Jelena M. Ignjatović
Miroslav D. Ćirić

AUTOMATI I FORMALNI JEZICI

Univerzitet u Nišu,
Prirodno-matematički fakultet
Niš, 2016.

Jelena M. Ignjatović
Miroslav D. Ćirić

Automati i formalni jezici

Izdavač:
UNIVERZITET U NIŠU, PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Recenzenti:
PROF. DR ALEKSANDAR STAMENKOVĆ
PROF. DR MILAN BAŠIĆ

Serija:
UDžBENICI

Autori:
DR JELENA M. IGNJATOVIĆ, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

DR MIROSLAV D. ĆIRIĆ, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Štampa: ATLANTIS, NIŠ

Tiraž: 70 primeraka

ISBN 978-86-6275-056-3

Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Nišu, broj 1373/1 od 16.12.2015. godine odobreno je štampanje rukopisa kao univerzitetskog udžbenika.

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд

519.713(075.8)
519.76(075.8)

ИГЊАТОВИЋ, Јелена М., 1973-
Automati i formalni jezici / Jelena M. Ignjatović, Miroslav D. Ćirić. -
Niš : Univerzitet, Prirodno-matematički fakultet, 2016 (Niš : Atlantis). -
IX, 348 str. : graf. prikazi, tabele ; 25 cm. - (Serija Udžbenik /
[Prirodno-matematički fakultet, Niš])

Tiraž 70. - Bibliografija: str. 337-341. - Registar.

ISBN 978-86-6275-056-3

1. Ћирић, Мирослав Д., 1964- [аутор]
а) Аутомати, коначни b) Математичка лингвистика
COBISS.SR-ID 224358668

Najdražim Neci i Leni,
sa nadom da će u životu naći najkraći put do sreće

Predgovor

Ova knjiga je zamišljena, prvenstveno, kao udžbenik iz predmeta *Teorija algoritama, automata i jezika*, na prvoj godini Master akademskih studija na Departmanu za Računarske nauke Prirodno-matematičog fakulteta u Nišu. Knjiga je napisana tako da je mogu koristiti i studenti doktorskih studija u oblasti računarskih nauka i matematike iz predmeta *Formalni jezici, automati i izračunljivost*, kao i studenti tehničkih nauka i svi oni koji su zainteresovani da steknu šira znanja iz teorije jezika i automata. Deo knjige sadrži originalne rezultate autora, tako da knjiga ima i monografski karakter.

U knjizi su, na originalan način, obradjeni osnovni problemi teorije jezika i automata, sa ciljem da se studenti upoznaju ne samo sa brojnim primenama automata i formalnih jezika, nego i sa osnovnim matematičkim (prvenstveno algebarskim) pojmovima i alatima koji se koriste za opis apstraktnih objekata koji se izučavaju u računarskim naukama. Naglasak je stavljen na probleme teorije jezika i automata koji su efektivno rešivi, uz primenu alata iz univerzalne algebre, teorije polugrupa i teorije grafova. Ideje i tehnike dokazivanja objašnjene su na konstruktivan način, uz primenu indukcije i rekurzije, kad god je to moguće, a predstavljeni algoritmi se realizuju u polinomijalnom vremenu.

Knjiga ima devet glava i na kraju svake glave se nalaze zadaci predviđeni za samostalni rad studenata.

U prvoj glavi su uvedeni osnovni matematički pojmovi i predstavljeni neki matematički rezultati koji će biti korišćeni u daljem radu.

U drugoj glavi uvedeni su pojmovi jezika i formalnih gramatika i data je klasifikacija jezika u odnosu na tipove gramatika koje ih generišu (hijerarhija Čomskog).

Treća glava posvećena je determinističkim konačnim automatima i jezicima koji mogu biti raspoznati ovim automatima. Predstavljeni su algoritmi za konstrukciju minimalnog automata datog jezika i minimizaciju datog automata, govori se o raspoznavanju jezika monoidom, monoidu prelaza automata i sintaksičkom monoidu i dati su efektivni postupci za konstrukciju ovih monoida.

U četvrtoj i petoj glavi se, korišćenjem originalnog pristupa, razmatraju nedeterministički automati i fundamentalni problemi koji se tiču ovih automata: problem redukcije broja stanja datog automata, problem utvrđivanja ekvivalentnosti dva data nedeterminstčka automata i problem prevođenja datog nedeterminističkog automata u deterministički (determinizacija).

Šesta glava se bavi karakterizacijom raspoznatljivih jezika pomoću regularnih izraza i dokazano nekoliko teorema o ekvivalentnosti regularnih izraza i konačnih automata, kao i o njihovoj ekvivalentnosti sa regularnim gramatikama.

U sedmoj glavi rešavaju se problemi vezani za predstavljanje konteksno-nezavisnih jezika konteksno-nezavisnih gramatikama, obrađene su transformacije tih gramatika, a potom su navedeni primeri konstrukcije potisnih automata kao apstraktnih mašina koje raspoznaju konteksno-nezavisne jezike.

Osma glava je posvećena determinističkim i nedeterminističkim Tjuringovim mašinama, kao najopštijom matematičkom formalizacijom pojma algoritma koje opisuju tačno jezike generisane proizvoljnim gramatikama i precizno definišu granicu između problema koji su algoritamski rešivi i onih koji to nisu.

U poslednjoj glavi govori se o automatima sa izlazom, automatima Milijevog i Murovog tipa, o transformacijama reči i funkcijama koje se mogu realizovati takvim automatima, kao i problemima ekvivalentnosti i minimizacije automata sa izlazom.

Sadržaj

Glava 1
Matematičke osnove

U ovoj glavi će biti uvedeni osnovni matematički pojmovi i predstavljeni neki matematički rezultati koji će biti korišćeni u daljem radu.

1.1. Skupovi, relacije, funkcije i grafovi

Podrazumevaćemo da čitaoci ove knjige vladaju osnovnim pojmovima i oznakama teorije skupova i teorije brojeva, ali ćemo se ipak podsetiti nekih od tih pojmova i oznaka.

