1. red $\sum f_n$ apsolutno konvergentan. ■

Primer 1. Ispitajmo konvergenciji funkcionalnog reda $\sum f_n$, gde su f_n preslikavanja skupa $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < 2\pi$, u prostor kvadratnih matrica definisana sa

$$f_n : x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sin nx}{n^\beta} & \frac{\cos nx}{n^\beta} \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

gde je $0 < \beta < +\infty$. Kako redovi $\sum \sin nx/n^\beta$, $\sum \cos nx/n^\beta$ i $\sum (-1)^{n-1}/n^\beta$ na osnovu Dirihleovog kriterijuma konvergiraju za svako $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ i $0 < \beta < +\infty$, red $\sum f_n$ je konvergentan na skupu $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ za svako $\beta > 0$. Ispitajmo apsolutnu konvergenciju datog funkcionalnog reda. Očigledno je

$$\|f_n(x)\| = \left(\frac{\sin^2 nx}{n^{2\beta}} + \frac{\cos^2 nx}{n^{2\beta}} + \frac{1}{n^{2\beta}} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{n^\beta},$$

pa je

$$\|f_n\| = sup_{x\in[\alpha,2\pi-\alpha]}\|f_n(x)\| = \frac{\sqrt{2}}{n^\beta}\,.$$

Stoga red $\sum f_n$ istovremeno konvergira apsolutno i po normi za $\beta > 1$, a divergira za $\beta \leq 1$.

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti oblast apsolutne i uslovne konvergencije sledećih redova

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$$

$$d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{x^n}\quad e)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\quad f)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

2. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju reda $\sum x_1/(n+x_2^2)$, $x=(x_1,x_2) \in D$, $D=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x_1|<+\infty, 0\leq x<+\infty\}$.

3. Neka je $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Ako je red $\sum 1/a_n$ divergentan, dokazati da je red

$$\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\frac{a_2}{a_3+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\frac{a_2}{a_3+x}\frac{a_3}{a_4+x}+\cdots$$

konvergentan za $x>0$ i da je njegova suma a_1/x.

4. Neka su članovi funkcionalnog reda $\sum f_n(x)$ preslikavanja $f_n : E\mapsto\mathbb{R}^s$, $E\subset\mathbb{R}^r$, $n\in\mathbb{N}$. Dokazati da je red $\sum f_n(x)$ konvergentan u tački $x\in E$ onda i samo onda ako je u tački x konvergentan svaki od redova $\sum f_{kn}(x)$ koji su sastavljeni od koordinatnih funkcija $f_n=(f_{1n},\ldots,f_{sn})$ za svako $k=\overline{1,s}$.

2.2. RAVNOMERNA KONVERGENCIJA FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

Neka X proizvoljan neprazan skup, a Y normiran vektorski prostor. Uočimo funkcionalni niz (f_n) u prostoru Y^X, i neka je $f\in Y^X$.

Definicija 1. *Funkcionalni niz (f_n) je* ***ravnomerno konvergentan*** *funkciji f na skupu X ako za svako $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj n_ε tako da za svako $n\geq n_\varepsilon$ i svako $x\in X$ važi*

$$\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon. \tag{1}$$

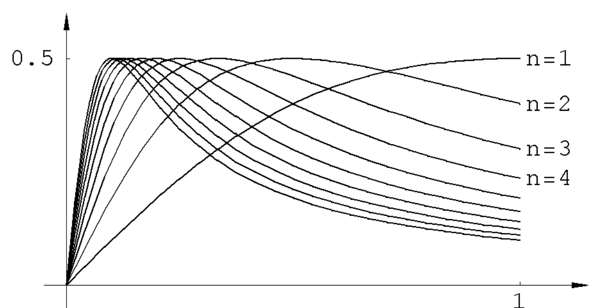
U tom slučaju pišemo $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$.

Ravnomernu konvergenciju funkcionalnih nizova simbolički možemo prikazati na sledeći način:

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)$$
$$(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)\,.$$

Za razliku od konvergencije, ravnomerna konvergencija funkconalnih nizovi je pojam globalnog karaktera. Ovu razliku lako uočavamo iz logičkih zapisa konvergencije i ravnomerne konvergencije funkcionalnih nizova. Dok kod konvergencije izbor broja n zavisi kako od izbora ε, tako i od tačke $x \in X$, kod ravnomerne konvergencije taj broj zavisi samo od ε. Očigledno je svaki ravnomerno konvergentan niz istovremeno i konvergentan. Obrat u opštem slučaju ne važi, što pokazuje

Primer 1. Funkcionalni niz $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$ konvergira funkciji $f(x) = 0$ na skupu $X = [0,1]$, ali ne ravnomerno. Zaista, kako funkcija $f_n(x)$ dostiže maksimum u tački $x = 1/n \in [0,1]$ za svako $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1/n) = 1/2$, to za $\varepsilon < 1/2$ nije moguće odrediti takav prirodan broj n_ε nezavisno od $x \in [0,1]$ tako da $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ važi za svako $n \geq n_\varepsilon$. Primetimo da isti niz ravnomerno konvergira funkciji f na skupu $[1,+\infty)$. Ovo neposredno sledi iz nejednakosti



Sl. 11

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

koja važi za svako $n \geq n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$ i svako $x \geq 1$.

Neka je $B(X,Y)$ skup svih ograničenih funkcija prostora Y^X sa normom koju smo uveli u prethodnom odeljku i pretpostavimo da funkcionalni niz (f_n) iz $B(X,Y)$ ravnomerno konvergira ka funkciji $f \in B(X,Y)$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in X$. Stoga je

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$, što dokazije da niz (f_n) konvergira ka funkciji f u prostoru $B(X,Y)$.

Važi i obrat. Naime, ako funkcionalni niz (f_n) konvergira ka funkciji f po normi prostora $B(X,Y)$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|f_n - f\| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. No onda je

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| = \|f_n - f\| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in X$, čime smo dokazali da funkcionalni niz (f_n) ravnomerno konvergira na skupu X ka funkciji f. Time je dokazana

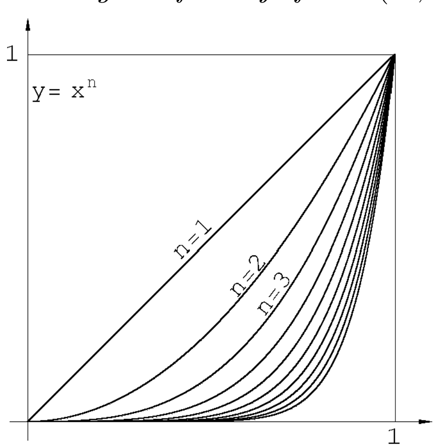
Teorema 1. *Niz funkcija (f_n) prostora $B(X,Y)$ ravnomerno konvergira na skupu X funkciji $f \in B(X,Y)$ onda i samo onda ako on konvergira funkciji f u prostoru $B(X,Y)$.*

Zbog toga se često norma prostora $B(X,Y)$ naziva **norma ravnomerne konvergencije**. Iz prethodne teoreme neposredno proizilazi

Posledica 1. *Da bi niz (f_n) funkcija prostora $B(X,Y)$ ravnomerno konvergirao funkciji $f \in B(X,Y)$ na skupu X, potrebno je i dovoljno da je*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0\,. \tag{2}$$

Primer 2. Funkcionalni niz $f_n = x^n$ na skupu $[0,1)$ konvergira funkciji $f = 0$. Kako je $\lim \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$, to prema posledici 1. zadati funkcionalni niz ne konvergira ravnomerno graničnoj funkciji na skupu $[0,1)$. Č itaocu prepuštamo da dokaže da je ovaj funkiconalni niz ravnomerno konvergentan na skupu $[0,a]$ za svako $a \leq a_0 < 1$.



Sl. 12

Teorema 2. (Koši) *Neka je* (f_n) *niz elemenata prostora* $B(X,Y)$, *gde je* Y *Banahov prostor. Da bi niz* (f_n) *imao graničnu funkciju i ravnomerno konvergirao ka njoj na skupu* X, *potrebno je i dovoljno da je* (f_n) *Košijev niz u prostoru* $B(X,Y)$.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcionalni niz (f_n) ima graničnu funkciju $f \in B(X,Y)$ i ravnomerno konvergira ka njoj na skupu X. Tada prema teoremi 1. niz (f_n) konvergira ka funkciji f u prostoru $B(X,Y)$, pa je (f_n) Košijev niz u prostoru $B(X,Y)$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je (f_n) Košijev niz u prostoru $B(X,Y)$. Kao Banahov, prostor $B(X,Y)$ je kompletan, pa je niz (f_n) konvergentan u njemu. Stoga niz (f_n) ima graničnu funkciju $f := \lim f_n$ i $f \in B(X,Y)$. Na osnovu teoreme 1. niz (f_n) ravnomerno konvergira funkciji f na skupu X. ■

Stav 3. *Neka su* (f_n) *i* (g_n) *nizovi u prostoru* Y^X, *gde je* Y *normirani vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$ *. Ako nizovi* (f_n) *i* (g_n) *ravnomerno konvergiraju na skupu* X *funkcijama* $f, g \in Y^X$ *respektivno, tada niz* $(\lambda f_n + \mu g_n)$ *ravnomerno konvergira na skupu* X *funkciji* $\lambda f + \mu g$ *za svako* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Ako je $\lambda = \mu = 0$, tvrđenje je očigledno. Neka je $|\lambda| + |\mu| > 0$. Kako $f_n \rightrightarrows f$ i $g_n \rightrightarrows g$, to za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)} \quad \text{i} \quad \|g_n(x) - g(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{(|\lambda| + |\mu|)}$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in X$. No onda je

$$\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\| \leq |\lambda|\|f_n - f\| + |\mu|\|g_n - g\| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in X$, pa niz $(\lambda f_n + \mu g_n)$ ravnomerno konvergira na skupu X ka funkciji $\lambda f + \mu g$. ■

Slično se dokazuje sledeći

Stav 4. *Neka niz* $(f_n) \subset Y^X$ *ravnomerno konvergira na skupu* X *funkciji* $f \in Y^X$. *Tada niz* (gf_n) *ravnomerno konvergira funkciji* fg *na skupu* X *za svaku funkciju* $g \in B(X, \mathbb{R})$.

Definicija 2. *Funkcionalni red* $\sum f_n$*,* $f_n \in Y^X$ *je ravnomerno konvergentan na skupu* X *ako je niz* (s_n) *delimičnih suma reda* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergentan na skupu* X*.*

Označimo za dati red $\sum f_n$ sa

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

ostatak tog reda. Ako red $\sum f_n$ konvergira na X sumi s, tada je $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ za svako $x \in X$. Očigledno je da red $\sum f_n$ ravnomerno konvergira na X sumi s onda i samo onda ako ostatak r_n ravnomerno konvergira nuli na skupu X. Na osnovu posledice teoreme 1., red $\sum f_n$ ravnomerno konvergira na skupu X sumi s onda i samo onda ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \|r_n\| = 0\,. \tag{4}$$

Ako su članovi reda $\sum f_n(x)$ elementi prostora $B(X,Y)$, tada će na osnovu teoreme 1. funkcionalni red ravnomerno konvergirati na X onda i samo onda ako niz $(s_n(x))$ delimičnih suma tog reda konvergira u prostoru $B(X,Y)$. Ako je Y Banahov prostor, a red $\sum f_n$ apsolutno konvergentan u prostoru $B(X,Y)$, tada je on konvergentan u prostoru $B(X,Y)$, odakle na osnovu teoreme 1. sledi ravnomerna konvergencija istog na skupu X. Da obrat ne važi, dokazuje sledeći

Primer 3. Funkcionalni red $\sum(-1)^{n-1}x/(n+x)$ ravnomerno konvergira na svakom konačnom segmentu $[0,a]$, što neposredno sledi iz nejednakosti

$$\|r_n\| \le \frac{x}{n+x} \le \frac{a}{n} < \varepsilon$$

koja važi za svako $n \ge n_\varepsilon = [a/\varepsilon]+1$. Red $\sum \|f_n\|$ međutim divergira, jer je

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,a]} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{a}{a+n}\,,$$

a red $\sum \frac{a}{a+n}$ je divergentan.

Teorema 5. *Neka su članovi funkcionalnog reda* $\sum f_n$ *elementi prostora* Y^X, *gde je* Y *normiran vektorski prostor. Ako red* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergira na skupu* X, *onda niz* (f_n) *ravnomerno konvergira nuli na* X.

Dokaz. Neka je red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na skupu X. Tada niz (s_n) delimičnih suma tog reda ravnomerno konvergira sumi s na X. Stoga za $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|s_n - s\| \leq \varepsilon/2$ za svako $x \in X$ i svako $n \geq n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. No onda je

$$\|f_n(x)\| = \|s_n(x) - s_{n-1}(x)\| \leq \|s_n(x) - s(x)\| + \|s(x) - s_{n-1}(x)\| \leq \varepsilon$$

za svako $x \in X$ i svako $n \geq n_\varepsilon$. ■

Primer 4. Red $\sum x^n$ na osnovu ove teoreme nije ravnomerno konvergentan na skupu $[0,1)$, jer prema primeru 2. niz $f_n(x) = x^n$ nije ravnomerno konvergentan nuli na skupu $[0,1)$.

Teorema 6. (Koši) *Neka su članovi funkcionalnog reda* $\sum f_n$ *elementi prostora* $B(X,Y)$, *gde je* Y *Banahov prostor. Da bi red* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergirao na* X, *potrebno je i dovoljno da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\| < \varepsilon \tag{5}$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ *i svako* $p \in \mathbb{N}$.

Dokaz teoreme neposredno sledi iz definicije ravnomerne konvergencije funkcionalnih redova i teoreme 2.

Na kraju ovog odeljka napomenimo da za funkcionalne redove važe stavovi analogni stavovima 3. i 4. koje smo dokazali za nizove. Dokaze ovih tvrđenja prepuštamo čitaocu za vežbu.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da funkcionalni niz $f_n(x) = (x^2 + nx + n^2)/(x^2 + n^2)$ ravnomerno konvergira na skupu $[0,1]$. Da li je on ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$?

2. Dokazati da je niz

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \leq n \\ 1, & \text{ako je } x > n \end{cases}$$

ravnomerno konvergentan na svakom ograničenom skupu $B \subset \mathbb{R}$, ali da nije ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$.

3. Dokazati da niz $f_n : x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + \frac{1}{n^4})^{1/2}$ ravnomerno konvergira funkciji $f : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$ na $\mathbb{R}^2$.

4. Dokazati da niz $f_n(x) = nx(1-x)$ ravnomerno konvergira na skupu $[0, a]$, $0 < a < 1$, a da na $[0, 1]$ nije ravnomerno konvergentan.

5. Dokazati da red $\sum(-1)^{n-1}/(n+x)$ ravnomerno konvergira na skupu $[0, +\infty)$.

6. Dokazati da je red $\sum e^{-nx}$ ravnomerno konvergentan na skupu $[a, +\infty)$ za svako $a > 0$, ali da nije ravnomerno konvergentan na $(0, +\infty)$.

7. Dokazati da red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+n} \\ \frac{(-1)^{n-1}\sin^2(x_1+x_2+x_3)}{n} \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}^3$.

8. Neka je $f_n : D \mapsto \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^m$ funkcionalan niz, $f_n = (f_{1n}, \dots, f_{pn})$, $n \in \mathbb{N}$, a $f = (f_1, \dots, f_p)$ preslikavanje D u $\mathbb{R}^p$. Dokazati da

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow (\forall j \in \overline{1,p}) f_{jk} \overset{D}{\rightrightarrows} f_j .$$

Formulisati i dokazati analogno tvrđenje za redove.

2.3. KRITERIJUMI ZA RAVNOMERNU KONVERGENCIJU FUNKCIONALNIH REDOVA

Najjednostaniji kriterijum za ispitivanje ravnomerne konvergencije funkcionalnih redova je Vajerštrasov kriterijumu, a zasnovan je na ideji upoređivanja članova funkcionalnog reda sa članovima brojnog reda. Preciznije, važi

Teorema 1. (Vajerštrasov kriterijum) *Neka su članovi funkcionalnog reda $\sum f_n$ elementi prostora Y^X, gde je Y Banahov prostor. Neka je brojni red $\sum a_n$ sa nenegativnim članovima konvergentan. Ako je $\|f_n(x)\| \leq a_n$ za svako $x \in X$ i svako $n \in \mathbb{N}$, tada je funkcionalni red $\sum f_n$ ravnomerno i apsolutno konvergentan na X, pri čemu je za svako $x \in X$*

$$\| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . \tag{1}$$

Dokaz. Kako je $\|f_n(x)\| \le a_n$ za svako $x \in X$, to je

$$\|f_n\| = \sup\{\|f_n(x)\| : x \in X\} \le a_n \tag{2}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, pa su članovi reda $\sum f_n$ u Banahovom prostoru $B(X, Y)$ ograničeni članovima konvergentnog brojnog reda. Stoga je na osnovu teoreme 2., 1.5. red $\sum f_n$ apsolutno konvergentan u prostoru $B(X, Y)$. Na osnovu teoreme 1. 1.5. red $\sum f_n$ je konvergentan u prostoru $B(X, Y)$, pa je stoga i ravnomerno konvergentan na X na osnovu teoreme koja je analogna teoremi 1., 2.2. Kako je $\|f_n(x)\| \le a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in X$, red $\sum f_n$ je na osnovu teoreme 2., 1.4.1. apsolutno konvergentan na X. Osim toga je

$$\|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\| \le \sum_{n=1}^{k} \|f_n(x)\| \le \sum_{n=1}^{k} a_n$$

za svako $x \in X$ i svako $k \in \mathbb{N}$, odakle prelaskom na graničnu vrednost kada $k \to +\infty$ dobijamo (1). ■

Vajerštrasov kriterijum daje samo dovoljne uslove za ravnomernu konvergenciju funkcionalnih redova. Zaista, red $\sum(-1)^{n-1}/n$ posmatran kao funkcionalni red, ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}$. Međutim, svaki brojni red $\sum a_n$ čiji članovi zadovoljavaju (1) je divergentan. Navedeni primer pokazuje da se Vajerštrasovim kriterijumom ne može utvrditi ravnomerna konvergencija svakog funkcionalnog reda. Navedimo zato još nekoliko kriterijuma za ispitivanje ravnomerne konvergencije funkcionalnih redova.

Teorema 2. (Abelov kriterijum) *Neka je (a_n) niz realnih funkcija definisanih na skupu X, a (b_n) neka je niz funkcija definisanih na skupu X sa vrednostima u Banahovom prostoru Y. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

(i) niz (a_n) je monoton i ograničen na X,

(ii) red $\sum b_n$ je ravnomerno konvergentan na X,

tada je red $\sum a_n b_n$ ravnomerno konvergentan na X.

Dokaz. Niz (a_n) je ograničen, pa postoji $L > 0$ tako da je $|a_n(x)| \le L$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je red $\sum b_n$

ravnomerno konvergentan na X, prema Košijevoj teoremi postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}\| < \frac{\varepsilon}{3L}$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $p \in \mathbb{N}$. Sada je na osnovu Abelove leme

$$\|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3L}(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq \varepsilon$$

za svako $x \in X$, svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $p \in \mathbb{N}$, pa je na osnovu Košijeve teoreme red $\sum a_n b_n$ ravnomerno konvergentan na X. ■

Teorema 3. (Dirihleov kriterijum) *Neka je (a_n) niz realnih funkcija koje su definisane na skupu X, a (b_n) niz funkcija koje su definisane na skupu X sa vrednostima u Banahovom prostoru Y. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(i) niz (a_n) je monoton i ravnomerno konvergira nuli na skupu X,

(ii) delimične sume reda $\sum b_n$ su ograničene na X,

onda je red $\sum a_n b_n$ ravnomerno konvergentan na X.

Dokaz. Delimične sume reda su ograničene na X, pa postoji $L > 0$ tako da je $\| \sum_1^n b_k(x)\| \leq L$ za svako $x \in X$ i svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\| \leq \|\sum_{k=1}^{n+p} b_k(x)\| + \|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\| \leq 2L$$

za svako $x \in X$ i svako $n, p \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je niz (a_n) ravnomerno konvergentan na X, postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|a_n(x)\| < \varepsilon/6L$ za svako $x \in X$ i svako $n \geq n_\varepsilon$. Stoga je

$$\|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\| \leq 2L(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

za svako $x \in X$, svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $p \in \mathbb{N}$, što dokazuje ravnomernu konvergenciju reda $\sum a_n b_n$ na skupu X. ■

Primer 1. Ispitajmo ravnomernu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx \cos x/n}{\ln \ln n} .$$

Na svakom segmentu koji ne sadrži tačke $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, red

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$$

je ravnomerno konvergentan na osnovu Dirišleovog kriterijuma, jer je niz $a_n = 1/\ln \ln n$ monoton i ravnomerno konvergira nuli, a delimične sume reda $\sum \sin nx$ su ograničene:

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{|\sin x/2|} ,$$

jer je $\sin x/2 \neq 0$. Niz $(\cos x/n)$ je ograničen i monotono raste počev od nekog prirodnog broja za svako x iz zatvorenog intervala koji ne sadrži pomenute tačke. Stoga je zadani red na osnovu Abelovog kriterijuma ravnomerno konvergentan na svakom zatvorenom intervalu koji ne sadrži tačke $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Zadaci za vežbanje

1. Koristeći Vajerštrasov kriterijum, dokazati ravnomernu konvergenciju sledećih redova na ukazanim skupovima:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} , \ 0 \leq x < +\infty ,$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} , \ -1 \leq x \leq 1 ,$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n - x^{-n}) , \ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 ,$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n|x|} \sin(x^2\sqrt{n}) , \ x \in \mathbb{R} ,$

$e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3x^2} , \ x \in \mathbb{R} ,$ $\qquad$ $f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{[n/2]!} , \ |x| < a .$

2. Dokazati da su sledeći redovi ravnomerno konvergentni na $\mathbb{R}$, ali da se za ispitivanje ravnomerne konvergencije istih ne može koristiti Vajerštrasov kriterijum

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}, \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-n(x+n)^2}.$$

3. Dokazati da su sledeći redovi ravnomerno konvergentni na ukazanim skupovima

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x \sin x}{n+x^2}, \ x \in \mathbb{R}, \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx \operatorname{arctg} nx}{n}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} \operatorname{arctg} nx, \ x \in \mathbb{R}, \qquad d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \ 0 \le x \le +\infty.$$

4. Dokazati da je red $\sum \sin nx/n$ ravnomerno konvergentan na svakom zatvorenom skupu koji na sadrži elemente skupa $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, dok na segmentima koji sadrže takve tačke red konvergira, ali ne ravnomerno.

5. Dokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$$

ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$, ali da red sastavljen od apsolutnih vrednosti njegovih članova nije ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$.

6. Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, dokazati da je Dirihleov red $\sum a_n/n^x$ ravnomerno konvergentan na $[0, +\infty)$.

7. Dat je red $\sum f_n$,

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin nx}{n} \begin{pmatrix} \frac{\cos x \sin nx}{n} & -\frac{\cos nx}{\sqrt{2(n^2+1)}} \\ \frac{\cos nx}{\sqrt{2(n^2+1)}} & \frac{sinx \sin nx}{n} \end{pmatrix},$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Dokazati da je taj red ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$. Takođe dokazati da je taj red apsolutno konvergentan u prostoru $\mathfrak{M}^{\mathbb{R}}$, gde je $\mathfrak{M}$ prostor matrica sa normom Frobenijusa.

2.4. FUNKCIONALNA SVOJSTVA FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

U narednim odeljcima izučavaćemo funkcionalna svojstva funkcionalnih nizova i redova. Obzirom na ukazanu ekvivalentnost problema koja se javlja kod funkcionalmih nizova i redova, mi ćemo dokaze tvrđenja izvoditi isključivo za funkcionalne redove, dok ćemo za nizove samo navesti formulacije tvrđnja. U izučavanju funkcionalnih svojstava funkcionalnih nizova i redova pojam ravnomerne konvergencije je od suštinskog značaja.

2.4.1. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

Teorema 1. *Neka su članovi funkcionalnog reda* $\sum f_n$ *elementi prostora* $B(X, Y)$, *gde je* X *normiran vektorski prostor, a* Y *Banahov prostor, i neka je red* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergentan na skupu* $E \subset X$. *Ako je* x_0 *tačka nagomilavanja skupa* E *i ako za svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$, *onda je red* $\sum a_n$ *konvergentan i važi jednakost*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x). \tag{1}$$

Dokaz. Dokažimo najpre da je red $\sum a_n$ konvergentan. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na skupu E, to prema Košijevoj teoremi postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $x \in E$ i svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \| < \varepsilon$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Prelaskom na graničnu vrednost u ovoj nejednakosti kada $x \to x_0$, a zbog neprekidnosti norme, dobijamo da je

$$\| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \| \leq \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$. Niz delimičnih suma reda $\sum a_n$ je dakle Košijev, pa kako je Y Banahov prostor, on je konvergentan. Označimo njegovu sumu sa A, n-tu delimičnu sumu sa A_n, a ostatak sa α_n. Tada je $A = A_n + \alpha_n$. Neka je $s(x)$ suma, $s_n(x)$ n-ta delimična suma, a $r_n(x)$ ostatak funkcionalnog reda $\sum f_n$. Red $\sum f_n$ je konvergentan, pa je $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$. Tada je

$$\|s(x) - A\| \leq \|s_n(x) - A_n\| + \|r_n(x)\| + \|\alpha_n\|.$$

Kako je red $\sum a_n$ konvergentan, ostatak α_n teži nuli kada $n \to +\infty$, pa postoji $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|\alpha_n\| < \varepsilon/3$ za svako $n \geq n'_\varepsilon$. Red $\sum f_n$ ravnomerno konvergira na skupu E, pa postoji $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|r_n(x)\| < \varepsilon/3$ za svako $x \in E$ i svako $n \geq n''_\varepsilon$. Za $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ važe obe prethodno date ocene. Za tako odabranu vrednost n je $\lim_{x\to x_0} s_n(x) = A_n$, pa postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E$ važi

$$\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|s_n(x) - A_n\| < \varepsilon/3.$$

Stoga je $\|s(x) - A\| < \varepsilon$ za svako $x \in E$ za koje je $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$, što dokazuje da je $\lim_{x\to x_0} s(x) = A$. ■

Uslov ravnomerne konvergencije u prethodnoj teoremi je od suštinske važnosti i bez tog uslova teorema u opštem slučaju ne važi, što pokazuje

Primer 1. Funkcionalni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

je konvergentan na $\mathbb{R}$ sumi

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \end{cases}.$$

Kako je $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$, to je $\sum \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$. Međutim, $\lim \sum_0^{+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0} s(x) = 1$, pa jednakost (1) ne važi. Da dati red ne konvergira ravnomerno na $\mathbb{R}$, neposredno sledi iz činjenice da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |r_n(x)| = 1.$$

Uslov ravnomerne konvergencije nije neophodan za prethodno dokazanu teoremu, što pokazuje sledeći

Primer 2. Neka je funkcionalni red $\sum f_n$ definisan nizom

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

delimičnih suma. Očigledno je

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} s_n(x) = 0\,,$$

a red $\sum f_n$ nije ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$, jer je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x)| = 1/2\,.$$

Koristeći napomenu datu na početku ove glave o međusobnoj povezanosti nizova i redova, sada možemo za funkcionalne nizove iskazati teoremu koja je analogna teoremi 1. .

Teorema 1'. *Neka su članovi niza* (f_n) *elementi prostora* $B(X,Y)$, *gde je* X *normiran vektorski prostor, a* Y *Banahov prostor i neka je* x_0 *tačka nagomilavanja skupa* $E \subset X$. *Ako je niz* (f_n) *ravnomerno konvergentan na skupu* E *i ako za svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $\lim_{x\to x_o} f_n(x) = a_n$, *tada postoji* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *i važi jednakost*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Očigledno je da ova teorema pretstavlja još jedan oblik teoreme o jednakosti ponovljenih graničnih vrednosti.

2.4.2. NEPREKIDNOST FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

Teorema 1. *Neka su članovi funkcionalnog reda* $\sum f_n$ *elementi prostora* $C(X,Y)$, *gde su* X *i* Y *normirani vektorski prostori. Ako je red* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergentan na skupu* X, *onda je suma tog reda* $s(x) \in C(X,Y)$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Red $\sum f_n$ ravnomerno konvergira na skupu X sumi $s(x)$, pa ostatak $r_n(x)$ tog reda ravnomerno konvergira nuli na skupu X. Stoga postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|r_n(x)\| \le \varepsilon/3$ za svako $x \in X$ i svako $n \ge n_\varepsilon$. No onda je $\|r_n(x_0)\| \le \varepsilon/3$ za svako $n \ge n_\varepsilon$. Za fiksirano $n \ge n_\varepsilon$ $s_n(x) \in C(X,Y)$, pa za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in X$

$$\|x - x_0\| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow \|s_n(x) - s_n(x_0)\| < \varepsilon/3\,.$$

Sada je

$$\|s(x) - s(x_0)\| \le \|s_n(x) - s_n(x_0)\| + \|r_n(x)\| + \|r_n(x_0)\| < \varepsilon$$

za svako $x \in X$ za koje je $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$. Ovim smo dokazali, s obzirom na proizvoljnost izbora tačke $x_0 \in X$, da je $s(x) \in C(X,Y)$. ■

Primetimo da je i u ovom slučaju ravnomerna konvergencija samo dovoljan uslov koji se u opštem slučaju ne može izostaviti, što pokazuju primeri iz prethodnog odeljka.

Ako su članovi funkcionalnog reda $\sum f_n$ ravnomerno neprekidne funkcije, a red ravnomerno konvergentan, onda je suma tog reda ravnomerno neprekidna funkcija. Dokaz ove činjenice prepuštamo čitaocu.

Primer 1. Funkcionalni red $\sum_0^{+\infty} x^n$ je konvergentan na skupu $[0,1)$ funkciji $1/(1-x)$, ali ne ravnomerno. Č lanovi tog reda su ravnomerno neprekidne funkcije, dok suma tog reda nije ravnomerno neprekidna na skupu $[0,1)$.

Iz primera 2. prethodnog odeljka vidimo da obrat teoreme 1. ne važi. Međutim, pod određenim uslovima važi i obratno tvrđenje, što iskazuje

Teorema 2. (Dini*) *Neka su članovi funkcionalnog reda $\sum f_n$ elementi prostora $C(X,\mathbb{R})$, pri čemu je X kompaktan skup. Ako su članovi reda $\sum f_n$ nenegativne funkcije, a suma $s(x) \in C(X,R)$, onda je red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na skupu X.*

Dokaz. Primetimo najpre da je ostatak reda $r_n \in C(X,\mathbb{R})$ kao razlika neprekidnih funkcija $s(x)$ i $s_n(x)$. Niz $(r_n(x))$ je monotono nerastući

---

* Dini U. (1845-1918)-italijanski matematičar

za svako $x \in X$, jer su funkcije f_n nenegativne na X. Red $\sum f_n$ je konvergentan, pa je $\lim_n r_n(x) = 0$ za svako $x \in X$. Dokažimo da $r_n \rightrightarrows 0$ na X kada $n \to +\infty$.

Pretpostavimo suprotno. U tom slučaju postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ tako da je $r_n(x_n) \geq \varepsilon_0$. X je kompaktan skup, pa niz (x_n) sadrži bar jedan konvergentan podniz (x_{n_k}) koji konvergira ka tački $x_0 \in X$.

Kako su funkcije r_m neprekidne, to je

$$\lim_{k \to +\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0)$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Niz $r_m(x)$ je monotono nerastući za svako $x \in X$. Osim toga, za svako $m \in \mathbb{N}$ postoji dovoljno veliko k tako da je $n_k > m$, pa je

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0\,.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u ovoj nejednakosti kada $k \to +\infty$ vidimo da je

$$\lim_{k \to +\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0) \geq \varepsilon_0$$

za svako $m \in \mathbb{N}$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $\lim r_m(x) = 0$ za svako $x \in X$. ■

Pretpostavka o kompaktnosti u prethodnoj teoremi ne može se izostaviti što se vidi iz sledećeg primera.

Primer 2. Red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx} \right]$$

je konvergentan na skupu $(0,1)$ neprekidnoj funkciji $s(x) = 1$, ali ne ravnomerno, jer je $\lim_n \sup_x |r_n(x)| = 1$.

Teorema 1'. *Neka su članovi funkcionalnog niza (f_n) elementi prostora $C(X,Y)$, gde su X i Y normirani vektorski prostori. Ako je niz (f_n) ravnomerno konvergentan na prostoru X, tada je $\lim f_n \in C(X,Y)$.*

Teorema 2'. *Neka su članovi funkcionalnog niza* (f_n) *elementi prostora* $C(X,\mathbb{R})$, *gde je* X *kompaktan skup. Ako je* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *i svako* $x \in X$, *i ako* $f_n \to f \in C(X,\mathbb{R})$, *onda niz* (f_n) *ravnomerno konvergira funkciji* f *na prostoru* X.

Kao neposrednu posledicu teoreme 1. imamo sledeću važnu teoremu.

Teorema 3. *Prostor neprekidnih i ograničenih funkcija* $BC(X,Y)$, *gde je* Y *Banahov prostor, je kompletan.*

Dokaz. Kako je $B(X,Y)$ Banahov prostor, dovoljno je dokazati da je $BC(X,Y)$ zatvoren u $B(X,Y)$. Neka je (f_n) Košijev niz u prostoru $BC(X,Y)$. Kako je $BC(X,Y) \subset B(X,Y)$, a $B(X,Y)$ je Banahov prostor, niz (f_n) je konvergentan ka nekoj funkciji $f \in B(X,Y)$. U prostoru $B(X,Y)$ konvergencija je na osnovu teoreme 1'., 2.2. ravnomerna konvergencija, pa je stoga funkcija $f \in BC(X,Y)$ prema teoremi 1., 2.4.2. ■

2.4.3. INTEGRABILNOST FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

U narednom izlaganju razmatramo integrabilnost funkcionalnih nizova i redova, imajući u vidu da je Rimanov integral poznat iz kursa analize realnih funkcija jedne promenljive. Sa $\mathcal{R}[a,b]$ označavaćemo skup svih realnih funkcija jedne promenljive integrabilnih na segmentu $[a,b]$.

Teorema 1. *Neka su funkcije* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *integrabilne na segmentu* $[a,b]$. *Ako je red* $\sum f_n$ *ravnomerno konvergentan na* $[a,b]$ *sumi* s, *tada je za svako* $c \in [a,b]$ *red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_c^x f_n(t)dt \tag{1}$$

ravnomerno konvergentan na $[a,b]$, $s \in \mathcal{R}[a,b]$ *i važi*

$$\int_c^x \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right\} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_c^x f_n(t)dt\,. \tag{2}$$

Dokaz. Dokažimo najpre da je $s \in \mathcal{R}[a,b]$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je funkcionalni red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na segmentu $[a,b]$, postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $x \in [a,b]$ i svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$s_n(x) - \varepsilon/2 < s(x) < s_n(x) + \varepsilon/2 \,. \tag{3}$$

Kao integrabilna, funkcija s_n je ograničena na $[a,b]$, pa je takva i na svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}] \subset [a,b]$. Označimo sa m_i odn. M_i infimum odn. supremum funkcije s_n na $[x_i, x_{i+1}]$. Tada iz (3) dobijamo da je

$$m_i - \varepsilon/2 < s(x) < M_i + \varepsilon/2 \tag{4}$$

za svako $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Ako sa ω_i označimo varijaciju funkcije $s_n(x)$, a sa Ω_i varijaciju funkcije $s(x)$ na $[x_i, x_{i+1}]$, onda iz (4) sledi da je $\Omega_i < \omega_i + \varepsilon$. Ako je $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_m \equiv b$ razbijanje segmenta $[a,b]$, tada iz poslednje nejednakosti dobijamo sledeću nejednakost

$$\sum_i \Omega_i \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i \Delta x_i + (b-a)\varepsilon \,.$$

Kako je funkcija $s_n(x)$ integrabilna na $[a,b]$, suma $\sum \omega_i \Delta x_i$ može se učiniti proizvoljno malom ako je dijametar $\lambda = \max |\Delta x_i|$ posmatranog razbijanja dovoljno mali. No onda je

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_i \Omega_i \Delta x_i = 0 \,,$$

što dokazuje integrabilnost funkcije s na $[a,b]$.

Dokažimo sada da je red (1) ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ ka funkciji

$$\sigma(x) = \int_c^x s(t)dt \,.$$

Označimo sa $r_n(x)$ ostatak reda $\sum f_n$. Tada je $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$. Kako je red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na $[a,b]$, ostatak $r_n(x)$ ravnomerno konvergira nuli na $[a,b]$, pa za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sup_{x \in [a,b]} |r_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$. Tada je

$$\left|\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x f_k(t)dt\right| = \left|\int_c^x s(t)dt - \int_c^x \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right\} dt\right| =$$
$$= \left|\int_c^x [s(t) - s_n(t)]dt\right| \leq \left|\int_c^x |r_n(t)|dt\right| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |r_n(t)| \left|\int_c^x dt\right| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |r_n(t)| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in [a,b]$. Time smo dokazali ne samo da je red (1) ravnomerno konvergentan na $[a,b]$, već i jednakost (2). ■

Preformulisana za nizove, ova teorema glasi:

Teorema 1'. *Neka su funkcije $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne na segmentu $[a,b]$. Ako je funkcionalni niz (f_n) ravnomerno konvergentan funkciji f na segmentu $[a,b]$, tada je granična funkcija f integrabilna na $[a,b]$, funkcionalni niz $(\int_c^x f_n(t)dt)$ je ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ za svako $c \in [a,b]$ i važi jednakost*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))dt\,. \tag{4}$$

Napomenimo da se pretpostavka o ravnomernoj konvergenciji u prethodne dve teoreme u opštem slučaju ne može izostaviti, što pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcionalni niz $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ konvergira na segmentu $[0,1]$ funkciji $f(x) = 0$, ali ne ravnomerno. Pri tome je

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1\,, \qquad \int_0^1 f(x)dx = 0\,,$$

pa (4) ne važi.

Međutim, funkcionalni niz $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$ konvergira na segmentu $[0,1]$ neravnomerno funkciji $f(x) = 0$, a jednakost (4) važi, što dokazuje da ravnomerna konvergencija nije neophodan uslov da važe teoreme 1. i 1'. Š taviše, neravnomerno konvergentan niz integrabilnih funkcija može imati integrabilnu graničnu funkciju, što pokazuje sledeći

Primer 2. Neka je $f_n(x) = 1$ ako se x može izraziti u obliku neskrativog razlomka m/n, a $f_n(x) = 0$ u ostalim tačkama. Kako funkcija f_n ima samo konačno mnogo tačaka prekida na $[0,1]$, ona je integrabilna na $[0,1]$. Sam niz konvergira na $[0,1]$ ka Dirišleovoj funkciji $\chi(x)$ koja nije integrabilna na $[0,1]$.

Pokažimo na sledećem primeru kako se integracija redova može iskoristiti za određivanje razvoja nekih funkcija u red.

Primer 3. Dokažimo da je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\,, \quad x \in (0,1]\,. \tag{5}$$

Za $|t| < 1$ važi razvoj

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n t^n\,, \tag{6}$$

pri čemu red (6) ravnomerno konvergira na segmentu $[-r, r]$, $0 < r < 1$. Integracijom reda (6) na $[0, x]$, $x > 0$, primenom teoreme 1. dobijamo jednakost

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n dt\,,$$

odakle sledi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Logaritamska funkcija je neprekidna, pa je $\lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2$. Red $\sum_1^\infty (-1)_{n+1} x^n/n$ je prema Lajbnicovom kriterijumu konvergentan za $x = 1$, pa je ravnomerno konvergentan na $[0,1]$. Stoga razvoj (5) važi i za $x = 1$, pri čemu je na osnovu teoreme 1., 2.4.1.

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2\,.$$

2.4.4. DIFERENCIJABILNOST FUNKCIONALNIH NIZOVA I REDOVA

I u ovom odeljku ćemo se ograničiti na razmatranje realnih funkcija jedne promenljive, ne samo zbog jednostavnijeg pisanja, već i zbog povezanosti sa prethodnim odeljkom u kome smo razmatrali isključivo realne funkcije jedne promenljive.

Teorema 1. *Neka su funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidno diferencijabilne na segmentu $[a,b]$ i neka je red $\sum f_n'$ ravnomerno konvergentan na segmentu $[a,b]$. Ako je red $\sum f_n$ konvergentan bar u jednoj tački $c \in [a,b]$, tada je on ravnomerno konvergentan na segmentu $[a,b]$, suma $s(x)$ reda $\sum f_n$ je neprekidno diferencijabilna funkcija na $[a,b]$ i važi jednakost*

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{df_n(x)}{dx}\,. \tag{1}$$

Dokaz. Označimo sumu reda $\sum f_n'$ sa $\sigma(x)$. Funkcija $\sigma(x)$ je prema teoremi 1., 2.4.2. je neprekidna, pa je i integrabilna na $[a,b]$. Kako je red $\sum f_n'$ ravnomerno konvergentan na $[a,b]$, on se prema teoremi 1., 2.4.3. može integrirati član po član i važi jednakost

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_c^x f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}[f_n(x) - f_n(c)]\,, \tag{2}$$

pri čemu su redovi u poslednjoj jednakosti ravnomerno konvergentni na $[a,b]$. Red $\sum f_n(c)$ je ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ kao brojni red, pa kako je red $\sum[f_n(x) - f_n(c)]$ ravnomerno konvergentan, to je na osnovu stava 3., 2.2. red $\sum f_n$ ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ i njegova suma $s(x)$ je prema teoremi 1., 2.4.2. neprekidna funkcija na $[a,b]$. Sada jednakost (2) možemo napisati u obliku

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c) = s(x) - s(c)\,.$$

Funkcija σ je neprekidna na $[a,b]$, pa je $\int_c^x \sigma(t)dt$ kao funkcija gornje granice diferencijabilna na $[a,b]$ i važi $\sigma(x) = s'(x)$. Ovim je dokazana ne samo neprekidna diferencijabilnost funkcije $s(x)$ na segmentu $[a, b]$, već i jednakost (1). ■

Dokazano tvrđenje pri istim uslovima važi za niz, odn. red funkcija $f_n : X \mapsto \mathbb{R}$ koje su definisane na konveksnom ograničenom podskupu normiranog vektorskog prostora. Dokaz je naravno nešto drugačiji.

U preformulisanom obliku za nizove, dokazana teorema glasi:

Teorema 1'. *Neka su članovi funkcionalnog niza (f_n) neprekidno diferencijabilne funkcije na segmentu $[a, b]$ i neka je niz (f'_n) ravnomerno konvergentan na njemu. Ako je niz (f_n) konvergentan bar u jednoj tački $c \in [a, b]$, onda je on ravnomerno konvergentan na segmentu $[a, b]$, granična funkcija f je neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$ i važi jednakost*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)\,.$$

Sledeći primer pokazuje da je uslov ravnomerne konvergencije u teoremama 1. i 1'. od suštinsko značaja i da se ne može izostaviti, ali da nije neophodan.

Primer 1. Red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2})$$

je konvergentan na $\mathbb{R}$ i njegova suma je funkcija jednaka 1 za $x \neq 0$, dok je za $x = 0$ suma jednaka nuli. Izvodni red je konvergentan, ali ne ravnomerno. Suma samog reda nije diferencijabilna u tački $x = 0$, jer ima prekid u toj tački.

Sa druge strane, red

$$\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \sum_{n=2}^{+\infty}\Big[\frac{1}{2n}\ln(1 + n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln(1 + (n-1)^2x^2)\Big]$$

je konvergentan, ali ne ravnomerno na $[0, 1]$. Međutim, suma tog reda je diferencijabilna funkcija na $[0, 1]$ (vid. primere 1., 2.4.3. i 2., 2. 4.1.).

Na kraju ovog odeljka navedimo primer funkcije koja je neprekidna u svim tačkama realne prave, ali nije diferencijabilna ni u jednoj tački, koji najlepše ilustruje primeni svojstava funkcionalnih redova. Primer pripada Van der Verdenu, a zasnovan na ideji Vajerštrasa koji je prvi konstruisao funkciju neprekidnu na $\mathbb{R}$ koja nije diferencijabilna ni u jednoj tački realne prave.

Primer 2. Posmatrajmo funkciju

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & \text{ako je } 1 \le x \le 2 \end{cases},$$

i dodefinišimo je na $\mathbb{R}$ tako da je $g(x) = g(x+2)$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Očigledno je ovako dodefinisana funkcija neprekidna na $\mathbb{R}$. Definišimo funkciju

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)\,.$$

Kako je $0 \le g(x) \le 1$ za svako $x \in \mathbb{R}$, a red $\sum (3/4)^n$ je konvergentan, to je red $\sum (3/4)^n g(4^n x)$ ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$. Njegovi članovi su neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$, pa je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$ na osnovu teoreme 1., 2.4.2.

Dokažimo da ona nije diferencijabilna ni u jednoj tački realne prave. Neka je $x \in \mathbb{R}$, a $m \in \mathbb{N}$. Tada postoji $k \in \mathbb{Z}$ tako da je

$$k \le 4^m x \le k + 1\,.$$

Definišimo nizove $\alpha_m = 4^{-m}k$, $\beta_m = 4^{-m}(k+1)$, $m \in \mathbb{N}$ i posmatrajmo brojeve $4^n \beta_m$ i $4^n \alpha_m$. Ako je $n > m$, njihova razlika je ceo paran broj; ako je $n = m$ oba broja su cela, a njihova razlika je 1; za $n < m$ između njih nema celih brojeva. Stoga je

$$|g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)| = \begin{cases} 0, & n > m \\ 4^{n-m}, & n \le m \end{cases}.$$

Kako je

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n [g(4^n \beta_m) - g(4^n \alpha_m)]\,,$$

to je

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} >$$
$$> \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^m + \frac{1}{2}\frac{1}{4^m} > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m .$$

Kako je $\beta_m - \alpha_m = 4^{-m}$, to je

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| > \frac{3^m}{2} .$$

Kako je $\alpha_m \leq x \leq \beta_m$ i $\beta_m - \alpha_m \to 0$ kada $m \to +\infty$, to je

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = f'(x) ,$$

pa zbog prethodne nejednakosti sledi da funkcija f nije diferencijabilna u tački x. Tačka $x \in \mathbb{R}$ je međutim proizvoljna, pa smo time dokazali da funkcija nije diferencijabilna ni u jednoj tački realne prave.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je

$$a)\ \lim_{x\to1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\ln 2 , \qquad b)\ \lim_{x\to1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \ln 2 ,$$

$$c)\ \lim_{x\to1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\ln 2 , \qquad d)\ \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} .$$

2. Naći sledeće granične vrednosti:

$$a)\ \lim_{x\to1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1}) , \qquad b)\ \lim_{x\to0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x} .$$

3. Neka je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je beskonačan proizvod $\prod(1 + a_n)$ konvergentan. Naći

$$\lim_{x\to1^-} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n x^n) .$$

4. Dokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x[n(n+1)x^2-1]}{(1+n^2x^2)[1+(n+1)^2x^2]}$$

neravnomerno konvergentan na segmentu $[-1,1]$, a da je njegova suma neprekidna funkcija na istom.

5. Dokazati da je funkcionalni niz $f_n(x) = n(1-x^{1/n})$ ravnomerno konvergentan funkciji $f(x) = \ln(1/x)$ na svakom segmentu koji je sadržan u intervalu $(0,1)$. (Uputstvo: primeniti Dinijevu teoremu)

6. Data je funkcija

$$f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1+e^{nx}) .$$

Odrediti skup X tačaka konvergencije funkcije f i dokazati da je $f \in \mathcal{C}(X)$.

7. Da li važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} x^n) dx$$

i može li se ona utvrditi na osnovu teoreme 1'., 2.4.3.?

8. Neka je (f_n) niz neprekidnih funkcija koji ravnomerno konvergira na skupu X ka funkciji f. Dokazati da je $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$ za svaki niz tačaka $x_n \in X$ koji konvergira ka $x \in X$. Da li važi obrat?

9. Da li se red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x^{1/(2n+1)} - x^{1/(2n-1)})$$

može integraliti član po član?

10. Data je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R} ,$$

gde (x) označava decimalni deo broja x. Naći sve tačke prekida funkcije f i pokazati da je skup tačaka prekida prebrojiv, svuda gust skup u $\mathbb{R}$. Dokazati da je funkcija f integrabilna na svakom ograničenom segmentu realne prave.

11. Dokazati da je sa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x) ,$$

gde je $0 < b < 1$ i a neparan prirodan broj takav da je $ab > 1 + \pi/2$, definisana funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ koja je neprekidna, ali nije nigde diferencijabilna na $\mathbb{R}$.

12. Neka je $f_n(x)$ rastojanje od x do najbližeg broja koji ima reprezentaciju $m/10^n$. Dokazati da je sa $f(x) = \sum f_n(x)$ definisana funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ koja je svuda neprekidna, a nigde nije diferencijabilna.

13. Koji se od sledećih redova može diferencirati član po član

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}, \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\ ?$$

14. Dokazati da za svako $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, važe sledeća razlaganja:

$$a) \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right),$$

$$b) \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right).$$

(Uputstvo: iskoristiti prikaz funkcije $\sin x$ u obliku beskonačnog proizvoda koji je dat u zadatku 4., 1.10.)

15. Dokazati da za funkciju $\Gamma(x)$ definisanu u primeru 2., 1.9. važi sledeća formula

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n} \right),$$

gde je C Ojleorova konstanta.

16. Dokazati da funkcija $f(x)$ definisana na segmentu $[0, 1]$ redom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

zadovoljava sledeću funkcionalnu jednakost

$$f(x) + f(1 - x) + \frac{1}{x} \ln(1 - x) - \frac{1}{1 - x} \ln x = const$$

za $0 < x < 1$. Koristeći dobijeni rezultat dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

17. Dokazati da suma svakog od sledećih redova pripada klasi $\mathcal{C}^\infty$ na ukazanom skupu

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x-n)^2}, \quad x\in[0,1] \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\ln^n(x+1), \quad x\in(\frac{1}{e}-1, e-1)\,.$$

18. Neka je X skup tačaka konvergencije proizvoda

$$p(x)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{n^2}{x^{2n}}\right).$$

Dokazati da je funkcija p diferencijabilna na skupu X.

19. Neka je $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Ako $f^{(n)} \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} \varphi$ na svakom intervalu (a,b). Dokazati da je $\varphi(x)=ce^x$, gde je c konstanta.

20. Neka je (f_n) niz preslikavanja normiranog prostora X u normiran prostor Y. Niz (f_n) je **lokalno ravnomerno konvergentan** na skupu X funkciji $f\in Y^X$, ako za svaki element $x\in X$ postoji zatvorena kugla $K[x,r]\subset X$ na kojoj niz (f_n) ravnomerno konvergira funkciji f. Dokazati teoreme 1. i 1'., 2. 4.2. zamenjujući uslov ravnomerne konvergencije uslovom lokalne ravnomerne konvergencije.

21. Za funkcionalni niz (f_n), $f_n\in\mathcal{R}([a,b])$, kažemo da **konvergira na** $[a,b]$ **u srednjem kvadratu** funkciji $f\in\mathcal{R}([a,b])$, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tako da za svako $n\ge n_\varepsilon$ važi $\|f_n-f\|<\varepsilon$, gde je $\|\cdot\|$ norma u $\mathcal{R}([a,b])$ definisana skalarnim proizvodom u $\mathcal{R}([a,b])$. Dokazati da je svaki niz (f_n) iz $\mathcal{R}([a,b])$ koji je ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ konvergentan u srednjem kvadratu na $[a,b]$.

22. Neka je (f_n) niz elemenata prostora $\mathcal{R}([a,b])$. Ako niz (f_n) konvergira u srednjem kvadratu funkciji $f\in\mathcal{R}([a,b])$, dokazati da je tada niz $(\int_c^x f_n(t)dt)$ ravnomerno konvergentan na $[a,b]$ za svako $c\in[a,b]$ i da važi (4) 2. 4.3.

2.5. STEPENI REDOVI

Važna klasa funkcionalnih redova su stepeni redovi. To su redovi oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

gde su z, z_0 i a_n, $n\in\mathbb{N}$, u opštem slučaju kompleksni brojevi. Smenom $z-z_0=\zeta$, stepeni red se najčešće posmatra u jednostavnijem obliku

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \zeta^n. \tag{2}$$

Svi zaključci koji važe za red (1) važe i za red (2) i obratno, pa ćemo u daljem posmatrati stepeni red u obliku (2).

2.5.1. OBLAST KONVERGENCIJE I POLUPREČNIK KONVERGENCIJE STEPENOG REDA

Pri ispitivanju funkcionalnih redova od posebnog je interesa odrediti skup na kome je dati red konvergentan. Stepeni red je funkcionalni red karakterističnog oblika, pa je skup na kome je on konvergentan oblast, što će u daljem izlaganju biti dokazano, a što opravdava sam naziv za skup na kome stepeni red konvergira.

Lema 1. (Abelova lema) *Ako je stepeni red*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

konvergentan za $z = z_0 \neq 0$*, onda je on apsolutno konvergentan za svako* z *za koje je* $|z| < |z_0|$*.*

Dokaz. Red $\sum a_n z_0^n$ je prema pretpostavci konvergentan, pa zato niz $(a_n z_0^n)$ konvergira nuli. Taj niz je dakle ograničen, pa postoji $M > 0$ tako da je $|a_n z_0^n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za opšti član reda (1) važi ocena

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Kako je $|z| < |z_0|$, red $\sum M|z/z_0|^n$ je konvergentan, pa je na osnovu prvog poredbenog kriterijuma za brojne redove i red $\sum |a_n z^n|$ konvergentan. To dokazuje da je red $\sum a_n z^n$ apsolutno konvergentan. ∎

Posledica 1. *Ako je red* (1) *divergentan za* $z = z_0$*, onda je on divergentan za svako* z *za koje je* $|z| > |z_0|$.

Dokaz. Ako bi red (1) bio konvergentan za neko $|z| > |z_0|$, onda bi red $\sum a_n z_0^n$ prema dokazanoj lemi bio konvergentan, suprotno pretpostavci. ■

Definicija 1. *Nenegativan realan broj* R *ili* $+\infty$ *je* ***poluprečnik konvergencije stepenog reda*** (1)*, ako je on konvergentan za svako* z *za koje je* $|z| < R$*, a divergentan za svako* z *za koje je* $|z| > R$*. Skup* $\{z \in \mathcal{C} : |z| < R\}$ *je* ***oblast konvergencije*** *stepenog reda.*

Teorema 1. *Za svaki stepeni red* (1) *postoji poluprečnik konvergencije* R*. U krugu* $\{z \in \mathcal{C} : |z| < R\}$ *red* (1) *je apsolutno konvergentan, a na krugu* $\{z \in \mathcal{C} : |z| \le r < R\}$ *red* (1) *je ravnomerno konvergentan.*

Dokaz. Razbijmo skup realnih brojeva na dve klase. U klasu A neka su sadržani svi nepozitivni realni brojevi i svi pozitivni realni brojevi za koje je stepeni red $\sum a_n x^n$ konvergentan. U klasu B neka su sadržani svi ostali realni brojevi. Ako je skup B neprazan, tada skupovi A i B čine sečenje skupa realnih brojeva. Da to dokažemo, primetimo najpre da su A i B neprazni skupovi čija je unija skup realnih brojeva. Osim toga, ako je $x \in A$, a $y \in B$, tada je $x < y$. Zaista, ako je $x \le 0$, to je očigledno. Neka je $x > 0$. Tada je $x < y$, jer bi u protivnom na osnovu Abelove leme y pripadao skupu A, što je nemoguće zbog konstrukcije skupova A i B. Time smo dokazali da skupovi A i B određuju Dedekindov* presek skupa realnih brojeva. Neka je R realan broj koji određuje to sečenje. On je jednoznačno određen. Ako je B prazan skup, stavimo da je $R = +\infty$ po definiciji. U tom slučaju je R očigledno poluprečnik konvergencije stepenog reda (1). Dokažimo da je R poluprečnik konvergencije stepenog reda (1) u slučaju kada je R konačan broj.

Neka je $z \in \mathcal{C}$ proizvoljan kompleksan broj za koji je $|z| < R$. Tada postoji realan broj r_0 tako da je $|z| < r_0 < R$. Stoga je $r_0 \in A$ prema definiciji broja R, pa je red $\sum a_n z^n$ na osnovu Abelove leme apsolutno konvergentan. Ako je $|z| > R$, tada postoji $r_0 \in \mathbb{R}$ tako da je $|z| > r_0 > R$. Sada je $r_0 \in B$, pa je red $\sum a_n z^n$ divergentan. Time smo dokazali da je R poluprečnik konvergencije stepenog reda (1).

* Dedekind R. (1831-1916)-nemački matematičar

Neka je sada $0 < r < R$ i neka je $|z| \leq r$. Prema Abelovoj lemi, red $\sum |a_n r^n|$ je konvergentan. Kako je $|a_n z^n| \leq |a_n r^n|$, red $\sum a_n z^n$ je ravnomerno konvergentan prema Vajerštrasovom kriterijumu za svako $|z| \leq r < R$. ■

Na osnovu dokazane teoreme zaključujemo da je oblast konvergencije stepenog reda (1) krug poluprečnika R sa središtem u koordinatnom početku. Sam red (1) može, ali u opštem slučaju ne mora biti konvergentan na rubu oblasti konvergencije. Ako stepeni red (1) konvergira u nekoj tački kruga ζ kruga $|z| = R$, gde je R poluprečnik konvergencije stepenog reda (1), onda je on ravnomerno konvergentan na segmentu $[0, \zeta]$. Dokaz ovog tvrđenja u specijalnom slučaju daje

Teorema 2. (Abel) *Neka je R poluprečnik konvergencije stepenog reda* (1). *Ako je on konvergentan za $z = R$, onda je on ravnomerno konvergentan na segmentu* $[0, R]$.

Dokaz. Za svako $0 \leq x \leq R$ opšti član reda $\sum a_n x^n$ može se napisati u obliku

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n .$$

Niz $\{(x/R)^n\}$ je monotono opadajući i ograničen na segmentu $[0, R]$, a red $\sum a_n R^n$ je ravnomerno konvergentan na istom segmentu, pa je red (1) ravnomerno konvergentan na segmentu $[0, R]$ prema Abelovom kriterijumu. ■

Dokazane teoreme ne ukazuju na način za efektivno određivanje poluprečnika konvergencije stepenog reda. U sledećim primerima ukazaćemo kako se određuje poluprečnik stepenog reda.

Primer 1. Red $\sum z^n/n!$ konvergentan je prema Dalamberovom kriterijumu za svako $z \in \mathcal{C}$, jer je

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = |z| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0+,$$

za svako $z \in \mathcal{C}$, pa je $R = +\infty$.

Primer 2. Red $\sum n^n z^n$ divergentan je za svako $z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, jer je prema Košijevom kriterijumu

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^n z^n|} = |z| \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

za $|z| \neq 0$. Poluprečnik konvergencije je nula, a sam red je konvergentan jedino u tački $z = 0$.

Navedeni primeri ukazuju na način određivanja poluprečnika konvergencije stepenih redova. Naime, važi

Stav 3. *Ako za stepeni red* (1) *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim |a_n/a_{n+1}|$, *tada je*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{2}$$

poluprečnik konvergencije stepenog reda (1).

Dokaz. Ako je $|z| < R$ onda je

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{R} < 1,$$

pa red (1) na osnovu Dalamberovog kriterijuma konvergira za $|z| < R$. Ako je $|z| > R$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{|z|}{R} > 1,$$

pa red (1) po istom kriterijumu divergira za $|z| > R$, što dokazuje da je R poluprečnik konvergencije stepenog reda (1). ∎

Na potpuno analogan način dokazuje se sledeći

Stav 4. *Ako za stepeni red postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, *onda je*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3}$$

poluprečnik konvergencije stepenog reda (1).

U opštem slučaju formule (2) i (3) ne daju poluprečnik konvergencije stepenog reda, što dokazuje sledeći

Primer 3. Stepeni red (1) čiji su koeficijenti određeni sa

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{ako je } n \text{ parno}, \\ 0, & \text{ako je } n \text{ neparno} \end{cases}$$

ima poluprečnik konvergencije $R = 1$, što ćemo nešto kasnije moći lako da utvrdimo. Očigledno je međutim da granične vrednosti (3) i (4) ne postoje; prva zbog toga što izraz (2) nema smisla, dok drugi ne postoji zbog toga što niz $(\sqrt[n]{a_n})$ ima dve različite tačke nagomilavanja.

Sledeća teorema daje mogućnost izračunavanja poluprečnika konvergencije ma kog stepenog reda.

Teorema 5. (Koši-Adamar*) *Poluprečnik konvergencije R stepenog reda* (1) *određen je sa*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dokaz. Označimo sa $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ i dokažimo da je $R = 1/\rho$. Razlikovaćemo tri slučaja

1) $\rho = 0$. U tom slučaju je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, jer je $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ niz sa nenegativnim članovima. Stoga je za svako $z \in \mathcal{C}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

pa je red (1) konvergentan na osnovu Košijevog kriterijuma.

2) $\rho = +\infty$. Neka je $z \in \mathcal{C}$, $|z| > 0$ proizvoljan kompleksan broj. Kako je $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, postoji podniz (a_{n_k}) niza (a_n) tako da je $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/|z|$ počev od nekog indeksa k_0. Stoga je $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$, pa je red (1) divergentan, jer opšti član reda ne konvergire nuli.

3) $0 < \rho < +\infty$. Neka je $|z| < 1/\rho$. Skup $\mathbb{R}$ je gust u sebi, pa postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $|z| < 1/(\rho+\varepsilon)$. Kako je $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, to za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. No onda je

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

* Hadamard J. (1865-1963)-francuski matematičar

pa je red (2) prema Košijevom kriterijumu za brojne redove konvergentan za svako $|z| < 1/\rho$.

Ako je $|z| > 1/\rho$, tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $|z| > 1/(\rho - \varepsilon)$. Kako je $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, postoji podniz (a_{n_k}) niza (a_n) tako da je $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon$ počev od nekog indeksa $k_0 \in \mathbb{N}$. Tada je opšti član tog podniza

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} z^{n_k}|} = |z| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$$

za svako $k \geq k_0$, pa je red (1) divergentan. Time smo dokazali da je $R = 1/\rho$ poluprečnik konvergencije stepenog reda (1). ■

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti poluprečnik konvergencije sledećih stepenih redova

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad b) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n^2} z^{2n}, \qquad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3},$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^n} z^n, \qquad e) \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n^2}, \qquad f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)},$$

$$g) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (x+1)^{n^2}, \qquad h) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\sqrt{n}} z^n, \qquad i) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n z^n.$$

2. Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum a_n z^n$, odrediti polupreč nik konvergencije sledećih redova

$$a) \sum_{0}^{+\infty} (n^2 + 1) a_n z^n, \quad b) \sum_{0}^{+\infty} 2^n a_n z^n, \quad c) \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} z^n, \quad d) \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

3. Ako su R_1 i R_2 poluprečnici konvergencije stepenih redova $\sum a_n z^n$ i $\sum b_n z^n$, proceniti poluprečnik konvergencije stepenih redova

$$a) \sum (a_n \pm b_n), \qquad b) \sum a_n b_n z^n.$$

4. Neka je $a_0 > 0$, $a_n \geq 0$ za $n \geq 1$ i $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ako je

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0,$$

dokazati da je poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum a_n z^n$ jednak 1.(Uputstvo: dokazati da $a_n/A_n \to 0 \Rightarrow A_n/A_{n-1} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{A_n} \to 1$)

5. Ispitati ponašanje sledećih stepenih redova na krajevima intervala konvergencije

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n,$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}\operatorname{tg}^n x, a>1, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \left(\frac{\cos x-1}{2}\right)^n.$$

6. Ispitati običnu, apsolutnu i ravnomernu konvergenciju sledećih stepenih redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n[(2n)!]^\beta}x^n, \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\ln n} x^n, \quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+|\alpha|^n)}{n^\alpha}x^n,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}x^n, \qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\ln^\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n, \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^\alpha}{n^\beta}x^n.$$

2.5.2. ANALITIČKE FUNKCIJE

Definicija 1. *Funkcija $f(z)$ je* **analitička** *u tački $z=z_0$, ako postoji $R>0$ tako da se u krugu $|z-z_0|<R$ funkcija f može prikazati u obliku stepenog reda*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{1}$$

Teorema 1. *Neka su dati stepeni redovi*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad i \quad g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

i neka je $f(z_m)=g(z_m)$ za svako $m\in\mathbb{N}$, gde je $(z_m)\subset\mathcal{C}\setminus\{z_0\}$ niz koji pripada oblasti konvergencije zadatih redova. Ako $z_m\to z_0$ kada $m\to+\infty$, tada je $a_n=b_n$ za svako $n\in\mathbb{N}$.

Dokaz. Primetimo najpre da je suma stepenog reda neprekidna funkcija na skupu konvergencije datog reda. Prelaskom na graničnu vrednost u jednakosti $f(z_m) = g(z_m)$ kada $m \to +\infty$, dobijamo $a_0 = b_0$. Pretpostavimo da je $a_k = b_k$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Tada iz jednakosti $f(z_m) = g(z_m)$ sledi

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k (z_m - z_0)^k = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k (z_m - z_0)^k ,$$

odn.

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k (z_m - z_0)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k (z_m - z_0)^{k-n} . \tag{2}$$

Redovi $\sum_n^{+\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$ i $\sum_n^{+\infty} b_k(z - z_0)^{k-n}$ na osnovu Koši-Adamarove teoreme imaju respektivno iste oblasti konvergencije kao i redovi $\sum_0^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ i $\sum b_n(z-z_0)^n$, pa su neprekidne funkcije u oblasti konvergencije zadatih redova. Prelaskom na graničnu vrednost u (2) kada $m \to +\infty$ dobijamo da je $a_n = b_n$. Stoga je na osnovu principa potpune matematičke indukcije $a_n = b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. ■

Posledica 1. *Ako je funkcija analitička u tački $z = z_0$, onda ona u nekoj okolini tačke z_0 ima jedinstveno pretstavljanje preko stepenog reda oblika* (1).

Očigledno je suma stepenog reda analitička funkcija u oblasti konvergencije tog stepenog reda, što ukazuje na obostrano jednoznačnu korespondenciju između skupa analitičkih funkcija i skupa konvergentnih stepenih redova.

Lema 1. *Poluprečnici konvergencije stepenih redova*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n , \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad i \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

su jednaki.

Dokaz. Kako je

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|},$$

to su poluprečnici konvergencije posmatranih redova na osnovu Koši-Adamarove teoreme jednaki. ■

Teorema 2. *Neka je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

stepeni red čiji je poluprečnik konvergenije $R > 0$*. Tada je funkcija* $f(z)$ *neprekidna za svako* $z \in \mathcal{C}$ *za koje je* $|z - z_0| < R$*.*

Dokaz. Stepeni red je ravnomerno konvergentan na skupu $\{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| \leq r < R\}$ za svako $r < R$, pa je na istom funkcija f neprekidna prema teoremi 1., 2.4.2., jer su članovi stepenog reda neprekidne funkcije. ■

Teorema 3. *Neka je* $R > 0$ *poluprečnik konvergencije stepenog reda*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \,. \tag{3}$$

Tada je:

(i) $f \in \mathcal{C}^1(x_0 - R, x_0 + R)$ *i*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \tag{4}$$

za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*;*

(ii) $f \in \mathcal{R}(x_0 - R, x_0 + R)$ *i*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \tag{5}$$

za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *;*

(iii) Na intervalu konvergencije stepeni red (3) *može se integraliti i diferencirati proizvoljan broj puta, pri čemu redovi dobijeni integracijom odn. diferenciranjem imaju isti poluprečnik konvergencije kao i red* (3)*.*

Dokaz. Red (3) je ravnomerno konvergentan na segmentu $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ za svako $0 < \alpha < R$ prema teoremi 1., 2.5.1., pa se na osnovu teoreme 1., 2.4.3. može integraliti član po član i važi jednakost (5). Da se red može diferencirati član po član, neposredno sledi na osnovu teoreme 1. 2.4.4. i leme 1. Poslednji deo tvrđenja sledi na osnovu leme 1. ■

Iz poslednje teoreme vidimo da je suma stepenog reda klase $\mathcal{C}^\infty$ u oblasti konvergencije. Pri tome važi

Teorema 4. *Ako je $R > 0$ poluprečnik konvergencije stepenog reda* (3)*, tada je*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \textit{za svako } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{6}$$

Dokaz. Za $x = x_0$ $f(x_0) = a_0$. Na osnovu prethodne teoreme funkcija f ima izvod za svako $n \in \mathbb{N}$ i važi jednakost

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 2\cdot a_n + (n+1)n\cdots 2a_{n+1}(x-x_0) + \cdots \\ + (n+2)(n+1)\cdots 3a_{n+2}(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

odakle sledi (6). ■

Posledica 2. *Ako je funkcija f analitička u nekoj tački $x = x_0$, tada je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{7}$$

u nekoj okolini tačke $x = x_0$.

Teorema 4. ne samo da dokazuje da svaka anlitička funkcija ima jedinstveni prikaz u obliku stepenog reda u nekoj okolini tačke u kojoj je analitička, već da je Tejlorov red stepeni red kojim se ta analitička funkcija prikazuje. Zato se prirodno postavlja pitanje uslova koje treba da zadovoljava neka funkcija da bi bila analitička.

Iz teorema 3. i 4. sledi da je svaka analitička funkcija u nekoj tački x_0 beskonačno diferencijabilna u nekoj okolini te tačke i da je u toj okolini jednaka sumi odgovarajućeg Tejlorovog reda. Obrat u opštem slučaju ne važi. Naime, postoji beskonačno diferencijalna funkcija koja nije analitička, što pokazuje

Primer 1. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ako je } x \neq 0\,, \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

ima u tački $x = 0$ izvod $f^{(n)}(0) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga su svi članovi Tejlorovog reda zadate funkcije u tački $x = 0$ jednaki nuli, pa je i suma Tejlorovog reda funkcije (8) u nekoj okolini tačke $x = 0$ jednaka nuli. Suma Tejlorovog reda dakle ne pretstavlja funkciju (8) u okolini tačke $x = 0$, pa na osnovu posledice 2. ona ne može biti analitička u tački $x = 0$.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove da neka funkcija bude analitička.

Teorema 5. *Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < R \leq +\infty$. Ako je funkcija $f \in \mathcal{C}^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ i ako postoji $L > 0$ tako da je $|f^{(n)}(x)| \leq L$ za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ i svako $n \geq 1$, tada je funkcija f analitička u tački x_0 i važi (7) za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Dokaz. Da je funkcija f analitička u tački x_0 dovoljno je dokazati (7). Na osnovu Tejlorove teoreme funkcija f se može prikazati u obliku

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x), \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,,$$

gde je

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,, \quad \theta \in (0,1)\,,$$

ostatak u Lagranž ovom obliku. Za svako $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ važi

$$|r_n(x)| \leq \frac{L|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0\,, \quad n \to +\infty\,,$$

čime je jednakost (7) dokazana. ■

Na osnovu izloženog sledi da je funkcija analitička u tački x_0 onda i samo onda ako je jednaka sumi svog Tejlorovog reda u tački x_0.

Na kraju ovog odeljka navedimo neke osnovne analitičke funkcije i njihov prikaz u obliku Tejlorovog reda.

Primer 2. Funkcija $f(x) = e^x$ na svakom intervalu $(-R, R)$, $R > 0$ ima ograničene izvode $|f^{(n)}(x)| < e^R$ za svako $x \in (-R, R)$ i svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je e^x analitička funkcija na realnoj pravoj i Tejlorov red ima oblik

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

u okolini tačke $x = 0$. U primeru 2., 2.5.1. videli smo da je red $\sum z^n/n!$ apsolutno konvergentan za svako $z \in \mathcal{C}$. Za $z = x$ suma ovog reda je e^x. Definišimo po analogiji funkciju

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

koja za svako $z \in \mathcal{C}$ ima neku kompleksnu vrednost e^z. Uvedena definicija je prirodna, što se može zaključiti proverom nekih osnovnih svojstava funkcije e^x na funkciju e^z.

Primer 3. Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ takođe su analitičke na celoj realnoj pravoj prema teoremi 5., jer je $|f^{(n)}(x)| \le 1$ i $|g^{(n)}(x)| \le 1$; u okolini tačke $x = 0$ one se razlažu u stepene redove oblika

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \,.$$

Na osnovu Dirihleovog kriterijuma ovi redovi su apsolutno konvergentni za svako kompleksno x, zbog čega definicije sinusa i cosinusa možemo proširiti na kompleksnu ravan stavljajući

$$\sin z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \,.$$

Lako je dokazati da je

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \,,$$

odakle dobijamo formulu Ojlera

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Razložiti sledeće funkcije u Tejlorov red u okolini tačke $x = 0$ i odrediti oblast u kojoj taj razvoj važi

$$a)\ \sin x^3\,,\qquad b)\ \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,,\qquad c)\ \frac{x}{1+x-2x^2}\,,\qquad d)\ \frac{1}{1+x+x^2}\,,$$
$$e)\ \sin^3 x\,,\qquad f)\ \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\,,\qquad g)\ \frac{1+x}{(1-x^2)^2}\,,\qquad h)\ \ln(1+x+x^2)\,.$$

2. Primenom diferenciranja razložiti sledeće funkcije u stepeni red po x:

$$a)\ (1+x)\ln(1+x)\,,\qquad b)\ \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}\,,\qquad c)\ \arcsin x\,,$$
$$d)\ \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,,\qquad e)\ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\qquad f)\ \arcsin^2 x\,.$$

3. Primenom različtih metoda, razviti sledeće funkcije u stepeni red po stepenima x:

$$a)\ y = x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}\,,\qquad b)\ y = \arccos(1-2x^2)\,,$$
$$c)\ y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,,\qquad d)\ y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,,$$

i odrediti oblast konvergencije dobijenih razvoja.

4. Naći sume sledećih redova:

$$a)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,,\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2(2n-1)}\,,\quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n-1)}\,,\quad d)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}\,,$$
$$e)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}\,,\qquad f)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,,\qquad g)\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}\,,\qquad h)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+3)x^{2n}}{n!}\,.$$

5. Naći sumu stepenog reda $\sum_0^\infty a_nx^n$ gde je: a) $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 2$ b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$ za $n \geq 2$.

6. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokazati da je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, \quad x \in (-1,1)\,,$$

gde je $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^n = \binom{n}{\alpha}$, $n \geq 1$, ne razvijajući funkciju $(1+x)^\alpha$ u Tejlorov red.

7. Dokazati da je

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln^2 x \, dx = C^2 + \frac{\pi^2}{6}\,,$$

gde je C Ojlerova konstanta.

8. Razlaganjem podintegralne funkcije u stepeni red izračunati sledeće integrale:

$$a)\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx\,,\qquad b)\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx\,,\qquad c)\int_0^1 \ln\ln(1-x)dx\,,$$

$$d)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx\,,\qquad e)\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx\,,\qquad f)\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos mxdx}{1-2r\cos x+r^2}\,.$$

9. Izračunati Ojlerove integrale

$$a)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx\,,\quad b)\ K = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx\,.$$

(Uputstvo: a) razložiti integral na dva integrala, podintegralne funkcije u tim integralima razviti u stepene redove, a zatim integraliti tako dobijene redove i primeniti rezultat zadatka 14.b), 2.4.4., b) iskoristiti rezultat pod a) Rezultat: a) $\pi/\sin\pi a$ b) $\pi(\mathrm{ctg}\pi a - \mathrm{ctg}\pi b)$)

10. Izračunati sledeće integrale

$$a)\int_0^{+\infty} \frac{1-r\cos\beta x}{(1+x^2)(1-2r\cos\beta x+r^2)}\,dx\,,$$

$$b)\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-2r\cos\beta x+r^2)}{1+x^2}\,dx\,,$$

$|r| < 1$, koristeći u oba slučaja vrednost integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-k}\,,\quad k>0\,.$$

(Rezultat: a) $\pi e\beta/2(e^\beta - r)$, b) $\pi\ln(1-re^{-\beta})$)

11. Razlaganjem podintegralne funkcije u stepeni red izračunati integrale Ležandra:

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx\,, \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1}\,dx\,.$$

(Rezultat: a) $(e^m+1)/4(e^m-1)-1/2m$, b) $1/2m-1/2(e^{m/2}-e^{-m/2})$)

12. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\frac{dx}{x}\,,$$

koristeći vrednost integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Rezultat: $\pi(e^a-1)/2$)

12. Dokazati da za svaki kompleksan broj z važe jednakosti

$$a)\ \sin(-z) = -\sin z\,, \qquad b)\ \cos(-z) = \cos z\,, \qquad c)\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1\,,$$
$$d)\ \sin 2z = 2\sin z\cos z\,, \qquad e)\ \sin(z+2\pi) = \sin z\,, \qquad f)\ \cos(z+2\pi) = \cos z\,.$$

13. Dokazati da funkcija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)\,, \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

pripada klasi $\mathcal{C}^\infty$, a da Tejlorov red te funkcije u tački $x=0$ konvergira samo u jednoj tački.

14. Neka je f suma stepenog reda čiji je poluprečnik konvergencije R. Ako je

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x^{-n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\,, \quad x > R^{-1}\,,$$

za neko $n\in\mathbb{N}$ i $f^{(k)}(0)=1$ za $0\le k\le n-1$, naći funkciju f. (Rešenje: $f(x)=e^x$)

III

VIŠESTRUKI INTEGRALI

$$\int_{\Omega} f\circ\varphi\sqrt{G}\,d\Omega$$

U ovoj glavi izlaže se teorija višestrukih integrala realnih funkcija. Za korektno izlaganje višestrukih integrala neophodno je uvođenje pojma mere u $\mathbb{R}^n$. U prvom poglavlju ove glave uveden je pojam Žordanove mere i data su osnovna svojstva ove mere.

Višestruki integrali, nesvojstveni integrali, parametarski integrali, krive i površi, krivolinijski i površinski integrali kao posebne celine čine zasebna poglavlja ove glave.

1. ŽORDANOVA MERA SKUPOVA

Pojam mere može se na različite načine uvesti u prostoru $\mathbb{R}^n$. Mi ćemo najpre uvesti Žordanovu* meru u $\mathbb{R}^n$, a zatim ćemo ukazati na još jednu mogućnost uvođenja mere u $\mathbb{R}^n$ koju je dao Lebeg. U osnovi i jedne i druge mere je pojam jednostavnog skupa.

1.1. JEDNOSTAVNI SKUPOVI

Neka je u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ zadat koordinatni sistem R koordinata $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1. *Skup $\Delta_{a,b}$ tačaka $x = (x_1, \ldots, x_n)$ prostora $\mathbb{R}^n$ je* ***jednostavan*** *ako koordinate x_i svake tačke x skupa $\Delta_{a,b}$ zadovoljavaju jednu od nejednakosti*

$$(1) \qquad a_i \le x_i \le b_i, \quad a_i \le x_i < b_i, \quad a_i < x_i \le b_i, \quad a_i < x_i < b_i,$$

* Jordan C. (1838-1922)-francuski matematičar

za svako $i = \overline{1, n}$.

Ako je $a_i = b_i$ bar za jedno $i = \overline{1, n}$, za jednostavan skup $\Delta_{a,b}$ kažemo da je **degenerisan** u $\mathbb{R}^n$.

Jednostavan skup u $\mathbb{R}$ je interval, u $\mathbb{R}^2$ je pravougaonik, u $\mathbb{R}^3$ je paralelepiped. Interval je degenerisan jednostavan skup u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Prazan skup ćemo takođe smatrati degenerisanim skupom u svakom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Jednostavan skup može biti otvoren ili zatvoren, već prema tome da li mu rubne tačke pripadaju ili ne, ali u opštem slučaju ne mora biti ni otvoren ni zatvoren skup. Lako je videti da je jednostavan skup $\Delta_{a,b}$ zatvoren onda i samo onda ako je

$$\Delta_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = \overline{1, n}\right\}.$$

Rub jednostavnog skupa sastoji se iz $2n$ degenerisanih jednostavnih skupova koji pripadaju hiperravnima $x_k = a_k$ ili $x_k = b_k$, $k = \overline{1, n}$. Ove jednostavne skupove nazivamo stranama jednostavnog skupa $\Delta_{a,b}$. Očigledno su strane jednostavnog skupa $\Delta_{a,b}$ odeređene uslovima

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad \text{za} \quad i \neq k \quad \text{i} \quad x_k = a_k,$$

ili

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad \text{za} \quad i \neq k \quad \text{i} \quad x_k = b_k.$$

Definicija 2. ***Mera jednostavnog skupa*** $\Delta_{a,b}$ *koji je određen jednim od uslova* (1) *je broj* $m\Delta_{a,b}$ *definisan sa*

$$m\Delta_{a,b} := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{2}$$

Očigledno je $m\Delta_{a,b} \geq 0$ za svaki jednostavan skup u $\mathbb{R}^n$, dok je $m\Delta_{a,b} = 0$ onda i samo onda ako je jednostavan skup $\Delta_{a,b}$ degenerisan u $\mathbb{R}^n$. Specijalno je $m(\varnothing) := 0$.

Svaki jednostavan skup može se prikazati kao unija konačno mnogo jednostavnih skupova koji, sem eventualno rubnih, nemaju drugih zajedničkih tačaka. Takav prikaz nazivamo **razlaganjem jednostavnog skupa**. Mera jednostavnog skupa jednaka je sumi mera elemenata razlaganja nezavisno od izbora samog razlaganja, što dokazuje

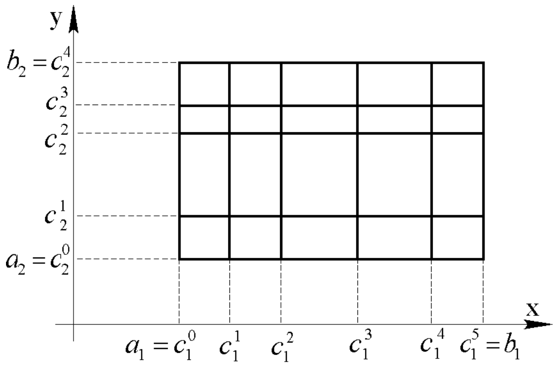
Teorema 1. *Ako je*

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{s} \Delta_k$$

jedno razlaganje jednostavnog skupa Δ*, tada je*

$$m\Delta = \sum_{k=1}^{s} m\Delta_k\,. \tag{3}$$

Dokaz. Dokažimo jednakost (3) najpre u slučaju kada je razlaganje skupa Δ specijalnog oblika koje ćemo sada opisati. Pretpostavimo da je $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = \overline{1,n}\}$ nedegenerisan zatvoren jednostavan skup (ako je Δ degenerisan skup, jednakost (3) je očigledna). Dokažimo najpre tvrđenje u slučaju kada je razlaganje skupa Δ specijalnog oblika. Razdelimo svaki od intervala $[a_i, b_i]$ na konačan broj podintervala tačkama c_i^j, $j = \overline{0, p_i}$, gde je



Sl. 13

$$a_i \equiv c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{p_i} \equiv b_i.$$

Za svaki sistem indeksa $(j_1, \ldots, j_n)$, gde je $1 \leq j_i \leq p_i$, $1 \leq i \leq n$, označimo sa $\Delta_{j_1,\ldots,j_n}$ jednostavne skupove određene nejednakostima

$$c_i^{j_i - 1} \leq x_i \leq c_i^{j_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Na taj način je skup Δ razložen na $p_1 p_2 \cdots p_n$ jednostavnih skupova. Ovakvo razlaganje nazivamo **prostim**. U tom slučaju je

$$\begin{aligned} m\Delta &= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}(c_i^j - c_i^{j-1}) \\ &= \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \left(\prod_{i=1}^{n}(c_i^{j_i} - c_i^{j_i - 1})\right) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} m\Delta_{j_1,\ldots,j_n}\,, \end{aligned}$$

gde se sumiranje u poslednje dve sume vrši po svim n-torkama $(j_1, \ldots \ldots, j_n)$, $1 \leq j_i \leq p_i$, $i = \overline{1,n}$. Time smo dokazali formulu (3) u slučaju prostog razlaganja.