Skup prirodnih brojeva, ne uključujući nulu, označavaćemo sa $\mathbb{N}$, dok će skup prirodnih brojeva sa nulom biti označavan sa $\mathbb{N}^0$. Ako su $m,n \in \mathbb{N}^0$ brojevi takvi da je $m \leqslant n$, tada je $[m,n] = \{k \in \mathbb{N}^0 \,|\, m \leqslant k \leqslant n\}$. Pojam *klasa* koristićemo jednako kao i pojam *skup*. Klasa skupova biće obično nazivana *familijom skupova*. Familija skupova indeksirana skupom I će biti označavana sa A_i, $i \in I$, $\{A_i \,|\, i \in I\}$ ili $\{A_i\}_{i\in I}$. Ako je indeksni skup konačan i ima n elemenata, onda obično pišemo $I = \{1,2,\dots,n\}$ i familiju indeksiranu sa I označavamo sa $A_1, A_2, \dots, A_n$ ili $\{A_i\}_{i=1}^n$.

Kardinalni broj skupa A označavamo sa $|A|$, a sa A^c njegov komplement, u slučaju kada je poznato u odnosu na koji širi skup se taj komplement posmatra, a ukoliko to nije jasno, navešćemo eksplicitno koji je to skup. Razliku skupova A i B označavaćemo sa $A - B$, tj. $A - B = \{a \,|\, a \in A \ \wedge \ a \notin B\}$. Partitivni skup skupa A, tj. skup svih podskupova od A, označavamo sa 2^A ili sa $\mathcal{P}(A)$.

Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ neprazna familija nepraznih skupova. Pod *Dekartovim proizvodom* te familije, koji označavamo sa $\prod_{i\in I} A_i$, podrazumevamo skup koji se sastoji iz svih funkcija

$$a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad a : i \mapsto a_i,$$

koja ispunjavaju uslov $a_i \in A_i$, za svaki $i \in I$. Jednostavnosti radi, element $a \in A = \prod_{i\in I} A_i$ pišemo kao $(a_i)_{i\in I}$ ili kraće samo (a_i), ako je indeksni skup I poznat. Za $i \in I$, funkcija $\pi_i : A \to A_i$ definisana sa $\pi_i(a) = a_i$, naziva se *i-tom projekcijom* od A na A_i, a a_i se naziva *i-tom koordinatom* od a. Ako je indeksni skup I konačan, u kom slučaju obično uzimamo da je $I = \{1,2\dots,n\}$, onda obično pišemo $a = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, i Dekartov proizvod familije $\{A_i\}_{i=1}^n$ označavamo sa $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ili $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. U tom slučaju proizvoljan element $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ nazivamo *uređenom n-torkom*, a ako je $n = 2$, onda govorimo o *uređenom paru*. Ako je $A_i = A$, za svaki $i \in I$, tada Dekartov proizvod $\prod_{i \in I} A_i$ označavamo sa A^I i nazivamo ga *Dekartovim stepenom* skupa A, a ako je $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, tada pišemo $\prod_{i=1}^{n} A_i = A^n$.

Neka je A neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$. Pod pojmom *n-arne relacije* na A podrazumevamo svaki podskup R skupa A^n, pri čemu to može biti i prazan podskup. Broj n se naziva *dužina* ili *arnost* relacije R. Relacije dužine 2 se nazivaju *binarne relacije*. Budući da najčešće radimo sa binarnim relacijama, onda binarne relacije kraće nazivamo samo *relacijama*. Skup svih binarnih relacija na A označavamo sa $\mathcal{B}(A)$. Specijalne vrste relacija na proizvoljnom skupu A koje su vredne pažnje su *prazna relacija*, sa uobičajenom oznakom $\emptyset$, *relacija jednakosti* $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$, koja se takođe naziva i *dijagonala* ili *identička relacija*, i *univerzalna* ili *puna relacija* $\nabla_A = A \times A$. U slučajevima kada ne postoji opasnost od zabune, izostavljamo indeks A u Δ_A i ∇_A i pišemo prosto Δ i ∇. Ako je R relacija na skupu A i $(a,b) \in R$, tada kažemo da su *a* i *b u relaciji R* i često izraz "$(a,b) \in R$" zamenjujemo izrazom "$a\,R\,b$". Pošto se binarna relacija na skupu A definiše kao podskup Dekartovog proizvoda $A \times A$, jednakost, inkluzija, unija i presek relacija na skupu A se definišu kao za podskupove od $A \times A$.

Osim relacija između elemenata jednog skupa značajne su i relacije između elemenata dva različita skupa. Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup $R \subseteq A \times B$ naziva se *relacija iz A u B*, i jednakost, inkluzija, unija i presek relacija iz A u B se definišu kao za podskupove od $A \times B$. Za relaciju $R \subseteq A \times B$, relaciju $R^{-1} \subseteq B \times A$ definisanu sa $(b,a) \in R^{-1}$ ako i samo ako je $(a,b) \in R$, za sve $a \in A$ i $b \in B$, nazivamo *inverz* ili *konverz* relacije R. Podskupove $\operatorname{Dom} R \subseteq A$ i $\operatorname{Im} R \subseteq B$ definisane sa

$$\operatorname{Dom} R = \{a \in A \mid (\exists b \in B)\,(a,b) \in R\}, \quad \operatorname{Im} R = \{b \in B \mid (\exists a \in A)\,(a,b) \in R\}.$$

nazivamo redom *domen* i *slika* relacije R.

Za neprazne skupove A, B i C, i relacije $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$, *kompozicija* ili *proizvod* od R i S je relacija $R \circ S \subseteq A \times C$ definisana sa

$$(a,c) \in (R \circ S) \;\Leftrightarrow\; (\exists b \in B)\big((a,b) \in R \;\wedge\; (b,c) \in S\big), \tag{1.1}$$

za sve $a \in A$ i $c \in C$. Za neprazne skupove A i B, relaciju $R \subseteq A \times B$, i podskupove $\alpha \subseteq A$ i $\beta \subseteq B$, definišemo podskupove $\alpha \circ R \subseteq B$ i $R \circ \beta \subseteq A$ sa

$$b \in \alpha \circ R \;\Leftrightarrow\; (\exists a \in A)\big(a \in \alpha \;\wedge\; (a,b) \in R\big), \tag{1.2}$$

$$a \in R \circ \beta \;\Leftrightarrow\; (\exists b \in B)\big((a,b) \in R \;\wedge\; b \in \beta\big), \tag{1.3}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$. Da bi uprostili oznake, za neprazan skup A i podskupove $\alpha, \beta \subseteq A$ pisaćemo

$$\alpha \circ \beta = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \alpha \cap \beta \neq \emptyset, \\ 0 & \text{ako je } \alpha \cap \beta = \emptyset, \end{cases} \tag{1.4}$$

tj., $\alpha \circ \beta$ je istinitosna vrednost tvrđenja "$\alpha \cap \beta \neq \emptyset$".