Razmotrimo sada opšti slučaj. Neka je jednostavan skup Δ određen nejednakostima (1), a jednostavni skupovi Δ_k neka su zadati nejednakostima

$$a_i^k \leq x_i \leq b_i^k, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,s}.$$

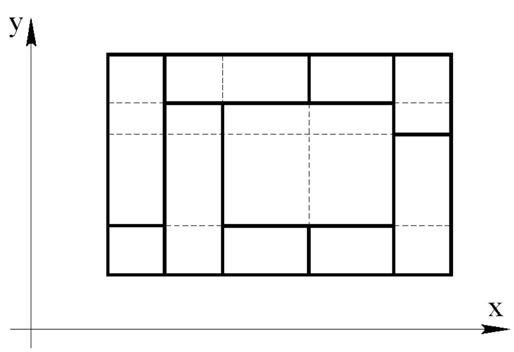
Za svako $i = \overline{1,n}$ iz skupa $\{a_i^1, b_i^1, \ldots, a_i^s, b_i^s\}$ izbacimo one elemente koji se ponavljaju, a zatim preostale preuredimo po uređnju iz $\mathbb{R}$. Tako za svako $i = \overline{1,n}$ dobijamo razlaganje

$$a_i \equiv c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{p_i} \equiv b_i$$

segmenta $[a_i, b_i]$. Za svaki sistem indeksa $(j_1, \ldots, j_n)$, $1 \leq j_i \leq p_i$, označimo sa $\Delta_{j_1,\ldots,j_n}$ jednostavan skup određen nejednakostima

$$c_i^{j_i-1} \leq x_i \leq c_i^{j_i}.$$

Time smo dobili jedno prosto razlaganje jednostavnog skupa Δ. Svaki element tog razlaganja nalazi se tačno u jednom elementu polaznog razlaganja ili se eventualno poklapa sa tačno jednim elementom polaznog razlaganja. Označimo sa σ familiju indeksa $(j_1, \ldots, j_n)$, $1 \leq j_i \leq p_i$, a sa σ_k familiju onih indeksa $(j_1, \ldots, j_n)$ za koje je $\Delta_{j_1,\ldots,j_n} \subset \Delta_k$. Tada je



Sl. 14

$$m\Delta = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\sigma} m\Delta_{j_1,\ldots,j_n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\sigma_k} m\Delta_{j_1,\ldots,j_n} \right) = \sum_{k=1}^{s} m\Delta_k,$$

čime je teorema dokazana. ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je presek jednostavnih skupova jednostavan skup.

2. Dokazati da se diferencija dva jednostavna skupa može prikazati kao unija konačno mnogo disjunktnih jednostavnih skupova, od kojih neki mogu biti degenerisani.

3. Neka je Δ jednostavan skup. Dokazati da postoje jednostavni skupovi Δ' i Δ'' tako da je $\Delta' \subset \Delta \subset \Delta''$, pri čemu se razlike $m\Delta'' - m\Delta$ i $m\Delta - m\Delta'$ mogu učiniti proizvoljno malim.

4. Neka je $m\Delta'$ mera jednostavnog skupa Δ' u prostoru $\mathbb{R}^m$, a $m\Delta''$ mera jednostavnog skupa Δ'' u prostoru $\mathbb{R}^n$. Dokazati da je mera skupa $\Delta' \times \Delta''$ u prostoru $\mathbb{R}^{m+n}$ jednaka $m\Delta' \times m\Delta''$.

1.2. ELEMENTARNI SKUPOVI

Definicija 1. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je n-**dimenzionalan elementaran skup** ako se može prikazati kao konačna unija n-dimenzionalnih jednostavnih skupova. Elementaran skup je **degenerisan** ako su svi jednostavni skupovi koji ga čine degenerisani.*

Elementaran skup u opštem slučaju ne mora biti ni otvoren, ni zatvoren. Elementaran skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **zatvoren (otvoren)** ako je E zatvoren (otvoren) kao skup u $\mathbb{R}^n$.

Neka su E_1 i E_2 elementarni skupovi koji se mogu pretstaviti sa

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta'_i \quad , \qquad E_2 = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta''_j,$$

gde su Δ'_i i Δ''_j jednostavni skupovi. Tada iz sledećih jednakosti

$$E_1 \cup E_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta'_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \Delta''_j\right),$$

$$E_1 \cap E_2 = \bigcup_{i,j=1}^{m,n} (\Delta'_i \cap \Delta''_j),$$

$$E_1 \setminus E_2 = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (\Delta'_i \setminus \Delta''_j)\right),$$

vidimo da su $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ i $E_1 \setminus E_2$ elementarni skupovi.

Ako se elementaran skup može prikazati kao unija konačno mnogo jednostavnih skupova koji, sem možda rubnih, nemaju drugih zajedničkih tačaka, kažemo da je dato **razlaganje** tog elementarnog skupa.

Dokažimo da svaki elementaran skup dopušta razlaganje. Štaviše, svaki elementaran skup dopušta **strogo razlaganje**, odn. razlaganje kod koga su svaka dva jednostavna skupa koja čine to razlaganje disjunktna.

Primetimo najpre da ako se elementaran skup E može prikazati kao unija konačno mnogo elementarnih skupova koji nemaju zajedničkih tačaka i koji dopuštaju strogo razlaganje, tada i skup E dopušta strogo razlaganje. Ako je elementaran skup razlika jednostavnih skupova, onda on dopušta strogo razlaganje (vid. zadatak 2., 1.1.)

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki elementaran skup koji se može prikazati kao unija k jednostavnih skupova i posmatrajmo elementaran skup

$$E = \bigcup_{i=1}^{k+1} \Delta_i$$

sastavljen od jednostavnih skupova $\Delta_1, \ldots, \Delta_{k+1}$. Elementaran skup $E' = \cup_1^k \Delta_i$ prema induktivnoj hipotezi dopušta strogo razlaganje $E' = \cup_1^r \Delta'_j$. Stoga je

$$E = E' \cup \Delta_{k+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{r} \Delta'_j \right) \cup \Delta_{k+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{r} (\Delta'_j \setminus \Delta_{k+1}) \right) \cup \Delta_{k+1},$$

čime je tvrđenje dokazano, jer su svi elementi u poslednjem razlaganju disjunktni. ■

Definicija 2. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ elementaran skup i neka jednostavni skupovi Δ_i, $i = \overline{1,k}$, čine razlaganje skupa E.* ***Mera elementarnog skupa*** *E je broj mE definisan kao*

$$mE := \sum_{i=1}^{k} m\Delta_i.$$

Neka su $E = \cup_1^m \Delta_i' = \cup_1^n \Delta_j''$ dva različita razlaganja elementarnog skupa E. Tada je

$$\sum_{i=1}^{m} m\Delta_i' = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} m(\Delta_i' \cap \Delta_j'') \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} m(\Delta_i' \cap \Delta_j'') \right) = \sum_{j=1}^{n} m\Delta_j''.$$

Time smo dokazali da mera elementarnog skupa ne zavisi od razlaganja elementarnog skupa, pa je definicija 2. korektna.

Navedimo neka osnovna svojstva mere elementarnih skupova.

Stav 1. (aditivnost mere) *Ako su E_1 i E_2 elementarni skupovi koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada je*

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2. \tag{1}$$

Dokaz. Zaista, ako elementarni skupovi E_1 i E_2 imaju razlaganja $E_1 = \cup_1^m \Delta_i'$, $E_2 = \cup_1^n \Delta_j''$, tada je $(\cup_1^m \Delta_i') \cup (\cup_1^n \Delta_j'')$ razlaganje skupa $E_1 \cup E_2$, pa važi (1). ■

Stav 2. (monotonost mere) *Ako su E_1 i E_2 elementarni skupovi i ako je $E_1 \subset E_2$, tada je $mE_1 \leq mE_2$.*

Dokaz. Polazeći od jednakosti $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$ i koristeći aditivnost mere, imamo jednakost

$$mE_2 = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1).$$

Kako je $m(E_2 \setminus E_1) \geq 0$, to je $mE_2 \geq mE_1$. ■

Stav 3. (poluaditivnost mere) *Ako su $E, E_1, \dots, E_k$ elementarni skupovi i ako je $E \subset \cup_1^k E_i$, tada je*

$$mE \leq \sum_{i=1}^{k} mE_i. \tag{2}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da nejednakost (2) važi za $k = 2$. Neka je $E \subset E_1 \cup E_2$. Tada je $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$, pa zbog aditivnosti mere važi

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1).$$

Zbog monotonosti mere važe nejednakosti

$$mE \leq m(E_1 \cup E_2) \quad \text{i} \quad m(E_2 \setminus E_1) \leq mE_2,$$

odakle dobijamo da je

$$mE \leq mE_1 + mE_2. \blacksquare$$

Zadaci za vežbanje

1. Ako su $E_1, \ldots, E_n$ elementarni skupovi, dokazati da je

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} mE_i,$$

i

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i - \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} m(E_i \cap E_j)\,.$$

2. Ako su E_1 i E_2 elementarni skupovi, dokazati da je

$$mE_1 - mE_2 \leq m(E_1 \setminus E_2).$$

Kada važi jednakost ?

3. Dokazati da za svaki elementaran skup E postoji otvoren elementaran skup E' koji je sadržan u skupu E zajedno sa svojim rubom i zatvoren elementaran skup E'' koji sadrži skup E zajedno sa njegovim zatvorenjem, tako da se mere skupova E' i E'' razlikuju od mere skupa E za proizvoljan unapred dati broj.

4. a) Dokazati da je rub elementarnog skupa u $\mathbb{R}^n$ unija konačno mnogo $(n-1)$-dimenzionalnih paralelepipeda koji su paralelni koordinatnim hiperravnima, pri čemu su ivice tih paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.

b) Dokazati da sfera u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, nije elementaran skup.

1.3. POJAM ŽORDANOVE MERE

Neka je G ograničen skup u $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $\mathfrak{L}(G)$ mnoštvo svih elementarnih skupova koji su sadržani u skupu G, a sa $\mathfrak{U}(G)$ mnoštvo svih elementarnih skupova koji sadrže skup G. Familija $\mathfrak{L}(G)$ je neprazna, jer je prazan skup element ove familije, dok je familija $\mathfrak{U}(G)$ neprazna, jer je skup G ograničen. Skup $\{mU : U \in \mathfrak{U}(G)\}$ je odozdo ograničen nulom, pa postoji $\inf\{mU : U \in \mathfrak{U}(G)\}$. Ovaj infimum nazivamo **spoljašnjom merom skupa** G i označavamo sa m_eG. Zbog monotonosti mere elementarnih skupova je $mL \leq mU$ za svako $L \in \mathfrak{L}(G)$ i svako $U \in \mathfrak{U}(G)$. Stoga je mL donja granica skupa $\{mU : U \in \mathfrak{U}(G)\}$ za svako $L \in \mathfrak{L}(G)$. m_eG je najveća donja granica tog skupa, pa je dakle m_eG gornja granica skupa $\{mL : L \in \mathfrak{L}(G)\}$, zbog čega postoji $m_iG := \sup\{mL : L \in \mathfrak{L}(G)\}$ i važi nejednakost $m_iG \leq m_eG$. Broj m_iG nazivamo **unutrašnjom merom skupa** G.

Definicija 1. *Skup G je* ***izmerljiv u Žordanovom smislu*** *ako su unutrašnja i spoljašnja mera konačni, međusobno jednaki brojevi. Broj*

$$mG := m_iG = m_eG$$

je ***n-dimenzionalna Žordanova mera skupa*** *G.*

U daljem izlaganju koristićemo termine izmerljiv skup i mera skupa, bez naglašavanja o kojoj je dimenziji reč, ukoliko je to iz teksta jasno.

Svaki elementaran skup izmerljiv je u Žordanovom smislu i njegova Žordanova mera poklapa se sa merom koju je određena je u prethodnom odeljku. Zaista, E možemo smatrati elementarnim skupom koji je sadržan i koji sadrži skup E, pa je $mE \leq m_iE$ i $m_eE \leq mE$. Kako je $m_iE \leq m_eE$ to je $mE = m_iE = m_eE$.

Može se dokazati da spoljašnja i unutrašnja mera, pa dakle i mera, ne zavise od toga da li su elementarni skupovi pomoću kojih se definišu ove mere zatvoreni ili otvoreni. Na kraju, navedimo jednostavan stav koji daje potrebne i dovoljne uslove da skup bude izmerljiv u Žordanovom smislu.

Stav 1. *Da bi ograničen skup $G \subset \mathbb{R}^n$ bio izmerljiv, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoje elementarni skupovi E' i E'' tako da je $E' \subset G \subset E''$ i $mE'' - mE' < \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je skup G izmerljiv i neka je $mG = m_iG = m_eG$. Kako je $mG = m_iG$, postoji elementaran skup $E' \in \mathfrak{L}(G)$ tako da je $mG - \varepsilon/2 < mE'$. Slično, postoji $E'' \in \mathfrak{U}(G)$ tako da je $mE'' < mG + \varepsilon/2$. Kako je $E' \subset G \subset E''$, to je $mE'' - mE' < \varepsilon$.

Pretpostavimo sada da za svako $\varepsilon > 0$ postoje elementarni skupovi E' i E'' tako da je $E' \subset G \subset E''$ i $mE'' - mE' < \varepsilon$. Kako je $mE' \leq m_iG \leq m_eG \leq mE''$, to je $m_eG - m_iG < \varepsilon$, pa zbog proizvoljnosti broja ε važi jednakost $m_iG = m_eG$. ■

Na kraju ovog odeljka napomenimo da je svaki izmerljv skup ograničen.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $G \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup. Dokazati da je

$$m_i(G) = \sup\{mL : L \in \mathfrak{L}(G), \overline{L} \subset G\} = \sup\{mL : L \in \mathfrak{L}(G), \overline{L} \subset intG\},$$

$$m_eG = \inf\{mU : U \in \mathfrak{U}(G), G \subset intU\} = \inf\{mU : U \in \mathfrak{U}, \overline{G} \subset intU\}.$$

Šta se na osnovu ovih jednakosti može zaključiti?

2. Familija hiperravni

$$x_j = k_jh, \quad j = \overline{1,n}, \quad h = 2^{-N}; \quad k_j = 0, \pm 1, \ldots$$

za svaki prirodan broj N razlaže prostor $\mathbb{R}^n$ na jednostavne skupove $\Delta_h = \{x : k_jh \leq x_j \leq (k_j+1)h, j = \overline{1,n}\}$. Familiju jednostavnih skupova formiranih na opisani način nazivamo **mrežom u** $\mathbb{R}^n$ i označavamo sa S_N. Za svaki ograničen skup $G \subset \mathbb{R}^n$ definišimo skupove

$$G_{(N)} = \cup\{\Delta \in S_N : \Delta \subset G\} \quad , \quad G^{(N)} = \cup\{\Delta \in S_N : \Delta \cap G \neq \varnothing\}.$$

Dokazati da je

$$m_iG = \lim_{N \to +\infty} mG_{(N)} = \sup_N mG_{(N)} \quad , \quad m_eG = \lim_{N \to +\infty} mG^{(N)} = \inf_N mG^{(N)}.$$

3. Neka je R koordinatni sistem u $\mathbb{R}^n$. Označimo sa Δ_R jednostavan skup čije su strane paralelne koordinatnim ravnima sistema R, a sa σ_R elementaran skup koji je konačna unija jednostavnih skupova Δ_R^i, $i = \overline{1,k}$. Dokazati sledeće jednakosti

$$\sup_{\sigma_R \subset G} m\sigma_R = \sup_{\sigma_{R'} \subset G} m\sigma_{R'} \quad , \quad \inf_{G \subset \sigma_R} m\sigma_R = \inf_{G \subset \sigma_{R'}} m\sigma_{R'}.$$

Kakav zaključak se dobija na osnovu ovih jednakosti ?

4. Neka je G ograničen skup u $\mathbb{R}^n$. Dokazati da je

$$m_i G = \sup_{G' \subset G} mG' \quad , \quad m_e G = \inf_{G \subset G'} mG',$$

gde se supremum i infimum izimaju po svim izmerljivim skupovima G' koji su sadržani odn. sadrže skup G.

5. Neka je G izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$. Dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji zatvoren izmerljiv skup $F \subset G$ i otvoren izmerljiv skup $H \supset G$ tako da je $mH - mF < \varepsilon$.

6. Ako je skup G izmerljiv i ako je $intG = \varnothing$, dokazati da je $mG = 0$.

7. Neka je F zatvoren prebrojiv podskup segmenta $[a, b]$. Dokazati da je F izmerljiv skup i da je $mF = 0$.

1.4. SKUPOVI MERE NULA

U teoriji Žordanove mere od posebnog značaja su skupovi mere nula. Kao što ćemo videti, pomoću njih se daje potpuna karakterizacija izmerljivih skupova. Da bismo okarakterisali ove skupove na jednostavniji način, primetimo najpre da je $0 \leq m_i G \leq m_e G$ za svaki ograničen skup $G \subset \mathbb{R}^n$. Stoga je $mG = 0$ onda i samo onda ako je $m_e G = 0$, odakle prirodno sledi

Definicija 1. *Skup $G \subset \mathbb{R}^n$ je Žordanove* ***mere nula****, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji elementaran skup E koji sadrži skup G i za koji je $mE < \varepsilon$.*

Navedimo neka osnovna svojstva skupova mere nula.

Stav 1. *Ako je skup G_1 mere nula i $G_2 \subset G_1$, tada je skup G_2 mere nula.*

Stav 2. *Unija konačno mnogo skupova mere nula je skup mere nula.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da tvrđenje važi za dva skupa. Neka su G_1 i G_2 skupovi mere nula i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje elementarni skupovi E_1 i E_2 tako da je $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$ i $mE_1 < \varepsilon/2$, $mE_2 < \varepsilon/2$. Skup $E_1 \cup E_2$ je elementaran, sadrži skup $G_1 \cup G_2$ i $m(E_1 \cup E_2) \leq mE_1 + mE_2 < \varepsilon$, pa je $m(G_1 \cup G_2) = 0$. ■

Primer 1. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup koji leži u hiperravni $x_k = c$, $c \in \mathbb{R}$. Tada je $mA = 0$, jer je $A \subset E$, gde je E elementaran skup određen nejednakostima $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i \neq k$ i $x_k = c$.

Stav 3. *Neka je K kompakt u $\mathbb{R}^n$. Ako je preslikavanje $f : K \mapsto \mathbb{R}^m$ neprekidno, onda je graf $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in K, y = f(x)\}$ preslikavanja f mere nula u $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Dokaz. Preslikavanje f je neprekidno na kompaktu K, pa je prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidno na K. Stoga, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x', x'' \in K$

$$\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon\,.$$

Kao kompaktan, skup K je ograničen, pa postoji jednostavan skup $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ određen nejednakostima $a_i \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1, n}$ koji sadrži skup K. Podelimo svaki segment $[a_i, b_i]$ na p jednakih delova, gde je p izabrano tako da je $(b_i - a_i)/p < \delta_\varepsilon/n$ za svako $i = \overline{1, n}$. Time je jednostavan skup Δ podeljen na p^n podudarnih jednostavnih skupova. Sa $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ označimo one od njih koji sa kompaktnim skupom K imaju neprazan presek. Ako tačke x' i x'' iz K pripadaju istom jednostavnom skupu Δ_j, $1 \le j \le s$, tada je $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$, jer je

$$\|x' - x''\| \le \sum_{i=1}^{n} |x'_i - x''_i| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - a_i}{p} < \delta_\varepsilon\,.$$

Za svako $j = \overline{1, s}$ fiksirajmo neku tačku $x_j \in \Delta_j$. Neka je Δ_j^* jednostavan skup u $\mathbb{R}^{n+m}$ određen onim parovima $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ za koje je $x_j \in \Delta_j$ i $f_k(x_j) - \varepsilon \le y_k \le f_k(x_j) + \varepsilon$ za svako $k = \overline{1, m}$ gde je $y = (y_1(x), \ldots, y_m(x))$. Očigledno je $\Delta^* = \cup_{j=1}^{s} \Delta_j^*$ elementaran skup u $\mathbb{R}^{n+m}$. Dokažimo da on sadrži graf Γ_f preslikavanja f. Neka je $(x, y) \in \Gamma_f$. Tada je $x \in \Delta_j$ za neko $j = \overline{1, s}$, pa je $\|x - x_j\| < \delta_\varepsilon$. No onda je $\|f(x) - f(x_j)\| < \varepsilon$, pa kako je $|f_k(x) - f_k(x_j)| \le \|f(x) - f(x_j)\|$ za svako $k = \overline{1, m}$, odn. $f_k(x_j) - \varepsilon \le f_k(x) \le f_k(x_j) + \varepsilon$, $k = \overline{1, m}$, to je $\Gamma_f \subset \ \Delta^*$. $(n + m)$-dimenzionalna mera skupa Δ_j^* jednaka je $(2\varepsilon)^m m\Delta_j$, odakle sledi

$$m\Delta^* = \sum_{j=1}^{s} m\Delta_j^* = (2\varepsilon)^m \sum_{j=1}^{s} m\Delta_j \le (2\varepsilon)^m m\Delta\,.$$

Kako je ε proizvoljno, to je $m\Gamma_f = 0$. ■

Stav 4. *Ograničen skup A je izmerljiv u $\mathbb{R}^n$ onda i samo onda ako je rub rA skupa A mere nula.*

Dokaz. Neka je A izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Tada postoji otvoren elementaran skup E koji sadrži skup $\overline{A}$ tako da je $mE < mA + \varepsilon/2$. Takođe postoji zatvoren elementaran skup F sadržan u $intA$ za koji je $mA - \varepsilon/2 < mF$. Skup $E \setminus F$ je elementaran, $rA \subset E \setminus F$ i $m(E \setminus F) = mE - mF < \varepsilon$, pa je $m(rA) = 0$.

Neka je sada A ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ čiji je rub mere nula i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji otvoren elementaran skup E koji sadrži rA, pri čemu je $mE < \varepsilon$. Za svako $x \in intA$ postoji otvoren jednostavan skup $A_x \subset A$. Familija $E \cup \{A_x : x \in int\,A\}$ je otvoren pokrivač skupa $\overline{A}$. Skup $\overline{A}$ je kompaktan kao zatvoren i ograničen, pa se iz datog pokrivača može izdvojiti konačan podpokrivač $E \cup \{A_{x_i} : i = \overline{1, s}\}$. Skup $Q = E \cup (\cup_1^s A_{x_i})$ je elementaran i sadrži skup A. Elementaran je i skup $P = Q \setminus E \subset A$. Osim toga je

$$mP \le m_i A \le m_e A \le mQ\,,$$

pa je

$$0 \le m_e A - m_i A \le mQ - mP\,.$$

Kako je $Q = P \cup E$ i $P \cap E = \varnothing$, to je $mQ = mP + mE$, pa je $mQ - mP = mE < \varepsilon$. Na taj način dobijamo nejednakost

$$0 \le m_e A - m_i A < \varepsilon$$

iz koje zbog proizvoljnosti broja ε sledi izmerljivost skupa A. ■

Posledica 1. *Ako su A i B izmerljivi skupovi, tada su skupovi $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$ takođe izmerljivi.*

Dokaz. Neposredno sledi iz inkluzija $r(A \cup B) \subset rA \cup rB$, $r(A \cap B) \subset rA \cup rB$, $r(A \setminus B) \subset rA \cup rB$ i stavova 1., 2. i 4.. ■

Iz stavova 3. i 4. sledi da je svaki skup iz $\mathbb{R}^n$ izmerljiv ako je ograničen konačnim brojem degenerisanih n-dimenzionalnih jednostavnih skupova i konačnim brojem grafika neprekidnih preslikavanja $f : K \mapsto \mathbb{R}^q$ kompakta $K \subset \mathbb{R}^p$, $p + q = n$.

Na kraju ovog odeljka navedimo još jednu klasu skupova mere nula. Mera kojom se karakteriše ova klasa je uopštenje Žordanove mere.

Definicija 2. *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je* **Lebegove mere nula**, *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji najviše prebrojivo mnogo jednostavnih skupova Δ_i, $i \in \mathbb{N}$, takvih da je $A \subset \cup_i \Delta_i$ i $\sum_i m\Delta_i < \varepsilon$.*

Stav 5. *Prebrojiva unija skupova Lebegove mere nula je skup Lebegove mere nula.*

Dokaz. Neka je $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija skupova Lebegove mere nula i neka je $\varepsilon > 0$. Za svako $i \in \mathbb{N}$ postoji prebrojiva familija $\{\Delta_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$ jednostavnih skupova tako da je $A_i \subset \cup_j^\infty \Delta_{ij}$ i $\sum_j m\Delta_{ij} < \varepsilon/2^i$. Familija $\{\Delta_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ se sastoji od prebrojivo mnogo jednostavnih skupova, $\cup_i A_i \subset \cup_{i,j}\Delta_{i,j}$ i važi

$$\sum_{i,j} m\Delta_{i,j} = \sum_i \sum_j m\Delta_{i,j} < \sum_i \varepsilon/2^i = \varepsilon\,. \ \blacksquare$$

Iz definicije 2. sledi da je svaki skup Žordanove mere nula i Lebegove mere nula. Da obrat ne važi pokazuje sledeći primer.

Primer 1. Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup. Označimo sa A skup tačaka $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in U$ čije su sve koordinate racionalni brojevi. Skup A je prebrojiv, pa je prema prethodnom stavu Lebegove mere nula. Skup A međutim nije izmerljiv u Žordanovom smislu, jer je $m_i A = 0$, a $m_e A > 0$ (dokazati!).

Stav 6. *Ako je kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula, onda je on Žordanove mere nula.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je skup K Lebegove mere nula, postoji najviše prebrojivo mnogo otvorenih jednostavnih skupova Δ_i, $i \in \mathbb{N}$, tako da je $K \subset \cup_i \Delta_i$ i $\sum_i m\Delta_i < \varepsilon$. Skup K je kompaktan, pa se iz pokrivača $\{\Delta_i\}$ može izdvojiti konačan podpokrivač$\{\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_k}\}$ skupa K. Očigledno je $\sum_1^k m\Delta_{i_j} < \varepsilon$, pa je skup K Žordanove mere nula. $\blacksquare$

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = c, |x_i| \leq L, i = \overline{2,m}\}$, gde su c i L fiksirani brojevi, a A ograničen skup koji leži u hiperravni $x_1 = c$. Dokazati da je skup

A izmerljiv i da je $mA = 0$. (Uputstvo: dokazati da je $mA^{(n)} \leq 2(2L \cdot 2^n + 2)^{m-1}/2^{nm}$, vid. zadatak 2., 1.3.)

2. Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ skup Žordanove mere nula. Dokazati da je tada i skup $\overline{E}$ Žordanove mere nula.

3. Ako je $E \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv skup u Žordanovom smislu, i ako je $intE = \varnothing$, dokazati da je tada $mE = 0$.

4. Neka je F zatvoren prebrojiv podskup jednostavnog skupa $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Ako je skup F izmerljiv u Žordanovom smislu, dokazati da je $mF = 0$.

5. Dokazati da unija prebrojivo mnogo skupova izmerljivih u Žordanovom smislu ne mora biti izmerljiv skup u Žordanovom smislu. (Uputstvo: dokazati da je $m\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, a da $m(Q \cap [0,1])$ ne postoji)

6. Ako je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula, dokazati da je $intA = \varnothing$. Dokazati da obrat u opštem slučaju ne važi.

7. Dokazati da postoji skup A Lebegove mere nula za koji je $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

8. Dokazati da nedegenerisani jednostavan skup $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ nije skup Lebegove mere nula.

9. Dokazati da je graf neprekidnog preslikavanja $f : K \mapsto \mathbb{R}^m$ kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula.

10. Ako skup A, koji je izmerljiv u Žordanovom smislu, razbijemo na skupove A_1 i A_2 nekim skupom B Žordanove mere nula, dokazati da su tada skupovi A_1 i A_2 izmerljivi u Žordanovom smislu.

11. Dokazati da za svaki ograničen skup $A \subset \mathbb{R}^n$ važi inkluzija $rA \subset A^{(N)} - A_{(N)} \subset (rA)^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$. Koristeći dokazanu inkluziju, dokazati stav 4.

1.5. OSOBINE ŽORDANOVE MERE

Teorema 1. (Aditivnost mere) *Ako su A_i, $i = \overline{1,k}$ izmerljivi skupovi u $\mathbb{R}^n$ i $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$, tada je*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} mA_i. \tag{1}$$

Dokaz. Skup $\cup_1^k A_i$ je izmerljiv prema posledici 1., 1.4. Dokažimo jednakost (1) za $k = 2$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoje elementarni skupovi P_1, Q_1, P_2, Q_2 za koje je

$$P_1 \subset A_1 \subset Q_1\,, \qquad P_2 \subset A_2 \subset Q_2$$

i

$$mA_i - \varepsilon/2 < mP_i < mQ_i < mA_i + \varepsilon/2\,,\; i = \overline{1,2}\,.$$

Egzistencija takvih elementarnih skupova sledi iz definicije Žordanove mere skupa. Skupovi $P_1 \cup P_2$ i $Q_1 \cup Q_2$ su elementarni,

$$P_1 \cup P_2 \subset A_1 \cup A_2 \subset Q_1 \cup Q_2\,,$$

pa je

$$m(P_1 \cup P_2) \leq m(A_1 \cup A_2) \leq m(Q_1 \cup Q_2)\,.$$

Kako je $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, to je $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, odakle na osnovu osobina mere elementarnih skupova važi $mP_1 + mP_2 = m(P_1 \cup P_2)$. Takođe je $m(Q_1 \cup Q_2) \leq mQ_1 + mQ_2$, pa je

$$\begin{aligned} mA_1 + mA_2 - \varepsilon < mP_1 + mP_2 = m(P_1 \cup P_2) \leq m(A_1 \cup A_2) \leq \\ \leq m(Q_1 \cup Q_2) \leq mQ_1 + mQ_2 < mA_1 + mA_2 + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Odavde sledi nejednakost

$$|m(A_1 \cup A_2) - (mA_1 + mA_2)| < \varepsilon\,,$$

iz koje, zbog proizvoljnosti broja ε, sledi (1) za $k = 2$. Indukcijom se sada lako dokazuje (1). ■

Teorema 2. (Monotonost mere) *Ako su A i B izmerljivi skupovi i $A \subset B$, tada je*

$$mA \leq mB. \tag{2}$$

Dokaz. Primetimo najpre da je $B \setminus A$ izmerljiv skup prema posledici 1., 1.4. . Kako je $A \subset B$, to je $B = A \cup (B \setminus A)$, pa je prema prethodnoj teoremi

$$mB = mA + m(B \setminus A) \geq mA\,,$$

jer je mera nenegativna. ■

Teorema 3. (Poluaditivnost mere) *Ako su $A, A_1, \ldots, A_k$ izmerljivi skupovi i $A \subset \cup_1^k A_i$, tada je*

$$mA \le \sum_{i=1}^{k} mA_i \,. \tag{3}$$

Dokaz. Skupovi $A_1' = A_1$, $A_i' = A_i \setminus \cup_1^{i-1} A_j$, $i = \overline{2, k}$ su izmerljivi, $A_i' \cap A_j' = \varnothing$ za $i \neq j$ i važi jednakost

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i' \,.$$

Koristeći monotonost i aditivnost mere, dobijamo

$$mA \le m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i'\right) = \sum_{i=1}^{k} mA_i' \le \sum_{i=1}^{k} mA_i. \ \blacksquare$$

Napomenimo na kraju da svojstvo aditivnosti mere važi ako uslov $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$ zamenimo slabijim uslovom $m(A_i \cap A_j) = 0$ za $i \neq j$. Da bismo to dokazali, uočimo skup

$$B = \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) \,.$$

Označimo sa $A = \cup_1^k A_i$. Prema stavu 2., 1.4. $mB = 0$, pa je $m(A_i \cap B) = 0$ za svako $i = \overline{1, k}$. Kako je $A_i = (A_i \setminus B) \cup (A_i \cap B)$, to je prema teoremi 1. $mA_i = m(A_i \setminus B)$ za svako $i = \overline{1, k}$. Polazeći od jednakosti

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus B)\right) \cup B \,,$$

i koristeći svojstvo aditivnosti mere, dobijamo

$$mA = \sum_{i=1}^{k} m(A_i \setminus B) = \sum_{i=1}^{k} mA_i \,,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadaci za vežbanje

1. Ako su A_1 i A_2 ograničeni skupovi i $A_1 \subset A_2$, dokazati da je $m_i A_1 \leq m_i A_2$ i $m_e A_1 \leq m_e A_2$.

2. Ako su $A_1, \ldots, A_k$ ograničeni skupovi, dokazati da važi sledeća nejednakost: $m_e \cup_1^k A_i \leq \sum_i A_i$. Dokazati da ista nejednakost važi i za unutrašnju meru, ako su skupovi A_i otvoreni.

3. Navesti primer ograničenih skupova A_1 i A_2 za koje je $m_e(A_1 \cup A_2) \neq m_e A_1 + m_e A_2$.

4. Ako su A i B izmerljivi skupovi, dokazati da je $m(A \cup B) = mA + mB - m(A \cap B)$.

5. Dokazati da je $m(A \cup B) = mA$ onda i samo onda ako je $int(B \setminus A) = \varnothing$.

6. Dokazati da postoji neizmerljiv skup čija je adherencija izmerljiv skup.

7. Dokazati da Žordanova mera ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

8. Ako je A^* skup dobijen translacijom, rotacijom ili kompozicijom navedenih transformacija izmerljivog skupa A, onda je A^* izmerljiv skup i $mA = mA^*$. Dokazati.

9. Koristeći prethodni zadatak, dokazati da je svaki jednostavan skup $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv skup.

10. Dokazati da se svaki otvoren ograničen neprazan skup $G \subset \mathbb{R}^n$ može pretstaviti kao unija prebrojivo mnogo jednostavnih skupova $G = \cup_1^\infty \Delta_k$ i da je pri tome $m_i G = \sum_1^\infty m\Delta_k$, a da skup G ne mora biti izmerljiv u Žordanovom smislu. (Uputstvo: dokazati da je $\sum_1^\infty m\Delta_i = \lim_N G_{(N)}$)

2. RIMANOV INTEGRAL

2.1. POJAM VIŠESTRUKOG INTEGRALA

Pojam višestrukog integrala definisaćemo po analogiji sa jednostrukim integralom.

Definicija 1. *Neka je E izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$. Konačna familija $\tau = \{E_i : i = \overline{1,k}\}$ nepraznih izmerljivih skupova je* **razbijanje skupa** *E, ako je*

$$(i) \quad \bigcup_{i=1}^{k} E_i = E \qquad i \qquad (ii) \quad m(E_i \cap E_j) = 0 \quad za \quad i \neq j.$$

Primetimo da za svaki izmerljiv skup postoji razbijanje. Zaista, familija $\{E \cap \Delta : \Delta \in S_N\}$, gde su Δ jednostavni skupovi mreže S_N koja razlaže prostor $\mathbb{R}^n$ na n-dimenzionalne kocke dužine stranice 2^{-N}, pretstavlja razbijanje skupa E.

Neka je $\tau = \{E_i : i = \overline{1,k}\}$ razbijanje izmerljivog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako u svakom elementu E_i razbijanja τ fiksiramo neku tačku $\xi_i \in E_i$, $i = \overline{1,k}$, onda kažemo da je τ **razbijanje sa istaknutom tačkom** $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

Svakom razbijanju τ izmerljivog skupa E pridružimo broj

$$\delta_\tau := \max_{1 \le i \le k} d(E_i),$$

gde je $d(E_i)$ dijametar skupa E_i. Broj δ_τ je **dijametar razbijanja** τ.

Neka je $f : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcija definisana na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, a $\tau = \{E_i : i = \overline{1,k}\}$ razbijanje skupa E sa istaknutom tačkom $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

Definicija 2. *Suma*

$$S_\tau(f;\xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) mE_i$$

je ***integralna suma Rimana*** *funkcije f u odnosu na razbijanje τ sa istaknutom tačkom ξ.*

Definicija 3. *Graničnu vrednost*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau(f;\xi)\,,$$

ukoliko postoji nezavisno od razbijanja τ skupa E i izbora istaknute tačke ξ, nazivamo ***Rimanovim integralom funkcije*** *f na skupu E i označavamo jednom od sledećih oznaka*

$$\int_E f(x)dx \quad , \quad \int f dE \quad , \quad \underset{E}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Prethodnu definiciju možemo formulisati ekvivalentno na jedan od sledećih načina.

Definicija $3'$**.** *Broj I je Rimanov integral funkcije f definisane na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako razbijanje τ skupa E čiji je dijametar $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ važi*

$$|S_\tau(f;\xi) - I| < \varepsilon$$

nezavisno od izbora istaknute tačke ξ.

Definicija $3''$**.** *Broj I je Rimanov integral funkcije f na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, ako za svaki niz (τ_k) razbijanja skupa E za koji $\delta_{\tau_k} \to 0$ kada $k \to +\infty$ važi*

$$\lim_{k\to+\infty} S_{\tau_k}(f;\xi^k) = I$$

nezavisno od izbora istaknute tačke ξ^k razbijanja τ_k.

Definicija 4. *Za funkciju $f : E \mapsto \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***integrabilna u Rimanovom smislu*** *na izmerljivom skupu E, ako granične vrednosti u prethodnim definicijama postoje i konačni su brojevi.*

Skup svih funkcija integrabilnih u Rimanovom smislu na izmerljivom skupu E označavamo sa $\mathcal{R}(E)$.

Na osnovu Košijeve teoreme funkcija f je integrabilna u Rimanovom smislu na skupu E onda i samo onda ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svaka dva razbijanja τ' i τ'' skupa E čiji su dijametri manji od δ_ε važi nejednakost

$$|S_{\tau'}(f;\xi') - S_{\tau''}(f;\xi'')| < \varepsilon$$

nezavisno od izbora istaknutih tačaka ξ' i ξ'' razbijanja τ' i τ''.

Lema 1. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv skup, $E_0 \subset E$ i τ proizvoljno razbijanje skupa E. Ako je $mE_0 = 0$, onda je*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} \sum_{E_i\in\tau_0(E_0)} mE_i = 0\,,$$

gde je $\tau_0(E_0) = \{E_i \in \tau : \overline{E}_i \cap E_0 \neq \varnothing\}$.

Dokaz. Kako je $mE_0 = 0$, to je $m\overline{E}_0 = 0$.(vid. zadatak 2., 1.4.) Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji k tako da je $m(\overline{E}_0)^{(k)} < \varepsilon$, gde je sa

$(\overline{E}_0)^{(k)}$ označena unija jednostavnih skupova mreže S_k koji seku skup $\overline{E}_0$. Odatle sledi $\overline{E}_0 \subset (\overline{E}_0)^{(k)}$. Kako su $\overline{E}_0$ i $r(\overline{E}_0)^{(k)}$ zatvoreni i disjunktni skupovi, pri čemu je $\overline{E}_0$ ograničen, to je

$$\eta = d(\overline{E}_0, r(\overline{E}_0)^{(k)}) > 0\,,$$

pa svaki skup dijametra manjeg od η koji seče skup E_0 ceo pripada skupu $(\overline{E}_0)^{(k)}$. Neka je τ proizvoljno razbijanje skupa E čiji je dijametar $\delta_\tau < \eta$. Tada je svaki element $E_i \in \tau_0(E_0)$ podskup skupa $(\overline{E}_0)^{(k)}$, pa je

$$\bigcup_{E_i\in\tau_0(E_0)} E_i \subset (\overline{E}_0)^{(k)}\,.$$

Stoga je

$$\sum_{E_i\in\tau_0(E_0)} mE_i = m\left(\bigcup_{E_i\in\tau_0(E_0)} E_i\right) \le m(\overline{E}_0)^{(k)} < \varepsilon\,,$$

čime je dokaz završen. ■

Teorema 1. *Neka je E izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$, $E_0 \subset E$ skup mere nula, a $\tau = \{E_i\}_1^k$ proizvoljno razbijanje skupa E. Ako je funkcija f ograničena na skupu E, tada Rimanov integral funkcije f postoji na skupu E onda i samo onda ako postoji*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} S_{\tau(E_0)}(f;\xi)\,,$$

gde je $\tau(E_0) = \{E_i \in \tau : \overline{E}_i \cap E_0 = \varnothing\}$. Pri tome je poslednja granična vrednost jednaka integralu funkcije f na skupu E, ukoliko on postoji.

Dokaz. Očigledno je za svako razbijanje $\tau = \tau(E_0) \cup \tau_0(E_0)$, pri čemu $\tau(E_0)$ i $\tau_0(E_0)$ nemaju zajedničkih elemenata. Odatle je

$$S_\tau(f;\xi) = S_{\tau(E_0)}(f;\xi) + S_{\tau_0(E_0)}(f;\xi)\,.$$

Funkcija f je ograničena na skupu E, pa postoji $M > 0$ tako da je $|f(x)| \le M$ za svako $x \in E$. Kako je

$$|S_{\tau_0(E_0)}(f;\xi)| \le \sum_{E_i\in\tau_0(E_0)} |f(\xi_i)| mE_i \le M \sum_{E_i\in\tau_0(E_0)} mE_i\,,$$

to je prema prethodnoj lemi $\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau_0(E_0)}(f;\xi) = 0$ nezavisno od izbora istaknute tačke ξ razbijanja τ. Stoga granične vrednosti suma S_τ i $S_{\tau(E_0)}$ kada $\delta_\tau \to 0$ istovremeno postoje i jednake su, ili ne postoje. ■

Iz dokazane teoreme sledi, da se u definiciji Rimanovog integrala iz integralne sume mogu izostaviti oni sabirci, koji odgovaraju elementima razbijanja čija adherencija seče rub izmerljivog skupa po kome se vrši integracija. Ovo zbog toga što je rub izmerljivog skupa mere nula, a uz pretpostavku da je funkcija f ograničena. Stoga skup E_0 u prethodnoj teoremi možemo zameniti skupom rE. U tom slučaju je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau(rE)}(f;\xi) = \int_E f(x)dx\,.$$

Na osnovu dokazane teoreme zaključujemo da se za ograničenu funkciju na izmerljivom skupu karakter integrabilnosti neće izmeniti, ako joj promenimo vrednosti na skupu mere nula, uz uslov da nova funkcija ostane ograničena. Iz ovoga sledi da integrabilnost, kao i vrednost integrala ograničene funkcije na izmerljivom skupu ne zavise od vrednosti koje funkcija dobija na rubu tog skupa.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je Δ jednostavan skup u $\mathbb{R}^n$, a $E \subset \Delta$ izmerljiv skup u Žordanovom smislu. Rimanov integral funkcije f na skupu E definišimo kao

$$\int\limits_E f(x)dx := \int\limits_{\Delta \subset E} f_{\chi_E}(x)dx\,,$$

gde je integral po elementarnom skupu Δ definisan kao granična vrednost integralne sume $S_\tau(f;\xi)$, pri čemu je τ razbijanje skupa Δ dato u definiciji 1., 2.1.
.

a) Dokazati da je definicija korektna i da ne zavisi od izbora jednostavnog skupa Δ.

b) Dokazati da je ovako data definicija ekvivalentna sa definicijom 3., 2.1.(Uputstvo: $f_{\chi_E} = f \circ \chi_E$, gde je χ_E karakteristična funkcija skupa E)

2. Formulisati teoremu 1. pomoću nizova razbijanja i dokazati je.

2.2. USLOVI INTEGRABILNOSTI FUNKCIJA

Neka je E izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$, a $\tau = \{E_i\}_1^k$ i $\tau' = \{E'_j\}_1^{k'}$ razbijanja skupa E. Za razbijanje τ' kažemo da je **finije** od razbijanja τ, ako za svaki element $E'_j \in \tau'$ postoji element $E_i \in \tau$ za koji je $E'_j \subset E_i$. U tom slučaju pišemo $\tau' \succ \tau$. Primetimo da je relacija $\succ$ tranzitivna. Osim toga, za svaka dva razbijanja τ_1 i τ_2 postoji razbijanje $\tau = \tau_1 \cap \tau_2 = \{E_1 \cap E_2 : E_1 \in \tau_1, E_2 \in \tau_2\}$ koje je finije od razbijanja τ_1 i τ_2.

Ako je razbijanje τ' finije od razbijanja τ, onda se ono dobija iz razbijanja τ tako što se neki elementi razbijanja τ ponovo razbijaju na konačan broj izmerljivih skupova. Od elemenata razbijanja τ' možemo dakle dobiti sve elemente razbijanja τ:

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{s_i} E'_{i_k}, \quad i = \overline{1,k}\,.$$

Sam skup E može se prikazati kao unija $\cup_1^k E_i$ elemenata razbijanja τ ili kao unija $\cup_1^k \cup_1^{s_i} E'_{i_k}$ elemenata razbijanja τ'.

Neka je funkcija f ograničena na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, a $\tau = \{E_i : i = \overline{1,k}\}$ razbijanje skupa E. Označimo sa

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x) \qquad , \qquad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x)\,, \quad i = \overline{1,k}\,.$$

Sume

$$\underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i mE_i \quad \text{i} \quad \overline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i mE_i$$

nazivamo **donjom Darbuovom*** i **gornjom Darbuovom sumom** ili samo **donjom** odn. **gornjom integralnom sumom** funkcije f na skupu E u odnosu na razbijanje τ.

Kako je $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ za svaku tačku $\xi_i \in E_i$, $i = \overline{1,k}$, to je, sobzirom na činjenicu da je $mE_i \ge 0$,

$$\underline{S}_\tau(f) \le S_\tau(f;\xi) \le \overline{S}_\tau(f) \tag{1}$$

* Darboux G. (1842-1917)-francuski matematičar

za svako razbijanje τ, nezavisno od izbora istaknute tačke ξ.

Dokažimo još dva važna svojstva gornje i donje integralne sume. Neka je $\tau' = \{E'_{i_k} : k = \overline{1, l_i}, i = \overline{1, k}\}$ razbijanje skupa E finije od razbijanje $\tau = \{E_i : E_i = \cup_1^{l_i} E'_{i_k}, i = \overline{1, k}\}$. Neka je $M_{i_k} = \sup\{f(x) : x \in E'_{i_k}\}$. Tada je

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\tau'}(f) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{k=1}^{l_i} M_{i_k} mE'_{i_k} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} M_i \sum_{k=1}^{l_i} mE'_{i_k} = \sum_{i=1}^{k} M_i mE_i = \overline{S}_{\tau}(f)\,.\end{aligned}$$

Slično se dokazuje nejednakost $\underline{S}_{\tau'}(f) \geq \underline{S}_{\tau}(f)$. Dakle, ako je razbijanje τ' finije od razbijanja τ, tada važi nejednakost

$$\underline{S}_{\tau}(f) \leq \underline{S}_{\tau'}(f) \leq \overline{S}_{\tau'}(f) \leq \overline{S}_{\tau}(f)\,. \tag{2}$$

Neka su τ_1 i τ_2 dva proizvoljna razbijanja skupa E. Razbijanje $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$ je finije od razbijanja τ_1 i τ_2, pa je prema prethodno dokazanoj osobini

$$\underline{S}_{\tau_1} \leq \underline{S}_{\tau} \leq \overline{S}_{\tau} \leq \overline{S}_{\tau_2}\,.$$

Iz dokazanog sledi da je

$$\underline{S}_{\tau_1} \leq \overline{S}_{\tau_2} \tag{3}$$

za svaka dva razbijanja τ_1 i τ_2 skupa E.

Fiksirajući razbijanje τ_2 u (3) zaključujemo da je skup $\{\underline{S}_{\tau}\}$ svih donjih integralnih suma funkcije f na skupu E odozgo ograničen. Na osnovu aksiome supremuma, $\sup_{\tau} \underline{S}_{\tau}$ postoji i važi nejednakost

$$\underline{I}_f := \sup_{\tau} \underline{S}_{\tau} \leq \overline{S}_{\tau_2}\,. \tag{4}$$

Broj $\underline{I}_f$ nazivamo **donjim integralom funkcije** f na skupu E. Očigledno da poslednja nejednakost važi za svako razbijanje τ_2 skupa E. Skup $\{\overline{S}_{\tau}\}$ je, dakle, odozdo ograničen donjim integralom funkcije f, pa postoji $\inf_{\tau} \overline{S}_{\tau}$ i važi nejednakost

$$\overline{I}_f := \inf_{\tau} \overline{S}_{\tau} \geq \underline{I}_f\,. \tag{5}$$

Broj $\overline{I}_f$ definiše **gornji integral funkcije** f na skupu E.

Dokažimo sada osnovnu teoremu koja daje potrebne i dovoljne uslove za integrabilnost funkcija.

Teorema 1. *Neka je funkcija f ograničena na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(i) $\underline{I}_f = \overline{I}_f$

(ii) za svako $\varepsilon > 0$ postoji razbijanje τ tako da je

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon\,, \tag{6}$$

(iii) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako razbijanje τ skupa E dijametra $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ važi (6),

(iv) postoji integral

$$\int f\,dE = I \tag{7}$$

i $\underline{I}_f = \overline{I}_f = I$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $\underline{I}_f = \sup_\tau \underline{S}_\tau$, to postoji razbijanje τ_1 skupa E tako da je $\underline{I}_f - \varepsilon/2 < \underline{S}_{\tau_1}$. Takođe postoji razbijanje τ_2 skupa E tako da je $\overline{S}_{\tau_2} < \overline{I}_f + \varepsilon/2$. Tada za razbijanje $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$ zbog (2) važi nejednakost

$$\underline{I}_f - \varepsilon/2 < \underline{S}_{\tau_1} \le \underline{S}_\tau \le \overline{S}_\tau \le \overline{S}_{\tau_2} < \overline{I}_f + \varepsilon/2\,,$$

odakle sledi nejednakost (6).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Kako je $\underline{S}_\tau \le \underline{I}_f \le \overline{I}_f \le \overline{S}_\tau$ za svako razbijanje τ, to iz (ii), odn. (6) sledi nejednakost $\overline{I}_f - \underline{I}_f < \varepsilon$. Donji i gornji integral ne zavise od ε, pa stoga zbog proizvoljnosti broja ε važi jednakost $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Pretpostavimo da postoji integral (7) i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako razbijanje τ skupa E dijametra $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ važi

$$I - \varepsilon/2 < \sum_{E_i \in \tau} f(\xi_i) m E_i < I + \varepsilon/2$$

nezavisno od izbora istaknute tačke $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ razbijanja $\tau = \{E_i\}_1^k$. Uzimajući u poslednjoj nejednakosti infimum i supremum funkcije f po $\xi_i \in E_i$, dobijamo nejednakost

$$I - \varepsilon/2 \le \underline{S}_\tau \le \overline{S}_\tau \le I + \varepsilon/2$$

iz koje sledi (6).

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Očigledno važi.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in E$ i neka je $\varepsilon > 0$, a $\tau^* = \{E_i^* : i = \overline{1,k}\}$ razbijanje skupa E za koje važi (6). Označimo sa $\Gamma = \cup_1^k rE_i^*$. Skupovi E_i^* su izmerljivi, pa su skupovi rE_i^*, a time i Γ mere nula. Stoga postoji elementaran skup σ' koji sadrži skup Γ za koji je $m\sigma' < \varepsilon/2K$. Označimo sa σ otvoren elementaran skup koji sadrži skup σ' za koji takođe važi nejednakost $m\sigma < \varepsilon/2K$. Takav elementaran skup postoji prema zadatku 3., 1.2.. Skupovi Γ i $\mathbb{R}^n \setminus \sigma$ su zatvoreni i disjunktni, skup Γ je ograničen, pa je prema stavu 5., I.1.3. $d(\Gamma, \mathbb{R}^n \setminus \sigma) = \delta_\varepsilon > 0$. Neka je τ proizvoljno razbijanje skupa E dijametra $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$. Sumu (6) prikažimo u obliku

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = \sum_j{}' (M_j - m_j) mE_j + \sum_j{}'' (M_j - m_j) mE_j \,,$$

pri čemu se u sumi $\sum'_j$ vrši sumiranje po onim indeksima j za koje elementi E_j razbijanja τ imaju neprazan presek sa skupom Γ, dok se u sumi $\sum''_j$ vrši sumiranje po ostalim indeksima. Ako je za $E_i \in \tau$ $E_i \cap \Gamma \neq \varnothing$, onda je $E_i \subset \sigma$, pa za prvu sumu važi ocena

$$\sum_j{}' (M_j - m_j) mE_j \leq 2K \sum_j{}' mE_j < \varepsilon \,.$$

Ako za element $E_j \in \tau$ važi $\Gamma \cap E_j = \varnothing$, onda postoji element $E_i^* \in \tau^*$ za koji je $E_j \subset E_i^*$. Stoga je drugu sumu moguće napisati u obliku $\sum''_j = \sum_i \sum^i$, gde je sa $\sum^i$ označeno sumiranje po onim indeksima j za koje je $E_j \subset E_i^*$. U tom slučaju je

$$\begin{aligned}
\sum_j{}'' (M_j - m_j) mE_j &= \sum_i \sum{}^i (M_j - m_j) mE_j \leq \\
&\leq \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i mE_j \leq \sum_i (M_i^* - m_i^*) mE_i^* < \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

pa je $\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < 2\varepsilon$ za svako razbijanje τ dijametra manjeg od δ_ε, što je i trebalo dokazati.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema (iii) postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako razbijanje τ dijametra $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ važi (6). Tada prema (1) važi nejednakost

$$\underline{S}_\tau \leq S_\tau(f;\xi) \leq \overline{S}_\tau \,.$$

Kako je prema dokazanom $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$, to je $\underline{I}_f = \overline{I}_f = I$, pa prema (5) takođe važi nejednakost

$$\underline{S}_\tau \leq \underline{I}_f = \overline{I}_f \leq \overline{S}_\tau \,.$$

Iz poslednjih nejednakosti sledi nejednakost

$$|S_\tau(f,\xi) - I| \leq \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon$$

koja važi nezavisno od izbora istaknute tačke ξ razbijanja τ. Time smo dokazali da je funkcija f integrabilna na skupu E i da važi (7). ■

Iz (iii) se može zaključiti da je funkcija integrabilna na izmerljivom skupu onda i samo onda ako je

(8)
$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \underline{S}_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} \overline{S}_\tau \,.$$

Sada iz (8), a na osnovu dokazane teoreme, imamo sledeće jednakosti

(9)
$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \underline{S}_\tau = \underline{I}_f \quad \text{i} \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \overline{S}_\tau = \overline{I}_f \,.$$

Može se dokazati da poslednje jednakosti važe za svaku ograničenu funkciju. Međutim, iz egzistencije graničnih vrednosti u (9) još uvek ne sledi integrabilnost funkcije f, što dokazuje sledeći

Primer 1. Neka je $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1,n}\}$. Funkcija

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x_i \in \mathbb{Q} \quad \text{za svako } i = \overline{1,n}\,, \\ 1, & x_i \in I \quad \text{za neko } i = \overline{1,n} \end{cases}$$

je ograničena na skupu I^n. Za svako razbijanje τ skupa I^n je $\underline{S}_\tau = 0$, a $\overline{S}_\tau = 1$, pa je $\underline{I}_f = 0$, a $\overline{I}_f = 1$, što dokazuje da funkcija χ nije integrabilna na I^n, dok granične vrednosti u (9) postoje.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $\tau_k = \{E_j^k : j = \overline{1, l_k}\}$ niz razbijanja izmerljivog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ za koji $\delta_{\tau_k} \to 0$ kada $k \to +\infty$ i neka je funkcija f ograničena na skupu E. Ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:

(i) $\lim_k(\overline{S}_{\tau_k}(f) - \underline{S}_{\tau_k}(f)) = 0$,

(ii) $\lim_k \sum_{j=1}^{l_k} f(\xi_j^k) mE_j^k = I$,

(iii) $\lim_k \overline{S}_{\tau_k} = \lim_k \underline{S}_{\tau_k} = I$,

dokazati da je onda funkcija f integrabilna na skupu E. Da li važi obrat ?

2. Dokazati da za svaku ograničenu funkciju f na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ važe jednakosti (9).

3. Dokazati da egzistencija samo jedne granične vrednosti u (*iii*) zadatka 1. nije dovoljna za integrabilnost funkcije f.

2.3. KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Teorema 1. *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom i izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, onda je ona integrabilna na E.*

Dokaz. Primetimo najpre da je skup E ograničen kao izmerljiv, pa je kompaktan. Neka je $\varepsilon > 0$. Funkcija f je neprekidna na kompaktnom skupu E, pa je na osnovu Kantorove teoreme na njemu i ravnomerno neprekidna. Stoga za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svake dve tačke $\xi', \xi'' \in E$ koje zadovoljavaju uslov $d(\xi', \xi'') < \delta_\varepsilon$ važi nejednakost $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon/mE$. Neka je $\tau = \{E_i\}$ proizvoljno razbijanje skupa E dijametra manjeg od δ_ε. Kako je

$$M_i - m_i = \sup_{\xi' \in E_i} f(\xi') - \inf_{\xi'' \in E_i} f(\xi'') =$$

$$= \sup_{\xi' \in E_i} f(\xi') + \sup_{\xi'' \in E_i} (-f(\xi'')) = \sup_{\xi', \xi'' \in E_i} [f(\xi') - f(\xi'')] \leq \varepsilon/mE\,,$$

to je

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = \sum (M_i - m_i) mE_i \leq \frac{\varepsilon}{mE} \sum mE_i = \varepsilon,$$

pa je prema teoremi 1., 2.2. funkcija f integrabilna na skupu E. ■

Teorema 2. *Neka je funkcija f ograničena na zatvorenom i izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je funkcija f neprekidna na skupu E osim u tačkama skupa $\Delta \subset E$ mere nula, onda je ona integrabilna na skupu E.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Skup Δ je mere nula, pa postoji otvoren elementaran skup E_0 koji sadrži skup Δ, tako da je $mE_0 < \varepsilon/4K$, gde je $|f(x)| \le K$ za svako $x \in E$. Skup $E \setminus E_0$ je izmerljiv, funkcija f je neprekidna na njemu, pa je prema prethodnoj teoremi integrabilna na njemu. No onda prema teoremi 1., 2.2. postoji razbijanje $\tau' = \{E_i\}_1^k$ skupa $E \setminus E_0$ tako da je $\overline{S}_{\tau'} - \underline{S}_{\tau'} < \varepsilon/2$. Tada je $\tau = \tau' \cup \{E \cap E_0\}$ razbijanje skupa E za koje je

$$\overline{S}_{\tau} - \underline{S}_{\tau} = (\overline{S}_{\tau'} - \underline{S}_{\tau'}) + (M - m)m(E \cap E_0) < \varepsilon/2 + 2K\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon\,,$$

gde je $M = sup_{x \in E \cap E_0} f(x)$, $m = \inf_{x \in E \cap E_0} f(x)$, pa je funkcija f integrabilna na skupu E prema teoremi 1., 2.2.. ■

Poslednja teorema može se uopštiti, tako da važi za širu klasu funkcija. Pre formulacije tog tvrđenja, uvedimo sledeći pojam.

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na skupu E. Za funkciju f kažemo da ima svojstvo $\mathcal{G}$* **skoro svuda na skupu** *E, ako ona ima svojstvo $\mathcal{G}$ na skupu $E \setminus E_0$, gde je $E_0 \subset E$ skup Lebegove mere nula.*

Teorema 3. *Neka je funkcija f ograničena na zatvorenom i izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je funkcija f neprekidna skoro svuda na skupu E, onda je ona integrabilna na njemu.*

Dokaz. Funkcija f je ograničena na skupu E, pa postoji $K > 0$ tako da je $|f(x)| \le K$ za svako $x \in E$. Neka je E_0 skup tačaka prekida funkcije f. Po pretpostavci, Lebegova mera skupa E_0 je nula. Neka je $\varepsilon > 0$ i pretpostavimo da je $mE > 0$, jer je u protivnom tvrđenje trivijalno. Označimo sa $E_\lambda = \{x \in E : \omega(x) \ge \lambda\}$, gde je $0 < \lambda < \varepsilon/4mE$. Skup E_λ je zatvoren i ograničen, Lebegova mera mu je nula, pa je prema stavu 6., 1.4., skup E_λ Žordanove mere nula. Stoga postoji otvoren elementaran skup σ koji sadrži skup E_λ tako da je $m\sigma < \varepsilon/4K$. Sada skup E možemo prikazati kao uniju skupova $E \setminus \sigma$ i $E \cap \sigma$ koji su izmerljivi. Za skup $E \cap \sigma$ je $m(E \cap \sigma) < \varepsilon/4K$. Skup $E \setminus \sigma$ je zatvoren i ograničen, pri čemu je $\omega(x) < \lambda$ za svako

$x \in E \setminus \sigma$, pa prema zadatku 12., I.2.6., postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x', x'' \in E \setminus \sigma$ za koje je $d(x', x'') < \delta$ važi $|f(x') - f(x'')| < 2\lambda$. Neka je $\tau' = \{E_i\}$ proizvoljno razbijanje skupa $E \setminus \sigma$ čiji je dijametar manji od δ. Tada je $\tau = \tau' \cup \{E \cap \sigma\}$ razbijanje skupa E za koje je

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = (M - m)m(E \cap \sigma) + \sum (M_i - m_i)mE_i <$$
$$< 2K\frac{\varepsilon}{4K} + 2\lambda \sum mE_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda mE < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je funkcija f integrabilna na skupu E prema teoremi 1., 2.2. ■

Međutim, važi i obrat prethodne teoreme, koji sa dokazanom teoremom daje Lebegovu teoremu.

Teorema 4. (Lebeg) *Ako je funkcija f ograničena i integrabilna na zatvorenom i izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, onda je ona neprekidna skoro svuda na skupu E.*

Dokaz. Neka je $E_\lambda = \{x \in E : \omega(x) \geq \lambda\}$, gde je $\lambda > 0$ i neka je $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija f integrabilna na skupu E, prema teoremi 1., 2.2. postoji razbijanje $\tau = \{E_i\}$ skupa E tako da je $\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \lambda\varepsilon$. Tada je mera unije onih skupova razbijanja τ koji sadrže bar jednu unutrašnju tačku skupa E_λ manja od ε. Da to dokažemo, primetimo najpre da za svaku unutrašnju tačku $x \in E_\lambda$ i skup E_i koji je sadrži, postoji otvorena kugla K_δ sa središtem u tački x koja je sadržana u skupu E_i. Ako je $M_\delta = \sup_{x \in K_\delta} f(x)$, $m_\delta = \inf_{x \in K_\delta} f(x)$, tada je $M_i - m_i \geq M_\delta - m_\delta \geq \omega(x) \geq \lambda$. No onda je

$$\lambda {\sum}' mE_i \leq {\sum}' (M_i - m_i)mE_i \leq \sum (M_i - m_i)mE_i = \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \lambda\varepsilon,$$

gde smo sa ${\sum}'$ označili sumu po onim elementima razbijanja τ koji sadrže bar jednu unutrašnju tačku skupa E_λ. Stoga je $m(\cup_i' E_i) < \varepsilon$. Tačke skupa E_λ koje nisu u skupu $\cup_i' E_i$ mogu pripadati samo rubnim tačkama skupova E_i, pa je ukupnosti tih tačaka skup Žordanove mere nula. Stoga je $mE_\lambda < \varepsilon$ za svako $\lambda > 0$ i $\varepsilon > 0$, odakle sledi da je skup E_λ Žordanove mere nula.

Kako se skup E_0 svih tačaka prekida funkcije f na skupu E može prikazati kao

$$E_0 = \bigcup_1^{+\infty} E_{1/n},$$

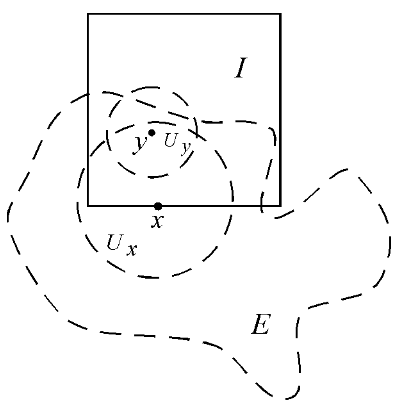
pri čemu je svaki od skupova $E_{1/n}$ Žordanove mere nula, to je E_0 skup Lebegove mere nula na osnovu stava 5., 1.4. i činjenice da je svaki skup Žordanove mere nula istovremeno i Lebegove mere nula. ■

U svim dosadašnjim razmatranjima za funkciju smo uvek pretpostavljali da je ograničena. Iz teorije integrala realnih funkcija jedne promenljive poznato je da je svaka funkcija integrabilna u svojstvenom smislu ograničena na intervalu integracije. Za višestruke integrale takvo tvrđnje očito ne važi, jer je integral na skupu mere nula proizvoljne funkcije jednak nuli. Stoga se prirodno postavlja pitanje određivanja skupova na kojima važi analogno tvrđenje. U tom cilju uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 2. *Za skup $E \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da ima* **svojstvo** $\mathcal{A}$*, ako je izmerljiv u Žordanovom smislu i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji razbijanje τ skupa E dijametra $\delta_\tau < \varepsilon$ tako da je svaki element razbijanja τ pozitivne mere.*

Stav 5. *Otvoren izmerljiv skup $E \subset \mathbb{R}^n$ ima svojstvo $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Dokažimo najpre da presek otvorenog skupa E i zatvorene kocke I ima pozitivnu meru, ako je $E \cap I \neq \varnothing$. Za to je dovoljno dokazati da postoji otvorena kocka $Q \subset E \cap I$. Neka je $x \in E \cap I$. Skup E je otvoren, pa postoji otvoren skup $U_x \subset E$. Skup $U_x \cap I$ sadrži neku unutrašnju tačku skupa I. Neka je $y \in U_x \cap I$ unutrašnja tačka skupa I. Tada postoji otvorena okolina U_y tačke y tako da je $U_y \subset I$. No onda je $U_x \cap U_y \subset U_x \cap I \subset E \cap I$, i kako je $U_x \cap U_y$ otvoren skup, postoji otvorena kugla, a sa njom i otvorena kocka Q koja je sadržana u $U_x \cap U_y$ odn. u $E \cap I$. Stoga je $m(E \cap I) > 0$. Uočimo sada u $\mathbb{R}^n$ mrežu koja ga razlaže na podudarne kocke dijametra manjeg od ε, gde je $\varepsilon > 0$. Neka su $I_1, \ldots, I_m$ svi neprazni preseci uočene mreže sa skupom E. Njih je konačno mnogo, jer je E kao izmerljiv skup ograničen. Skupovi $I_1 \cap E, \ldots, I_m \cap E$ čine razbijanje skupa E čiji je dijametar manji od

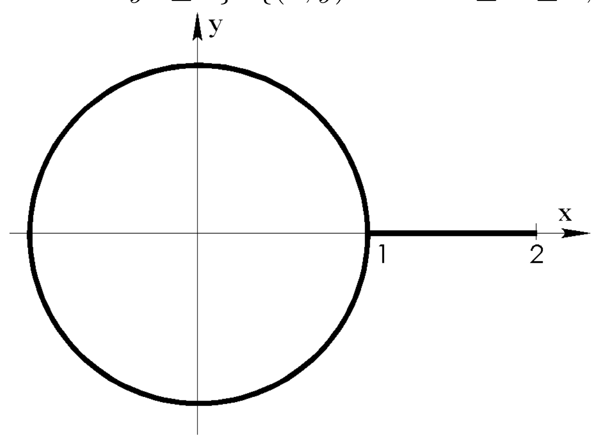


Sl. 15

ε, pri čemu je $m(E \cap I_k) > 0$, $k = \overline{1,m}$. Time smo dokazali da skup E ima svojstvo $\mathcal{A}$. ■

Lako je videti da zatvorenje $\overline{E}$ skupa E koji ima svojstvo $\mathcal{A}$ takođe ima svojstvo $\mathcal{A}$. Međutim, ima skupova koji nemaju svojstvo $\mathcal{A}$, što pokazuje sledeći

Primer 1. Skup $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$ nema svojstvo $\mathcal{A}$. Zaista, za $\varepsilon = 1/2$ ne postoji razbijanje zadatog skupa dijametra manjeg od ε čiji su svi elementi pozitivne mere. U protivnom, bar jedan element takvog razbijanja bio bi sadržan u skupu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$, pa bi mera tog skupa bila jednaka nuli.



Sl. 16

Teorema 6. *Ako je funkcija f integrabilna na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ koji zadovoljava svojstvo $\mathcal{A}$, onda je ona ograničena na skupu E.*

Dokaz. Skup E ima svojstvo $\mathcal{A}$, pa za svako $\delta > 0$ postoji razbijanje $\tau = \{E_i\}_0^k$ dijametra $\delta_\tau < \delta$ tako da je $mE_i > 0$ za svako $i = \overline{0,k}$. Pretpostavimo da je funkcija f neograničena na skupu E. Onda je ona neograničena bar na jednom od elemenata razbijanja τ. Neka je funkcija f neograničena na skupu E_0. U integralnoj sumi

$$S_\tau = f(\xi_0)mE_0 + \sum_1^k f(\xi_i)mE_i$$

fiksirajmo tačke ξ_i za $i = \overline{1,k}$. Kako je funkcija f neograničena na skupu E_0 i $mE_0 > 0$, za svako $M > 0$ tačku ξ_0 možemo izabrati tako da je $|S_\tau| \geq M$. No onda funkcija f nije integrabilna na skupu E, što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. ■

Kao neposrednu posledicu stava 5. i teoreme 6. imamo sledeće tvrđenje.

Posledica 1. *Ako je funkcija f integrabilna na otvorenom i izmerljivom skupu ili na zatvorenju takvog skupa, onda je ona ograničena na njemu.*

Konačno, na osnovu dokazanih teorema Lebegovu teoremu možemo formulisati na sledeći način.

Teorema 7. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i izmerljiv skup koji ima svojstvo $\mathcal{A}$. Funkcija f je integrabilna na skupu E onda i samo onda ako je ograničena na E i neprekidna skoro svuda na E.*

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je funkcija $f(x, y) = \sin(1/xy)$ integrabilna na skupu $\{(x, y) : 0 < x \leq \pi/2, 0 < y \leq \pi/2\}$.
2. Dokazati da zatvorenje otvorenog skupa ima svojstvo $\mathcal{A}$.
3. Konstruisati primer funkcije koja je neograničena i integrabilna na skupu pozitivne mere.

2.4. SVOJSTVA VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Stav 1. *Ako je skup $E \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv, onda je $\int dE = mE$.*

Dokaz. Neka je $\tau = \{E_i\}_1^k$ razbijanje skupa E. Tada je

$$\int dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} mE_i = mE. \ \blacksquare$$

Stav 2. *Neka su E i E^* izmerljivi skupovi u $\mathbb{R}^n$ i neka je $E^* \subset E$. Ako je funkcija f ograničena i integrabilna na skupu E, onda je ona integrabilna na skupu E^*.*

Dokaz. Skup $E^{**} = E \backslash E^*$ je izmerljiv kao razlika izmerljivih skupova. Neka je $\tau^* = \{E_i^*\}$ razbijanje skupa E^*, $\tau^{**} = \{E_j^{**}\}$ razbijanje skupa E^{**}, pri čemu je $\delta_{\tau^{**}} \leq \delta_{\tau^*}$. Tada je $\tau = \tau^* \cup \tau^{**}$ razbijanje skupa E za koje je $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Funkcija f je integrabilna na skupu E, pa je $\lim_{\delta_\tau \to 0}(\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau) = 0$. Kako je

$$\overline{S}_{\tau^*} - \underline{S}_{\tau^*} \leq (\overline{S}_{\tau^*} - \underline{S}_{\tau^*}) + (\overline{S}_{\tau^{**}} - \underline{S}_{\tau^{**}}) = \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau,$$

to je $\lim_{\delta_\tau \to 0}(\overline{S}_{\tau^*} - \underline{S}_{\tau^*}) = 0$, jer $\delta_{\tau^*} \to 0$ kada $\delta_\tau \to 0$, pa je funkcija f integrabilna na skupu E^*. $\blacksquare$

Stav 3. *Neka su E' i E'' izmerljivi skupovi za koje je $m(E' \cap E'') = 0$. Ako je funkcija f ograničena i integrabilna na skupu $E = E' \cup E''$, onda je ona integrabilna na skupovima E' i E''. Pri tome je*

$$\int f\,dE = \int f\,dE' + \int f\,dE''\,. \tag{1}$$

Važi i obrat: ako je ograničena funkcija integrabilna na skupovima E' i E'' ona je integrabilna na skupu E.

Dokaz. Neka je ograničena funkcija f integrabilna na skupu E. Tada je ona integrabilna na skupovima E' i E'' prema prethodnom stavu. Da dokažemo jednakost (1), uočimo razbijanja $\tau' = \{E'_i\}$ i $\tau'' = \{E''{}_j\}$ skupova E' i E''. Tada je $\tau = \tau' \cup \tau''$ razbijanje skupa E čiji je dijametar $\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$. Ako su ξ' i ξ'' istaknute tačke razbijanja τ' i τ'', onda je $\xi = \xi' \cup \xi''$ istaknuta tačka razbijanja τ. Očigledno je

$$S_\tau(f,\xi) = S_{\tau'}(f,\xi') + S_{\tau''}(f,\xi'')\,.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj jednakosti kada $\delta_\tau \to 0$, zbog egzistencije integrala u (1) i činjenice da tada i $\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''} \to 0$, dobijamo (1).

Dokažimo obrat. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija f ograničena i integrabilna na skupovima E' i E'', prema teoremi 1., 2.2. postoje razbijanja τ' i τ'' skupova E' i E'' tako da je

$$\overline{S}_{\tau'} - \underline{S}_{\tau'} \leq \varepsilon/2 \quad \text{i} \quad \overline{S}_{\tau''} - \underline{S}_{\tau''} \leq \varepsilon/2\,.$$

No onda je za razbijanje $\tau = \tau' \cup \tau''$ skupa E

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = (\overline{S}_{\tau'} - \underline{S}_{\tau'}) + \overline{S}_{\tau''} - \underline{S}_{\tau''} < \varepsilon\,,$$

pa je funkcija f integrabilna na skupu E prema teoremi 1., 2.2. ■

Uslov ograničenosti funkcije f je bitan u dokazu drugog dela tvrđenja poslednje teoreme, što dokazuje sledeći

Primer 1. Neka je u polarnom koordinatnom sistemu zadata funkcija

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{za } r < 1\,, \\ 1/\varphi, & \text{za r=1 i } 0 < \varphi \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Funkcija f je integrabilna na izmerljivom skupu $E' = \{(r,\varphi) : r < 1\}$ i $\int_{E'} dE' = 0$. Ona je integrabilna i na skupu $E'' = \{(r,\varphi) : r = 1\,,\, 0 < \varphi \le 2\pi\}$ i ako je na njemu neograničena, jer je $mE'' = 0$, pa je $\int_{E''} dE'' = 0$. Skup $E = E' \cup E''$ je izmerljiv i ima svojstvo $\mathcal{A}$ kao zatvorenje otvorenog i izmerljivog skupa E'. Stoga integral $\int f\,dE$ ne postoji, jer bi u protivnom funkcija f bila ograničena na skupu E prema teoremi 6., 2.3.

Stav 4. *Neka su funkcije f i g ograničene i integrabilne funkcije na izmerljivom skupu E, a λ realan broj. Tada su funkcije λf, $f+g$, $|f|$, $f \cdot g$ i $1/f$ za $|f| > d > 0$ integrabilne na skupu E, pri čemu važe jednakosti*

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(i) \int \lambda f\,dE = \lambda \int f\,dE\,,\\ &(ii) \int (f+g)\,dE = \int f\,dE + \int g\,dE\,. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokažimo recimo integrabilnost funkcije $f \cdot g$ na skupu E. Funkcije f i g su ograničene na skupu E, pa postoji $K > 0$ tako da je $|f(x)| \le K$ i $|g(x)| \le K$ za svako $x \in E$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako su funkcije f i g integrabilne na skupu E, to prema teoremi 1., 2.2. postoji razbijanje τ skupa E tako da je $\sum \omega_i(f) mE_i < \varepsilon/2K$ i $\sum \omega_i(g) mE_i < \varepsilon/2K$. Kako je $\omega_i(fg) \le K(\omega_i(f) + \omega_i(g))$, to je $\sum \omega_i(fg) mE_i < \varepsilon$, čime smo dokazali da je funkcija fg integrabilna na skupu E.

Slično se dokazuje integrabilnost ostalih funkcija. Jednakosti (2) neposredno proizilaze iz sledećih jednakosti

$$S_\tau(\lambda f, \xi) = \lambda S_\tau(f,\xi)\,, \qquad S_\tau(f+g,\xi) = S_\tau(f,\xi) + S_\tau(g,\xi)$$

i pretpostavke da su funkcije f i g integrabilne na skupu E. ■

Stav 5. *Neka su funkcije f, g i φ ograničene i integrabilne na izmerljivom skupu E. Ako je $f(x) \le g(x)$ i $\varphi(x) \ge 0$ za svako $x \in E$, tada je*

$$(3)\qquad \int f\varphi\,dE \le \int g\varphi\,dE\,.$$

Specijalno, ako je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in E$, tada je

$$\int f\varphi\, dE = \mu \int \varphi\, dE \tag{4}$$

za neko $\mu \in [m, M]$. Ako je E zatvoren put povezan skup, a funkcija f neprekidna na skupu E, onda postoji $\xi \in E$ tako da je

$$\int f\varphi\, dE = f(\xi) \int \varphi\, dE\,. \tag{5}$$

Dokaz. Primetimo najpre da svi integrali u jednakostima (3), (4) i (5) postoje. Kako je $f\varphi \leq g\varphi$ za svako $x \in E$, to je $S_\tau(f\varphi) \leq S_\tau(g\varphi)$ za svako razbijanje τ. Funkcije $f\varphi$ i $g\varphi$ su integrabilne na E, pa prelaskom na graničnu vrednost u ovoj nejednakosti kada $\delta_\tau \to 0$ dobijamo (3).

Da dokažemo (4), primetimo najpre da je $\int \varphi\, dE \geq 0$. Kako je $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in E$, to je prema prethodno dokazanom svojstvu $m \int \varphi\, dE \leq \int f\varphi\, dE \leq M \int \varphi\, dE$, pa je $\int f\varphi\, dE = \mu \int \varphi\, dE$ za neko $\mu \in [m, M]$.

Jednakost (5) pretstavlja prvu teoremu o srednjoj vrednosti za višestruke integrale i neposredno sledi iz (4) primenom teoreme o međuvrednosti neprekidne funkcije na zatvorenom put povezanom skupu. ■

Posledica 1. *Ako je funkcija f ograničena i integrabilna na izmerljivom skupu $E \in \mathbb{R}^n$, tada je*

$$\left| \int f\, dE \right| \leq \int |f|\, dE\,. \tag{6}$$

Dokaz. Neposredno sledi iz nejednakosti $-|f| \leq f \leq |f|$ i prethodnog stava. Funkcija $|f|$ je integrabilna prema stavu 4. ■

Stav 6. *Neka je funkcija f nenegativna , ograničena i integrabilna na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $E^* \subset E$ izmerljiv skup, onda je*

$$\int f\, dE^* \leq \int f\, dE\,. \tag{7}$$

Dokaz. Na osnovu stava 2. integrali $\int f\,dE^*$ i $\int f\,d(E \setminus E^*)$ postoje, pa je prema stavu 3.

$$\int f\,dE = \int f\,dE^* + \int f\,d(E \setminus E^*)\,.$$

Kako je funkcija f nenegativna, to je prema stavu 5. $\int f\,d(E \backslash E^*) \geq 0$. No onda iz prethodne jednakosti sledi nejednakost (7). ■

Stav 7. *Neka je funkcija f ograničena i integrabilna na izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz izmerljivih podskupova skupa E za koji je $\lim_{k\to\infty} mE_k = mE$, tada je*

$$\lim_{k\to+\infty} \int f\,dE_k = \int f\,dE\,. \tag{8}$$

Dokaz. Funkcija f je ograničena na E, pa postoji $K > 0$ tako da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in E$. Kako je $\lim_{k\to\infty} mE_k = mE$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|mE - mE_n| = m(E \setminus E_n) < \varepsilon/K$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$. No onda je

$$\left|\int f\,dE - \int f\,dE_n\right| = \left|\int f\,d(E \setminus E_n)\right| \leq \\ \leq \int |f|\,d(E \setminus E_n) \leq Km(E \setminus E_n) < \varepsilon\,,$$

čime je dokazana jednakost (8). ■

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati integrabilnost funkcija λf, $f \pm g$, $|f|$ i $1/f$, $|f| > d > 0$ pod uslovima stava 4.

2. Neka su f i g ograničene i integrabilne funkcije funkcije na izmerljivom skupu E. Ako su funkcije f i g jednake na skupu E svuda, osim u tačkama skupa $E_0 \subset E$ Žordanove mere nula, dokazati da je tada $\int f\,dE = \int g\,dE$.

3. Neka je funkcija f nenegativna i integrabilna na otvorenom i izmerljivom skupu E. Ako je funkcija f neprekidna u tački $x_0 \in E$ i $f(x_0) > 0$, dokazati da je tada $\int f\,dE > 0$.

4. Neka je funkcija $f : \overline{E} \mapsto \mathbb{R}$ integrabilna na skupu $\overline{E}$, gde je E otvoren izmerljiv skup. Ako je $f = 0$ u svim tačkama neprekidnosti, dokazati da je $\int f\,dE = 0$.

5. Neka je funkcija f integrabilna na izmerljivom skupu E. Da li je restrikcija $f|_A$ integrabilna na svakom potskupu $A \subset E$?

6. Ako je integral nenegativne funkcije $f : I^n \mapsto \mathbb{R}$ jednak nuli, dokazati da je $f(x) = 0$ skoro svuda na skupu I^n, gde je $I = [0,1]$. Da li tvrđenje ostaje tačno ako I^n zamenimo proizvoljnim izmerljivim skupom?

7. U skupu $\mathcal{R}(E)$, gde je E izmerljiv skup, uvedimo relaciju $\sim$ na sledeći način: $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ skoro svuda na E. Dokazati da je $\widetilde{\mathcal{R}}(E) = \mathcal{R}(E)/\sim$ linearan vektorski prostor na kome je sa $\|f\| := \int |f|\,dE$ definisana norma.

8. Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv skup, a $f : E \mapsto \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u unutrašnjim tačkama skupa E. Ako je $a \in intE$, dokazati da je

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{mK(a,\delta)\cap E} \int\limits_{K(a,\delta)\cap E} f(x)\,dx = f(a)\,.$$

9. Ako je E put povezan, izmerljiv skup, a $f : E \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada postoji $\xi \in E$ tako da je $\int f\,dE = f(\xi)mE$.

2.5. IZRAČUNAVANJE VIŠESTRUKIH INTEGRALA

Izračunavanje višestrukih integrala svodi se na izračunavanje više jednostrukih integrala. Osnovna teorema iz koje proizilaze ostale teoreme za svođenje višestrukih integrala na izračunavanje ponovljenih integrala je teorema tipa Fubinija*.