Iskazna algebra je algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg)$ sa binarnim operacijama $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\leftrightarrow$ na $\{0,1\}$ (konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija), i unarnom operacijom $\neg$ (negacija) definisanim sledećim tablicama

$$\begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\;, \quad \begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\;, \quad \begin{array}{c|cc} \to & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\;, \quad \begin{array}{c|cc} \leftrightarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\;, \quad \begin{array}{c|c} \neg & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\;.$$

Sa druge strane, algebru $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ zovemo *dvoelementna Bulova algebra*.

Bulovom matricom se naziva matrica čiji su svi članovi iz skupa $\{0,1\}$, a *množenje Bulovih matrica* se definiše uz pomoć operacija $\vee$ i $\wedge$ u dvoelementnoj Bulovoj algebri. Naime, *proizvod Bulovih matrica* $U = [u_{ij}]_{m\times n}$ i $V = [v_{jk}]_{n\times p}$ je Bulova matrica $U \circ V = W = [w_{ik}]_{m\times p}$ čiji su članovi definisani sa

$$w_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} u_{ij} \wedge v_{jk}, \tag{1.5}$$

za sve $i \in [1,m], k \in [1,p]$. Primetimo da pravilo za množenje Bulovih matrica ima potpuno istu formu kao pravilo za množenje realnih ili kompleksnih matrica, samo je sabiranje zamenjeno disjunkcijom a množenje konjunkcijom.

Kao što je uobičjeno u klasičnoj linearnoj algebri, Bulove matrice tipa $1\times m$ i $n\times 1$ tretiramo kao vektore i nazivamo ih *Bulovim vektorima*, pri čemu matricu tipa $1\times m$ zovemo *vektor vrsta*, a matricu tipa $n\times 1$ *vektor kolona*. Množenje matrica tipa $1\times m$ i $m\times n$, odnosno $m\times n$ i $n\times 1$, nazivamo *vektorsko-matričnim množenjem*, dok proizvod vektora tipa $1\times m$ i $m\times 1$ daje element iz skupa $\{0,1\}$ koji nazivamo *skalarni proizvod* tih vektora.

Bulove matrice su veoma zgodne za predstavljanje relacija između konačnih skupova, odnosno na konačnom skupu. Naime, ako su dati konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, tada svaku relaciju $R \subseteq A\times B$ možemo poistovetiti sa Bulovom matricom $U = [u_{ij}]_{m\times n}$ za koju važi

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{ako } (a_i, b_j) \notin R, \end{cases} \tag{1.6}$$

i obratno, svaku Bulovu matricu U možemo poistovetiti sa relacijom R za koju važi (1.6). Na isti način možemo poistovetiti i podskupove skupa A i Bulove vektore $[u_i]_m$ dužine m. Osim toga, ako su A, B i C konačni skupovi za koje je $|A| = m$, $|B| = n$ i $|C| = p$, i ako relacije $R \subseteq A\times B$ i $S \subseteq B\times C$ tretiramo kao Bulove matrice tipa $m\times n$ i $n\times p$, onda je kompozicija $R \circ S$ isto što i matrični proizvod Bulovih matrica. Takođe, ako podskupove $\alpha \subseteq A$ i $\beta \subseteq B$ tretiramo kao Bulove vektore, tada su $\alpha \circ R$ i $R \circ \beta$ isto što i odgovarajući vektorsko-matrični proizvodi, dok je $\alpha \circ \beta$ ništa drugo do skalarni proizvod Bulovih vektora.

Za neprazne skupove A, B, C and D, relacije $R \subseteq A \times B$, $S, S_1, S_2, S_i \subseteq B \times C$ (gde $i \in I$ i I je proizvoljan indeksni skup), i $T \subseteq C \times D$, i podskupove $\alpha \subseteq A$, $\beta \subseteq B$ i $\gamma \subseteq C$, važi sledeće:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T), \tag{1.7}$$

$$S_1 \subseteq S_2 \ \text{ povlači } \ R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2 \ \text{ i } \ S_1 \circ T \subseteq S_2 \circ T, \tag{1.8}$$

$$R \circ \Big(\bigcup_{i \in I} S_i\Big) = \bigcup_{i \in I} (R \circ S_i), \quad \Big(\bigcup_{i \in I} S_i\Big) \circ T = \bigcup_{i \in I} (S_i \circ T) \tag{1.9}$$

$$(\alpha \circ R) \circ S = \alpha \circ (R \circ S), (\alpha \circ R) \circ \beta = \alpha \circ (R \circ \beta), (R \circ S) \circ \gamma = R \circ (S \circ \gamma), \tag{1.10}$$

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \tag{1.11}$$

$$S_1 \subseteq S_2 \ \text{ povlači } \ S_1^{-1} \subseteq S_2^{-1}, \tag{1.12}$$

$$\alpha \circ R = R^{-1} \circ \alpha, \quad R \circ \beta = \beta \circ R^{-1}. \tag{1.13}$$

Dokazi ovih tvrđenja su elementarni i ostavljaju se čitaocu za vežbu. Kao što vidimo, zagrade u (1.7) i (1.10) mogu se izostaviti.

Primetimo da, bez obzira na naziv i oznaku koje koristimo, inverzna relacija R^{-1} nije inverz relacije $R \subseteq A \times B$ u smislu kompozicije relacija, odnosno, u opštem slučaju relacije $R \circ R^{-1}$ i $R^{-1} \circ R$ ne moraju da budu jednake identičkim relacijama na A i B.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, i neka su date relacije $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ i $T \subseteq A \times C$. *Desni rezidual* od T sa R je relacija $R \backslash T \subseteq B \times C$ definisana sa

$$(b, c) \in R \backslash T \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a \in A) \ \Big((a, b) \in R \ \Rightarrow (a, c) \in T\Big), \tag{1.14}$$

za sve $(b, c) \in B \times C$, a *levi rezidual* od T sa S je relacija $T/S \subseteq A \times B$ definisana sa

$$(a, b) \in T/S \quad \Leftrightarrow \quad (\forall c \in C) \ \Big((b, c) \in S \ \Rightarrow (a, c) \in T\Big), \tag{1.15}$$

za sve $(a, b) \in A \times B$. Nije teško proveriti da sledeće *svojstvo reziduiranja* (u nekim izvorima nazvano i *svojstvo adjunkcije*) važi za proizvoljne $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ i $T \subseteq A \times C$:

$$R \circ S \subseteq T \quad \Leftrightarrow \quad S \subseteq R \backslash T \quad \Leftrightarrow \quad R \subseteq T/S. \tag{1.16}$$

Drugim rečima, $R \backslash T$ je najveće rešenje relacijske nejednačine $R \circ X \subseteq T$ po nepoznatoj X koja uzima vrednosti u $2^{B \times C}$, a T/S je najveće rešenje relacijske nejednačine $Y \circ S \subseteq T$ po nepoznatoj Y koja uzima vrednosti u $2^{A \times B}$.