Teorema 1. *Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $\Delta = \Delta' \times \Delta'' \subset \mathbb{R}^{m+n}$, gde je $\Delta' \subset \mathbb{R}^m$, $\Delta'' \subset \mathbb{R}^n$. Tada je*

$$(1)\qquad \int\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\Delta'} dx \int\limits_{\Delta''} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\Delta''} dy \int\limits_{\Delta'} f(x,y)\,dx,$$

gde smo sa $\int_{\Delta''} f(x,y)\,dy$ označili integral funkcije f na skupu Δ'' za fiksirano $x \in \Delta'$ ukoliko postoji, odn. proizvoljan broj koji se nalazi

* Fubini G. (1870-1943)-italijanski matematičar

između gornjeg i donjeg integrala funkcije f po y za $x \in \Delta'$, ukoliko $\int_{\Delta''} f(x,y)\,dy$ ne postoji.

Dokaz. Primetimo najpre da je funkcija $f(x,y)$ zbog pretpostavljene integrabilnosti ograničena na skupu Δ na osnovu teoreme 6., 2.3. . No onda je $f(x,y)$ kao funkcija promenljive y ograničena na skupu Δ'' za svako $x \in \Delta'$. Stoga za svako $x \in \Delta'$ postoji donji i gornji integral funkcije f po y i važi nejednakost $\underline{I}(x) \leq \overline{I}(x)$. Neka je $\Phi(x)$ proizvoljna funkcija za koju je $\underline{I}(x) \leq \Phi(x) \leq \overline{I}(x)$ za svako $x \in \Delta'$. Dokažimo da je funkcija Φ integrabilna na skupu Δ' i da je

$$\int\limits_{\Delta'} \Phi(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Da to dokažemo, uočimo proizvoljno razbijanje $\tau' = \{\Delta_i'\}$ skupa Δ' sa istaknutom tačkom $\xi' = (\xi_i')$. Neka je $\tau'' = \{\Delta_j''\}$ proizvoljno razbijanje skupa Δ''. Tada je $\tau = \tau' \times \tau'' = \{\Delta_i' \times \Delta_j''\}_{i,j}$ razbijanje skupa Δ. Označimo sa $m_{i,j}$ infimum, a sa $M_{i,j}$ supremum funkcije f na skupu $\Delta_{i,j} = \Delta_i' \times \Delta_j''$. Tada je

$$\underline{S}_\tau = \sum_{i,j} m_{i,j} m\Delta_{i,j}\,, \qquad \overline{S}_\tau = \sum_{i,j} M_{i,j} m\Delta_{i,j}\,.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\Phi(\xi_i') \leq \overline{I}(\xi_i') \leq \overline{S}_{\tau''}(f(\xi_i', y)) &= \\ &= \sum_j \sup_{y \in \Delta_j''} f(\xi_i', y) m\Delta_j'' \leq \sum_j M_{i,j} m\Delta_j''\end{aligned}$$

za svako i, to je

$$\sum_i \Phi(\xi_i') m\Delta_i' \leq \sum_i m\Delta_i' \sum_j M_{i,j} m\Delta_j'' = \sum_{i,j} M_{i,j} m\Delta_{i,j} = \overline{S}_\tau\,.$$

Slično se dokazuje nejednakost $\underline{S}_\tau \leq \sum_i \Phi(\xi_i') m\Delta_i'$. Kako je funkcija f integrabilna na skupu Δ, to je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \overline{S}_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} \underline{S}_\tau = \int\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Kako $\delta_{\tau'} \to 0$ kada $\delta_\tau \to 0$, to iz nejednakosti

$$\underline{S}_\tau \le \sum_i \Phi(\xi_i') m\Delta_i' \le \overline{S}_\tau$$

prelaskom na graničnu vrednost kada $\delta_\tau \to 0$ dobijamo da je

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} \sum_i \Phi(\xi_i') m\Delta_i' = \int\limits_\Delta f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Time smo dokazali prvu jednakost u (1). Druga jednakost se dokazuje analogno. ■

Posledica 1. *Ako je* $f \in \mathcal{R}(\Delta' \times \Delta'')$, *onda integrali* $\int f\,d\Delta'$ *i* $\int f\,d\Delta''$ *postoje respektivno za skoro svako* $y \in \Delta''$, *odn.* $x \in \Delta'$.

Dokaz. Na osnovu dokazane teoreme je

$$\int\limits_{\Delta'} \left(\overline{\int\limits_{\Delta''}} f(x,y)\,dy - \underline{\int\limits_{\Delta''}} f(x,y)\,dy \right) dx = 0\,.$$

Podintegralna funkcija je nenegativna, pa je $\overline{\int} f\,d\Delta'' = \underline{\int} f\,d\Delta''$ za skoro svako $x \in \Delta'$ prema zadatku 6., 2.4.. No onda integral $\int f\,d\Delta''$ na osnovu teoreme 1., 2.2. postoji za skoro svako $x \in \Delta'$. ■

Posledica 2. *Neka je funkcija* f *integrabilna na segmentu* $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$. *Ako je za svaku dopustivu tačku* $(x_1,\dots,x_k)$ *funkcija* f *integrabilna na projekciji* Δ^k *segmenta* Δ *na potprostor* $\mathbb{R}^{n-k}$ *tačaka* $(x_{k+1},\dots,x_n)$, $k = \overline{1,n-1}$, *odn. ako za svaku dopustivu tačku postoji integral* $\int f\,d\Delta^k$, *onda je*

$$\int f\,d\Delta = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\,.$$

Posledica važi i u slučaju kada integrali $\int f\Delta^k$ *ne postoje; u tom slučaju za svaku dopustivu tačku* $(x_1,\dots,x_k)$ *integral* $\int f\,d\Delta^k$ *predstavlja proizvoljan broj koji se nalazi između gornjeg i donjeg integrala funkcije* f *po* $(x_{k+1},\dots,x_n)$.

Dokaz. Neposredno sledi uzastopnom primenom prethodne teoreme:

$$\int\limits_{\Delta} f\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Delta^1} f(x_1, u^1)\,du^1 =$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \int\limits_{\Delta^2} f(x_1, x_2, u^2)\,du^2 = \cdots =$$
$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n\,. \ \blacksquare$$

Posledica 3. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ izmerljiv skup, a A projekcija skupa E na $\mathbb{R}^m$, tj. skup onih tačaka $x \in \mathbb{R}^m$ za koje je skup $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$ neprazan. Tada je skup E_x izmerljiv za skoro svako $x \in A$. Ako je A izmerljiv skup, a funkcija f integrabilna na E, onda je*

$$\int\limits_{E} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{A} dx \int\limits_{E_x} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Analogno tvrđenje važi za projekciju B skupa E na $\mathbb{R}^n$ i y-preseke E_y skupa E. Specijalno, za $f = 1$

$$mE = \int mE_x\,dA = \int mE_y\,dB.$$

Dokaz. Neka su Δ' i Δ'' intervali u $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ takvi da je $E \subset \Delta' \times \Delta''$. Tada je $mE = \int_\Delta \chi_E(x, y)\,dx\,dy$, pa je prema posledici 1. funkcija $\chi_E(x, y)$ integrabilna na Δ'' za skoro svako $x \in \Delta'$. Kako je $\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y)$, to je funkcija $\chi_{E_x}(y)$ integrabilna, odn. skup E_x je izmerljiv za skoro svako $x \in \Delta'$.

Da dokažemo (2), primetimo da je $\chi_E(x,y) = \chi_A(x) \cdot \chi_{E_x}(y)$. Primenom teoreme 1. stava 3., 2.4. dobijamo da je

$$\int\limits_E f\,dE = \int\limits_\Delta f\chi_E\,d\Delta = \int\limits_{\Delta'} dx \int\limits_{\Delta''} f(x,y)\chi_A(x)\chi_{E_x}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Delta'} \chi_A(x)\,dx \int\limits_{\Delta''} f(x,y)\chi_{E_x}(y)\,dy = \int\limits_{\Delta'} \chi_A(x)\,dx \int\limits_{E_x} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_A dx \int\limits_{E_x} f(x,y)\,dy\,. \ \blacksquare$$

Posledica 4. *Neka je skup $D \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ i $f \in \mathcal{R}(E)$. Tada je*

$$\int\limits_E f = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\,dy.$$

Dokaz. Sledi iz prethodne teoreme, gde je $E_x = [\varphi(x), \psi(x)]$. $\blacksquare$

Primer 1. Zapremina elipsoida $E = \{(x,y,z) : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\,,\ a,b,c > 0\}$ može se izraziti kao

$$mE = \int\limits_E dE = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{E_x} dy\,dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int\limits_{E_{xy}} dz =$$

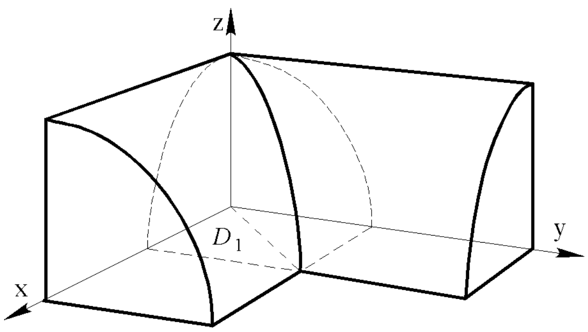
$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz =$$

$$= 2c \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}\,dy =$$

$$= bc \int\limits_{-a}^{a} \pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc\,.$$

U izračunavanju mE dva puta je korišćena posledica 2. U prvom korišćenju $A = [-a, a]$, $E_x = \{(y, z) : (y/b)^2 + (z/c)^2 \le 1 - (x/a)^2\}$, dok je u drugom korišćenju posledica 2. primenjena na $\int_{E_x} dy\, dz$, pri čemu je sada $A = [-b\sqrt{1-(x/a)^2}, b\sqrt{1-(x/a)^2}]$.

Primer 2. Izračunajmo sada vrednost integrala $\int_E z\, dx\, dy\, dz$, gde je E onaj deo preseka cilindara $x^2 + z^2 \le a^2$ i $y^2 + z^2 \le a^2$ koji se nalazi u prvom kvadrantu. Primetimo najpre da se dati cilindri u prvom oktantu seku duž krive koja pripada ravni $x = y$. Označimo sa $D = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$, sa $D_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x, 0 \le x \le a\}$, a sa $E_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_1, 0 \le z \le \sqrt{a^2 - y^2}\}$. Tada je



Sl. 17

$$\int_{E_1} z\, dx\, dy\, dz = \int_{D_1} dx\, dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} z\, dz = \frac{1}{2}\int_{D_1} (a^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^x (a^2 - y^2)\, dy = \frac{5a^4}{12}\,.$$

Kako je $\int\limits_E z\, dx\, dy\, dz = 2\int\limits_{E_1} z\, dx\, dy\, dz$, to je $\int\limits_E z\, dx\, dy\, dz = 5a^4/6$.

Zadaci za vežbanje

1. Izračunati sledeće integrale u naznačenim oblastima integracije

a) $\int_E \frac{dx\, dy}{y}\,, \quad E = \{(x, y) : x^2 - 6x - 5 < 0, y > 0, 3x - y - 2 > 0, x^2 > y\}\,,$

b) $\int_E x^2 y^2\, dx\, dy\,, \quad E = \{(x, y) : y > 0, xy < 1, x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}\,,$

c) $\int_E x\sqrt{1 + xy}\, dx\, dy, \quad E = \{(x, y) : xy < 1\,, x - 1 < \frac{xy}{x+1}\}\,,$

d) $\int (x + y + z)\, dx\, dy\, dz\,, \quad E = \{(x, y, z) : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1\}\,,$

e) $\int_E z^2\, dx\, dy\, dz\,, \quad E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz\}\,,$

f) $\int_E z\sin(x+y)\,dx\,dy\,dz$, $\quad E=\{(x,y,z): 0<z<1, -\pi/2<y<\pi/2, 0<x<\pi\}$.

2. Dokazati da je zapremina n-dimenzionalnog kuba $K(O,r)$ određena formulom

$$m_nK=\begin{cases} \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}r^{2k}, & n=2k\,,\\ \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!}r^{2k+1}, & n=2k+1 \end{cases}.$$

3. U sledećim primerima izraziti višestruki integral $\int_E f$ preko ponovljenih integrala za sve moguće slučajeve, ako je

$$a)\ E=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\}\,,\quad b)\ E=\{(x,y): x^2+y^2\le x+y\}\,,$$
$$c)\ E=\{(x,y): |x|+|y|\le 1\}\,, d)\ E=\{(x,y): 0\le x\le a, x\le y\le \sqrt{2a+x^2}\}\,,$$
$$e)\ E=\{(x,y,z): x\le 0, y\le 0, z\le 0, x+y\le a, z\le h\}\,,$$
$$f)\ E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le a^2, x^2+y^2\le z^2\mathrm{tg}^2 a\}\,.$$

4. Promeniti redosled integracije u sledećim primerima, podrazumevajući da funkcija f zadovoljava uslove pod kojima je to moguće:

$$a)\ \int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f\,dx\,,\quad b)\ \int_{-1}^1 dx\int_0^{|x|} f\,dy\,,\quad c)\ \int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2a-x^2}} f\,dy\,,$$
$$d)\ \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f\,dz\,,\quad e)\ \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f\,dz\,.$$

5. Ako su funkcije $\varphi_i : D\mapsto\mathbb{R}$, $i=1,2$, neprekidne na izmerljivom skupu $D\subset\mathbb{R}^n$, dokazati da je skup $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : x\in D, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ izmerljiv i da je

$$mE=\int_D(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,dx\,.$$

6. Neka je funkcija $f : K\mapsto\mathbb{R}^m$ neprekidna na zatvorenom i izmerljivom skupu $K\subset\mathbb{R}^n$. Dokazati da je skup $\Gamma_f=\{(x,y): x\in K, y=f(x)\}$ izmerljiv i da je njegova mera u $\mathbb{R}^{n+m}$ nula.

7. (Kavalerijev* princip) Neka su A i B izmerljivi skupovi u $\mathbb{R}^{n+1}$. Ako su skupovi $A_y=\{x\in\mathbb{R}^n : (x,y)\in A\}$ i $B_y=\{x\in\mathbb{R}^n : (x,y)\in B\}$ izmerljivi u $\mathbb{R}^n$ i imaju istu meru za skoro svako y u skupu onih y za koje su A_y i B_y neprazni, dokazati da A i B imaju istu meru u $\mathbb{R}^{n+1}$.

---

* Kavalieri B. (1598-1647)-italijanski matematičar

2.6. SMENA PROMENLJIVIH U VIŠESTRUKOM INTEGRALU

Za izračunavanje višestrukih integrala koristi se smena promenljivih, kadgod nismo u mogućnosti da to uradimo svođenjem na ponovljene integrale ili je to komplikovano. Naime, kao i u slučaju jednostrukih, tako se i u slučaju višestrukih integrala izračunavanje često pojednostavljuje smenom promenljivih.

Kod smene promenljivih u višestrukom integralu javljaju se problemi pre svega vezani za preslikavanje oblasti, koji su znatno komplikovaniji nego što je to bio slučaj kod jednostrukih integrala. Zbog toga ćemo se najpre pozabaviti navedenim problemima, jer bez njihovog rešenja nije moguće rešiti problem smene promenljivih u višestrukom integralu korektno. Dokažimo najpre sledeću lemu.

Lema 1. *Neka je $\varphi : G_t \to G_x$ difeomorfizam otvorenog skupa $G_t \subset \mathbb{R}_t^n$ na otvoren skup $G_x \subset \mathbb{R}_x^n$. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) ako je $E_t \subset G_t$ skup Lebegove mere nula, takav je i skup $\varphi(E_t)$;

(ii) ako je skup E_t mere nula i $\overline{E}_t \subset G_t$, tada je $E_x = \varphi(E_t)$ mere nula i $\overline{E}_x \subset G_x$;

(iii) ako je izmerljiv skup E_t sadržan u oblasti G_t zajedno sa svojim zatvorenjem, tada je $E_x = \varphi(E_t)$ izmerljiv skup i $\overline{E}_x \subset G_x$.

Dokaz. (i) Primetimo najpre da se svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ može prikazati kao unija prebrojivo mnogo zatvorenih kocki, koje, sem eventualno rubnih, nemaju drugih zajedničkih tačaka. Kako je unija prebrojivo mnogo skupova Lebegove mere nula skup Lebegove mere nula, to je tvrđenje dovoljno proveriti za skup E_t koji je sadržan u zatvorenoj kocki $I \subset G_t$. Kako je $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, postoji $M > 0$ tako da je $\|\varphi'(t)\| \leq M$ na I. No onda na osnovu teoreme o konačnom priraštaju za svaki par tačaka $t_1, t_2 \in I$ i njihove slike $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_1 = \varphi(t_2)$ važi nejednakost $\|x_2 - x_1\| \leq M\|t_2 - t_1\|$. Neka je sada $\{I_j\}$ pokrivač skupa E_t kockama, tako da je $\sum mI_j < \varepsilon$, pri čemu možemo pretpostaviti da je $I_j \subset I$. Očigledno je $\{\varphi(I_j)\}$ pokrivač skupa $E_x = \varphi(E_t)$. Neka je t_j centar kocke I_j. Zbog prethodno date ocene, skup $\varphi(I_j)$ možemo pokriti kockom $\widetilde{I}_j$ sa središtem u tački $x_j = \varphi(t_j)$ za koju je $m\widetilde{I}_j \leq M^n mI_j$. Familija $\{\widetilde{I}_j\}$ je pokrivač skupa $\varphi(E_t)$ za koji je $\sum \widetilde{I}_j \leq M^n \sum I_j < \varepsilon M^n$, čime je tvrđe nje (i) dokazano.

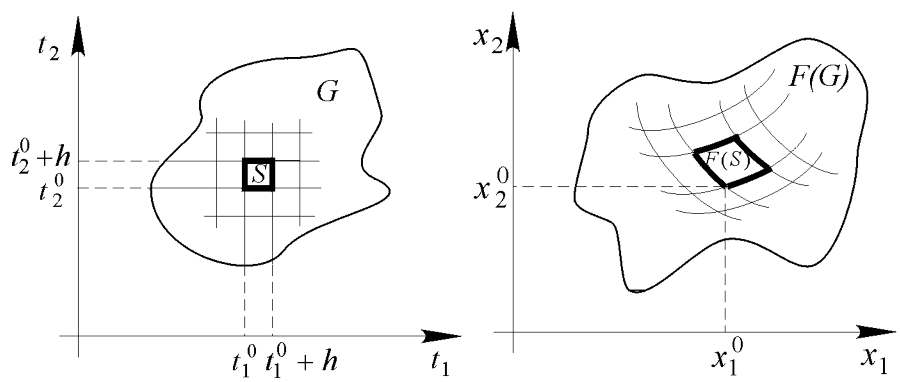
(ii) Tvrđenje neposredno sledi iz prethodno dokazanog tvrđenja, stava 6., 1.4. i činjenice da je $\overline{E}_t$, pa dakle i $\overline{E}_x = \varphi(\overline{E}_t)$ skup Lebegove mere nula.

(iii) Kako je φ difeomorfizam, unutrašnje tačke skupa E_t preslikavaju se u unutrašnje tačke skupa $E_x = \varphi(E_t)$, pa je dakle $rE_x = \varphi(rE_t)$. Sada izmerljivost skupa E_x sledi iz (ii) i stava 4., 1.4. ■

Neka su $G_t \subset \mathbb{R}^n_t$ i $G_x \subset \mathbb{R}^n_x$ otvoreni skupovi, a F preslikavanje skupa G_t na skup G_x definisano funkcijama $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Za preslikavanje F pretpostavimo da je obostrano jednoznačno preslikavanje G_t na G_x koje je neprekidno diferencijabilno na G_t, pri čemu je je jakobijan preslikavanja F

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$$

različit od nule na G_t.



Sl. 18

Za tačku $t_0 = (t_i^0)$ i $h > 0$ označimo sa $S = \{x \in \mathbb{R}^n : t_i^0 \leq x_i \leq t_i^0 + h, i = \overline{1,n}\}$ kocku sa temenom $t_0 \in G_t$ koja je cela sadržana u skupu G_t. Kako je G_t otvoren skup, to je uvek moguće. Označimo sa $\widetilde{S} = F(S)$. Skup $\widetilde{S}$ je zatvoren izmerljiv skup. Odredimo graničnu vrednost

$$\lim_{h \to 0} \frac{mF(S)}{mS}\,. \tag{1}$$

U tom cilju uvedimo sledeće oznake:

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,n} \quad ; \quad \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j} = a_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n}$$

$$\Delta t_i = t_i - t_i^0, \quad i = \overline{1,n}, \quad r = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i^2 \right\}^{1/2}.$$

Kako je preslikavanje F difeomorfizam, funkcije $x_i = x_i(t)$ koje ga definišu su diferencijabilne, pa je

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t_j - t_j^0) + \varepsilon_i r, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

gde funkcije $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t_0, \Delta t)$ ravnomerno konvergiraju nuli na svakom kompaktu $K \subset G_t$ kada $h \to 0$. Sa preslikavanjem F posmatrajmo linearno preslikavanje $\widetilde{F} : \mathbb{R}_t^n \to \mathbb{R}_x^n$ definisano formulama

$$\widetilde{x}_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t_j - t_j^0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Iz analitičke geometrije je poznato da je slika kvadrata linearnim preslikavanjem paralelogram, pri čemu je

$$\frac{m\widetilde{F}(S)}{mS} = |det\|a_{ij}\|\,| = |J(t_0)|. \tag{4}$$

Neprekidno diferencijabilno preslikavanje F razlikuje se od linearnog preslikavanja $\widetilde{F}$ u okolini tačke t_0 za funkciju koja je beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na priraštaj argumenta, što se vidi iz (2) i (3). To nas navodi na pomisao da je granična vrednost (1) jednaka apsolutnoj vrednosti jakobijana linearnog preslikavanja $\widetilde{F}$, odn. linearnog dela u razvoju preslikavanja F. Naime, važi

Teorema 1. *Neka je $x = F(t) = \{x_i(t), i = \overline{1,n}\}$ difeomorfizam otvorenog skupa $G_t \subset \mathbb{R}_t^n$ na otvoren skup $G_x \subset \mathbb{R}_x^n$. Ako je $S = \{t \in \mathbb{R}_t^n\colon t_i^0 \le t_i \le t_i^0 + h, i = \overline{1,n}\} \subset G_t$, tada je*

$$\frac{mF(S)}{mS} = |J(t_0)| + \varepsilon(t_0, h), \tag{5}$$

gde je $\varepsilon(t_0, h)$ funkcija koja ravnomerno konvergira nuli na svakom kompaktnom skupu $A \subset G_t$ kada $h \to 0$.

Dokaz. Dokaz ćemo, jednostavnosti radi, izvesti za dvodimenzionalan slučaj. U n-dimenzionalnom slučaju dokaz se izvodi analogno.

Pokažimo da se površina slike kvadrata S preslikavanjem F razlikuje od površine slike tog kvadrata preslikavanjem $\widetilde{F}$ za beskonačno malu veličinu višeg reda u odnosu na površinu h^2 kvadrata S, odn. da je

$$mF(S) = m\widetilde{F}(S) + \varepsilon h^2\,, \tag{6}$$

gde ε ravnomerno konvergira nuli kada $h \to 0$ na svakom kompaktnom podskupu K skupa G_t. Kako je $m\widetilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)|mS$ i $mS = h^2$, iz prethodne jednakosti imamo dokaz teoreme.

Dokažimo stoga jednakost (6). U tom cilju fiksirajmo najpre skup A. Kako je A kompaktan skup i $A \subset G_t$, funkcije $\varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ ravnomerno konvergiraju nuli na skupu A kada $r \to 0$. Skupovi A i $\mathbb{R}^2_{uv} \setminus G_t$ zatvoreni i disjunktni, skup A je ograničen, pa je stoga rastojanje $\eta = d(A, \mathbb{R}^2_{uv} \setminus G_t)$ pozitivno na osnovu stava 5., I.2.3.

Izaberimo h tako da je $|h| < \eta/\sqrt{2}$. U tom slučaju je $S \subset G_t$ kadgod je $(u_0, v_0) \in A$.

Ocenimo najpre rastojanje između slika jedne iste tačke kvadrata S preslikavanjem F i $\widetilde{F}$. Neka je $M = (u, v) \in S$, $F(M) = (x, y)$, $\widetilde{F}(M) = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Kako je tada prema (2) i (3) $x = \widetilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \widetilde{y} + \varepsilon_2 r$, to je

$$d(F(m), \widetilde{F}(M)) = \sqrt{(x - \widetilde{x})^2 + (y - \widetilde{y})^2} = r\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\,.$$

Rastojanje r tačke (u_0, v_0) do tačke $M \in S$ manje je od dijagonale $h\sqrt{2}$ kocke S, pa je stoga

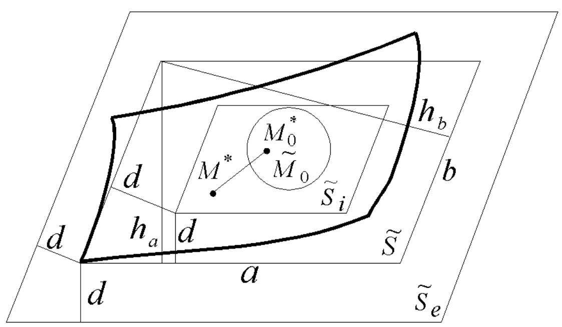
$$d = \sup_{m \in S} d(F(M), \widetilde{F}(M)) \le |h|\varepsilon_3(u_0, v_0, h)\,, \tag{7}$$

gde $\varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup_{M \in S} \sqrt{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ ravnomerno konvergira nuli na skupu A kada $h \to 0$.

Označimo sada sa $\widetilde{S}_i$ otvoren paralelegram, a sa $\widetilde{S}_e$ zatvoren paralelegram sa stranicama paralelnim stranicama paralelegrama $\widetilde{S} = \widetilde{F}(S)$, tako da se stranice ovih paralelegrama nalaze na rastojanju d od odgovarajućih stranica paralelegrama $\widetilde{S}$, pri čemu je

$$\widetilde{S}_i \subset \widetilde{S} = \widetilde{F}(S) \subset \widetilde{S}_e\,. \tag{8}$$

Dokažimo najpre da je skup $\widetilde{S}_i$ neprazan. U tom cilju dokažimo da je krug K_d sa središtem u centru paralelegrama S i poluprečnikom d sadržan u paralelegramu $\widetilde{S}_i$.



Sl. 19

Neka su a i b stranice, a h_a i h_b odgovarajuće visine paralelegrama $\widetilde{S}$. Da bismo dokazali da je $K_d \subset \widetilde{S}_i$ za dovoljno malo h, dovoljno je dokazati da važe nejednakosti

$$4d < h_a \text{ i } 4d < h_b\,. \tag{9}$$

U tom cilju pretpostavimo da je stranica a paralelegrama $\widetilde{S}$ određena temenima koja su slike temena (u_0, v_0) i $(u_0 + h, v_0)$ kvadrata S preslikavanjem F, odn. temenima (x_0, y_0) i $(x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h)$. Tada je

$$a = \sqrt{a_{11}^2 h^2 + a_{21}^2 h^2} = |h|\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}\,. \tag{10}$$

Potpuno analogno se dokazuje da je

$$b = |h|\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}\,. \tag{11}$$

Parcijalni izvodi funkcija $x(u,v)$ i $y(u,v)$ su zbog pretpostavljene neprekidnosti ograničeni na kompaktu A, pa postoji realan broj c_1 tako da je $|a_{ij}(u,v)| \le c_1$ za svako $(u,v) \in A$, $i,j = 1,2$. Sada iz (10) i (11) imamo sledeće ocene za stranice a i b:

$$a \le c_1\sqrt{2}|h| \qquad \text{i} \qquad b \le c_1\sqrt{2}|h|\,. \tag{12}$$

Jakobijan $J(u,v)$ preslikavanja F je neprekidna funkcija različita od nule na skupu G_t, pa postoji realan broj $c_2 > 0$ tako da je

$$|J(u,v)| \geq c_2 \tag{13}$$

za svako $(u,v) \in A$. Kako je $m\widetilde{S} = ah_a = bh_b = |J(u_0,v_0)|h^2$, to je na osnovu ocena (12) i (13)

$$h^2 = \frac{ah_a}{|J(u_0,v_0)|} \leq \frac{1}{c_2}\sqrt{2}|h|h_a\,,$$
$$h^2 = \frac{bh_b}{|J(u_0,v_0)|} \leq \frac{1}{c_2}\sqrt{2}|h|h_b\,,$$

odn.

$$|h| \leq \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}h_a \qquad \mathrm{i}|h| \leq \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}h_b\,. \tag{14}$$

Izaberimo sada $\delta > 0$ tako da je

$$\frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} < 1\,, \tag{15}$$

za svako $|h| < \delta$ i $(u_0,v_0) \in A$. Ovo je moguće zbog toga što funkcija $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0,v_0,h)$ ravnomerno konvergira nuli na kompaktu A kada $h \to 0$. Sada iz (7), (14) i (15) lako slede nejednakosti (9):

$$4d \leq 4\varepsilon_3|h| \leq \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2}h_a < h_a$$
$$4d \leq 4\varepsilon_3|h| \leq \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2}h_b < h_b\,.$$

Time smo dokazali da je $K_d \subset \widetilde{S}_i$. U daljem ćemo smatrati da je $|h| < \delta$. Označimo sa $\widetilde{R} = \widetilde{S}_e \setminus \widetilde{S}_i$. Lako je videti da je mera skupa $\widetilde{R}$ jednaka $4d(a+b)$. Iz (7) i (12) sledi ocena za meru skupa $\widetilde{R}$: $m\widetilde{R} \leq 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3h^2 = \varepsilon_4h^2$, gde je $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3$. Očigledno je da funkcija ε_4 ravnomerno konvergira nuli na kompaktu A kada $h \to 0$.

Dokažimo da se površina skupa $F(S)$ razlikuje od površine paralelegrama $\widetilde{S} = \widetilde{F}(S)$ za površinu koja nije veća od površine skupa $\widetilde{R}$. Za to je dovoljno dokazati inkluziju

$$\widetilde{S}_i \subset F(S) \subset \widetilde{S}_e\,. \tag{16}$$

Neka je $M \in S$. Tada je $\widetilde{F}(M) \in \widetilde{S}$, pa je prema (7) $d(F(M), \widetilde{F}(M)) \leq d$. Skup $\widetilde{S}_e$ sadrži sve tačke ravni koje su na rastojanju od tačaka paralelegrama $\widetilde{S}$ ne većem od d, pa je stoga $F(M) \in \widetilde{S}_e$. Time je dokazana inkluzija $F(S) \subset \widetilde{S}_e$.

Da dokažemo inkluziju $\widetilde{S}_i \subset F(S)$, dokažimo najpre da je

$$F(\partial S) \subset \widetilde{R}\,. \tag{17}$$

Ako je $M \in \partial S$, tada je $F(M) \in \partial\widetilde{S}$, pa je prema (7) $d(F(M), \widetilde{F}(M)) \leq d$. Skup $\widetilde{R}$ prema konstrukciji sadrži sve tačke ravni koje su na rastojanju od tačaka ruba $\partial\widetilde{S}$ paralelegrama $\widetilde{S}$ ne većem od d, pa je stoga $F(M) \in \widetilde{R}$, čime je dokazana inkluzija (17). Na osnovu dokaza leme 1.(iii) ovu inkluziju možemo napisati i u obliku $\partial F(S) \subset \widetilde{R}$.

Uočimo sada središte M_0 kvadrata S i dokažimo da je njena slika preslikavanjem F središte $\widetilde{M_0} = \widetilde{F}(M_0)$ paralelegrama $\widetilde{S}$. Za krug K_d sa središtem u tački $\widetilde{M_0}$ i poluprečnikom d dokazana je inkluzija $K_d \subset \widetilde{S}_i$. Ako je $M_0^* = F(M_0)$, tada je prema (7) $d(M_0^*, \widetilde{M_0}) \leq d$. Stoga je $M_0^* \in K_d$, pa je $M_0^* \in \widetilde{S}_i$. Time smo dokazali da skup $\widetilde{S}_i$ sadrži jednu tačku skupa $F(S)$.

Dokažimo sada da je skup $\widetilde{S}_i$ sadržan u skupu $F(S)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji tačka $M^* \in \widetilde{S}_i$ koja ne pripada skupu $F(S)$. Duž $M_0^*M^*$ je put povezan skup koji ima neprazan presek kako sa skupom $F(S)$, tako i sa njegovim komplementom. Prema stavu 1., I.1.4., duž $M_0^*M^*$seče rub skupa $F(S)$ u nekoj tački N. Tačka N je različita od tačke M^*, jer je skup $F(S)$ zatvoren kao neprekidna slika zatvorenog skupa, pa je stoga $\partial F(S) \subset F(S)$, a prema pretpostavci tačka M^* ne pripada skupu $F(S)$. Time smo dokazali da tačka preseka skupa $\partial F(S)$ sa duži $M_0^*M^*$ pripada unutrašnjosti skupa $\widetilde{S}_i$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $\partial F(S) \subset \widetilde{R}$. Dakle, ne postoji ni jedna tačka $M^* \in \widetilde{S}_i$ koja ne pripada skupu $F(S)$, pa je $\widetilde{S}_i \subset F(S)$.

Dokazana inkluzija zajedno sa inkluzijom $F(S) \subset \widetilde{S}_e$ daje inkluziju (16).

Sada iz inkluzija (8) i (16) slede sledeće nejednakosti

$$m\widetilde{S}_i \leq m\widetilde{F}(S) \leq m\widetilde{S}_e \quad , \quad m\widetilde{S}_i \leq mF(S) \leq m\widetilde{S}_e \, ,$$

iz kojih odmah dobijamo sledeću ocenu

$$|mF(S) - m\widetilde{F}(S)| \leq m\widetilde{S}_e - m\widetilde{S}_i = m\widetilde{R} \, .$$

Kako je $m\widetilde{R} \leq \varepsilon_4 h^2$, to je

$$|mF(S) - m\widetilde{F}(S)| \leq \varepsilon_4 h^2 \, .$$

Stavimo da je

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{mF(S) - m\widetilde{F}(S)}{h^2} \tag{18}$$

Očigledno je $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_4|$, pa stoga ε ravnomerno konvergira nuli na kompaktu A kada $h \to 0$. Iz (18) sada imamo da je

$$mF(S) = m\widetilde{F}(S) + \varepsilon h^2 \, ,$$

čime je teorema dokazana. ■

Sada možemo formulisati teoremu o smeni promenljivih u višestrukom integralu.

Teorema 2. *Neka su Γ_t i Γ_x otvoreni izmerljivi skupovi za koje je $\overline{\Gamma}_t \subset G_t$, $\overline{\Gamma}_x \subset G_x$, $\overline{\Gamma}_x = F(\overline{\Gamma}_t)$. Ako je funkcija f neprekidna na skupu $\overline{\Gamma}_x$, tada je*

$$\int\limits_{\Gamma_x} f(x)\, dx = \int\limits_{\Gamma_t} f(x(t))|J(t)|\, dt \, . \tag{19}$$

Dokaz. Primetimo najpre da oba integrala u (19) zbog uvedenih pretpostavki postoje prema teoremi 1., 2.3. Dokažimo da su oni jednaki.

Neka je S_k mreža u $\mathbb{R}^n_t$ (vid. zadatak 2., 1.3.) izabrana tako, da je svaki element te mreže sadržan u skupu G_t ukoliko je njegov presek sa skupom $\overline{\Gamma}_t$ neprazan. Ovo je moguće, jer je skup G_t otvoren. Sa Γ_i označimo neprazne preseke unutrašnjosti elemenata mreže S_k sa skupom Γ_t. Oni su otvoreni i izmerljivi i čine razbijanje τ_k skupa Γ_t čiji dijametar teži nuli kada $k \to +\infty$. Označimo sa $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$. Na osnovu leme 1. skupovi Γ_i^* su izmerljivi i čine razbijanje τ_k^* skupa Γ_x.

Dokažimo da $\delta_{\tau_k^*} \to 0$ kada $k \to +\infty$. Neka su $M_j^* = (x_i^j)$, $j = 1, 2$, dve proizvoljne tačke skupa Γ_i^*. Tada postoje tačke $M_j = (t_i^j) \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ tako da je $M_j^* = F(M_j)$, pri čemu je $d(M_1, M_2) < \delta_{\tau_k}$. No onda je

$$d(M_1^*, M_2^*) = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i(t^2) - x_i(t^1))^2\right\}^{1/2} \le \left\{\sum_{i=1}^{n}\omega^2(x_i, \delta_{\tau_k})\right\}^{1/2},$$

gde je $\omega(x_i, \delta_{\tau_k})$ modul neprekidnosti funkcije $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, na kompaktu $\overline{\Gamma}_t$. Funkcije $x_i(t)$ su neprekidne na kompaktu $\overline{\Gamma}_t$ pa su prema teoremi Kantora one i ravnomerno neprekidne na $\overline{\Gamma}_t$. Stoga je $\lim_{k\to+\infty} \omega(x_i, \delta_{\tau_k}) = 0$. Kako je

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{M_1^*, M_2^* \in \Gamma_i^*} d(M_1^*, M_2^*) \le \left\{\sum_{i=1}^{n}\omega^2(x_i, \delta_{\tau_k})\right\}^{1/2},$$

to je

$$\delta_{\tau_k^*} = \max_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*} d(\Gamma_i^*) \le \left\{\sum_{i=1}^{n}\omega^2(x_i, \delta_{\tau_k})\right\}^{1/2}.$$

Stoga je $\lim_{k\to+\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0$.

Izaberimo sada one elemente razbijanja τ_k i τ_k^* čije adherencije sa skupovima $r\Gamma_t$ i $r\Gamma_x$ imaju prazan presek i označimo ih sa $\tau_k(r\Gamma_t)$ odn. $\tau_k^*(r\Gamma_x)$. Očigledno je $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(r\Gamma_x)$ onda i samo onda, ako je $\Gamma_i \in \tau_k(r\Gamma_t)$, pri čemu se $\tau_k(r\Gamma_t)$ sastoji samo od onih elemenata $\Gamma_i \in \tau_k$ koji su sa svojim zatvorenjem sadržani u Γ_t.

Formirajmo sada integralnu sumu $S_{\tau_k^*(r\Gamma_x)}(f;\xi)$ funkcije f, gde je $\xi = (\xi_i)$ istaknuta tačka razbijanja $\tau_k^*(r\Gamma_x)$, pri čemu su tačke $\xi_i \in \Gamma_i^*$ izabrane tako da pretstavljaju sliku ma kog temena θ_i odgovarajuće kocke Γ_i. Kako je funkcija f integrabilna na skupu Γ_x, to je, prema teoremi 1., 2.1.,

$$\lim_{k\to+\infty} S_{\tau_k^*(r\Gamma_x)}(f,\xi) = \int\limits_{\Gamma_x} f(x)\,dx\,. \tag{20}$$

Kako je $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, to je prema teoremi 1.

$$m\Gamma_i^* = |J(\theta_i)|m\Gamma_i + \varepsilon(\theta_i,\delta_{\tau_k})m\Gamma_i$$

za svako $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(r\Gamma_x)$, pri čemu $\varepsilon(\theta_i,\delta_{\tau_k})$ ravnomerno konvergira nuli na kompaktnom skupu $\overline{\Gamma}_t$ kada $k \to +\infty$. Stoga je

$$\begin{aligned} S_{\tau_k^*(r\Gamma_x)}(f,\xi) &= \sum_{\Gamma_i^*\in\tau_k^*(r\Gamma_x)} f(\xi_i)m\Gamma_i^* = \\ &= \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(r\Gamma_t)} f(x(\theta_i))|J(\theta_i)|m\Gamma_i + \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(r\Gamma_t)} \varepsilon(\theta_i,\delta_{\tau_k})f(x(\theta_i))m\Gamma_i\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Na osnovu teoreme 1., 2.1. i činjenice da integral na desnoj strani jednakosti (19) postoji, imamo da je

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(r\Gamma_t)} f(x(\theta_i))|J(\theta_i)|m\Gamma_i = \int\limits_{\Gamma_t} f(x(t))|J(t)|\,dt\,. \tag{22}$$

Dokažimo sada da druga suma u prethodnoj jednakosti teži nuli kada $k \to +\infty$, čime će jednakost (19) biti dokazana.

Primetimo najpre da je funkcija $f(x(t))$ neprekidna na kompaktnom skupu $\overline{\Gamma}_t$ kao kompozicija neprekidnih funkcija. Stoga je ona ograničena na njemu, pa postoji $M > 0$ tako da je $|f(x(t))| \le M$ za svako $t \in \overline{\Gamma}_t$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako funkcija $\varepsilon(t,\delta_{\tau_k})$ ravnomerno konvergira nuli na kompaktnom skupu $\overline{\Gamma}_t$ kada $k \to +\infty$, to za dato $\varepsilon > 0$ postoji $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $|\varepsilon(t,\delta_{\tau_k})| < \varepsilon/Mm\Gamma_t$ za $k \ge k_\varepsilon$ i svako $t \in \overline{\Gamma}_t$. No onda je

$$|\sum_{\Gamma_i\in\tau_k(r\Gamma_t)} f(x(\theta_i))\varepsilon(\theta_i,\delta_{\tau_k})m\Gamma_i| \le M \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(r\Gamma_t)} |\varepsilon|m\Gamma_i < \varepsilon \tag{23}$$

za svako $k \geq k_\varepsilon$. Sada iz (21), (22) i (23) dobijamo da je

$$\lim_{k\to+\infty} S_{\tau_k^*(r\Gamma_x)}(f,\xi) = \int\limits_{\Gamma_t} f(x(t))|J(t)|\,dt\,. \tag{24}$$

Jednakost (19) sada sledi iz (20) i (24). ■

Dokazana teorema može se uopštiti na slučaj kada je jakobijan preslikavanja jednak nuli na rubu oblasti integracije, pri čemu preslikavanje ne mora biti obostrano jednoznačno na njemu. Preciznije, važi sledeća

Teorema 3. *Neka su $G_t \subset \mathbb{R}^n_t$ i $G_x \subset \mathbb{R}^n_x$ otvoreni izmerljivi skupovi, a $x = F(t) = \{x_i(t), i = \overline{1,n}\}$ neprekidno preslikavanje skupa $\overline{G}_t$ na skup $\overline{G}_x$ koje obostrano jednoznačno neprekidno diferencijabilno preslikava G_t na G_x. Ako je jakobijan preslikavanja F različit od nule na G_t i dopušta neprekidno produženje na $\overline{G}_t$, a funkcija f je neprekidna na $\overline{G}_x$, tada je*

$$\int\limits_{G_x} f(x)\,dx = \int\limits_{G_t} f(x(t))|J(t)|\,dt \tag{25}$$

Dokaz. Neka je Γ_k, $k \in \mathbb{N}$ niz otvorenih izmerljivih skupova za koji je

$$\overline{\Gamma}_k \subset G_t, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Gamma_k = G_t.$$

Takav niz postoji (videti zadatak 2., 1.3.). Neka je $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Skupovi Γ_k^* su otvoreni, izmerljivi i

$$\overline{\Gamma}_k^* \subset G_x, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Gamma_k^* = G_x.$$

Za skupove Γ_k i Γ_k^* svi uslovi teoreme 2. su zadovoljeni, pa je

$$\int\limits_{\Gamma_k^*} f(x)\,dx = \int\limits_{\Gamma_k} f(x(t))|J(t)|\,dt \tag{26}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je $\lim_{k\to+\infty} m\Gamma_k^* = mG_x$, $\lim_{k\to+\infty} m\Gamma_k = mG_t$, prelaskom na graničnu vrednost u (12) kada $k \to +\infty$, koristeći pri tome stav 7., 2.4., dobijamo (12). ■

Smenom promenljivih u višestrukom integralu često se bitno pojednostavljuje njegovo izračunavanje. Pri tome je moguće pojednostaviti, ne samo podintegralni izraz, već i oblast integracije, što je kod višestrukih integrala osobito važno. Pokažimo to sledećim primerima.

Primer 1. Izračunajmo integral

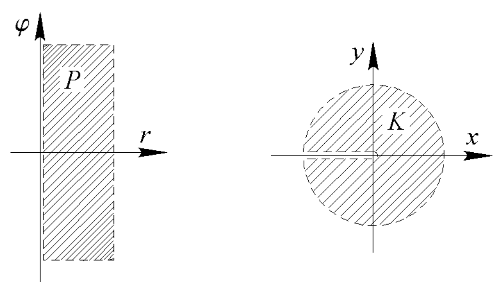
$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$$

Uvedimo polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi\,. \tag{27}$$

Ovim formulama definisano je preslikavanje pravougaonika

$$P = \{(r,\varphi) : 0 < r < 1, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{R}^2_{r\varphi}$$



Sl. 20

na krug $K = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ iz koga je odstranjen skup $\{(x,y) : x \le 0,\ y = 0\}$. Preslikavanjem (27) skup $\overline{P}$ preslikava se na skup $\overline{K}$. Na rubu skupa P to preslikavanje nije obostrano jednoznačno. Jakobijan preslikavanja (27)

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r$$

je neprekidna funkcija na $\overline{P}$, pri čemu je jednak nuli na skupu $\{(r,\varphi) : r = 0, -\pi < \varphi < \pi\}$ koji je deo ruba skupa P. Skupovi K i $K \setminus \{(x,y) : x \le 0,\ y = 0\}$ razlikuju se za skup mere nula, pa su integrali po ovim skupovima jednaki. Jakobijan preslikavanja (27) dopušta neprekidno produženje na zatvorenju skupa P. Svi uslovi teoreme 3. su zadovoljeni, pa je

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0<r<1\\ -\pi<\varphi<\pi}} r\cos\pi r\,dr\,d\varphi\,.$$

Funkcija $r\cos\pi r$ je integrabilna na skupu P prema teoremi 1., 2.3., pa se na poslednji integral može primeniti Fubinijeva teorema:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\cos\pi r\,dr = -\frac{4}{\pi}\,.$$

Primer 2. Odredimo sada zapreminu paralelepipeda koji je ograničen ravnima

$$a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

uz pretpostavku da je determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Uvedimo smenu promenljivih

$$\xi = a_1x+b_1y+c_1z \quad , \quad \eta = a_2x+b_2y+c_2z \quad , \quad \zeta = a_3x+b_3y+c_3z\,.$$

Lako je videti da je $D(\xi,\eta,\zeta)/D(x,y,z) = \Delta$. Tražena zapremina je

$$V = \iiint\limits_{D} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D^*} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int\limits_{-h_1}^{h_1} d\xi \int\limits_{-h_2}^{h_2} d\eta \int\limits_{-h_3}^{h_3} d\zeta = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}\,,$$

gde je D oblast ograničena zadatim ravnima, a $D^* = \{(\xi,\eta,\zeta) : -h_1 \leq \xi \leq h_1, -h_2 \leq \eta \leq h_2, -h_3 \leq \zeta \leq h_3\}$.

Primer 3. Izračunajmo integral

$$I = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x,y,z\ge 0}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}, \quad \alpha>\beta>\gamma>0\,.$$

Uvedimo sferne koordinate $x = r\sin\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\varphi$. Za fiksirano $r>0$ skup $\{(r,\varphi,\psi):\ r=r_0,\ \varphi\in[0,\pi],\ \psi\in[0,2\pi]\}$ preslikava se u sferu sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom r_0. Jakobijan preslikavanja je $J(r,\varphi,\psi)=r^2\sin\varphi$. To preslikavanje nije obostrano jednoznačno, jer tačke $(0,\varphi,\psi)$ preslikava u tačku $(0,0,0)$. Osim toga, jakobijan tog preslikavanja jednak je nuli u tačkama $(0,\varphi,\psi)$, $(r,0,\psi)$ i (r,π,ψ) koje u svojoj ukupnosti pretstavljaju skup mere nula u $\mathbb{R}^3_{r\varphi\psi}$, a takođe i njihove slike u $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

Skup $G^* = \{(x,y,z) : x,y,z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ je slika skupa $\{(r,\varphi,\psi) : 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\psi\le\pi/2\}$ datim preslikavanjem. Restrikcija tog preslikavanja na $G\setminus rG$ je difeomorfizam tog skupa na $G^*\setminus rG^*$. Podintegralna funkcija je neprekidna na $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, ali je ograničena u svakoj okolini tačke $(0,0,0)$, jer je granična vrednost u toj tački nula, pa je integrabilna na G^*. Stoga su zadovoljeni uslovi teoreme 3., pa je

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x,y,z\ge 0}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}} =$$

$$= \iiint\limits_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\pi/2\\ 0\le\psi\le\pi/2}} \frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\ \ sin\psi\cos\psi\,dr\,d\varphi\,\psi}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\psi\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+\gamma^2\cos^2\varphi}}\,.$$

Uvođenjem smene $\sin^2\varphi = u$ i $\sin^2\psi = v$ dobija se

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 u\,du\int\limits_0^1 \frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)u]+(\beta^2-\alpha^2)uv}}\int\limits_0^R r^4\,dr =$$
$$= \frac{R^5}{15}\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}.$$

U teoremama 2. i 3. uslov neprekidnosti funkcije f može se oslabiti. Naime, te teoreme uz određenu preformulaciju važe i za integrabilne funkcije. Dokaz je u tom slučaju znatno komplikovaniji, pa stoga navodimo samo formulacije ovih teorema.

Teorema 4. *Neka je $x : D_t \to D_x$ difeomorfizam otvorenog i ograničenog skupa $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ na otvoren i ograničen skup $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$. Ako je $f \in \mathcal{R}(D_x)$ i $\mathrm{supp} f$ kompaktan skup u D_x, tada je $f(x(t))|J(t)| \in \mathcal{R}(D_t)$ i važi formula*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} f(x(t))|J(t)|\,dt, \tag{29}$$

gde je $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in D_x : f(x) \neq 0\}}^{cl D_x}$ ***nosač funkcije*** *f* ***na skupu*** *D_x.*

Teorema 5. *Neka je $x : D_t \to D_x$ preslikavanje izmerljivog skupa $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ na izmerljiv skup $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$ i neka su S_t i S_x skupovi Lebeove mere nula u D_t odn. D_x za koje su skupovi $D_t \setminus S_t$ i $S_x \setminus S_x$ otvoreni. Ako je restrikcija preslikavanja x difeomorfizam skupa $D_t \setminus S_t$ na skup $S_x \setminus S_x$ sa ograničenim jakobijanom na $D_t \setminus S_t$, a $f \in \mathcal{R}(D_x)$, tada je $f(x(t))|J(t)| \in \mathcal{R}(D_t \setminus S_t)$ i važi jednakost*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t \setminus S_t} f(x(t))|J(t)|\,dt. \tag{30}$$

Ako je osim toga veličina $|\det x'|$ određena i ograničena na D_t, tada je

$$\int_{D_x} = \int_{D_t}\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. U dvostrukom integralu $\iint_D f\,dx\,dy$ preći na polarne koordinate i napisati granice integracije za oba moguća slučaja

a) $D = \{(x,y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, *b)* $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq ax, a > 0\}$,
c) $D = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, *d)* $D = \{(x,y) : x \leq 2, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}\}$.

2. U sledećim primerima promeniti redosled integracije, pretpostavljajući da su zadovoljeni uslovi pod kojima je to moguće:

$$a)\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\,,\quad b)\int_0^{a} d\varphi \int_0^{\pi/2} f(r,\varphi)\,dr,\quad 0<a<2\pi\,.$$

3. Odrediti sliku skupa $\{(x,y)\,:\, a<x<a+h,\ b<y<b+h,\ a,b>0\}$ preslikavanjem $u=y^2/x$, $v=\sqrt{xy}$, a zatim odrediti $\lim_{h\to 0} mD'/mD$, gde je D' slika skupa D datim preslikavanjem.

4. Dokazati fa se preslikavanjem $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ trougao $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ preslikava u kvadrat $0\le\xi\le 1$, $0\le\eta\le 1$.

5. Smenom promenljivih svesti date integrale na jednostruke

$$a)\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,,\quad b)\iint\limits_{|y|\le|x|\le 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,,$$

$$c)\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f(\frac{y}{x})\,dx\,dy\,,\qquad d)\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy,\quad a^2+b^2\ne 0\,,$$

$$e)\iint\limits_{D} f(xy)\,dx\,dy \quad D=\{(x,y): 1\le xy\le 2, 1\le y/x\le 4, x,y>0\}\,.$$

6. Koristeći smenu promenljivih $x=u$, $y=v/u$, dokazati da je

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} (xy)^{xy}\,dx\,dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}\,.$$

7. Dokazati da je

$$\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Delta}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy\,,$$

gde je $D=[a,a]\times[a,a]$, a $\Delta=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le a\sqrt{2}\}$, $a>0$.

8. Izračunati sledeće integrale:

a) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, gde je $D=\{(x,y): 4\le x+y\le 12\,,\, y^2\le 2x\}$,

b) $\iint_D xy\,dx\,dy$, gde je $D=\{(x,y): ax^3\le y\le bx^3\,,\, y^2\le px\,,\, p>0\}$

$$c)\iint\limits_{x^4+y^4\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,,\qquad d)\iint\limits_{x^2+y^2\le Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy\,,$$

$$e)\quad \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy\,.$$

9. Izračunati površine likova u ravni ograničene krivama
 $a)$ $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\,,\quad x^2+y^2\le a^2\,,$
 $b)$ $(x/a+y/b)^4 = x^2/h^2+y^2/k^2,\quad x,y>0,$
 $c)$ $\sqrt[4]{x/a}+\sqrt[4]{y/b}=1,\quad x=y=0,$
 $d)$ $\sqrt{x/a}+\sqrt{x/b}=1,\ \sqrt{x/a}+\sqrt{x/b}=2,\ x/a=y/b,\ 4x/a=y/b,\ a,b>0\,.$

10. Dokazati da je

$$I(k) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{-k^2x^2+\frac{y^2}{k^2}}\,dx\,dy \le \pi(1-e^{-1}),\quad k>0\,.$$

(Uputstvo: Uvesti smenu $kx=u$, $y/k=v$ i iskoristiti činjenicu da je $I(1) = \pi(1-e^{-1})$)

11. Primenom dvostrukih integrala odrediti zapreminu tela ograničenu zadatim površima:
 $a)$ $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0\,,$
 $b)$ $x^2+y^2+z^2=a^2\,,\ x^2+y^2\ge a\,|x|\,,\ a>0\,,$
 $c)$ $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1\,,\ (x^2/a^2+y^2/b^2)^2 = x^2/a^2-y^2/b^2\,,$
 $d)$ $z=xy\,,\ x^2=y\,,\ x^2=2y\,,\ y^2=x\,,\ y^2=2x\,,\ z=0\,.$

12. Sledeće integrale prikazati na različite načine pomoću ponovljenih integrala

$$a)\ \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f\,dz\,,\qquad b)\ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f\,dz\,.$$

13. Uvodeći sferne koordinate napisati sledeće integrale na različite načine preko ponovljenih integrala
 $a)$ $\int_V f\,dV\,,\ V=\{(x,y,z): 0\le x,y,z\le 1\}\,,$
 $b)$ $\int_V f\,dV\,,\ V=\{(x,y,z): x+y+z\le 1,\ x,y,z\ge 0\}\,.$

14. Izračunati sledeće integrale u zadatim oblastima
 $a)$ $\int_V (x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2)\,dV\,,\ V=\{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}\,,$
 $b)$ $\int_V \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, gde je V oblast ograničena površima $x^2+y^2=z^2$, $z=1\,,$
 $c)$ $\int_V (x^2+y^2+z^2)\,dV$, gde je V zajednički deo konusa $y^2+z^2\le x^2$ i sfere $x^2+y^2+z^2\le R^2$, $x\ge 0\,.$

15. Izračunati zapreminu tela ograničenu površima

$a)$ $(x^2+y^2+z^2)^n = x^{2n-1}\,,$
$b)$ $(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2)^2 = x^2/a^2+y^2/b^2\,,$
$c)$ $(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}+(z/c)^{2/3}=1\,.$

(Rezultat: *a*) $\pi/3(3n-1)$, *b*) $\pi^2 abc/4$, *c*) $4\pi abc/35$)

16. Izračunati integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1+\cdots+x_m)\right)dx_1\ldots dx_m\,.$$

17. Izračunati vrednost sledećeg integrala

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\cdots x_n\leq \pi/2}}{\int\cdots\int}\sin(x_1+\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n\,.$$

18. Izračunati

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1^3+\cdots+x_n^3\leq h}}{\int\cdots\int}(x_1^3+\cdots+x_n^3)^\alpha x_1^2\cdots x_n^2\,dx_1\cdots dx_n\,.$$

19. Neka je $h>0$ realan broj i $f:[0,h]\mapsto\mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Dokazati da je za svako $n\in\mathbb{N}$

$$I_n(h)=\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leq h}}{\int\cdots\int} f(h-x_1-\cdots-x_n)\,dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\underset{0\leq y_1\leq\cdots\leq y_n\leq h}{\int\cdots\int} f(h-y_n)\,dy_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h t^{n-1}f(h-t)\,dt\,.$$

20. Naći meru skupa $A_{2n}\subset\mathbb{R}^{2n}$ određenog nejednakostima $0\leq x_1\leq x_3\leq\cdots\leq x_{2n-1}\leq 1$, $0\leq x_2\leq x_4\leq\cdots\leq x_{2n}\leq 1$.

21. Odrediti meru skupa tačaka $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$ koje zadovoljavaju uslov $|x_1|+\cdots+|x_n|\leq r$.

22. Neka je $f\in\mathcal{C}(E)$, $f(x)\geq 0$ za svako $x\in\mathbb{R}$ i $\int f\,d\mathbb{R}=1$. Naći

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\sum x_k^2\leq a^2}\prod_{j=1}^n f(x_k)\,dx_j\,.$$

23. Neka je $f\in\mathcal{C}([0,1])$. Izračunati integral

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1+\cdots+x_k}{x_1+\cdots+x_n}\prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j\,.$$

(Rezultat: $\frac{k}{n}\left(\int_0^1 f\,dx\right)^n$)

24. Neka je $f \in ([0,1])$. Dokazati jednakost

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \min(x_1,\dots,x_n)\prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(u)\,du\right)^n\,dx\,.$$

25. Dokazati jednakost

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 (x_1\cdots x_n)^{x_1\cdots x_n}\,dx_1\dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 x^x \ln^{n-1}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

26. Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 2., dokazati da je

$$m(F(\Gamma_t)) = \int\limits_{\Gamma_t} |J(t)|\,dt\,.$$

Koristeći dobijeni rezultat, dokazati da je za svaki zatvoren ograničen skup $\Gamma_t \subset \mathbb{R}^n$

$$m(\Gamma_t) = m(a(\Gamma_t))\,,$$

gde je $a(t) = Dt + a$ afino preslikavanje čiji je jakobijan po modulu jednak 1, odn. $|\det D| = 1$.

27. a) Dokazati da se svako nesingularno linearno preslikavanje $L:\mathbb{R}^m \mapsto R^m$ može pretstaviti u obliku kompozicije linearnih preslikavanja oblika

$$(\dots,x^i,\dots) \xrightarrow{T^i_\alpha} (\dots,\alpha i,\dots)\,,$$
$$(\dots,x^i,\dots) \xrightarrow{T_{ij}} (\dots,x^i + x^j,\dots)\,,$$

pri čemu je oba puta upisana samo koordinata koja se menja.

b) Ako je $A : R^m \mapsto \mathbb{R}^{\ m}$ linearno preslikavanje, a $E \subset \mathbb{R}^m$ izmerljiv skup, dokazati da je tada i $A(E)$ izmerljiv skup, pri čemu je

$$m(A(E)) = |\det A| mE.$$

Specijalno je mera paralelepipeda $(v_1,\dots,v_m)$ čije su ivice vektori $v_1,\dots,v_m$

$$m(v_1,\dots,v_m) = \sqrt{\det G(v_1,\dots,v_m)}\,,$$

gde je $G(v_1,\dots,v_m)$ Gramova* matrica.

28. Dokazati da vrednost višestrukog integrala funkcije f na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ ne zavisi od izbora koordinatnog sistema u $\mathbb{R}^n$.

---

* Gram J.P. (1850-1916)-danski matematičar

29. Difeomorfizam $g : U \mapsto \mathbb{R}^n$ otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^n$ je prost, ako njegove koordinatne funkcije imaju oblik $g_i(x) = x_i$ za $i \neq j$, $g_j(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Dokazati da za svaku tačku $x_0 \in U$ postoji okolina u kojoj se difeomorfizam f može prikazati kao kompozicija prostih difeomorfizama $f = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$.

30. a) Dokazati da pri uslovima teoreme 4. integral na desnoj strani jednakosti (16) postoji.

b) Dokazati da jednakost (16) važi za svaki prost difeomorfizam.

c) Ako formula (16) važi za dva difeomorfizma, dokazati da ona važi i za njihovu kompoziciju.

d) Koristeći rezultate zadatka 24. i rezultate pod a), b), c), dokazati jednakost (16) u teoremi 4.

3. VIŠESTRUKI NESVOJSTVENI INTEGRALI

3.1. POJAM NESVOJSTVENOG INTEGRALA

Pri uvođenju pojma Rimanovog integrala, osnovna pretpostavka od koje se polazi je izmerljivost, a samim tim i ograničenost oblasti integracije. Videli smo da su integrabilne funkcije ograničene na dosta uskoj klasi skupova. Stoga je ograničenost podintegralne funkcije druga pretpostavka od koje se u najvećem broju razmatranja polazi.

Kao i u slučaju funkcija jedne promenljive, i ovde je cilj da proširimo pojam Rimanovog integrala kako u slučaju kada je oblast integracije neograničena, tako i na slučaj neograničenih funkcija. Izložićemo jedan pristup uvođenja višestrukih nesvojstvenih integrala koji obuhvata oba prethodno navedena slučaja.

Definicija 1. *Neka je E proizvoljan skup u $\mathbb{R}^n$. Za niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ kažemo da* ***monotono iscrpljuje skup*** *E, ako je*

$$(i)\ \overline{E}_k \subset E_{k+1} \text{ za svako } k \in \mathbb{N} \quad i \quad (ii)\ \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = E\,.$$

Definicija 2. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu E iz $\mathbb{R}^n$ i neka je integrabilna na svakom otvorenom i izmerljivom podskupu D skupa E za koji je $\overline{D} \subset E$. Funkcija f je* ***integrabilna u nesvojstvenom smislu na skupu*** *E, ako za svaki niz (E_n) otvorenih i* *izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuje skup E postoji konačna granična vrednost*

$$\lim_{k\to+\infty}\int f\,dE_k \tag{1}$$

i ne zavisi od izbora niza (E_n).

Tu graničnu vrednost nazivamo **nesvojstvenim integralom** funkcije f na skupu E i označavamo sa $\int f\,dE$. Ako integral $\int f\,dE$ postoji, kažemo da je **konvergentan**. Ako granična vrednost (1) ne postoji nezavisno od izbora niza (E_n) ili je jednaka $\pm\infty$, za integral $\int f\,dE$ kažemo da je **divergentan**.

Ako je otvoren skup $E \subset \mathbb{R}^n$ izmerljiv, a funkcija f integrabilna na njemu, nesvojstven integral funkcije f na skupu E se poklapa sa Rimanovim integralom, što neposredno sledi iz stava 7., 2.4.

Primetimo da uvedena definicija nesvojstvenog integrala nije ekvivalentna sa definicijom nesvojstvenog integrala funkcije jedne promenljive. U definiciji nesvojstvenog integrala funkcije jedne promenljive za skupove E_n biraju se samo intervali, dakle, veoma uska klasa izmerljivih skupova. Na ovo ukazuje i sledeći

Primer 1. Neka je funkcija $f:[0,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$ definisana na sledeći način:

$$f(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad \text{za}\quad n-1\le x<n\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Lako je proveriti da je integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergentan i da je njegova vrednost jednaka $\sum_1^{+\infty}(-1)^{n+1}/n$. Međutim, $\int_{[0,+\infty)} f\,dx$ u smislu definicije 2. ne postoji. Ovo neposredno sledi iz činjenice da red $\sum_1^{+\infty}(-1)^{n+1}/n$ nije apsolutno konvergentan, pa članove tog reda možemo permutovati tako da suma novog reda bude $+\infty$. Delimične sume tog reda možemo smatrati kao integrale funkcije f po uniji skupova E_n koji odgovaraju članovima novog reda. Skupovi E_n očigledno iscrpljuju skup $[0,+\infty)$.

Iz navedenog primera, ali i iz same definicije nesvojstvenog integrala vidimo da je zahtev egzistencije granične vrednosti (1) nezavisno od izbora niza koji monotono iscrpljuje oblast integracije ekvivalentan nezavisnosti sume reda od redosleda sumiranja njegovih članova.

Ako je taj red apsolutno konvergentan, poslednji zahtev je na osnovu Rimanove teoreme zadovoljen.

U praktičnom radu najčešće se razmatraju nizovi koji na specijalan način monotono iscrpljuju oblast integracije. Neka je funkcija $f : E \mapsto \mathbb{R}$ neograničena u okolini tačaka skupa $F \subset rE$, pri čemu je E izmerljiv skup. Za svako $\varepsilon > 0$ funkcija f je integrabilna na skupu $E_\varepsilon = E \setminus \cup_{x\in F} K(x,\varepsilon)$. Ako je (ε_n) niz nenegativnih brojeva koji konvergira nuli, onda je $\{E_{\varepsilon_n}\}$ niz koji monotono iscrpljuje skup E. U slučaju neograničene oblasti iscrpljivanje se može odrediti izborom komplemenata okolina beskonačno daleke tačke $E \setminus K(\infty, k) = E_k$, $k \in \mathbb{N}$. U jednodimenzionalnom slučaju opisano iscrpljivanje oblasti integracije dovodi do pojma glavne vrednosti nesvojstvenog integrala u Košijevom smislu.

Zadaci za vežbanje

1. Ako je $\{E_n\}$ niz izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuje izmerljiv skup E, dokazati da je $\lim_{n\to+\infty} mE_n = mE$.

2. Ako je $E \subset \mathbb{R}^n$, a (E_n) proizvoljan niz disjunktnih i izmerljivih skupova za koje je $E = \cup E_n$, dokazati da je $mE = \sum mE_n$.

3. Dokazati da funkcija $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ nije integrabilna na skupu $E = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$. (Uputstvo: posmatrati integral na skupovima $E = [0,n] \times [0,n]$ i $E_n^* = E \cap K(O,n)$)

4. Ako su funkcije f i g integrabilne na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ u nesvojstvenom smislu, a λ i μ realni brojevi, dokazati da je tada takva i funkcija $\lambda f + \mu g$ i da je

$$\int\limits_E \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \int\limits_E f(x) + \mu \int\limits_E g(x)\,.$$

3.2. NESVOJSTVENI INTEGRALI NENEGATIVNIH FUNKCIJA

Za izračunavanje višestrukih nesvojstvenih integrala sama definicija je neupotrebljiva, jer je familija svih iscrpljivanja zadatog skupa beskonačne kardinalnosti. Stoga je od velikog praktičnog, ali istovremeno i teorijskog značaja sledeća

Teorema 1. *Neka je funkcija f nenegativna na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i integrabilna na svakom izmerljivom podskupu skupa E. Tada za svaki niz (E_n) otvorenih izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuju skup E postoji*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f\, dE_n$$

i konačan je broj ili $+\infty$. Pri tome ta granična vrednost ne zavisi od izbora familije (E_n).

Dokaz. Neka su (E_n) i (E'_n) dva proizvoljna niza otvorenih izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuju skup E. Na osnovu stava 6., 2.4. nizovi $(\int f\, dE_n)$ i $(\int f\, dE'_n)$ su neopadajući. Pretpostavimo da je niz $(\int f\, dE_n)$ konvergentan i označimo njegovu graničnu vrednost sa I. Tada je

$$\int f\, dE_n \le I \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}\,.$$

Neka je E'_k proizvoljan element drugog niza. Kako je $\overline{E}'_k \subset \cup_1^{+\infty} E_n$, $\{E_n\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa $\overline{E}'_k$, pa se iz njega može izdvojiti konačan potpokrivač $\{E_{n_1}, \ldots, E_{n_m}\}$. Označimo sa $n(k) = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Tada je $\overline{E}'_k \subset E_n$ za svako $n \ge n(k)$, pa je stoga

$$\int f\, dE'_k \le \int f\, dE_n \le I$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Niz $(\int f\, dE'_n)$ je odozgo ograničen, pa je konvergentan i važi nejednakost

$$I' = \lim \int f\, dE'_n \le I\,.$$

Zamenom uloga familija (E_n) i (E'_n), dobijamo jednakost $I = I'$.

Ako jedan od nizova $(\int f\, dE_n)$ teži ka $+\infty$, onda isto važi i za drugi niz. Dokaz ovog dela tvrđenja prepuštamo čitaocu. ∎

Primer 1. Ispitajmo sada konvergenciju i odredimo vrednost sledećeg nesvojstvenog integrala

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

Skupovi $E_n = \{(x,y) : x^2+y^2 < n^2\}$ su otvoreni, izmerljivi i monotono iscrpljuju $\mathbb{R}^2$. Ispitajmo niz $I_n = \int e^{-(x^2+y^2)}\,dE_n$, $n \in \mathbb{N}$. Prelaskom na polarne koordinate dobija se

$$I_n = \iint\limits_{E_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n re^{-r^2}\,dr = \pi(1-e^{-n^2})\,.$$

Kako je $I = \lim_{n\to+\infty} I_n = \pi$, zadati integral je konvergentan i njegova granična vrednost je π. Iskoristimo navedeni primer da odredimo vrednost Puasonovog* integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

koji igra važnu ulogu u teoriji verovatnoće. U tom cilju uočimo familiju $E'_n = \{(x,y) : |x| < n,\ |y| < n\}$ otvorenih izmerljivih skupova koja monotono iscrpljuje $\mathbb{R}^2$. Tada je na osnovu dokazane teoreme

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{E'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dy = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy = \lim_{n\to+\infty} \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi,
\end{aligned}$$

odakle sledi vrednost Puasonovog integrala.

---

* Poisson S.D. (1781-1840)-francuski fizičar i matematičar

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati konvergenciju sledećih nesvojstvenih integrala

$$a)\ \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}\,,\qquad b)\ \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m}\,,\qquad c)\ \iint\limits_{\substack{x\ge 0,\,y\ge 0\\ x^2+y^2\ge 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+u^\beta)^m}\,,$$

$$d)\ \iint\limits_{|x|+|y|\ge 1} \frac{dx\,dy}{|x|^\alpha+|y|^\beta}\,.$$

(Rezultat: integrali su konvergentni za a) $m<1$, b) $m<1$, c) $1/\alpha+1/\beta<m$, d) $1/\alpha+1/\beta<1$)

2. Ispitati konvergenciju sledećih integrala

$$a)\ \int\limits_{\|x\|\le 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}\,,\qquad b)\ \int\limits_{\|x\|\le 1} \frac{dx}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\,,\qquad c)\ \int\limits_{\|x\|\ge 1} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}\,.$$

3.3. APSOLUTNA KONVERGENCIJA NESVOJSTVENIH INTEGRALA

Pojam apsolutne konvergencije višestrukih nesvojstvenih integrala uvodi se analogno kao i u slučaju nesvojstvenih integrala realnih funkcija jedne promenljive.

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $G\subset\mathbb{R}^n$ i neka je integrabilna na svakom izmerljivom podskupu skupa G. Za integral $\int f\,dG$ kažemo da je* ***apsolutno konvergentan*** *ako je integral $\int |f|\,dG$ konvergentan.*

Na osnovu teoreme 1., 3.2. koja daje dovoljne uslove za apsolutnu konvergenciju, lako se utvrđuje apsolutna konvergencija nesvojstvenog integrala. S druge strane, kao i kod jednostrukog nesvojstvenog integrala, apsolutna konvergencija nesvojstvenog integrala povlači običnu konvergenciju. Ovo neposredno sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 1. *Neka su funkcije f i g integrabilne na svakom otvorenom izmerljivom potskupu otvorenog skupa $E\subset\mathbb{R}^n$, pri čemu je $|f(x)|\le$*

$g(x)$ za svako $x \in E$. Tada iz konvergencije integrala $\int g\,dE$ sledi apsolutna konvergencija integrala $\int f\,dE$, pri čemu je

$$\int |f|\,dE \leq \int g\,dE\,, \tag{1}$$

a iz divergencije integrala $\int |f|\,dE$ sledi divergencija integrala $\int g\,dE$.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je integral $\int g\,dE$ konvergentan. Neka je $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz otvorenih izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuje skup E. Zbog učinjenih pretpostavki, $|f| \in \mathcal{R}(E_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i važi nejednakost

$$\int |f|\,dE_n \leq \int g\,dE_n\,. \tag{2}$$

Kako je funkcija g integrabilna na skupu E, niz $(\int g\,dE_n)$ je Košijev. Osim toga je

$$\int |f|\,dE_{n+k} - \int |f|\,dE_n = \int |f| d(E_{n+k} \setminus E_n) \leq$$

$$\leq \int g\,d(E_{n+k} \setminus E_n) = \int g\,dE_{n+k} - \int g\,dE_n\,,$$

pa je i niz $(\int |f|\,dE_n)$ Košijev. Stoga je taj niz konvergentan, pa je prema teoremi 1., 3.2. integral $\int |f|\,dE$ konvergentan. Nejednakost (1) dobijamo prelaskom na graničnu vrednost u (2) kada $n \to +\infty$.

Drugi deo tvrđenja ostavljamo čitaocu za vežbanje. ■

Posledica 1. *Ako je nesvojstven integral $\int f\,dE$ apsolutno konvergentan, onda je on i konvergentan.*

Dokaz. Definišimo funkcije

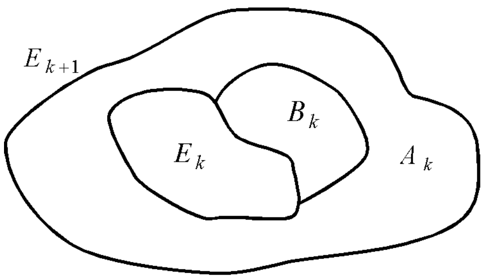
$$f_+ := \frac{1}{2}(|f| + f)\,, \qquad f_- := \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Tada je $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$, $0 \leq f_\pm \leq |f|$. Iz poslednje nejednakosti sledi integrabilnost funkcija f_+ i f_- na skupu E u nesvojstvenom smislu. No onda iz prve jednakosti i zadatka 4., 3.1. sledi integrabilnost funkcije f na skupu E u nesvojstvenom smislu. ■

Za višetruke integrale koji su nesvojstveni u smislu definicije 2., 3.1. važi i obrat, za razliku od nesvojstvenih integrala na realnoj pravoj, gde se apsolutna i uslovna konvergencija nesvojstvenih integrala razlikuju. Naime, važi sledeća

Teorema 2. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, otvoren skup. Ako je integral $\int f\, dE$ konvergentan, onda je on i apsolutno konvergentan.*

Dokaz.



Sl. 21

Pretpostavimo da je integral $\int |f|\, dE$ divergentan. Tada prema teoremi 1., 3.2. za svaki niz $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otvorenih izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuju otvoren skup E važi

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f|\, dE_n = +\infty\,.$$

Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je

$$\int |f|\, dE_{n+1} > 3\int |f|\, dE_n + 2n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Neka je $A_n = E_{n+1} \setminus \overline{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Skupovi A_n su otvoreni i izmerljivi, i kako je $\overline{E}_n \subset E_{n+1}$, to je $E_{n+1} = A_n \cup \overline{E}_n$. Stoga je

$$\int |f|\, dE_{n+1} = \int |f|\, dA_n + \int |f|\, dE_n\,,$$

pa nejednakost (3) dobija oblik

$$\int |f|\, dA_n \geq 2\int |f|\, dE_n + 2n\,,$$

odn.

$$\int f_+\, dA_n + \int f_-\, dA_n > 2\int |f|\, dE_n + 2n\,.$$

Neka je $\int f_+\, dA_n \geq \int f_-\, dA_n$. Tada poslednja nejednakost dobija oblik

$$2\int f_+\, dA_n \geq \int f_+\, dA_n + \int f_-\, dA_n > 2\int |f|\, dE_n + 2n\,,$$

odakle sledi nejednakost

$$\int f_+ \, dA_n > \int |f| \, dE_n + n \, . \tag{4}$$

No onda je

$$\sup_{\tau_n} \underline{S}_{\tau_n}(f_+) > \int |f| \, dE_n + n \, ,$$

gde se supremum u poslednjoj nejednakosti uzima po svim razbijanjima τ_n skupa A_n. No onda prema svojstvu supremuma postoji razbijanje τ_n skupa A_n tako da je

$$\underline{S}_{\tau_n}(f_+) > \int |f| \, dE_n + n \, .$$

Označimo sa B_n unutrašnjost svih elemenata razbijanja τ_n skupa A_n na svakom od kojih je funkcija f strogo veća od nule. Tada je

$$\int f \, dB_n = \int f_+ \, dB_n \geq \underline{S}_{\tau_n}(f_+) > \int |f| \, dE_n + n \, .$$

Stavimo da je $C_n = E_n \cup B_n$. Skup C_n je otvoren i izmerljiv. Kako je B_n otvoren podskup skupa E_{n+1}, to je $\overline{B}_n \subset E_{n+1}$, pa je i $\overline{C}_n \subset C_{n+1}$. Stoga je $\{C_n\}$ niz izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuju skup E. Sabirajući sada nejednakost

$$\int f \, dB_n > \int |f| \, dE_n + n$$

sa očiglednom nejednakošću

$$\int f \, dE_n \geq -\int |f| \, dE_n \, ,$$

dobijamo da je

$$\int f \, dC_n \geq n \, ,$$

odakle odmah sledi da je

$$\lim_{n \to +\infty} \int f \, dC_n = +\infty \, .$$

No, to znači da je integral $\int f\,dE$ divergentan, čime je teorema dokazana. ■

Zadaci za vežbanje

1. Polazeći od integrala $\iint_E f(t,z)\,dt\,dz$, gde je $f(t,z) = e^{-(t+z)}t^{x-1}z^{y-1}$, $x, y > 0$, a $E = \{(t,z) : t > 0,\ z > 0\}$, dokazati da je

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,$$

gde je

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt\,, \qquad B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt\,.$$

(Uputstvo: uvesti smenu promenljivih $t = u(1-v)$, $z = uv$ kojom se $E' = \{(u,v) : u > 0,\ 0 < v < 1\}$ preslikava na E, a zatim posmatrati familije $E_n = \{(t,z) : 0 < t < n,\ 0 < z < n\}$ i $E'_n = \{(u,v) : 0 < u < n,\ 0 < v < 1 - 1/(n+1)\}$ koje monotono iscrpljuju skupove E i E')

2. Neka je funkcija f ograničena na svakom otvorenom izmerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ i neprekidna skoro svuda na $\mathbb{R}^n$. Ako je

$$\varlimsup_{n\to+\infty} f(x)\|x\|^\alpha = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

dokazati da je tada integral $\int f\,d\mathbb{R}^n$ konvergentan za $\alpha > n$. Formulisati analogno tvrđenje za slučaj kada je funkcija neograničena u okolini koordinatnog početka. (Uputstvo: iskoristiti zadatak 2., 3.2. i teoremu 1.)

3. Dokazati teoremu 2. zamenjujući u definiciji nesvojstvenog integrala otvorenost skupova koji iscrpljuju oblast integracije oblastima.

3.4. SMENA PROMENLJIVIH U VIŠESTRUKOM NESVOJSTVENOM INTEGRALU

Za izračunavanje višestrukog nesvojstvenog integrala od velike je koristi sledeća teorema o smeni promenljivih.

Teorema 1. *Neka je $\varphi : D_t \mapsto D_x$ difeomorfizam otvorenog skupa $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ na otvoren skup $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$, a $f : D_x \mapsto \mathbb{R}$ funkcija koja je integrabilna na izmerljivim kompaktnim potskupovima skupa D_x.*

Ako je nesvojstven integral $\int f\,dD_x$ konvergentan, tada je integral $\int f(\varphi(t))|J(t)|\,dt$ konvergentan i važi jednakost

$$\int f\,dD_x = \int f(\varphi(t))|J(t)|\,dD_t. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $\{E_n^t\}$ niz otvorenih izmerljivih skupova koji monotono iscrpljuje skup D_t. Kako je $\varphi : D_t \mapsto D_x$ difeomorfizam, na osnovu leme 1., 2.6. i posledice 1., I.6.4. familija $E_n^x = \varphi(E_n^t)$, $n \in \mathbb{N}$ otvorenih izmerljivih skupova monotono iscrpljije skup D_x. Sa funkcijom f na svakom kompaktnom potskupu skupa D_x integrabilne su i funkcije f_+ i f_-. Uslovi teoreme 4., 2.6. su zadovoljeni, pa je

$$\int\limits_{\overline{E}_n^x} f_\pm(x)\,dx = \int\limits_{\overline{E}_n^t} f_\pm(\varphi(t))|J(t)|\,dt\,.$$

Granične vrednosti nizova $(\int f_\pm\, d\overline{E}_n^x)$ postoje kada $n \to +\infty$, pa su stoga i nizovi $(\int f_\pm(\varphi(t))|J(t)|\, d\overline{E}_n^t)$ konvergentni. No onda su integrali $\int f_\pm(\varphi(t))|J(t)|\,dD_t$ konvergentni na osnovu teoreme 1., 3.2., odakle sledi konvergencija integrala $\int f(\varphi(t))|J(t)|\,dD_t$ i važi jednakost (1). ■

Sledeća teorema je često korisna za izračunavanje nesvojstvenog integrala smenom promenljivih.

Teorema 2. *Neka je $\varphi : D_t \mapsto D_x$ preslikavanje otvorenog skupa $D_t \subset \mathbb{R}_t^n$ na otvoren skup $D_x \subset \mathbb{R}_x^n$. Neka su S_t i S_x skupovi mere nula tako da je $\varphi : D_t \setminus S_t \mapsto D_x \setminus S_x$ difeomorfizam otvorenog skupa $D_t \setminus S_t$ na otvoren skup $D_x \setminus S_x$. Ako je nesvojstveni integral $\int f\,dD_x$ konvergentan, a jakobijan $|J(t)|$ zadatog preslikavanja ograničen na svakom kompaktnom potskupu skupa D_t, tada je funkcija $f(\varphi(t))|J(t)|$ integrabilna u nesvojstvenom smislu na D_t i važi* (1).

Primer 1. Izračunajmo nesvojstveni integral

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$$

uvođenjem polarnih koordinata. Lako je proveriti da su uslovi teoreme 2. zadovoljeni, pa se može primeniti formula (1), posle čega dobijamo da je

$$I = \iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\ 0<r<1}} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha}\,.$$

Dobijeni višestruki integral je takođe nesvojstven za $\alpha > 0$. Oblast integracije možemo iscrpljivati skupovima $I_n = \{(r,\varphi) : 0 < r < 1 - 1/n,\, 0 < \varphi < 2\pi\}$. S obzirom na to da je reč o nenegativnoj funkciji, integral će biti konvergentan, ako je niz $(\int f\,dI_n)$ konvergentan. Primenom Fubinijeve teoreme dobijamo vrednost traženog integrala

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1-1/n} \frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha} = \\ &= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{1-1/n} \frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha} \end{aligned}$$

za $\alpha < 1$. Za $\alpha \geq 1$ integral divergira.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog dvostrukog integrala funkcije $f(x,y) = (y^2 - x^2)/(x^2+y^2)^2$ u svakoj od sledećih oblasti a) $D_1 = \{(x,y) : y \geq x\,,\, y \leq 1\,,\, x \geq 0\}$, b) $D_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1\}$, c) $D_3 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\,,\, y \geq 1\}$ d) $D_4 = \{(x,y) : y \geq x\,,\, x \geq 1\}$ e) $\{(x,y) : x \geq 1\,,\, y \geq 1\}$. Istovremeno ispitati da li postoje ponovljeni integrali i da li u tom slućaju postoji dvostruki integral. Ukoliko je integral u nekoj od tih oblasti konvergentan, izračunati njegovu vrednost. (Rezultat: integral je konvergentan samo u sličaju c), a vrednost integrala je $\pi/4$)

2. Dokazati da za nesvojstvene integrale

$$a) \int_{x,y\geq 0} e^{-xy} \sin x\,dx\,dy\,, \quad b) \iint\limits_{x,y\geq 0} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy\,,$$

ponovljeni integrali ne samo da postoje, već su i jednaki, i ako su oba integrala divergentna.