Osim reziduala relacija, definišemo i reziduale skupova, na način koji sledi. Za skupove $\alpha \subseteq A$ i $\beta \subseteq B$, *desni rezidual* od β sa α je relacija $\alpha \backslash \beta \subseteq A \times B$ definisana sa

$$(a,b) \in \alpha\backslash\beta \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \alpha \;\Rightarrow b \in \beta), \tag{1.17}$$

za sve $(a,b) \in A\times B$, a *levi rezidual* od β sa α je relacija $\beta/\alpha \subseteq B\times A$ definisana sa

$$(b,a) \in \beta/\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \alpha \;\Rightarrow\; b \in \beta), \tag{1.18}$$

za sve $(b,a) \in B\times A$. Jasno je da je $\beta/\alpha = (\alpha\backslash\beta)^{-1}$. Za sve $R \subseteq A\times B$, $S \subseteq B\times A$, $\alpha \subseteq A$ i $\beta \subseteq B$ važi sledeće *svojstvo reziduiranja*:

$$\alpha \circ R \subseteq \beta \Leftrightarrow R \subseteq \alpha\backslash\beta, \quad S \circ \alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow S \subseteq \beta/\alpha. \tag{1.19}$$

U ovom slučaju, $\alpha\backslash\beta$ je najveće rešenje nejednačine $\alpha \circ X \subseteq \beta$ po nepoznatoj X koja uzima vrednosti u $2^{A\times B}$, a β/α je najveće rešenje nejednačine $Y \circ \alpha \subseteq \beta$ po nepoznatoj Y koja uzima vrednosti u $2^{B\times A}$.

Neka su A, B i C konačni skupovi sa $|A| = m$, $|B| = n$ i $|C| = p$. Kao što smo to već ranije činili, relacije $R \subseteq A\times B$, $S \subseteq B\times C$ i $T \subseteq A\times C$ tretiraćemo kao Bulove matrice a skupove $\alpha \subseteq A$ i $\beta \subseteq B$ kao Bulove vektore, tj. uzećemo da je

$$R = [r_{ij}]_{m\times n}, \;\; S = [s_{jk}]_{n\times p}, \;\; T = [t_{ik}]_{m\times p}, \;\; \alpha = [a_i]_m, \;\; \beta = [b_j]_n.$$

U tom slučaju reziduale relacija i skupova izračunavaćemo koristeći izvesne operacije na Bulovim matricama i vektorima, na način koji će biti objašnjen u nastavku. Prvo, reziduale $\alpha\backslash\beta$ i β/α izračunavamo uz pomoć sledećih jednostavnih formula

$$\alpha\backslash\beta = [a_i \to b_j]_{m\times n}, \quad \beta/\alpha = (\alpha\backslash\beta)^{-1} = \Big([a_i \to b_j]_{m\times n}\Big)^{-1}. \tag{1.20}$$

Sa druge strane, u izračunavanju reziduala relacija koristićemo jednu novu operaciju na Bulovim matricama koju definišemo na sledeći način: za Bulove matrice $U = [u_{ij}]_{m\times n}$ i $V = [v_{jk}]_{n\times p}$, njihov $\lhd$-*proizvod* je Bulova matrica $U \lhd V = W = [w_{ik}]_{m\times p}$ čiji su članovi definisani sa

$$w_{ik} = \bigwedge_{j=1}^{n} u_{ij} \to v_{jk}, \tag{1.21}$$

za sve $i \in [1,m], k \in [1,p]$. Primetimo da i ova vrsta proizvoda ima istu opštu formu kao standardni proizvod realnih ili kompleksnih matrica, odnosno proizvod Bulovih matrica. Razlika je jedino u tome što je sabiranje, odnosno disjunkcija, ovde zamenjeno konjunkcijom, dok je množenje, odnosno konjunkcija, zamenjeno implikacijom. Ta sličnost nam omogućava da veštinu množenja matrica koju smo stekli u okviru klasične linearne algebre primenimo na izračunavanje $\lhd$-proizvoda, a time i na izračunavanje reziduala relacija, jer se reziduali $R\backslash T$ i T/S mogu izraziti preko $\lhd$-proizvoda, na sledeći način:

$$R\backslash T = R^{-1} \lhd T, \qquad T/S = (S \lhd T^{-1})^{-1}. \tag{1.22}$$

Napomenimo da kada relaciju R tretiramo kao matricu, onda njenu inverznu relaciju R^{-1} tretiramo kao transponovanu matricu matrice koja odgovara relaciji R.

Na početku ovog odeljka koristili smo pojam funkcije smatrajući da je taj pojam čitaocu već dobro poznat. Međutim, ovde ćemo dati i formalnu definiciju tog pojma iz koje će se videti da su funkcije specijalan slučaj relacija.

Neka su A i B neprazni skupovi. Za relaciju $R \subseteq A \times B$ kažemo da je *kompletna relacija* ako je $\mathrm{Dom}\, R = A$, odnosno ako za svako $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $(a,b) \in R$. Ukoliko je $\mathrm{Im}\, R = B$, odnosno ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $(a,b) \in R$, onda za R kažemo da je *surjektivna relacija*.