3. Data je funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^n\,, & \text{ako je } x=\frac{2m-1}{2^n} \text{ i } 0<y\le \frac{1}{2^n}\,,\\ 0\,, & \text{u ostalim tačkama}\,. \end{cases}$$

Dokazati da za datu funkciju postoji integral po skupu $\Delta=[0,1]\times[0,1]$, dok integral $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$ ne postoji.

4. Izračunati vrednost integrala

$$\iint\limits_{\Delta} \ln\sin(x-y)\,dx\,dy\,,$$

gde je Δ oblast ograničena pravama $y=0$, $x=\pi$, i $y=x$. (Uputstvo: uvesti smenu promeljivih $x=(u+t)/2$, $y=(u-t)/2$; rezultat: $-\pi^2\ln 2/2$)

5. Izračunati vrednosti sledećih dvostrukih integrala

$$a)\ \iint\limits_{\substack{x\ge 0,y\ge 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,,\qquad b)\ \iint\limits_{\substack{x\ge 0,y\ge 0\\ x+y\le 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy\,.$$

(Rezultat: a) $\pi ab/2$, b) $\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q+1)$)

6. Ako je funkcija $\varphi(u)$ neprekidna na segmentu $[0,1]$, dokazati da tada važe sledeće formule

$$\iint\limits_{\substack{x\ge 0,y\ge 0\\ x+y\le 1}} \varphi(x+y)x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int\limits_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1}\,du\,,$$

$$\iint\limits_{\substack{x,y\ge 0\\ (\frac{x}{a})^\alpha+(\frac{y}{b})^\beta\le 1}} \varphi\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\beta\right)x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{a^pb^q}{\alpha\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int\limits_0^1 \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du\,,$$

$$\iint\limits_{\substack{x,y\ge 0\\ (\frac{x}{a})^\alpha+(\frac{y}{b})^\beta\ge 1}} \varphi\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\beta\right)x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{a^pb^q}{\alpha\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int\limits_1^{+\infty} \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du\,,$$

poznate kao Luilvilove formule. Svi parametri u navedenim formulama su pozitivni.

Koristeći dokazane formule, ustanoviti konvergenciju sledećih integrala i izračunati njihove vrednosti

$$a)\ \iint\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leq 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^\alpha+y^\beta)^m}\,dx\,dy\,,\quad b)\ \iint\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\geq 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^\alpha+y^\beta)^m}\,dx\,dy\,,$$

$$c)\ \iint\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leq 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(1-x^\alpha-y^\beta)^m}\,dx\,dy\,.$$

(Rezultat: c) integral je konvergentan za $m < 1$ i njegova vrednost je $\Gamma(p/\alpha)\cdot\Gamma(q/\beta)\cdot\Gamma(1-m)/\alpha\beta\Gamma(p/\alpha+q/\beta+1-m)$)

7. Izračunati vrednost integrala

$$\iint\limits_{x,y\geq 0} e^{-x-y}\frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy\,,$$

gde je k konstanta. (Uputstvo: iskoristiti činjenicu da je podintegralna funkcija simetrična u odnosu na ravan $y = x$, a zatim uvesti smenu promenljivih $u = x+y$, $v = 2\sqrt{xy}$; rezultat: $\pi/\sqrt{k^2+1}$)

8. Odrediti vrednost integrala

$$\iint\limits_{x,y\geq 0} e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos bx\cos cy\,dx\,dy\,,$$

ako je $a > 0$, a b i c su proizvoljne konstante. (Rezultat: $\pi a/2(a^2+b^2+c^2)^{3/2}$)

9. Izračunati ponovljeni integral

$$\int_1^\infty dz\int_1^\infty y\,dy\int_0^{\frac{1}{yz}} x^2e^{xyz}\,dx\,.$$

(Uputstvo: prevesti dati integral na trostruki po odgovarajućoj oblasti, a zatim uvesti smenu promenljivih $x = u$, $y = (u+v)/u$, $z = (u+v+w)/(u+v)$; rezultat: $e/2-1$)

10. Izračunati nesvojstveni integral

$$\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leq 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\,,\quad (n>2)\,.$$

(Rezultat: $\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$)

11. Dokazati formulu Dirihlea:

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leq 1}}{\int\cdots\int} x_1^{p_1-1}\cdots x^{p_n-1}\,dx_1\ldots\,dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}\,,$$

$$p_1,\ldots,p_n>0\,,$$

kao i uopštenu formulu Dirihlea:

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leq 1}}{\int\cdots\int} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}\,,$$

u kojoj su svi koeficijenti a_i, α_i i p_i pozitivni. Koristeći dokazanu formulu, odrediti zapreminu n-dimenzionalne sfere.

12. Dokazati uopštenu formulu Luilvila:

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leq 1}}{\int\cdots\int} \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)\times$$

$$\times\, x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots\,dx_n =$$

$$= \frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int\limits_0^1 \varphi(u)u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,du\,,$$

gde su svi parametri pozitivni, a funkcija φ integrabilna na segmentu $[0,1]$.

13. Primenom matematičke indukcije dokazati sledeću formulu

$$\underset{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leq 1}}{\int\cdots\int} \varphi(x_1+\cdots+x_n)\frac{x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots\,dx_n}{(a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b)^{p_1+\cdots+p_n}} =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int\limits_0^1 \varphi(u)\frac{u^{p_1+\cdots+p_n-1}}{(a_1u+b)^{p_1}\cdots(a_nu+b)^{p_n}}\,du\,,$$

$a_1,\ldots,a_n\geq 0,\ b>0.$

14. Dokazati sledeću formulu

$$\underset{x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2}{\int\cdots\int} f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)\,dx_1\cdots dx_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^R r^n f(r)\,dr\,,$$

pretpostavljajući da je funkcija integrabilna na segmentu $[0,R]$. (Uputstvo: uvesti uopštene polarne koordinate)

15. Izračunati integral

$$\underset{x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1}{\int\cdots\int}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^{2k}\,dx_1\cdots dx_n\,,$$

gde su $a_1,\ldots,a_n$ proizvoljni realni brojevi. (Uputstvo: podintegralnu funkciju razložiti prema polinomnoj formuli, a zatim primeniti rezultat zadatka 11. ; rezultat: $\pi^{n/2}(2k-1)!!(a_1^2+\cdots+a_n^2)^k/2^k\Gamma(n/2+k+1)$)

16. Dokazati da integral

$$V_n=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,dx_1\cdots dx_n$$

teži ka $2/3$ kada $n\to+\infty$, dok je veličina $n(V_n-2/3)$ ograničena kada $n\to+\infty$.

4. KRIVE I POVRŠI U $\mathbb{R}^n$

U ovom delu razmatraćemo elemente teorije krivih i površi koji su od značaja za izučavanje krivolinijskih i površinskih integrala. Izložićemo načine zadavanja površi, tipove površi i njihovu orijentaciju. Odredićemo tangentnu ravan površi koja je od značaja za izračunavanje površine površi.

4.1. POVRŠI U $\mathbb{R}^n$

Definicija 1. *Skup $S\subset\mathbb{R}^n$ je k-**dimenzionalna mnogostrukost** ili **površ** u $\mathbb{R}^n$, ako za svaku tačku $x_0\in S$ postoji okolina $U_{x_0}\subset\mathbb{R}^n$ tačke x_0 tako da je skup $S\cap U_{x_0}$ homeomorfan otvorenom jediničnom intervalu $I^k=\{x\in\mathbb{R}^k : 0<x_i<1,\ i=\overline{1,k}\}$. Homeomorfizam $\varphi_{x_0}: I^k\mapsto U_S(x_0)=S\cap U_{x_0}$ je **lokalna parametrizacija lokalne***

karte *$(U_S(x_0), \varphi_{x_0})$ površi S. Skup $U_S(x_0)$ je* ***reon****, a I^k* ***oblast parametara*** *površi S.*

Očigledno je da se u datoj definiciji skup I^k može zameniti ma kojim otvorenim skupom iz $\mathbb{R}^k$ koji mu je homeomorfan.

Iz definicije površi vidi se da je reon ma koje tačke k-dimenzionalne površi homeomorfan nekoj neprekidnoj deformaciji otvorenog k-dimenzionalnog kuba I^k. Ako je $(t_1, \ldots, t_k) \mapsto \varphi_{x_0}(t_1, \ldots, t_k)$ lokalna parametrizacija reona $U_S(x_0)$, onda koordinate tačke $(t_1, \ldots, t_k) \in I^k$ nazivamo **lokalnim** ili **krivolinijskim koordinatama** tog reona.

Primer 1. Otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalna mnogostrukost. Zaista, za svaku tačku $x_0 \in G$ postoji okolina $U_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i^0| < r\} \subset G$, pa je $\varphi_{x_0}(t) = x_0 + t$, $t \in I_r^n$ homeomorfizam skupa $I_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < r\}$ na skup $G \cap U_{x_0}$, što je lako proveriti.

Definicija 2. *Familija $\{(U_S(x_i), \varphi_{x_i})\}$ lokalnih karata površi S je* ***atlas površi*** *S, ako je $\cup_i U_S(x_i) = S$. Površ je* ***elementarna****, ako se njen atlas sastoji od jedne karte. U tom slučaju homeomorfizam $\varphi : I^k \mapsto S$ nazivamo* ***globalnom parametrizacijom*** *te površi.*

Površ može imati više različitih atlasa. Unija dva atlasa neke površi je opet atlas te površi.

Primer 2. Sfera $S(O, r) \subset \mathbb{R}^3$ ima atlas koji se sastoji iz sledećih lokalnih karata

$$\begin{aligned}
&\{(x, y, z) : \, z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \, (x, y) \in K(O, r) \subset \mathbb{R}^2_{xy}\},\\
&\{(x, y, z) : \, y = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}, \, (x, z) \in K(O, r) \subset \mathbb{R}^2_{zx}\},\\
&\{(x, y, z) : \, x = \pm\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, \, (y, z) \in K(O, r) \subset \mathbb{R}^2_{yz}\}.
\end{aligned}$$

Može se dokazati da sfera kao dvodimenzionalna mnogostrukost nije elementarna.

Deo S^+ sfere S određen sa

$$S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \, x, y, z > 0\}$$

je elementarna površ. Globalna parametrizacija ove površi definisana je preslikavanjem $\varphi(t_1, t_2) = \{(r \sin t_1 \cos t_2, r \sin t_1 \sin t_2, r \cos t_1) : (t_1, t_2) \in I^2 = \{(t_1, t_2) : \, 0 < t_1, t_2 < \pi/2\}\}$.

Uslov da je preslikavanje φ_{x_0} u definiciji 1. homeomorfizam nije dovoljan za opisivanje površi u $\mathbb{R}^n$, o čemu postoje brojni primeri. Da bi se izbegli problemi koji mogu nastati ako se prihvati definicija 1., a koji nisu suštinski vezani za probleme analize, uvodi se pojam glatke površi.

Definicija 3. *Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je* ***glatka k-dimenzionalna mnogostrukost*** *ili* ***površ klase*** *$\mathcal{C}^{(m)}$, ako za svaku tačku $x_0 \in S$ postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u $\mathbb{R}^n$ i preslikavanje $\varphi_{x_0} : I^k \mapsto U_S(x_0) = S \cap U_{x_0}$ klase $\mathcal{C}^{(m)}$ čiji je rang k u svakoj tački skupa I^k.*

Često kažemo da je S glatka površ klase $\mathcal{C}^{(m)}$. Ako je $m = 1$, površ jednostavno zovemo **glatkom**.

Neka je preslikavanje $\varphi_{x_0} : I^k \mapsto U_S(x_0)$ klase $\mathcal{C}^{(1)}$ određeno koordinatnim funkcijama $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = \overline{1, n}$, pri čemu je rang preslikavanja φ jednak k. Određenosti radi, pretpostavimo da je

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} \neq 0$$

za svako t iz neke okoline tačke $t_0 \in I^k$. Na osnovu teoreme o konstantnom rangu, postoji okolina U_{t_0} tačke t_0, tako da se skup $\varphi(U_{t_0})$ sastoji od tačaka čije su koordinate

$$x_{k+1} = \psi_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, x_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_k), \quad \psi_i \in \mathcal{C}^{(1)}.$$

Stavljajući $x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k$, vidimo da je $\varphi : U_{t_0} \mapsto \varphi(U_{t_0})$ homeomorfizam.

Primer 3. Neka je $F_i \in \mathcal{C}^{(m)}(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n-k}$, $k < n$, sistem glatkih funkcija. Neka je $S \subset X$ skup rešenja sistema jednačina

$$F_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n-k}.$$

Pretpostavimo da je skup S neprazan i da je rang matrice

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right]$$

$n - k$. Tada je S glatka k-dimenzionalna mnogostrukost klase $\mathcal{C}^{(m)}$ u $\mathbb{R}^n$. Zaista, na osnovu teoreme o egzistenciji rešenja sistema implicitno zadatih funkcija, za svako $x_0 \in S$ postoji okolina $U_{\widetilde{x}_0}$ tačke $\widetilde{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ i funkcije $f_{k+1}, \ldots, f_n$ klase $\mathcal{C}^{(m)}$ definisane na skupu $U_{\widetilde{x}_0}$ tako da je

$$x_{k+1} = f_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, x_n = f_n(x_1, \ldots, x_k)\,.$$

Poslednji sistem možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&x_1 = t_1, \ldots, x_k = t_k,\\
&x_{k+1} = f_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, x_n = f_n(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

koji pretstavlja lokalnu parametrizaciju lokalne karte površi S.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je sfera $S((1,1),1) \subset \mathbb{R}^2$ jednodimenzionalna mnogostrukust u prostoru $\mathbb{R}^2$.

2. Ispitati koji je od sledećih skupova površ:

$$\begin{gathered}
S_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = \alpha\},\\
S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = \alpha\},\\
S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = \alpha\},
\end{gathered}$$

gde je $\alpha \in \mathbb{R}$. U tom slučaju odrediti dimenziju te površi.

3. Neka je $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje koje zadovoljava uslov $f \circ f = f$. Dokazati da je $f(\mathbb{R}^n)$ glatka površ u $\mathbb{R}^n$.

4. Neka je f neprekidno preslikavanje otvorene kocke $I^k \subset \mathbb{R}^k$ u $\mathbb{R}$. Dokazati da je grafik $\Gamma(f)$ tog preslikavanja elementarna površ dimenzije k u $\mathbb{R}^{k+1}$. Uopštiti zaključak na graf preslikavanja $f : I^k \mapsto \mathbb{R}^m$.

5. Data je sfera $S(O,r) \subset \mathbb{R}^n$. Dokazati da je ona $(n-1)$-dimenzionalna glatka površ u $\mathbb{R}^n$ koja nije elementarna. Dokazati da ona ima konačan atlas i odrediti jedan od njih.

6. Dokazati da je $\gamma = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ jednodimenzionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^2$ koja nije glatka, ali je elementarna.

7. Skup $M \subset \mathbb{R}^m$ je p-dimenzionalna mnogostrukost klase $\mathcal{C}^{(1)}$, $p \le m$, onda i samo onda ako za svaku tačku $x_0 \in M$ postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 i $m-p$ funkcija F_j klase $\mathcal{C}^{(1)}$, $j = \overline{p+1, m}$ definisanih na U_{x_0} koje zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned}
&(i) \sum_{p+1}^{m} \lambda_j F_j'(x_0) = (0, \ldots, 0) \Longleftrightarrow (\lambda_j = 0,\, j = \overline{p+1, m})\,,\\
&(ii)\, M \cap U_{x_0} = \{x \in M :\, F_j(x) = 0,\, j = \overline{p+1, m}\}\,.
\end{aligned}$$

Dokazati. Dati geometrijsko tumačenje tvrđenja u slučaju $p = 1, 2$.

4.2. TANGENTNI PROSTOR MNOGOSTRUKOSTI

Pojam tangentnog prostora mnogostrukosti je od izuzetnog značaja u teoriji mnogostrukosti. Sa ovim pojmom smo se već više puta upoznali u diferencijalnom računu. Naime, radi se o tangentnoj ravni grafika zadate funkcije koja je diferencijabilna. Neka je f diferencijabilna funkcija u oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$, $x_{n+1}^0 = f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Tangentna ravan $T_{x_0}S$ površi $S = \Gamma(f)$ u tački $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, kao što je poznato, definisana je jednačinom

$$x_{n+1} = x_{n+1}^0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\widetilde{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)\,. \tag{1}$$

$\Gamma(f)$ je glatka elementarna površ čija je globalna parametrizacija definisana preslikavanjem

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n, f(t_1, \ldots, t_n))\,,$$

$(t_1, \ldots, t_n) \in D$, $t_i^0 = x_i^0$, $i = \overline{1, n}$, klase $\mathcal{C}^{(1)}(D)$. Stavljajući da je $x_i - x_i^0 = t_i$, $i = \overline{1, n}$, jednačinu (1) možemo pretstaviti u parametarskom obliku

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + t_1 \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^0 + t_n \\ x_{n+1} &= x_{n+1}^0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(t_0)}{\partial t_i} t_i \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sistem jednačina (2) možemo kraće prikazati u vektorskom obliku jednačinom

$$x = x_0 + \varphi'(t_0)t\,.$$

Uopštenje izloženog primera na slučaj vektorske funkcije upućuje nas na uvođenje sledeće definicije.

Definicija 1. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ glatka k-dimenzionalna mnogostrukost, a $\varphi_{x_0}(t)$, $t \in \mathbb{R}^k$, lokalna parametrizacija te mnogostrukosti u tački $x_0 = \varphi_{x_0}(t_0)$. Skup*

$$T_{x_0}S := \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + \varphi'_{x_0}(t_0)t,\, t \in \mathbb{R}^k\}$$

*je **tangentan prostor mnogostrukosti** S.*

Iz definicije tangentnog prostora glatke k-dimenzionalne mnogostrukosti zaključujemo da je tangentan prostor k-dimenzionalna mnogostrukost. Stoga je on homeomorfan sa prostorom $\mathbb{R}^k$. Potprostor $T_{x_0}S$ prostora $\mathbb{R}^n$ dobijen je translacijom prostora $\mathbb{R}^k$ za vektor x_0 i rotacijom koja je je određena matricom preslikavanja $d\varphi_{x_0}$, što neposredno sledi iz činjenice da je $T_{x_0}S$ slika prostora $\mathbb{R}^k$ linearnim preslikavanjem $x = x_0 + \varphi'_{x_0}(t_0)t$. Stoga je tangentan prostor $T_{x_0}S$ k-dimenzionalne mnogostrukosti S k-dimenzionalan potprostor prostora $\mathbb{R}^n$ određen sistemom linearno nezavisnih vektora

$$\left(\frac{\partial\varphi^1_{x_0}(t_0)}{\partial t_i}, \ldots, \frac{\partial\varphi^n_{x_0}(t_0)}{\partial t_i}\right), \quad i = \overline{1,k}\,.$$

Jednačinu $x = x_0 + \varphi'_{x_0}(t_0)t$ nazivamo vektorskom jednačinom tangentnog prostora $T_{x_0}S$ mnogostrukosti S. U koordinatnom zapisu ova jednačina ima oblik

$$x_i - x_i^0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi^i_{x_0}(t_0)}{\partial t_j} t_j, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

Razmotrimo sada glatku k-dimenzionalnu površ S klase $\mathcal{C}^{(m)}$ definisanu u primeru 3., 4.1. sistemom jednačina $F_i = 0$, $i = \overline{1, n-k}$. Na osnovu teoreme o ogzistenciji implicitno zadate vektorske funkcije, postoje okoline $U_{x_k^0}$ i $U_{x_{n-k}^0}$ tačaka

$$x_k^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0) \quad \text{i} \quad x_{n-k}^0 = (x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

i preslikavanje

$$x_{n-k} = f_{n-k}(x_k) \tag{3}$$

okoline $U_{x_k^0}$ na $U_{x_{n-k}^0}$ klase $\mathcal{C}^{(m)}$, tako da je

(4) $$F_i(x_k, f_{n-k}(x_k)) = 0, \quad i = \overline{1, n-k}\,.$$

Preslikavanje (3) je lokalna parametrizacija površi S u tački $x_0 = (x_k^0, x_{n-k}^0)$ klase $\mathcal{C}^{(m)}$. Tangentni prostor površi S u tački x_0 je

$$x_{n-k} - x_{n-k}^0 = f'_{n-k}(x_k^0)(x_k - x_k^0)\,.$$

Kako je

$$f'_{n-k}(x_k^0) = -[F'_{n-k}(x_0)]^{-1} F'_k(x_0)\,,$$

jednačina tangentne površi $T_{x_0}S$ dobija oblik

(5) $$F'_x(x_0)(x - x_0) = 0\,,$$

ili u koordinatnom zapisu

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j}(x_j - x_j^0) = 0, \quad i = \overline{1, n-k}\,.$$

Iz jednačine (5) vidimo da vektor $\xi = x - x_0$ pripada tangentnoj ravni $T_{x_0}S$ površi $S \subset \mathbb{R}^n$ koja je zadata jednačinom $F(x) = 0$ onda i samo onda ako je

(6) $$F'_x(x_0)\xi = 0\,.$$

Sledeća teorema daje bitnu karakterizaciju tangentnog prostora.

Teorema 1. *Tangentni prostor $T_{x_0}S$ glatke površi S u tački x_0 sastoji se od tangenata glatkih krivih na površi S koje prolaze kroz tačku x_0.*

Dokaz. Neka je površ S definisana jednačinom $F(x) = 0$, gde je $F = (F_1, \ldots, F_{n-k})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, a $\Gamma : I \to S$ proizvoljna glatka kriva na površi S koja sadrži tačku x_0, pri čemu je $I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < 1\}$. Sa $x(t)$ označimo parametrizaciju krive Γ, i neka je $x(0) = x_0$. Kako je nosač krive Γ na površi S, to je $x(t) \in S$ za svako $t \in I$. Stoga je $F(x(t)) = 0$ za svako $t \in I$. Diferenciranjem poslednje jednakosti dobijamo $F'_x(x(t))x'(t) \equiv 0$. Za $t = 0$ ova jednačina dobija oblik $F'_x(x_0)x'(0) = 0$. Time smo dokazali da tangentni vektor $x'(0)$ krive Γ u tački x_0 pripada tangentnom prostoru $T_{x_0}S$.

Neka je sada $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ proizvoljan vektor koji pripada tangentnom prostoru $T_{x_0}S$ površi S. Dokažimo da postoji kriva čiji je nosač na površi S kroz tačku x_0, tako da je ξ tangentni vektor te krive u tački x_0. Kako vektor ξ pripada tangentnoj ravni površi S, to je $F'_x(x_0)\xi = 0$. Definišimo na površi S glatku krivu Γ koja prolazi kroz tačku x_0 koja je određena jednačinama

$$\text{(7)} \qquad x_k = x_k^0 + \xi_k t\,, \qquad x_{n-k} = f_{n-k}(x_k^0 + \xi_k t)\,, \quad t \in I\,.$$

Da ovako definisana kriva pripada površi S neposredno sledi iz jednačina (4) koje možemo napisati u obliku

$$F(x_k^0 + \xi_k t, f_{n-k}(x_k^0 + \xi_k t)) = 0\,.$$

Za $t = 0$ ova kriva prolazi kroz tačku x_0. Diferenciranjem poslednje jednačine i stavljajući u tako dobijenom izrazu $t = 0$, dobijamo jednačinu

$$F'_{x_k}(x_0)\xi_k + F'_{x_{n-k}}(x_0)\widetilde{\xi}_{n-k} = 0\,,$$

gde je $\widetilde{\xi}_{n-k} = f'_{n-k}(x_k^0)$. Stoga je $F'_x(x_0)\widetilde{\xi} = 0$, gde je $\widetilde{\xi} = (\xi_k, \widetilde{\xi}_{n-k})$. Sada iz jednačina $F'_x(x_0)\xi = 0$ i $F'_x(x_0)\widetilde{\xi} = 0$ i činjenice da je rang preslikavanja F u tački x_0 jednak $n - k$ sledi da je $\xi = \widetilde{\xi}$. Međutim, $\widetilde{\xi}$ je tangentni vektor krive (7) u tački x_0. ■

Primer 1. Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ glatka dvodimenzionalna mnogostrukost, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ lokalna parametrizacija mnogostrukosti S u tački $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Neka je $I^2 \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ oblast parametara, $I^2 = \{(u, v) : |u - u_0| < 1, |v - v_0| < 1\}$ i neka je $\varphi_1(u_0, v_0) = x_0$, $\varphi_2(u_0, v_0) = y_0$, $\varphi_3(u_0, v_0) = z_0$. Tangentna ravan $T_{(x_0,y_0,z_0)}S$ mnogostrukosti S određena je vektorskom jednačinom

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_{1u} & \varphi'_{1v} \\ \varphi'_{2u} & \varphi'_{2v} \\ \varphi'_{3u} & \varphi'_{3v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Ako ovu jednačinu napišemo u skalarnom obliku i eliminišemo parametre u i v, dobićemo jednačinu oblika

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,, \tag{8}$$

gde su A, B i C konstante određene jednakostima

$$A=\begin{vmatrix}\varphi'_{2u}(u_0,v_0) & \varphi'_{3u}(u_0,v_0)\\ \varphi'_{2v}(u_0,v_0) & \varphi'_{3v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\,,\quad B=\begin{vmatrix}\varphi'_{3u}(u_0,v_0) & \varphi'_{1u}(u_0,v_0)\\ \varphi'_{3v}(u_0,v_0) & \varphi'_{1v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\,,$$

$$C=\begin{vmatrix}\varphi'_{1u}(u_0,v_0) & \varphi'_{2u}(u_0,v_0)\\ \varphi'_{1v}(u_0,v_0) & \varphi'_{2v}(u_0,v_0)\end{vmatrix}\,.$$

Ako je $(u,v,f(u,v))$ parametrizacija glatke površi S, tada je jednačina tangentne ravni oblika

$$z-z_0=(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)\,.$$

Definicija 2. *Neka je $S\subset\mathbb{R}^n$ glatka k-dimenzionalna mnogostrukost. Skup*

$$N_{x_0}S=\{x\in\mathbb{R}^n:\,(x-x_0,y-x_0)=0 \text{ za svako } y\in T_{x_0}S\}$$

je ***normala površi*** *S u tački x_0.*

Primer 2. Posmatrajmo ponovo glatku površ iz prethodnog primera. Ako je $y\in T_{x_0}S$, onda je iz jednačine (8) jasno da je $(N,y-x_0)=0$, gde je $N=(A,B,C)$. Stavljajući da je $x-x_0=\lambda N$, vidimo da je $(x-x_0,y-x_0)=0$, pa se normala te površi određuje vektorskom jednačinom $x-x_0=\lambda N$. Uvodeći oznake kao što je urađeno u primeru 1., dobićemo jednačinu normale površi zadate parameterskom reprezentacijom

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}\,.$$

Ako je površ S elementarna, a njena globalna parametrizacija data preslikavanjem $(u,v)\mapsto(u,v,f(u,v))$, onda je jednačina normale površi S u tački (x_0,y_0,z_0) oblika

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{-1}\,,$$

gde smo koristili standardne oznake

$$p = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ glatka jednodimenzionalna elementarna mnogostrukost. Napisati vektorske i skalarne jednačine tangentnog prostora $T_{x_0}S$. Posebno razmotriti slučajeve $n = 2, 3$. U ovim slučajevima odrediti $N_{x_0}S$.

2. Neka je glatka jednodimenzionalna mnogostrukost $S \subset \mathbb{R}^n$ zadata sistemom jednačina $F(x) = 0$. Rešiti sve probleme postavljene u prethodnom zadatku.

3. Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Odrediti $T_{x_0}S$ u proizvoljnoj tački $x_0 \in S$.

4. Neka je $T_{x_0}S$ tangentni prostor glatke k-dimenzionalne mnogostrukosti S u tački x_0, pri čemu je φ_{x_0} lokalna parametrizacija mnogostrukosti S u tački x_0. Definišimo na $T_{x_0}S$ operacije $\oplus$ i $\odot$ na sledeći način: ako su $x' = x_0 + \varphi'_{x_0}(t_0)t'$, $x'' = x_0 + \varphi'_{x_0}(t_0)t''$, tada je

$$x' \oplus x'' := x_0 + (\varphi'_{x_0}(t_0)t' + \varphi'_{x_0}(t_0)t'', \qquad \lambda \odot x' := x_0 + \lambda\varphi'_{x_0}(t_0)t'.$$

Dokazati da je $(T_{x_0}S, \oplus, \odot)$ k-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

5. Neka je $(T_{x_0}S)^\perp$ ortogonalan komplement tangentnog prostora glatke k-dimenzionalne mnogostrukosti $S \subset \mathbb{R}^n$. Dokazati da je $N_{x_0}S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + y,\, y \in (T_{x_0}S)^\perp\}$. Odrediti dimenziju prostora $N_{x_0}S$.

6. Dokazati da je ortogonalna projekcija k-dimenzionalne glatke površi $S \subset \mathbb{R}^n$ na tangentnu ravan $T_{x_0}S$ obostrano jednoznačno preslikavanje u nekoj okolini tačke x_0.

7. Neka je funkcija $d_p(x) : S \mapsto \mathbb{R}$ definisana na k-dimenzionalnoj glatkoj mnogostrukosti S određena sa $d_p(x) = \|x - p\|$, gde je $p \in \mathbb{R}^n$ fiksirana tačka. Dokazati da je u tačkama ekstremnih vrednosti funkcije $d_p(x)$ vektor $p - x$ ortogonalan na površ S.

4.3. ORIJENTACIJA POVRŠI

4.3.1. ORIJENTACIJA PROSTORA $\mathbb{R}^n$

Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ proizvoljna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Svaki element $x \in \mathbb{R}^n$ može se na jedinstven način prikazati u obliku $x = \sum x_i e_i$ u koordinatnom sistemu koji je generisan bazom e. Ako je $\widetilde{e} =$

$\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ ma koja druga baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, tada se svaki vektor baze $\widetilde{e}$ na jedinstven način može prikazati kao $\widetilde{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, $j = \overline{1, n}$. Matrica $A_{e\widetilde{e}} := \|a_{ij}\|$ pretstavlja matricu prelaza sa baze e na bazu $\widetilde{e}$. Iz analitičke geometrije je poznato da je matrica prelaza sa baze na bazu uvek regularna.

Označimo sa $\mathcal{B}$ skup svih baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Lako je proveriti da je relacija $\sim$ definisana u skupu $\mathcal{B}$ na sledeći način:

$$(\forall e, \widetilde{e} \in \mathcal{B})(e \sim \widetilde{e} \Leftrightarrow \det A_{e\widetilde{e}} > 0)$$

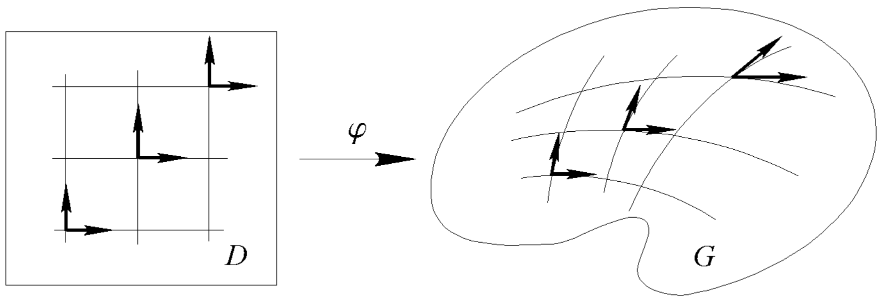
relacija ekvivalencije u skupu $\mathcal{B}$. Skup $\mathcal{B}/\sim$ očigledno ima samo dve klase. Dve baze pripadaju istoj klasi, ako je determinanta matrice prelaza između njih pozitivna. U protivnom, baze pripadaju različitim klasama.

Pod **orijentacijom vektorskog prostora** $\mathbb{R}^n$ podrazumevamo svaku od klasa ekvivalencije faktor prostora $\mathcal{B}/\sim$. Jednu od njih zvaćemo **pozitivnom**, a drugu **negativnom orijentacijom**.

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je **orijentisan** ako je na njemu fiksirana jedna od dveju mogućih orijentacija. Jasno da je za orijentaciju prostora dovoljno fiksirati jednu bazu. Uobičajeno se prostor $\mathbb{R}^n$ smatra pozitivno orijentisanim, ako je u njemu orijentacija određena izborom standardne baze $e = \{e_1 \ldots, e_n\}$.

4.3.2. ORIJENTACIJA ELEMENTARNE POVRŠI PARAMETRIZACIJOM

Pojam orijentacije površi uvedimo najpre u slučaju elementarne površi. U tom cilju posmatrajmo difeomorfne oblasti $D \subset \mathbb{R}^n_t$ i $G \subset \mathbb{R}^n_x$. Neka je $x = \varphi(t)$ difeomorfizam oblasti D u oblast G. Oblasti D i G možemo smatrati mnogostrukostima (videti primer 1., 4.1.). Tangentna ravan $T_{t_0}D = \{\widetilde{t} \in \mathbb{R}^n_t : \widetilde{t} = t_0 + t,\, t \in \mathbb{R}^n_t\}$ oblasti D u proizvoljnoj tački $t_0 \in D$ dobija se translacijom vektorskog prostora $\mathbb{R}^n_t$ u tačku t_0. Ako je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ standardna baza u $\mathbb{R}^n_t$, onda je to standardna baza tangentne ravni $T_{t_0}D$ za svako $t_0 \in D$. Kako je φ difeomorfizam oblasti D na oblast G, to je $\varphi'(t)$ linearno preslikavanje $T_{t_0}D$ na $T_{\varphi(t_0)}G$, pri čemu se standardna baza e preslikava u bazu $\varphi(e) = \varphi'(t)e$.



Sl. 22

Razmotrimo sada dva difeomorfizma $\varphi_i : D_i \to G$, $i = 1, 2$, koji u oblasti G definišu dva različita sistema krivolinijskih koordinata. Uzajamno inverzni difeomorfizmi $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : D_1 \to D_2$ i $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \to D_1$ realizuju prelazak sa jednog na drugi sistem krivolinijskih koordinata. Jakobijani tih preslikavanja su istog znaka jer je njihov proizvod jednak 1. Stoga se u skupu difeomorfizama oblasti D_i na oblast G može uvesti relacija $\sim$ na sledeći način. Difeomorfizmi $\varphi_i : D_i \to G$ su u relaciji $\sim$, ako je $\det(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)' > 0$. Kako su determinante preslikavanja $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ i $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ istog znaka, relacija $\sim$ je korektno definisana. Lako je dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije kojom se skup svih difeomorfizama D_i na G razbija na dve klase. Izborom difeomorfizma $\varphi : D \to G$ potpuno se određuje jedna od klasa ekvivalencije relacije $\sim$. Tako izabranu klasu nazivamo **orijentišućom klasom parametrizacija oblasti** G ili jednostavno **orijentacijom oblasti** G. Oblast G je **orijentisana**, ako je izabrana jedna od mogućih orijentacija te oblasti.

Očigledno da se potpuno analogno može orijentisati i svaka glatka elementarna k-dimenzionalna površ S u $\mathbb{R}^n$. Pri tome treba proveriti da li se prelazak sa jednog sistema krivolinijskih koordinata na drugi realizuje difeomorfizmom istog stepena glatkosti kao i same površi.

4.3.3. TANGENTNA ORIJENTACIJA ELEMENTARNE POVRŠI

Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ elementarna glatka k-dimenzionalna površ, a $\varphi : I^k \mapsto S$ parametrizacija površi S. Za proizvoljnu tačku $t_0 =$

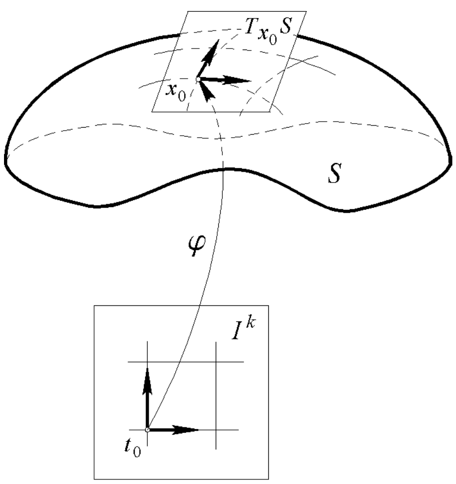
$(t_1^0,\dots,t_k^0)\in I^k$ krive

$$\gamma_i(x_0)=\{\varphi(t_1^0,\dots,t_{i-1}^0,t_i,t_{i+1}^0,\dots,t_k^0):\\ :(t_1^0,\dots,t_{i-1}^0,t_i,t_{i+1}^0,\dots,t_k^0)\in I^k\},\ i=\overline{1,k}$$

nazivamo **koordinatnim krivama na površi** S u tački $x_0=\varphi(t_0)$. Ako je $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, tada su

$$\left(\frac{\partial\varphi_1(t_0)}{\partial t_i},\dots,\frac{\partial\varphi_n(t_0)}{\partial t_i}\right),\quad i=\overline{1,k}, \tag{1}$$

tangentni vektori koordinatnih linija γ_i površi S u tački x_0 koji čine bazu tangentnog prostora $T_{x_0}S$. Koordinatne funkcije $\partial\varphi_j/\partial t_i$, $j=\overline{1,n}$, koordinatnih vektora (1) neprekidne su funkcije u oblasti parametara I^k. Na taj način svaka parametrizacija glatke elementarne površi generiše neprekidno polje baznih vektora tangentnog prostora T_xS površi S.



Sl. 23

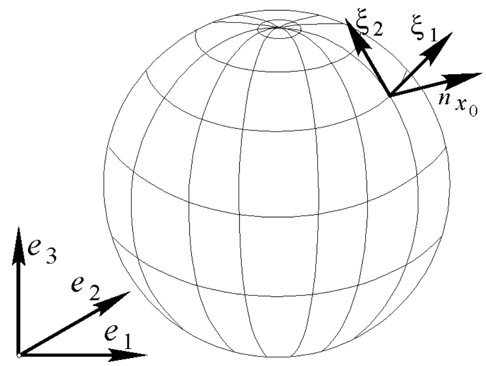
U skupu svih neprekidnih polja baznih vektora tangentnih prostora površi S definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način. Dva neprekidna polja baza tangentnih prostora su u relaciji $\sim$, ako za svako $x\in S$ baze tih polja pripadaju istoj orijentišućoj klasi prostora T_xS. Lako je proveriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije koja ima tačno dve klase, od kojih svaka definiše jednu **tangentnu orijentaciju** površi S. Površ S je orijentisana, ako je bar u jednoj tački $x\in S$ fiksirana baza tangentnog prostora T_xS. Ovo neposredno sledi iz činjenice da je površ put povezan skup.

U prethodnom izlaganju videli smo da svaka parametrizacija glatke elementarne površi generiše neprekidno polje baza tangentnih prostora površi. Može se dokazati da parametrizacije koje pripadaju istoj orijentišućoj klasi generišu neprekidna polja baza tangentnih prostora koja pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Stoga ćemo na dalje, kad god za površ kažemo da je orijentisana, smatrati da je na površi zadata orijentacija određena izborom parametrizacije ili pak izborom neprekidnog polja baza tangentnih prostora, pri čemu su ove dve orijentacije saglasne u prethodnom smislu.

4.3.4. TRANSFERZALNA ORIJENTACIJA ELEMENTARNE POVRŠI

Osim navedenih, postoji još jedan način orijentacije površi koji se u praktičnom radu najčešće koristi. Pri tome ćemo se ograničiti na orijentaciju hiperpovrši ($(n-1)$-dimenzionalna površ u $\mathbb{R}^n$) zbog jednostavnosti izlaganja.

Neka je S glatka, povezana, elementarna hiperpovrš u prostoru $\mathbb{R}^n$ koji je orijentisan standardnom bazom vektora $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Ovu bazu možemo smatrati orijentišućom za tangentni prostor $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Neka je n_{x_0} jedinični vektor normale površi S u tački x_0, a $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ baza tangentnog prostora $T_{x_0}S$ izabrana tako, da baze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $\widetilde{e} = (n_{x_0}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ pripadaju istoj orijentišućoj klasi prostora $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Lako je proveriti da sve baze prostora $T_{x_0}S$ sa navedenim svojstvom pripadaju istoj orijentišućoj klasi tog prostora. Na taj način, izborom jediničnog vektora normale vršimo izbor orijentišuće klase tangentnog prostora, a time i orijentaciju same površi. Orijentaciju površi koja je određena izborom vektora normale nazivamo **transferzalnom orijentacijom** površi.



Sl. 24

Neprekidnom polju baznih vektora tangentne ravni hiperpovrši odgovara neprekidno polje jediničnih normala hiperpovrši, i obratno, svakom neprekidnom polju jediničnih vektora normala hiperpovrši odgovara neprekidno polje baznih vektora tangentnih ravni hiperpovrši.

Povezanu $(n-1)$-dimenzionalnu glatku površ u prostoru $\mathbb{R}^n$, na kojoj je jednoznačno određeno neprekidno polje jediničnih normala nazivamo **dvostranom**. U suprotnom, površ je **jednostrana**.

Primer 1. Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ glatka povezana elementarna površ definisana grafom $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in I^2,\ z = f(x,y)\}$. Jedinični vektor normale površi S u tački $M = (x,y,f(x,y))$ na osnovu primera 2., 4.2. je

$$\vec{n}_M = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right).$$

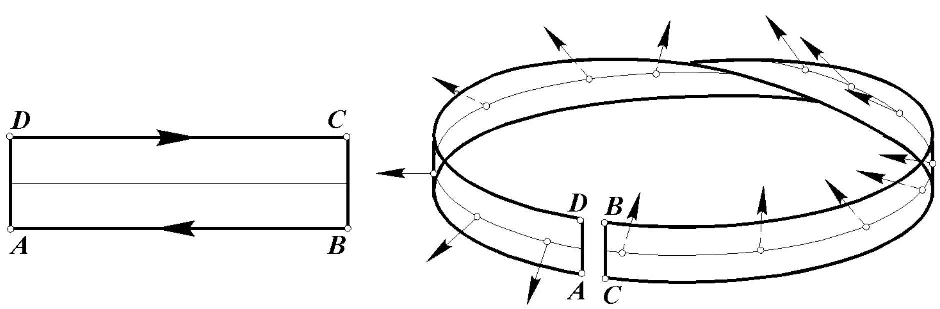
Ako je $\varphi : (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y)) = (x,y,z)$ parametrizacija površi S, tada su $p(x,y) = p(\varphi^{-1}(x,y,z))$, $q(x,y) = q(\varphi^{-1}(x,y,z))$ neprekidne funkcije u svim tačkama $M(x,y,z)$ površi S. Površ S je dvostrana i izborom vektora normale $\vec{n}_M$ na njoj je izabrana jedna od dve moguće orijentacije. Time je površ S orijentisana.

Primetimo da je ugao između vektora normale $\vec{n}_M$ površi S u tački M i Oz-ose tup, jer je

$$\cos(\widehat{Oz, \vec{n}_M}) = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} < 0\,.$$

Uobičajeno je zato da vektor normale definiše **donju stranu površi** S. Za vektor normale $-\vec{n}_M$ kažemo da određuje **gornju stranu površi** S.

Primer 2. Posmatrajmo sada glatku povezanu površ definisanu na sledeći način. Neka je dat pravougaonik $ABCD$. Izvršimo identifikaciju stranica AD i CB tako što ćemo tačku A identifikovati sa tačkom C, a tačku D sa tačkom B. Tako dobijenu površ nazivamo **Mebijusovom* trakom**.



Sl. 25

* Mobius A.F. (1790-1868)-nemački matematičar i astronom

Dobijena površ ne može se orijentisati, pa je ona jednostrana. Zaista, uočimo duž EF koja spaja sredine E i F stranica AB i CD datog pravougaonika. Na Mebijusovoj traci duž EF identifikuje se sa kružnom linijom. U proizvoljnoj tački M te kružne linije uočimo jedinični vektor normale. Obilaskom kružne linije po površi, vektor normale se vraća u polaznu tačku M sa promenjenim smerom, što dokazuje da polje jediničnih vektora normala Mebijusove trake nije neprekidno.

4.3.5. ORIJENTACIJA GLATKE POVRŠI

U dosadašnjim razmatranjima videli smo da se svaka glatka elementarna površ može orijentisati na jedan od od izloženih načina. Izloženi tipovi orijentacija suštinski su međusobno povezani.

U praktičnom radu je uobičajeno da se površ zadaje parametrizacijom, a orijentacija izborom jediničnog vektora normale, pri čemu se podrazumeva da su orijentacije generisane parametrizacijom i izborom jediničnog vektora normale saglasne.

Razmotrimo sada slučaj površi koja nije elementarna. Neka je S glatka k-dimenzionalna površ u $\mathbb{R}^n$, a $\varphi_i : I_i^k \to U_S^i$, $i = 1, 2$ dve lokalne karte površi S čiji se reoni seku, tj. $U_S^1 \cap U_S^2 \neq \varnothing$. Tada između skupova $I_{12}^k = \varphi_1^{-1}(U_S^2)$ i $I_{21}^k = \varphi_2^{-1}(U_S^1)$ postoje uzajmno inverzni difeomorfizmi $\varphi_{12} : I_{12}^k \mapsto I_{21}^k$ i $\varphi_{21} : I_{21}^k \to I_{12}^k$ kojima se realizuje prelazak od jednog sistema krivolinijskih koordinata na drugi.

Definicija 1. *Dve lokalne karte U_S i V_S glatke k-dimenzionalne površi $S \subset \mathbb{R}^n$ su* ***saglasne****, ako je $U_S \cap V_S = \varnothing$, ili ako je $W_S = U_S \cap V_S \neq \varnothing$, a $\varphi : I^k \to U_S$ i $\psi : I^k \to V_S$ su njihove parametrizacije, tada njihove restrikcije $\widetilde{\varphi}$ i $\widetilde{\psi}$ na $\varphi^{-1}(W_S)$ odn. $\psi^{-1}(W_S)$ pripadaju istoj orijentišućoj klasi parametrizacije, odn.* $\det(\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\psi})' > 0$.

Drugim rečima, lokalne karte su saglasne ako imaju prazan presek, ili ako imaju neprazan presek, tada difeomorfizmi koji realizuju transformaciju odgovarajućih krivolinijskih koordinata imaju jakobijane istog znaka.

Definicija 2. *Atlas glatke površi je* ***orijentišući atlas površi*** *ako su svake dve karte tog atlasa saglasne. Za površ kažemo da je* ***orijentabilna*** *ako ima orijentišući atlas. U protivnom, za površ kažemo da je* ***neorijentabilna****.*

U skupu svih orijentišućih atlasa glatke površi definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način. Dva orijentišuća atlasa glatke površi su u relaciji $\sim$ ako je njihova unija orijentišući atlas iste površi. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije u skupu svih orijentišućih atlasa zadate glatke površi.

Definicija 3. *Klasu ekvivalencije relacije $\sim$ u skupu orijentišućih atlasa glatke površi nazivamo* ***klasom orijentišućih atlasa*** *te površi. Glatka površ je* ***orijentisana*** *ako je na njoj fiksirana jedna klasa orijentišućih atlasa koju, u tom slučaju, nazivamo* ***orijentacijom glatke površi****.*

Stav 1. *Na povezanoj glatkoj orijentabilnoj površi postoje tačno dve orijentacije za koje kažemo da su uzajamno* ***suprotne orijentacije****.*

Dokaz ovog stava prepuštamo čitaocu.

Kao i u slučaju elementarne površi i za glatke površi se može dokazati da svakoj orijentišućoj klasi atlasa odgovara tačno jedna klasa ekvivalencije neprekidnih polja baza tangentnih ravni te površi. Stoga je za orijentaciju povezane glatke površi dovoljno fiksirati jednu lokalnu kartu ili tangentnu ravan te površi.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da se orijentacija prostora $\mathbb{R}^n$ menja ako proizvoljna dva elementa baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ zamene mesta.

2. U prostoru $\mathbb{R}^n$ fiksiran je potprostor $\mathbb{R}^{n-1}$. Neka su $(e_1, \dots, e_{n-1})$ i $(\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{n-1})$ dve baze u prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$, a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Dokazati da baze e i $\widetilde{e}$ pripadaju istoj orijentišučoj klasi prostora $\mathbb{R}^{n-1}$ onda i samo onda ako baze $(v, e_1, \dots, e_{n-1})$ i $(v, \widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{n-1})$ pripadaju istoj orijentišućoj klasi prostora $\mathbb{R}^n$

3. Dokazati da se neprekidno polje baza u svakoj povezanoj oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ razlaže tačno na dve klase orijentacaja.

4. Dokazati da je atlas sfere dat u primeru 2., 4.1. orijentišući atlas te sfere.

5. Konstruisati jedan orijentišući atlas dvodimenzionalnog torusa (Uputstvo: iskoristiti parametersku reprezentaciju torusa).

6. Dokazati da ne postoji orijentišući atlas Mebijusove trake (Uputstvo: koristiti zadatke 8. i 9. i primer 2., 4.3.4.).

7. Dokazati da parametrizacija glatke površi u primeru 1., 4.2. i jedinični vektor normale $\vec{n}_M = \{A, B, C\}/(A^2 + b^2 + C^2)^{1/2}$ generišu istu orijentaciju na toj površi.

8. Dokazati da je površ određena jednačinom $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ orijentabilna, ako je $grad\, F \neq 0$. Uopštiti rezultat na slučaj površi koja je zadata sistemom jednačina u primeru 3., 4.1.

9. Dokazati da na glatkoj površi S postoji neprekidno polje baznih vektora te površi onda i samo onda ako na površi S postoji neprekidno polje jediničnih vektora normala.

10. Dokazati da glatka površ ima orijentišući atlas ako i samo ako na površi postoji neprekidno polje tangentnih ravni te površi.

11. Dokazati da je relacija $\sim$ definisana u 4.3.1. relacija ekvivalencije.

12. Da li se površ $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < a^2$ može orijentisati?

13. Napisati jednačinu tangentne ravni i normale površi $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ u tački $M(3, 5, 7)$.

14. Napisati jednačinu tangentne ravni površi $xyz = 1$ koja je paralelna ravni $x + y + z = a$.

15. Dokazati da sve tangentne ravni površi $z = xf\,(y/x)$, gde je f proizvoljna diferencijabilna funkcija, prolaze kroz koordinatni početak.

16. Dokazati da sve tangentne ravni površi $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au + f(v)$, gde je f proizvoljna funkcija, a a proizvoljna konstanta, konstruisane u tačkama koordinatnih linija $v = c$, $c = const.$, prolaze kroz fiksiranu pravu.

4.4.1. POVRŠI SA KRAJEM

Razmotrimo u $\mathbb{R}^n$ potprostor $\mathbb{R}^{n-1}$. Potprostor $\mathbb{R}^{n-1}$ razbija prostor $\mathbb{R}^n$ na dva poluprostora

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \, x_1 \geq 0\} \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n : \, x_1 \leq 0\}$$

čija je granica potprostor $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x_1 = 0\}$. Poluprostori $\mathbb{R}^n_\pm$ pretstavljaju jednostavne primere n-dimenzionalnih mnogostrukosti sa krajem $\mathbb{R}^{n-1}$. Kraj mnogostrukosti $\mathbb{R}^n_\pm$ označavamo sa $\partial\mathbb{R}^n_\pm$. Očigledno je $\mathbb{R}^n_+ \setminus \partial\mathbb{R}^n_+$ elementarna n-dimenzionalna mnogostrukost. Kraj $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ je takođe $(n-1)$-dimenzionalna elementarna mnogostrukost.

Definicija 1. *Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je **k-dimenzionalna mnogostrukost sa krajem**, ako za svaku tačku $x_0 \in S$ postoji okolina $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ tačke x_0 tako da je skup $S \cap U_{x_0}$ homeomorfan ili prostoru $\mathbb{R}^k$ ili poluprostoru $\mathbb{R}^k_+$.*

Definicija 2. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenzionalna površ sa krajem, a $\varphi : U_S(x_0) \mapsto \mathbb{R}^k_+$ lokalni homeomorfizam. Tada sve tačke skupa $\varphi^{-1}(\partial\mathbb{R}^k_+)$ nazivamo* **krajnjim tačkama površi** *S. Skup svih krajnjih tačaka površi S nazivamo* **krajem površi** *S i označavamo sa ∂S.*

Definicija 3. *Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je* **glatka k-dimenzionalna površ klase $\mathcal{C}^{(m)}$ sa krajem** *ako na površi S postoji atlas $\mathcal{A}(S) = \{U_S(x) : x \in S\}$ tako da su odgovarajuće lokalne parametrizacije $\varphi_{x_i} : \mathbb{R}^k \mapsto U_S(x_i)$, odn. $\varphi^+_{x_j} : \mathbb{R}^k_+ \mapsto U_S(x_j)$ klase $\mathcal{C}^{(m)}$ i ranga k u svakoj tački $x_i \in \mathbb{R}^k$, odn. $x_j \in \mathbb{R}^k_+$.*

Primer 1. Skupovi $K[x,r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ i $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$ su n-dimenzionalne mnogostrukosti sa krajem S^{n-1} koji pretstavlja $(n-1)$-dimenzionalnu mnogostrukost bez kraja.

Iz svega što je izloženo o površima sa krajem zaključujemo da je kraj mnogostrukosti i sam mnogostrukost čija je dimenzija za jedan manja od dimenzije mnogostrukosti čiji kraj pretstavlja.

Stav 1. *Kraj k-dimenzionalne površi S klase $\mathcal{C}^{(m)}$ je površ istog stepena glatkosti. Dimenzija kraja ∂S površi S za jedan je manja od dimenzije površi S.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}(S) = \{(U_S(x_i), \varphi_i)\} \cup \{(U_S(x_j), \varphi^+_j)\}$ atlas površi S klase $\mathcal{C}^{(m)}$ sa krajem ∂S. Atlas

$$\mathcal{A}(\partial S) = \{(\partial U_S(x_j) \cap \partial S, \varphi^+_j|_{\partial\mathbb{R}^k_+ = \mathbb{R}^{k-1}})\}$$

ruba ∂S površi S je očigledno istog stepena glatkosti kao i površ S. Kraj ∂S je pri tome mnogostrukost bez kraja dimenzije $n-1$. ■

4.4.2. ORIJENTACIJA GLATKE POVRŠI SA KRAJEM

Neka je S glatka površ sa krajem ∂S. Kraj ∂S je glatka površ bez kraja koja u opštem slučaju može biti i nepovezana. Pri tome je orijentacija kraja ∂S povezana sa orijentacijom same površi S.

Teorema 1. *Kraj ∂S glatke orijentabilne površi S sa krajem je orijentabilna površ.*

Dokaz. Prema prethodno dokazanom stavu, ∂S je površ. Dokažimo da površ ∂S ima orijentišući atlas. Neka je $\mathcal{A}(S) = \{(U_S(x_i), \varphi_i)\} \cup \{U_S(x_j), \varphi_j^+)\}$ orijentišući atlas površi S sa krajem. Dokažimo da je atlas $\mathcal{A}(\partial S) = \{(\partial U_j \cap \partial S, \varphi_i^+|_{\partial \mathbb{R}^k_+ = \mathbb{R}^{k-1}})\}$ orijentišući za ∂S. Za to je dovoljno dokazati da je za difeomorfizam $s = \psi(t) = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ okoline $U_{\mathbb{R}^k_+}(t_0)$ u $\mathbb{R}^k_+$ tačke $t_0 \in \partial \mathbb{R}^k_+$ na okolinu $\overline{V}_{\mathbb{R}^k_+}(s_0)$ u $\mathbb{R}^k_+$ tačke $s_0 = \psi(t_0)$ sa pozitivnim jakobijanom, jakobijan preslikavanja $\psi_{\partial \mathbb{R}^k_+} = \psi|_{\partial U_{\mathbb{R}^k_+}(t_0)}$ okoline $U_{\partial \mathbb{R}^k_+}(t_0) = \partial U_{\mathbb{R}^k_+}(t_0) \cap \partial \mathbb{R}^k_+$ okoline tačke t_0 u $\partial \mathbb{R}^k_+$ na okolinu $V_{\partial \mathbb{R}^k_+}(s_0) = \partial V_{\mathbb{R}^k_+}(s_0) \cap \partial \mathbb{R}^k_+$ tačke s_0 u $\partial \mathbb{R}^k_+$ takođe pozitivan. Preslikavanje ψ je difeomorfizam kojim se unutrašnje tačke preslikavaju u unutrašnje, a granične tačke u granične. Stoga je za svaku tačku $t_0 = (0, t_2^0, \ldots, t_k^0) \in \partial \mathbb{R}^k_+$ $s_1 = \psi_1(t_0) \equiv 0$, jer $s = (s_1, \ldots, s_k)$ pripada skupu $\partial \mathbb{R}^k_+ \cap \partial V_{\mathbb{R}^k_+}(s_0)$. Jakobijan J preslikavanja φ u t_0 je

$$J(t_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t_k} \end{vmatrix} (t_0) = \\ = \frac{\partial \psi_1(t_0)}{\partial t_1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial t_k} \end{vmatrix} (t_0)$$

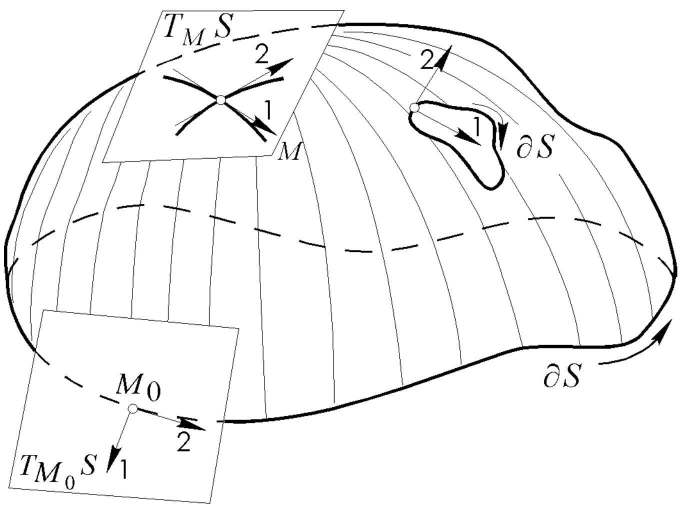
Ako je $t_1 < 0$, tada je $s_1 = \psi(t_1, \ldots, t_k) < 0$, pa je $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_k) \geq 0$. Kako je $J(t_0) > 0$, to je i jakobijan preslikavanja $\psi|_{\partial U_{\mathbb{R}^k_+}(t_0)} = \psi(0, t_2, \ldots, t_k)$ pozitivan u svakoj tački $(0, t_2, \ldots, t_k) \in \partial U_{\mathbb{R}^k_+}$. ■

Definicija 1. *Neka je* $\mathcal{A}(S) = \{(U_S(x_i), \varphi_i)\} \cup \{(U_S(x_j), \varphi_j^+)\}$ *orijentišući atlas lokalnih karata površi* S *sa krajem* ∂S. *Za orijentaciju kraja* ∂S *definisanu orijentišućim atlasom*

$$\mathcal{A}(\partial S) = \{(\partial U_S(x_j) \cap \partial S, \varphi_j^+|_{\partial \mathbb{R}^k_+})\}$$

kraja ∂S *kažemo da je* **saglasna** *sa orijentacijom površi* S.

Neka je $e = (e_1, \ldots, e_k)$ orijentišuća baza koja u $\mathbb{R}^k$ određuje koordinatni sistem čije su koordinate $x_1, \ldots, x_k$. U tom slučaju sistem vektora $(e_2, \ldots, e_k)$ na kraju $\partial\mathbb{R}^k_-$ poluprostora $\mathbb{R}^k_-$ određuje orijentaciju prostora $\partial\mathbb{R}^k_-$ koju smatramo saglasnom sa orijentacijom poluprostora $\mathbb{R}^k_-$. Za orijentaciju ruba ∂S glatke površi S sa krajem upravo koristimo navedenu činjenicu da bi ista bila saglasna sa orijentacijom



Sl. 26

površi S. Pretpostavimo da je glatka k-dimenzionalna površ S sa krajem orijentisana izborom neprekidnog polja tangentnih prostora te površi. Neka je $T_{x_0}S$ tangentni prostor površi S u tački $x_0 \in \partial S$, a $T_{x_0}\partial S$ tangentni prostor površi ∂S u tački x_0. Tada je $T_{x_0}\partial S \subset T_{x_0}S$. Lokalna struktura površi S u okolini tačke x_0 ista je kao i struktura poluprostora $\mathbb{R}^k_-$ u okolini tačke $O \in \partial\mathbb{R}^k_- = \mathbb{R}^{k-1}$. Neka je $b = (b_1, \ldots, b_k)$ orijentišuća baza tangentnog prostora $T_{x_0}S$, pri čemu vektor b_1 ima pravac normale površi ∂S u tački x_0, a usmeren je na onu stranu koja je spoljašnja u odnosu na projekciju lokalnog dela površi S oko tačke x_0 na tangentnu ravan $T_{x_0}S$. Tada je $\{b_1, \dots, b_k\}$ baza koja u $T_{x_0}\partial S$, a time i na ∂S generiše orijentaciju saglasnu sa orijentacijom površi S. Na datoj slici prikazana je orijentacija kraja površi koja je saglasna sa orijentacijom te površi.

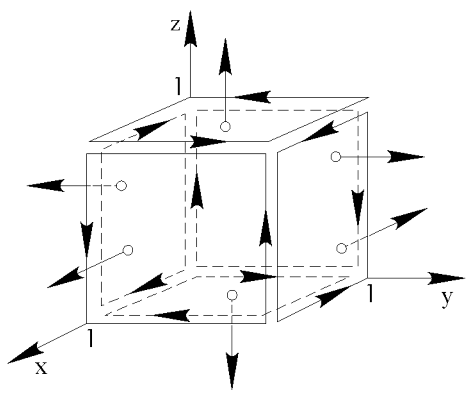
4.5. DEO PO DEO GLATKE POVRŠI I NJIHOVA ORIJENTACIJA

Definicija deo po deo glatke površi uvodi se induktivno.

Definicija 1. *Tačka je* ***nuldimenzionalna mnogostrukost klase*** $\mathcal{C}^{(m)}$*,* $m \in \mathbb{N}$*. Skup* $S \subset \mathbb{R}^n$ *je* ***jednodimenzionalna deo po deo glatka mnogostrukost (ili kriva)*** *ako se iz skupa* S *može izbaciti najviše prebrojiv skup nuldimenzionalnih mnogostrukosti, posle čega se* S *raspada na najviše prebrojiv skup jednodimenzionalnih glatkih mnogostrukosti. Skup* $S \subset \mathbb{R}^n$ *je* k***-dimenzionalna deo po deo glatka površ*** *ako u* S *postoji najviše prebrojiv skup deo po deo glatkih površi* S_i *dimenzije ne veće od* $k-1$*, tako da se* $S \setminus \cup S_i$ *raspada na najviše prebrojiv skup* k*-dimenzionalnih glatkih površi sa ili bez kraja.*

Primer 1.

Rub ∂I^3 trodimenzionalne mnogostrukosti I^3 je deo po deo glatka dvodimenzionalna mnogostrukost. Ova mnogostrukost se raspada na šest glatkih dvodimenzionalnih mnogostrukosti kada se iz ∂I^3 izbaci deo po deo glatka jednodimenzionalna mnogostrukost. Deo po deo glatka jednodimenzionalna mnogostrukost raspada se na dvanaest glatkih krivih, ako se iz nje odstrane temena iz I^3.



Sl. 27

Orijentacija deo po deo glatke površi definiše se induktivno. Za to nam je neophodan pojam saglasnosti orijentacija glatkih površi.

Tačka je orijentisana nuldimenzionalna mnogostrukost ako joj je dodeljen jedan od znakova $+$ ili $-$. Ako je S glatka kriva sa krajem $\partial S = \{a, b\}$ orijentisana smerom kretanja duž krive od tačke a ka tački

b, onda orijentaciju ruba određenu na taj način što se tački a dodeli znak $-$, a tački b znak $+$, smatramo saglasnom orijentaciji krive S.

Neka je $S = \cup S_i$ deo po deo glatka k-dimenzionalna površ i neka je $\Gamma \subset S_{i_1} \cap S_{i_2}$ $(k-1)$-dimenzionalna površ. Na skupu Γ kao delu rubova površi S_{i_1} i S_{i_2} postoje dve orijentacije koje su saglasne sa orijentacijom tih površi. Ako su te dve orijentacije suprotne za svaku $(k-1)$-dimenzionalnu površ $\Gamma \subset S_{i_1} \cap S_{i_2}$, onda kažemo da su S_{i_1} i S_{i_2} **saglasno orijentisane površi**.

Definicija 2. *Deo po deo glatka površ S dimenzije k je* ***orijentabilna*** *ako se ostatak te površi, dobijen posle otstranjivanja najviše prebrojivo mnogo deo po deo glatkih površi dimenzije ne veće od $k-1$, sastoji od najviše prebrojivo mnogo orijentabilnih glatkih površi saglasnih orijentacija.*

Rub ∂I^3 je orijentabilna deo po deo glatka površ. Stranice kocke su orijentisane jediničnim vektorima normala.

4.6. POVRŠINA POVRŠI

Odredimo sada površinu glatke elementarne k-dimenzionalne površi u $\mathbb{R}^n$.

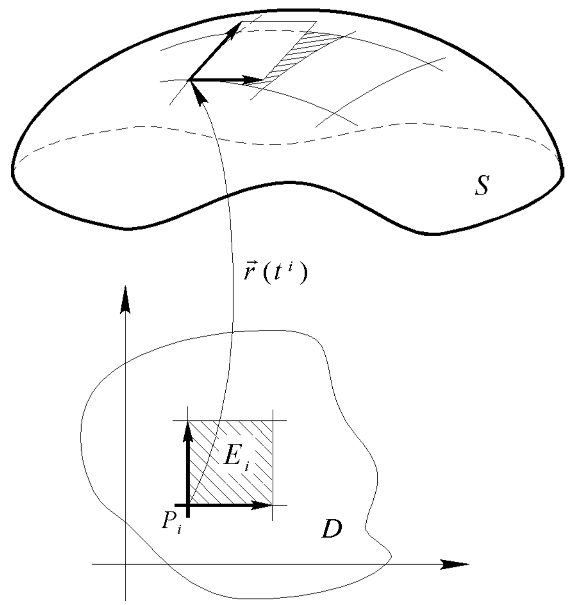
U tom cilju primetimo najpre da paralelepiped razapet nad vektorima $a_1, \ldots, a_k$ pretstavlja k-dimenzionalnu mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ čija je zapremina $V(a_1, \ldots, a_k)$ određena izrazom

$$V(a_1, \ldots, a_k) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_k)}\,,$$

gde je $G(a_1, \ldots, a_k) = \|(a_i, a_j)\|$ Gramova matrica (videti zadatak 27., 2.6.).

Neka je S glatka elementarna k-dimenzionalna površ u $\mathbb{R}^n$ čija je parametrizacija $\vec{r} : D \mapsto S$ zadata u vektorskom obliku u izmerljivoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^k$. Neka je $(e_1, \ldots, e_k)$ baza u $\mathbb{R}^k$ koja generiše koordinatni sistem sa koordinatama $(t_1, \ldots, t_k)$. Uočimo mrežu S_N

u $\mathbb{R}^k$. Kako je D izmerljiv skup, skup $\overline{D}$ se može pokriti konačnim brojem kocki mreže S_N. Tada je $\tau = \{E_i : E_i = \Delta \cap \overline{D} \neq \varnothing,\ \Delta \in S_N\}$ razbijanje skupa $\overline{D}$. Sa $\tau(\partial D)$ označimo one elemente razbijanja τ koji pretstavljaju kocke mreže S_N koje su zajedno sa svojim zatvorenjem sadržane u oblasti D. Uočimo proizvoljnu kocku $E_i \in \tau(\partial D)$. Neka je P_i jedno teme kocke E_i, a h dužina stranica te kocke. Slika kocke E_i je neki krivolinijski paralelepiped na površi S. Kako je



Sl. 28

$$\vec{r}(t_1,\ldots,t_{i-1},t_i+h,t_{i+1},\ldots,t_k)-\vec{r}(t_1,\ldots,t_k)=\vec{r}_{t_i}h+o(h),\ i=\overline{1,k},$$

to se stranice paralelepipeda $r(E_i)$ na površi S koje polaze iz temena $r(P_i)$ mogu aproksimirati stranicama paralelepipeda koji je određen vektorima $\vec{r}_{t_i}h$, $i=\overline{1,k}$, tangentnog prostora $T_{\vec{r}(P_i)}S$ sa tačnošću $o(h)$ kada $h \to 0$. Zapremina krivolinijskog paralelepipeda $\vec{r}(E_i)$ razlikuje se od zapremine ΔV_i paralelepipeda nad vektorima $\vec{r}_{t_i}h$ za beskonačno malu veličinu koja teži nuli kada $h \to 0$. Zapremina ΔV_i određena je izrazom

$$\Delta V_i = (\det \|(\vec{r}_{t_j}h, \vec{r}_{t_k}h)\|)^{1/2}_{P_i} = \\ = (\det \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|)^{1/2}_{P_i} h^k = (\det \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|)^{1/2}_{P_i} mE_i.$$

Funkcije $\vec{r}_{t_i}$ su neprekidne u zatvorenju izmerljive oblasti $\overline{D}$, pa je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta V_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} (\det \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|)^{1/2}_{P_i} mE_i = \\ = \int\limits_D \sqrt{\det \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|}\, dt\,.$$

Poslednja jednakost važi jer je funkcija $(\det \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|)^{1/2}$ integrabilna u oblasti D, pa granična vrednost u prethodnoj jednakosti ne zavisi od izbora tačaka $P_i \in E_i$.

Definicija 1. *Graničnu vrednost*

$$m_k S := \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta V_i$$

nazivamo ***površinom*** *(ili* k***-dimenzionalnom zapreminom****)* ***elementarne, glatke*** k***-dimenzionalne površi*** S *određene parametrizacijom* $t \to \vec{r}(t)$, $t \in D$.

Na osnovu dokazanog, površina k-dimenzionalne elementarne glatke površi određena je formulom

$$m_k S = \int_D \sqrt{\det G(t)}\, dt$$

gde je $G(t) = \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|$ Gramova matrica. U osnovi te formule uključene su krivolinijske koordinate t oblasti D, pa je prirodno postaviti pitanje nezavisnosti mere $m_k S$ površi S od izbora parametrizacije. Neka je $\widetilde{D}$ ma koja druga oblast parametara $\widetilde{t} = (\widetilde{t}_1, \dots, \widetilde{t}_k)$ za površ S koja je difeomorfna sa oblašću D. Neka je $\widetilde{t} \to t$ difeomorfizam određen preslikavanjem $t = \varphi(\widetilde{t})$. Tada su Gramove matrice $G(t) = \|(\vec{r}_{t_j}, \vec{r}_{t_k})\|$ i $\widetilde{G}(\widetilde{t}) = \|(\vec{r}_{\widetilde{t}_j}, \vec{r}_{\widetilde{t}_k})\|$ vezane relacijom $\widetilde{G} = J^\top G J$, gde je $J = \varphi'(\widetilde{t})$ matrica preslikavanja φ. Stoga je $\det \widetilde{G} = \det G (\det J)^2$ na osnovu Koši-Bineove* teoreme. Smenom $t = \varphi(\widetilde{t})$ u poslednjem integralu dobija se

$$\int_D \sqrt{\det G(t)}\, dt = \int_{\widetilde{D}} \sqrt{\det G(t)} |\det J(\widetilde{t})|\, d\widetilde{t} = \int_{\widetilde{D}} \sqrt{\det \widetilde{G}(\widetilde{t})}\, d\widetilde{t}\,.$$

Razmotrimo sada formulu za izračunavanje mere $m_k S$ k-dimenzionalne mnogostrukosti S u nekim specijalnim slučajevima.

---

* Binet J. P. M. (1786-1856)- francuski matematičar

Za $k = 1$ oblast D je segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, a S je kriva u $\mathbb{R}^n$. U tom slučaju $m_1 S$ pretstavlja dužinu krive koja je određena formulom

$$m_1 S = \int_a^b |r'(t)|\, dt = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i'^2(t) \right\}^{1/2} dt\,.$$

Ako je $k = 2$, $n = 3$, tada je S dvodimenzionalna površ u $\mathbb{R}^3$. Označimo elemente Gramove matrice $G(t)$ sa $E := (\vec{r}_{t_1}, \vec{r}_{t_1})$, $F := (\vec{r}_{t_1}, \vec{r}_{t_2})$ i $G := (\vec{r}_{t_2}, \vec{r}_{t_2})$. Tada je

$$m_2 S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dt_1\, dt_2\,.$$

Ako je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ grafik funkcije kojim je definisana glatka elementarna površ , tada prethodna formula dobija sledeći oblik

$$m_2 S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy\,.$$

Primer 1. Odredimo dužinu astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Astroida je simetrična u odnosu na koordinatne ose i koordinatni početak, pa je dužina astroide od tačke $t = 0$ do tačke $t = 2\pi$ jednaka

$$m_1 S = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 6a \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = 6a\,.$$

Primer 2. Odredimo sada površinu dela površi helikoide $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = h\varphi$, gde je $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Ulogu parametara t_1 i t_2 sada imaju promenljive r i φ. Kako je $x_r' = \cos\varphi$, $y_r' = \sin\varphi$, $z_r' = 0$, $x_\varphi' = -r\sin\varphi$, $y_\varphi' = r\cos\varphi$, $z_\varphi' = h$, koeficijenti E, F i G određeni su izrazima

$$\begin{aligned}
E &= (x_r', y_r', z_r') \cdot (x_r', y_r', z_r') = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2 = 1\,,\\
F &= (x_r', y_r', z_r') \cdot (x_\varphi', y_\varphi', z_\varphi') = x_r' x_\varphi' + y_r' y_\varphi' + z_r' z_\varphi' = 0\,,\\
G &= (x_\varphi', y_\varphi', z_\varphi') \cdot (x_\varphi', y_\varphi', z_\varphi') = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = r^2 + h^2\,,
\end{aligned}$$

pa je tražena površina

$$m_2 S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2}\, dr =$$

$$= \pi \left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h} \right).$$

Primer 3. Odredimo površinu dela površi paraboloida $2z = x^2 + y^2$ koja je unutar cilindra $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Kako je površ zadata eksplicitno i $p = z'_x = x$, $q = z'_y = y$, to je tražena površina jednaka

$$m_2 S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy\,,$$

gde je D oblast ograničena lemniskatom $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Prelaskom na polarne koordinate, imajući pri tome u vidu da su paraboloid i cilindar simetrični u odnosu na XOZ i YOZ ravni, dobijamo

$$m_2 S = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}\,.$$

U primerima 1. i 3. određivali smo površinu deo po deo glatkih mnogostrukosti. Osnovu za određivanje površine deo po deo glatke površi daje sledeća

Definicija 2. *Neka je S deo po deo glatka k-dimenzionalna površ u $\mathbb{R}^n$ koja se, posle otstranjivanja konačnog ili prebrojivog skupa deo po deo glatkih površi dimenzije ne veće od $k-1$, raspada na konačan ili prebrojiv skup k dimenzionalnih glatkih površi $\{S_\alpha\}$. Tada je k-dimenzionalna mera površi S određena sa*

$$m_k S := \sum_\alpha m_k S_\alpha\,.$$

Da ovako uvedena definicija ne zavisi od načina razbijanja deo po deo glatke površi S na glatke površi neposredno sledi iz aditivnosti višestrukog integrala. Mnogostrukosti na površi S dimenzije ne veće od $k-1$ su k-dimenzionalne mere nula u smislu sledeće definicije.

Definicija 3. *Skup E koji leži na k-dimenzionalnoj deo po deo glatkoj površi je k-dimenzionalne mere nula u smislu Lebega ako se za svako $\varepsilon > 0$ skup E može pokriti najviše prebrojivom familijom $\{S_\alpha\}$ potskupova površi S tako da je $\sum_\alpha m_k S_\alpha < \varepsilon$.*

Zadaci za vežbanje

1. Koje su od sledećih površi : a) $\{(x,y) : x^2+y^2 < 2\}$ b) $\{(x,y) : x^2+y^2 > 0\}$ c) $\{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$ d) $\{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$ sa krajem ?

2. Navedite primer neorijentisane površi sa orijentisanim krajem.

3. Dokazati da su skupovi u $\mathbb{R}^n$ određeni nejednakostima $\sum x_i^2 \leq 1$ i $\sum x_i^2 \geq 1$ n-dimenzionalne mnogostrukosti čiji je zajednički kraj S^{n-1}.

4. Neka je reprezentacija glatke elementarne površi $S \subset \mathbb{R}^3$ određena vektorskom funkcijom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Dokazati da je

$$m_2 S = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv \, .$$

5. Neka je površ $S \subset \mathbb{R}^3$ određena jednačinom $F(x,y,z) = 0$. Ako se oblast parametara D površi S ortogonalnom projekcijom na R^2_{xy} obostrano jednoznačno preslikava na oblast $\widetilde{D}$, dokazati da je

$$m_2 D = \iint_{\widetilde{D}} \frac{|grad\, F|}{|f'_x|} \, dx \, dy \, .$$

6. Odrediti površinu dela površi $x^2+y^2+z^2 = a^2$ koja se nalazi van cilindara $x^2+y^2 = \pm ax$.

7. Naći površinu dela površi $2z = x^2 - y^2$ ograničenu ravnima $x - y = \pm 1$ i $x + y = \pm 1$.

8. Dokazati da je površina površi $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2a^2xy$ jednaka $\pi^2 a^2/2$ (Uputstvo: preći na polarne koordinate)

9. Grafik glatke nenegativne funkcije koja je određena na segmentu $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ rotira oko x-ose (y-ose). Odrediti površinu obrtnih tela u oba slučaja.

10. Centar kruga poluprečnika 1 klizi duž glatke zatvorene krive u ravni čija je dužina L. Dokazati da je površina dobijenog tela jednaka $2\pi L$. Koristeći dobijeni rezultat odrediti površinu torusa.

11. Naći površinu dela a)sfere, b)torusa koja je ograničena sa dve paralele i dva meridijana.

12. Dokazati da je površina jedinične sfere S^{n-1} u $\mathbb{R}^n$ jednaka $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

13. Neka je $x_1, \ldots, x_k$ sistem vektora u $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$. Dokazati da determinanta Gramove matrice tog sistema oblika

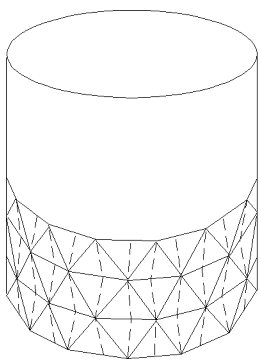
$$\det \|(x_i, x_j)\| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P^2_{i_1, \ldots, i_k} \, ,$$

gde je

$$P_{i_1,\dots,i_k} = \det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{i_1} & \dots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Koristeći dokazanu formulu pokazati da površina površi ne zavisi od izbora parametrizacije glatke elementarne površi.

14. Dužina krive definiše se kao supremum dužina poligonalnih linija koje su upisane u tu krivu. Površina površi ne može se uvesti na analogan način upisivanjem poliedarskih površi, što dokazuje sledeći primer Švarca. Omotač valjka visine H podelimo na m jednakih pojaseva. Na krajevima svakog pojasa nanesimo n tačaka koje dele krugove tih pojaseva na delove jednakih dužina, pri čemu se tačke na donjem rubu pojasa nalaze na sredini projekcije svakog luka sa gornjeg ruba istog pojasa. Tako se u svakom pojasu može upisati polijedarska površ čije su stranice trouglovi. U svakom pojasu ponovimo postupak upisivanja, čime se dobija poliedearska površ upisana u omotač valjka. Dokazati da



Sl. 29

$$\lim_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}} P_{m,n}\,,$$

gde je $P_{m,n}$ površina opisane poliedarske površi, ne postoji.

5. INTEGRACIJA NA MNOGOSTRUKOSTIMA

5.1. KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI PRVOG REDA

Neka je S orijentisana elementarna glatka k-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ čija je parametrizacija $x = \varphi(t)$ određena u izmerljivoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^k$. Za funkciju $f : S \mapsto \mathbb{R}$ pretpostavimo da je ograničena.

Definicija 1. *Ako integral*

$$\int\limits_D (f\circ\varphi)(t)\,dV(t) := \int\limits_D f(\varphi(t))\sqrt{\det G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right)}\,dt_1\cdots dt_k$$

postoji, onda taj integral nazivamo ***integralom funkcije*** f ***po mnogostrukosti*** S *i označavamo sa* $\int_S f(x)\,dS$.

Ako je $k = 1$, onda taj integral nazivamo **krivolinijskim integralom prvog reda funkcije** f **na glatkoj krivoj** $\gamma = \varphi(D)$, $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i označavamo sa

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\,dl\,.$$

Kako je u tom slučaju

$$\sqrt{\det G(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t})} = \sqrt{\det \|(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t})\|} = \{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i'^2\}^{1/2}\,,$$

to je

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(t)) \left\{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i'^2(t)\right\}^{1/2} dt\,.$$

Za $k \geq 2$ integral uveden definicijom 1. nazivamo **površinskim integralom prvog reda funkcije** f **po površi** S i označavamo sa $\int_S f(x)\,dS$. Specijalno, u slučaju $n = 3$, $k = 2$, površinski integral funkcije f prvog reda označavamo sa $\iint_S f(x)\,dS$. Na osnovu izloženog u 4.6. imamo da je

$$\iint\limits_{S} f(x)dS = \iint\limits_{D} f(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), \varphi_3(t_1, t_2))\sqrt{EG - F^2}dt_1dt_2$$

Ako je površ zadata eksplicitno grafikom funkcije $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, onda je

$$\iint\limits_{S} f(x)\,dS = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy\,.$$

Iz definicije integrala funkcije po orijentisanoj mnogostrukosti sledi da on ne zavisi od orijentacije mnogostrukosti. Samim tim, krivolinijski i površinski integrali prvog reda ne zavise od orijentacije krive odn. površi. Da oni ne zavise od parametrizacije mnogostrukosti, dokazuje sledeći

Stav 1. *Integral prvog reda funkcije f po mnogostrukosti S ne zavisi od njene parametrizacije.*

Dokaz. Neka su $\varphi : D \mapsto S$, $D \subset \mathbb{R}^k_t$ i $\psi : \widetilde{D} \mapsto S$, $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^k_{\widetilde{t}}$ parametrizacije elementarne mnogostrukosti $S \subset \mathbb{R}^n$, a $\alpha : \widetilde{D} \mapsto D$ difeomorfizam oblasti $\widetilde{D}$ na oblast D. Tada je za svako $\widetilde{t} \in \widetilde{D}$ $\varphi(\alpha(\widetilde{t})) = \psi(\widetilde{t})$. Uvođenjem smene $t = \alpha(\widetilde{t})$ u integralu

$$\int_D f(\varphi(t))\sqrt{\det G(t)}\,dt$$

imamo

$$\int\limits_D f(\varphi(t))\sqrt{\det G(t)}\,dt = \int\limits_{\widetilde{D}} f(\varphi(\alpha(\widetilde{t})))\sqrt{\det G(\alpha(\widetilde{t}))}|J(\widetilde{t})|\,d\widetilde{t} =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{D}} f(\psi(\widetilde{t}))\sqrt{\det \widetilde{G}(\widetilde{t})}\,d\widetilde{t}\,. \blacksquare$$

Na osnovu osobina Rimanovog integrala lako je pokazati neka osnovna svojstva integrala funkcije na mnogostrukostima. Da je funkcija f integrabilna na mnogostrukosti S označavamo sa $f \in \mathcal{R}(S)$.

Stav 2. *Neka su K i K_1 mnogostrukosti sa krajem. Ako je funkcija $f \in \mathcal{R}(K)$, i ako je $K_1 \subset K$, tada je $f \in \mathcal{R}(K_1)$.*

Stav 3. *Neka je $K = K_1 \cup K_2$, gde su K_1 i K_2 mnogostrukosti sa krajem bez zajedničkih unutrašnjih tačaka. Ako je $f \in \mathcal{R}(K)$, tada je*

$$\int\limits_K f(x)\,dK = \int\limits_{K_1} f(x)\,dK_1 + \int\limits_{K_2} f(x)\,dK_2\,.$$

Važi i obrat.

Stav 4. *Ako su $f, g \in \mathcal{R}(K)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je $\alpha f + \beta g$, fg, $|f| \in \mathcal{R}(K)$, a za $|g| > 0$ je i $f/g \in \mathcal{R}(K)$ i važi*

$$\int\limits_K (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dK = \alpha \int\limits_K f(x)\,dK + \beta \int\limits_K g(x)\,dK$$

$$\left|\int\limits_K f(x)\,dK\right| \le \int\limits_K |f(x)|\,dK\,.$$

Stav 5. *Neka su funkcije $f, g \in \mathcal{R}(K)$, gde je $K \subset \mathbb{R}^n$ mnogostrukost sa krajem. Ako je funkcija g istog znaka na K, a funkcija f ograničena: $m \leq f(x) \leq M$ za svako $x \in K$, tada postoji $\mu \in [m, M]$ tako da je*

$$\int_K f(x)g(x)\, dK = \mu \int_K g(x)\, dK\,.$$

Primer 1. Odredimo vrednost integrala $\int_\gamma xyz\, dl$, gde je γ deo krive određene jednačinama $x = t$, $y = \sqrt{8t^3}/3$, $z = t^2/2$ od tačke $t = 0$ do $t = 1$.

Lako je videti da je $dl = (x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)^{1/2} = (1+t)dt$. Stoga je

$$\int_\gamma xyz\, dl = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{9/2}(1+t)\, dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

Primer 2. Izračunajmo površinski integral $\iint_S z\, dS$, gde je S deo helikoide $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, $0 < u < a$, $0 < v < 2\pi$.

Za vektorsku funkciju $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v)$ koja pretstavlja parametrizaciju površi S je $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$, pa je

$$\iint_S z\, dS = \int_0^a \sqrt{1+u^2}\, du \int_0^{2\pi} v\, dv =$$
$$\pi(a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})\,.$$

Krivolinijski i površinski integrali mogu se izraziti kao granične vrednosti integralnih suma koje su opisane terminima vezanim za dužinu krive odn. površinu površi. Dokažimo to za površinski integral prvog reda kada je $k = 2$, a $n = 3$.

Neka je S glatka elementarna površ sa krajem u $\mathbb{R}^3$ čija je parametrizacija zadata vektorskom funkcijom $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, gde je D izmerljiv skup u $\mathbb{R}^2_{uv}$. Neka je $\tau = \{D_i\}$ razbijanje oblasti D. Sa S_i označimo onaj deo površi S čija je reprezentacija $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}_i$. Očigledno je S_i glatka elementarna površ, a $\tau_S = \{S_i\}$ razbijanje površi S. Neka je funkcija f definisana i neprekidna u svim tačkama površi S. Označimo sa $f_i = f(\vec{r}(u_i, v_i))$, $(u_i, v_i) \in \overline{D}_i$, a sa

$$\sigma_\tau = \sum_i f_i\, mS_i\,.$$

Tada je

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau = \iint\limits_S f(x)\,dS\,.$$

Da to dokažemo, primetimo najpre da sumu σ_τ na osnovu 4.6. možemo prikazati u obliku

$$\sigma_\tau = \sum_i f_i\, mS_i = \sum_i \iint\limits_{D_i} f_i\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,.$$

Kako je

$$\iint\limits_S f(x)\,dS = \sum_i \iint\limits_{S_i} f(x)\,dS = \sum_i \iint\limits_{D_i} f(r(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,,$$

to je

$$\left|\iint\limits_S f(x)\,dS - \sigma_\tau\right| \le \sum_i \iint\limits_{D_i} |f(r(u,v)) - f(r(u_i,v_i))|\times$$
$$\times\sqrt{EG-F^2}dudv \le \omega(f(r(u,v)),\delta_\tau)\sum_i mS_i = \omega(f\circ r,\delta_\tau)mS\,.$$

Funkcija $f\circ r$ je neprekidna na kompaktu $\overline{D}$, pa $\omega(f\circ r,\delta_\tau)\to 0$ kada $\delta_\tau\to 0$, odakle sledi tražena jednakost.

Zadaci za vežbanje

1. Izračunati krivolinijski integral $\int_L xy^2\,dl$, gde je L duž koja spaja tačke $A(0,0)$ i $B(4,3)$. (Rezultat: 45)

2. Izračunati integral $\int_L y\sqrt{1+y^2}\,dl$, gde je L deo krive $x=\ln y$ između tačaka u kojima je $y=1$ i $y=4$. (Rezultat: 24)

3. Izračunati integral $\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl$, gde je L kružna linija $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=z$. (Rezultat: $2R^2\pi$)

4. Izračunati dužinu krive $y=a(e^{x/a}+e^{-x/a})/2$, $0\le x\le x_0$.

5. Izračunati dužinu krive $x^2+y^2=cz$, $y/x=\mathrm{tg}(z/c)$ od tačke $(0,0,0)$ do tačke (x_0,y_0,z_0). (Rezultat: $\sqrt{cz_0}(2z_0/3c+1)$)

6. Dokazati da se krivolinijski integral prvog reda može definisati kao granična vrednost integralne sume. Na osnovu toga dati geometrijsko tumačenje krivolinijskog integrala prvog reda.

7. Naći površinu dela cilindra $x^2 + y^2 = R^2$ koja je ograničena između xOy ravni i površi $z = xy/2R$.

8. Odrediti vrednost površinskog integrala $\iint_S x(y+z)\,dS$ po delu cilindarske površi $x = \sqrt{b^2 - y^2}$ između ravni $z = 0$ i $z = c$. (Rezultat: b^2c^2)

9. Izračunati vrednost površinskog integrala $\iint_S (x^2/p^2 + y^2/q^2 + 1)^{3/2}\,dS$, gde je S deo površi $z = x^2/2p - y^2/2q$, $p, q > 0$, izrezan cilindrom $(x^2/p^2 + y^2/q^2)^2 = a^2(x^2/p^2 - y^2/q^2)$, $x \geq 0$, $a > 0$. (Rezultat: $a^2pq(1 + a^2\pi/8)/2$)

10. Odrediti vrednost površinskog integrala $\iint_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,dS$, gde je S deo površi konusa $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ otsečen cilindrom $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. (rezultat: $\pi a^6(80k^2 + 7)\sqrt{1 + k^2}/24$)

11. Naći površinske integrale

$$a) \iint \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,dS\,,$$

$$b) \iint \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}\,,$$

gde je S elipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $a, b, c > 0$. (Rezultat: 4π)

12. Dokazati Puasonovu formulu

$$\iint_S f(ax + by + cz)\,dS = 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\,du\,,$$

gde je S površ sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5.2. KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI DRUGOG REDA

Neka je $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ glatka elementarna kriva sa krajem orijentisana parametrizacijom $x = r(t)$, $t \in [a, b]$. Kako je γ glatka kriva, to je $|r'(t)| = \{\sum_1^n r_i'^2\}^{1/2} \neq 0$ za svako $t \in [a, b]$. Označimo sa $n(x) = r'(t)/|r'(t)| = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ jedinični vektor tangente krive γ u tački $x = r(t) \in \gamma$, orijentisan saglasno orijentaciji krive γ. Neka je $f : \gamma \mapsto \mathbb{R}^n$ preslikavanje čije su koordinatne funkcije f_i, $i = \overline{1, n}$, ograničene na krivoj γ. Pretpostavimo da za funkciju $x \mapsto (f(x), n(x))$, $x \in \gamma$, gde je (f, n) skalarni proizvod vektora f i n, postoji krivolinijski integral prvog reda

$$(1) \qquad \int\limits_\gamma (f(x), n(x))\,dl = \int\limits_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^n f_i \cos\alpha_i \right\} dl\,.$$

Definicija 1. *Integral* (1) *je* ***totalni*** *ili* ***potpuni krivolinijski integral drugog reda*** *vektorske funkcije* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *duž orijentisane glatke elementarne krive* γ *koji označavamo sa*

$$\int\limits_{\gamma} f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n\,,$$

ili kraće, sa

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\,dx\,,$$

gde je $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$.

Zajedno sa krivolinijskim integralom drugog reda posmatraju se krivolinijski integrali oblika

$$\int\limits_{\gamma} f_i(x)\,dx_i := \int\limits_{\gamma} f_i(x)\cos\alpha_i\,dl\,.$$

Ove integrale nazivamo **krivolinijskim integralima drugog reda u odnosu na koordinatne ose** Ox_i.

Polazeći od definicije krivolinijskog integrala prvog reda, lako dobijamo formulu za izračunavanje vrednosti krivolinijskog integrala drugog reda

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n :&= \int\limits_{\gamma} (f(x), n(x))\,dl = \\ &= \int\limits_{a}^{b} (f(r(t)), \frac{r'(t)}{|r'(t)|})|r'(t)|\,dt = \\ &= \int\limits_{a}^{b} (f_1(r(t))r_1'(t) + \cdots + f_n(r(t))r_n'(t))\,dt\,,\end{aligned}$$

pri čemu orijentacija krive γ odgovara porastu parametra t. Očigledno je

$$\int\limits_{\gamma} f_i(x)\,dx_i = \int\limits_{a}^{b} f_i(r(t))r_i'(t)\,dt\,.$$

Iz formule za izračunavanje krivolinijskog integrala drugog reda neposredno proizilazi sledeći

Stav 1. *Ako je vektorska funkcija neprekidna u svim tačkama glatke elementarne orijentisane krive γ sa krajem, tada integral $\int_\gamma f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$ postoji.*

Za razliku od krivolinijskog integrala prvog reda, krivolinijski integral drugog reda zavisi od orijentacije krive duž koje se posmatra krivolinijski integral drugog reda. Naime, važi sledeći

Stav 2. *Promenom orijentacije krive γ menja se znak krivolinijskog integrala drugog reda.*

Dokaz. Za to je dovoljno dokazati tvrđenje u slučaju glatke orijentisane elementarne krive. Neka su $r(t)$, $t \in I$ i $\widetilde{r}(\tau)$, $\tau \in J$ parametrizacije glatke elementarne orijentisane krive $\gamma \in \mathbb{R}^n$, a $t = \varphi(\tau) = (r^{-1} \circ \widetilde{r})(\tau)$ difeomorfizam reona J na reon I. Ako u integralu

$$\int\limits_\gamma (f(x), n(x))\,dl := \int\limits_I (f(r(t)), \frac{r'(t)}{|r'(t)|})|r'(t)|\,dt$$

uvedemo smenu $t = \varphi(\tau)$, dobijamo

$$\int\limits_I (f(r(t)), \frac{r'(t)}{|r'(t)|})|r'(t)|\,dt = \int\limits_J (f(r(\varphi(\tau))), r'(\varphi(\tau)))|\varphi'(\tau)|\,d\tau =$$

$$\int\limits_J (f(\widetilde{r}(\tau)), r'(\varphi(\tau)))|\varphi'(\tau)|\,d\tau = sgn\varphi'(\tau) \int\limits_J (f(\widetilde{r}(\tau)), \widetilde{r}\,'(\tau))\,d\tau =$$

$$= sgn\varphi'(\tau) \int\limits_J (f(\widetilde{r}(\tau)), \frac{\widetilde{r}'(\tau)}{|\widetilde{r}'(\tau)|})|\widetilde{r}'(\tau)|\,d\tau = sgn\varphi'(\tau) \int\limits_\gamma (f, n)\,dl\,.$$

Ako su parametrizacije r i $\widetilde{r}$ saglasne, tada je $\varphi'(\tau) > 0$, pa krivolinijski integral drugog reda ne menja znak. Ako kriva γ menja orijentaciju, tada je $\varphi'(\tau) < 0$, pa integral menja znak. ■

Na osnovu izloženog, lako se zaključuje da se krivolinijski integral drugog reda može izraziti kao granična vrednost integralne sume. Tačnije, važi sledeći

Stav 3. *Neka je γ elementarna glatka kriva u $\mathbb{R}^n$ orijentisana izborom parametrizacije $r(t) = (r_j(t))$, $t \in [a,b]$. Označimo sa $\tau = \{t_k\}_0^{k_0}$ razbijanje segmenta $[a,b]$, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, k_0$, i*

$$\widetilde{\sigma}_\tau = \sum_{k=1}^{k_0} f(r(\xi_k))\Delta x_k \,,$$

gde je $\Delta x_k = (r_j(t_k) - r_j(t_{k-1}))$. Ako je preslikavanje $f = (f_j)$ neprekidno na krivoj γ, tada je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau = \int\limits_\gamma f\,dx \,.$$

Dokaz. Označimo sa

$$\widetilde{\sigma}_\tau^j = \sum_{k=1}^{k_0} f_j(r(\xi_k))\Delta x_j^k \,,$$

gde je $\Delta x_j^k = r_j(t_k) - r_j(t_{k-1})$. Da dokažemo stav, dovoljno je pokazati da je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau^j = \int\limits_\gamma f_j(x)\,dx_j$$

za svako $j = \overline{1,n}$. Kriva γ je prema pretpostavci glatka, pa je funkcija $r(t)$ neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a,b]$. Stoga je na osnovu Lagranžove teoreme $\Delta x_j^k = r_j'(\theta_k)\Delta t_k$, gde je $\theta_k \in (t_{k-1}, t_k)$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \ldots, k_0$, pa je

$$\widetilde{\sigma}_\tau^j = \sum_{k=1}^{k_0} f_j(r(\xi_k))r_j'(\theta_k)\Delta t_k \,.$$

Neka je

$$\sigma_\tau^j = \sum_{k=1}^{k_0} f_j(r(\xi_k))r_j'(\xi_k)\Delta t_k \,.$$

Očigledno je σ_τ^j integralna suma funkcije $f_j(r(t))r_j'(t)$, pa je

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau^j = \int\limits_a^b f_j(r(t))r_j'(t)\,dt = \int\limits_\gamma f_j(x)\,dx_j\,.$$

Osim toga važi ocena

$$|\widetilde{\sigma}_\tau^j - \sigma_\tau^j| \le \sum_{k=1}^{k_0} |f_j(r(\xi_k))||r_j'(\xi_k) - r_j'(\theta_k)|\Delta t_k \le$$
$$\le (b-a)\sup_{a\le t\le b}|f_j(r(t))|\omega(r_j';\delta_\tau)\,,$$

gde je $\omega(r_j';\delta_\tau)$ modul neprekidnosti funkcije $r_j'(t)$. Funkcija $f_j(r(t))$ je neprekidna na segmentu $[a,b]$, pa je i ograničena na njemu. I funkcija r_j' je neprekidna na $[a,b]$, pa je prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidna na $[a,b]$. Stoga modul neprekidnosti funkcije r_j' teži nuli kada dijametar razbijanja τ teži nuli. Prelaskom na graničnu vrednost u prethodnoj nejednakosti kada dijametar razbijanja τ teži nuli, vidimo da je $\lim_{\delta_\tau\to 0}|\widetilde{\sigma}_\tau^j - \sigma_\tau^j| = 0$. Time smo pokazali da je

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\widetilde{\sigma}_\tau^j = \int\limits_\gamma f_j(x)\,dx_j$$

za svako $j=\overline{1,n}$, čime je teorema dokazana. ∎

Jedno od važnijih svojstava krivolinijskih integrala drugog reda je mogućnost aproksimacije krivolinijskim integralom drugog reda duž poligonalne linije koja je upisana u krivu po kojoj se posmatra krivolinijski integral. Preciznije, važi Koši-Gursaova lema:

Teorema 1. *Neka je preslikavanje $f=(f_1,\dots,f_n)$ neprekidno u oblasti $G\subset\mathbb{R}^n$. Ako je γ elementarna glatka kriva u oblasti G, $x=r(t)$, $a\le t\le b$, parametrizacija krive γ, $\tau=\{t_k\}_0^{k_0}$ razbijanje segmenta $[a,b]$, a λ_τ poligonalna linija sa temenima u tačkama $r(t_k)=(r_1(t_k),\dots,r_n(t_k))$, tada je*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\int\limits_{\lambda_\tau}(f(x),n(x))\,dl = \int\limits_\gamma (f(x),n(x))\,dl\,. \tag{4}$$

Dokaz. Kriva γ je kompakt. Kako je $\gamma \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) = \varnothing$, postoji $\eta > 0$ tako da je $d(\gamma, \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \eta > 0$. Skup $\gamma_\eta \subset G$ je zatvoren i ograničen. Preslikavanje $r(t)$ je prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidno na $[a,b]$, pa postoji neko $\delta_\eta > 0$ tako da za svake dve tačke $t', t'' \in [a,b]$ važi nejednakost

$$d(M', M'') = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (r_i(t') - r_i(t''))^2 \right\}^{1/2} < \eta$$

kad god je $|t' - t''| < \delta_\eta$, gde je $M' = r(t')$, $M'' = r(t'')$. Sve tačke duži $\overline{M'M''}$ pripadaju skupu γ_η, a time i skupu G. No onda će i sve tačke poligonalne linije λ_τ biti u G za svako razbijanje τ za koje je $\delta_\tau < \delta_\eta$, pa integral na levoj strani (4) ima smisla.

Razmotrimo integrale $\int_\gamma f_i\, dx_i$ i $\int_{\lambda_\tau} f_i\, dx_i$. Označimo sa $x_i^k = r_i(t_k)$, $\Delta x_i^k = x_i^k - x_i^{k-1}$, $f_i^k = f_i(r(t_k))$, a sa σ_τ^i sumu

$$\sigma_\tau^i = \sum_{k=1}^{k_0} f_i^k \Delta x_i^k \,.$$

Tada je prema prethodnom stavu

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau^i = \int\limits_\gamma f_i\, dx_i \,.$$

Neka su $M_k = r(t_k)$ temena poligonalne linije λ_τ. Tada je

$$\int\limits_{\lambda_\tau} f_i(x)\, dx_i = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} f_i(x)\, dx_i \,.$$

Osim toga je

$$\int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} dx_i = \int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} \cos\alpha_i\, dl =$$

$$= \cos\alpha_i \int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} dl = |\overline{M_{k-1}M_k}| \cos\alpha_i = \Delta x_i^k \,,$$

pa je

$$\sigma_\tau^i = \sum_{k=1}^{k_0} f_i^k \Delta x_i^k = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} f_i^k \, dx_i \,.$$

Neka je L_τ dužina poligonalne linije λ_τ, S dužina krive γ. Tada je

$$\left| \int\limits_{\lambda_\tau} f_i(x)\, dx_i - \sigma_\tau^i \right| \le \sum_k \int\limits_{\overline{M_{k-1}M_k}} |f_i(x) - f_i^k|\, dx_i \le$$

$$\le \omega(f_i, \delta_\tau) \sum_k \Delta x_i^k \le \omega(f_i, \delta_\tau) L_\tau \le \omega(f_i, \delta_\tau) S \,.$$

Kako je funkcija f_i ravnomerno neprekidna na poligonalnoj liniji λ_τ, to je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int\limits_{\lambda_\tau} f_i(x)\, dx_i = \int\limits_\gamma f_i(x)\, dx_i \,,\ i = \overline{1, n} \,.$$

Sabiranjem poslednjih jednakosti dobijamo (4). ■

Definicija 2. *Ako je $\gamma = \{\gamma_i\}$ deo po deo glatka orijentisana kriva u $\mathbb{R}^n$, a $f : \gamma \mapsto \mathbb{R}^n$ preslikavanje čije su koordinatne funkcije ograničene na krivoj γ, tada se krivolinijiski integral drugog reda preslikavanja f duž krive γ definiše kao*

$$(2) \qquad \int\limits_\gamma (f(x), n(x))\, dl := \sum_i \int\limits_{\gamma_i} (f(x), n(x))\, dl \,.$$

Definicija 3. *Ako je kriva γ zatvorena, tada krivolinijski integral drugog reda funkcije f duž krive γ označavamo sa*

$$(3) \qquad \oint\limits_\gamma f(x)\, dx := \oint\limits_\gamma (f(x), n(x))\, dl$$

i nazivamo ***cirkulacijom vektora** f **duž krive** γ.*

Primer 1. Izračunajmo krivolinijski integral

$$I = \int\limits_K \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}\,,$$

gde je K deo astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ orijentisan od tačke $A(a,0)$ ka tački $B(0,a)$.

Kako je $dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$, to je

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} 3a^{4/3}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{16}\pi a^{4/3}\,.$$

Razmotrimo sada $(n-1)$-dimenzionalnu glatku elementarnu orijentisanu mnogostrukost $S \subset \mathbb{R}^n$ sa krajem, pri čemu je orijentacija te površi određena izborom jediničnog vektora normale $n(x)$. Neka je $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$ preslikavanje čije su koordinatne funkcije f_i, $i = \overline{1,n}$, ograničene na površi S, pri čemu površinski integral prvog reda funkcije $(f(x), n(x))$ postoji na površi S:

$$\int\limits_S (f(x), n(x))\,dS\,. \tag{4}$$

Definicija 4. *Integral* (4) *nazivamo* ***potpunim površinskim integralom drugog reda*** *preslikavanja f po orijentisanoj površi S i označavamo sa*

$$\int\limits_S f_1\,dx_2\cdots dx_n + f_2\,dx_1 dx_3\cdots dx_n + \cdots + f_n\,dx_1\cdots dx_{n-1}\,.$$

U teoriji polja integral (4) pretstavlja **protok** ili **fluks vektorskog polja** f kroz površ S.

Kao i krivolinijski, tako i površinski integral drugog reda zavisi od orijentacije površi. Promenom orijentacije hiperpovrši menja se znak površinskog integrala drugog reda.

Pokažimo sada kako se izračunava površinski integral drugog reda. Neka je $x = r(t)$, $t \in \overline{D} \subset \mathbb{R}_t^{n-1}$, parametrizacija hiperpovrši S, a $\{e_i\}$ standardna baza u $\mathbb{R}^n$. Vektor

$$N(r(t)) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial t_1}(t) & \dfrac{\partial r_2}{\partial t_1}(t) & \cdots & \dfrac{\partial r_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \dfrac{\partial r_2}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \dfrac{\partial r_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} \quad , \quad t \in D \,,$$

nazivamo vektorskim proizvodom vektora r_{t_i}, $i = \overline{1, n-1}$. Vektor $N(r(t))$ je normalan na hiperpovrš S u svakoj tački $r(t)$, $t \in \overline{D}$. Njegova norma u $\mathbb{R}^n$ je prema zadatku 13., 4.6.

$$\|N(r(t))\| = \sqrt{\det G(r_{t_1}(t), \ldots, r_{t_{n-1}}(t))} \,.$$

Vektor $\vec{n}(x) = N(x)/\|N(x)\|$, $x = r(t)$, $t \in D$, je jedinični vektor normale površi S. Neka je $\vec{n}(x) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$. Imajući u vidu činjenicu da je element dS hiperpovrši dat izrazom

$$dS = \|N(x)\| \, dt_1 \cdots dt_{n-1} \,,$$

to je

$$\int_S f_1 dx_2 \cdots dx_n + \cdots + f_n dx_1 \cdots dx_{n-1} :=$$

$$\int_S (f_1(x)\cos\alpha_1 + \cdots + f_n(x)\cos\alpha_n) \, dS =$$

$$\int_D (f_1(r(t))\cos\alpha_1 + \cdots + f_n(r(t))\cos\alpha_n) \sqrt{\det G(r_{t_1}, \ldots, r_{t_{n-1}})} \, dt =$$

$$\int_D (f(r(t)), N(r(t))) \, dt = \int_D (f_1(r(t))A_1 + \cdots + f_n(r(t))A_n) \, dt \,,$$

gde je

$$A_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1} \ldots, r_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})} \quad , \quad i = \overline{1, n} \,.$$

Često se sa potpunim površinskim integralom preslikavanja $f = (f_1, \dots, f_n)$ posmatraju površinski integrali drugog reda funkcija f_i po orijentisanoj površi S koji se definišu kao

$$\int\limits_S f_i(x)\, dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n := \int\limits_S f_i(x) \cos \alpha_i\, dS\,.$$

Kako je $\alpha_i = \widehat{(\vec{n}, \vec{e}_i)}$, a $\widehat{(\vec{n}, \vec{e}_i)} + \widehat{(-\vec{n}, \vec{e}_i)} = \pi$, to je očigledno da površinski integral drugog reda funkcije f_i po orijentisanoj površi menja znak promenom orijentacije površi.

Za deo po deo glatku orijentisanu površ $S = \{S_i\}$ površinski integral drugog reda funkcije $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$ definiše se kao

$$\int (f(x), n(x))\, dS := \sum_i \int\limits_{S_i} (f(x), n(x))\, dS_i\,.$$

Primer 2. Neka je S glatka elementarna orijentisana površ u $\mathbb{R}^3$ čija je reprezentacija $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$. Neka je orijentacija površi određena jediničnim vektorom normale $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Ako je $F = (P, Q, R)$ vektorska funkcija čije su koordinatne funkcije ograničene na površi S, tada je površinski integral $\iint_S (F, n)\, dS$ jednak

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

$$= \iint\limits_D (AP(r(x, y)) + BQ(r(x, y)) + CR(r(x, y))) dxdy\,.$$

Kako je u ovom slučaju

$$N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix},$$

to je

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\,,\ B = -\begin{vmatrix} 1 & f'_x \\ 0 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_y\,,\ C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

pa je

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (-pP(x,y,f(x,y)) - qQ(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y)))\,dx\,dy\,.$$

Primer 3. Izračunajmo vrednost površinskog integrala drugog reda

$$I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy\,,$$

gde je S gornja strana površi sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ izrezana cilindrom $x^2 + y^2 = 2ax$, $R > a$. Napišimo zadati integral preko površinskog integrala prvog reda

$$I = \iint_S ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)\,dS\,.$$

Kako je

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2x-2R}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}} = \frac{x-R}{R}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{y}{R}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{R}\,,$$

to je

$$I = \iint_S (z-y)\,dS\,.$$

Površ S je simetrična u odnosu na ravan Oxz, pa je stoga $\iint_S y\, dS = 0$. Dakle je

$$I = \iint\limits_S z\, dS = \iint\limits_D \frac{z}{\cos\gamma}\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_D \frac{z}{z/R}\, dx\, dy = R \iint\limits_D dx\, dy = \pi R a^2 \,.$$

Površinski integral drugog reda može se definisati i kao granična vrednost odgovarajuće integralne sume. Zaista, definišemo sumu

$$\widetilde{\sigma}_\tau^k = \sum_i f_k^i \cos_i \widehat{(\vec{n}, \vec{e}_k)} m S_i \,,\ k = \overline{1, n}\,,$$

gde je $\cos_i \widehat{(\vec{n}, \vec{e}_k)}$ kosinus ugla između vektora normale površi S_i u tački $r(t_i) \in S_i$, $t_i \in D_i$, i baznog vektora $\vec{e}_k$ prostora $\mathbb{R}^n$, a $f_k^i = f_i(r(t_i))$. Tada je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau^k = \int\limits_S f_k(x)\, dx_1 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n \,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Izračunati krivolinijski integral $\int_L y\, dx + x\, dy$, gde je L deo astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ od tačke $t = 0$ do tačke $t = \pi/4$. (Rezultat: $a^2/8$)

2. Naći vrednost krivolinijskog integrala $\int_L y^2\, dx + (x^2 + z)\, dy + (x + y + z^2)\, dz$ ako je L duž orijentisana od tačke $A(1, 0, 2)$ do tačke $B(3, 1, 4)$. (Rezultat: $95/3$)

3. Odrediti vrednost krivolinijskog integrala $\int_L a^3/xy\, dx + z\, dy + a\, dz$, ako je L presek površi $xyz = a^3$ i $(x^2 + y^2)z^2 = a^4$ orijentisan od tačke $(2a/\sqrt{3}, 2a, a\sqrt{3}/4)$ do tačke $(2a, 2a/\sqrt{3}, a\sqrt{3}/4)$.

4. Dokazati da za krivolinijski integral važi ocena

$$|\int_L f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n| \le lM$$

gde je l dužina krive L, a $M = \max \sqrt{f_1^2 + \cdots + f_n^2}$ na krivoj L.

5. Oceniti integral

$$I_R = \oint \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}\,,$$

gde je L krug $x^2 + y^2 = R^2$. Dokazati da je $\lim_{R\to+\infty} I_R = 0$.

6. Izračunati površinski integral $\iint_S (ax^2+by^2+cz^2)\,dy\,dz$, gde je S unutrašnja strana polusfere $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ izrezana konusom $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. (Rezultat: $-\pi R^4(b + 3a)/8$)

7. Naći vrednost integrala $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$ po spoljašnjoj strani sfere $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. (Rezultat: $8\pi R^3(a + b + c)/3$)

8. Izračunati povrčinski integral $\iint_S yzdxdy + zxdydz + xydzdx$, gde je S spoljašnja strana površi koja se sastoji od dela cilindra $x^2 + y^2 = R^2$ i delova ravni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$, pri čemu je $x, y, z \geq 0$.

6. OSNOVNE INTEGRALNE FORMULE

U ovom poglavlju izložićemo Grinovu i Stoksovu formulu, kao i formulu Gaus-Ostrogradskog koje nastavljaju ideju Njutn-Lajbnicove formule. Zbog njihovog značaja, ove formule smatramo osnovnim integralnim formulama analize.

6.1. GRINOVA FORMULA

Neka je K kompakt sa krajem ∂K u euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa fiksiranom bazom.

Definicija 1. *Kompakt K je* **elementaran** *ako svaka prava u $\mathbb{R}^n$ paralelna osi Ox_i, $i = \overline{1,n}$, koja seče kompakt K, isti seě po segmentu (koji se može degenerisati u tačku) koji je određen nejednakostima*

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq x_i \leq \psi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,,$$

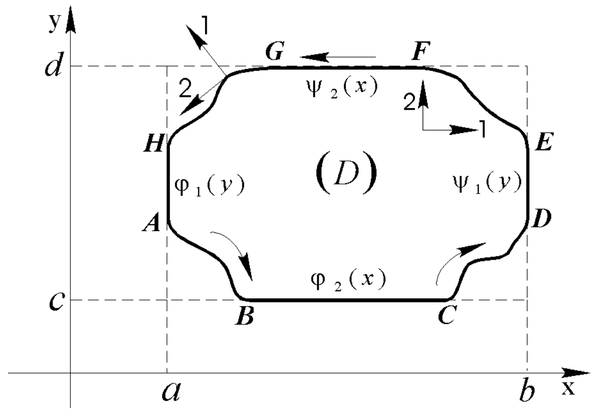
gde su φ_i i ψ_i neprekidno diferencijabilne funkcije.

Definicija 2. *Kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ sa krajem ∂K je* **prost** *ako se može prikazati kao unija konačno mnogo elementarnih kompaktnih skupova K_i sa krajevima ∂K_i, $i = \overline{1,k}$, koji, sem rubnih, nemaju drugih zajedničkih tačaka.*

Teorema 1. (Grin*) *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ prost kompakt sa orijentisanim krajem ∂D. Ako su funkcije P i Q neprekidne na D zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$, tada važi Grinova formula*

$$\int\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,. \tag{1}$$

Dokaz. Dokažimo Grinovu formulu najpre u slučaju kada je D elementaran kompakt. U tom slučaju kompakt D možemo prikazati u



Sl. 30

jednom od sledećih oblika $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_2(x) \le y \le \psi_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \psi_1(y)\}$, gde su φ_i i ψ_i neprekidno diferencijabilne funkcije. Funkcija $\partial P/\partial y$ je integrabilna na svakom od ovih skupova i važi

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\psi_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx =$$

$$= -\int\limits_{(AD)} P(x,y)\,dx - \int\limits_{(EH)} P(x,y)\,dx\,.$$

* Green G. (1793-1841)- engleski matematičar

Koristeći činjenicu da je

$$\int\limits_{(DE)} P(x,y)\,dx = \int\limits_{(HA)} P(x,y)\,dx = 0\,,$$

(jer je $\cos\alpha_1 = 0$) poslednji izraz dobija oblik

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{(ABCD)} P\,dx - \int\limits_{(DE)} P\,dx - \\ - \int\limits_{(EFGH)} P\,dx - \int\limits_{(HA)} P\,dx = -\int\limits_{\partial D} P\,dx\,.$$

Rub ∂D je orijentisan saglasno orijentaciji kompakta D.

Na potpuno analogan način se dobija i drugi deo Grinove formule

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial D} Q\,dy\,.$$

Sabiranjem poslednjih dveju jednakosti dobijamo Grinovu formulu za slučaj elementarnog kompakta D. Neka je sada D prost kompakt koji se razlaže na konačan broj elementarnih kompaktnih skupova D_i, $i = \overline{1,n}$. Na svakom elementarnom kompaktnom skupu D_i na osnovu dokazanog važi jednakost

$$\iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy\,. \tag{2}$$

U sumi na desnoj strani poslednje jednakosti krivolinijski integrali po delovima rubova ∂D_i, koji su u unutrašnjosti oblasti D, uzimaju se dvaput. Orijentacije tih rubova su suprotne zbog saglasnosti orijentacija odgovarajućih im oblasti. Stoga se krivolinijski integrali u posmatranoj sumi po ovim rubovima potiru, pa je

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Koristeći aditivnost dvostrukog integrala i prethodnu jednakost, iz (2) sledi (1). ∎

Rub oblasti D u dokazanoj teoremi je deo po deo glatka zatvorena kontura. Razmotrimo sada kompakt čiji se rub ∂D sastoji od konačno mnogo prostih deo po deo glatkih kontura. Za graničnu konturu ∂D_e kažemo da je **spoljašnja** ako je ona istovremeno rub neograničene oblasti u $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Granična kontura ∂D_i je **unutrašnja** ako ona nije rub neograničene oblasti u $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Pretpostavimo da se kraj ∂D prostog kompakta sastoji od spoljašnje granice ∂D_e i konačno mnogo unutrašnjih granica ∂D_i^k, $k = \overline{1,n}$. Potpuno analogno se dokazuje da važi sledeća formula

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D_e^+} P\,dx + Q\,dy + \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_{i,k}^-} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Grinova formula važi i za širu klasu kompaktnih skupova. Naime, važi

Teorema 2. *Neka je kraj ∂D izmerljivog kompakta $D \subset \mathbb{R}^2$ unija konačno mnogo deo po deo glatkih krivih. Ako su funkcije P i Q neprekidne zajedno sa svojim izvodima $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ u oblasti G, $\overline{D} \subset G$, tada važi Grinova formula.*

Dokaz. Kraj ∂D kompakta D je izmerljiv skup mere nula. Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji zatvoren elementaran skup A i otvoren elementaran skup B za koje je $\partial D \subset B \setminus A \subset G$ i $mB - mA < \varepsilon$. U krivu ∂D upišimo poligonalnu liniju λ tako da je $\lambda \subset B \setminus A$. Označimo sa Λ mnogougaonu površ ograničenu poligonalnom linijom λ. Mnogougaona površ Λ je prost kompakt za koji važi Grinova formula

$$\iint\limits_\Lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\lambda P\,dx + Q\,dy\,. \tag{3}$$

Funkcija $f = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ je ograničena na kompaktu Λ, pa je

$$\left|\iint\limits_D f\,dx\,dy - \iint\limits_\Lambda f\,dx\,dy\right| = \left|\iint\limits_{D\setminus A} - \iint\limits_{\Lambda\setminus A}\right| \le$$
$$\le \iint\limits_{D\setminus A} |f|\,dx\,dy + \iint\limits_{\Lambda\setminus A} |f|\,dx\,dy \le 2\iint\limits_{B\setminus A} |f|\,dx\,dy < 2K\varepsilon\,,$$

gde je $|f| \le K$. Krivolinijski integral u (3) teži integralu $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$ kada dužina maksimalne stranice poligonalne linije λ teži nuli na osnovu leme o aproksimaciji krivolinijskog integrala drugog reda. Dvostruki inteqral u (3) u tom slučaju prema dokazanom teži ka integralu $\iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy$, odakle dobijamo Grinovu formulu. ■

Ako u Grinovoj formuli stavimo da je $Q = x$, $P = 0$, dobijamo

(4) $$mD = \int\limits_{\partial D} x\,dy\,.$$

Analogno, stavljajući da je $Q = 0$, $P = -y$, dobijamo

(5) $$mD = -\int\limits_{\partial D} y\,dx\,.$$

Iz poslednjih dveju formula dobijamo formulu za izračunavanje površine površi ograničene deo po deo glatkom krivom:

(6) $$mD = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx\,.$$

Primer 1. Izračunajmo integral

$$I = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln\sqrt{x^2+y^2}]\,dy\,,$$

gde je L rub pravougaonika čija su temena $A(3,2)$, $B(6,2)$, $C(6,4)$ i $D(-3,4)$.

Funkcije P i Q zadovoljavaju uslove teoreme na kompaktnom skupu $(ABCD)$. Kako je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

to je

$$I=\iint\limits_{(ABCD)} y^2\,dx\,dy=\int\limits_3^6 dx\int\limits_2^4 y^2\,dy=56\,.$$

Primer 2. Odrediti površinu površi ograničene astroidom $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.

Tražena površina je prema (6)

$$mD=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)\,dt=\frac{3a^2\pi}{8}\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Izračunati sledeće krivolinijske integrale primenom Grinove formule, a zatim rezultat proveriti neposrednim izračunavanjem:

a) $\int_L (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy$, gde je L pozitivno orijentisana kontura trougla čija su temena $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$;

b) $\int_L e^x[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$, gde je L pozitivno orijentisana kontura oblasti određene nejednakostima $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\sin x$. (Rezultat: b) $(1-\pi)/5$)

2. Izračunati krivolinijski integral

$$\int\limits_{AmO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y_m)\,dy\,,$$

gde je AmO gornji deo polukružnice $x^2+y^2=ax$ orijentisana od Tačke $A(a,0)$ do tačke $B(0,0)$.

3. Izračunati krivolinijski integral

$$\int\limits_{AmB}(\varphi(y)e^x-my)\,dx+(\varphi'(y)e^x-m)\,dy\,,$$

gde je φ neprekidno diferencijabilna funkcija, AmB proizvoljna putanja koja spaja tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ i koja sa duži AB ograničava površ površine S. (Rezultat: $\pm S + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(y_2 - y_1) - m(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)/2$)

4. Izračunati površinu ograničenu
a) kardoidom $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$;
b) petljom Dekartovog lista $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$;
c) lemniskatom $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (Rezultat: a) $6\pi a^2$ b) $3a^2/2$ c) a^2)

5. Primenom Grinove formule dokazati sledeće jednakosti

$$a)\ \iint_D \Delta u\, dx\, dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl\,,$$

$$b)\ \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy = \int_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\, dl\,,$$

$$c)\ \iint_D v\Delta u\, dx\, dy = -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy + \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl\,,$$

gde je

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} := \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x,\nu) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(x,\nu)\,.$$

6. Da bi funkcija $u = u(x, y)$ bila harmonijska u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ potrebno je i dovoljno, da za svaku prostu zatvorenu krivu $L \subset D$ važi $\int_L \partial u/\partial\nu\, dl = 0$. Dokazati. (Uputstvo: koristiti 3.a))

7. Ako je $u = u(x, y)$ harmonijska funkcija u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, dokazati da su njene vrednosti unutar oblasti $\overline{D}$ jednoznačno određene njenim vrednostima na rubu ∂D.

8. Neka je $u(x, y)$ harmonijska funkcija u oblasti D, $(x_0, y_0) \in int\, D$ i $K_R \subset D$ kružnica sa središtem u tački (x_0, y_0). Dokazati da je

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2R\pi} \int\limits_{K_R} u(x, y)\, dl\,.$$

(Uputstvo: iskoristiti činjenicu da je $v = \ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ harmonijska funkcija u $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ i zadatak 5. c))

9. Neka je $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ obostrano jednoznačno neprekidno diferencijabilno preslikavanje oblasti $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ na $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$. Neka je γ^+ rub ograničene oblasti $\Gamma \subset G$ čija je reprezentacija $u = u(t)$, $v = v(y)$, $a \leq t \leq b$. Ako je Γ^* slika oblasti Γ datim preslikavanjem, dokazati da je

$$a)\ m\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv \qquad b)\ \lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{m\Gamma^*}{m\Gamma} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{M_0}\,,\ M_0 \in \Gamma\,.$$

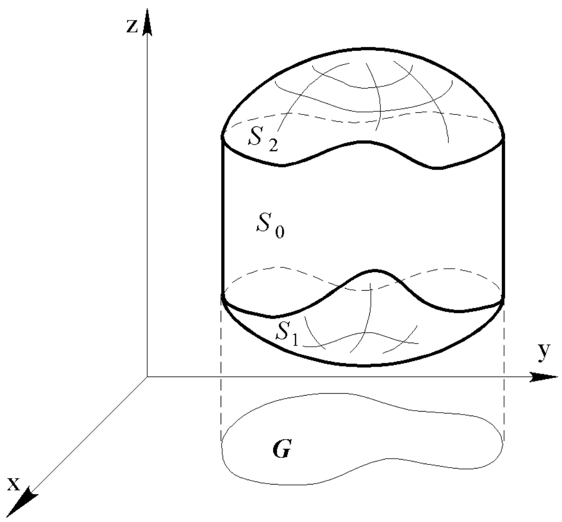
i dati geometrijsko značenje jakobijana preslikavanja.

6.2. FORMULA GAUS-OSTROGRADSKOG

Teorema 1. *Neka je na prostom kompaktu $K \subset \mathbb{R}^3$ sa orijentisanim krajem ∂K definisana vektorska funkcija $F = (P, Q, R)$ koja je neprekidna na K zajedno sa parcijalnim izvodima $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$. Tada važi formula Gaus-Ostrogradskog**

$$\iiint\limits_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dK = \iint\limits_{\partial K} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS\,,$$

Dokaz. Dokažimo teoremu najpre u slučaju kada je K elementaran kompakt čiji je kraj glatka orijentisana dvodimenzionalna površ. Neka je $\{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$ jedan od mogućih prikaza kompaktnog skupa K. Rub ∂K kompakta K sastoji se od površi S_1 i S_2 čije su parametrizacije $z = \varphi(x, y)$ i $z = \psi(x, y)$ respektivno određene na kompaktu G, i cilindarske površi $S_0 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial G, \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$. U tom slučaju je



Sl. 31

$$\iiint\limits_K \frac{\partial R}{\partial z}\, dK = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_G [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2^+} R(x, y, z) dxdy + \iint\limits_{S_1^+} R(x, y, z) dxdy\,.$$

* Ostrogradski M.V. (1801-1861)-ruski matematičar

Ako je $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ jedinični vektor normale površi S, tada je $\cos\gamma = 0$ na površi S_0, pa je

$$\iint\limits_{S_0^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S_0} R(x,y,z)\cos\gamma dS = 0\,.$$

Koristeći poslednje jednakosti, dobijamo

$$\iiint\limits_K \frac{\partial R}{\partial z} dK = \iint\limits_{S_1^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_2^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_0^+} Rdxdy = \iint\limits_{\partial K} Rdxdy\,.$$

Potpuno analogno se dobijaju formule

$$\iiint\limits_K \frac{\partial P}{\partial x} dK = \iint\limits_{\partial K} Pdydz = \iint\limits_{\partial K} P\cos\alpha dS$$

i

$$\iiint\limits_K \frac{\partial Q}{\partial y} dK = \iint\limits_{\partial K} Qdxdz = \iint\limits_{\partial K} Q\cos\beta dS\,,$$

koje, zajedno sa prvom, daju formulu Gaus-Ostrogradskog za slučaj elementarnog kompakta K.

Ako je $K = \cup_1^\infty K_j$ prost kompakt, dokaz formule Gaus-Ostrogradskog neposredno sledi sumiranjem jednakosti (1) napisane za svaki elementaran kompakt K_j. ■

Formula Gaus-Ostrogradskog važi i u slučaju kada je K proizvoljan kompakt čiji je kraj deo po deo glatka orijenisana površ. Dokaz ovog tvrđenja izlazi iz okvira ovog kursa, pa dokaz istog ne navodimo.

Definicija 1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast. Ako svakom elementu $x \in \Omega$ odgovara neki broj (vektor) $f(x)$, kažemo da je u oblasti Ω definisano* ***skalarno (vektorsko) polje****.*

Definicija 2. *Neka je u oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definisano vektorsko polje $F = (f_1, \dots, f_n)$ diferencijabilno u nekoj tački $x \in \Omega$. Broj*

$$div\, F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

nazivamo ***divergencijom vektorskog polja*** *F u tački x.*

Sada teoremu Gaus-Ostrogradskog možemo formulisati u terminima teorije polja za najopštiji slučaj.

Teorema 2. *Neka je kraj ∂G ograničene oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ orijentisana površ koja se sastoji od konačno mnogo deo po deo glatkih površi. Ako je vektorsko polje $F = (f_1, \ldots, f_n)$ neprekidno zajedno sa parcijalnim izvodima $\partial f_i / \partial x_i$, u oblasti $\overline{G}$, $i = \overline{1, n}$, tada je integral divergencije tog polja po oblasti G jednak protoku istog po rubu oblasti G, odn.*

$$\int\limits_{G} div\, F dG = \int\limits_{\partial G} (F(x), n(x)) dS\,,$$

gde je orijentacija kraja ∂G oblasti G određena jediničnim vektorom normale $n(x) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ površi ∂G.

Stavljajući u formuli Gaus-Ostrogradskog da je $f_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$ dobijamo formulu za izračunavanje mere oblasti G:

$$mG = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial G} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cos\alpha_i \right\} dS$$

ili

$$mG = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial G} x_1 dx_2 \cdots dx_n + \cdots + x_n dx_1 \cdots dx_{n-1}\,.$$

Formula Gaus-Ostrogradskog omogućava uvođenje pojma divergencije vektorskog polja pomoću graničnih vrednosti.

Teorema 3. *Neka je u oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ određeno neprekidno diferencijabilno vektorsko polje F, i neka je D oblast čiji je kraj ∂D deo po deo glatka površ orijentisana izborom jediničnog vektora normale. Ako je $M_0 \in D$, $\overline{D} \subset G$, pri čemu se u oblasti D može primeniti formula Gaus-Ostrogradskog, tada je*

$$div\, F(M_0) = \lim_{d(D) \to 0} \frac{\int\limits_{\partial D} (F(x), n(x))\, dS}{mD}\,.$$

Dokaz. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala je

$$\int\limits_{D} div\, F\, dD = div\, F(M)\, mD\,, \quad M \in D\,.$$

Zamenjujući poslednji izraz u formuli Gaus-Ostrogradskog dobijamo

$$div\, F(M) = \frac{\int\limits_{\partial D} (F, n)\, dS}{mD}\,.$$

Kako je $div\, F(M)$ neprekidna funkcija u tački M_0, prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj jednakosti kada $d(D) \to 0$ dobijamo formulu za divergenciju vektorskog polja. ■

Primer 1. Primenom formule Gaus-Ostrogradskog odredimo vrednost površinskog integrala

$$\iint\limits_{S} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS\,,$$

gde je S deo konusne površi $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$ orijentisan izborom spoljašnje normale $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ konusa.

Da bismo mogli da primenimo formulu Gaus-Ostrogradskog, pridružimo površi S površ $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le z^2,\ z = h\}$. Tada je

$$\iint\limits_{S} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS + \iint\limits_{S_1} (x^2 \cos\alpha + \\ + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS = 2 \iiint\limits_{D} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

gde je D oblast čiji je kraj površ $S \cup S_1$. Za površ S_1 je $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, pa je

$$\iint\limits_{S_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS = \\ = \iint\limits_{S_1} z^2 \cos\gamma\, dS = \iint\limits_{S_1} h^2\, dS = h^4 \pi\,.$$

Na osnovu teoreme Fubinija je

$$\iiint\limits_{D} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{E} dx\, dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (x + y + z)\, dz\,,$$

gde je $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le h^2\}$. Uvođenjem polarnih koordinata u poslednjem integralu dobija se

$$\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h [r(\cos\varphi + \sin\varphi)(h-r) + \frac{h^2}{2} - \frac{r^2}{2}]r\,dr = \frac{h^4\pi}{4}\,.$$

Zamenjujući vrednost dobijenih integrala u polaznoj jednakosti dobijamo vrednost polaznog integrala

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS = -\frac{h^4\pi}{2}\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Primenom formule Gaus-Ostrogradskog izračunati sledeće površinske integrale:

a) $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, gde je S spoljašnja strana kocke $0 \le x \le a$,$(0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$;

b) $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, gde je S spoljašnja strana elipsoida $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$;

c) $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, gde je S spoljašnja strana dela cilindra $x^2 + y^2 = a^2$, $-h \le z \le h$. (Rezultat: a) $3a^4$, b) $4\pi abc$, c) $6\pi a^2 h$)

2. Odrediti vrednosti sledećih površinskih integrala, a zatim izvršiti proveru primenom formule Gaus-Ostrogradskog:

a) $\iint_x dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, gde je S spoljašnja strana površi koja je ograničena zapreminom $V = \{(x,y,z) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1,\ x^2/a^2 + z^2/c^2 \le 1\}$, $a, b, c > 0$;

b) $\iint_S bx^2\,dy\,dz + ay^2\,dz\,dx + abz^2\,dx\,dy$, gde je S spoljašnja strana površi tela ograničena površima $x/a + y/b + z = 1$, $(x/a+z)^2 + (y/b+z)^2 = (x/a+y/b+z)^2$, $a, b > 0$;

c) $\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)/\sqrt{x^6+y^6+z^6}$, gde je S spoljašnja strana površi $2|x| + 3|y| + 4|z| = 1$. (Rezultat: a) $16abc$ b) $\pi a^2b^2/2$ c) formulu Gaus-Ostrogradskog primeniti na oblast $\{(x,y,z) : 2|x|+3|y|+4|z| \ge 1,\ x^6+y^6+x^6 \le 1\}$ $2\Gamma(1/6)/9\sqrt{\pi}$)

3. Dokazati da je zapremina konusa ograničena glatkom konusnom površi $F(x,y,z) = 0$ i ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ jednaka $V = HS/3$, gde je S površina osnove, a H visina konusa. (Uputstvo: pretpostaviti da se vrh konusa nalazi u koordinatnom početku, a zatim primeniti formulu za zapreminu datu ovom odeljku)

4. Dokazati drugu formulu Grina:

$$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS\,,$$

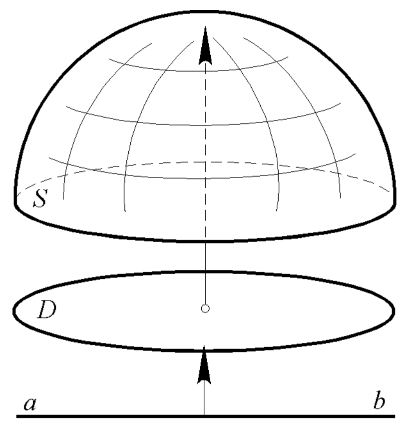
gde je oblast $V^3 \subset \mathbb{R}^3$ ograničena površinom S, n spoljašnji vektor noramale, a u i v dvaput neprekidno diferencijabilne funkcije u oblasti $\overline{V}$. Simboli Δu, Δv i $\partial u/\partial n$ definisani su sa

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x,n) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(y,n) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(z,n)\,.$$

5. Formulisati tvrđenja zadataka 5. i 6. prethodnog odeljka u trodimenzionalnom slučaju i dokazati ih.

6.3. STOKSOVA FORMULA

Neka je S površ sa krajem klase $\mathcal{C}^{(2)}$ orijentisana izborom jediničnog vektora normale $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ čija je parametrizacija $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ određena u oblasti $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ koja dopušta primenu Grinove formule. Za kraj ∂D oblasti $\overline{D}$ pretpostavimo da je prosta deo po deo glatka kriva čija je parametrizacija $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \le t \le b$. Pri navedenim pretpostavkama važi sledeća teorema.



Sl. 32

Teorema 1. (Stoks*) *Ako su funkcije P, Q i R neprekidno diferencijabilne na površi S, tada je*

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS\,.$$

* Stokes G.G. (1819-1903) -engleski matematičar

Dokaz. Odredimo na primer vrednost integrala $\int_{\partial S} P\,dx$. Ako je $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ parametrizacija površi S, tada je $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$ parametrizacija kraja ∂S te površi, pa je

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \int\limits_a^b P(r(u(t),v(t)))x_t'(u(t),v(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_{\partial D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right).$$

Oblast $\overline{D}$ dopušta primenu Grinove formule, pa je

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\,dv =$$
$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right] du\,dv =$$
$$= \iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv =$$
$$= \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS\,.$$

Potpuno analogno se dokazuju formule

$$\int\limits_{\partial S} Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS\,,$$
$$\int\limits_{\partial S} R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS\,,$$

koje, zajedno sa prethodno dokazanom formulom, daju Stoksovu formulu. ■

Lako je dokazati da Stoksova formula važi i za orijentisanu deo po deo glatku površ $S = \{S_i\}$, pri čemu svaka od površi S_i zadovoljava uslove dokazane teoreme. Napomenimo da u prethodno dokazanoj teoremi površ S ne mora biti klase $\mathcal{C}^{(2)}$. Naime, tim uslovom dokaz teoreme se znatno uprošćuje. Međutim, Stoksova formula u opštem slučaju važi za svaku prostu orijentisanu deo po deo glatku površ. Dokaz ove teoreme izlazi iz okvira ove knjige. Pri tome se Stoksova teorema može izraziti u terminima teorije polja. U tom cilju uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 1. *Neka je u oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definisano neprekidno diferencijabilno vektorsko polje $F = (P, Q, R)$. Vektor*

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

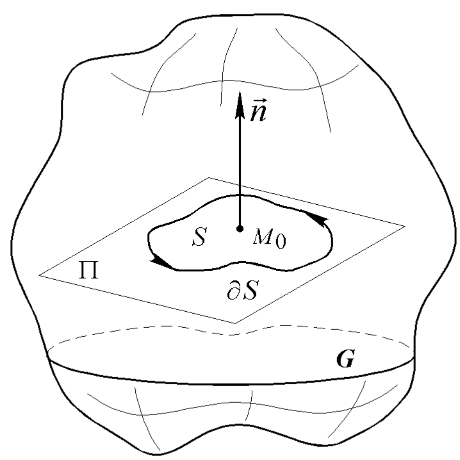
nazivamo ***rotorom*** *vektorskog polja F i označavamo sa $\operatorname{rot} F$.*

Teorema 2. *Neka je vektorsko polje F neprekidno diferencijabilno u oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$, a $S \subset G$ deo po deo glatka orijentisana površ čiji je kraj ∂S orijentisan saglasno orijentaciji površi S. Tada je cirkulacija vektorskog polja F duž kraja ∂S površi S jednaka protoku rotora polja F kroz površ S, tj.*

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot} F, \vec{n})\, dS\,,$$

gde je $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, a $\vec{n}$ jedinični vektor normale orijentišući za površ S.

Stoksova formula omogućuje geometrijki pristup pojmu rotora vektorskog polja, što je iskazano sledećom teoremom.



Sl. 33

Teorema 3. *Neka je u oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$ određeno neprekidno diferencijabilno vektorsko polje F i neka je M_0 fiksirana tačka te oblasti, a $\vec{n}$ jedinični vektor. Označi-*

mo sa Π ravan koja prolazi kroz tačku M_0 i upravna je na vektor $\vec{n}$, a sa S ograničenu oblast u ravni Π koja sadrži tačku M_0 čiji je rub ∂S deo po deo glatka kriva orijentisana saglasno izboru vektora normale $\vec{n}$, pri čemu je $S \subset G$. Tada je

$$rot_{\vec{n}} F(M_0) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{mS},$$

gde je $rot_{\vec{n}} F(M_0)$ projekcija vektora $rot\, F(M_0)$ na jedinični vektor normale $\vec{n}$.

Dokaz. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala je

$$\iint_S (rot\, F, \vec{n})\, dS = rot_{\vec{n}} F(M)\, mS\,,\ M \in S\,,$$

gde je $rot_{\vec{n}} F(M)$ projekcija rotora vektorskog polja F u tački $M \in S$ na vektor $\vec{n}$. Stoga je

$$rot_{\vec{n}} F(M) = \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{mS}\,.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj jednakosti kada $d(S) \to 0$ a $M_0 \in S$, imajući pri tom u vidu neprekidnost rotora vektorskog polja F, dobijamo traženi izraz za $rot\, F$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Izračunati sledeće krivolinijske integrale primenom Stoksove formule:

a) $\int_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, gde je L kriva $x^2+y^2=a^2$, $x/a + z/h = 1$, $a, h > 0$, orijentisana suprotno kretanju kazaljki na satu posmatrano sa pozitivnog dela Ox-ose;

b) $\int_L (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, gde je L kriva $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, $x^2+y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z > 0$ orijentisana tako da pri njenom obilasku spoljašnja strane sfere ostaje sa leve strane;

c) $\int_L (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$, gde je L kriva koja se dobija u preseku kocke $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ sa ravni $x+y+z = 3a/2$ orijentisana suprotno kretanju kazaljki na satu posmatrano sa pozitivnog dela Ox-ose. (Rezultat: a) $-2\pi a(a+h)$ b) $2\pi R r^2$ c) $-9a^3/2$)

2. Neka je C zatvorena kontura u ravni $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$, a S površina površi ograničena krivom C. Naći

$$\int_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

ako je kriva C pozitivno orijentisana.

3. Proveriti Stoksovu formulu, ako je

a) $P = x^2y^2$, $Q = 1$, $R = z$, a L kontura $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ nad kojom je razapeta polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$;

b) $P = y$, $Q = z$, $R = x$, a L kriva $x = a\cos^2 t$, $y = a\sqrt{2}\sin t\cos t$, $z = a\sin^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Uputstvo: L je presek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $x + z = a$)

6.4. NEZAVISNOST KRIVOLINIJSKOG INTEGRALA OD PUTANJE INTEGRACIJE

Neka je u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ definisano vektorsko polje $F = (P, Q)$. Razmotrimo krivolinijski integral

$$\int_{(AB)} P\,dx + Q\,dy\,, \tag{1}$$

gde su A i B tačke u oblasti G, a (AB) kriva u G koja ih spaja. Prirodno se postavlja pitanje određivanje uslova pod kojim integral zavisi samo od krajnjih tačaka, a ne i od putanje koja ih spaja. Odgovor na to pitanje daje

Teorema 1. *Neka su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) Krivolinijski integral (1) *jednak je nuli po ma kojoj zatvorenoj deo po deo glatkoj konturi koja je sadržana u oblasti G.*

(ii) Krivolinijski integral (1) *ne zavisi od putanje integracije.*

(iii) Izraz $P\,dx + Q\,dy$ je totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ određene u oblasti G. U tom slučaju je

$$\int_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A)\,, \tag{2}$$

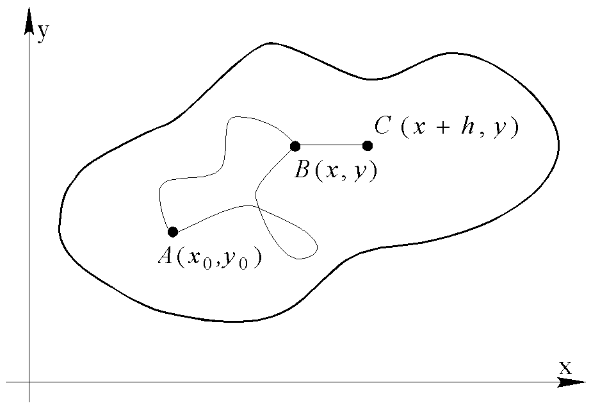
gde je (AB) ma koja kriva u oblasti G koja spaja tačke A i B.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka su $(AB)_1$ i $(AB)_2$ dve proizvoljne krive u oblasti G koje spajaju tačke A i B. Kriva $L = (AB)_1 \cup (BA)_2$ je zatvorena, pa je $\int_L P\,dx + Q\,dy = 0$. Stoga je

$$\int\limits_{(AB)_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(AB)_2} P\,dx + Q\,dy\,.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $A(x_0, y_0)$ fiksirana, a $B(x, y)$ proizvoljna tačka u oblasti G. Definišimo funkciju

$$u(x,y) = u(B) := \int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy\,,$$



Sl. 34

gde je (AB) proizvoljna kriva u oblasti G. Funkcija $u(x, y)$ je korektno definisana, jer prema pretpostavci (ii) integral (1) ne zavisi od putanje integracije. Dokažimo da je $du = P\,dx+Q\,dy$. Izaberimo h tako da tačka $C(x+h, y)$ pripada oblasti G. Ovo je moguće, jer je G otvoren skup. Sa $\overline{BC}$ označimo duž koja spaja tačke B i C i upravna je na Oy-osu. Krivolinijski integral (1) ne zavisi od putanje integracije, pa je

$$\begin{aligned} u(x+h,y) - u(x,y) &= \int\limits_{(AC)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \\ &= \int\limits_{(AB)_1} + \int\limits_{(\overline{BC})} - \int\limits_{(AB)} = \int\limits_{(\overline{BC})} P\,dx + Q\,dy\,. \end{aligned}$$

Kako je $\int_{(\overline{BC})} Q\,dy = 0$, to je

$$u(x+h,y) - u(x,y) = \int\limits_{(\overline{BC})} P(x,y)\,dx = \int\limits_{x}^{x+h} P(x,y)\,dx\,.$$

Primenom teoreme o srednjoj vrednosti u integralnom računu na poslednji integral, dobija se

$$u(x+h,y) - u(x,y) = P(x+\theta h, y)h\,, \quad 0 < \theta < 1\,,$$

odn.

$$\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} = P(x+\theta h, y)\,. \tag{3}$$

Funkcija P je neprekidna, pa prelaskom na graničnu vrednost u (3) kada $h \to 0$ dobijamo da je $\partial u/\partial x = P$. Analogno se dokazuje da je $\partial u/\partial y = Q$.

Da dokažemo (2), uočimo proizvoljnu krivu u oblasti G koja spaja tačke A i B i neka je $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \le t \le b$ njena parametrizacija, pri čemu je $A = (\varphi(a), \psi(a))$, $B = (\varphi(b), \psi(b))$. Tada je

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t))}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t)}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t(\varphi(t),\psi(t))\,dt = u(\varphi(b),\psi(b)) - u(\varphi(a),\psi(a)) = u(B) - u(A)\,.$$

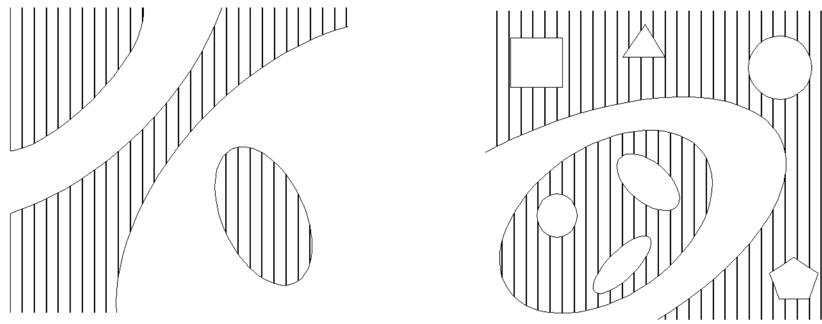
$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka je $L \subset G$ proizvoljna deo po deo glatka zatvorena kriva, a A proizvoljna tačka krive L. Tada je prema (2)

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(AMA)} P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0\,,\ M \in L\,. \blacksquare$$

Dokazana teorema ne pruža efektivan metod za utvrđivanje nezavisnosti integrala (1) od putanje integracije. Da formulišemo takav kriterijum, uvedimo najpre sledeći pojam.

Definicija 1. *Oblast $G \subset \mathbb{R}^2$ je* ***jednostruko*** *ili* ***prosto povezana****, ako je, za svaku zatvorenu krivu $L \subset G$, ograničena oblast Γ čiji je rub kriva L sadržana u G.*

Intuitivno, oblast bez šupljina je jednotruko povezana. Na sl.35 a) prikazane su prosto povezane oblasti, a na sl.35 b) višetruko povezane oblasti.



a) b)

Sl. 35

Teorema 2. *Neka su funkcije P i Q neprekidne zajedno sa parcijalnim izvodima $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Da bi krivolinijski integral* (1) *bio nezavisan od putanje integracije u oblasti G, potrebno je, a uz pretpostavku jednostruke povezanosti oblasti G, i dovoljno da je*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Dokaz. Pretpostavimo da krivolinijski integral (1) ne zavisi od putanje integracije. Tada je prema prethodnoj teoremi $du = P\,dx + Q\,dy$ za neku funkciju $u(x, y)$ u oblasti G, odakle sledi da je $\partial u/\partial x = P$ i $\partial u/\partial y = Q$. Diferenciranjem ovih jednakosti dobijamo da je $\partial^2 u/\partial y\partial x = \partial P/\partial y$ i $\partial^2 u/\partial x\partial y = \partial Q/\partial x$. Izvodi $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ su neprekidne funkcije u oblasti G, pa su, na osnovu teoreme o jednakosti mešovitih parciljalnih izvoda, oni jednaki.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ u svim tačkama oblasti G i neka je L proizvoljna prosta, deo po deo glatka zatvorena kriva u oblasti G. Ako je D ograničena oblast u ravni čiji je rub kriva L, tada je $D \subset G$, jer je G jednostruko povezana oblast. Primenjujući Grinovu formulu dobijamo da je

$$\text{(4)} \qquad \int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0\,.$$

Stoga krivolinijski integral (1) prema teoremi 1. ne zavisi od putanje integracije.

Ako kriva L ima konačan broj tačaka samopreseka, onda se ona može razložiti na konačan broj prostih deo po deo glatkih zatvorenih kontura. Primenjujući na svaku od njih Grinovu formulu, dobijamo da je $\int_L P\,dx + Q\,dy = 0$.

Neka je sada L proizvoljna deo po deo glatka zatvorena kriva u oblasti G koja se može razložiti na konačno mnogo glatkih krivih $L_1, \ldots, L_k$. U svaku od krivih L_i upišimo poligonalnu liniju λ_i. Neka je λ unija poligonalnih linija λ_i. Tada je

$$\int\limits_{\lambda} P\,dx + Q\,dy = 0$$

prema prethodno dokazanom. Na osnovu teoreme o aproksimaciji krivolinijskog integrala važi:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int\limits_{\lambda_i} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{L_i} P\,dx + Q\,dy\,,\; i = \overline{1,k}\,,$$

pa je

$$\int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0\,. \blacksquare$$

Primer 1. Dokažimo da integral

$$\int\limits_{C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

ne zavisi od putanje integracije, gde je C ma koja kriva u oblasti $G \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Za fukcije $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$ i $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$ lako je proveriti da je $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, pa krivolinijski integral na osnovu teoreme 2. ne zavisi od putanje integracije. Kako je

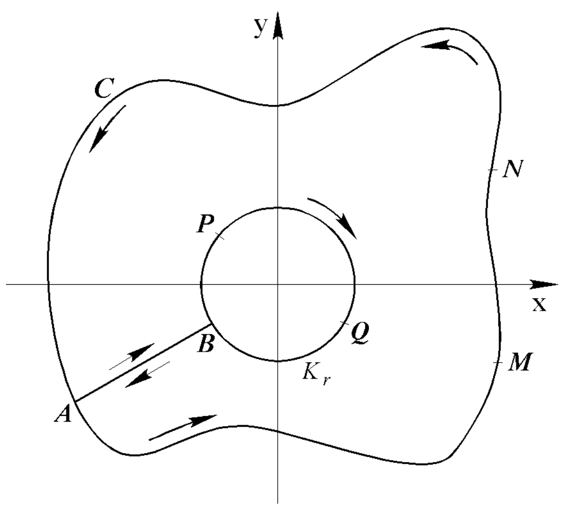
$$d\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\,,$$

to je

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}\,.$$

Ako je kriva C zatvorena u $\mathbb{R}^2$, posmatrani integral je nula. Međutim, ako je C zatvorena kriva u oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ oko koordinatnog početka, tada je

$$\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi\,.$$



Sl. 36

Da bismo to dokazali, uočimo krug K_r čije se središte nalazi u koordinatnom početku i koji nema zajedničkih tačaka sa krivom C. Neka je $(\overline{AB})$ duž koja spaja tačke $A \in C$ i $B \in K_r$. Tada je

$$L = (AMNABPQBA)$$

zatvorena kriva koja je rub povezane oblasti u kojoj su zadovoljeni uslovi teoreme 2., pa je $\int_L = 0$. Stoga je

$$\int\limits_{(AMNA)} + \int\limits_{(AB)} + \int\limits_{(BPQB)} + \int\limits_{(BA)} = 0\,,$$

odn.

$$\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int\limits_{K_r} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\,.$$

Parametarske jednačine kruga K_r su $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, pa je

$$\int\limits_{K_r} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,.$$

Ovu vrednost nazivamo **cikličnom konstantom** posmatranog integrala u odnosu na tačku $(0,0)$. Vrednost posmatranog integrala jednaka je celobrojnom umnošku ciklične konstante, gde celobrojni umnožak pokazuje smer i broj obilazaka oko tačke $(0,0)$ krivom integracije.

Iz navedenog primera vidimo da teorema 2. ne važi ako se izostavi pretpostavka o jednostrukoj povezanosti oblasti ili pretpostavka o neprekidnosti funkcija P i Q i njihovih izvoda. Otstranjivanjem tačaka prekida funkcija P i Q ili njihovih izvoda, narušava se jednostruka povezanost oblasti.

U opštem slučaju, ako jednostruko povezana oblast sadrži k osobenih tačaka $M_1, \ldots, M_k$, tada je

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(AB)_0} P\,dx + Q\,dy + n_1\sigma_1 + \cdots + n_k\sigma_k\,,$$

gde je $(AB)_0$ kriva u posmatranoj oblasti koja ne sadrži tačke M_i, $i = \overline{1,k}$, dok su σ_i ciklične konstante koje odgovaraju tačkama M_i.

Izložena teorija se lako uopštava na trodimenzionalni slučaj. Pre formulacije odgovarajuće teoreme, uvedimo sledeći pojam.

Definicija 2. *Oblast $G \subset \mathbb{R}^3$ je* ***površinski jednostruko povezana*** *ako za svaku zatvorenu krivu $L \subset G$ postoji dopustiva površ $S \subset G$ razapeta nad krivom L, tj. $L = \partial S$.*

Pod ***dopustivom površi*** *podrazumevamo površ na kojoj važi Stoksova formula.*

Torus je primer površi koja je rub oblasti koja nije površinski jednostruko povezana.

Teorema 3. *Neka je $F = (P, Q, R)$ neprekidno diferencijabilno polje u površinski jednostruko poveznoj oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$. Tada su sledeća svojstva ekvivalentna:*

(i) Vektorsko polje F je ***potencijalno*** *u oblasti G, odn. cirkulacija vektorskog polja jednaka je nuli po ma kojoj deo po deo glatkoj zatvorenoj konturi unutar oblasti G.*

(ii) U oblasti G postoji ***potencijal vektorskog polja*** *F, tj. postoji funkcija u za koju je $F = grad\,u$, odn. $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.*

U tom slučaju je

$$\int\limits_{(AB)} \vec{F} d\vec{r} = u(B) - u(A)\,,$$

gde je (AB) ma koja deo po deo glatka kriva u G koja spaja tačke A i B.

(iii) Vektorsko polje F je **bezvrtložno** *u oblasti G, tj. $rot\,F(M) = 0$ za svako $M \in G$, ili ekvivalentno,*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\,.$$

Dokaz. Dokažimo samo implikaciju $(iii) \Rightarrow (i)$. Ostale se dokazuju analogno dvodimenzionalnom slučaju.

Pretpostavimo da je $rot\,F(M) = 0$ za svako $M \in G$. Neka je L deo po deo glatka prosta zatvorena kriva u oblasti G. Tada se zbog površinske jednostruke povezanosti oblasti G nad krivom L može razapeti dopustiva površ $S \subset G$. Stoga je

$$\int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S (rot\,\vec{F}, \vec{n})\, dS = 0\,.$$

Isto važi i za zatvorenu poligonalnu liniju u oblasti G. U svaku deo po deo glatku zatvorenu krivu $L \subset G$ može se upisati poligonalna linija L_n za koju je

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int\limits_{L_n} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

na osnovu teoreme o aproksimaciji krivolinijskog integrala. Odavde neposredno sledi da je cirkulacija vektorskog polja F po ma kojoj deo po deo glatkoj zatvorenoj krivoj u oblasti G jednaka nuli, čime smo dokazali da je polje F potencijalno. ■

Zadaci za vežbanje

1. Da li je krivolinijski integral $\int_L (x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy)$ jednak nuli po ma kojoj zatvorenoj konturi u $\mathbb{R}^2$?

2. Ne proveravajući uslov teoreme 2., dokazati da integral $\int_L x\,dy - y\,dx$ zavisi od putanje integracije.

3. Ako je $P\,dx + Q\,dy$(totalni diferencijal neke funkcije u u oblasti pravougaonika $[a,b]\times[c,d]$, dokazati da je

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + C\,,$$

gde je $C = u(x_0,y_0) \in [a,b]\times[c,d]$. Uopštiti na slučaj $\mathbb{R}^3$.

4. Neka su P, Q, $\partial P/\partial y$ i $\partial Q/\partial x$ neprekidne funkcije na $[a,b]\times[c,d]$. Dokazati da je uslov $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ekvivalentan uslovu

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy\,.$$

5. Odrediti uslove koje treba da zadovoljava funkcija F u pravougaoniku $[a,b]\times[c,d]$ da bi izraz $F(x,y)(x\,dx+y\,dy)$ bio tačan diferencijal neke funkcije u zadanom pravougaoniku. (Rešenje: $x\partial F/\partial y = y\partial F/\partial x$)

6. Izračunati integral $\int_L 2(x+y^2)\,dx + (4xy+\cos y)\,dy$, gde je je L proizvoljna deo po deo glatka kriva koja spaja tačke $(1,0)$ i (ξ,η).

7. Neka je L proizvoljna dep po deo glatka zatvorena kriva koja je rub oblasti $D\subset\mathbb{R}^2$ koja sadrži tačku $(0,0)$. Izračunati integral

$$\int_L \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y + y\sin y)\,dy\right].$$

8. Dokazati da krivolinijski integral

$$\int_L e^{-x^2+y^2}\left[\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy\right]$$

jednak nuli po svakoj deo po deo glatkoj zatvorenoj konturi u oblasti $\mathbb{R}^2$. Koristeći dobijeni rezultat izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx\,,$$

znajući vrednost Puasonovog integrala. (Uputstvo: posmatrati pravougaonik sa stranama $x=0$, $y=0$, $x=a>0$ i $y=b>0$; rezultat: $e^{-b^2}\sqrt{\pi}/2$)

9. Dat je krivolinijski integral

$$I_L = \int_L \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[(x\sin x - y\cos x)\,dx + (x\cos x + y\sin x)\,dy\right].$$

a) Dokazati da je $I_L = 0$ po ma kojoj deo po deo glatkoj krivoj koja je rub oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ koja ne sadrži tačku $(0,0)$.

b) Dokazati da je

$$I_C = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} \cos(R\cos\theta)\, d\theta\,,$$

gde je $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0\}$ kriva orijentisana od tačke $(R,0)$ do $(-R,0)$, i da I_C teži ka 0 ili π kada R teži $+\infty$ ili 0.

c) Koristeći rezultate pod a) i b) izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

(Uputstvo: posmatrati konturu $L = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) : r < x < R,\ y = 0\} \cup \{(x,y) : -R \leq x \leq r,\ y = 0\}$; rezultat: $\pi/2$)

10. Dokazati da je protok rotora neprekidno diferencijabilnog vektorskog polja u nekoj oblasti kroz svaku sferu u toj oblasti jednak nuli.

11. Dokazati da je

$$\iiint\limits_G grad\,\varphi \cdot rot\,F\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} (\vec{F} \times grad\,\varphi, \vec{n})\, dS\,,$$

gde je kraj ∂G dopustive oblasti G orijentisan vektorom normale $\vec{n}$.

12. Odrediti divergenciju i rotor vektorskih polja $\vec{a} = \vec{r}/|\vec{r}|^3$ i $\vec{b} = \vec{r}/|\vec{r}|$. Da li su ta polja potencijalni ili solenoidna? Izračunati njihov protok kroz sferu $S_R = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

13. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ diferencijabilna vektorska polja, u dvaput diferencijabilna skalarna funkcija u oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = grad\, u$, $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Dokazati da je $div\,\vec{c} = 0$ onda i samo onda ako funkcija u u oblasti G zadovoljava uslov $\Delta u = div\,\vec{a}$.

14. Primenom formule Gaus-Ostrogradskog izračunati protok vektorskog polja $\vec{a}$ kroz zatvorenu površ S, ako je

a) $\vec{a} = (1 + 2x, y, z)$, $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 4\}$,

b) $\vec{a} = (2x, -y, z)$, $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 3z = x^2 + y^2\}$

15. Primenom Stoksove formule izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{a}$ po konturi γ, ako je

a) $\vec{a} = (y, -x, z)$, $\gamma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0\}$,

b) $\vec{a} = (y^2, z^2, 0)$, $\gamma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 9,\ 3y + 4z = 5\}$.

7. INTEGRALI ZAVISNI OD PARAMETRA

U ovom poglavlju izučavaju se funkcije definisane integralima. Ulogu promenljive igra parametar koji se javlja u podintegralnoj funkciji, ili pak u definiciji oblasti integracije. S obzirom na to da je argument tako posmatrane funkcije parametar u integralu, tako definisane funkcije uobičajeno se nazivaju parametarski integrali. Ispituju se funkcionalna svojstva ovako definisanih funkcija.

7.1. RAVNOMERNA KONVERGENCIJA FAMILIJE FUNKCIJA

Sa pojmom ravnomerne konvergencije familije funkcija upoznali smo se već više puta. Uvedimo sada precizno ovaj pojam.

Definicija 1. *Neka su $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}^m$ dati skupovi, a y_0 tačka nagomilavanja skupa Y. Ako je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $X \times Y$, a funkcija $\varphi(x)$ na skupu X, tada za funkciju $f(x,y)$ kažemo da* ***ravnomerno konvergira funkciji** $\varphi(x)$ **na skupu** X *kada $y \to y_0$ i pišemo*

$$f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)\,,\ y \to y_0\,,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U_{y_0} tačke y_0, tako da za svako $x \in X$ i svako $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ važi nejednakost

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Ravnomernu konvergenciju funkcije $f(x,y)$ funkciji φ na skupu X možemo shvatiti kao ravnomernu konvergenciju familije funkcija $\{f(x,y)\}_{y \in Y}$ funkciji φ, kada parametar y konvergira ka tački nagomilavanja y_0 skupa Y. Očigledno je ravnomerna konvergencija funkcionalnih nizova samo specijalan slučaj ravnomerne konvergencije familije funkcija.

Ravnomerna konvergencija funkcija može se formulisati pomoću granične vrednosti funkcija. Funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergira funkciji φ na skupu X kada $y \to y_0$, onda i samo onda, ako je

$$\lim_{y \to y_0} \sup_{x \in X} |f(x,y) - \varphi(x)| = 0\,.$$

Dokaz ovog tvrđenja je analogan dokazu odgovarajuće teoreme za funkcionalne nizove. Takođe važi

Teorema 1. (Koši) *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ i neka je y_0 tačka nagomilavanja skupa $Y \subset \mathbb{R}^m$. Da bi funkcija $f(x,y)$ imala graničnu funkciju $\varphi(x)$ i ravnomerno konvergirala ka njoj na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ kada $y \to y_0$, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U_{y_0} tačke y_0 tako da za svako y i y' iz $Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ i svako $x \in X$ važi*

$$|f(x,y) - f(x,y')| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Dokaz. Pretpostavimo da $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji okolina U_{y_0} tačke y_0 tako da za svako $x \in X$ i svako $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ važi (1). No onda je

$$|f(x,y) - f(x,y')| \le |f(x,y) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x,y')| < 2\varepsilon$$

za svako $y, y' \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$.

Obratno, pretpostavimo da važi (2). Tada na osnovu Košijeve teoreme za svako $x \in X$ postoji $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$. Fiksirajući y u (2) i prelaskom na graničnu vrednost kada $y' \to y_0$, dobijamo nejednakost $|f(x,y) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ koja važi za svako $x \in X$ i svako $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$. ■

Teorema 2. *Da bi funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergirala funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$, potrebno je i dovoljno da za svaki niz $(y_n) \subset Y \setminus \{y_0\}$ koji konvergira ka y_0, niz $(f(x,y_n))$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $n \to +\infty$.*

Dokaz. Neka je funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergentna ka funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$. Neka je (y_n) niz iz $Y \setminus \{y_0\}$ koji konvergira ka tački y_0 i $\varepsilon > 0$. Kako $f(x,y) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ kada $y \to y_0$, to postoji okolina U_{y_0} tačke y_0 tako da je $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ za svako $x \in X$ i svako $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$. Niz (y_n) konvergira ka y_0, pa postoji prirodan broj n_ε tako da je $y_n \in U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ za svako $n \ge n_\varepsilon$. Stoga je

$$|f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

za svako $x \in X$ svako $n \ge n_\varepsilon$, što dokazuje da niz $f(x,y_n) \overset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ kada $n \to +\infty$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da $f(x,y)$ ne konvergira ravnomerno funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$. Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svaku okolinu U_{y_0} tačke y_0 postoji $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ tako da je $|f(x,y) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$ za neko $x \in X$. Neka je (δ_n) niz pozitivnih brojeva koji teži nuli kada $n \to +\infty$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $U_{y_0}^n = K(y_0, \delta_n)$, $y_n \in K(y_0, \delta_n) \setminus \{y_0\}$ i $x_n \in X$ tačke za koje je $|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$. Jasno je da $y_n \to y_0$. Međutim, niz $(f(x, y_n))$ ne konvergira ravnomerno ka funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y_n \to y_0$. ■

Primer 1. Familija funkcija $f(x,y) = e^{-xy}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < +\infty$ ima graničnu funkciju

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & x > 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$$

kada $y \to +\infty$. Dokažimo da ta konvergencija nije ravnomerna. Za to je dovoljno dokazati da postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svaku okolinu $U(+\infty)$ postoji $x \in [0,1]$ i $y \in U(+\infty)$ tako da je $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$. Neka je $0 < \varepsilon_0 < 1$. Očigledno da za svako $y \in U(+\infty)$ važi $\lim_{x\to 0} e^{-xy} = 1$. Stoga postoji $x \in (0,1]$ tako da je $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$.