Dalje, za R kažemo da je *višeznačna relacija* ako postoje $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$ takvi da je $b_1 \neq b_2$ i $(a,b_1),(a,b_2) \in R$. U suprotnom, ako relacija R nije višeznačna, kažemo da je R *jednoznačna relacija*. Drugim rečima, R je jednoznačna relacija ako za sve $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$ iz $(a,b_1) \in R$ i $(a,b_2) \in R$ sledi $b_1 = b_2$. Ako je relacija R jednoznačna, onda kažemo da je R *parcijalna funkcija* iz A u B, a ako je R i kompletna i jednoznačna, onda kažemo da je R *funkcija* iz A u B. Drugim rečima, $\phi \subseteq A \times B$ je funkcija iz A u B ako za svaki $a \in A$ postoji tačno jedan $b \in B$ tako da je $(a,b) \in \phi$, i u tom slučaju mi pišemo $b = \phi(a)$ i kažemo da funkcija ϕ slika a u b. Pri tome se a se naziva original, a b je njegova slika. Skup A se naziva *domen* ili *oblast definisanosti funkcije* ϕ, dok se B naziva *kodomen* od ϕ. Ako je ϕ funkcija iz A u B, to beležimo sa $\phi : A \to B$, dok oznaku $\phi : a \mapsto \phi(a)$ koristimo kada želimo da naznačimo pravilo pomoću koga se elementu $a \in A$ pridružuje element $\phi(a) \in B$. Iz definicije funkcije neposredno sledi da su dve funkcije ϕ i ψ *jednake* ako imaju isti domen A, isti kodomen B, i ako je $\phi(a) = \psi(a)$, za svaki $a \in A$. Ako je $\phi : A \to B$, $U \subseteq A$ i $V \subseteq B$, tada skupove

$$\phi(U) = \{b \in B \mid (\exists a \in U)\, \phi(a) = b\} \quad \text{i} \quad \phi^{-1}(V) = \{a \in A \mid \phi(a) \in V\}$$

zovemo redom *slika podskupa* U i *inverzna slika podskupa* V u odnosu na ϕ.

Ako su A i B konačni skupovi, pri čemu je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, onda se funkcija $\phi : A \to B$ može predstaviti matrično, na sledeći način:

$$\phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \phi(a_1) & \phi(a_2) & \ldots & \phi(a_n) \end{pmatrix}.$$

Ako su dati neprazni skupovi A i B, funkcija $\phi : A \to B$, i neprazan podskup $X \subseteq A$, onda možemo definisati novu funkciju $\phi|_X : X \to B$ sa $\phi|_X(x) = \phi(x)$, za svaki $x \in X$, koju zovemo *restrikcija* funkcije ϕ na skup X. Sa druge strane, ako je ψ restrikcija funkcije $\phi : A \to B$ na skup $X \subseteq A$, onda za ϕ kažemo da je *proširenje* ili *ekstenzija* funkcije ψ sa skupa X na skup A.

Ako su dati neprazni skupovi A, B i C i funkcije $\phi : A \to B$ i $\psi : B \to C$, onda se *kompozicija funkcija* ϕ i ψ definiše kao funkcija $\phi \circ \psi : A \to C$ zadata pravilom $\phi \circ \psi(a) = \psi(\phi(a))$, za svaki $a \in A$. Nije teško proveriti da ako se funkcije ϕ i ψ tretiraju kao relacije između A i B, odnosno B i C, onda ovako definisana kompozicija funkcija nije ništa drugo do kompozicija relacija koju smo ranije definisali.

Ako su dati neprazni skupovi A, B i C i funkcije $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : A \to C$, onda to često prikazujemo kao na dijagramu na slici

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

i ako pri tome važi $h = f \circ g$, onda se kaže da taj *dijagram komutira* ili da je to *komutativni dijagram*.

Neka su A i B neprazni skupovi. Funkciju $\phi : A \to B$ zovemo *"jedan-jedan" funkcija*, *injektivna funkcija* ili *injekcija* ako za proizvoljne $a, b \in A$, iz $a \neq b$ sledi $\phi(a) \neq \phi(b)$, odnosno ako za sve $a, b \in A$, iz $\phi(a) = \phi(b)$ sledi $a = b$. Sa druge strane, iz definicije surjektivne relacije neposredno dobijamo da $\phi : A \to B$ jeste *"na" funkcija*, *surjektivna funkcija* ili *surjekcija* ako je $\phi(A) = B$, odnosno ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $\phi(a) = b$. U tom slučaju još kažemo i da ϕ *slika A na B*. Za funkciju koja je istovremeno i injektivna i surjektivna kažemo da je *obostrano jednoznačna funkcija*, *bijektivna funkcija* ili *bijekcija*.

Za proizvoljan neprazan skup A, funkciju $I_A : A \to A$ definisanu sa $I_A(a) = a$, za svaki $a \in A$, zovemo *identička funkcija* na skupu A. Neka su A i B neprazni skupovi i $\phi : A \to B$. Ako postoji funkcija $\psi : B \to A$ takva da je $\phi \circ \psi = I_A$ i $\psi \circ \phi = I_B$, tada za ψ kažemo da je *inverzna funkcija* funkcije ϕ. Treba reći da ako ϕ ima inverznu funkciju, tada je ona jedinstvena. Takođe treba reći da ako funkciju ϕ posmatramo kao relaciju iz A u B, u opštem slučaju inverzna relacija ϕ^{-1} ne mora biti funkcija (ne mora biti ni kompletna ni jednoznačna), i može se jednostavno dokazati da je ϕ^{-1} funkcija ako i samo ako ϕ ima inverznu funkciju, i u tom slučaju upravo je ϕ^{-1} inverzna funkcija od ϕ. Takođe se može lako pokazati da je ϕ^{-1} kompletna relacija ako i samo ako je ϕ surjektivna funkcija, i da je ϕ^{-1} jednoznačna relacija ako i samo ako je ϕ injektivna funkcija, odakle neposredno sledi da funkcija ϕ ima inverznu funkciju ako i samo ako je ϕ bijekcija.

Na kraju ovog odeljka uvodimo neke pojmove iz teorije grafova potrebne u daljem tekstu. Pod pojmom *grafa* podrazumevamo uređeni par $G = (G, \varrho)$ koji čine neprazan skup G, čije elemente nazivamo *čvorovima grafa* G, a ϱ je binarna relacija na G, čije elemente nazivamo *granama grafa* G. Primetimo da smo i ovde, jednostavnosti radi, a bez opasnosti od zabune, graf i njegov skup čvorova označili istim slovom G, odnosno izvršili smo poistovećivanje grafa i njegovog skupa čvorova, isto kao što ćemo u narednim odeljcima poistovećivati algebru i njen nosač. Za granu $(a, b) \in \varrho$ kažemo da *izlazi iz čvora* a, a da *ulazi u čvor* b. Grafički, čvorove grafa G predstavljamo tačkama u ravni ili prostoru, a granu $(a, b) \in \varrho$ predstavljamo orijentisanom linijom (strelicom) koja izlazi iz a a ulazi u b.