Međutim, funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(x)$ na skupu $[a,1]$ kada $y \to +\infty$ za svako $0 < a < 1$. Zaista, kako je

$$\lim_{y\to+\infty} \sup_{a\leq x\leq 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| = \lim_{y\to+\infty} \sup_{a\leq x\leq 1} e^{-xy} = \lim_{y\to+\infty} e^{-ay} = 0\,,$$

$f(x,y) \overset{[a,1]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ kada $y \to +\infty$ za svako $a \in (0,1)$.

Kao neposredne posledice definicije ravnomerne konvergencije familije funkcija, teoreme 2. i odgovarajućih svojstava funkcionalnih nizova imamo sledeća svojstva familije funkcija.

Teorema 3. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ i neka su x_0 i y_0 tačke nagomilavanja skupova X i Y respektivno. Ako za svako $y \in Y$ postoji $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, a funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$, tada postoje granične vrednosti $\lim_{y\to y_0} \psi(y)$ i $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ i jednake su.*

Teorema 4. *Neka je funkcija $f(x, y)$ definisana na skupu $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ neprekidna (integrabilna) na skupu X za svako $y \in Y$. Ako funkcija $f(x, y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$, tada je funkcija $\varphi(x)$ neprekidna (integrabilna) na X.*

Teorema 5. *Neka je familija funkcija $f(x, y)$ definisana na skupu $[a, b] \times Y \subset \mathbb{R}^{m+1}$ i neka je y_0 tačka nagomilavanja skupa Y, pri čemu je funkcija $f(x, y)$ neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$ za svako $y \in Y$. Ako familija funkcija $f(x, y)$ konvergira bar u jednoj tački segmenta $[a, b]$ kada $y \to y_0$, a familija $\partial f(x, y)/\partial x$ ravnomerno konvergira na $[a, b]$ kada $y \to y_0$, onda familija funkcija $f(x, y)$ ravnomerno konvergira na $[a, b]$ nekoj funkciji $\varphi(x)$ koja je neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$, pri čemu je*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{y \to y_0} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,.$$

Navedene teoreme mogu se dokazati direktno bez pozivanja na teoremu 2. i odgovarajuća svojstva funkcionalnih nizova. Dokažimo teoremu 3. u nešto izmenjenoj formulaciji direktno.

Teorema 6. *Neka je funkcija $f(x, y)$ definisana na skupu $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$, pri čemu su x_0 i y_0 tačke nagomilavanja skupova $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}^m$ respektivno. Ako za svako $x \in X$ postoji $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ i za svako $y \in Y$ postoji $\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$, a funkcija $f(x, y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(x)$ na skupu X kada $y \to y_0$, tada postoje ponovljene granične vrednosti i jednake su.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Funkcija $f(x, y)$ je ravnomerno konvergentna na X kada $y \to y_0$, pa prema teoremi 1. postoji okolina U_{y_0} tačke y_0 tako da za svako $x \in X$ i svako y i y' iz $Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ važi (2). Fiksirajući tako izabrane vrednosti y i y' i prelaskom na graničnu vrednost u (2) kada $x \to x_0$ dobijamo nejednakost

$$|\psi(y) - \psi(y')| \le \varepsilon \tag{3}$$

koja važi za svako y i y' iz $Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$. Na osnovu Bolcano-Košijeve teoreme postoji $\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A$. Osim toga je za svako $x \in X$ i $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \le \varepsilon \quad \text{i} \quad |\psi(y) - A| \le \varepsilon\,. \tag{4}$$

Ove nejednakosti slede iz (2) i (3) posle prelaska na granične vrednosti kada $y' \to y_0$ za fiksirano x i y. Za $y \in Y \cap U_{y_0} \setminus \{y_0\}$ izaberimo okolinu U_{x_0} tačke x_0 tako da je

$$|f(x,y) - \psi(y)| < \varepsilon \tag{5}$$

za svako $x \in X \cap U_{x_0}$. Tada je zbog (4) i (5)

$$|\varphi(x) - A| \leq |\varphi(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - \psi(y)| + |\psi(y) - A| \leq 3\varepsilon$$

za svako $x \in X \cap U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, što dokazuje da je

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \,. \blacksquare$$

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je funkcija $f(x,y) = e^{-x^2/y^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergira neravnomerno na $\mathbb{R}$ kada $y \to 0$.
2. Dokazati da funkcija $f(x,y) = (x^{1/y} - x^{2/y})/y$, $x \in [1/2, 1]$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergira neravnomerno na $\mathbb{R}$ kada $y \to 0+$.
3. Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na pravougaoniku $[a,b] \times [c,d]$. Dokazati da $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ na skupu $[a,b]$ kada $y \to y_0 \in [c,d]$.
4. Neka su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ funkcije ravnomerno konvergentne na skupu $X \subset \mathbb{R}^n$ kada $y \to y_0$, gde je y_0 tačka nagomilavanja skupa $Y \subset \mathbb{R}^m$. Dokazati da funkcija $\lambda f + \mu g$ ravnomerno konvergira na X kada $y \to y_0$.
5. Dokazati teoreme 4. i 5. ne koristeći teoremu 2.

7.2. GRANIČNA VREDNOST PARAMETARSKOG INTEGRALA

U narednim odeljcima izučavaju se funkcionalna svojstva parametarskog integrala

$$F(x) = \int_\Omega f(x,y)\,dy \,, \tag{1}$$

gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^m_y$ izmerljiv skup, a funkcija $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ za svako $x \in E \subset \mathbb{R}^n_x$

Teorema 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $E \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$, gde je Ω izmerljiv skup i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna na skupu Ω za svako $x \in E$ i ravnomerno konvergira na skupu Ω funkciji $\varphi(y)$ kada $x \to x_0$, tada je*

$$\lim_{x \to x_0} \int_\Omega f(x,y)\,dy = \int_\Omega \varphi(y)\,dy\,.$$

Dokaz. Integrabilnost granične funkcije $\varphi(y)$ sledi na osnovu teoreme 4., 7.1. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(y)$ na skupu Ω kada $x \to x_0$, postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 tako da za svako $x \in E \cap U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ i svako $y \in \Omega$ važi nejednakost $|f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon / m\Omega$. No onda je

$$\left| \int_\Omega f(x,y)\,dy - \int_\Omega \varphi(y)\,dy \right| \le \int_\Omega |f(x,y) - \varphi(y)|\,dy < \varepsilon$$

za svako $x \in E \cap U_{x_0} \setminus \{x_0\}$. ■

Uslov ravnomerne konvergencije ne može se oslabiti, što pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija $f(x,y) = (x^{1/y} - x^{2/y})/y$ je neprekidna na skupu $[1/2, 1] \times (0,1]$. Granična funkcija $\varphi(x)$ familije funkcija $f(x,y)$ jednaka je nuli za svako $x \in [1/2, 1]$ kada $y \to 0+$. Kako je

$$\lim_{y \to 0+} \int_{1/2}^1 (x^{1/y} - x^{2/y})/y\,dx = 1/2\,,$$

to je

$$\lim_{y \to 0+} \int_{1/2}^1 f(x,y)\,dx \ne \int_{1/2}^1 \lim_{y \to 0+} f(x,y)\,dx\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Uz obrazloženje postupka, odrediti:

$$a)\ \lim_{\alpha \to 0} \int_{-1}^{+1} \sqrt{x^2 + \alpha^2}\,dx\,, \qquad b)\ \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}\,,$$

$$c)\ \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}\,, \qquad d)\ \lim_{\alpha \to \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x + |\alpha|)}{\ln(x^2 + \alpha^2)}\,dx\,.$$

(Rezultat: a) 1 b) $\pi/4$ c) $\ln\frac{2e}{e+1}$ d) 1/2)

2. Neposrednom proverom utvrditi da se u sledećim integralima ne može ući sa limesom pod znak integrala kada $y \to 0+$

$$a) \int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,, \quad b) \int_0^1 \frac{x^3}{y^2}e^{-x^2/y}\,dx\,.$$

Koji je od uslova teoreme 1. narušen?

3. Neka je $(\varphi_n(x))$ niz nenegativnih funkcija koje su definisane na skupu $[-1,1]$ i neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[-1,1]$. Ako $\varphi(x) \rightrightarrows 0$ kada $n \to +\infty$ na skupu $\{x \in \mathbb{R} : 0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1\}$, a $\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx \to 1$ kada $n \to +\infty$, dokazati da je onda

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = f(0)\,.$$

4. Neka je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \prod_{k=1}^{n} f(x_k)\,dx_k = 0\,,$$

gde je $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq a^2\}$, a $a > 0$ fiksiran broj.

5. Neka su zadovoljeni uslovi teoreme 1. Ako je funkcija $g(y)$ apsolutno integrabilna na skupu Ω, dokazati da je tada

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\Omega} f(x,y)g(y)\,dy = \int_{\Omega} \varphi(y)g(y)\,dy\,.$$

7.3. NEPREKIDNOST PARAMETARSKOG INTEGRALA

Teorema 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $E \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$, gde je E zatvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n_x$, a Ω zatvoren i izmerljiv skup u $\mathbb{R}^m_y$. Tada je funkcija $F(x)$ neprekidna na skupu E.*

Dokaz. Primetimo najpre da je skup $E \times \Omega$ zatvoren i ograničen. Stoga je funkcija f prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidna na njemu, pa $\omega(f;\delta) \to 0$ kada $\delta \to 0$. Neka je x_0 proizvoljna tačka skupa E. Tada je

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{\Omega} f(x,y)\,dy - \int_{\Omega} f(x_0,y)\,dy\right| \leq$$
$$\leq \int_{\Omega} |f(x,y) - f(x_0,y)|\,dy \leq \omega(f;\|x-x_0\|)m\Omega\,,$$

odakle sledi da $F(x) \to F(x_0)$ kada $x \to x_0$. ■

Posmatrajmo sada integral

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,, \tag{2}$$

gde je y realna promenljiva. Tada važi sledeća

Teorema 2. *Neka su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ neprekidne na zatvorenom i ograničenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, tada je funkcija* (2) *neprekidna na skupu E.*

Dokaz. Smenom $y = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x)$ integral (2) dobija oblik

$$F(x) = \int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x)) f(x, (1-t)\varphi(x) + t\psi(x))\,dt\,.$$

Podintegralna funkcija je neprekidna na skupu $E \times [0,1]$, pa je prema prethodnoj teoremi funkcija F neprekidna na skupu E. ■

Primer 1. Neka je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna na jediničnoj kugli

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}\,.$$

Tada je

$$\int_K f\,dK = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f\,dz\,.$$

Unutrašnji integral

$$F(x,y) = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f\,dz$$

je prema teoremi 2. neprekidna funkcija na krugu $x^2 + y^2 \le 1$ i možemo pisati

$$\int_K f\,dK = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x,y)\,dy\,.$$

Sada je funkcija

$$\Phi(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x,y)\,dy$$

neprekidna funkcija na segmentu $[-1,1]$, jer je funkcija F neprekidna na krugu $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$, a funkcije $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ su neprekidne na $[-1,1]$, pa je po teoremi 2. $\Phi(x) \in \mathcal{C}([-1,1])$.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati neprekidnost sledećih parametarskih integrala:

$$a)\ \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx\,, \qquad b)\ \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx\,.$$

2. Dokazati da je parametarski integral $I(y) = \int_0^1 sgn(x-y)\,dx$ prekidne funkcije $sgn(x-y)$ neprekidna funkija za svako $y \in \mathbb{R}$.

3. Neka je $f(x) \in \mathcal{C}^{(1)}(U_{x_0}, \mathbb{R})$, gde je U_{x_0} neka okolina tačke x_0. Dokazati da se u nekoj okolini tačke x_0 funkcija f može prikazati u obliku

$$f(x) = f(x) + \varphi(x)(x-x_0)\,,$$

gde je $\varphi(x)$ funkcija koja je neprekidna u tački x_0, pri čemu je $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. (Uputstvo: poći od Njutn-Lajbnicove formule $f(x+x_0) - f(x_0) = h\int_0^1 f'(x_0+th)\,dt$ i primeniti teoremu 1. na funkciju $F(h) = \int_0^1 f'(x_0+th)\,dt$)

7.4. DIFERENCIJABILNOST PARAMETARSKOG INTEGRALA

Teorema 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana i neprekidna zajedno sa svojim izvodom $\partial f/\partial x$ na skupu $[a,b]\times\Omega$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ zatvoren i izmerljiv skup. Tada je funkcija $F(x) = \int_\Omega f\,dy$ neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a,b]$ i važi* ***Lajbnicova formula***

$$\frac{d}{dx}\int_\Omega f(x,y)dy = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,. \tag{1}$$

Dokaz. Primetimo najpre da integral na desnoj strani u (1) postoji jer je $\partial f/\partial x \in \mathcal{C}([a,b]\times\Omega)$, a na osnovu teoreme 1., 7.3. on je i neprekidna funkcija na $[a,b]$, odn. $F(x) \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$. Da dokažemo jednakost (1), primetimo da primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_\Omega \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,dy = \\ = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta h, y)\,dy\,,$$

gde je $0<\theta<1$. Skup $[a,b]\times\Omega$ je kompakt, pa je prema Kantorovoj teoremi funkcija $\partial f/\partial x$ ravnomerno neprekidna na njemu. Stoga je

$$\left|\int_\Omega f'_x(x+\theta h, y)\,dy - \int_\Omega f'_x(x,y)\,dy\right| \le \\ \le \int_\Omega \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}; |h|\right)\,dy = \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}; |h|\right) m\Omega \to 0\,,\ h\to 0\,. \ \blacksquare$$

Primenom diferenciranja po parametru često je moguće izračunati vrednost određenog integrala koji ne možemo odrediti elementarnim metodama.

Primer 1. Odredimo vrednost integrala

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)\,dx\,,\ \alpha > 1\,.$$

Lako je proveriti da su uslovi teoreme 1. zadovoljeni. Stoga je

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\,dx}{\alpha^2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,,$$

odakle se sada lako dobija da je $F(\alpha) = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) + C$. Da odredimo konstantu C, primetimo da je

$$F(\alpha) = \pi\ln\alpha + \pi\ln 2 + o(1) \text{ kada } \alpha\to+\infty\,.$$

Kako je

$$\ln(\alpha^2-\sin^2 x) = 2\ln\alpha + o(1) \text{ kada } \alpha\to+\infty\,,$$

to je iz definicije funkcije $F(\alpha)$

$$F(\alpha) = \pi\ln\alpha + o(1) \text{ kada } \alpha\to+\infty\,.$$

Iz dobijenih jednakosti nalazimo $C = -\pi\ln 2$, odakle dobijamo

$$F(\alpha) = \pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\,.$$

Teorema 2. *Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna zajedno sa parcijalnim izvodom $\partial f/\partial x$ na pravougaoniku $\Delta = [a,b] \times [c,d]$. Ako su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ neprekidno diferencijabilne na $[a,b]$ sa vrednostima na $[c,d]$, tada je funkcija*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

neprekidno diferencijabilna funkcija na $[a,b]$ i važi

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,. \tag{2}$$

Dokaz. Uvedimo pomoćnu funkciju

$$\Phi(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)\,dy$$

koja je definisana za svako $u, v \in [c,d]$ i svako $x \in [a,b]$. Funkcija $f(x,y)$ je neprekidna po promenljvoj y, pa je na osnovu teoreme o izvodu integrala kao funkcije gornje odn. donje granice

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(x,v)\,,\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(x,u)\,.$$

Osim toga, funkcija $f(x,y)$ je neprekidna na skupu Δ zajedno sa parcijalnim izvodom $\partial f/\partial x$, pa je na osnovu prethodne teoreme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,.$$

Prva dva parcijalna izvoda neprekidne su funkcije promenljive (x,u,v) na osnovu teoreme o neprekidnosti složene funkcije. Poslednji parcijalni izvod neprekidna je funkcije promenljive (x,u,v) na osnovu teoreme 2., 7.3. Stoga je funkcija $\Phi(x,u,v)$ neprekidno diferencijabilna. Sada se formula (2) dobija neposredno diferenciranjem složene funkcije $F(x) = \Phi(x,\varphi(x),\psi(x))$. ■

Zadaci za vežbanje

1. Naći izvode sledećih funkcija:

$$a)\, F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha)\,dx\,, \quad b)\, F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy\,.$$

2. Neka je $F(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \sin(x^2+2^\alpha)\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokazati da je $F \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ i naći F'.

3. Neka je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ i neka je

$$F(t) = \int_{\Omega_t} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

gde je $\Omega_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : t^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4t^2\}$, $t > 0$. Naći $F'(t)$. (Uputstvo: preći na sferne koordinate)

4. Neka je

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{za } 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le 1\,, \\ \pi/2, & \text{za } x = 0\,. \end{cases}$$

Neposredno utvrditi da Lajbnicova formula ne važi za integral $\int_0^1 f(x,y)\,dx$ u tački $y = 0$.

5. Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$. Za $h \in (0,(b-a)/2)$ definišimo funkciju g_h koja je na segmentu $[a+h, b-h]$ definisana formulom

$$g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+u)\,du\,.$$

a) Dokazati da $g_h(x) \rightrightarrows f(x)$ na svakom segmentu $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

b) Dokazati da je funkcija $g_h(x)$ ne samo neprekidna, već i diferencijabilna.

6. Naći $F''(x)$, ako je

$$a)\, F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|\,dy\,,$$

$$b)\, F(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h dy \int\limits_0^h f(x+y+z)\,dz,\ h > 0\,,$$

gde je f neprekidna funkcija.

7. Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\alpha \cos x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

za svako $0 \le \alpha \le 1$, a zatim izračunati $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. (Rezultat: $\pi^2/8$)

8. Dokazati da funkcije

$$a)\, y = x^n \int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta) \sin^{2n}\theta\, d\theta\,, \quad b)\, y = \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta\,,$$

zadovoljavaju jednačinu Besela*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)u = 0\,.$$

9. Naći izvode potpunih eliptičkih integrala

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,\ \ F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},\ \ 0 < k < 1\,,$$

i izraziti ih preko funkcija $E(k)$ i $F(k)$. Ako je $\widetilde{E}(k) := E(\widetilde{k})$, $\widetilde{K}(k) := K(\widetilde{k})$, $\widetilde{k} := \sqrt{1-k^2}$, dokazati da je

a) $d(E\widetilde{K} + \widetilde{E}K - K\widetilde{K})/dk = 0$;

b) $E\widetilde{K} + \widetilde{E}K - K\widetilde{K} = \pi/2$.

(Rezultat: $dE/dk = (E-K)/k$, $dK/dk = E/k(1-k^2) - K/k$)

10. Ako je funkcija φ neprekidna zajedno sa svojim izvodom na segmentu $[0,a]$, odrediti izvod funkcije

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}}\,,$$

gde je $0 < \alpha < a$.

11. Primenom diferenciranja po parametru, izračunati sledeće integrale:

$$a) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx \quad b) \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\frac{dx}{\cos x}\ (|a| < 1)$$

$$c) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\, dx \qquad d) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$$

* Bessel F. (1784-1846)-nemački matematičar

(Rezultat: a) $2\pi\ln|a|$ za $|a|>1$, 0, za $|a|\le 1$ b) $\pi\arcsin a$ c) $\pi/2 sgn\, a\ln(1+|a|)$ za svako a d) $\pi\ln(|a|+|b|)/2$ za svako a,b za koje je $a^2+b^2\ne 0$)

12. Dokazati jednakost

$$\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2}\cdots\int_a^{t_1} f(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt\,,$$

gde je $f(t)$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ i $a\le x\le b$. (Uputstvo: dokaz izvesti indukcijom)

13. Primenom integracije pod znakom integrala, izračunati sledeće integrale:

$$a)\int_o^{\pi/2}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\frac{dx}{\sin x},\ a>b>0\quad b)\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,\ a,b>0$$

$$c)\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,\ a,b>0\quad d)\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx,\ a,b>0$$

14. Dokazati da je

$$\int\limits_0^x \varphi'(t_{n-1})\,dt_{n-1}\int\limits_a^{t_{n-1}}\varphi'(t_{n-2})\,dt_{n-2}\cdots\int\limits_a^{t_1} f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x[\varphi(x)-\varphi(t)]^{n-1}f(t)\,dt\,,$$

gde je f neprekidna, a φ neprekidno diferencijabilna funkcija na segmentu $[a,b]$.

15. Polazeći od formule

$$\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\int\limits_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\,,$$

izračunati integral:

$$\int\limits_0^1\frac{\mathrm{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

16. Neka su funkcije φ i ψ neprekidno diferencijabilne na segmentu $[a,b]$, pri čemu je $\varphi(x)\le\psi(x)$. Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna zajedno sa parcijalnim izvodom $\partial f/\partial x$ na skupu tačaka $H=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$, dokazati da je tada funkcija $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\,dy$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ (u smislu produženja na rubu), pri čemu važi (2).

7.5. RAVNOMERNA KONVERGENCIJA NESVOJSTVENIH INTEGRALA

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ izmerljiv skup, $E \subset \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in \overline{\Omega}$. Označimo sa $K_\delta = K(y_0, \delta)$ i razmotrimo integral

$$F(x) = \int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dy \tag{1}$$

sa jedinstvenom osobenom tačkom y_0. Funkcija f je dakle neograničena u okolini K_δ tačke y_0 za svako $x \in E$, ali je ograničena na skupu $\Omega \setminus K_\delta$ za svako $\delta > 0$ i svako $x \in E$.

Definicija 1. *Integral* (1) *je* ***ravnomerno konvergentan na skupu*** *E ako je on konvergentan za svako $x \in E$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in E$ i svako δ, $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ važi nejednakost*

$$\left| \int_{\Omega \cap K_\delta} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Da pojasnimo pojam ravnomerne konvergencije nesvojstvenog integrala, razmotrimo svojstveni integral

$$F_\delta(x) = \int\limits_{\Omega \setminus K_\delta} f(x,y)\,dy\,.$$

Nejednakost (2) sada možemo napisati u obliku

$$\left| \int_{\Omega \cap K_\delta} f\,dy \right| = \left| \int_{\Omega} f\,dy - \int_{\Omega \setminus K_\delta} f\,dy \right| = |F(x) - F_\delta(x)| < \varepsilon\,.$$

Očigledno da je ravnomerna konvergencija nesvojstvenog integrala (1) ekvivalentna ravnomernoj konvergenciji funkcije $F_\delta(x)$ na skupu E ka funkciji $F(x)$ (dakle samom nesvojstvenom integralu !) kada $\delta \to 0$. Integral (1) je ravnomerno konvergentan na E, ako

$$\int\limits_{\Omega \setminus K_\delta} f(x,y)\,dy \overset{E}{\rightrightarrows} \int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dy\,,\ \delta \to 0\,.$$

Stoga je za ravnomernu konvergenciju nesvojstvenog integrala (1) potrebno i dovoljno da je

$$\lim_{\delta\to 0+}\sup_{x\in E}\left|\int_{\Omega\cap K_\delta} f(x,y)\,dy\right| = 0\,.$$

Sada iz Košijeve teoreme za ravnomernu konvergenciju familije funkcija neposredno proizilazi

Teorema 1. (Koši) *Da bi nesvojstveni integral* (1) *ravnomerno konvergirao na skupu E, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako δ' i δ'', $0 < \delta' < \delta'' < \delta_\varepsilon$, i svako $x \in E$ važi nejednakost*

$$\left|\int_{\Omega\cap(K_{\delta''}\setminus K_{\delta'})} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon\,.$$

Primer 1. Integral

$$F(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$$

postoji za svako $\alpha > 0$. Ispitajmo ravnomernu konvergenciju ovog integrala. Za $\alpha \geq 1$ podintegralna funkcija $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}$ je neprekidna, pa posmatrani integral nema osobenih tačaka. Za $0 < \alpha < 1$ tačka $x = 0$ je jedina osobena tačka. Za tu tačku integral u (2) je

$$\left|\int_{[0,1]\cap K_\delta} x^{\alpha-1}\,dx\right| = \left|\int_0^\delta x^{\alpha-1}\,dx\right| = \frac{\delta^\alpha}{\alpha}\,.$$

Kako je za svako fiksirano $\delta > 0$ $\lim_{\alpha\to 0}\delta^\alpha/\alpha = +\infty$, $\alpha > 0$, očigledno da za dato $\varepsilon > 0$ nije moguće odrediti $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $\delta < \delta_\varepsilon$ i svako $\alpha > 0$ važi (2). Zadati integral je dakle neravnomerno konvergentan za $\alpha > 0$. Isti zaključak važi i za $\alpha \in (0, a_0)$, $a_0 > 0$.

Međutim, na intervalu $a_0 \leq \alpha < +\infty$, gde je $a_0 > 0$, integral je ravnomerno konvergentan, jer je

$$\int_{[0,1]\cap K_\delta} x^{\alpha-1}\,dx = \int_0^\delta x^{\alpha-1}\,dx \leq \int_0^\delta x^{a_0-1}\,dx = \frac{\delta^{a_0}}{a_0} < \varepsilon\,,$$

za svako $\delta < (a_0\varepsilon)^{1/a_0}$.

Jedan od važnijih kriterijuma za ravnomernu konvergenciju nesvojstvenog integrala daje sledeća

Teorema 2. (Vajerštras) *Neka je* $y_0 \in \overline{\Omega}$ *jedina osobena tačka nesvojstvenog integrala* (1) *za svako* $x \in E$. *Ako postoji funkcija* $\varphi(y)$ *tako da je* $|f(x,y)| \leq \varphi(y)$ *za svako* $(x,y) \in E \times \Omega$ *i ako je nesvojstveni integral*

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\,dy \tag{3}$$

konvergentan, tada je integral (1) *ravnomerno konvergentan na* E.

Dokaz. Kako je integral (3) konvergentan, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako δ, $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, važi $\int_{\Omega \cap K_\delta} \varphi(y)\,dy < \varepsilon$. No onda je

$$\left| \int_{\Omega \cap K_\delta} f(x,y)\,dy \right| \leq \int_{\Omega \cap K_\delta} \varphi(y)\,dy < \varepsilon$$

za svako $x \in E$, čime je teorema dokazana. ■

Ravnomerna konvergencija nesvojstvenog integrala u prethodnom primeru neposredno sledi na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma. Zaista, kako je $x^{\alpha-1} \leq x^{a_0-1}$ za svako $x \in [0,1]$ i $\alpha \geq a_0 > 0$, a integral $\int_0^1 x^{a_0-1}\,dx$ konvergira, to integral u primeru 1. ravnomerno konvergira za svako $\alpha \geq a_0 > 0$.

Ravnomerna konvergencija nesvojstvenog integrala u odnosu na neograničenu oblast uvodi se analogno. Neka je

$$F(x) = \int\limits_G f(x,y)\,dy \tag{4}$$

integral po neograničenoj oblasti, pri čemu je beskonačno daleka tačka jedina osobena tačka za svako $x \in E$.

Definicija 2. *Nesvojstveni integral* (4) *je ravnomerno konvergentan na skupu* E, *ako je on konvergentan za svako* $x \in E$ *i ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $R_\varepsilon > 0$ *tako da za svako* $x \in E$ *i svako* $R > R_\varepsilon$ *važi nejednakost*

$$\left| \int_{G \setminus K_R} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon\,, \tag{5}$$

gde je $K_R = K(O, R)$.

Lako je videti da integral (4) ravnomerno konvergira na skupu E onda i samo onda ako

$$F_R(x) = \int\limits_{G\cap K_R} f(x,y)\,dy \overset{E}{\rightrightarrows} F(x)\,,\ R \to +\infty\,.$$

Primer 2. Ispitajmo ravnomernu konvergenciju integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx\,,\ y > 0\,.$$

Lako je proveriti da je zadati integral konvergentan za svako $y > 0$. Kako je

$$\int\limits_{[0,+\infty)\setminus K_R} e^{-xy}\,dx = \int\limits_R^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{e^{-Ry}}{y} \to +\infty\,,\ \text{kada}\, y \to 0+\,,$$

očigledno posmatrani intgral konvergira neravnomerno na $(0, +\infty)$. Na skupu $\{y \in \mathbb{R} :\ y \geq y_0 > 0\}$ konvergira ravnomerno, što neposredno sledi na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma. Zaista, $e^{-xy} \leq e^{-xy_0}$ za svako $x \geq 0$ i svako $y \geq y_0$, integral

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx$$

je konvergentan, pa zadati integral ravnomerno konvergira za svako $y \geq y_0 > 0$.

Zadaci za vežbanje

1. Ispitati ravnomernu konvergenciju sledećih integrala:

$$a)\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}\,,\ b)\int\limits_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,,\ c)\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx\,,\ d)\int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-tx}\cos x\,dx\,.$$

2. Dokazati da je integral $\int_0^{+\infty} \sin ax/x\,dx$ ravnomerno konvergentan za $a \geq a_0 > 0$, a neravnomerno za $a > 0$.

3. Dokazati da je integral $\int_0^{+\infty} \sin ax \cos x/x\,dx$ ravnomerno konvergentan na svakom zatvorenom segmentu koji ne sadrži tačke $a = \pm 1$.

4. Dokazati ravnomernu konvergenciju integrala $\int_0^{+\infty} x \sin x^3 \sin tx\,dx$ na svakom konačnom segmentu.

5. Primenom Vajerštrasovog kriterijuma dokazati ravnomernu konvergenciju nesvojstvenih integrala na ukazanim skupovima

$$a)\ \int_0^1 x^{p-1} \ln^m x\,dx\,,\ m \subset \mathbb{N}\,,\ p \geq p_0 > 0\,,$$

$$b)\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx\,,\ y \leq y_0 < 2\,,$$

$$c)\ \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-1})\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} e^{-xy}\,dx\,,\ 0 < a < 1\,,\ y \geq 0\,.$$

6. **(Abelov kriterijum)** Neka je integral $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergentan na skupu Y, a funkcija $g(x,y)$ monotona po x i ograničena: $|g(x,y)| \leq L$ za svako $x \geq a$ i svako $y \in Y$. Dokazati da je integral $\int_0^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergentan na Y. (Uputstvo: koristiti Košijevu teoremu i drugu teoremu o srednjoj vrednosti u integralnom računu)

7. **(Dirihleov kriterijum)** Neka je integral $\int_a^A f(x,y)\,dx$ ravnomerno ograničen kao funkcija gornje granice za svako $y \in Y$. Ako je funkcija $g(x,y)$ monotono po x i ravnomerno konvergira nuli na Y, dokazati da integral $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ ravnomerno konvergira na Y.

8. Dokazati ravnomernu konvergenciju integrala

$$a)\ \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)\,dx\,, \qquad b)\ \int_a^{+\infty} e^{-x^2 y} f(x)\,dx\,,\ a \geq 0\,,$$

za svako $y \geq 0$ uz pretpostavku da je integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergentan.

9. Dokazati ravnomernu konvergenciju sledećih integrala na ukazanim skupovima:

$$a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^a}\,dx\,,\ 0 < a < 1 \text{ za svako } y \geq y_0 > 0\,,$$

$$b)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2 + \alpha^2}\,dx\,, \alpha, \beta > 0\,,\ \beta \geq \beta_0 > 0\,.$$

10. Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $[a,b)\times[c,d]$ gde je $b\in\overline{\mathbb{R}}$. Ako je integral $\int_a^b f(x,y)\,dx$ konvergentan za $y\in(c,d)$, a divergentan za $y=c$ ili $y=d$, tada on konvergira neravnomerno na svakom segmentu skupa (c,d). Dokazati. (Uputstvo: Koristiti Košijevu teoremu)

7.6. GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST NESVOJSTVENOG PARAMETARSKOG INTEGRALA

Teorema 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana na skupu $E\times\Omega$, gde je $E\subset\mathbb{R}^n$, a $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ izmerljiv skup, i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa E, a y_0 tačka nagomilavanja skupa Ω. Neka je osim toga funkcija $f(x,y)$ integrabilna na skupu $\Omega\setminus K_\delta(y_0)$ za svako $x\in E$ i svako $\delta>0$, pri čemu je y_0 jedina osobena tačka nesvojstvenog integrala*

$$F(x)=\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dy\,. \tag{1}$$

Ako funkcija $f(x,y)$ ravnomerno konvergira funkciji $\varphi(y)$ na skupu $\Omega\setminus K_\delta$ kada $x\to x_0$ za svako $\delta>0$, a integral (1) *ravnomerno konvergira na skupu E, tada je*

$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dy=\int\limits_{\Omega}\varphi(y)\,dy\,. \tag{2}$$

Dokaz. Neka je

$$F_\delta(x)=\int\limits_{\Omega\setminus K_\delta} f(x,y)\,dy\,.$$

Kako $f(x,y)\overset{\Omega\setminus K_\delta}{\rightrightarrows}\varphi(y)$ kada $x\to x_0$, to je $f\in\mathcal{R}(\Omega\setminus K_\delta)$ za svako $\delta>0$ prema teoremi 4., 7.1., a na osnovu teoreme 1., 7.2.

$$\lim_{x\to x_0}F_\delta(x)=\int\limits_{\Omega\setminus K_\delta}\varphi(y)\,dy\,.$$

Integral (1) je ravnomerno konvergentan na skupu E i stoga postoji

$$\lim_{\delta\to 0} F_\delta(x) = F(x)\,.$$

Sada su zadovoljeni svi uslovi teoreme o jednakosti ponovljenih graničnih vrednosti, pa je

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{\delta\to 0} F_\delta(x) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{x\to x_0} F_\delta(x)\,,$$

odnosno

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega\setminus K_\delta}\varphi(y)\,dy = \int_\Omega \varphi(y)\,dy\,. \ \blacksquare$$

Ravnomerna konvergencija funkcije $f(x,y)$ nije dovoljna da sa limesom uđemo pod znak nesvojstvenog integrala. Dokažimo to na sledećem primeru.

Primer 1. Neka je $Y=\{y\in\mathbb{R}:\ y>0\}$, a

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/y\,, & 0\le x\le y\,,\\ 0\,, & y<x\,.\end{cases}$$

Lako je proveriti da $f(x,y)\rightrightarrows 0$ na $0\le x<+\infty$ kada $y\to+\infty$. Kako je

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{dx}{y} = 1\,,$$

za svako $y\in Y$, očigledno je da (2) ne važi.

Kao neposrednu posledicu dokazane teoreme i Dinijeve teoreme imamo sledeće tvrđenje.

Posledica 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ nenegativna i neprekidna na skupu $[a,b)\times\Omega$, gde je Ω zatvoren i izmerljiv skup u $\mathbb{R}^m$. Ako funkcija $f(x,y)$ monotono rastući konvergira funkciji $\varphi(y)$ neprekidnoj na skupu Ω kada $x\to b$, i ako je integral $\int\varphi\,d\Omega$ konvergentan, tada je*

$$\lim_{x\to b}\int_\Omega f(x,y)\,dy = \int_\Omega \varphi(y)\,dy\,. \tag{3}$$

Dokaz. Na osnovu teoreme analogne Dinijevoj teoremi $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(y)$ na svakom kompaktu $K \subset \Omega$ kada $x \to b$. Kako je $0 \le f(x,y) \le \varphi(y)$ za svako $x \in [a,b)$, integral $\int f\,d\Omega$ je na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma ravnomerno konvergentan na $[a,b)$, pa prema teoremi 1. važi (3). ■

Teorema 2. *Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i ograničen, a $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ zatvoren i izmerljiv skup. Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $E \times \Omega$, osim u tačkama (x,y_0), gde je $x \in E$, a y_0 jedina osobena tačka nesvojstvenog integrala* (1) *za svako $x \in E$, i ako je integral* (1) *ravnomerno konvergentan na skupu E, tada je funkcija $F(x)$ neprekidna na tom skupu.*

Dokaz. Funkcija $f(x,y)$ je neprekidna na zatvorenom i ograničenom skupu $E \times (\Omega \setminus K_\delta)$ za svako $x \in E$ i svako $\delta > 0$. Funkcija

$$F_\delta(x) = \int f(x,y)\,d(\Omega \setminus K_\delta)$$

je neprekidna na skupu E za svako $\delta > 0$ po teoremi o neprekidnosti svojstvenog parametarskog integrala. Kako $F_\delta \rightrightarrows F(x)$ na skupu E kada $\delta \to 0+$, funkcija $F(x)$ je neprekidna na skupu E prema teoremi 4., 7.1. ■

Primer 2. Neka je integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergentan. Tada je integral $\int_0^{+\infty} e^{-kx} f(x)\,dx$ ravnomerno konvergentan na osnovu Abelovog kriterijuma za svako $k \ge 0$ (vid. zadatak 6., 7.5.). Funkcija $e^{-kx} f(x)$ je ravnomerno konvergentna funkciji $f(x)$ na segmentu $[0,A]$ kada $k \to +\infty$, pa je

$$\lim_{k\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Primer 3. Funkcija razmatrana u primeru 1., 7.5. je neprekidna na svakom segmentu $[a,b] \subset (0,+\infty)$, jer je funkcija $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}$ neprekidna na skupu $[0,1] \times [a,b]$ osim u tačkama $(0,\alpha)$, a integral $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ ravnomerno konvergira na $[a,b]$.

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da je funkcija

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\,dx\,,\ \alpha<1\,,$$

neprekidna na intervalu $(0,1)$.

2. Neka je

$$F(\alpha)=\int_0^{1}\frac{e^{-x}\,dx}{|x-\alpha|}\,,\ \alpha\in[0,1]\,.$$

Dokazati da je $F\in\mathcal{C}([0,1])$.

3. Dokazati da je funkcija

$$F(\alpha)=\int_0^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\sin\frac{a}{x}\,dx$$

neprekidna na intervalu $(-\infty,2)$.

4. Dokazati da je

$$a)\ \lim_{\alpha\to0+}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x^{\alpha}}=0\,,\qquad b)\ \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^{\alpha}}\,dx=1\,.$$

5. Dokazati da je

$$\lim_{\alpha\to0+}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

6. Znajući integral Fejera*

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2dz=\frac{\pi}{2}\,,$$

dokazati da je

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\,.$$

---

* Fejer L. (1880-1959)-mađarski matematičar

(Uputstvo: uvesti smenu $z = x/u$, a zatim definisati niz $f_n(x)$ koji ravnomerno konvergira funkciji $(\sin x/x)^2$)

7. Neka su f i g neprekidne funkcije na $(0, +\infty)$, pri čemu je $g(x) > 0$ za $x > 0$. Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na $(0, +\infty)$, naći a) $\lim_{t\to 0+} tI(t)$ b) $\lim_{t\to +\infty} tI(t)$ gde je

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{t + g(x)}\,,\ t > 0\,.$$

8. Dokazati da je funkcija

$$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos t}{1 - 2x\sin t + x^2}}\,dt\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

neprekidna za svako x i da $xI(x) \to I(0)$ kada $x \to +\infty$.

7.7. INTEGRABILNOST I DIFERENCIJABILNOST NESVOJSTVENOG PARAMETARSKOG INTEGRALA

Teorema 1. *Neka je E zatvoren i izmerljiv skup u $\mathbb{R}^n$, a Ω zatvoren i izmerljiv skup u $\mathbb{R}^m$ i neka je y_0 tačka nagomilavanja skupa Ω. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na skupu $E \times \Omega$, osim u tačkama (x, y_0), gde je $x \in E$, a y_0 je jedina osobena tačka nesvojstvenog integrala*

$$F(x) = \int_\Omega f(x, y)\,dy, \tag{1}$$

i ako je ovaj integral ravnomerno konvergentan na skupu E, tada je funkcija $F(x)$ integrabilna na skupu E i važi jednakost

$$\int_E dx \int_\Omega f(x, y)\,dy = \int_\Omega dy \int_E f(x, y)\,dx\,. \tag{2}$$

Dokaz. Funkcija $F(x)$ je na osnovu teoreme 2., 7.6. neprekidna na kompaktu E, pa integral $\int F\,dE$ postoji. Funkcija $F_\delta(x) \rightrightarrows F(x)$ na skupu E kada $\delta \to 0$, pa stoga

$$\eta_\delta := \sup_{x\in E} |F_\delta(x) - F(x)| \to 0\,,\ \text{kada}\ \delta \to 0\,.$$

Da dokažemo (2), dovoljno je dokazati da

$$\int_E F_\delta(x)\,dx \to \int_E F(x)\,dx\,,\ \delta \to 0 \tag{3}$$

jer odatle odmah sledi

$$\int_{\Omega\setminus K_\delta} dy \int_E f(x,y)\,dx = \int_E dx \int_{\Omega\setminus K_\delta} f(x,y)\,dy =$$
$$= \int_E F_\delta(x)\,dx \to \int_E F(x)\,dx = \int_E dx \int_\Omega f(x,y)\,dy\,,\ \delta \to 0\,,$$

čime je jednakost (2) dokazana. Da važi (3) neposredno sledi iz činjenice da

$$\left|\int_E F_\delta(x)\,dx - \int_E F(x)\,dx\right| \le \int_E |F_\delta(x) - F(x)|\,dx \le \eta_\delta mE \to 0$$

kada $\delta \to 0$. ∎

Neprekidnost funkcije $f(x,y)$ na skupu $E \times \Omega \setminus \{(x,y_0)\}$ u opštem slučaju nije dovoljna za jednakost (2) što pokazuje sledeći

Primer 1. Funkcija $f(x,y) = xy(2-xy)e^{-xy}$ je neprekidna na skupu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le +\infty\,,\ 0 \le y \le 1\}$. Lako je proveriti da je

$$0 = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} xy(2-xy)e^{-xy}\,dx \neq \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 xy(2-xy)e^{-xy}\,dy = 1\,.$$

Iz prethodne teoreme i Dinijeve teoreme imamo sledeću posledicu.

Posledica 1. *Neka je funkcija $f(x,y)$ nenegativna i neprekidna na skupu $E \times [a,b)$, gde je $E \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i izmerljiv skup. Ako je funkcija*

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$$

neprekidna na skupu E, tada važi (2)*, gde je* $\Omega = [a, b)$.

Dokaz. Kako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na skupu $E \times [a, \delta]$ za svako $a \leq \delta < b$, to je funkcija

$$F_\delta(x) = \int_a^\delta f(x, y)\, dy$$

neprekidna na skupu E prema teoremi 1., 7.3.. Zbog nenegativnosti funkcije f, funkcija $F_\delta(x)$ je monotono rastuća funkcija po δ za svako $x \in E$. Na osnovu Dinijeve teoreme $F_\delta(x) \rightrightarrows F(x)$ na skupu E kada $\delta \to b$, odakle na osnovu teoreme 1. sledi jednakost (2). ■

U dosadašnjim razmatranjima funkcije

$$F(x) = \int_\Omega f(x, y)\, dy\,,\ x \in E\,,$$

smatrali smo da je $y_0 \in \overline{\Omega}$ jedina osobena tačka nesvojstvenog integrala za svako $x \in E$, gde je E zatvoren i ograničen skup. Videli smo da iz $f \in \mathcal{C}(E \times \Omega) \setminus \{(x, y_0)\}$ sledi $F \in \mathcal{R}(E)$. Međutim, ako je $f \in \mathcal{C}(E \times \Omega)$ osim u tačkama (x, y_0) i (x_0, y), gde $x_0 \in \overline{E}$ može biti i beskonačno daleka tačka, teorema 1. u opštem slučaju ne mora da važi, što dokazuje sledeći

Primer 2. Integral

$$F(y) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{1}{y^2 + 1}$$

ravnomerno konvergira za svako $y \in \mathbb{R}$. Funkcija $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ je neprekidna na skupu $[1, +\infty) \times [1, +\infty)$, ali je

$$-\frac{\pi}{4} = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \neq \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Teorema 2. *Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na skupu $E \times F$, gde su $E \subset \mathbb{R}_x^n$ i $F \subset \mathbb{R}_y^m$ zatvorene i neograničene oblasti. Ako su integrali*

$$\Psi(y) = \int\limits_E f(x,y)\,dx \quad , \quad \Phi(x) = \int\limits_F f(x,y)\,dy \tag{4}$$

ravnomerno konvergentni na svakom izmerljivom podskupu skupa F odn. E respektivno i ako postoji bar jedan od integrala

$$\int\limits_F dy \int\limits_E |f|\,dx \quad , \quad \int\limits_E dx \int\limits_F |f| dy\,, \tag{5}$$

tada postoje ponovljeni integrali i jednaki su.

Dokaz. Određenosti radi, pretpostavimo da postoji drugi integral u (5). Kako je integral $\int f\,dE$ ravnomerno konvergentan na svakom izmerljivom podskupu skupa F, to je prema teoremi koja je analogna teoremi 1. za slučaj neograničene oblasti

$$\int\limits_{F\cap K_R} dy \int\limits_E f\,dx = \int\limits_E dx \int\limits_{F\cap K_R} f\,dy$$

za svako $R > 0$, gde je $K_R = K(O,R)$. Teorema će biti dokazana, ako dokažemo da se sa limesom može ući pod integral na desnoj strani poslednje jednakosti. Zaista, u tom slučaju je

$$\begin{aligned}\int\limits_F dy \int\limits_E f\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{F\cap K_R} dy \int\limits_E f\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_E dx \int\limits_{F\cap K_R} f\,dy = \\ &= \int\limits_E dx \left(\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{F\cap K_R} f\,dy \right) = \int\limits_E dx \int\limits_F f\,dy\,.\end{aligned}$$

Da bismo opravdali ulazak granične vrednosti pod integral treba dokazati da su zadovoljeni uslovi teoreme 1., 7.6. Primetimo najpre da je zbog neprekidnosti funkcije f na skupu $E \times F$ integral

$$\Phi_R(x) = \int\limits_{F\cap K_R} f\,dy$$

određen, a funkcija $\Phi_R(x) \rightrightarrows \Phi(x)$ na svakom izmerljivom potskupu skupa E kada $R \to +\infty$. Osim toga, integral

$$\int_E dx \int_{F\cap K_R} f\, dy$$

je ravnomerno konvergentan za svako $R > 0$. Zaista, kako je

$$|\Phi_R(x)| \le \int_{F\cap K_R} |f|\, dy \le \int_F |f|\, dy\,,$$

a funkcija

$$G(x) := \int_F |f|\, dy$$

je integrabilna na skupu E prema pretpostavci, to je prema Vajerštrasovom kriterijumu integral

$$\int_E dx \int_{F\cap K_R} f\, dy$$

ravnomerno konvergentan u odnosu na parametar R. Stoga je

$$\lim_{R\to+\infty} \int_E \Phi_R(x)\, dx = \int_E \Phi(x)\, dx\,,$$

čime je teorema dokazana. ■

U slučaju nenegativne funkcije prethodna teorema dobija nešto jednostavniju formulaciju. Naime, važi

Posledica 2. *Neka su za nenegativnu neprekidnu funkciju f na $E\times F$ integrali* (4) *neprekidne funkcije na skupovima F i E respektivno. Ako postoji bar jedan od ponovljenih integrala funkcije f, tada postoji i drugi ponovljeni integral i ponovljeni integrali su jednaki.*

Dokaz. Kako je funkcija f nenegativna i neprekidna na $E \times F$, a funkcije $F(y)$ i $\Phi(x)$ su neprekidne na skupovima F i E respektivno, to prema Dinijevoj teoremi integrali (4) ravnomerno konvergiraju na svakom izmerljivom potskupu skupa F odn. E. S obzirom na to da je $f \ge 0$ i da postoji jedan od ponovljenih integrala, uslovi prethodne teoreme su zadovoljeni, pa su ponovljeni integrali jednaki. ■

Primer 3. Odredimo vrednosti Frenelovih integrala

$$\Phi_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx \qquad \text{i} \qquad \Phi_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \, .$$

U tom cilju uvedimo smenu $x^2 = t$, posle čega dobijamo

$$\Phi_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt \, ,$$

$$\Phi_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \, dt \, .$$

Koristeći Ojler-Puasonov integral

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du \, ,$$

Frenelov integral dobija oblik

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin t \, dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du \, .$$

Promenom redosleda integracije dobijamo vrednost Frenelovog integrala:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, .$$

Kako je provera uslova za promenu redosleda integracije dosta teška i zahteva glomazne transformacije i ocene, uvedimo u integral faktor konvergencije e^{-kx}, $k > 0$, čime se problem promene redosleda integracije znatno pojednostavljuje. Zaista, u tom slučaju je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(k+u^2)^2}\,.$$

Sada je na osnovu teoreme 2. moguće ustanoviti opravdanost promene redosleda integracije. Ostaje da se dokaže mogućnost ulaska sa limesom pod znak integrala kada $k \to 0+$, posle čega konačno dobijamo da je

$$\Phi_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Na isti način se dokazuje da je $\Phi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}\,$.

Teorema 3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ zatvoren i izmerljiv skup, $y_0 \in \overline{\Omega}$, i neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna zajedno sa parcijalnim izvodom $\partial f/\partial x$ na skupu $[a,b]\times\overline{\Omega}$ osim u tačkama (x,y_0), $x \in [a,b]$, u okolini kojih je funkcija f neograničena. Ako je integral*

$$F(x) = \int_\Omega f(x,y)\, dy \tag{5}$$

konvergentan bar u jednoj tački segmenta $[a,b]$, a integral

$$\Phi(x) = \int_\Omega f'_x(x,y)\, dy \tag{6}$$

ravnomerno konvergentan na $[a,b]$, tada je integral (5) *ravnomerno konvergentan na $[a,b]$. Funkcija $F(x)$ je neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$ i važi jednakost $F'(x) = \Phi(x)$.*

Dokaz. Označimo kao i do sada sa $F_\delta(x)$ integral $\int f\, d(\Omega \setminus K_\delta)$, gde je $K_\delta = K(y_0,\delta)$. Funkcija $F_\delta(x)$ prema pretpostavci konvergira bar u jednoj tački segmenta $[a,b]$ kada $\delta \to 0$. Funkcija f je neprekidna na $[a,b]\times(\Omega\setminus K_\delta)$ zajedno sa parcijalnim izvodom $\partial f/\partial x$, pa je na osnovu teoreme o diferenciranju svojstvenog parametarskog integrala

$$\frac{d}{dx}F_\delta(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{\Omega\setminus K_\delta} f(x,y)\,dy=\int\limits_{\Omega\setminus K_\delta}\frac{\partial f}{\partial x}\,dy=\Phi_\delta(x)\,.$$

Na osnovu teoreme 1., 7.4. funkcija $F_\delta(x)$ je neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a,b]$ za svako $\delta>0$, pri čemu $\lim_{\delta\to 0}F_\delta(x)$ postoji bar u jednoj tački segmenta $[a,b]$. Funkcija $\Phi_\delta(x)=\int f'_x\,d(\Omega\setminus K_\delta)$ ravnomerno konvergira funkciji $\Phi(x)$ na $[a,b]$ kada $\delta\to 0+$, odn.

$$\frac{d}{dx}F_\delta(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\Phi(x)\quad\text{kada}\quad \delta\to 0\,.$$

Na osnovu teoreme 5., 7.1. familija $F_\delta(x)$, odn. integral (5) ravnomerno konvergira na $[a,b]$, funkcija $F(x)$ je neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$ i važi jednakost

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dy=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,.\ \blacksquare$$

Funkcionalna svojstva nesvojstvenog parametarskog integrala izložena su za slučaj neograničenih funkcija. Potpuno analogno se dokazuje da ta svojstva važe i u slučaju integrala nesvojstvenih u odnosu na oblast integracije.

Primer 4. Ispitajmo diferencijabilnost funkcije razmatrane u primeru 1., 7.5. Za to je neophodno ispitati ravnomernu konvergenciju integrala

$$F'(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}x^{\alpha-1}\,dx=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\ln x\,dx\,. \tag{7}$$

Kako je $\lim_{x\to 0+}x^\lambda\ln x=0$ za $\lambda>0$, funkcija $x^\lambda\ln x$ se može dodefinisati do neprekidnosti na $[0,1]$, pa postoji $C>0$ tako da je

$|x^\lambda \ln x| \le C$ za svako $x \in [0,1]$. Za $0 < \lambda < a_1$ i $0 \le x \le 1$ važi sledeća ocena

$$|x^{\alpha-1} \ln x| = |x^{\alpha-\lambda-1} x^\lambda \ln x| \le C x^{\alpha-\lambda-1} \le C x^{a_1-\lambda-1}$$

za svako $\alpha \in [a_1, a_2]$. Integral

$$\int_0^1 C x^{a_1-\lambda-1}\, dx$$

je konvergentan, pa je prema Vajerštrasovom kriterijumu integral

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \ln x\, dx$$

ravnomerno konvergentan za $0 < a_1 \le \alpha \le a_2$. Funkcija $f'_\alpha(x,\alpha) = x^{\alpha-1}\ln x$ je neprekidna na $[0,1] \times [a_1, a_2]$ osim u tačkama $(0,\alpha)$, pa je funkcija $F(\alpha)$ diferencijabilna na $[a_1, a_2]$ i važi (7).

Primer 5. Izračunajmo sada Dirihleov integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Pođimo od integrala

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx\,.$$

Diferenciranjem ovog integrala po parametru dobijamo divergentan integral $\int_0^{+\infty} \cos \alpha x\, dx$. Stoga u poslednjem integralu uvedimo faktor konvergencije e^{-kx}, $k > 0$, i pođimo od integrala

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-kx}\, dx\,.$$

Podintegralna funkcija i njen izvod po α su neprekidne funkcije po x i α za svako $x \geq 0$ i $\alpha \geq 0$. Sam integral je konvergentan na osnovu Abelovog kriterijuma, a izvodni integral ravnomerno konvergira za svako α na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, pa je

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2} .$$

Integracijom po α dobijamo

$$J = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} .$$

Konstanta koja se javlja u poslednjoj jednakosti jednaka je nuli, što se neposredno dobija za $\alpha = 0$. Dobijena formula izvedena je uz pretpostavku da je $k > 0$. Međutim, za fiksirano α integral J pretstavlja neprekidnu funkciju parametra k za $k \geq 0$. Ovo neposredno sledi iz činjenice da integral J ravnomerno konvergira po k za $k \geq 0$. Time smo dokazali da je

$$I = \lim_{k \to 0+} J$$

Stoga je za $\alpha > 0$

$$I = \lim_{k \to 0+} J = \lim_{k \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \frac{\pi}{2} ,$$

odakle specijalno (za $\alpha = 1$) dobijamo vrednost Dirihleovog integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Zadaci za vežbanje

1. Polazeći od jednakosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{+\infty} \sin x \, dx \int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dy ,$$

izračunati Dirihleov integral.

2. Odrediti sume sledećih redova:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{2n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

(Rezultat: a) $\pi/2-\pi(\ln 2\pi)/2$, b) $\pi/2-\pi(\ln\pi)/2$; uputstvo; iskoristiti vrednost Dirihleovog integrala, a zatim za određivanje vrednosti sume dobijenog reda primeniti Stirlingovu formulu)

3. Koristeći formulu $\int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\, dy = (1+x^2)^{-1}$, izračunati integral Laplasa*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\, dx\,,$$

a zatim koristeći dobijeni rezultat izračunati sledeće integrale

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx\,, \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\, dx\,.$$

(Rezultat: $\pi e^{-|\alpha|}/2$ a) $\pi(1-e^{-2})/4$ b) $\pi(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}/4$)

4. Izračunati Puasonov integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,,$$

a zatim koristeći dobijeni rezultat dokazati da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

(Uputstvo: uvesti smenu $x = ut$, a zatim dobijeni integral pomnožen sa e^{-u^2} integraliti; za drugi integral iskoristiti parcijalnu integraciju)

5. Koristeći Puasonov integral, dokazati da je

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,,$$

$$b)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2xy\, dx = e^{-y^2}\int_0^{y} e^{t^2}\, dt\,.$$

* Laplace P.S. (1749-1827)-francuski matematičar

6. Izračunati

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^2 \beta x}{x}\, dx$$

za $\alpha > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. (Rezultat: $\frac{1}{4} \ln \frac{4\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2}$)

7. Uz obrazloženje postupka dokazati da funkcija

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\, dx$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} = -\frac{\pi}{2} + \beta^2 I\,,$$

a zatim koristeći dobijeni rezultat odrediti vrednost polaznog integrala. (Rezultat: $\pi sgn\alpha[1 - \mathrm{sh}|\alpha\beta| - \beta^2 \mathrm{ch}|\alpha\beta|]/2$)

8. Izračunati

$$I(\alpha) = \int_{1/\alpha}^{+\infty} \frac{\ln(\alpha x + \sqrt{\alpha^2 x^2 - 1})}{x(1+x^2)}\, dx\,, \quad \alpha > 0\,.$$

(Rezultat: $(arcsh\alpha)^2/2$)

9. Koristeći Frenelov integral izračunati

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x\sqrt{x}}\, dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(Rezultat: $sgn\alpha\sqrt{2\pi|\alpha|}$)

10. Data je funkcija

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} e^{at + \frac{x}{t}}}\, dt \quad a > 0\,.$$

Dokazati da je

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u} e^{\frac{a}{u} + xu}}\, du\,,$$

a zatim koristeći dobijeni rezultat izračunati $I(a)$.

11. Data je funkcija

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \quad 0 \le \alpha < 1\,.$$

Ispitati neprekidnost funkcije I, a zatim korišćenjem diferenciranja po parametru izračunati vrednost datog integrala.

12. Izračunati vrednost integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$$

za one vrednosti parametara a i b za koje je taj integral konvergentan. (Rezultat: $\sqrt{\pi}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$)

13. Polazeći od jednakosti

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2x}\,,$$

dokazati da je

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{1}{x^{2n-1}}\,.$$

Koristeći dobijeni rezultat i Puasonov integral, dokazati formulu Valisa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.$$

14. Diferenciranjem po parametru izračunati sledeće integrale

$$a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx}\,dx\,, \quad b)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,\frac{\sin\beta x}{x} e^{-kx}\,dx\,.$$

α, β, $k > 0$. (Rezultat: a) $\ln(1+\alpha^2/k^2)/2$ b) diferencirati integral po α, a zatim koristiti Dirihleov integral)

15. Izračunati integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} \cos t\,dt\,.$$

(Uputstvo: uvesti parametar u eksponentu; rezultat: $\ln\sqrt{2}$)

16. Izračunati integrale:

$$a)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx\,,\quad b)\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)}\,dx\,,\quad c)\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2}\,dx\,.$$

$a,b,r>0$. (Rezultat: a) $\pi\ln(ab+1)/b$ b) $\pi\ln(1+r)/2$ c) $\pi[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b\ln b]/2$)

17. Dokazati da je

$$a)\int_0^{\pi/2}\frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2\,,\qquad b)\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

(Uputstvo: a) iskoristiti zadatak 8. b) stavljajući $r=1$ i uvesti smenu $x=\operatorname{tg} t$ b) dobija se iz prethodnog parcijalnom integracijom)

18. Dokazati da integral

$$J=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\,dy$$

zadovoljava jednačinu $dJ/dc=-2J$. Koristeći dobijeni rezultat izračunati integral

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\,dx\,.$$

(Rezultat: $\sqrt{\pi/a}e^{-2\sqrt{ab}}/2$)

19. Dokazati da je za $k>0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx=\int_k^{+\infty}\frac{\sin(x-k)}{x}\,dx\,.$$

(Uputstvo: dokazati da oba integrala zadovoljavaju istu diferencijalnu jednačinu drugog reda i teže nuli kada $k\to+\infty$)

20. Izračunati integral

$$J=\int_0^{+\infty}\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)e^{\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\,dx\,.$$

(Uputstvo: dokazati da je $J'' + 4J' + 4J = 0$: $J = \sqrt{\pi}e^{-2\alpha}(\alpha + 1/4)$)

21. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+|\alpha|x^2) + \beta x^2}{x^4}\, dx$$

za one vrednosti parametra α i β za koje konvergira. (Rezultat: integral konvergira za $\beta = -|\alpha|$; $-\pi|\alpha|\sqrt{|\alpha|}$)

7.8. OJLEROVI INTEGRALI

7.8.1. BETA FUNKCIJA

Funkciju

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \tag{1}$$

nazivamo **beta funkcijom** ili **Ojlerovim integralom drugog reda** (kako je to predložio Ležandr*). Integral (1) može imati samo dve osobene tačke: $x = 0$ i $x = 1$. Odredimo najpre oblast definisanosti beta funkcije. U tom cilju razložimo integral (1) na integrale

$$B_1(a,b) = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \quad \text{i} \quad B_2(a,b) = \int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx\,.$$

Prvi od ovih integrala ima osobenu tačku $x = 0$ i konvergentan je za $a > 0$ i svako b. Da to dokažemo, neka je $M_b = \sup_{0\le x\le 1/2}(1-x)^{b-1}$, a $m_b = \inf_{0\le x\le 1/2}(1-x)^{b-1}$. Kako je

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \le M_b \int_0^{1/2} x^{a-1}\, dx < +\infty$$

---

* Legendre A. (1752-1832)-francuski matematičar

za $a > 0$ i svako b, a

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \geq m_b \int_0^{1/2} x^{a-1}\,dx = +\infty$$

za $a \leq 0$ i svako b, to je funkcija $B_1(a,b)$ definisana za $a > 0$ i svako b. Slično se dokazuje da je funkcija $B_2(a,b)$ definisana za $b > 0$ i svako a, pa je beta funkcija definisana na skupu $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0,\ b > 0\}$. Podintegralna funkcija je neprekidna na skupu $[0,1] \times (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, osim u tačkama $(0,a,b)$ i $(1,a,b)$. Da ispitamo neprekidnost funkcije $B(a,b)$, ispitajmo oblast ravnomerne konvergencije integrala B_1 i B_2. Kako je

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \geq m_{b,\delta} \int_0^{\delta} x^{a-1}\,dx = m_{b,\delta}\frac{\delta^a}{a}\,,$$

gde je $m_{b,\delta} = inf_{0\leq x\leq\delta}(1-x)^{b-1}$, a $\delta^a/a \to +\infty$ kada $a \to 0+$ za fiksirano $\delta \in (0,1/2]$, integral B_1 ne može ravnomerno konvergirati u odnosu na a na skupu $(0,+\infty)$. Ako je $a \geq a_1 > 0$, tada je

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \leq M_{b,\delta} \int_0^{\delta} x^{a-1}\,dx = M_{b,\delta}\frac{\delta^a}{a} \leq M_{b,\delta}\frac{\delta^{a_1}}{a_1}\,,$$

pa je za svako $\varepsilon > 0$ uvek moguće naći $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako δ, $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, i za svako $b > 0$ važi

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx < \varepsilon\,.$$

Time smo dokazali da funkcija $B_1(a,b)$ ravnomerno konvergira za $a \geq a_1 > 0$ i svako b. Analogno se dokazuje da je integral B_2 ravnomerno konvergentan za $b \geq b_1 > 0$ i svako a. Stoga integral (1) ravnomerno konvergira na skupu $\Delta = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq a_1 > 0\,,\ b \geq b_1 > 0\}$, pa je na osnovu teoreme 2., 7.6. $B(a,b) \in \mathcal{C}(\Delta)$.

Da ispitamo diferencijabilnost beta funkcije, razmotrimo integral

$$\int_0^{1/2} \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln x\,dx\,. \tag{2}$$

Na osnovu primera 4., 7.7. integral $\int_0^{1/2} x^{a-1}\ln x\,dx$ je ravnomerno konvergentan za svako $a \geq a_1 > 0$. Kako je funkcija $(1-x)^{b-1}$ monotona i ograničena na $[0,1/2]$ za svako $b > 0$, integral (2) je na osnovu Abelovog kriterijuma ravnomerno konvergentan za $a \geq a_1 > 0$ i svako $b > 0$. Slično se dokazuje da je integral

$$\int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(1-x)\,dx$$

ravnomerno konvergentan za $b \geq b_1 > 0$ i svako $a > 0$. Stoga je beta funkcija diferencijabilna na skupu Δ. Može se lako dokazati da ona ima neprekidne izvode ma kog reda na skupu Δ, pri čemu je

$$\frac{\partial^{k+l}B}{\partial a^k \partial b^l} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln^k x \ln^l(1-x)\,dx\,,$$

$k, l = 0, 1, \ldots$.

Ispitajmo sada neka osnovna svojstva beta funkcije. Primetimo najpre da je beta funkcija simetrična. Zaista, uvodeći u (1) smenu promenljive $x = 1-t$, odmah dobijamo da je

$$B(a,b) = B(b,a)\,. \tag{3}$$

Da izvedemo rekurentnu formulu za izračunavanje beta funkcije, primenimo parcijalnu integraciju, posle čega dobijamo

$$\begin{aligned}
B(a,b) &= \frac{1}{a}\int_0^1 (1-x)^{b-1}d(x^a) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 (1-x)^{b-2}x^a\,dx = \\
&= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(x-1+1)(1-x)^{b-2}\,dx = \\
&= \frac{b-1}{a}B(a,b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,b)\,,
\end{aligned}$$

odakle sledi rekurentna formula za izračunavanje beta funkcije

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)\,, \tag{4}$$

koja važi za $b > 1$.

Potpuno analogno, uz pretpostavku da je $a > 1$ dokazuje se rekurentna formula

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b)\,. \tag{4'}$$

Ako je $b = n \in \mathbb{N}$, tada je

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} B(a,1)\,.$$

Kako je $B(a,1) = 1/a$, to je

$$B(a,n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\,. \tag{5}$$

Ako je i $a = m \in \mathbb{N}$, tada je

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

U različitim razmatranjima beta funkcije često se polazi od sledećeg oblika

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy \tag{6}$$

koji se dobija iz (1) uvođenjem smene $x = y/(y+1)$. Stavljajući u formuli (6) da je $b = 1 - a$, uz pretpostavku da je $0 < a < 1$, dobijamo integral Ojlera

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy\,,$$

čija je vrednost $\pi/\sin \pi a$ (videti zadatak 9., II.2.5.2.). Specijalno, za

$b = 1 - a = 1/2$ dobijamo da je $B(1/2, 1/2) = \pi$.

7.8.2. GAMA FUNKCIJA

Parametarski integral

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \tag{1}$$

nazivamo **gama funkcijom** ili **Ojlerovim integralom prvog reda**. Integral (1) je nesvojstven ne samo u odnosu na oblast integracije, već i na osobenu tačku $x = 0$ za $0 < a < 1$.

Lako je dokazati da je gama funkcija definisana za $a > 0$. Da bismo ispitali neprekidnost gama funkcije, napišimo integral (1) u obliku $\Gamma(a) = \Gamma_1(a) + \Gamma_2(a)$, gde je

$$\Gamma_1(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx\,, \qquad \Gamma_2(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx\,.$$

Prvi integral ravnomerno konvergira za svako $a \geq a_1 > 0$, što neposredno sledi iz nejednakosti

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_1 - 1}\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$

a na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma i činjenice da je integral

$$\int_0^1 x^{a_1 - 1}\, dx$$

konvergentan. Za $a > 0$ ovaj integral konvergira neravnomerno. Zaista, ako je $m = \inf_{0 \leq x \leq \delta} e^{-x}$, tada

$$\int_0^\delta x^{a-1} e^{-x}\, dx \geq m \int_0^\delta x^{a-1}\, dx = \frac{m\delta^a}{a} \to +\infty \text{ kada } a \to 0+$$

pri fiksiranom $\delta < 1$, pa za $\varepsilon > 0$ nije moguće odrediti $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $a > 0$ i svako $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ važi nejednakost

$$\int_0^\delta x^{a-1} e^{-x}\, dx < \varepsilon\,.$$

Za $a \leq a_2$ i $x >$ važi nejednakost $x^{a-1}e^{-x} \leq x^{a_2-1}e^{-x}$, pa kako je

$$\int_1^{+\infty} x^{a_2-1} e^{-x}\, dx < +\infty\,,$$

drugi integral je na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma ravnomerno konvergentan za svako $a \leq a_2$. Međutim, taj integral nije ravnomerno konvergentan za svako a, jer za $a > 1$ i fiksirano $N > 1$

$$\int_N^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \geq N^{a-1} \int_N^{+\infty} e^{-x}\, dx = N^{a-1} e^{-N} \to +\infty\,,\ a \to +\infty\,.$$

Time smo dokazali da je integral (1) ravnomerno konvergentan na svakom segmentu $[a_1, a_2]$, gde je $0 < a_1 < a_2 < +\infty$. Kako je podintegralna funkcija $f(x,a) = x^{a-1}e^{-x}$ neprekidna na skupu $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$ osim u tačkama $(0,a)$, gama funkcija je na osnovu teoreme 2., 7.6. neprekidna na segmentu $[a_1,a_2]$, gde je $0 < a_1 < a_2 < +\infty$.

Lako se proverava da je na istom skupu integral

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x\, dx$$

ravnomerno konvergentan, pa je stoga gama funkcija diferencijabilna na njemu, jer su zadovoljeni svi uslovi teoreme 3., 7.7. Štaviše, $\Gamma(a) \in \mathcal{C}^\infty([a_1,a_2])$ i važi

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^k\, dx\,.$$

Ustanovimo sada neka osnovna svojstva gama funkcije. Za $a > 0$

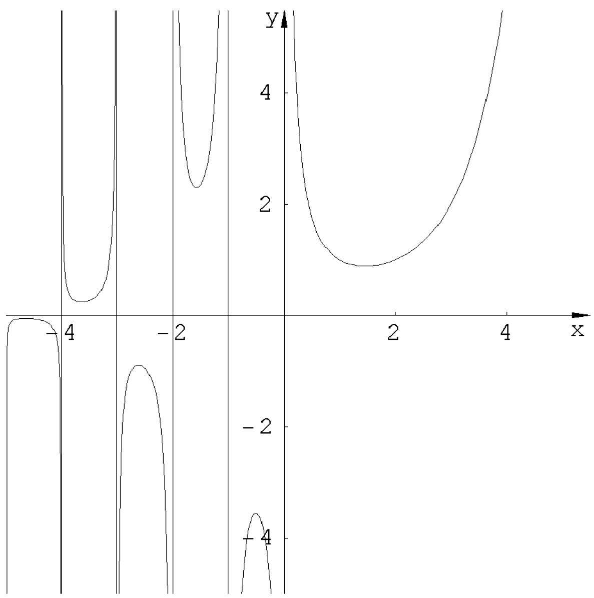
$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\left(-x^a e^{-x}\,\Big|_0^N + a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \right)$$

$$= a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx = a\Gamma(a)\,. \tag{2}$$

Kako je $\Gamma(1) = 1$, to je za $a = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

Poslednja formula pokazuje da je restrikcija $\Gamma|_N$ gama funkcije na skup prirodnih brojeva faktorijelna funkcija $P(n) = n!$.



Sl. 37

Kako je gama funkcija neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a_1, a_2]$, $0 < a_1 < a_2 < +\infty$, pri čemu je $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, to na osnovu Rolove teoreme postoji bar jedna tačka a_0 intervala $(1,2)$ u kojoj je prvi izvod gama funkcije jednak nuli. Drugi izvod gama funkcije je pozitivan, pa je prvi izvod monotono rastuća funkcija. Stoga je a_0 jedina nula gama funkcije, pri čemu je $\Gamma'(x) < 0$ za $x < a_0$ i $\Gamma'(x) > 0$ za $x > a_0$. Time smo dokazali da je gama funkcija monotono opadajuća za $x < a_0$, a monotono rastuća za $x > a_0$. U tački a_0 gama funkcija ima strogi lokalni minimum.

Iz formule (2) vidimo da

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to +\infty \text{ kada } a \to 0+\,,$$

što znači da je y-osa vertikalna asimptota gama funkcije. Očigledno je da $\Gamma(a) \to +\infty$ kada $a \to +\infty$. Na slici 37 prikazan je grafik gama funkcije na celoj realnoj pravoj.

Gama funkcija se može prikazati u obliku granične vrednosti niza. Uvedimo u (1) smenu $x = -\ln z$. Tada je

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz\,.$$

Niz $f_n(z) = n(1 - z^{1/n})$ je monotono rastući i ravnomerno konvergira funkciji $-\ln z$ na svakom segmentu koji je sadržan u intervalu $0 < z < 1$. Stoga je na osnovu posledice 1., 7.6.

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz = \lim_{n\to+\infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1}\, dz\,.$$

Uvođenjem smene $z = y^n$ u poslednjem integralu dobijamo

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\, dy = \lim_{n\to+\infty} n^a B(n,a)\,.$$

Zamenjujući u poslednjem izrazu vrednost $B(a,b)$, dobijamo formulu Gaus-Ojlera:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\,. \tag{3}$$

Iz Gaus-Ojlerove formule posle jednostavnih transformacija dobijamo sledeću formulu:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{a^2}{(n-1)^2}\right)}\,,$$

koju za $0 < a < 1$ možemo napisati u obliku

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)}\,.$$

Kako je

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\,,$$

(videti zadatak 4., II.1.10. ili primer 2. IV.2.5.), to je

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}\,. \tag{4}$$

Izvedenu formulu nazivamo **formulom dopune**. Iz nje za $a=1/2$ dobijamo da je $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, odakle se sada lako izvodi vrednost Ojler-Puasonovog integrala. Zaista, kako je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^{-1/2}\,dx=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy\,,$$

to je

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Na kraju ovog odeljka ukažimo na vezu koja postoji između beta i gama funkcije. U tom cilju uvedimo u (1) smenu $x=ty$, gde je $t>0$, posle čega se dobija

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int\limits_0^{+\infty}y^{a-1}e^{-ty}\,dy\,. \tag{5}$$

Zamenjujući u poslednjoj formuli a sa $a+b$, a t sa $t+1$, dobijamo sledeću jednakost:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int\limits_0^{+\infty}y^{a+b-1}e^{(1+t)y}\,dy\,.$$

Pomnožimo ovu jednakost sa t^{a-1} i integralimo dobijenu jednakost po t u granicama od 0 do $+\infty$:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}\,dt}{(1+t)^{a+b}}=\int\limits_0^{+\infty}t^{a-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy\,.$$

Odavde konačno dobijamo

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\,dy \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}\,dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,dy = \Gamma(a)\int_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(a)\Gamma(b)\,,$$

odn.

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \tag{6}$$

Ostaje da dokažemo opravdanost promene redosleda integracije koji je korišćen u postupku izvođenja formule (6). Primetimo najpre da je za $a>1$ i $b>1$ podintegralna funkcija

$$t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}$$

nenegativna za svako $y \geq 0$ i svako $t \geq 0$. Osim toga,

$$t^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy = \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\Gamma(a+b)$$

i

$$y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}\,dt = y^{b-1}e^{-y}\Gamma(a)$$

su neprekidne funkcije po t, $t \geq 0$ i y, $y \geq 0$ respektivno, pa je na osnovu posledice 2., 7.7. opravdana promena redosleda integracije. Time smo dokazali da formula (6) važi za svako $a>1$ i svako $b>1$. Za $a>0$ i $b>0$ važi formula

$$B(a+1,b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\,.$$

Ako u poslednjoj jednakosti prema formulama (4) i (4′) 7.8.1. i (2) 7.8.2. izvršimo snižavanje parametara a i b za jedan, dobijamo formulu (6) za $a > 0$ i $b > 0$.

Koristeći dobijenu vezu između beta i gama funkcije izvedimo još jednu vezu za gama funkciju. Stoga u integralu

$$B(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx =$$

$$= 2\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

uvedimo smenu $1/2 - x = \sqrt{t}/2$, posle čega dobijamo da je

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a-1}\,dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Ako u poslednjem izrazu $B(a,a)$ i $B(1/2,a)$ izrazimo pomoću gama funkcije po formuli (6), a $\Gamma(1/2)$ zamenimo sa $\sqrt{\pi}$, dobijamo formulu Ležandra:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)\,. \tag{7}$$

Primer 1. Odredimo vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,.\ n > 1\,.$$

Uvođenjem smene $x = t^{1/n}$, $t > 0$, i korišćenjem formule dopune lako dobijamo traženu vrednost:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\,.$$

Primer 2. Izračunajmo integral

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^s}\, dx\,, \quad 0 < s < 1\,.$$

Pođimo od izraza (5)

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-zx}\, dz\,,$$

iz koga se dobija

$$I = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} \cos bx\, dx \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-zx}\, dz\,.$$

Promenom redosleda integracije dobijamo

$$I = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1}\, dz \int\limits_0^{+\infty} e^{-zx} \cos bx\, dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^s\, ds}{z^2 + b^2}\,.$$

Uvođenjem smene $b^2 t = z^2$ u poslednjem integralu dobija se

$$I = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t}\, dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) =$$

$$= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin \frac{s+1}{2}\pi} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2}}\,.$$

Na sličan način se dobija

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^s}\, dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}\,, \ 0 < s < 2\,.$$

Čitaocu prepuštamo da za vežbu dokaže opravdanosti promene redosleda integracije u navedenom primeru.

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti vrednosti sledećih integrala

$$a)\ \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx \quad , \quad p,q,m>0\,,$$

$$b)\ \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^{p+q}} \quad , \quad \alpha,\beta\ge 0\,,\ \gamma,p,q>0\,,$$

$$c)\ \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx \quad , \quad a,b,p>0\,,$$

$$d)\ \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,dx \quad , \quad m,n>0\,.$$

(Rezultat: a)$B(p/m,q)/m$, b) $B(p,q)/(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q$, c) $B(a,b)/(1+p)^a p^b$, d) $2^{m+n-2}B(m,n)$)

2. Dokazati sledeće jednakosti:

$$a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\int_0^1 \frac{x^n\ dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}=\frac{\pi}{2n}\,,$$

$$b)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right)^{\cos 2\alpha} d\varphi=\frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)}\,.$$

3. Izračunati sledeće integrale

$$a)\ \int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi\,,\,a>0\,,\quad b)\ \int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi\,,\ a,b>0\,,$$

$$c)\ \int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^{a-1}\varphi\,d\varphi\,,\ |a|<1\,,\quad d)\ \int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{3-\cos\varphi}}\,,$$

$$e)\ \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{a-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}\,,\ a>0\,,\ 0<k<1\,.$$

(Rezultat: a) $B(a/2,1/2)/2$, b) $B(a/2,b/2)/2$, c) $\pi/2\cos(\pi c/2)$, d) $\Gamma^2(1/4)/4\sqrt{\pi}$, e) $2^{a-1}\Gamma^2(a/2)/(1-k^2)^{a/2}\Gamma(a)$)

4. Dokazati da je

$$\int_{-\infty}^{1}(1-x^3)^{-1/2}\,dx=\sqrt{3}\int_{1}^{+\infty}(x^3-1)^{-1/2}\,dx\,.$$

5. Dokazati formulu

$$\Gamma(r)\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-fx}x^{s-1}}{(g+x)^r}\,dx=\Gamma(s)\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-gy}y^{r-1}}{(f+y)^s}\,dy\,,\ f,g,r,s>0\,.$$

6. Uz obrazloženje postupka, dokazati sledeće jednakosti:

$$a)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\,,\ s>1\,,$$

$$b)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\,,\ s>0\,,$$

$$c)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s}\,,\ a>0,s>1\,,$$

$$d)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{zx^{s-1}\,dx}{e^x-z}=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^s}\,,\ -1\le z<1,s>0 \text{ ili } z=1,s>1\,.$$

7. Dokazati da za sumu $S(\alpha,\beta,\gamma,x)$ hiperharmonijskog reda

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

važi jednakost

$$S(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\,.$$

(Uputstvo: poći od integrala $\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}\,dx$ i razložiti funkciju $(1-zx)^{-\beta}$ u red)

Koristeći dobijeni rezultat, dokazati da važi sledeći razvoj

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}=1-\frac{\alpha^2}{1}+\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1\cdot 2)^2}-\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\cdots.$$

8. Dokazati da je

$$E=\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{\pi}}.$$

(Uputstvo: $E^2=\prod_1^{n-1}\Gamma(k/n)\Gamma(n-k/n)$)

10. Izračunati vrednost integrala

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{\lambda^n}{x_1\cdots x_{n-1}}\right)}\times x_1^{\frac{1}{n}-1}x_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx_1\cdots dx_{n-1}\,,$$

gde je $\lambda\geq 0$. (Uputstvo: diferencirati integral po parametru λ, a zatim uvesti smenu $z=\lambda^n/x_1\cdots x_{n-1}$ zamenjujući jednu od promenljivih, recimo x_1, posle čega se dobija jednostavna diferencijalna jednačina. Za određivanje konstante koja se javlja u tako dobijenoj jednačini iskoristiti prethodni zadatak; rezultat: $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$ $e^{-\lambda n}/\sqrt{n}$)

11. Koristeći prethodni zadatak dokazati formulu Gausa:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na)\,.$$

(Uputstvo: pomnožiti formulu dobijenu u prethodnom zadatku sa λ^{p-1}, $p>0$, a zatim uvesti u integralu istu smenu kao i u prethodnom zadatku)

12. Izračunati vrednost Rabeovog integrala

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(a)\,da\,.$$

(Uputstvo: iskoristiti činjenicu da je $R_0=\int_0^1\ln\Gamma(1-a)\,da$, rezultat: $\ln\sqrt{2\pi}$)

Koristeći dobijeni rezultat, dokazati da je

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\,da=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}\,.$$

(Uputstvo: iskoristiti jednakost $R'(a)=\ln a$)

13. Dokazati da je

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to 0+} (\Gamma(b) - B(a,b)) .$$

14. Dokazati da je

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right) du$$

15. Dokazati da je gama funkcija potpuno određena relacijama (2), (4) i (7), a da bilo koje dve od navedenih relacija nisu dovoljne za karakterizaciju gama funkcije.

16. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x}\, dx ,$$

gde je p racionalan broj sa neparnim brojiocem i imeniocem. (Uputstvo: dokazati da je $\int_0^{+\infty} (\sin^p x)/x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x\, dx$)

17. Izračunati integrale

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln x\, dx \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^2 x\, dx .$$

(Uputstvo: diferencirati integral dat u primeru 1., 7.7.2.)

18. Dokazati da je

$$\int_0^{+\infty} \sin^{2n}\varphi \ln\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} - \ln 2\right) .$$

(Uputstvo: diferencirati integral $\int_0^{+\infty} \sin^{2a-1}\varphi\, d\varphi$, $a > 0$)

19. Dokazati da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \left[1 + \frac{e}{x} - \frac{e}{1!(x+1)} + \frac{e}{2!(x+2)} - \cdots \right] \frac{dx}{\Gamma(x)} .$$

IV

FURIJEOVI REDOVI

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2$$

U ovoj glavi izložićemo osnove teorije Furijeovih* redova. U prvom poglavlju data je opšta teorija Furijeovih redova na unitarnim prostorima. Drugo poglavlje sadrži elemente klasične teorije Furijeovih redova, dok su u trećoj glavi izloženi osnovni rezultati iz teorije Furijeovih integrala i Furijeovih transformacija.

1. OPŠTA TEORIJA FURIJEOVIH REDOVA

U ovom poglavlju izložićemo osnove opšte teorije Furijeovih redova na unitarnim prostorima. Rezultati opšte teorije Furijeovih redova važe i u klasičnoj teoriji Furijeovih redova i mi ćemo ih koristiti u narednom poglavlju.

1.1. PERIODIČNE FUNKCIJE

Mnogi procesi u prirodi su periodičnog karaktera. Oni se u pravilnim vremenskim razmacima ponavljaju, a opisuju se periodičnim funkcijama.

Definicija 1. *Funkcija $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ je* ***periodična*** *ako postoji realan broj $T\neq 0$ tako da je $f(x+T)=f(x)$ za svako $x\in\mathbb{R}$. Broj T je* ***perioda funkcije****.*

Ako je T perioda funkcije f, tada je nT, $n\in\mathbb{Z}$, takođe perioda te funkcije. Zaista, zamenjujući x sa $x+T$ (odn. $x-T$), lako se

* Fourier J.B. (1768-1830)-francuski fizičar i matematičar

dokazuje da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost $f(x) = f(x+nT)$, (odn. $f(x) = f(x-nT)$). Osim toga, ako su T_1 i T_2 dve periode funkcije f, tada je i $T_1 \pm T_2$ perioda funkcije f. Prema tome, svaka periodična funkciju ima beskonačno mnogo perioda. Prirodno se postavlja sledeće pitanje: da li svaka periodična funkcija ima najmanju pozitivnu periodu? Odgovor je u opštem slučaju negativan, što pokazuje sledeći

Primer 1. Za Dirihleovu funkciju

$$\chi(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

svaki racionalan broj $r \in \mathbb{Q}$ je perioda funkcije, pa ne postoji najmanja perioda.

Primetimo da je Dirihleova funkcija prekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$. Međutim, funkcija $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, je neprekidna na $\mathbb{R}$, svaki realan broj je perioda te funkcije, pa ne postoji najmanja pozitivna perioda te funkcije. Da bismo odgovorili na pitanje o egzistenciji najmanje pozitivne periode, dokažimo najpre sledeću teoremu.

Teorema 1. *Svaka neprekidna periodična funkcija* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *je ravnomerna neprekidna na* $\mathbb{R}$ *.*

Dokaz. Neka je T perioda funkcije f. Kako je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$, ona je prema Kantorovoj teoremi ravnomerno neprekidna na segmentu $[-T, 2T]$. Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji $T > \delta > 0$, tako da za svako $x_1, x_2 \in [-T, 2T]$ iz $|x_1 - x_2| < \delta$ sledi nejednakost $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Neka su y_1 i y_2 realni brojevi koja zadovoljavaju uslov $|y_1 - y_2| < \delta$ i neka je $k = [y_1/T]$. Tada $t_1 = y_1 - kT$, $t_2 = y_2 - kT \in [-T, 2T]$, $|t_1 - t_2| = |y_1 - y_2| < \delta$, pa je

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(t_1 + kT) - f(t_2 + kT)| = |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon\,,$$

čime je dokazana ravnomerna naprekidnost funkcije f na $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2. *Ako je neprekidna periodična funkcija* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *različita od konstantne funkcije, tada ona ima najmanju periodu.*

Dokaz. Kako je neprekidna, periodična funkcija f različita od konstantne funkcije, postoje realni brojevi x_1 i x_2 za koje je $f(x_1) \neq$

$f(x_2)$. Neka je $|f(x_1) - f(x_2)| = d$. Funkcija f je prema teoremi 1. ravnomerno neprekidna, pa stoga za svako $\varepsilon > 0$, dakle i za $\varepsilon < d$, postoji $\delta > 0$ tako da za svaki par realnih brojeva y_1 i y_2 koji zadovoljavaju uslov $|y_1 - y_2| < \delta$ važi nejednakost

$$|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon \,.$$

Ako funkcija f ne bi imala najmanju periodu, postojala bi perioda T_δ funkcije f koja zadovoljava uslov $T_\delta < \delta$. Označimo sa $k = [(x_2 - x_1)/T_\delta]$. Tada je

$$\frac{x_2 - x_1}{T_\delta} = k + \frac{h}{T_\delta} \,,$$

gde je $0 < h < T_\delta < \delta$. Stoga je

$$d = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_1 + h + kT_\delta| = |f(x_1) - f(x_1 + h)| < \varepsilon \,,$$

što je suprotno načinu izbora broja ε. Dobijena kontradikcija dokazuje da funkcija f ima osnovnu periodu. ■

Definicija 2. *Neka je f periodična funkcija. Ako postoji najmanja pozitivna perioda T funkcije f, onda je T* ***osnovna perioda funkcije*** *f.*

Teorema 3. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ periodična sa osnovnom periodom T. Ako je funkcija f integrabilna u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[0, T]$, tada je ona integrabilna na svakom konačnom segmentu realne prave. Pri tome za svako $a \in \mathbb{R}$ važi*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \,. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$ proizvoljan segment. Tada postoje celi brojevi m i n tako da je $mT \le a < b \le nT$. Kako je

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{kT}^{(k+1)T} f(t - kT)\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt \,,$$

funkcija f je integrabilna na $[kT,(k+1)T]$. Sada na osnovu aditivnosti integrala sledi integrabilnost funkcije f na svakom segmentu $[mT,nT]$, pa dakle i na segmentu $[a,b]$. Time smo dokazali da integral na levoj strani jednakosti (1) postoji. Da dokažemo ovu jednakost, primetimo da je

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{T} f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Uvođenjem smene $x = y + T$ u poslednjem integralu ove jednakosti dobijamo sledeću jednakost

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(y)\,dy\,. \tag{3}$$

Sada iz (2) i (3) sledi (1). ■

Iz jednakosti (1) neposredno dobijamo sledeću jednakost

$$\int_0^{T} f(x-t)\,dx = \int_0^{T} f(x)\,dx\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Zaista, uvođenjem smene $x - t = z$ imamo

$$\int_0^{T} f(x-t)\,dx = \int_{-t}^{T-t} f(z)\,dz = \int_0^{T} f(x)\,dx\,.$$

1.2. ORTOGONALNI SISTEMI

Definicija 1. *Sistem*

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \tag{1}$$

elemenata unitarnog prostora X je **ortogonalan** *ako je norma svakog elementa tog sistema pozitivna i ako su svaka dva elementa tog sistema ortogonalna, tj. ako je $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ za svako $i \neq j$.*

Ortogonalan sistem je **ortonormiran** *ako su svi njegovi elementi normirani, odn. ako je $\|\varphi_n\| = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 2. *Beskonačan sistem elemenata vektorskog prostora je* ***linearno nezavisan*** *ako je svaki konačan podskup tog sistema linearno nezavisan.*

Stav 1. *Svaki ortogonalan sistem unitarnog prostora X je linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka je sistem (1) ortogonalan i neka je

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{n_i} = 0\,.$$

Tada je za $1 \leq j \leq k$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{n_i}, \varphi_{n_j} \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\varphi_{n_i}, \varphi_{n_j}) = \lambda_j (\varphi_{n_j}, \varphi_{n_j}) = 0\,,$$

odakle sledi da je $\lambda_j = 0$ za svako $j = \overline{1, n}$. ■

Neka je S podskup vektorskog prostora X. Označimo sa $L(S)$ najmanji podprostor iz X koji sadrži skup S. Lako je dokazati da je $L(S)$ skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa S.

Teorema 2. *Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ linearno nazavisan sistem elemenata unitarnog prostora X. Tada postoji ortonormiran sistem elemenata $(e_1, \ldots, e_n)$ sa svojstvom da je $L(x_1, \ldots, x_j) = L(e_1, \ldots, e_j)$ za svako $j = \overline{1, n}$.*

Dokaz. Definišimo vektore $e_1, \ldots, e_n$ indukcijom. Neka je $e_1' = x_1$, $e_1 = e_1'/\|e_1'\|$. Pretpostavimo da su za $j < n$ definisani vektori $e_1, \ldots, e_j$ za koje je $L(e_1, \ldots, e_j) = L(x_1, \ldots, x_j)$. U tom slučaju je $x_{j+1} \in X \setminus L(e_1, \ldots, e_j)$. Stoga je moguće definisati vektore e_{j+1}' i e_{j+1} formulama

$$e_{j+1}' = x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (x_{j+1}, e_k) e_k$$

i

$$e_{j+1} = e_{j+1}'/\|e_{j+1}'\|\,,$$

čime se dobija ortonormiran sistem $(e_1, \dots, e_{j+1})$ za koji je

$$L(e_1, \dots, e_j, e_{j+1}) = L(e_1, \dots, e_j, x_{j+1}) = L(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}) \,. \blacksquare$$

Opisani postupak zamene vektora $x_1, \dots, x_n$ vektorima $e_1, \dots, e_n$ poznat je kao **Gram-Šmitov* postupak ortonormiranja.**

Iz dokazane teoreme neposredno sledi da svaki konačno-dimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.

Primer 1. Posmatrajmo sve realne funkcije koje su integrabilne sa kvadratom u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[a, b]$ realne prave. Za dve funkcije ovog skupa kažemo da su ekvivalentne ako su jednake skoro svuda na segmentu $[a, b]$. Ovako definisana relacija razlaže posmatrani skup na klase ekvivalencije. Označimo taj skup sa $\mathcal{R}^2([a, b])$. Tada je sa

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{2}$$

definisan skalarni proizvod na prostoru $\mathcal{R}^2([a, b])$.

Primer 2. Neka je $l > 0$. Sistem funkcija

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots \tag{3}$$

nazivamo **osnovnim trigonometrijskim sistemom**. U prostoru $\mathcal{R}^2([-l, l])$ sistem (3) je ortogonalan. To sledi iz jednakosti

$$\left(\frac{1}{2}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \left(\frac{1}{2}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) &= \left(\cos\frac{k\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \\ &= \left(\sin\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \begin{cases} 0\,, & k \neq n\,, \\ l\,, & k = n\,, \end{cases} k, n \geq 1\end{aligned}$$

* Schmidt E. (1876-1959)-nemački matematičar

Iz sistema (3) dobijamo sledeći ortonormiran sistem

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \dots .$$

Zadaci za vežbanje

1. Ako realna funkcija f ima osnovnu periodu T, tada funkcija $x \to f(ax+b)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, ima osnovnu periodu $T/|a|$. Dokazati.

2. Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, periodične funkcije sa samerljivim periodama. Dokazati da su tada i funkcije $f+g$ i $f \cdot g$ periodične i odrediti njihove periode.

3. Dokazati da se svaka funkcija f definisana na intervalu $(-l, l)$ može pretstaviti u obliku zbira parne i neparne funkcije.

4. Ako funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove:

   a) $f(x) \leq 1$ za svako $x \in \mathbb{R}$,

   b) $f(x + 13/42) + f(x) = f(x + 1/6) + f(x + 1/7)$,

dokazati da je f periodična funkcija.

5. Neka funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, zadovoljava jednakost $f(x+T) = kf(x)$, gde su k i T pozitivni brojevi. Dokazati da je $f(x) = a^x\varphi(x)$, gde je a konstanta, a φ periodična funkcija sa periodom T.

6. Neka je $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, neprekidna periodična funkcija periode T. Dokazati da je funkcija

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

zbir linearne funkcije i periodične funkcije sa periodom T.

7. Dokazati da su sistemi funkcija

$$\begin{aligned} &a)\ 1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \dots \\ &b)\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots \end{aligned}$$

ortogonalni na segmentu $[0, l]$.

8. Neka su $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \cdots$ koreni jednačine $\mathrm{tg}\xi l = c\xi$, gde je c proizvoljna konstanta. Dokazati da je sistem $\{\sin\xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalan na segmentu $[0, l]$.

9. Dokazati da je funkcija $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ortogonalna sa svakim polinomom stepena ne većeg od n_0 onda i samo onda ako je funkcija f ortogonalna sa svakom funkcijom $t \mapsto t^n$, $t \in [a,b]$.

10. Dokazati da se svaki linearno nezavisan sistem funkcija $\{f_n : n \geq 1\}$ može transformisati u ortonormiran sistem.

11. Neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ konačan ortogonalan sistem vektora unitarnog prostora. Dokazati da je

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

12. Dokazati da je sistem $(e_1, \dots, e_j, e_{j+1})$ u dokazu teoreme 2. ortonormiran, a zatim dokazati poslednju jednakost u dokazu iste teoreme.

13. Dokazati da je formulom (2) u primeru 1., 1.2. definisan skalarni proizvod na $\mathcal{R}^2([a,b])$.

1.3. BESELOVA NEJEDNAKOST FURIJEOVI KOEFICIJENTI

Neka je X unitaran vektorski prostor sa normom koja je definisana skalarnim proizvodom prostora X. Razmotrimo sledeći problem. Neka je u prostoru X zadat sistem od n linearno nezavisnih vektora $e_1, \dots, e_n$ i neka je fiksiran neki vektor $x \in X$. Odredimo linearnu kombinaciju

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \tag{1}$$

koja u prostoru X najbolje aproksimira vektor x. Drugim rečima, odredimo koeficijente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tako da izraz

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)\| \tag{2}$$

ima najmanju vrednost.

Geometrijskim jezikom rečeno, u prostoru $L(e_1, \dots, e_n)$ treba odrediti vektor koji je najbliži zadatom vektoru $x \in X$. Ako je prostor X n-dimenzionalan, kao linearno nezavisni, vektori $e_1, \dots, e_n$ obrazuju bazu prostora X, pa je uvek moguće odrediti koeficijente λ_i, $i = \overline{1, n}$, tako da važi jednakost

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n . \tag{3}$$

Jasno je da u tom slučaju izraz (2) dostiže najmanju vrednost. Međutim, ako je prostor X beskonačno dimenzionalan ili mu je dimenzija veća od n, jednakost (3) je u opštem slučaju nemoguća, pa se zadatak svodi na određivanje linearne kombinacije (1) za koju izraz (2) ima minimalnu vrednost.

Pokazaćemo da postavljeni problem ima jedinstveno rešenje. Primenjujući Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije, sistem vektora $e_1, \dots, e_n$ možemo uvek zameniti ortogonalnim sistemom vektora. Stoga ćemo u daljim razmatranjima za vektore $e_1, \dots, e_n$ pretpostaviti da čine ortogonalan sistem.

Koristeći ortogonalnost sistema vektora $e_1, \dots, e_n$ i osobine skalarnog proizvoda, vidimo da će izraz (2) imati minimalnu vrednost, ako izraz

$$\begin{aligned} \text{(4)} \quad \|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) = \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \|e_i\| - \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, e_i)^2}{\|e_i\|^2} \end{aligned}$$

ima minimalnu vrednost. Očigledno da će to biti zadovoljeno, ako je

$$\text{(5)} \qquad \lambda_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}, \quad i = \overline{1, n}\,.$$

Definicija 1. *Neka je* $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ortogonalan sistem unitarnog prostora* X *i* $x \in X$. *Skalari* λ_i *određeni izrazom* (5) *su* ***Furijeovi koeficijenti*** *elementa* x *u odnosu na ortogonalan sistem* $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Na osnovu izloženog, očigledno da važi sledeća

Teorema 2. (Minimalno svojstvo Furijeovih koeficijenata) *Neka je* $(e_1, \dots, e_n)$ *ortogonalan sistem unitarnog prostora* X. *Ako su* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *Furijeovi koeficijenti elementa* $x \in X$ *u odnosu na ortogonalan sistem* $(e_1, \dots, e_n)$, *onda je*

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \|x\|^2 - \sum_{i=}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 .$$

U slučaju n-dimenzionalnog prostora u kome vektori $e_1, \dots, e_n$ čine bazu tog prostora, Furijeovi koeficijenti vektora x u odnosu na zadatu bazu pretstavljaju koeficijente razlaganja u (3) vektora x po elementima te baze. Ovo se lako proverava ako jednakost (3) pomnožimo vektorima e_k, $k = \overline{1, n}$.

Razmotrimo sada jednakost (4). Ako su u toj jednakosti parametri λ_i, $i = \overline{1, n}$, Furijeovi koeficijenti elementa x, dobija se jednakost

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \tag{6}$$

koja je poznata kao **Beselova jednakost**.

Kako je izraz na levoj strani Beselove jednakosti nenegativan, to je

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{7}$$

Nejednakost (7) važi za svako $n \in \mathbb{N}$, jer desna strana ove nejednakosti ne zavisi od n. Niz $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je neopadajući i odozgo ograničen brojem $\|x\|^2$. Stoga je red $\sum \lambda_i^2 \|e_i\|^2$ konvergentan, pa prelaskom na graničnu vrednost u nejednakosti (7) dobijamo **Beselovu nejednakost** za element x po ortogonalnom sistemu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Ako postoji realan broj $K > 0$ tako da je $\|e_n\| \geq K$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada Furijeovi koeficijenti svakog elementa $x \in X$ konvergiraju ka nuli kada $n \to +\infty$. Ovo neposredno sledi iz konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \leq \frac{1}{K^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \|e_n\|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{K^2} .$$

Primer 1. Furijeovi koeficijenti funkcije $f \in \mathcal{R}^2([-l,l])$ u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem određeni su formulama

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\,,\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\,,\ k \geq 0\,.$$

U tom slučaju Beselova nejednakost glasi

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx\,.$$

Kako je $f \in \mathcal{R}^2([-l,l])$, red $\sum(a_k^2 + b_k^2)$ je konvergentan. No onda je $\lim_n(a_k^2 + b_k^2) = 0$, odakle sledi da Furijeovi koeficijenti funkcije integrabilne sa kvadratom konvergiraju nuli, odn. važi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0\,.$$

1.4. POTPUNI ORTOGONALNI SISTEMI PARSEVALOVA JEDNAKOST

Definicija 1. *Ortogonalan sistem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ unitarnog prostora X je* ***potpun*** *ako iz $x \in X$ i $(x, e_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, sledi $x = 0$.*

Može se dokazati da svaki unitaran prostor $X \neq \{0\}$ sadrži potpun ortogonalan sistem.

Definicija 2. *Ortogonalan sistem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ Hilbertovog prostora X je* ***zatvoren*** *u tom prostoru ako za svaki element $x \in X$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji linearna kombinacija $\sum_1^n \lambda_i e_i$ tako da je*

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| < \varepsilon\,.$$

Primer 1. Označimo sa l_2 prostor svih nizova (x_n) realnih brojeva za koje je red $\sum x_n^2$ konvergentan. Lako je proveriti da je l_2 vektorski prostor u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ koje su definisane na sledeći način:

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)\,,$$
$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \ldots)\,.$$

U prostoru l_2 sa

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

definisan je skalarni proizvod. Sistem $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, čini ortogonalnu bazu unitarnog prostora l_2. Očigledno je taj sistem ortogonalan. Međutim, on je i zatvoren. Zaista, za svaki element $x = (x_i)$ iz l_2 element $x_k = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots)$ je linearna kombinacija elemenata $e_1, \ldots, e_k$ i

$$\|x - x_k\| = \left\{ \sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i^2 \right\}^2 \to 0\,,\ k \to +\infty\,.$$

Prema tome, za svako $x = (x_i) \in l_2$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji linearna kombinacija $\sum_1^s x_i e_i$ tako da je

$$\|x - \sum_{i=1}^{s} x_i e_i\| < \varepsilon\,,$$

što dokazuje da je sistem zatvoren.

Teorema 1. *Da bi ortogonalan sistem* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *unitarnog prostora* X *bio zatvoren u* X, *potrebno je i dovoljno da za svako* $x \in X$ *važi* ***Parsevalova* jednakost***

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2\,, \tag{1}$$

* Parseval M.A. (1755-1836)-francuski matematičar

gde su α_k Furijeovi koeficijenti elementa x u odnosu na sistem $\{e_n\}$.

Dokaz. Neka je ortogonalan sistem $\{e_n\}$ unitarnog prostora X zatvoren i neka je $x \in X$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji linearna kombinacija $\sum_1^m \lambda_i e_i$ za koju je

$$\|x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\| < \varepsilon\,.$$

No onda je na osnovu teoreme 2., 1.3.

$$\|x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\| < \varepsilon\,,$$

odakle korišćenjem Beselove jednakosti dobijamo nejednakost

$$\|x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 < \varepsilon^2\,.$$

Niz $\{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i^2 \|e_i\|^2\}_{m\in\mathbb{N}}$ je nerastući, pa je stoga za svako $n > m$

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 < \varepsilon^2\,,$$

odakle se prelaskom na graničnu vrednost kada $n \to +\infty$ dobija nejednakost

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 < \varepsilon^2\,.$$

Iz poslednje nejednakosti, zbog proizvoljnosti broja ε, neposredno sledi nejednakost

$$\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i^2 \|e_i\|^2\,,$$

koja sa Beselovom nejednakošću daje Parsevalovu jednakost.

Obratno, pretpostavimo da za svako $x \in X$ važi Parsevalova jednakost. Tada iz Beselove jednakosti neposredno dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 = 0\,.$$

Odavde sledi konvergencija niza $s_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ka elementu x po normi prostora X, što dokazije zatvorenost sistema $\{e_n\}$ u X. ■

Razmotrimo sada Beselovu nejednakost koja u odnosu na ortonormirani sistem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unitarnog prostora X ima oblik

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \leq \|x\|^2 ,$$

gde su $\alpha_n = (x, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti elementa x. Da bi brojevi α_n, $n \in \mathbb{N}$, bili Furijeovi koeficijenti elementa $x \in X$, neophodno je da red $\sum \alpha_n^2$ konvergira. Lako je proveriti da je preslikavanje $A : X \mapsto l_2$ koje svakom elementu $x \in X$ pridružuje niz $\{\alpha_n = (x, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ za koji je red $\sum \alpha_n^2$ konvergentan linearan operator. Prirodno se postavlja pitanje da li i pod kojim uslovima postoji inverz A^{-1} ovog operatora. Pre odgovora na ovo pitanje, uvedimo pojam koji nam je nophodan za formulaciju teoreme koja daje odgovor na postavljeno pitanje.

Definicija 3. *Unitaran prostor X je* ***separabilan*** *ako sadrži najviše prebrojiv skup Y koji je* ***svuda gust*** *u X, tj. skup za koji važi $\overline{Y} = X$.*

Teorema 2. (Fišer*-Ris)** *Za svaki ortonormiran sistem $\{e_n\}$ elemenata potpunog separabilnog unitarnog prostora X i svaki niz (x_n) elemenata prostora l_2 postoji element $x \in X$, tako da je $x_n = (x, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 = \|x\|^2 . \tag{2}$$

Dokaz. Neka je (x_n) proizvoljan niz u l_2. Dokažimo da je niz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \, , \, n \in \mathbb{N} \, ,$$

---

* E. Fischer

** F. Riesz (1880-1956)-madžarski matematičar konvergentan. Red $\sum x_n^2$ je konvergentan, pa prema Košijevoj teoremi za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $p \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k^2 < \varepsilon\,.$$

No onda je

$$\begin{aligned}\|s_{n+p} - s_n\|^2 &= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k\right) = \\ &= \sum_{k,j=n+1}^{n+p} x_k x_j (e_k, e_j) = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k^2 < \varepsilon\end{aligned}$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $p \in \mathbb{N}$, pa je niz (s_n) Košijev. Kako je prostor X kompletan, niz (s_n) je konvergentan. Stoga postoji $x \in X$, tako da je $\lim s_n = x$. Lako je proveriti da za $x = \sum x_k e_k$ važi

$$(x_k, e_k) = x_k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Jednakost (2) neposredno sledi iz Beselove jednakosti

$$\|x - s_n\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

kada $n \to +\infty$. ■

Teorema 3. *Da bi ortonormiran sistem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kompletnog unitarnog prostora X bio zatvoren u X, potrebno je i dovoljno da je on potpun u tom prostoru.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je ortonormiran sistem $\{e_n\}$ kompletnog unitarnog prostora X zatvoren u tom prostoru. Tada na osnovu teoreme 1. za svako $x \in X$ važi Parsevalova jednakost. Ako je element x ortogonalan sa svim elementima sistema $\{e_n\}$, tada je $(x, e_n) = \alpha_n = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa iz jednakosti Parsevala $\|x\|^2 = \sum \alpha_i^2 = 0$ sledi da je $x = 0$.

Pretpostavimo sada da je sistem $\{e_n\}$ potpun u X, odn. da u X ne postoji nenula element koji je ortogonalan sa svim elementima prostora X. Dokažimo da je ortogonalan sistem $\{e_n\}$ zatvoren u X. Neka su x_n, $n \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti elementa x u odnosu na ortonormiran sistem $\{e_n\}$. Red $\sum \alpha_n^2$ je konvergentan na osnovu Beselove nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \leq \|x\|^2 < +\infty\,.$$

Stoga na osnovu teoreme 2. za niz $(\alpha_n) \in l_2$ postoji element $y \in X$ tako da je

$$(y, e_n) = \alpha_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \text{ i } \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2\,.$$

No onda je $y - x$ element skupa X koji je ortogonalan sa svim elementima sistema $\{e_n\}$, jer je

$$(y - x, e_n) = (y, e_n) - (x, e_n) = \alpha_n - \alpha_n = 0,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Kako je $\{e_n\}$ potpun sistem u X, to je $y - x = 0$, pa je $\|y\| = \|x\|$. Stoga je

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2\,.$$

Iz Beselove jednakosti vidimo da

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \to 0$$

kada $n \to +\infty$. Odatle sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_\varepsilon$ važi

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon\,,$$

što dokazuje zatvorenost ortonormiranog sistema $\{e_n\}$ u X. ∎

Teorema 4. *Neka je $\{e_n\}$ ortogonalan sistem unitarnog prostora X, a α_n, $n \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti elementa $x \in X$ u odnosu na ortogonalan sistem $\{e_n\}$. Tada delimične sume reda $\sum \alpha_n e_n$ čine Košijev niz koji konvergira elementu x onda i samo onda ako je zadovoljena Parsevalova jednakost.*

Dokaz. Primetimo najpre da je red $\sum \alpha_n^2 \|e_n\|^2$ konvergentan na osnovu Beselove nejednakosti. Stoga za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n > m > n_\varepsilon$ važi

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon\,.$$

Kako je

$$\|\sum_{k=m}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2\,,$$

to je

$$\|\sum_{k=m}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$$

za svako $n > m > n_\varepsilon$, pa je niz $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev. Ako on konvergira elementu x, tada

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| \to 0$$

kada $n \to +\infty$, odakle sledi jednakost Parsevala. Obrat takođe sledi iz prethodne jednakosti. ■

Definicija 4. *Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalan sistem unitarnog prostora X, $x \in X$ i α_n, $n \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti elementa x u odnosu na ortogonalan sistem $\{e_n\}$. Red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$$

*je **Furijeov red** elementa x u odnosu na ortogonalan sistem $\{e_n\}$.*

Iz teoreme 1. vidimo da je Furijeov red ma kog elementa unitarnog prostora konvergentan u odnosu na ortogonalan sistem onda i samo onda ako je taj sistem zatvoren u posmatranom prostoru. U Hilbertovom prostoru Furijeov red nekog elementa u odnosu na ortonormiran sistem tog prostora je konvergentan onda i samo onda ako je taj sistem potpun u posmatranom prostoru.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $\{e_i\}_{i\in I}$ ortonormiran sistem unitarnog prostora X. Dokazati da je najviše prebrojivo mnogo Furijeovih koeficijenata ma kog elementa $x \in X$ različito od nule. (Uputstvo: posmatrati skupove $E_n = \{\alpha_i : |\alpha_i| \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i primeniti Beselovu nejednakost)

2. Neka su α_n, $n \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti elementa x u odnosu na ortonormiran sistem $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ unitarnog prostora X. Dokazati da su redovi $\sum \alpha_n^2$ i $\sum \alpha_n e_n$ bezuslovno konvergentni.

3. Neka je $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata unitarnog prostora X takav da je $\|v_n\| \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ označimo sa $F_n = \{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n : c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\}$, a sa $F = \cup_1^\infty F_n$. Za potprostor $F \subset X$ kažemo da je generisan sistemom $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$. Ako je $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran sistem, dokazati da je on potpun u F.

4. Dokazati da je ortonormiran sistem potpun onda i samo onda ako nije pravi potskup nekog drugog ortonormiranog sistema.

5. Dokazati da svaki unitaran prostor $X \neq \{0\}$ sadrži potpun ortonormiran sistem. (Uputstvo: u familiji ortonormiranih sistema skupa X uvesti uređenje po inkluziji i primeniti Zornovu lemu)

6. Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirani sistem unitarnog prostora X, a F potprostor prostora X generisan sistemom $\{e_n\}$. Dokazati da je $x \in \overline{F}$ onda i samo onda ako za x važi Parsevalova jednakost.

7. Neka je $\{e_n\}$ ortonormiran sistem unitarnog prostora X, a F potprostor prostora X generisan sistemom $\{e_n\}$. Ako su svi Furijeovi koeficijenti elementa $x \in \overline{F}$ jednaki nuli, dokazati da je $\|x\| = 0$.

8. Ako je ortogonalan sistem $\{e_n\}$ zatvoren u unitarnom prostoru X, tada Furijeov red svakog elementa $x \in X$ u odnosu na zadati sistem konvergira ka x. Dokazati.

9. Dokazati da je prostor l_2 separabilan. (Uputstvo: dokazati da je skup $M_0 = \{(r_1, \ldots, r_n, 0, \ldots) : r_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv svuda gust u l_2)

10. Dokazati da su svaka dva separabilna Hilbertova prostora izomorfna. (Uputstvo: dovoljno je dokazati da je svaki separabilan prostor H izomorfan sa l_2, odn. da za $f, g \in H$ i $f^*, g^* \in l_2$ postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $f + g \leftrightarrow f^* + g^*$, $\lambda f \leftrightarrow \lambda f^*$ i $(f, g) \leftrightarrow (f^*, g^*)$. U tom cilju elementu $f \in H$ pridružiti niz $(\alpha_n) \in l_2$, gde su α_n Furijeovi koeficijenti elementa $f \in H$ u odnosu na proizvoljan ortogonalan sistem iz H, a svakom nizu iz l_2 prema teoremi Fišer-Risa pridružiti element iz H čiji su to Furijeovi koeficijenti)

11. Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran sistem unitarnog prostora X. Ako su α_n i β_n Furijeovi koeficijenti elemenata $x, y \in X$ u odnosu na zadati sistem

i ako je $x = \sum \alpha_n e_n$, a $y = \sum \beta_n e_n$, dokazati da je red $\sum \alpha_n \beta_n$ apsolutno konvergentan, pri čemu je $\sum \alpha_n \beta_n = (x, y)$.

2. KLASIČNI FURIJEOVI REDOVI

U dosadašnjem izlaganju razmatrali smo ortogonalne sisteme u unitarnim prostorima. Furijeovi koeficijenti i Furijeov red uvedeni na unitarnim prostorima nastali su u vezi sa problemima koji su vezani za pojam funkcije. Pri tome je posmatran unitaran prostor $\mathcal{R}^2([-l, l])$ u kome je osnovni trigonometrijski sistem funkcija ortogonalan. Mi ćemo u ovom poglavlju izučavati Furijeove redove na prostoru $\mathcal{R}^2([-l, l])$ ili širim klasama prostora. U literaturi su to klasični ili trigonometrijski Furijeovi redovi. Podrazumevajući da je o njima reč, mi ćemo za njih koristiti jednostavno termin Furijeov red.

2.1. POJAM TRIGONOMETRIJSKOG FURIJEOVOG REDA

Teorema 1. *Neka je red*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\,, \tag{1}$$

ravnomerno konvergentan na segmentu $[-l, l]$. *Tada je*

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\, dx\,,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx,\ \ b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{2}$$

odn. a_0, a_n *i* b_n, $n \in \mathbb{N}$, *su Furijeovi koeficijenti funkcije* f *u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem funkcija.*

Dokaz. Članovi ravnomerno konvergentnog reda (1) su neprekidne funkcije na segmentu $[-l, l]$, pa je funkcija f neprekidna na $[-l, l]$. Na osnovu teoreme 1., II.2.4.3. red (1) može se integraliti član po član na $[-l, l]$, pa je

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int\limits_{-l}^{l} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int\limits_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx + b_n \int\limits_{-l}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = l a_0\,,$$

odakle prva formula u (2).

Funkcije $\cos \frac{n\pi x}{l}$ i $\sin \frac{n\pi x}{l}$ su ograničene na $[-l, l]$, pa je red (1) pomnožen ovim funkcijama ravnomerno konvergentan na segmentu $[-l, l]$ na osnovu teoreme koja je analogna teoremi 4., II.2.2. Integracijom ovih redova, koristeći pri tome ortogonalnost osnovnog trigonometrijskog sistema funkcija, dobijamo

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = a_n \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = l a_n\,,$$
$$\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = b_n \int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = l b_n\,,$$

čime je teorema dokazana. ■

Za egzistenciju Furijeovih koeficijenata određenih formulama (2) dovoljno je da funkcija f bude apsolutno integrabilna na segmentu $[-l, l]$. Pri tome se za svaku apsolutno integrabilnu funkciju smatra da je integrabilna u svojstvenom smislu na svakom konačnom intervalu koji ne sadrži osobene tačke u odnosu na koje je taj integral nesvojstven.

Definicija 1. *Neka je funkcija f apsolutno integrabilna na segmentu $[-l, l]$. Trigonometrijski red*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

u kome su koeficijenti određeni formulama (2) naziva se ***Furijeov red funkcije f po osnovnom trigonometrijskom sistemu funkcija****.*

U daljem tekstu Furijeov red neke funkcije u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem funkcija zvaćemo jednostavno Furijeovim redom i to ćemo označavati sa

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

Delimične sume Furijeovog reda funkcije f u tački $x \in [-l, l]$ označavaćemo sa $S_n(x; f)$ ili kraće sa $S_n(x)$ ako je iz teksta jasno o kojoj je funkciji reč.

Suma $S(x)$ Furijeovog reda funkcije f je periodična funkcija sa osnovnom periodom $2l$. Stoga je za upoređivanje funkcije f i sume Furijeovog reda te funkcije neophodno da funkcija f bude periodična sa periodom $2l$.

Primetimo da se svaka funkcija $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ može produžiti na $\mathbb{R}$ tako da bude periodična. Za to je dovoljno produžiti funkciju f na $[-l, l]$, gde je $[a, b] \subset [-l, l]$ i periodično je produžiti na $\mathbb{R}$ tako da joj perioda bude $2l$. Da bi se ona mogla jednoznačno produžiti, dovoljno je da bude određena na jednom od intervala $[-l, l)$ ili $(-l, l]$. Na krajevima intervala funkciji f možemo pridružiti vrednost

$$\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}\,.$$

Kako Rimanov integral ne zavisi od vrednosti koje funkcija ima na skupu Žordanove mere nula, to Furijeovi koeficijenti ne zavise od vrednosti funkcije na krajevima segmenta $[-l, l]$, ali svakako zavise od načina izbora funkcije f na $[-l, l] \setminus [a, b]$. Naravno da od toga zavisi i odgovarajući Furijeov red funkcije f. Vidimo dakle da svakoj funkciji možemo pridružiti različite Furijeove redove.

Suma Furijeovog reda funkcije f, i kada je Furijeov red konvergentan, ne mora pretstavljati funkciju f. Zato se koristi oznaka $\sim$ kako bi se naznačilo da se radi o Furijeovom redu neke funkcije. U slučaju konvergencije Furijeovog reda, od interesa je izučiti da li Furijeov red konvergira funkciji od koje je nastao. Takođe je od interesa ispitati kada je Furijeov red neke funkcije ravnomerno konvergentan, jer u tom slučaju na osnovu teoreme 1. suma Furijeovog reda pretstavlja tu funkciju.

Primer 1. Ako je funkcija $f : [-l, l] \mapsto \mathbb{R}$ parna, tada je Furijeov red funkcije f oblika:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx\,,$$

gde su Furijeovi koeficijenti određeni formulama

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx\,,\ n \geq 0\,.$$

Ako je funkcija f neparna, Furijeov red je oblika:

$$f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\,,$$

pri čemu su Furijeovi koeficijenti određeni formulama

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Primer 2. Odredimo Furijeov red funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi \leq x < 0\,, \\ x\,, & 0 \leq x < \pi\,, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Furijeovi koeficijenti funkcije f su:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\,, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Furijeov red funkcije f je

$$f \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}\,.$$

2.2. FURIJEOV RED U KOMPLEKSNOJ FORMI. VIŠESTRUKI FURIJEOVI REDOVI

Neka je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

Furijeov red funkcije f. Primenom Ojlerove formule opšti član reda (1) možemo napisati u obliku

$$a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} = a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2} + b_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i} =$$
$$= \frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,.$$

Uvedimo oznake

$$\frac{a_0}{2} = c_0\,,\quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n\,,\quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}\ ,\ n > 0\,.$$

U tom slučaju Furijeov red funkcije f možemo zapisati kao

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}\,. \tag{2}$$

Red (2) nazivamo **Furijeovim redom funkcije f u kompleksnom obliku**. Furijeove koeficijente možemo zapisati u kompleksnoj formi:

$$
\begin{aligned}
c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\frac{\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}}{2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx\,,\ n \geq 0\,,\\
c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\frac{\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}}{2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}\,dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
$$

Iz poslednjih formula vidimo da se za svaku apsolutno integrabilnu funkciju f Furijeov red može pretstaviti u kompleksnoj formi (2), pri čemu su Furijeovi koeficijenti c_n određeni formulom

$$
c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx\,,\ n \in \mathbb{Z}\,, \tag{3}
$$

u kompleksnom zapisu. Koeficijente c_n dobijamo neposredno, koristeći pri tom činjenicu da je sistem

$$
1/2\,,\ e^{-i\frac{\pi x}{l}}\,,\ e^{i\frac{\pi x}{l}}\,,\ldots,\ e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,,\ e^{i\frac{n\pi x}{l}}\,,\ldots
$$

Razmotrimo sada sistem trigonometrijskih funkcija

$$
m \mapsto e^{i\pi\left(\frac{m_1}{l_1}x_1 + \cdots + \frac{m_n}{l_n}x_n\right)}\,, \tag{4}
$$

gde je $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,n}$. Dokažimo da je ovaj sistem ortogonalan na skupu $E_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -l_j \leq x_j \leq l_j\,,\ j =$

$\overline{1,n}\}$. Skalarni proizvod (m,n) je

$$\int\limits_{E_n} e^{i\pi\left(\frac{m_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{m_n}{l_n}x_n\right)}\cdot\overline{e^{-i\pi\left(\frac{n_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{n_n}{l_n}x_n\right)}}\,dx=$$

$$=\int\limits_{-l_1}^{l_1} e^{i\pi\frac{m_1-n_1}{l_1}x_1}\,dx_1\int\limits_{-l_2}^{l_2} e^{i\pi\frac{m_2-n_2}{l_2}x_2}\,dx_2\cdots\int\limits_{-l_n}^{l_n} e^{i\pi\frac{m_n-n_n}{l_n}x_n}\,dx_n=$$

$$=\begin{cases}0\,, & \text{ako je } m\neq n\,,\\ 2^n l_1\cdots l_n\,, & \text{ako je } m=n\end{cases}$$

i

$$\left\|e^{i\pi\left(\frac{m_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{m_n}{l_n}x_n\right)}\right\|^2=2^n l_1\cdots l_n\,.$$

Neka je $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ $2l_j$-periodična funkcija po promenljivoj x_j, $j=\overline{1,n}$. Pretpostavimo da je funkcija f integrabilna na skupu E_n i da važi jednakost

$$f(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{i\pi\left(\frac{m_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{m_n}{l_n}x_n\right)}\,, \tag{5}$$

pri čemu se poslednji red može integraliti član po član. Ako poslednju jednakost pomnožimo sa $e^{i\pi\left(\frac{m_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{m_n}{l_n}x_n\right)}$ i integralimo na skupu E_n, dobijamo Furijeove koeficijente

$$c_k=\frac{1}{2^n l_1\cdots l_n}\int\limits_{E_n} f(x)e^{-i\pi\left(\frac{k_1}{l_1}x_1+\cdots+\frac{k_n}{l_n}x_n\right)}\,dx\,,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{6}$$

Red (4) u kome su koeficijenti c_k određeni formulama (6) nazivamo **n-dimenzionalnim Furijeovim redom** funkcije f po ortogonalnom sistemu (4).

Primer 1. Za periodičnu funkciju

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\,, & 0<x<\pi/2\,,\\ 0\,, & \pi/2\le x\le\pi\end{cases}$$

sa periodom π Furijeovi koeficijenti u kompleksnom zapisu određeni su sa

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x e^{-2nix}\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin x - 2ni\cos x}{1-4n^2}\; e^{-2nix}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2ni + e^{-n\pi i}}{1-4n^2} = \frac{2ni + (-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\,.$$

Zato je

$$f \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2ni+(-1)^n}{1-4n^2} e^{2inx}\,.$$

Zadaci za vežbanje

1. Odrediti Furijeove koeficijente i napisati Furijeov red sledećih funkcija

$a)$ $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0, x \in [-l, l]$, $f(x) = f(x+2l)$, $x \in \mathbb{R}$,

$b)$ $f(x) = \begin{cases} 0\,, & |x| \leq \pi/2\,, \\ |x| - \pi/2\,, & \pi/2 < |x| < \pi\,, \end{cases}$ $f(x) = f(x+2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$,

$c)$ $f(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi < x < 0\,, \\ 1\,, & 0 < x < \pi\,, \end{cases}$ $f(x+2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$d)$ $f(x) = x - [x]$.

2. Napisati Furijeov red funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < 1\,, \\ 2 - x\,, & 1 \leq x < 2\,, \end{cases}$$

tako da on sadrži samo sinusne funkcije.

3. Naći Furijeov red funkcije $f(x) = \sin ax$, $0 \leq x \leq \pi$ tako da on sadrži samo kosinusne funkcije. (Uputstvo: razlikovati slučajeve $a \in \mathbb{Z}$ i $a \notin \mathbb{Z}$)

4. Odrediti Furijeov red u kompleksnoj formi sledećih funkcija

$$a)\ f(x) = e^x\,,\ -\pi < x < \pi\,,\ f(\pi) = \cosh\pi\,,$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < 1\,, \\ 0\,, & 1 < x < 3\,, \end{cases}\quad f(0) = f(1) = 1/2\,,$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 \leq x \leq \pi\,, \\ -1\,, & \pi < x \leq 2\pi\,, \end{cases}\qquad d)\ f(x) = \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,,\ |a| < 1\,,$$

$$e)\ f(x) = \frac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,,\quad |a| < 1\,,\quad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

(Rezultat: a) $\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$, b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1-e^{-2n\pi i/3}}{n}e^{2\pi nxi/3}$, c) $-\frac{2i}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$, d) $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\cos nx\,,\ |x|\le\pi$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty}a^n\sin nx$.)

5. Dokazati da ako apsolutno integrabilna funkcija f na segmentu $[-\pi,\pi]$ zadovoljava uslov

a) $f(x+\pi)=f(x)$, tada je $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

b) $f(x+\pi)=-f(x)$, tada je $a_0=0,\ a_{2n}=b_{2n}=0\,,\ n\in\mathbb{N}$.

6. Ako funkcija f apsolutno integrabilna na segmentu $[0,\pi]$ zadovoljava uslov $f(\pi-x)=f(x)$, dokazati da je

a) $a_{2n-1}=0,\ n\in\mathbb{N}$, ako Furijeov red sadrži samo kosinuse;

b) $b_{2n}=0,\ n\in\mathbb{N}$, ako Furijeov red sadrži samo kosinuse.

7. Kako apsolutno integrabilnu funkciju f na $[0,\pi/2]$ treba proširiti na segment $[-\pi,\pi]$ da bi Furijeov red funkcije f imao oblik:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(2n-1)x\,,\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(2n-1)x$$

(Rezultat: a) $f(-x)=-f(x)\,,\ f(\pi-x)=-f(x)$)

8. Razložiti funkciju $f(x)=x(\pi/2-x)$ na $[0,\pi/2]$ u Furijeov red po a) sistemu $\{\cos(2n-1)x\,,\ n\in\mathbb{N}\}$, b) sistemu $\{\sin(2n-1)x\,,\ n\in\mathbb{N}\}$. (Uputstvo: koristiti prethodni zadatak)

9. Dokazati da Furijeov red funkcije f definisane na segmentu $[0,l]$ može imati oblik

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}b_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\,,\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}\cos\frac{2n\pi x}{l}\,.$$

10. Odrediti karakteristične vrednosti Furijeovih koeficijenata periodične funkcije f periode 2π, ako grafik funkcije f

a) ima centre simetrije u tačkama $(0,0)$ i $(\pm\pi/2,0)$,

b) ima centar simetrije u $(0,0)$ i ose simetrije $x=\pm\pi/2$.

(Rezultat: a) $a_n=0,\ b_{2n-1}=0$ b) $a_n=0,\ b_{2n}=0$)

11. Odrediti vezu između Furijeovih koeficijenata a_n,b_n i α_n,β_n funkcija f i g, ako je a) $f(-x)=g(x)$, b) $f(-x)=-g(x)$.

12. Neka je f 2π-periodična apsolutno integrabilna funkcija. Ako su a_n^* i b_n^* Furijeovi koeficijenti funkcije $f^*(x)=f(x+h)$, a a_n i b_n Furijeovi koeficijenti funkcije f, dokazati da je tada $a_0^*=a_0\,,\ a_n^*=a_n\cos nh+b_n\sin nh\,,\ b_n^*=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

13. Neka je $f=u+iv$ apsolutno integrabilna 2π-periodična funkcija i neka je $f\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ne^{inx}$. Dokazati da je

$$a)\ f(x+\alpha)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{in(x+\alpha)}\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

$$b)\ f(x)e^{ikx}\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}c_{n-k}e^{inx}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

14. Neka su f i g 2π-periodične funkcije integrabilne sa svojim kvadratima na segmentu $[-\pi, \pi]$, pri čemu je

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \qquad g \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}.$$

Dokazati da je fg 2π-periodična apsolutno integrabilna funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$, pri čemu su Furijeovi koeficijenti funkcije fg određeni sa

$$k_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m d_{n-m}.$$

2.3. KONVERGENCIJA FURIJEOVIH KOEFICIJENATA NULI

U prethodnim odeljcima videli smo da je za egzistenciju Furijeovih koeficijenata neophodna apsolutna integrabilnost funkcije. Da bi se razmatrala konvergencija Furijeovog reda neke funkcije, neophodno je da Furijeovi koeficijenti te funkcije konvergiraju nuli. U primeru 1., 1.3. pokazali smo da Furijeovi koeficijenti konvergiraju nuli za klasu funkcija integrabilnih sa svojim kvadratom. U definiciji Furijeovih redova zahteva se apsolutna integrabilnost funkcije. Klasa apsolutno integrabilnih funkcija je šira od klase funkcija integrabilnih sa svojim kvadratom. Prirodno se nameće pitanje da li isto tvrđenje važi i za apsolutno integrabilne funkcije. Odgovor na to pitanje neposredno sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 1. (Riman) *Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na konačnom ili beskonačnom intervalu (a, b), tada je*

$$\lim_{|p|\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos px\,dx = \lim_{|p|\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin px\,dx. \tag{1}$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je funkcija f integrabilna u svojstvenom smislu na intervalu (a, b). Podelimo interval (a, b) tačkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Označimo sa m_i infimum funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Kako je funkcija f integrabilna, ona je i ograničena na svakom od ovih segmenata, pa infimum m_i funkcije f postoji za svako $i = \overline{1,n}$. Transformišimo prvi integral u (1) na sledeći način:

$$\int\limits_a^b f(x)\cos px\,dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos px\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-m_i)\cos px\,dx + \sum_{i=1}^n m_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \cos px\,dx$$

Označimo sa ω_i varijaciju funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$. Kako je $f(x) - m_i \le \omega_i$ na $[x_{i-1}, x_i]$, prvi integral u (1) možemo oceniti sa

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| \le \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^n |m_i|\,,$$

pri čemu je korišćena jednostavna ocena

$$\left|\int_\alpha^\beta \cos px\,dx\right| = \left|\frac{\sin p\alpha - \sin p\beta}{p}\right| \le \frac{2}{|p|}$$

koja važi za svaki konačan segment $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija f integrabilna na (a, b), postoji podela intervala (a, b) tako da je

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon/2\,.$$

Izborom razbijanja brojevi m_i su u potpunosti određeni, pa stoga možemo izabrati $p_\varepsilon > 0$ tako da je za svako $|p| > p_\varepsilon$

$$|p| > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n |m_i|\,.$$

Za tako izabrano p sada je

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| < \varepsilon\,, \tag{2}$$

što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo sada da je funkcija f apsolutno integrabilna na (a,b), pri čemu su a i b jedine osobene tačke, čime se ne umanjuje opštost dokaza. U tom slučaju za dato $\varepsilon > 0$ postoji konačan interval $[c,d] \subset (a,b)$ tako da je

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx - \int_c^d f(x)\cos px\,dx\right| < \varepsilon/2\,. \tag{3}$$

Ovo neposredno sledi iz nejednakosti

$$\left|\int\limits_a^b |f(x)\cos px\,dx - \int_c^d f(x)\cos px\,dx\right| \le \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_d^b |f(x)|\,dx$$

i činjenice da je funkcija f apsolutno integrabilna na intervalu (a,b). Integral $\int_c^d f(x)\cos px\,dx$ prema prvom delu dokaza teži nuli kada $|p| \to +\infty$, pa je za dovoljno veliko $|p|$

$$\left|\int_c^d f(x)\cos px\,dx\right| < \varepsilon/2\,. \tag{4}$$

Sada iz (3) i (4) sledi (2), čime je dokazana prva jednakost u (1). Druga jednakost se dokazuje analogno. ■

Posledica 1. *Furijeovi koeficijenti a_n i b_n apsolutno integrabilne funkcije konvergiraju nuli kada $n \to +\infty$.*

2.4. DIRIHLEOV INTEGRAL PRINCIP LOKALIZACIJE

Neka je funkcija f apsolutno integrabilna na segmentu $[-l,l]$. Za izučavanje konvergencije Furijeovog reda funkcije f na segmentu $[-l,l]$

svrsishodno je pretstaviti Furijeovu sumu $S_n(x; f)$ u obliku koji je pogodan za ispitivanje. Zamenjujući izraze za Furijeove koeficijente u n-toj delimičnoj sumi Furjeovog reda dobijamo

$$
\begin{aligned}
S_n(x; f) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}\, dt \right) \cos \frac{k\pi x}{l} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}\, dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi (t-x)}{l} \right) dt\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Označimo sa

$$
D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi t}{l}\,. \qquad (2)
$$

Sada za delimičnu sumu Furijeovog reda dobijamo sledeći izraz

$$
S_n(x; f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) D_n(t-x)\, dt\,. \qquad (3)
$$

Funkcija $D_n(t)$ naziva se **Dirihleovo jezgro**, a izraz na desnoj strani jednakosti (3) **Dirihleov integral**.

Lema 1. *Dirihleovo jezgro $D_n(t)$ je neprekidna, parna i periodična funkcija sa osnovnom periodom $2l$ za koju je*

$$
a) \quad D_n(0) = n + 1/2\,,
$$

$$
b) \quad \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} D_n(t)\, dt = 1\,, \qquad (4)
$$

$$
c) \quad D_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}}\,, \qquad (5)
$$

za $t \neq 2kl$ *i* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Dokaz. Neprekidnost, parnost i periodičnost Dirihleovog jezgra kao i jednakost (4) slede iz definicije Dirihleovog jezgra. Dokažimo jednakost (5). Množenjem i deljenjem Dirihleovog jezgra sa $2\sin\frac{\pi t}{2l}$ imamo da je

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi t}{l} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\pi t}{2l}\cos\frac{k\pi t}{l}\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}\frac{\pi t}{l} - \sin\frac{2k-1}{2}\frac{\pi t}{l}\right)\right) \\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} \text{ za } t \neq 1kl\,,\ k = 0, \pm 1\pm, \dots \ \blacksquare \end{aligned}$$

Kako je Dirihleovo jezgro parna funkcija, to je

$$\int_{-l}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{l} D_n(t)\,dt\,,$$

pa formulu (4) možemo predstaviti u obliku

$$\frac{2}{l}\int_{0}^{l} D_n(t)\,dt = 1\,. \tag{6}$$

Primetimo da izraz (5) važi samo za $t \neq 2kl$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je

$$\lim_{t\to 2kl} D_n(t) = n + \frac{1}{2}\,,$$

funkciju $\sin(n+1/2)\frac{\pi t}{l}/2\sin\frac{\pi t}{2l}$ možemo dodefinisati do neprekidnosti u tačkama $t = 2kl$, $k \in \mathbb{Z}$, uzimajući da je vrednost funkcije u naznačenim tačkama $n + 1/2$. Na taj način dodefinisana funkcija pretstavlja Dirihleovo jezgro.

Za konvergenciju Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije f, neophodna je konvergencija niza $S_n(x; f)$. U formuli (5) ne možemo ući sa graničnom vrednošću pod integral, jer granična vrednost Dirihleovog jezgra ne postoji kada $n \to +\infty$. Napišimo stoga Dirihleov integral u nešto pogodnijem obliku za ispitivanje. U integralu (3) uvedimo smenu $u = t - x$. Tada je

$$S_n(x;f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} D_n(u)f(u+x)\,du = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_n(u)f(u+x)\,du\,, \tag{7}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $D_n(u)f(x+u)$ periodična funkcija sa periodom $2l$ i teoremu 3., 1.1. Razložimo poslednji integral na zbir integrala po segmentima $[-l,0]$ i $[0,l]$, a zatim u prvom od njih uvedimo smenu $u = -t$ i iskoristimo činjenicu da je $D_n(-t) = D_n(t)$. Na taj način dobijamo izraz za n-tu delimičnu sumu Furijeovog reda funkcije f

$$S_n(x;f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} D_n(u)f(x+u)\,du + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(u)f(x+u)\,du =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(t)f(x-t)\,dt + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(t)f(x+t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))\,dt\,. \tag{8}$$

Stav 1. *Za svako $\delta \in (0,l)$ i $x \in [-l,l]$ delimična suma $S_n(x;f)$ Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije f osnovne periode $2l$ može se prikazati formulom*

$$S_n(x;f) = \frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))\,dt + o(1)\,,\ n \to +\infty\,. \tag{9}$$

Dokaz. Za fiksirano $\delta \in (0, l)$ razložimo integral (8):

$$S_n(x; f) = \frac{1}{l}\int_0^{\delta} + \frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} . \tag{10}$$

Funkcija $1/2\sin\frac{\pi t}{2l}$ je neprekidna, pa je i ograničena na segmentu $[\delta, 2l]$. Kako je funkcija $f(x+t)+f(x-t)$ apsolutno integrabilna na segmentu $[-l, l]$ za svako fiksirano x, to je funkcija $(f(x+t)+f(x-t))/2\sin\frac{\pi t}{2l}$ apsolutno integrabilna na segmentu $[\delta, l]$. Stoga drugi integral u (10) na osnovu Rimanove teoreme konvergira nuli kada $n \to +\infty$, pa možemo pisati

$$\frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\,dt = o(1)\,,\ n \to +\infty\,,$$

odakle sledi (9). ■

Iz formule (9) vidimo da funkcija pod znakom prvog integrala uzima vrednosti na segmentu $[x-\delta, x+\delta]$. Stoga ponašnje tog integrala zavisi od karaktera funkcije u okolini posmatrane tačke. Drugim rečima, važi sledeća

Teorema 2. (Princip lokalizacije) *Ponašanje Furijeovog reda apsolutno integrabilne funkcije u nekoj tački zavisi isključivo od vrednosti koje ta funkcija ima u nekoj okolini posmatrane tačke.*

Prema tome, ako su vrednosti funkcija f i g jednake u nekoj okolini tačke x, onda su Furijeovi redovi ovih funkcija u posmatranoj tački istovremeno konvergentni ili divergentni, pri čemu su sume njihovih Furijeovih redova u tački x jednake, ukoliko su oni konvergentni. Naravno, Furijeovi redovi funkcija f i g su u opštem slučaju različiti.

2.5. KRITERIJUMI KONVERGENCIJE FURIJEOVIH REDOVA

Da bi smo izučili uslove za konvergenciju Furijeovog reda apsolutno integrabilne $2l$-periodične funkcije, pođimo od izraza za sumu $S_n(x; f)$

određenu formulom (8) prethodnog odeljka. Označimo sa S sumu Furijeovog reda u tački x. Tada je

$$S_n(x;f) - S = \frac{1}{l}\int_0^l f_x^*(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\,dt\,, \tag{1}$$

gde je

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S\,.$$

Pri ispitivanju konvergencije Furijeovog reda za nas su od praktičnog interesa slučajevi kada je:

a) funkcija f neprekidna u tački x i kada

b) funkcija f u tački x ima prekid prvog reda, odn. kada postoje granične vrednosti $f(x+0)$ i $f(x-0)$.

U prvom slučaju stavimo $S = f(x)$, a u drugom $S = (f(x+0) + f(x-0))/2$. Ako je $f(x) = (f(x+0)+f(x-0))/2$, kaže se da je x **regularna tačka funkcije** f. Kako je

$$\lim_{t\to 0+} f(x\pm t) = f(x) \quad \text{ili} \quad \lim_{t\to 0+} f(x\pm t) = f(x\pm 0)\,,$$

to je pri ukazanim mogućnostima izbora broja S uvek

$$\lim_{t\to 0+} f_x^*(t) = 0\,.$$

Teorema 1. (Dini) *Neka je f apsolutno integrabilna, $2l$-periodična funkcija. Ako za neko δ, $0<\delta<l$, integral*

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt \tag{2}$$

konvergira, tada Furijeov red funkcije f u tački x konvergira sumi S.

Dokaz. Primetimo najpre da je integral (2) konvergentan onda i samo onda, ako je konvergentan integral

$$\int_0^l \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt\,.$$

Napišimo izraz (1) u obliku

$$S_n(x;f) - S = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{f_x^*(t)}{t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\,dt\,.$$

Kako je funkcija $f_x^*(t)/t$ apsolutno integrabilna, to je takva i funkcija $(f_x^*(t)/t)\cdot(\frac{t}{2}/\sin\frac{\pi t}{2l})$, jer je $2\sin\frac{\pi t}{2l}\sim\frac{\pi t}{l}$ kada $t\to 0$. Stoga na osnovu Rimanove teoreme zaključujemo da je $\lim_{n\to+\infty} S_n(x;f) = S$. ■

Dinijev integral (2) u zavisnosti od oblika broja S možemo napisati kao

$$a)\quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt$$

ili

$$b)\quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)|}{t}\,dt\,.$$

Očigledno da je za konvergenciju ovih integrala dovoljno pretpostaviti konvergenciju integrala

$$(3)\qquad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt \quad \text{i} \quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x)|}{t}\,dt$$

u slučaju a), odn. integrala

$$(4)\qquad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t}\,dt \quad \text{i} \quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{t}\,dt$$

u slučaju b).

Za funkciju f definisanu u nekoj okolini U_x tačke x kažemo da zadovoljava **Dinijeve uslove u tački** x, ako u tački x postoje obe jednostrane granične vrednosti $f(x\pm)$, pri čemu su integrali (4) konvergentni.

Dinijev kriterijum nije najpogodniji za praktično utvrđivanje konvergencije Furijeovog reda. Iz njega međutim slede nekoliko veoma jednostavnih kriterijuma za utvrđivanje konvergencije Furijeovih redova. Pre nego što formulišemo prvu neposrednu posledicu Dinijevog kriterijuma, potsetimo na sledeći pojam.

Definicija 1. *Za funkciju $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, kažemo da zadovoljava sa desne (leve) strane* **Helderov uslov** *sa stepenom $\alpha > 0$ u tački $x \in X$, ako postoji konačna desna (leva) granična vrednost $f(x \pm 0)$ i takvi realni brojevi $\delta > 0$ i $L > 0$, tako da za svako h, $0 < h < \delta$, važi nejednakost*

$$|f(x \pm h) - f(x \pm 0)| \leq L|h|^{\alpha}\,. \tag{5}$$

Funkcija f u tački $x \in X$ zadovoljava Helderov uslov stepena α, ako ona u tački x zadovoljava Helderov uslov stepena α kako sa leve, tako i sa desne strane.

U slučaju $\alpha = 1$ kaže se da funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov u tački x. Broj L je **Lipšicova konstanta.**

Funkcija f zadovoljava Helderov uslov stepena α na segmentu $[a, b]$, ako u svim unutrašnjim tačkama segmenta $[a, b]$ zadovoljava Helderov uslov stepena α, dok na krajevima a i b zadovoljava Helderov uslov stepena α sa desne odn. leve strane respektivno.

Uvedena definicija razlikuje se od klasične u tome što funkcija koja zadovoljava Helderov uslov u tački x u smislu uvedene definicije može biti i prekidna u tački x.

Primetimo da svaka funkcija koja ima ograničen izvod na X zadovoljava Lipšicov uslov na tom skupu, što neposredno sledi na osnovu Lagranžove teoreme.

Teorema 2. (Lipšic) *Neka je f apsolutno integrabilna $2l$-periodična funkcija na segmentu $[-l, l]$. Ako ona zadovoljava Helderov uslov stepena α u tački $x \in (-l, l)$, $\alpha > 0$, tada je Furijeov red funkcije f u toj tački konvergentan i njegova suma jednaka je*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\,. \tag{6}$$

Ako funkcija f zadovoljava sa desne strane uslov Heldera u tački $x = -l$, a sa leva strane u tački $x = l$, tada Furijeov red konvergira u tim tačkama i njegova suma je

$$\frac{f(-l) + f(l)}{2}\,. \tag{7}$$

Dokaz. Izaberimo δ, $0 < \delta < l$, tako da funkcija $f_x^*(t)/t^\alpha$ na segmentu $[0, \delta]$ nema drugih osobenih tačaka, osim možda tačke $t = 0$, i da osim toga funkcija f u tački x zadovoljava uslov Heldera za svako h, $|h| < \delta$. Kako je

$$\frac{|f_x^*(t)|}{t} \leq \left|\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}\right| \leq \frac{2L}{t^{1-\alpha}}\,,$$

gde je L Lipšicova konstanta, a integral $\int_0^\delta dt/t^{1-\alpha}$ konvergira, to prema teoremi Dinija Furijeov red funkcije f konvergira u tački x. ■

Primetimo da funkcija f zadovoljava sa desne (leve) strane Lipšicov uslov u tački x, ako u toj tački postoji **uopšteni levi (desni) izvod** $f'_\pm(x)$ definisan kao

$$f'_\pm(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{\pm t}\,.$$

Zaista, ako postoji recimo uopšteni desni izvod u tački x, tada postoji $\delta > 0$ tako da za svako t, $|t| < \delta$, važi nejednakost

$$\left|\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} - f'_+(x)\right| < 1\,.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi Lipšicov uslov

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leq L|t|\,,\ |t| < \delta\,,$$

sa Lipšicovom konstantom $L = |f'_+(x)| + 1$.

Definicija 3. *Funkcija $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ je deo po deo neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$, ako postoji podela $\tau : a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$ segmenta $[a, b]$ tako da je izvod funkcije f neprekidna funkcija na svakom intervalu (x_{j-1}, x_j), $j = \overline{1, n}$, pri čemu postoje granične vrednosti* $\lim_{t\to 0+} f'(x_{j-1} + t)$ *i* $\lim_{t\to 0+} f'(x_j - t)$.

Na kraju ovog odeljka navedimo bez dokaza nekoliko jednostavnih posledica Dinijeve teoreme.

Posledica 1. *Neka je f $2l$-periodična funkcija apsolutno integrabilna na segmentu dužine $2l$. Ako u tački x postoje $f(x \pm 0)$ i $f'_\pm(x)$, onda Furijeov red funkcije f konvergira u tački x ka vrednosti* (6).

Posledica 2. *Furijeov red funkcije f, deo po deo neprekidno diferencijabilne na segmentu $[-l,l]$, u svakoj tački intervala $(-l,l)$ konvergira ka vrednosti* (6), *a u tačkama $-l$ i l ka vrednosti* (7).

Posledica 3. *Furijeov red funkcije f, neprekidne, deo po deo diferencijabilne na segmentu $[-l,l]$, u svakoj tački intervala $(-l,l)$ konvergira ka vrednosti funkcije u toj tački, a u tačkama $-l$ i l ka vrednosti* (7).

Primer 1. Ispitajmo konvergenciju Furijeovog reda funkcije

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}\,,\quad 0\le x\le 2\pi\,.$$

Proširimo funkciju f sa poluintervala $[0,2\pi)$ na $\mathbb{R}$ tako da dobijena funkcija bude periodična sa periodom 2π. Novodobijena funkcija je naparna, pa je $a_n=0$ za $n=0,1,\ldots$. Koeficijente b_n lako određujemo parcijalnom integracijom

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\\&=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

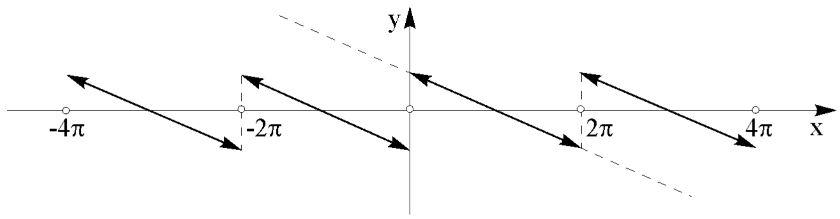
Stoga je

$$\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

Furijeov red zadate funkcije prema poslednjoj posledici konvergira za svako $x\in(0,2\pi)$ ka funkciji f, pa je

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

Za $x=0$ suma Furijeovog reda je nula, a $f(0)\neq 0$, pa prethodna jednakost ne važi za $x=0$. Grafik sume Furijeovog reda posmatrane funkcije prikazan je na sl. 38.



Sl. 38

Primetimo da Furijeov red funkcije f ne konvergira ravnomerno na segmentu $[0, 2\pi]$, jer bi u protivnom suma reda bila neprekidna funkcija.

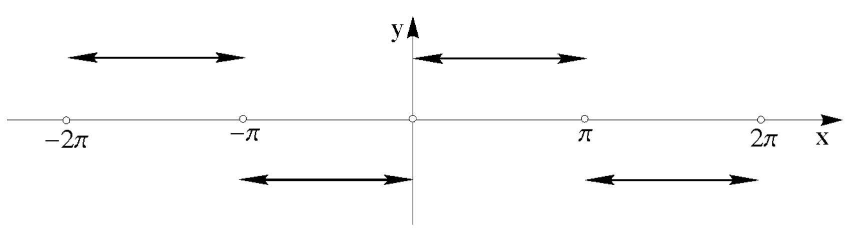
Ako u prethodnom razlaganju funkcije f zamenimo x sa $2x$, a zatim dobijenu jednakost podelimo sa 2, dobijamo jednakost

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi\,.$$

Iz poslednjih dvaju razlaganja, dobijamo sumu reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi\,.$$

Ako sa $S(x)$ označimo sumu poslednjeg reda, onda je $S(0) = S(\pi) = 0$. Zamenjujući u istoj sumi x sa $-x$, vidimo da je suma tog reda na $(-\pi, 0)$ jednaka $-\pi/4$. Na taj način smo dobili razvoj funkcije prikazane na sl. 39.



Sl. 39

Stavljajući u poslednjem razlaganju redom $x = \pi/2$, $\pi/6$, $\pi/3$ dobijamo sledeće sume

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad ; \quad \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$$

Primer 2. Razmotrimo sada 2π-periodičnu funkciju $f(x)$ koja je na segmentu $[-\pi, \pi]$ određena formulom $f(x) = \cos \alpha x$, gde je $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$.

Furijeovi koeficijenti funkcije f su

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n \sin \pi\alpha}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \,,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin nx \, dx = 0 \,.$$

Funkcija f je neprekidna 2π-periodična funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}$ osim u tačkama $x_n = (2n+1)\pi$ u kojima ima konačne jednostrane izvode. Furijeov red te funkcije prema posledici 3. u svakoj tački segmenta $[-\pi, \pi]$ konvergira sumi f, pa je

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right) . \tag{8}$$

Ako u prethodnoj jednakosti stavimo da je $x = 0$, dobijamo formulu

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots \,.$$

Za $x = \pi$ jednakost (8) dobija sledeći oblik

$$\mathrm{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \,. \tag{9}$$

Kako za $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$ važi nejednakost $|\alpha^2 - n^2| \geq n^2 - \alpha_0^2$, to je prema Vajerštrasovom kriterijumu red (9) ravnomerno konvergentan po α za svako $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$. Stoga se on može integrirati član po član na osnovu teoreme 1., II.2.4.3. Osim toga je

$$\pi\mathrm{ctg}\pi x = d(\ln\sin\pi x - \ln\pi x) = d\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right),$$

pa je

$$\int_0^x \left(\mathrm{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \int_0^x d\left(\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\Bigg|_{\alpha=\varepsilon}^{\alpha=x} = \ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

Sada na osnovu prethodnog možemo integraliti jednakost (9), posle čega se dobija

$$\int_0^x \left(\mathrm{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2\alpha\, d\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

odnosno

$$\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

odakle sledi poznata formula

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \tag{10}$$

koja važi za svako $|x| < 1$.

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $f(t) = g(t)$ za svako t u nekoj okolini tačke x. Dokazati da Furijeov red funkcije f konvergira ka $(f(x+0) + f(x-0))/2$ u tački x onda i samo onda ako Furijeov red funkcije g konvergira ka $(g(x+0) + g(x-0))/2$ u tački x.

2. Dokazati da je

$$\sup_n \int_{-l}^{l} |D_n(t)|\,dt = +\infty\,,$$

gde je D_n Dirihleovo jezgro. (Uputstvo: Iskoristiti nejednakost $\sin x \leq x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ i činjenicu da je integral $\int_0^\infty |\sin x|/x\,dx$ divergentan)

3. Neka je $D(t,\lambda)$ za svako $\lambda \in \Lambda$ neprekidna realna funkcija promenljive $t \in [a,b]$ za koju je

$$D = \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_a^b |D(t,\lambda)|\,dt < +\infty\,.$$

Za svako $x(t) \in \mathcal{C}([a,b])$ neka je

$$y(\lambda) \equiv A(x) = \int_a^b x(t)D(t,\lambda)\,dt$$

funkcija definisana na skupu Λ. Dokazati da je A ograničen linearan operator čija je norma D. (Uputstvo: iz nejednakosti $|A(x)| \leq D\|x\|$ sledi ograničenost operatora A, pri čemu je $\|A\| \leq D$. Za dokaz obratne nejednakosti posmatrati funkcije $x_n(t,\lambda) = u_n(D(t,\lambda))$, gde je $u_n(\tau)$ neprekidna funkcija jednaka 1 za $\tau \leq -1/n$, 1 za $\tau \geq 1/n$ i linearna naa segmentu $[-1/n, 1/n]$. $D(t,\lambda)x_n(t,\lambda)$ je nenegativna funkcija jednaka $|D(t,\lambda)|$ za $|D(t,\lambda)| \geq 1/n$ koja nije veća od $|D(t,\lambda)|$ u ostalim tačkama. Kako je $A(x_n(t,\lambda)) \geq \int_a^b |D(t,\lambda)|\,dt - (b-a)/n$ i $\|x_n(t,\lambda)\| \leq 1$, obratna nejednakost sledi iz činjenice da je

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|a(x(t))\| \geq \sup_{n,\lambda} |A(x_n(t,\lambda))| = D)$$

4. **Banah-Štajnhaus*)** Neka je $\{A_n\}$ niz neprekidnih linearnih operatora koji preslikavaju Banahov prostor X u normiran prostor Y za koji je $\sup_n \|A_n\| = +\infty$. Dokazati da tada u svakoj kugli $K_r(x_0) \subset X$ postoji tačka x u kojoj je

$$\sup_n \|A_n(x)\| = +\infty\,.$$

5. Dokazati da postoji neprekidna funkcija čiji Furijeov red ne pretstavlja datu funkciju. (Uputstvo: iskoristiti prethodna tri zadatka)

6. Neka je funkcija f definisana na konačnom segmentu $[a,b]$, $\tau : a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$ proizvoljno razbijanje segmenta $[a,b]$, a

$$v_\tau = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|\,.$$

---

* Hugo Stainhaus (1887-1972)-poljski matematičar

Ako je skup $\{v_\tau\}$ odozgo ograničen, za funkciju f kažemo da je **ograničene varijacije**. Za funkciju f ograničene varijacije broj

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) := \sup_\tau v_\tau$$

definiše **potpunu varijaciju funkcije** f. Dokazati sledeća tvrđenja.

a) Neka je funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ i $a<c<b$. Ako funkcija f ima ograničenu varijaciju na segmentu $[a,b]$, tada ona ima ograničenu varijaciju na segmentima $[a,c]$ i $[c,b]$ i obratno. Pri tome je

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)\,.$$

b) Ako je funkcija f ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$, tada je funkcija

$$F(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}\,,\; a \le x \le b\,,$$

monotono rastuća, ograničena funkcija.

c) Funkcija f je ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$ onda i samo onda ako postoji monotono rastuća i ograničena funkcija F tako da je

$$|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x')$$

za svako x' i x'' za koje je $a \le x' < x'' \le b$.

d) (**Jordan**) Da bi funkcija f imala na segmentu $[a,b]$ ograničenu varijaciju, potrebno je i dovoljno da se ona može prikazati kao razlika dve monotono rastuće funkcije.

7. **(Dirihle)**Ako je funkcija f monotono rastuća i ograničena na segmentu $[0,h]$, $h>0$, dokazati da je

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^h f(x)\frac{\sin px}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0+)\,.$$

(Uputstvo: $\int_0^h f(x)\frac{\sin px}{x}\,dx$ razmatrati u obliku $\int_0^h [f(x) - f(0+)]\frac{\sin px}{x}\,dx + f(0+)\cdot \int_0^h \frac{\sin px}{x}\,dx$. Koristeći Dirihleov integral lako se dokazuje da drugi integral teži $\frac{\pi}{2} f(0+)$ kada $p \to +\infty$. Prvi integral razbiti na dva: $\int_0^\delta + \int_\delta^h$, gde je $\delta < h$ izabrano tako da je za zadato $\varepsilon > 0$ $0 \le f(x) - f(0+) < \varepsilon$ za $0 < x \le \delta$. Drugi od ovih integrala teži nuli po Rimanovoj teoremi. Da se dokaže konvergencija prvog integrala ka nuli, primeniti Boneovu* formulu)

* Bonnet O. (1819-1892)-francuski matematičar

8. **(Dirihle-Žordan)** Furijeov red funkcije f u tački x konvergira ka S (vid. 2.5.), ako je funkcija f ograničene varijacije na segmentu $[x-h, x+h]$. Dokazati. (Uputstvo: koristeći zadatke 6.d) i 7. dokazati da je $\lim S_n(x,f) = (f(x+0) + f(x-0))/2$)

9. **(Dirihleov kriterijum)** Ako je $2l$-periodična funkcija f monotona na segmentu $[-l, l]$ i u njemu ima najviše konačno mnogo prekida, tada Furijeov red funkcije f u svakoj tački konvergira sumi S. Dokazati.

10. Dokazati da su kriterijumi Dinija i Dirihle-Žordana neuporedivi. (Uputstvo: razmotriti funkcije $f(x) = 1/\ln(|x|/2\pi)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ i $g(x) = x \cdot \cos(\pi/2x)$, $x \neq 0$, $g(0) = 0$)

11. Dokazati da formula (10) u primeru 2. važi za sve realne brojeve. (Uputstvo: dokazati najpre da ona važi za $x = 1$, a zatim dokazati da je funkcija

$$P(x) = \pi x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

periodična sa periodom 2. U tom cilju posmatrati delimične proizvode beskonačnog proizvoda koji definišu funkciju $P(x)$)

2.6. SUMIRANJE FURIJEOVIH REDOVA METODOM SREDNJIH ARITMETIČKIH SREDINA

Neka je f apsolutno integrabilna funkcija na segmentu $[-l, l]$ za koju je $f(-l) = f(l)$. Produžimo je na $\mathbb{R}$ do $2l$-periodične funkcije. Razmotrimo nizove srednjih aritmetičkih sredina

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1} \tag{1}$$

i

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}, \tag{2}$$

gde je $S_n(x)$ n-ta delimična suma Furijeovog reda funkcije f, a $D_n(x)$ odgovarajuće Dirihleovo jezgro. Sumu $\sigma_n(x)$ nazivamo **Fejerovom sumom n-tog reda funkcije f**, a $\Phi_n(x)$ **Fejerovim jezgrom n-tog reda**.

Koristeći Dirihleov integral za reprezentaciju delimičnih suma Furijeovog reda imamo

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} D_k(t) f(x+t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+t)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Phi_n(t) f(x+t)\,dt\,.$$

Lema 1. *Fejerovo jezgro ima sledeća svojstva*

a) $\Phi_n(x)$ *je parna, neprekidna,* $2l$*-periodična funkcija za koju je*

$$\Phi_n(0) = (n+1)/2\,;$$

b) za svako $x \neq 2kl$, $k \in \mathbb{Z}$, *važi jednakost*

$$\Phi_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}\frac{\pi x}{l}}{2(n+1)\sin^2 \frac{\pi x}{2l}}\,;$$

c) $\Phi_n(x) \geq 0$ *za svako* x*;*

d) za svako $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Phi_n(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l}\Phi_n(x)\,dx = 1\,;$$

e) za svako δ, $0 < \delta < l$, *važi*

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\delta\leq|x|\leq l}\Phi_n(x) = 0\,.$$

Dokaz. a) Parnost, periodičnost i neprekidnost slede iz definicije Fejerovog jezgra i osobina Dirihleovog jezgra. Kako je $D_n(0) = (n+1)/2$, to je

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}\,.$$

b) Za $x \neq 2kl$, $k \in \mathbb{Z}$, jednostavnim transformacijama dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\Phi_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}}{2\sin\frac{\pi x}{2l}} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi x}{2l}}{4\sin^2\frac{\pi x}{2l}} = \\
&= \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{\pi x}{2l}}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x}{l} - \cos(k+1)\frac{\pi x}{l}\right) = \\
&= \frac{1-\cos(n+1)\frac{\pi x}{l}}{4(n+1)\sin^2\frac{\pi x}{2l}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}\frac{\pi x}{l}}{2(n+1)\sin^2\frac{\pi x}{2l}}\,.
\end{aligned}$$

Svojstvo c) neposredno sledi iz b).

d) Koristeći definiciju Fejerovog jezgra i lemu 1. b) 2.4. imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Phi_n(x)\,dx &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\right)dx = \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}D_k(x)\,dx = 1\,.
\end{aligned}$$

e) Koristeći izraz za Fejerovo jezgro dobijen pod b) imamo sledeću ocenu

$$0 \leq \max_{\delta\leq|x|\leq l}\Phi_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\max_{\delta\leq|x|\leq l}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}\frac{\pi x}{l}}{\sin^2\frac{\pi x}{2l}} \leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\pi\delta}{2l}}$$

odakle neposredno sledi poslednje tvrđenje. ■

Teorema 1. (Fejer) *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$ i ima jednake vrednosti na krajevima tog segmenta, tada niz Fejerovih suma ravnomerno konvergira na segmentu $[-l, l]$ funkciji f.*

Dokaz. Produžimo funkciju f na $\mathbb{R}$ tako da joj osnovna perioda bude $2l$. Tako produžena funkcija je zbog uslova $f(-l) = f(l)$ neprekidna, pa dakle i ravnomerno neprekidna na $\mathbb{R}$ prema teoremi 1., 1.1. . Neka je $\varepsilon > 0$. Na osnovu dokazane leme imamo sledeću ocenu

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = \left| \frac{f(x)}{l} \int_{-l}^{l} \Phi_n(t)\, dt - \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \Phi_n(t) f(x+t)\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \Phi_n(t) |f(x) - f(x+t)|\, dt = \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{l} \right) .$$

Broj $\delta > 0$ izabran je tako da modul neprekidnosti funkcije f zadovoljava uslov $\omega(\delta, f) < \varepsilon/3$, što je moguće jer je funkcija f ravnomeno neprekidna na $\mathbb{R}$. Stoga je

$$\frac{1}{l} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) |f(x) - f(x+t)|\, dt \le \frac{\omega(\delta, f)}{l} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\, dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3l} \int_{-l}^{l} \Phi_n(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ za svako } x \in \mathbb{R}\,.$$

Da ocenimo ostala dva integrala, primetimo da je funkcija f ograničena na $\mathbb{R}$. Postoji dakle broj $M > 0$ tako da je $|f(x)| \le M$ za svako $x \in \mathbb{R}$. No onda je

$$\frac{1}{l} \int_{\delta}^{l} \Phi_n(t) |f(x) - f(x+t)|\, dt \le \frac{1}{l} \int_{\delta}^{l} \Phi(t) (|f(x)| + |f(x+t)|)\, dt \le$$

$$\le \frac{2M}{l} \int_{\delta}^{l} \Phi_n(t)\, dt \le \frac{2M}{l} \sup_{\delta \le |t| \le l} \Phi_n(t) \int_{\delta}^{l} dt =$$

$$= \frac{2M(l-\delta)}{l} \sup_{\delta \le t \le l} \Phi_n(t) \le 2M \sup_{\delta \le t \le l} \Phi_n(t)$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Prema svojstvu e) prethodne leme, za dato $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je za $n \ge n_\varepsilon$

$$\frac{1}{l} \int_{\delta}^{l} \Phi_n(t) |f(x) - f(x+t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ za svako } x \in \mathbb{R}\,.$$

Analogno se dokazuje da je za $n \geq n_\varepsilon$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{-\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Iz dobijenih nejednakosti sledi da je $|f(x)-\sigma_n(x)| < \varepsilon$ za $n \geq n_\varepsilon$ i svako $x \in \mathbb{R}$, što dokazuje ravnomernu konvergenciju niza $\{\sigma_n(x)\}$ ka funkciji f na $\mathbb{R}$. ■

2.7. APROKSIMACIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA POLINOMIMA

Kao neposrednu posledicu Fejerove teoreme imamo Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji neprekidnih funkcija trigonometrijskim polinomima.

Teorema 1. (Vajerštras) *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$ i ako je $f(-l) = f(l)$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom $T(x)$ tako da je*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

za svako $x \in [-l, l]$.

Kako je Fejerova suma $\sigma_n(x)$ trigonometrijski polinom reda ne većeg od n, uzimajući u Fejerovoj teoremi odgovarajuću Fejerovu sumu imamo dokaz teoreme.

Teorema 2. (Vajerštras) *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji algebarski polinom $P(x)$ tako da je*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

za svako $x \in [a, b]$.

Dokaz. Uočimo linearno preslikavanje

$$x = a + \frac{b-a}{l}t\,, \quad 0 \leq t \leq l$$

segmenta $[0, l]$ na segment $[a, b]$. Funkciju

$$F(t) = f\left(a + \frac{b-a}{l}t\right),$$

koja je neprekidna na segmentu $[0, l]$, produžimo do parnosti na $[-l, 0]$ stavljajući $F(t) = F(-t)$ za $t \in [-l, 0]$. Tako definisana funkcija je neprekidna na segmentu $[-l, l]$, pri čemu je $F(-l) = F(l)$. Za dato $\varepsilon > 0$ na osnovu prethodne teoreme postoji trigonometrijski polinom $T(t)$ tako da je

$$|F(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $t \in [-l, l]$.

Kao linearna kombinacija analitičkih funkcija, trigonometrijski polinom $T(t)$ je analitička funkcija koja se može prikazati u obliku stepenog reda

$$T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

koji je ravnomerno konvergentan na svakom konačnom segmentu realne prave. Niz delimičnih suma $\{P_n(t)\}$ tog reda ravnomerno konvergira ka $T(t)$ na segmentu $[-l, l]$, pa stoga postoji prirodan broj n_ε tako da je za $n \geq n_\varepsilon$

$$|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $t \in [-l, l]$. Stavljajući da je $P_n(t) = P(t)$ imamo da je

$$|F(t) - P(t)| \leq |F(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \varepsilon$$

za svako $t \in [-l, l]$. Vraćajući se u poslednjoj nejednakosti na staru promenljivu, dobijamo nejednakost

$$\left|f(x) - P\left(\frac{x-a}{b-a}l\right)\right| < \varepsilon$$

koja važi za svako $x \in [a, b]$. Očigledno je $P\left(\frac{x-a}{b-a}l\right)$ polinom po x. ■

Vajerštrasova teorema je od izuzetnog značaja zbog njene primene u najrazličitijim oblastima matematike. Ona ukazuje na činjenicu da se klasa neprekidnih funkcija može sa željenim stepenom tačnosti opisati klasom algebarskih polinoma. Pri tome se svaka neprekidna funkcija može prikazati analitički u obliku ravnomerno konvergentnog reda čiji su članovi polinomi.