Granu oblika (a,a) nazivamo *petljom*, a niz grana oblika

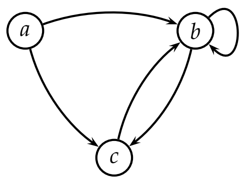
$$(a_1,a_2),\ (a_2,a_3),\ \ldots,\ (a_{n-1},a_n) \in \varrho$$

nazivamo *putem* u grafu G, za koji kažemo da *vodi od čvora a do čvora b*. Broj grana u tom nizu nazivamo *dužinom* tog puta.

Primer 1.1.1. Neka je graf $G = (G,\varrho)$ zadat sa:

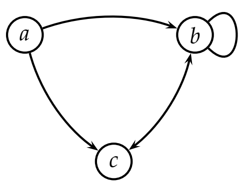
$$G = \{a,b,c\} \quad \text{i} \quad \varrho = \{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,b)\}.$$

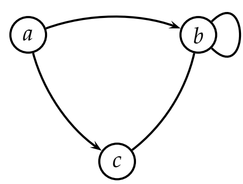
Ovaj graf predstavljamo sledećom slikom:



Primetimo da ovaj graf ima petlju u čvoru b i da ne postoji put koji vodi od čvora b ili c do čvora a.

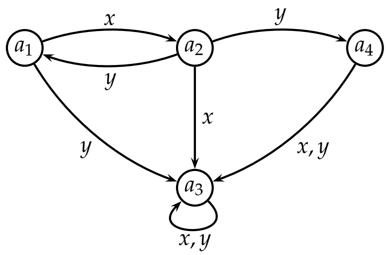
U teoriji grafova se često koristi konvencija prema kojoj se, ukoliko se u grafu javljaju i grana (a,b) i grana (b,a), ne povlače dve suprotno orijentisane linije između čvorova a i b, nego se povlači ili jedna dvostruko orijentisana linija ili jedna neorijentisana linija. Tako se graf iz Primera 1.1.1. može prikazati i na jedan od sledeća dva načina:





Takođe, orijentacija linije koja predstavlja petlju nema nikakvog značaja, pa se često izostavlja, kao što je to učinjeno na prethodnim slikama.

Jedna posebna vrsta grafova igra veoma važnu ulogu u predstavljanju automata, koji su tema narednih glava. To su takozvani *označeni grafovi* koje možemo shvatiti kao grafove kod kojih su grane označene simbolima iz izvesnog skupa X. Preciznije, označeni graf G definiše se kao trojka $G = (G,X,\lambda)$, gde je G skup *čvorova grafa*, X je skup *oznaka* a $\lambda \subseteq G \times X \times G$. Ako je $(a,x,b) \in \lambda$, tada kažemo da je grana (a,b) označena simbolom x, koji nazivamo *oznakom grane* (a,b). Jasno, grana može imati više različitih oznaka, pa prilikom grafičkog predstavljanja grafa orijentisanoj liniji kojom predstavljamo izvesnu granu pridružujemo spisak ili skup simbola kojima je ta grana označena. Drugim rečima, grane grafa su zapravo označene podskupovima skupa X. Jedan označeni graf prikazan je na sledećoj slici:



Drugi važan tip grafova, koji će igrati važnu ulogu kod izučavanja jezika, su stabla. Pod *korenskim stablom*, ili, jednostavnosti radi, samo *stablom*, podrazumevamo graf D bez petlji koji ispunjava sledeće uslove:

(a) postoji tačno jedan čvor u koji ne ulazi ni jedna grana, koji nazivamo *korenom stabla* D;

(b) u ostale čvorove ulazi tačno po jedna grana;

(c) za svaki čvor, osim korena, postoji tačno jedan put koji vodi od korena do njega.

Dužinu puta koji vodi od korena do nekog čvora nazivamo *nivoom* tog čvora. Ako je k nivo datog čvora, onda kažemo da je taj čvor na k-tom nivou. Za koren kažemo da je nivoa 0.

Čvor iz koga ne izlazi nijedna grana zovemo *listom*, ili *završnim čvorom*, a ostale čvorove zovemo *unutrašnjim čvorovima*. Stablo iz čijeg svakog unutrašnjeg čvora izlazi tačno m grana, za neko $m \in \mathbb{N}$, nazivamo *m-arnim stablom*, a stablo iz čijeg svakog unutrašnjeg čvora izlaze tačno dve grane zovemo *binarnim stablom*. Za m-arno stablo kod koga su svi listovi istog nivoa kažemo da je *potpuno stablo*. Kod takvog stabla, na i-tom nivou postoji tačno 2^i čvorova, a ako to stablo ima k nivoa, tada je broj n svih čvorova tog stabla jednak

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Pri tome je broj listova jednak $2^k = \frac{n+1}{2}$, a broj ostalih čvorova je $2^k - 1 = \frac{n-1}{2}$. Ako binarno stablo nije potpuno, onda su broj listova i broj ostalih čvorova manji od tih brojeva.

Ako je a proizvoljan čvor stabla D, tada stablo $D_a = (D_a, \varrho_a)$, gde je D_a skup svih čvorova $b \in D$ za koje postoji neki put iz a u b, a ϱ_a je restrikcija relacije ϱ na D_a, nazivamo *podstablom* stabla D *generisanim čvorom* a. Jasno, koren ovog stabla je a. Ako je $D_a \neq D$, tada kažemo da je D_a *pravo podstablo* od D.

Ako je $D = (D, \varrho)$ stablo, Y je neki neprazan skup i $\varphi : D \to Y$ je preslikavanje, tada kažemo da je D *stablo obeleženo* elementima skupa Y. Pri tome, u grafičkom predstavljanju stabla D, čvor $a \in D$ obeležavamo sa $\varphi(a) \in Y$. Primetimo da se ovaj pojam razlikuje od pojma označenog grafa, kod koga su, kao što smo videli, obeležene grane, a ovde su obeleženi čvorovi.

1.2. Uređenja, kvazi-uređenja i ekvivalencije

Osim funkcija, veoma su važni i neki drugi tipovi relacija kojima se bavimo u ovom odeljku.

Neka je A neprazan skup. Relacija R na skupu A je:

- *refleksivna*, ako je aRa, za svaki $a \in A$, tj. ako je $\Delta_A \subseteq R$;
- *simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz aRb sledi bRa, tj. ako je $R \subseteq R^{-1}$;
- *anti-simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz aRb i bRa sledi da je $a = b$, tj. ako je $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- *tranzitivna*, ako za $a,b,c \in A$, iz aRb i bRc sledi aRc, tj. ako je $R \circ R \subseteq R$.

Refleksivnu i tranzitivnu relaciju zovemo *kvazi-uređenje*, refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju zovemo *parcijalno uređenje*, ili kraće samo *uređenje*, ili pak *relacija poretka*, a refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju zovemo *relacija ekvivalencije*, ili samo *ekvivalencija*.

Najpre ćemo se detaljnije pozabaviti uređenjima.Uređenja najčešće označavamo simbolom $\leqslant$. Par $(A,\leqslant)$ koji se sastoji od skupa A i parcijalnog uređenja $\leqslant$ na njemu nazivamo *parcijalno uređeni skup*, ili kraće samo *uređeni skup*. Jednostavnosti radi, umesto "$(A,\leqslant)$ je uređen skup" govorićemo prosto "A je uređen skup", pri čemu ćemo podrazumevati da je uređenje na njemu označeno sa $\leqslant$. Ukoliko koristimo neku drugu oznaku za uređenje, to će biti posebno naznačeno. Ako je $\leqslant$ uređenje na skupu A, tada sa $<$ označavamo relaciju na A definisanu sa $a < b$ ako i samo ako je $a \leqslant b$ i $a \neq b$, a sa $\geqslant$ i $>$ označavamo inverzne relacije relacija $\leqslant$ i $<$, tim redom.

Uređenje $\leqslant$ na A nazivamo *linearnim* ako za sve $a,b \in A$ važi $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, i u tom slučaju kažemo da je A *linearno uređen skup* ili *lanac*.

Za funkciju $\phi : A \to B$, gde su A i B uređeni skupovi, kažemo da je *izotona* ako za sve $a,b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Takođe kažemo i da ϕ *očuvava uređenje* ili da je *rastuća funkcija*. Slično, za funkciju $\phi : A \to B$ kažemo da je *antitona* ako za sve $a,b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(b) \leqslant \phi(a)$. Za ovakvu funkciju takođe kažemo i da je *opadajuća*. Za ϕ kažemo da je *izomorfizam uređenih skupova A* i B, ili *uređajni izomorfizam* iz A na B, ako je ϕ bijekcija iz A na B i ϕ i ϕ^{-1} su izotone funkcije. Sa druge strane, za ϕ kažemo da je *dualni izomorfizam uređenih skupova A* i B, ili *dualni uređajni izomorfizam* iz A na B, ako je ϕ bijekcija iz A na B i ϕ i ϕ^{-1} su antitone funkcije.

Neka je A uređeni skup. Za element $a \in A$ kažemo da je

- *minimalni element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo manji od njega, tj. ako za svaki $x \in A$, iz $x \leqslant a$ sledi $x = a$;
- *maksimalni element* skupa A, ako u A ne postoji element strogo veći od njega, tj. ako za svaki $x \in A$, iz $a \leqslant x$ sledi $a = x$;
- *najmanji element* skupa A, ako je manji od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in A$;
- *najveći element* skupa A, ako je veći od svakog drugog elementa iz A, tj. ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in A$.

Primetimo da najmanji (najveći) element skupa A, ukoliko takav postoji, je istovremeno i jedinstven minimalni (maksimalni) element skupa A, dok obratno ne mora da važi. Skup A može imati proizvoljno mnogo minimalnih (maksimalnih) elemenata, ali može imati najviše jedan najmanji (najveći) element.

Neka je H neprazan podskup uređenog skupa A. Za element $a \in A$ kažemo da je

– *gornja granica* skupa H, ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in H$;
– *donja granica* skupa H, ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in H$;
– *najmanja gornja granica*, ili *supremum*, skupa H, ako je a najmanji element skupa svih gornjih granica skupa H, tj. ako je a gornja granica skupa H i za svaku gornju granicu b skupa H važi $a \leqslant b$;
– *najveća donja granica*, ili *infimum*, skupa H, ako je a najveći element skupa svih donjih granica skupa H, tj. ako je a donja granica skupa H i za svaku donju granicu b skupa H važi $b \leqslant a$.

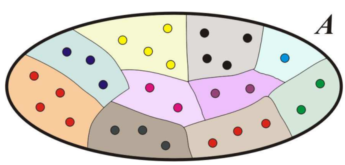
Supremum skupa H, ako postoji, označavamo sa $\bigvee H$, a infimum, takođe ako postoji, sa $\bigwedge H$. Ukoliko je $H = \{x_i \mid i \in I\}$, tada umesto $\bigvee H$ i $\bigwedge H$ pišemo redom

$$\bigvee_{i\in I} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i\in I} x_i,$$

a ako je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, za neki prirodan broj n, tada umesto gornjih oznaka koristimo oznake

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i.$$

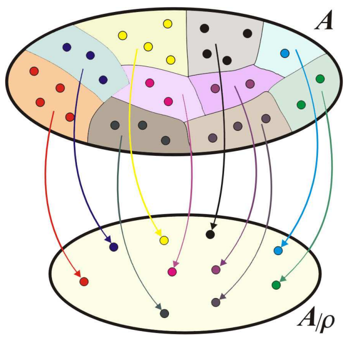
Sada ćemo preći na relacije ekvivalencije. Neka je E relacija ekvivalencije na skupu A. Ako su elementi $a, b \in A$ u relaciji E, tj. $a\,E\,b$, tada kažemo i da su oni *E-ekvivalentni*. Skup E_a nazivamo *klasom ekvivalencije* elementa $a \in A$ u odnosu na E, ili kraće *E-klasom* elementa a. Jasno je da je u tom slučaju $a \in E_a$. Skup svih E-klasa označavamo sa $A /\!\!/ E$ i zovemo ga *količnički skup*, *faktor skup* ili *faktor* skupa A u odnosu na E. [1]



[1] Uobičajena oznaka za količnički skup od A u odnosu na E je A/E, ali kako ovde sličnu oznaku koristimo za reziduale relacija i skupova, da bi izbegli bilo kakvu mogućnost za zabunu, za količnički skup koristimo oznaku $A /\!\!/ E$.

Pri tome, očigledno važi da je $A /\!\!/ E = \bigcup_{a \in A} E_a$, a elementi $a, b \in A$ koji međusobno nisu u relaciji pripadaju disjunktnim klasama E_a i E_b, tj. ako je $E_a \cap E_b \neq \emptyset$ onda važi $E_a = E_b$.

Neformalno, relacija ekvivalencije grupiše, udružuje u jednu klasu sve one elemente koje objedinjuje neko zajedničko svojstvo – ono koje opisuje ta relacija, a faktor skup se, zapravo, dobija sažimanjem svake ϱ-klase u jedan element.(videti sliku)



Funkciju $E^\natural : a \mapsto E_a$ koja slika skup A na količnički skup $A /\!\!/ E$ nazivamo *prirodnim preslikavanjem* skupa A određenim relacijom ekvivalencije E.