Zaista, za neprekidnu funkciju f na segmentu $[a, b]$ i niz $\varepsilon_n = 1/n$ neka je $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, niz polinoma koji prema teoremi 2. zadovoljava uslov

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$$

za svako $x \in [a, b]$. Očigledno da niz $P_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ kada $n \to +\infty$, pa je stoga

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [P_{n+1} - P_n(x)]\,.$$

Poslednji red ravnomerno konvergira funkciji f na $[a, b]$.

2.8. ZATVORENOST TRIGONOMETRIJSKOG SISTEMA. PARSEVALOVA JEDNAKOST

Primenom Vajerštrasove teoreme dokazaćemo da je osnovni trigonometrijski sistem potpun u prostoru $\mathcal{R}^2([-l.l])$. Norma u prostoru $\mathcal{R}^2([-l, l])$ zadata je skalarnim proizvodom koji je definisan u primeru 1., 1.2. Broj $\|f - g\|$ nazivamo **srednje kvadratnim rastojanjem elemenata** $f, g \in \mathcal{R}^2([a, b])$.

Neka je $f \in \mathcal{R}^2([-l, l])$ i neka su $-l$ i l jedine osobene tačke nesvojstvenog integrala funkcije f na segmentu $[-l, l]$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\int_{-l}^{-l+\delta} f^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{16} \quad \text{i} \quad \int_{l-\delta}^{l} f^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{16}\,.$$

Definišimo funkciju $f_\delta : [-l, l] \mapsto \mathbb{R}$, $0 < \delta < l$, sa

$$f_\delta = \begin{cases} f(x)\,, & |x| < l - \delta\,, \\ 0\,, & l - \delta \le |x| \le l\,. \end{cases}$$

Za funkciju $f \in \mathcal{R}([a,b])$ je tada očigledno

$$\|f - f_\delta\| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{1}$$

Funkcija $f_\delta \in \mathcal{R}([-l+\delta, l-\delta])$, pa je ograničena na $[-l+\delta, l-\delta]$. Postoji dakle $L > 0$ tako da je $|f_\delta(x)| \leq L$ za svako $x \in [-l+\delta, l-\delta]$. Kako je funkcija f integrabilna na $[-l+\delta, l-\delta]$, postoji razbijanje $\tau : -l+\delta \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv l-\delta$ tako da je

$$\int\limits_{-l+\delta}^{l-\delta} f_\delta(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon^2}{32L}\,,$$

gde je $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $k = \overline{1,n}$, a $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Definišimo funkciju g sa

$$g(x) = \begin{cases} m_k\,, & x \in [x_{k-1}, x_k)\,,\ k = \overline{1,n}\,, \\ 0\,, & x \in [-l, -l+\delta) \cup [l-\delta, l]\,, \end{cases}$$

za koju se lako proverava nejednakost $(f_\delta - g)^2 \leq |f_\delta^2 - g^2|$ na segmentu $[-l, l]$. Tada je

$$\begin{aligned} \|f_\delta - g\|^2 &= \int\limits_{-l}^{l} (f_\delta - g)^2\,dx \leq \int\limits_{-l}^{l} |f_\delta - g||f_\delta + g| \leq \\ &\leq 2L \int\limits_{-l}^{l} |f_\delta - g|\,dx = 2L \left(\int\limits_{-l+\delta}^{l-\delta} f_\delta\,dx - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \right) < \frac{\varepsilon^2}{16}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Konačno, izaberimo $\delta_1 > 0$ tako da su intervali $(x_j - \delta_1, x_j + \delta_1)$, $j = \overline{1,n}$, disjunktni, pri čemu je $-l < x_0 - \delta_1$, $x_n + \delta_1 < l$ i $8L^2\delta_1(n+1) < \varepsilon^2/16$, i definišimo funkciju $g_{\delta_1} : [-l, l] \mapsto \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$g_{\delta_1}(x) = g(x) \text{ za } x \in [-l, x_0 - \delta_1] \cup \bigcup_{j=0}^{n} [x_j + \delta_1, x_{j+1} - \delta_1] \cup [x_n + \delta_1, l]\,;$$

a na intervalima $[x_j - \delta_1, x_j + \delta_1]$, $j = \overline{0,n}$, g_{δ_1} je linearna funkcija određena tačkama $(x_j - \delta_1, g(x_j - \delta_1))$ i $(x_j + \delta_1, g(x_j + \delta_1))$. Kako je $|g_{\delta_1}(x)| \le L$ za svako $x \in [-l, l]$, to je

$$\|g - g_{\delta_1}\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{x_j-\delta_1}^{x_j+\delta_1} (g - g_{\delta_1})^2 \, dx \le \tag{3}$$

$$\le 4L^2 \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{x_j-\delta_1}^{x_j+\delta_1} dx = 8L^2\delta_1(n+1) < \frac{\varepsilon^2}{16}\,.$$

Funkcija g_{δ_1} zadovoljava uslove prve Vajerštrasove teoreme o aproksimaciji neprekidne funkcije, pa stoga za dato ε postoji trigonometrijski polinom $T(x)$ tako da je

$$\|g_{\delta_1} - T\| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{4}$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) sledi da je

$$\|f - T\| < \varepsilon\,,$$

čime je dokazana sledeća

Teorema 1. *Osnovni trigonometrijski sistem funkcija je zatvoren u prostoru* $\mathcal{R}^2([-l,l])$.

Iz dokazane teoreme i teorema 1. i 4., 1.4. neposredno sledi

Posledica 1. *Za funkciju* $f \in \mathcal{R}^2([-l,l])$ *važi Parsevalova jednakost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\, dx\,,$$

a Furijeov red funkcije f *konvergira u srednjem na* $[-l,l]$.

Primetimo sada da je osnovni trigonometrijski sistem funkcija potpun u $\mathcal{R}^2([-l,l])$. Zaista, neka je $f \in \mathcal{R}^2([-l,l])$ funkcija koja je ortogonalna sa svakim elementom osnovnog trigonometriskog sistema. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom T tako da je

$$\|f - T\| < \varepsilon$$

za svako $x \in [-l, l]$. Kako je $(f, T) = 0$, to je

$$\|f\|^2 = (f, f) = (f, f - T) \le \|f\| \|f - T\| < \varepsilon \|f\|\,,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja ε sledi da je $\|f\| = 0$.

Primer 1. Razmotrimo funkciju $f(x) = x$, $0 \le x \le 2$. Produžimo je do parnosti na segmentu $[-2, 2]$. Tada su Furijeovi koeficijenti za tako dobijenu funkciju

$$a_0 = 2\,, \qquad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\,, \qquad b_n = 0\,.$$

Kako je $f \in \mathcal{R}^2([-2, 2])$, za funkciju f važi Parsevalova jednakost

$$\frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx\,,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Iz ove sume lako obijamo sumu

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\pi^4}{90}\,. \end{aligned}$$

Zadaci za vežbanje

1. Neka je $U_\varepsilon(y) = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ i $Q \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup. Za $y \in Q$ neka je $D_n(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija definisanih na $\mathbb{R}$ koji zadovoljava uslove:

(i) $D_n(x, y) \ge 0$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{U_\varepsilon(y)} D_n(x, y) = 1$ za svako $\varepsilon > 0$;

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{Q\setminus U_\varepsilon(y)} D_n(x,y)\,dy = 0$ za svako $\varepsilon > 0$.

Niz $(D_n(x,y))$ nazivamo **Dirakovim nizom za tačku** y. Ako je funkcija f deo po deo neprekidna i neprekidna u tački y, dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_Q f(x)D_n(x,y)\,dx = f(y)\,.$$

2. Neka je $K : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna, nenegativna funkcija koja je jednaka nuli van nekog ograničenog intervala za koju je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1\,.$$

Dokazati da je niz $\{K_n\}$ definisan sa $K_n(t) := nK(nt)$ Dirakov niz.

3. Ako je $D_n(t)$ Dirihleovo jezgro, dokazati da $(D_n(t)/2\pi)$ nije Dirakov niz.

4. Dokazati da je $(\Phi_n(t)/2\pi)$, gde je $\Phi_n(t)$ Fejerovo jezgro, Dirakov niz.

5. Neka su članovi Dirakovog niza $(D_n(x,y))$ neprekidne funkcije na Q^2, gde je Q kompaktan skup u $\mathbb{R}$. Ako je funkcija f deo po deo neprekidna, dokazati da je sa

$$f_n(x) = \int\limits_Q f(y)D_n(x,y)\,dy$$

definisan niz neprekidnih funkcija na Q koji ravnomerno konvergira funkciji $f(x)$ na tom skupu.

6. Neka je $Q = [0,1]$. Dokazati da je

$$D_n(x,y) = \frac{[1-(x-y)^2]^n}{\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt}\ ,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

Dirakov niz za svako $y \in (0,1)$, a zatim na osnovu toga dokazati da je sa

$$f_n(y) = C_n \int\limits_0^1 [1-(x-y)^2]^n f(x)\,dx$$

definisan niz polinoma koji ravnomerno aproksimira funkciju f na skupu $[\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

7. Neka su f i g periodične funkcije periode $2l$. Funkciju

$$f * g := \int\limits_{-l}^{l} f(t)f(x-t)\,dt$$

nazivamo **konvolucijom funkcija** f i g. Dokazati da je

$$a)\ f * D_n(x) = s_n(x, f)\,, \quad b)\ f * \Phi_n(x) = \sigma_n(x)\,,$$

gde $s_n(x, f)$ n-ta delimična suma Furijeovog reda funkcije f, a $\sigma_n(x)$ Fejerova suma n-tog reda. Ako je funkcija f neprekidna, dokazati da niz $\{f * \Phi_n\}$ ravnomerno konvergira na svakom kompaktnom skupu realne prave.

8. Dokazati da su sistemi funkcija $\{\cos kx : k = 0, 1, \dots\}$, $\{\sin kx : k \in \mathbb{N}\}$ ortogonalni i zatvoreni u prostoru $\mathcal{R}^2([a, a + \pi])$ za svako $a \in \mathbb{R}$.

9. Dokazati da je sistem funkcija $\{t^n : n = 0, 1, \dots\}$ zatvoren u prostoru $\mathcal{R}^2([a, b])$ za svaki segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. (Uputstvo: Dokazati najpre da za svako $f \in \mathcal{R}([a, b])$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji $h_\varepsilon \in \mathcal{C}([a, b])$ tako da je $\|f - h_\varepsilon\| < \varepsilon$, a zatim primeniti drugu Vajerštrasovu teoremu)

10. Dokazati da je sistem $\{t^{2n} : n = 0, 1, \dots\}$ zatvoren na prostoru $\mathcal{R}^2([a, b])$ za svako $a \geq 0$, ali da nije zatvoren u prostoru $\mathcal{R}^2([-1, 1])$. (Uputstvo: za dokaz drugog tvrđenja razmotriti integral $\int_{-1}^{1}(t - \sum_0^n c_i t^{2i})^2\, dt$, $\{c_i\} \subset \mathbb{R}$)

11. Dokazati da za funkcije $f, g \in \mathcal{R}^2([-l, l])$ važi uopštena jednakost Parsevala

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\alpha_n + b_n\beta_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)g(x)\, dx\,.$$

12. Neka je $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ zatvoren ortonormiran niz funkcija u $\mathcal{R}^2([a, b])$. Dokazati uopštenu Parsevalovu jednakost

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)c_n(g)\,,$$

gde su $c_n(f)$ i $c_n(g)$ Furijeovi koeficijenti funkcija $f, g \in \mathcal{R}^2([a, b])$ u odnosu na ortonormiran sistem $\{\varphi_n : n \geq 1\}$.

13. Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na segmentu $[-l, l]$, a (b_n) Furijeovi koeficijenti uz sinuse u razvoju funkcije f, dokazati da je red $\sum b_n/n$ konvergentan.

14. Dokazati da trigonometrijski red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln x}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

ne može biti Furijeov red funkcije koja je apsolutno integrabilna na $[-\pi, \pi]$.

15. Ako funkcije $f, g \in \mathcal{R}^2([-l, l])$ imaju isti Furijeov red, dokazati da je onda $f = g$ skoro svuda na $[-l, l]$, odn. da je $f = g$ u $\mathcal{R}^2([a, b])$.

16. Dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

(Uputstvo: primeniti Parsevalovu jednakost na funkciju $f(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$; $f(0) = f(2\pi) = 0$)

17. Primenom Parsevalove jednakosti na funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & |x| < \alpha\,, \\ 0\,, & \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

naći sume redova

$$(i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\,, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}\,.$$

18. Neka je funkcija f intrgrabilna sa kvadratom na segmentu $[-l, l]$. Dokazati da je tada

$$\int_{-l}^{l} (f(x) - S_{n+1}(x))^2\,dx \le \int_{-l}^{l} (f(x) - S_n(x))^2\,dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

19. Ako su Furijeovi koeficijenti funkcije $f \in \mathcal{R}^2([-\pi, \pi])$ jednaki nuli, dokazati da je $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| = 0$. Ako je osim toga funkcija f neprekidna, dokazati da je tada $f(x) = 0$ na $[-\pi, \pi]$.

20. Ako su Furijeovi koeficijenti funkcija f i g jednaki i ako su funkcije f i g klase $\mathcal{R}^2([-\pi, \pi])$, dokazati da je tada

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx = 0\,.$$

Ako su funkcije f i g neprekidne na $[-\pi, \pi]$, dokazati da je tada $f(x) = g(x)$ na segmentu $[-\pi, \pi]$.

21. Neka su funkcije f i g klase $\mathcal{C}^2([-l, l])$. Dokazati da se Furijeov red funkcije $f \cdot g$ može dobiti kao proizvod Furijeovih redova funkcija f i g.

22. Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[0, \pi]$, pri čemu je $f(0) = f(\pi) = 0$. Ako funkcija f ima izvod na segmentu $[0, \pi]$ i ako je kvadrat tog izvoda integrabilna funkcija na tom segmentu, dokazati da je tada

$$\int_{0}^{\pi} (f(x))^2\,dx \le \int_{0}^{\pi} (f'(x))^2\,dx\,.$$

23. Neka funkcija f neprekidna na segmentu $[-\pi, \pi]$ ima izvod koji je integrabilna funkcija na tom segmentu. Ako je $f(-\pi) = f(\pi)$ i $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, dokazati da je tada

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,dx\,.$$

2.9. DIFERENCIRANJE I INTEGRALjENJE FURIJEOVIH REDOVA

Teorema 1. *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$, pri čemu je $f(-l) = f(l)$. Ako je funkcija f deo po deo neprekidno diferencijabilna na $[-l, l]$, tada je*

$$f' \sim \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} -na_n \sin \frac{n\pi x}{l} + nb_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

odn. Furijeov red izvoda funkcije f dobija se formalnim diferenciranjem Furijeovog reda funkcije f.

Dokaz. Neka je

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \beta \sin \frac{n\pi x}{l}\,.$$

Tada je

$$\alpha_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x)\, dx = \frac{1}{l}(f(l) - f(-l)) = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \\ &= \frac{1}{l} \left(f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^{l} + \frac{n\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \right) = \frac{n\pi}{l} b_n\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \\ &= \frac{1}{l} \left(f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^{l} - \frac{n\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \right) = -\frac{n\pi}{l} a_n\,. \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 1. *Neka funkcija f na segmentu $[-l,l]$ ima neprekidne izvode zaključno do $(k-1)$-vog reda, pri čemu je $f^{(j)}(-l) = f^{(j)}(l)$, $j = 1,2,\dots,n-1$. Ako je $f^{(k)}$, $k \geq 1$, deo po deo neprekidna funkcija na $[-l,l]$, tada za Furijeove koeficijente funkcije f važe nejednakosti*

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k} \quad , \quad |b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k} \quad n = 1,2,\dots\ ,$$

gde je (ε_n) niz pozitivnih brojeva za koje je red $\sum \varepsilon_n^2$ konvergentan.

Dokaz. Primenjujući prethodni stav k-puta na Furijeov red funkcije f dobijamo

$$f^{(k)} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

gde je

$$\alpha_n = \pm\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k a_n \quad , \quad \beta_n = \pm\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k b_n\,, \tag{1}$$

ili

$$\alpha_n = \pm\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k b_n \quad , \quad \beta_n = \pm\left(\frac{n\pi}{l}\right)^k a_n\,. \tag{2}$$

Na osnovu Beselove nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leq \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} [f^{(k)}(x)]^2\,dx\,,$$

pa je red $\sum \alpha_n^2 + \beta_n^2$ konvergentan.

Ako su Furijeovi koeficijenti funkcije $f^{(k)}$ određeni formulama (1), tada je

$$|a_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}$$

i analogno,

$$|b_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^k}\,,$$

gde je $\varepsilon_n = (l/\pi)^k\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2} > 0$, pri čemu je red $\sum \varepsilon_n^2$ konvergentan. Iste nejednakosti dobijamo i u slučaju kada važe formule (2). ■

Teorema 2. *Ako su zadovoljeni uslovi prethodne leme, tada Furijeov red funkcije f ravnomerno i apsolutno konvergira funkciji f na segmentu $[-l, l]$ i važi ocena*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \le \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}\,, \tag{3}$$

gde je (η_n) niz pozitivnih brojeva koji konvergira nuli, a $S_n(x; f)$ n-ta delimična suma Furijeovog reda funkcije f.

Dokaz. Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$, $f(-l) = f(l)$, i neka je bar prvi izvod funkcije f deo po deo neprekidna funkcija. Ako je

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\,,$$

tada je na osnovu leme 1.

$$|a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}| \le |a_m| + |b_m| \le \frac{l}{\pi}\frac{|\alpha_m| + |\beta_m|}{m}$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\frac{|\alpha_m| + |\beta_m|}{m} \le \frac{1}{2}[(|\alpha_m| + |\beta_m|)^2 + \frac{1}{m^2}] \le \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \frac{1}{m^2}\,,$$

a redovi $\sum \alpha_m^2 + \beta_m^2$ i $\sum 1/m^2$ su konvergentni, to je i red $\sum(|\alpha_m| + |\beta_m|)/m$ konvergentan. Stoga je na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma Furijeov red funkcije f apsolutno i ravnomerno konvergentan.

Funkcija f zadovoljava uslove posledice 3., 2.5. na segmentu $[-l, l]$, pa Furijeov red u svakoj tački tog segmenta konvergira funkciji f i važi $S(x) = f(x)$. Dokažimo da važi ocena (3). Na osnovu leme 1.

$$|f(x) - S_n(x; f)| = \left|\sum_{m=n+1}^{+\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right| \le$$

$$\le \sum_{m=n+1}^{+\infty} |a_m| + |b_m| \le 2\sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \le$$

$$\le 2\left\{\sum_{m=n+1}^{+\infty} \varepsilon_m^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}}\right\}^{1/2}$$

Neka je

$$\kappa_n = \sum_{m=n+1}^{+\infty} \varepsilon_m^2 .$$

Red $\sum \varepsilon_m^2$ je konvergentan prema lemi 1., pa je $\lim_{n\to+\infty} \kappa_n = 0$. Na segmentu $[m-1, m]$ važi nejednakost $1/m^{2k} \le 1/x^{2k}$, pa je

$$\frac{1}{m^{2k}} \le \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} .$$

Stoga je

$$\sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} \le \sum_{m=n+1}^{+\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \le \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)n^{2k-1}} ,$$

pa je

$$|f(x) - S_n(x; f)| \le 2\sqrt{\frac{\kappa_n}{2k-1}} \frac{1}{n^{k-1/2}} .$$

Ako stavimo da je $\eta_n = 2\sqrt{\kappa_n/(2k-1)}$, tada je očigledno $\eta_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0$ i važi ocena (3). ■

Dokazana formula (3), pored toga što daje mogućnost aproksimacije funkcije delimičnim sumama Furijeovog reda, ukazuje na činjenicu da brzina konvergencije Furijeovog reda raste sa stepenom glatkosti funkcije f.

Na kraju ovog poglavlja ukažimo na mogućnost integracije Furijeovih redova.

Teorema 3. *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$ i neka je*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} .$$

Tada je

$$\int\limits_0^t f(x)\,dx = \int\limits_0^t \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^t \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin\frac{n\pi t}{l} + \frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi t}{l}\right)$$

i red na desnoj strani poslednje jednakosti je ravnomerno konvergentan.

Dokaz. Funkcija

$$F(t) = \int_0^t \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) dx$$

je neprekidna na segmentu $[-l, l]$, ima neprekidan izvod $F'(t) = f(t) - a_0/2$ na tom segmentu i pri tome je

$$F(-l) - F(l) = \int_{-l}^{l} f(x)\, dx - la_0 = 0\,.$$

Na osnovu teoreme 2. Furijeov red funkcije F ravnomerno konvergira ka njoj na segmentu $[-l, l]$. Neka su A_0, A_n i B_n, $n = 1, 2, \ldots$ Furijeovi koeficijenti funkcije F. Tada je

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\frac{n\pi t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi t}{l}\,.$$

Odredimo koeficijente ovog reda. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(t) \cos\frac{n\pi t}{l}\, dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi} F(t) \sin\frac{n\pi t}{l}\Bigg|_{-l}^{l} - \frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \sin\frac{n\pi t}{l}\, dt = -\frac{l}{n\pi} b_n\,,$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(t) \sin\frac{n\pi t}{l}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} F(t) \cos\frac{n\pi t}{l}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \cos\frac{n\pi t}{l}\, dt = \frac{l}{n\pi} a_n\,,$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $F(-l) = F(l)$. Kako je $F(0) = 0$, to je

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n = 0\,,$$

odakle dobijamo da je

$$\frac{A_0}{2} = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\,.$$

Kako je $b_n/n^2 \leq (a_n^2 + 1/n^2)/2$, poslednji red je konvergentan. Zamenom koeficijenata A_0, A_n i B_n, $n \in \mathbb{N}$, u formuli za prikaz funkcije $F(t)$ u Furijeov red imamo dokaz teoreme. ■

Primer 1. Razložimo u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,, \;\; |a| < 1\,.$$

Furijeov red funkcije

$$f'(x) = \frac{2a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}$$

je prema zadatku 4. e), 2.2.

$$f'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx\,.$$

Integracijom poslednje jednakosti dobijamo

$$\ln(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx + C\,.$$

Stavljajući u poslednjoj jednakosti $a = 0$ dobijamo razvoj zadate funkcije u Furijeov red:

$$\ln(1 - 2a\cos x + a^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx$$

Zadaci za vežbanje

1. Razložiti u Furijeov red funkciju

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\, dt\,, \ -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

(Rezultat: $\sum_1^\infty \sin(2n-1)x/(2n-1)^2$)

2. Polazeći od razlaganja

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}\,, \quad -\pi < x < \pi\,,$$

odrediti Furijeove redove funkcija x^2, x^3 i x^4. (Rezultat: $x^2 = \pi^2/2 + 4 \times \times \sum_1^\infty (-1)^n \cos nx/n^2$, $x^3 = 2\sum_1^\infty (-1)^n (6-\pi^2 n^2) \sin nx/n^3$, $x^4 = \pi^4/5 + 8 \times \times \sum_1^\infty (-1)^n (6-\pi^2 n^2) \cos nx/n^4$)

3. Ispitati koji su od sledećih trigonometrijskih redova Furijeovi:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}\,, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\,,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx\,, \qquad e)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\ln x}\,, \qquad f)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln x}\,.$$

(Rezultat: redovi pod a), b), c) i e) su Furijeovi redovi funkcija)

4. Ne određujući Furijeov red funkcije $f(x) = \pi x - x|x|$, ispitati da li je Furijeov red te funkcije ravnomerno konvergentan. Konstruisati grafik sume diferenciranog i dvaput diferenciranog Furijeovog reda zadate funkcije.

5. Neprekidna funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ je **deo po deo linearna**, ako postoji razbijanje segmenta $[a, b]$ na konačan broj segmenata $[x_{i-1}, x_i]$, $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots x_n \equiv b$, tako da je funkcija $f(x)$ linearna na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$.

(i) Dokazati da se svaka neprekidna funkcija $F(x)$ na segmentu $[a, b]$ može aproksimirati sa proizvoljnim stepenom tačnosti deo po deo linearnom funkcijom na $[a, b]$.

(ii) Dokazati da Furijeov red neprekidne, periodične, deo po deo glatke funkcije ravnomerno konvergira ka njoj.

(iii) Koristeći dobijene rezultate, dokazati prvu Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji funkcija.

6. Neka funkcija f na segmentu $[-l, l]$ ima neprekidne izvode zaključno do $(k-1)$-vog reda i integrabilan izvod k-tog reda u Rimanovom smislu, pri čemu

je $f^{(j)}(-l) = f^{(j)}(l)$ za $j = 0, 1, \dots, k-1$, a $|f^{(k)}(x)| \le c_k$ za svako $x \in [-l, l]$. Dokazati da tada važi sledeća ocena

$$|f(x) - S_n(x; f)| \le A c_k \frac{\ln n}{n^k}$$

za svako $x \in [-l, l]$, gde je A apsolutna konstanta.

7. Navesti primer trigonometrijskog reda koji je ravnomerno konvergentan na segmentu $[-\pi, \pi]$ ali nije apsolutno konvergentan u svim tačkama tog segmenta. (Rezultat: $\sum_2^\infty \sin nx / n \ln n$)

8. Neka apsolutno integrabilna funkcija na segmentu $[-l, l]$ zadovoljava uslov Heldera stepena α, $0 < \alpha \le 1$, na segmentu $[a, b]$. Dokazati da Furijeov red te funkcije ravnomerno konvergira na svakom segmentu $[c, d]$, $a < c < d < b$.

9. Neka je $2l$-periodična funkcija apsolutno integrabilna na segmentu dužine $2l$. Ako je izvod te funkcije ograničen na segmentu $[a, b]$, dokazati da je onda Furijeov red ravnomerno konvergentan ka toj funkciji na svakom segmentu $[c, d]$, $a < c < d < b$.

10. Neka je f neprekidna $2l$-periodična funkcija. Odrediti Furijeove koeficijente A_n, B_n funkcije

$$F(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) f(x+t)\, dt$$

preko Furijeovih koeficijenata funkcije f. (Rezultat: $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$, $B_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$)

11. Naći Furijeove koeficijente A_n, B_n funkcije Steklova

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$$

preko Furijeovih koeficijenata 2π-periodične funkcije f apsolutno integrabilne na segmentu dužine 2π. (Rezultat: $A_0 = a_0$, $A_n = a_n \sin nh / nh$, $B_n = b_n \sin nh / nh$, $n \in \mathbb{N}$)

12. Naći sume sledećih redova

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}\,, \quad c)\ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \cos nx}{n^2 - 1}\,,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2 + a^2)}\,, \quad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)}{2n-1}\,, \quad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}\,,$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n}\,,\ 0 < \alpha < \pi/2\,, \quad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n \sin nx}{n}\,,\ |r| \le 1\,.$$

3. FURIJEOV INTEGRAL I FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

U prethodnom poglavlju smo videli da se svaka periodična, apsolutno integrabilna funkcija pod određenim uslovima može pretstaviti Furijeovim redom. Razlaganje periodičnih funkcija u sumu prostih harmonika je harmonijska analiza funkcija. Furijeove koeficijente u takvom razlaganju nazivamo spektrom funkcije. Na taj način, svaka periodična apsolutno integrabilna funkcija koja se može prikazati Furijeovim redom ima diskretan spektar. Furijeov integral pretstavlja neprekidan analogon Furijeovog reda za neperiodične funkcije koje su definisane na realnoj pravoj.

Sa Furijeovim integralima prirodno se javljaju Furijeove transformacije funkcija, koje pretstavljaju efektan aparat u rešavanju integralnih jednačina.

3.1. FURIJEOV INTEGRAL KAO GRANIČNI SLUČAJ FURIJEOVOG REDA

U ovom odeljku izložićemo ideju koja dovodi do Furijeovog integrala. Sam pristup je heuristički, pa je lišen neophodne strogosti.

Neka se funkcija $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ na intervalu $(-l,l)$ može prikazati trigonometrijskim redom

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

u kome su koeficijenti a_n i b_n određeni formulama

$$a_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt\,,\qquad b_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\,.$$

Drugim rečima, neka je

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt\,, \tag{1}$$

za svako $x \in (-l, l)$. Prirodno se postavlja pitanje: da li izraz (1) može pretstavljati funkciju f na celoj realnoj pravoj i pod kojim uslovima to važi? Ukoliko izraz na desnoj strani jednakosti (1) ima graničnu vrednost kada $l \to +\infty$, imaćemo traženu reprezentaciju funkcije f na $\mathbb{R}$. Ako je funkcija f integrabilna na $\mathbb{R}$, prvi sabirak na desnoj strani jednakosti (1) teži nuli. Drugi sabirak možemo pretstaviti u obliku

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta z_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos z_n (t - x)\, dt\,,$$

gde je $z_n = n\pi/l$, $z_0 = 0$, $\Delta z_n = z_n - z_{n-1} = \pi/l$, $n \in \mathbb{N}$; pri tome priraštaj Δz_n očigledno teži nuli kada $l \to +\infty$. Kada $l \to +\infty$ drugi sabirak pretstavlja integralnu sumu funkcije

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t - x)\, dt$$

promenljive z na $[0, +\infty)$. Ukoliko ta granična vrednost postoji, onda iz formule (1) prelaskom na graničnu vrednost kada $l \to +\infty$ dobijamo reprezentaciju funkcije f **Furijeovim integralom**:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t - x)\, dt\,. \tag{2}$$

Dobijena formula pretstavlja **Furijeovu integralnu formulu**. Ovu formulu možemo pretstaviti u obliku:

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(z) \cos zx + b(y) \sin zx]\, dz\,,$$

gde je

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos zt\, dt\,, \qquad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin zt\, dt\,.$$

Iz poslednjih formula se jasno vidi analogija sa razlaganjem funkcija u trigonometrijski red: parametar $n \in \mathbb{N}$ po kome se vrši sumiranje i koji je diskretnog karaktera zamenjen je neprekidnim parametrom, beskonačan red zamenjen je nesvojstvenim integralom, a funkcije $a(z)$ i $b(z)$ asociraju na Furijeove koeficijente.

Kako je podintegralna funkcija u Furijeovom integralu parna, Furijeovu integralnu formulu možemo pisati u sledećem obliku:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(x-t)\, dt\,. \tag{3}$$

Zajedno sa integralom u poslednjoj formuli možemo posmatrati integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin z(x-t)\, dt\,. \tag{4}$$

Ako on postoji, onda je on jednak nuli u smislu glavne vrednosti nesvojstvenog integrala, jer mu je podintegralna funkcija neparna. Množeći integral (4) sa $i/2\pi$ i sabirajući ga sa integralom u (3), dobijamo reprezentaciju funkcije f **Furijeovim integralom u kompleksnoj formi**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iz(x-t)}\, dt\,, \tag{5}$$

gde spoljašnji integral podrazumevamo u smislu glavne vrednosti. Ako stavimo da je

$$F[f](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt\,, \tag{6}$$

tada Furijeovu formulu u kompleksnom zapisu možemo pretstaviti u obliku

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](z) e^{ixz}\, dz\,. \tag{7}$$

Ako integral (6) postoji u smislu glavne vrednosti, onda funkciju $F[f]$ nazivamo **Furijeovom transformacijom funkcije** f. Napomenimo da f u opštem slučaju može biti kompleksna funkcija realne promenljive.

Funkcije

$$F_c[f](z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos zt \, dt \,,$$

$$F_s[f](z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin zt \, dt \,,$$

ukoliko integrali koji ih definišu postoje u smislu glavne vrednosti, nazivamo **cosinusnom**, odn. **sinusnom transformacijom Furijea funkcije** f.

3.2. DOVOLJNI USLOVI ZA REPREZENTACIJU FUNKCIJA FURIJEOVIM INTEGRALOM

Lema 1. *Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tada je Furijeova transformacija $F[f] \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $F[f](z) \to 0$ kada $z \to +\infty$ i važi sledeća nejednakost:*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |F[f](z)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt \,. \tag{1}$$

Dokaz. Primetimo najpre da je $|f(t)e^{-izt}| \le |f(t)|$, odakle sledi apsolutna i ravnomerna konvergencija integrala

$$F[f](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt} \, dt \,, \tag{2}$$

po $z \in \mathbb{R}$, pri čemu očigledno važi ocena (1). Da $F[f](z) \to 0$ kada $z \to +\infty$, neposredno sledi na osnovu Rimanove teoreme. Dokažimo da je $F[f]\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Za svako fiksirano $\eta\geq 0$ važi sledeća ocena

$$\left|\int\limits_{-\eta}^{\eta} f(t)(e^{-it(z+h)}-e^{-itz})\,dt\right|\leq \sup_{|t|\leq\eta}|e^{-ith}-1|\int\limits_{-\eta}^{\eta}|f(t)|\,dt\,,$$

odakle sledi neprekidnost funkcije

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\eta}^{+\eta} f(t)e^{-itz}\,dt$$

po z, za svako $\eta\geq 0$. Kako je integral (2) ravnomerno konvergentan po z, to je $F[f]\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$. ■

Iz dokazane leme vidimo da apsolutna integrabilnost funkcije f obezbeđuje ne samo egzistenciju Furijeove transformacije $F[f]$, već i njenu neprekidnost. Da Furijeova transformacija integrabilne funkcije ne mora biti neprekidna funkcija pokazuje sledeći

Primer 1. Furijeova transformacija funkcije $f(t)=\sin at/t$, $t\neq 0$, $f(0)=a\in\mathbb{R}$ je integrabilna, nije apsolutno integrabilna, i prekidna je funkcija na $\mathbb{R}$. Zaista,

$$F[f](z)=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin at}{t}e^{-izt}\,dt=$$

$$=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin at\cos zt}{t}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin at\cos zt}{t}\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin(a+z)t}{t}+\frac{\sin(a-z)t}{t}\right)dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}[sgn(a+z)+sgn(a-z)]\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\,, & \text{za } |z|\leq|a|\,,\\ 0\,, & \text{za } |z|>|a|\,,\end{cases}$$

pri čemu smo iskoristili poznatu vrednost Dirihleovog integrala (videti primer 5., III.7.7.).

Teorema 1. *Neka je f deo po deo neprekidna funkcija na svakom konačnom segmentu $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Ako u nekoj tački $x \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Dinijeve uslove, tada Furijeov integral funkcije f konvergira u toj tački i važi formula*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt\,.$$

Dokaz. Furijeova transformacija $F[f](z)$ funkcije f je prema dokazanoj lemi neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, pa je stoga integrabilna na svakom konačnom segmentu $[-\eta,\eta]$.

Da bi smo ispitali Furijeov integral funkcije f i odredili njegovu vrednost, postupimo kao u slučaju transformacije delimične sume Furijeovog reda i transformišimo odgovarajući integral koji za Furijeov integral ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} S_\eta(x) &= \int\limits_{-\eta}^{\eta} F[f](z) e^{izx}\, dz = \int\limits_{-\eta}^{\eta} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz}\, dt \right) e^{izx}\, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{i(x-t)z}\, dz \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(x-t)\eta}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin \eta u}{u}\, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} [f(x-u)+f(x+u)] \frac{\sin \eta u}{u}\, du\,. \end{aligned}$$

Jedini netrivijalan korak u transformaciji integrala $S_\eta(x)$ je promena redosleda integracije. Da opravdamo promenu redosleda integracije, primetimo najpre da je za svako konačno $\theta > 0$

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\theta}^{\theta} f(t) e^{-itz}\, dt \right) e^{ixz}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\theta}^{\theta} f(t) \left(\int\limits_{\eta}^{\eta} e^{i(x-t)z}\, dz \right) dt\,,$$

jer je funkcije deo po deo neprekidna. Kako je integral $\int_{-\theta}^{+\theta} f(t)e^{-itz}\,dt$ ravnomerno konvergentan po z, to prelaskom na graničnu vrednost u prethodnoj jednakosti kada $\theta \to +\infty$ dobijamo traženu jednakost ponovljenih integrala.

Ako sada vrednost Dirihleovog integrala napisanog u obliku

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \eta u}{u}\,du = 1$$

pomnožimo sa $[f(x-0)+f(x+0)]/2$ i tako dobijeni izraz oduzmemo od $S_\eta(x)$, dobijamo

$$\left|S_\eta(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u} + \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right]\sin \eta u\,du\right| .$$

Dokažimo da integral u poslednjoj jednakosti teži nuli kada $\eta \to 0$. Za to je dovoljno dokazati da integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\sin \eta u\,du =$$
$$= \int\limits_0^{1} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\sin \eta u\,du +$$
$$+ \int\limits_1^{+\infty} \frac{f(x-u)}{u}\sin \eta u\,du - f(x-0)\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin \eta u}{u}\,du$$

teži nuli kada $\eta \to +\infty$, jer se za drugi sabirak u prethodnom integralu to dokazuje potpuno analogno.

Kako funkcija f zadovoljava uslove Dinija, prvi integral na desnoj strani poslednje jednakosti teži nuli kada $\eta \to +\infty$ na osnovu Rimanove teoreme. Drugi integral takođe na osnovu Rimanove teoreme teži nuli kada $\eta \to +\infty$, jer je funkcija $f(x-u)/u$ apsolutnu integrabilna na posmatranom segmentu. Poslednji integral, koji možemo napisati u obliku

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \eta u}{u}\, du = \int_\eta^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv\,,$$

teži nuli kada $\eta \to +\infty$, jer je Dirihleov integral konvergentan. ■

Iz dokazane teoreme neposredno proizilazi sledeća

Posledica 1. *Ako je funkcija f neprekidna i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, i ako u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ ima konačne jednostrane izvode, tada se ona može pretstaviti Furijeovim integralom*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](z)e^{izx}\, dz\,,$$

gde je $F[f]$ Furijeova transformacija funkcije f.

3.3. FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

Iz definicije Furijeove transformacije vidimo da je ona definisana za sve apsolutno integrabilne funkcije. Uz uslove teoreme 1., 3.2. funkciju f možemo prikazati Furijeovim integralom:

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](z)e^{ixz}\, dz\,. \tag{1}$$

Ukoliko znamo Furijeovu transformaciju $F[f]$ funkcije f, onda iz prethodne formule možemo odrediti funkciju f. To dovodi do sledeće definicije.

Definicija 1. *Funkciju $F^{-1}[f]$ koja je pridružena funkciji f formulom*

$$F^{-1}[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}\,dt\,, \tag{2}$$

nazivamo **inverznom Furijeovom transformacijom funkcije** f.

Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 1., 3.2. ili posledice 1., 3.2., onda formulu (1) možemo zapisati i u obliku $f = F^{-1}[F[f]]$, koji opravdava termin "inverzne Furijeove transformacije". Preciznije, važi sledeći

Stav 1. *Neka je funkcija f neprekidna i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Ako ona u svim tačkama ima konačne jednostrane izvode, onda postoje Furijeove transformacije $F[f]$, $F^{-1}[f]$, $F[F^{-1}[f]]$, $F^{-1}F[[f]]$ i važi jednakost*

$$F[F^{-1}[f]] = F^{-1}[F[f]] = f\,.$$

Dokaz. Jednakost $F^{-1}[F[f]] = f$ pretstavlja drugi zapis već dokazane formule (1). Dokažimo zato samo drugu jednakost. Kako je kosinus parna funkcija, to formulu (3) u 3.1. za Furijeovu transformaciju funkcije f možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt\,.$$

Zbog neparnosti sinusne funkcije važi formula

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)\,dt = 0\,,$$

koja zajedno sa prethodnom daje reprezentaciju funkcije f u obliku

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t-x)}\,dt\,,$$

ili

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{ity}\,dt\right]e^{-ixy}\,dy\,,$$

gde se spoljašnji integral podrazumeva u smislu glavne vrednosti. Time je dokazana jednakost $F[F^{-1}[f]]=f$. ■

Linearnost Furijeove transformacije i inverzne Furijeove transformacije neposredno sledi iz linearnosti integrala. Osim toga, Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija obostrano jednoznačno preslikavaju skup svih neprekidnih apsolutno integrabilnih funkcija na $\mathbb{R}$ koje u svim tačkama realne prave imaju jednostrane izvode u skup funkcija za koje postoje integrali (2) u smislu glavne vrednosti. Za to je dovoljno dokazati da su F i F^{-1} obostrano jednoznačna preslikavanja. Ako je recimo $F[f_1]=F[f_2]$, tada je $F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]]$, odakle na osnovu stava 1. sledi jednakost funkcija f_1 i f_2.

Primer 1. Furijeova transformacija funkcije $f(x)=e^{-x^2/2}$ određena je sa

$$F[f](\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}e^{-i\alpha x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\cos\alpha x\,dx\,.$$

Diferenciranjem poslednjeg integrala po parametru α, primenjujući potom parcijalnu integraciju, dobija se diferencijalna jednačina

$$\frac{dF[f]}{d\alpha}(\alpha)+\alpha F[f](\alpha)=0$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{d}{d\alpha}\ln F[f](\alpha)=-\alpha\,.$$

Očigledno je $F[f](\alpha)=ce^{-\alpha^2/2}$, gde je c konstanta koju treba odrediti, rešenje dobijene diferencijalne jednačine. Konstanta c određuje se koriščenjem Ojler-Puasonovog integrala:

$$c=F[f](0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\,dx=1\,.$$

Furijeova transformacija funkcije f je dakle sama funkcija f.

Primer 2. Odredimo Furijeovu transformaciju funkcije

$$f(x) = e^{-a|x|}\,,\ a > 0\,,\ -\infty < x < +\infty\,.$$

Funkciju f možemo smatrati parnim proširenjem funkcije e^{-ax}, $a > 0$, sa poluprave $x \geq 0$ na $\mathbb{R}$. Furijeova transformacija funkcije f data je sa

$$\begin{aligned}
F[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ixy}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ixy}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-ixy}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a-iy)x}\, dx + + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(a+iy)x}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-iy} + \frac{1}{a+iy} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+y^2}
\end{aligned}$$

Ako sada primenimo inverznu Furijeovu transformaciju na dobijenu funkciju, dobićemo polaznu funkciju:

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a e^{ixy}}{a^2+y^2}\, dy\,, \quad x \geq 0\,.$$

Ako u poslednjem integralu stavimo da je $e^{ixy} = \cos xy + i \sin xy$ i iskoristimo činjenicu da je zbog neparnosti podintegralne funkcije $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy\, dy}{a^2+y^2} = 0$, dobićemo

$$e^{-ax} = \frac{a}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\, dy = \frac{2a}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\, dy\,, \quad x \geq 0\,.$$

Odredimo sada Furijeovu transformaciju funkcije

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0\,, \\ -e^{ax}, & x < 0\,. \end{cases}$$

Lako se dobija

$$\begin{aligned} F[f](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} (-e^{ax}) e^{-ixy}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{ixy}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2} i\,. \end{aligned}$$

Primenom inverzne Furijeove transformacije na dobijenu funkciju dobijamo formulu

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{yi}{a^2 + y^2} \right) e^{ixy} dy = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2}\, dy\,,$$

koja važi za svako $x > 0$. Na taj način smo dobili vrednosti **Laplasovih integrala**:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x \geq 0\,,$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0\,.$$

Poslednji primer pokazuje kako se Furijeove transformacije mogu iskoristiti za nalaženje dosta komplikovanih integrala.

U matematici postoji čitav niz važnih integralnih transformacija. Među njima Furijeove transformacije svakako zauzimaju centralno mesto. Ovakav položaj Furijeovih transformacija ima duboke korene u svojstvima koje one imaju i koje ćemo izučavati u narednim odeljcima ovog poglavlja.

3.4. FURIJEOVA TRANSFORMACIJA IZVODNIH FUNKCIJA

U odeljku 3.2. smo dokazali da Furijeova transformacija $F[f](z)$ svake funkcije f apsolutno integrabilne na $\mathbb{R}$ teži nuli kada $z \to +\infty$. Pokažimo sada da brzina konvergencije ka nuli Furijeove transformacije funkcije zavisi od stepena glatkosti te funkcije. U tom cilju dokažimo najpre sledeću lemu.

Lema 1. *Neka je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$ i neka za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$ postoji okolina u kojoj funkcija f ima deo po deo neprekidan izvod f' na $\mathbb{R}$. Tada važe sledeća tvrđenja*

a) ako je funkcija f' integrabilna na $\mathbb{R}$, tada postoji granična vrednost funkcije f kada $x \to \pm\infty$;

b) ako su funkcije f i f' integrabilne na $\mathbb{R}$, tada $f(x) \to 0$ kada $|x| \to 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f ima samo realne vrednosti. Pri uslovima leme važi Njutn-Lajbnicova formula:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt\,.$$

Kako je funkcija f' integrabilna na $\mathbb{R}$, to postoji $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$, pa postoji i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Sada zbog integrabilnosti funkcije f na $\mathbb{R}$ oba prethodna limesa teže nuli. Ako je f kompleksna funkcija realne promenljive, dokaz se izvodi analogno. ■

Teorema 1. *Neka je $f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \ldots$ Ako su funkcije f, f', $\ldots$, $f^{(k)}$ apsolutno integrabilne na $\mathbb{R}$, tada je*

a) za svako $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$

(1) $$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y)\,,$$

b) $F[f](y) = o(1/|y|^k)$ kada $y \to \pm\infty$.

Dokaz. Kako je Furijeova transformacja linearna funkcija, dovoljno je dokazati da teorema važi za realne funkcije realne promenljive.

Za $n = 0$ tvrđenje a) očigledno važi. Neka je $n > 0$. Na osnovu dokazane leme funkcije f, f', ..., $f^{(k-1)}$ teže nuli kada $x \to \pm\infty$. Na osnovu toga, sada parcijalnom integracijom lako dobijamo

$$
\begin{aligned}
F[f^{(k)}](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) e^{-ixy}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f^{(k-1)}(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-ixy}\, dx \right) = \\
&= iy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-ixy}\, dx = (iy)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-2)}(x) e^{-ixy}\, dx = \\
&= \cdots = (iy)^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = (iy)^k F[f](y)\,,
\end{aligned}
$$

čime je jednakost (1) dokazana. Sada je $|F[f](y)| = |F[f^{(k)}](y)|/|y|^k$, pa kako je na osnovu Rimanove teoreme $\lim\limits_{|y|\to+\infty} F[f^{(k)}](y) = 0$, to je $F[f](y) = o(1/|y|^k)$ kada $|y| \to +\infty$. ■

Prema tome, Furijeova transformacija $F[f](y)$ funkcije f teži nuli kada $y \to +\infty$ utoliko brže, ukoliko je viši stepen sa kojim je izvod funkcije f apsolutno integrabilan. Kako stepen glatkosti Furijeove transformacije zavisi od osobina same funkcije, ukazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Ako je za lokalno integrabilnu funkciju f na $\mathbb{R}$ funkcija $x^k f(x)$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tada je $F[f] \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ i važi jednakost*

$$
F^{(k)}[f](y) = (-i)^k F[x^k f(x)](y)\,. \tag{2}
$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da funkcija f ima samo realne vrednosti. Za $k = 0$ jednakost (2) očigledno važi. Neprekidnost Furijeove transformacije $F[f]$ dokazali smo u lemi 1., 3.2. . Ako je $k > 0$, tada za svako $n < k$ važi ocena $|x^n f(x)| \leq |x^k f(x)|$ iz koje sledi apsolutna integrabilnost funkcije $x^n f(x)$. Osim toga je $|x^n f(x)e^{-ixy}| = |x^n f(x)|$, pa je integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-ixy}\,dx$ prema Vajerštrasovom kriterijumu ravnomerno konvergentan po y. Sada na osnovu teoreme o diferenciranju nesvojstvenog parametarskog integrala imamo

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx\,,$$

$$F'[f](y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{ixy}\,dx\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(k)}[f](y) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)e^{ixy}\,dx\,,$$

a time i formulu (2).

Neka je sada $f = u + iv$, gde su u i v realne funkcije. Tada je na osnovu dokazanog i linearnosti Furijeove transformacije

$$\begin{aligned} F'[f] = F'[u+iv] = (F[u] + iF[v])' = F'[u] + iF'[v] = \\ = -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf]\,. \end{aligned}$$

Indukcijom po k se lako dokazuje da Furijeova transformacija $F[f]$ ima sve izvode do k-tog reda i da važi formula (2).

Da je $F[f] \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R})$ neposredno sledi iz činjenice da je poslednji integral na osnovu leme 1. 3.2. neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. ■

3.5. FURIJEOVA TRANSFORMACIJA I KONVOLUCIJA

Sa pojmom konvolucije periodičnih funkcija upoznali smo se ranije. Taj pojam se može uvesti i za neperiodične funkcije koje su definisane na $\mathbb{R}$.

Definicija 1. Konvolucija funkcija *$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ i $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ je funkcija $f*g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ definisana sa*

$$(f*g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\,, \tag{1}$$

uz pretpostavku da nesvojstveni integral (1) *postoji za svako $x\in\mathbb{R}$.*

Radi jednostavnijeg izlaganja, posmatraćemo samo funkcije sa realnim vrednostima. U slučaju funkcija sa kompleksnim vrednostima svi rezultati se dobijaju analogno, pa taj deo prepuštamo čitaocu za vežbanje.

Pretpostavimo sada da su funkcije f i g neprekidne, ograničene i apsolutno integrabilne na $\mathbb{R}$. Tada konvolucija funkcija f i g postoji, a $f*g$ je neprekidna, ograničena i apsolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Pri učinjenim pretpostavkama integral (1) je očigledno konvergentan, pa konvolucija funkcija f i g postoji. Kako je funkcija g ograničena na $\mathbb{R}$, postoji realan broj $M>0$ tako da je $|g(t)|\le M$ za svako $t\in\mathbb{R}$. Stoga je $|f(t)g(x-t)|\le M|f(t)|$ za svako x i t, pa je, s obzirom na to da je funkcija f apsolutno integrabilna, ne samo integral (1), već i integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt \tag{2}$$

ravnomerno konvergentan na $\mathbb{R}$ prema Vajerštrasovom kriterijumu. No onda je na osnovu teoreme o neprekidnosti nesvojstvenog parametarskog integrala konvolucija funkcija f i g neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Ograničenost konvolucije sledi iz ocene

$$|(f*g)(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-y)|\,dt \le M\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\,.$$

Da dokažemo apsolutnu integrabilnost konvolucije funkcija f i g, primetimo najpre da se integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)|(x)\,dx$ može oceniti na sledeći način:

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|\,ds\,.$$

Zaista, za integral (2) smo dokazali da je ravnomerno konvergentan na realnoj pravoj, integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dx = |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|\,dx$$

je ravnomerno konvergentan na svakom konačnom segmentu, a prema poslednjoj jednakosti u (3) integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt$$

postoji, pa je promena redosleda integracije u (3) opravdana prema teoremi 2., III 7.7.. Integral na desnoj strani poslednje jednakosti je konvergentan, pa je funkcija $f*g$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$.

Time smo dokazali da je operacija konvolucije zatvorena u klasi neprekidnih, ograničenih, apsolutno integrabilnih funkcija. U ovoj klasi konvolucija je komutativna i asocijativna operacija.

Da dokažemo komutativnost, uvedimo u (1) smenu $x-t=s$, posle čega dobijamo da je

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\,ds = (g*f)(x)\,.$$

Dokažimo sada asocijativnost konvolucije. Neka su f, g i h neprekidne, ograničene i apsolutno integrabilne funkcije na $\mathbb{R}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
(4)\quad ((f*g)*h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)h(x-t)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)\,dy\,.
\end{aligned}
$$

Ako u poslednjem integralu uvedemo smenu $y = x - u$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
(5)\quad ((f*g)*h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(t-x+u)\,du = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x+u)h(x-t)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Da bi smo opravdali promenu redosleda integracije u poslednjoj jednakosti, dokažimo najpre ravnomernu konvergenciju integrala

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
& h(x-t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(t-x+u)\,du\,, \\
& f(x-u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x+u)h(x-t)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Kako su funkcije g i h ograničene, postoji realan broj $M > 0$ tako da je $|g(z)| \le M$ i $|h(z)| \le M$ za svako $z \in \mathbb{R}$. No onda imamo sledeće ocene

$$
\begin{aligned}
|h(x-t)f(x-u)g(t-x+u)| &\le M^2 |f(x-u)|\,, \\
|f(x-u)g(t-x+u)h(x-t)| &\le M^2 |h(x-t)|\,,
\end{aligned}
$$

iz kojih na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, a zbog apsolutne integrabilnosti funkcija f i h, sledi ravnomerna konvergencija integrala (6) po t i u respektivno na svakom konačnom segmentu za svako fiksirano x. Da je promena redosleda integracije opravdana, prema teoremi 2., III.7.7. treba još da dokažemo konvergenciju integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)f(x-u)g(t-x+u)|\, du\,.$$

Ako u ovom integralu uvedemo smenu $t-x+u=v$ i iskoristimo činjenicu da je konvolucija komutativna, lako se proverava da je njegova vrednost $(|f|*|g|)*|h|$. Istom smenom u integralu (5) dobijamo da je $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Ispitajmo sada čemu je jednaka Furijeova transformacija konvolucije. Iz praktičnih razloga predefinišimo konvoluciju funkcija f i g:

$$(f*g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt\,.$$

Teorema 1. *Ako su funkcije f i g ograničene, neprekidne i apsolutno integrabilne na $\mathbb{R}$, tada je*

$$F[f*g] = F[f]\, F[g]\,.$$

Dokaz. Primetimo najpre da konvolucija $f*g$ ima ima ista svojstva kao i funkcije f i g, pa stoga postoji Furijeova transformacija

$$F[f*g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)e^{-ixt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)\, dy\,.$$

Lako je dokazati da se u poslednjem integralu može promeniti redosled integracije na osnovu teoreme 2., II. 7.7. Uvodeći zatim smenu

$t = y + u$ dobijamo

$$F[f * g](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} g(t-y)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\, dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-ixu}\, du = F[f](x) F[g](x)\,. \blacksquare$$

Sledeći primer pokazuje primenu Furijeove i inverzne Furijeove transformacije u rešavanju integralnih jednačina.

Primer 1. Rešimo linearnu integralnu jednačinu

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) \varphi(s)\, ds\,, \tag{7}$$

gde su f, K zadate funkcije, φ tražena funkcija, a λ proizvoljan parametar. Pretpostavimo da postoje Furijeove transformacije funkcija u zadatoj jednačini. Množeći zadatu jednačinu sa e^{-ixy}, a zatim integracijom tako dobijene jednačine po x u granicama od $-\infty$ do $+\infty$ dobijamo sledeću jednačinu

$$F[\varphi](y) = F[f](y) + \lambda F[K](y) F[\varphi](y)\,,$$

pri čemu smo koristili prethodnu teoremu. Iz ove jednačine sada dobijamo Furijeovu transformaciju funkcije φ:

$$F[\varphi](y) = \frac{F[f](y)}{1 - \lambda F[K](y)}\,.$$

Primenom inverzne Furijeove transformacije na poslednju jednakost, uz pretpostavku da je tražena funkcija neprekidna, a prema stavu 1. 3.3., dobijamo da je

$$\varphi(x) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F[f](y)}{1 - \lambda F[K](y)} e^{ixy}\, dy\,.$$

3.6. PROSTOR ŠVARCA

Neka je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f **brzo opada u beskonačnosti**, ako je za svaki ceo broj $m > 0$ funkcija $|x|^m f(x)$ ograničena na $\mathbb{R}$. Kako je funkcija $|x|^{m+1} f(x)$ ograničena na $\mathbb{R}$, to je

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m f(x) = 0$$

za svaki pozitivan ceo broj m.

Označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih funkcija $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sa svojstvom da funkcija f i svi njeni izvodi brzo opadaju u beskonačnosti. Skup $\mathcal{S}$ je neprazan. Zaista, lako je proveriti da je funkcija $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$.

Očigledno je $\mathcal{S}$ vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Svaka funkcija iz $\mathcal{S}$ je ograničena. Osim toga, ako je $f \in \mathcal{S}$, tada je i $f^{(k)} \in \mathcal{S}$ za svako $k \geq 0$. Vektorski prostor $\mathcal{S}$ nazivamo **prostorom Švarca*** ili **prostorom brzo opadajućih funkcija u beskonačnosti**. Lako je videti da su svi elementi prostora Švarca apsolutno integrabilne funkcije.

Dokažimo sada da je prostor Švarca algebra u odnosu na proizvod funkcija. Zaista, ako je $P_n(x)$ polinom stepena n, tada postoji realan broj $L > 0$ tako da je $|P_n(x)| \leq L|x|^n$ za dovoljno veliko $|x|$. Stoga je $fP_n \in \mathcal{S}$ za svako $f \in \mathcal{S}$. Očigledno je $fg \in \mathcal{S}$ za svako $f, g \in \mathcal{S}$. Dakle, ako je $f \in \mathcal{S}$, tada je $(x^m f(x))^{(k)} \in \mathcal{S}$ za svako $k, m \in \mathbb{Z}^+$. Ispitajmo sada Furijeovu transformaciju elemenata prostora Švarca. Primetimo najpre da je na osnovu teoreme 2., 3.4. $F[f] \in \mathcal{S}$ za svako $f \in \mathcal{S}$. Furijeova transformacija svake funkcije iz $\mathcal{S}$ na osnovu Rimanove teoreme teži nuli u beskonačnosti. Kako je prema formulama (1) i (2) 3.4.

$$F[(x^m f(x))^{(k)}](\xi) = i^{k+m} \xi^k F^{(m)}[f](\xi)\,,$$

i kako $\xi^k F^{(m)}[f](\xi) \to 0$ kada $\xi \to \infty$, to $F[f] \in \mathcal{S}$. Time je dokazan

Stav 1. *Ako je $f \in \mathcal{S}$, tada je $F[f] \in \mathcal{S}$.*

Dokažimo sada da Furijeova transformacija F preslikava $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$. Primetimo najpre jednostavnu vezu $F[f](x) = F^{-1}[f](-x)$ između

---

* Schwartz L. (1915-) savremeni francuski matematičar

Furijeove transformacije i inverzne Furijeove transformacije. Promenom znaka argumenta u ovoj jednakosti na osnovu prethodnog stava zaključujemo da inverzna Furijeova transformacija takođe preslikava $\mathcal{S}$ u $\mathcal{S}$. Ako je $f \in \mathcal{S}$, tada je $\varphi = F^{-1}[f] \in \mathcal{S}$. No onda je na osnovu stava 1., 3.3. $F[\varphi] = F[F^{-1}[f]] = f$, čime smo dokazali da je Furijeova transformacija preslikavanje prostora $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$. Kako je Furijeova transformacija obostrano jednoznačno linearno preslikavanje, time je dokazana

Teorema 2. *Restrikcija Furijeove transformacije na $\mathcal{S}$ je automorfizam prostora $\mathcal{S}$ kao linearnog vektorskog prostora.*

Napomenimo da je prostor Švarca algebra u odnosu na proizvod $(f, g) \mapsto f * g$, gde je $*$ konvolucija funkcija. Ovo neposredno sledi iz činjenice da je prostor Švarca podprostor prostora svih neprekidnih, ograničenih, apsolutno integrabilnih funkcija na $\mathbb{R}$ i osobina konvolucije.

Navedeni rezultati se mogu uopštiti na funkcije više promenljivih bez nekih suštinskih promena. Definišimo najpre prostor Š varca. U tom cilju uvedimo neke oznake. Neka su $m = (m_1, \dots, m_n)$ i $k = (k_1, \dots, k_n)$ multiindeksi koji se sastoje iz nenegativnih celih brojeva m_i, k_i, $i = \overline{1, n}$. Sa D^m označimo operator diferenciranja $\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}$ reda $|m| := m_1 + \cdots + m_n$, a sa $x^k := x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

Sa $\mathcal{S}_n \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ označimo skup svih funkcija $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ koje zadovoljavaju uslov

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k D^m f(x)| < \infty$$

za svaki par nenegativnih multiindeksa k i m. Za funkcije ovog prostora kažemo da brzo opadaju u beskonačnosti. Skup $\mathcal{S}_n$ je neprazan. Kao i u prethodnim razmatranjima taj skup nazivamo Švarcovim prostorom. $\mathcal{S}_n$ je vektorski prostor sa uobičajenim operacijama.

Na prostoru $\mathcal{S}_n$ definišimo preslikavanje $F : \mathcal{S}_n \mapsto \mathcal{S}_n$ sa

$$F[f](x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{(t,x)}\, dt \,. \tag{1}$$

Preslikavanje F je **Furijeova transformacija funkcije** f. Integral u (1) podrazumeva se u smislu glavne vrednosti. Ako je $f \in \mathcal{S}_n$, tada integral (1) konvergira ne samo apsolutno, već i ravnomerno po x na $\mathbb{R}^n$. Isti integral možemo diferencirati po svakoj od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ proizvoljan broj puta, pa je $F[f] \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$.

Primer 1. Odredimo Furijeovu transformaciju funkcije

$$f(x) = e^{-\|x\|^2/2}.$$

Koristeći Fubinijevu teoremu i rezultat dobijen u primeru 1., 3.3., lako dobijamo Furijeovu transformaciju zadate funkcije:

$$\begin{aligned} F[f](x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|t\|^2/2} \cdot e^{-i(x,t)}\, dt = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t_i^2/2} e^{-ix_it_i}\, dt_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i^2/2} = e^{-\|x\|^2/2}. \end{aligned}$$

Vidimo da je zadata funkcija nepokretna tačka prostora $\mathcal{S}_n$ za Furijeovu transformaciju.

Za Furijeovu transformaciju važe formule analogne formulama (1) i (2) odeljka 3.4.:

$$F[D^k f](x) = i^{|k|} x^k F[f](x)\,, \tag{2}$$

$$F[x^k f(x)](y) = i^{|k|} D^k F[f](y)\,. \tag{3}$$

Prva od njih dobija se parcijalnom integracijom uz primenu Fubinijeve teoreme, dok se druga dobija neposredno diferenciranjem po parametrima $y_1, \ldots, y_n$.

Sada se lako dokazuje da $F[f](x) \to 0$ kada $x \to \infty$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$. Zaista, kako je

$$|F[f](x)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt < +\infty$$

i $D^k f \in \mathcal{S}_n$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$, to tvrđenje neposredno sledi iz formule (2). Iz formula (2) i (3) dobijamo da je

$$F[D^k(x^m f(x))](y) = i^{|k|+|m|} y^k D^m F[f](y)\,,$$

odakle sada sledi da $y^k D^m F[f](y) \to 0$ kada $y \to \infty$ u $\mathbb{R}^n$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$ i svaki par nenegativnih multiindeksa. Na taj način smo dokazali da je $F[f] \in \mathcal{S}_n$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$.

Sa Furijeovom transformacijom potpuno analogno se definiše **inverzna Furijeova transformacija** funkcije f:

$$F^{-1}[f](x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{i(t,x)}\, dt\,. \tag{4}$$

Dokažimo da je $F[F^{-1}[f]] = F^{-1}[F[f]] = f$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$. Poslednju jednakost možemo pretstaviti u obliku Furijeovog integrala

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F[f](t) e^{i(t,x)}\, dt\,. \tag{5}$$

Da to dokažemo, pokažimo najpre da za svake dve funkcije f, $g \in \mathcal{S}_n$ važi formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t) F[f](t) e^{i(x,t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) F[g](y)\, dy\,. \tag{6}$$

Kako su f, $g \in \mathcal{S}_n$, to je $F[f]$, $F[g] \in \mathcal{S}_n$, pa oba integrala u prethodnoj jednakosti postoje. Transformacijom integrala na levoj strani jednakosti (6) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} g(t) F[f](t) e^{i(x,t)}\, dt = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(t,y)}\, dy \right] e^{i(x,t)}\, dt = \\
&\qquad = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{i(t,y-x)}\, dt \right] f(y)\, dy = \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} F[g](y-x) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} F[g](y) f(x+y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

Promena redosleda integracije u prethodnoj jednakosti opravdana je, jer su funkcije f i g klase $\mathcal{S}_n$. Primetimo da je za svako $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t) e^{i(y,t)}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{i\left(y, \frac{u}{\varepsilon}\right)}\, du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-i\left(\frac{y}{\varepsilon}, u\right)}\, du = \frac{1}{\varepsilon^n} F[g]\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

pa je na osnovu (6)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t) F[f](t) e^{i(x,t)}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t) e^{i(x,t)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(u,t)}\, du$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t)\, dt \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{i(u-x,t)}\, du =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t)\, dt \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u+y) e^{i(y,t)}\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u+y)\, dy \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon t) e^{i(y,t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} F[g]\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[g](v) f(x+\varepsilon v)\, dv\,.$$

Krajnji integrali u prethodnom nizu jednakosti su apsolutno i ravnomerno konvergentni po ε, pa prelaskom na graničnu vrednost kada $\varepsilon \to 0$ dobijamo jednakost

$$g(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](t) e^{i(x,t)}\, dt = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[g](v)\, dv\,.$$

Stavimo u ovoj jednakosti $g(x) = e^{-|x|^2/2}$. Na osnovu primera 1. $F[g](v) = e^{-|v|^2/2}$. Ako sada iskoristimo vrednost Ojler-Puasonovog integrala i na poslednji integral primenimo Fubinijevu teoremu, dobijamo formulu (5). Time smo dokazali da je $F^{-1}[F[f]] = f$. Kako je

$F^{-1}[f](x) = F[f](-x)$, iz dokazane formule (5) sledi i druga jednakost $F[F^{-1}[f]] = f$. Sada iz dokazanih formula i činjenice da je $F[f] \in \mathcal{S}_n$ za svako $f \in \mathcal{S}_n$, zaključijemo da teorema 2. važi i za prostor $\mathcal{S}_n$.

Vratimo se ponovo na jednakost (6). Ako u toj jednakosti stavimo da je $x = 0$, dobićemo jednakost

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](t)g(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)F[g](y)\,dy\,. \tag{7}$$

Zamenjujući u ovoj jednakosti g sa $\overline{F[g]}$, koristeći pri tome jednakost $F[\overline{F[g]}] = \overline{g}$, dobijamo jednakost

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{g(y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](t)\overline{F[g](t)}\,dt \tag{8}$$

koju možemo zapisati u obliku

$$(f, g) = (F[f], F[g])\,, \tag{9}$$

gde je $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod definisan na prostoru $\mathcal{S}_n$. Jednakost (9) ukazuje na to da je Furijeova transformacija izometrija prostora $\mathcal{S}_n$, a poznata je kao **Parsevalova jednakost**. Iz nje specijalno sledi sledeća jednakost

$$\|f\|^2 = (f, f) = (F[f], F[f]) = \|F[f]\|^2\,. \tag{10}$$

Na kraju ovog odeljka dokažimo sledeće važne formule

$$F[f * g] = (2\pi)^{n/2} F[f] \cdot F[g]\,, \tag{11}$$

$$F[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} F[f] * F[g]\,, \tag{12}$$

koje uspostavljaju vezu između operacija konvolucije i proizvoda funkcija iz $\mathcal{S}_n$ posredstvom Furijeove transformacije. Da važi prva formula, neposredno sledi iz sledećih transformacija:

$$F[f*g](x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(t) e^{-i(t,x)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t-y) g(y)\, dy \right) e^{-i(t,x)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(x,y)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t-y) e^{-i(x,t-y)}\, dt \right) dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(x,y)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(x,u)}\, du \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(x,y)} F[f](x)\, dy = (2\pi)^{n/2} F[f](x) \cdot F[g](x)\,.$$

Promena redosleda integracije u prethodnom nizu jednakosti dozvoljena je, jer su funkcije $f,\, g \in \mathcal{S}_n$.

Druga formula sledi iz prve, ako iskoristimo jednakosti $F[F^{-1}[f]] = F^{-1}[F[f]] = f$, $F^{-1}[\overline{f}] = \overline{F[f]}$, $F[\overline{f}] = \overline{F^{-1}[f]}$ i $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{u * v} = \overline{u} * \overline{v}$. Konačno, ako u formulama (11) i (12) umesto f i g stavimo $F^{-1}[f]$ i $F^{-1}[g]$, a zatim na dobijene jednakosti primenimo inverznu Furijeovu transformaciju, dobijamo sledeće formule

$$F^{-1}[f] \cdot F^{-1}[g] = (2\pi)^{-n/2} (F^{-1}[f] * F^{-1}[g]\,, \tag{13}$$

$$F^{-1}[f] * F^{-1}[g] = (2\pi)^{n/2} (F^{-1}[f] \cdot F^{-1}[g])\,, \tag{14}$$

analogne formulama (11) i (12).

Primer 2. Odredimo funkciju $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ koja zadovoljava linearnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x) = f(x)\,,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dati realni brojevi, a f poznata funkcija.

Ako primenimo Furijeovu transformaciju na obe strane date jednačine i pri tome iskoristimo teoremu 1., 3.4., pretpostavljajući pri tome da funkcije u i f zadovoljavaju ulove navedene teoreme, dobijamo jednačinu

$$(a_0(it)^n + a_1(it)^{n-1} + \cdots + a_n)F[u](t) = F[f](t)\,.$$

Primenom inverzne Furijeove transformacije na poslednju jednakost dobijamo nepoznatu funkciju $u(x)$.

Primer 3. Dokažimo sada da za svaku funkciju $\varphi \in \mathcal{S}$ važi jednakost

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\varphi](n)e^{in\pi}\,, \tag{15}$$

iz koje za $x = 0$ dobijamo **Puasonovu formulu**:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\varphi](n)\,.$$

Kako je φ, $F[\varphi] \in \mathcal{S}$, oba reda u (15) su apsolutno konvergentna. Oni su istovremeno i ravnomerno konvergentni po x na $\mathbb{R}$, a kako je izvod funkcije iz $\mathcal{S}$ element skupa $\mathcal{S}$, funkcija $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2\pi n)$ je klase $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Funkcija f je očigledno 2π-periodična. Neka su $\{c_k\}$ Furijeovi koeficijenti funkcije f u odnosu na ortonormirani sistem $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx &= \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\varphi(x+2\pi n)e^{-ikx}\,dx = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx = F[\varphi](k)\,.
\end{aligned}$$

Kako je f 2π-periodična funkcija klase $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, Furijeov red funkcije f konvergira u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$. Stoga je za svako $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2\pi n) = f(x) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[\varphi](n) e^{inx} .$$

Zadaci za vežbanje

1. Dokazati da za Furijeovu transformaciju važe sledeća tvrđenja:

a) za svaku funkciju $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ važi jednakost $F[\overline{f}](-x) = \overline{F[f](x)}$;

b) ako je funkcija f realna i parna, tada je $\overline{F_c[f](x)} = F_c[f](x)$, $F[f](x) \equiv 0$, $\overline{F[f](x)} = F[f](x) = F[f](-x)$;

c) ako je f realna i neparne funkcija, tada je $F_c[f](x) \equiv 0$, $\overline{F_s[f](x)} = F[f](x)$, $\overline{F[f](x)} = -F[f](x) = F[f](-x)$;

d) Ako je funkcija $Re\, f = 0$, onda je $F[\overline{f}](-x) = -\overline{F[f](x)}$.

2. Uz pretpostavku da postoji Furijeova transformacija $F : f \mapsto F[f]$ funkcije f, dokazati sledeća svojstva Furijeove transformacije

$$a)\ F : f(ax) \mapsto \frac{1}{a} F[f]\left(\frac{t}{a}\right) , \qquad b)\ F : f(x-x_0) \mapsto F[f](t) e^{-itx_0} ,$$

$$c)\ F : [f(x+x_0) \pm f(x-x_0)] \mapsto \begin{cases} F[f](t) 2\cos tx_0 , \\ F[f](t) 2\sin tx_0 , \end{cases}$$

$$d)\ F : f(x) e^{\pm it_0 x} \mapsto F[f](t \pm t_0) ,$$

$$e)\ F : f(x) \cos t_0 x \mapsto \frac{1}{2} [F[f](t-t_0) + F[f](t+t_0) ,$$

$$f)\ F : f(x) \sin t_0 x \mapsto \frac{1}{2} [F[f](t-t_0) - F[f](t+t_0) .$$

3. Naći Furijeovu transformaciju sledećih funkcija:

$$a)\ \Pi_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} , & za\ \ |x| \le A , \\ 0 & za\ \ |x| > A , \end{cases}$$

$$b)\ \Pi_A(x) \cos t_0 x , \qquad c)\ \Pi_A(x+2A) \pm \Pi_A(x-2A) ,$$

$$d)\ \Lambda_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{A}\left(1 - \frac{|x|}{A}\right) , & za\ \ |x| \le A , \\ 0 & za\ \ |x| > A . \end{cases}$$

4. Dokazati da su sinusna i cosinusna Furijeova transformacija funkcije $f(x) = 1/\sqrt{x}$ jednake samoj funkciji $f(cx)$.

5. Dokazati da je sinusna Furijeova transformacija funkcije

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi x}} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$$

sama funkcija $f(x)$.

6. Dokazati da za Furijeovu transformaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$ važi $F[f] = O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ kada $y \to +\infty$.

7. Dokazati da je Furijeova transformacija funkcije $f(x) = xe^{-|x|}$ beskonačno diferencijabilna na celoj realnoj pravoj. Da li funkcija f pripada klasi $\mathcal{S}$? Isto pitanje za funkciju $g(x) = e^{-|x|}$.

8. Dokazati da je prostor Švarca gust u prostoru $\mathcal{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ funkcija apsolutno integrabilnih sa kvadratom. Metrika na tom prostoru određena je normom koja je definisana skalarnim proizvodom $(f, g) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \overline{g})(x)\, dx$.

9. Dokazati sledeće formule

$$a)\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2}\cos 2zx\, dz = \begin{cases} 1 - x\,, & \text{ako je } 0 \le x \le 1\,, \\ 0\,, & \text{ako je } x \ge 1\,, \end{cases}$$

$$b)\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\cos zx\, dz = \frac{1 - e^{-x}}{x}\ ,\ x \ge 0\,.$$

10. Naći Furijeove transformacije sledećih funkcija

$$\frac{\sin ax}{ax}\,, \quad 2i\frac{\sin^2 ax}{ax}\,, \quad 2\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2,$$

a zatim koristeći dobijene rezultate izračunati sledeće integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx\,.$$

11. Ako su zadovoljeni uslovi teoreme 1., 3.2., dokazati da tada važe formule:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos xy\, dy \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos yt\, dt\,,$$

ako je funkcija f parna, odnosno formule

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xy\,dy\int\limits_{0}^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt\,,$$

ako je funkcija f neparna.

12. Ako su zadovoljeni uslovi posledice 1., 3.2., dokazati da se Furijeov integral može napisati u jednom od sledećih oblika

$$f(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F[f](\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)\,dx\,.$$

13. Proveriti Furijeovu formulu za funkcije

$$a)\ \cos\frac{x^2}{2}\,,\qquad b)\ \sin\frac{x^2}{2}\,,$$

$$c)\ f(x)=ci\ x:=-\int\limits_{x}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\,,\quad d)\ g(x)=si\ x:=-\int\limits_{x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

14. Neka je funkcija f monotono opadajuća na intervalu $(0,+\infty)$. Ako funkcija f konvergira nuli kada $x\to+\infty$ i ako je integrabilna u okolini tačke $x=0$, dokazati da je tada sinusna Furijeova transformacija $F_s[f](x)$ nenegativna funkcija za svako $x>0$.

15. Neka je f ograničena, monotono opadajuća funkcija na $[0,+\infty)$ koja konvergira nuli kada $x\to+\infty$. Ako je osim toga izvod $f'(x)$ negativna, monotono rastuća funkcija, dokazati da je tada kosinusna transformacija Furijea $F_c[f](x)$ nenegativna, integrabilna funkcija na $[0,+\infty)$.

Dokazati da tvrđenja iskazana u ovom i prethodnom zadatku ne važe za drugi tip Furijeove transformacije.

16. Rešiti integralnu jednačinu

$$\int\limits_{0}^{+\infty}g(z)\sin zx\,dz=f(x)\,,$$

gde je

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x\,, & \text{za } 0\le x\le\pi\,,\\ 0\,, & \text{za } x\ge\pi\,,\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x\,, & \text{za } 0\le x<\pi\,,\\ -\frac{\pi}{4}\,, & \text{za } x=\pi\,,\\ 0\,, & \text{za } x>\pi\,.\end{cases}$$

(Rezultat: a) $\frac{\sin\pi x}{1-x^2}$, b) $\frac{x\sin\pi x}{1-x^2}$)

17. Rešiti sledeću integralno-diferencijalnu jednačinu

$$\varphi(x)=f(x)+\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(K_0(x-s)\varphi^{(m)}(s)+\cdots+K_{m-1}(x-s)\varphi'(s)+K_m(x-s)\varphi(s))\,ds\,,$$

gde su f i K_i, $i=\overline{0,m}$, poznate funkcije, a φ nepoznata funkcija koju treba odrediti.

18. Rešiti talasnu jednačinu

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\,,\quad a>0\,,$$

ako tražena funkcija $u(x,t):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ zadovoljava početne uslove $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,t)=g(x)$, gde su f i g poznate funkcije.

(Rezultat: $u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\int\limits_o^t\frac{g(x-a\tau)+g(x+a\tau)}{2}\,d\tau$)

19. Funkcija $u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\ge 0$, na prostoru $\mathbb{R}^n$ zadovoljava jednačinu provođenja toplote

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u\,,\quad a>0\,,$$

gde je $\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Odrediti funkciju u, ako ona zadovoljava početni uslov $u(x,0)=f(x)$, gde je f poznata funkcija.

(Rezultat: $u(x,t)=(f*E)(x,t)$, gde je $E(x,t)=(2a\sqrt{\pi t})^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$, $t>0$)

INDEX AUTORA

INDEX POJMOVA

Literatura

[1] Adnađević, D., Kadelburg, Z., *Matematička analiza,* Tom I, II, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1991., p. 398+308.

[2] Aljančić, S., *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968, p. 326.

[3] Акилов, Г. П., Макаров, Б. М., Хавин, В. П., *Елементарное введение в теория интеграла*, Издаватеъство Ленинградского универзитета, 1969., 349 с.

[4] Apostol, T.M., *Mathematical Analisis* (2nd ed), Addison Wesley Publ. Co., London, 1974., p. 483.

[5] Ašić, M., Vukmirović, J., *Zbirka zadataka iz analize II*, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

[6] Blanuša, D., *Viša matematika,* I deo, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965., p. 488.

[7] Бурбаки, Н., *Функции действительного переменого*, Наука, Москва, 1965., 424 с.

[8] Демидович, Б. Н., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, "Nauka", Moskva, 1977..

[9] Дийодоне, Ж., *Увод в съвременния анализ*, Наука и изкуство, София, 1972., 382 с.

[10] Dimitrijević, R., *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Izdavač : autor, Niš, 1999, p. 525.

[11] Дойчинов, Д., *Математически анализ в крайно-мерни пространства*, Наука и изкуство, София, 1979., 274с.

[12] Фихтенгольц, Г.М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* Том I, II, III, Наука, Москва,, 1966, p. 607+800+656.

[13] Gavrilov,V. I., Pavičević, Ž., *Matematička analiza 1*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore, ITP UNIREX, Podgorica, 1994., p. 531.

[14] Гелбаум, Б., Олмстед, Д.Ж., *Контрпримеры у анализе*, Мир, Москва, 1967., 251 с.

[15] Гусак, А. А., *Ряды и кратны интегралы*, БГУ им. В. И. Ленина, Минск, 1970., 383 с.

[16] Илъин, В.А., Садовничий, В.А., Сендов, Бл. Х.,, *Математический анализ, "Наука", Москва*, 1979., 720 с.

[17] *Избранные задачи* из журнала "AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY", Мир, Москва, 1977, p. 595.

[18] Картан, А., *Диференцијальное исчисление. Диференцијалные формы*, "Мир", Москва, 1971., 392 с.

[19] Кручков, Г.И., Мордасова, Г.М,..., *Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики*, Москва,"Высшая школа", 1970. 509 с.

[20] Кудрявцев, Л. Д., *Курс математического анализа,* Том I, II, Москва "Высшая школа", 1981, p. 687+584.

[21] Lang, S., *Analisis I*, Addison-Wesley Publishing Company, 1976., p. 460.

[22] Lažetić, N., *Matematika II/1*, Naučna knjiga, Beograad, 1991, p. 425.

[23] Лефор, Г., *Алгебра и анализ. Задачи*, "Наука", Москва, 1973., 462 с.

[24] Ляшко, И.И., Боярчук, А.К., Гай, Я.Г., Головач, Г.,П., *Справочное пособие по математическому анализу,* Том I, II, "Вища школа", Киев, 1979., 733 с.

[25] Ляшко, И.И., Боярчук, А.К., Гай, Я.Г., Калайда, А.Ф., *Математический анализ,* Том I, II, "Вища школа", Киев, 1985 +550 с.

[26] Макаров, И. П., *Дополнителвные главы математического анализа*, "Просвещение", Москва, 1968., 311 с.

[27] Mardešić, S., *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru,* Prvi deo, Školska knjiga, Zagreb, 1974, p. 272.

[28] Miličić, P., Ušćumlić, M., *Zbirka zadataka iz više matematike II*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971., p. 792.

[29] Натансон, И. П., *Увод в теорията на реалните функции*, Наука и изкуство, София, 1971., 580 с.

[30] Никольский, С. М., *Курс математического анализа,* Том I, II, Наука, Москва, 1975, p. 431+407.

[31] Perišić, D., Pilipović, S., Stojanović, M., *Funkcije više promenljivih. Diferencijalni i integralni raačun*, Univerzitet u Novom Sadu-Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997, p. 235.

[32] Perović, M., *Osnovi Matematičke analiza-I*, NIP UR, Nikšić, 1990, p. 487.

[33] Пизо, Ш., Заманский, *Курс математики. Алгебра и анализ*, "Наука", Москва, 1971., 656 с.

[34] Пойа, Д., Сегъо, Г., *Задачи и теореми по анализ,* том 1, 2, Наука и изкуство, София, 1973., 390+432 с.

[35] Radenović, S., *Matematička analiza, Zbirka rešenih zadataka i zadataka za pripremu ispita*, Radenović, S., Beograd, 1996, p. 395.

[36] Rakočević, V., *Funkcionalna analiza*, "Naučna knjiga, Beograd, 1994., p. 242.

[37] Рудин, У., *Основы математического анализа*, "Мир", Москва, 1976., 319 с.

[38] Sikorski, R., *Advanced Calculus Functions of Several Variables*, Instytut matematyczny PAN, Monografie matematyczne, 1969, p. 460.

[39] Шилов, Г. Е., *Математический анализ. Функции одного переменного,* част 1-2, част 3, "Nauka", Moskva, 1969., 1970., 528+352 с.

[40] Шилов, Г. Е., *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных,* части 1-2, "Nauka", Moskva, 1972., 622 с.

[41] Шварц, Л., *Анализ,* Том I, II, "Мир", Москва, 1972., 824+528 с.

[42] Виленкин, Н. Я., Бохан, К. А., Марон, И. А., Матвеев, И. В., Смолянский, М. Л., Цветков, А. Т., *Задачник по курсу математического анализа* части I, II, "Просвещение", Москва, 1971., 348+336 с.

[43] Заманский, М., *Введение в современную алгебру и анализ*, "Наука", Москва, 1974., 487 с.

[44] Зигмунд, А., *Тригонометрические ряды,* Том I, II, "Мир", Москва, 1965., 615+537 с.

[45] Зорич, В.А., *Математический анализ,* Том I, II, Москва, "Наука", 1984.,640 с.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

517.518.1/.5(075.8)

Analiza realnih funkcija više promenljivih, Dr Radoslav Dimitrijević, Niš, 1999.

Izdavač: **autor**

Obrada teksta: **autor**
Crteži: **Ivan Stanković**
Korice: **Miroslav Dimitrijević**

Štampa: **Sirius**

Tiraž: 500 primeraka

ID=73480716