Sa druge strane, neka su dati neprazni skupovi A i B i funkcija $\phi : A \to B$. Relaciju

$$\ker \phi = \{(x, y) \in A \times A \,|\, \phi(x) = \phi(y)\}$$

na skupu A nazivamo *jezgrom funkcije* ϕ. Vezu između relacija ekvivalencije i funkcija daje nam naredna teorema. Njen dokaz je elementaran, pa ga zbog toga ostavljamo čitaocu za vežbu.

Teorema 1.2.1. *Neka je A neprazan skup. Ako je ϕ funkcija iz skupa A u skup B, tada je* $\ker \phi$ *relacija ekvivalencije na A.*

Osim toga, za proizvoljnu relaciju ekvivalencije E na A je $\ker(E^\natural) = E$.

Familiju $\{A_i | i \in I\}$ nepraznih podskupova skupa A nazivamo *razbijanjem* ili *particijom* skupa A, ako je

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

i za proizvoljan par $i, j \in I$ važi

$$A_i = A_j \qquad \text{ili} \qquad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Vezu između razbijanja skupa i njegovih relacija ekvivalencije daje nam naredna teorema. Njen dokaz je takođe elementaran, pa će biti prepušten čitaocu za vežbu.

Teorema 1.2.2. *Neka je $\varpi = \{A_i \mid i \in I\}$ razbijanje skupa A. Tada relacija E_ϖ na skupu A definisana sa*

$$a\, E_\varpi\, b \;\Leftrightarrow\; (\exists i \in I)\; a,b \in A_i,$$

za sve $a,b \in A$, je relacija ekvivalencije na skupu A.

Obratno, neka je E relacija ekvivalencije na skupu A. Tada familija

$$\varpi_E = \{E_a \mid a \in A\}$$

jeste razbijanje skupa A.

Osim toga, funkcije $\varpi \mapsto E_\varpi$ i $E \mapsto \varpi_E$ su uzajamno inverzne bijekcije iz skupa svih razbijanja skupa A na skup svih relacija ekvivalencije na skupu A, i obratno.

Neka je K proizvoljan podskup skupa A. Tada definišemo relaciju ε_K na A kao relaciju ekvivalencije na A koja ima samo dve klase: K i $A-K$, tj.

$$\varepsilon_K = K \times K \cup (A-K) \times (A-K).$$

Drugim rečima, za elemente $a,b \in A$ važi

$$(a,b) \in \varepsilon_K \;\Leftrightarrow\; a,b \in K \text{ ili } a,b \in A-K, \tag{1.23}$$

odnosno

$$(a,b) \in \varepsilon_K \;\Leftrightarrow\; \big(a \in K \;\Leftrightarrow\; b \in K\big). \tag{1.24}$$

Za relaciju ekvivalencije E na skupu A kažemo da *zasićuje* podskup $K \subseteq A$ ako se K može predstaviti u obliku unije nekih E-klasa od A. Relacije ekvivalencije koje zasićuju podskupove okarakterisane su sledećom teoremom.

Teorema 1.2.3. *Neka je K neprazan podskup skupa A. Tada relacija ekvivalencije E na A zasićuje K ako i samo ako je $E \subseteq \varepsilon_K$.*

Dokaz: Neka je E relacija ekvivalencije na A koja zasićuje K. Kako E zasićuje K, to se K može zapisati u obliku $K = \bigcup\{C_i \mid i \in I\}$, gde C_i, $i \in I$ jesu E-klase skupa A. Uzmimo proizvoljan par $(a,b) \in E$. Ako je $a \in K$, tada imamo da $a \in C_i$, za neki $i \in I$, pa iz $(a,b) \in E$ sledi da je $b \in C_i \subseteq K$. Na potpuno isti način dokazujemo da iz $b \in K$ sledi $a \in K$. Dakle, prema (1.24) imamo da je $(a,b) \in \varepsilon_K$, tj. $E \subseteq \varepsilon_K$.

Obratno, neka je $E \subseteq \varepsilon_K$. Jasno je da je $K \subseteq \bigcup\{E_a \mid a \in K\}$. Da bi dokazali obratnu inkluziju, treba dokazati da je $E_a \subseteq K$, za svaki $a \in K$. Zaista, neka je $a \in K$ i $b \in E_a$. Tada $(a,b) \in E \subseteq \varepsilon_K$, pa iz $a \in K$ i (1.24) sledi da je $b \in K$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, dokazali smo da je $K = \bigcup\{E_a \mid a \in K\}$, što znači da E zasićuje K. $\square$

Posledica 1.2.4. *Za proizvoljan neprazan podskup K skupa A, relacija ε_K je najveća relacija ekvivalencije na A koja zasićuje K.*

Za neprazan podskup K skupa A, relaciju ε_K nazivaćemo *glavnom ekvivalencijom* na *A određenom podskupom K.*

Pozabavimo se sada ozbiljnije kvazi-uređenjima. Neka je R kvazi-uređenje na skupu A. Za proizvoljan element $a \in A$, skup $R_a = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}$ zovemo *R-afterset* od a, a skup $R^a = \{x \in A \mid (x,a) \in R\}$ zovemo *R-foreset* od a. Jasno, ako je A konačan skup i ako R posmatramo kao Bulovu matricu, onda R-afterset R_a predstavlja vektor vrstu koja odgovara elementu a, a R-foreset R^a vektor kolonu koja odgovara elementu a. Skup svih R-aftersetova označavaćemo sa $A/\!\!/R$, a skup svih R-foresetova sa $A\backslash\!\!\backslash R$. Ako je R relacija ekvivalencije, očigledno je da je $R_a = R^a$, za svaki $a \in A$, i to je upravo klasa ekvivalencije elementa a u odnosu na R, i u tom slučaju je $A/\!\!/R = A\backslash\!\!\backslash R$ odgovarajući količnički skup.

Sledeća teorema, koju je prvi dokazao Birhof (G. Birkhoff) u [6], na jako lep način oslikava vezu između kvazi-uređenja, relacija ekvivalencije i uređenja.

Teorema 1.2.5. *Neka je R kvazi-uređenje na skupu A. Tada važi sledeće:*

(a) *Relacija E na A definisana sa $E = R \cap R^{-1}$ je relacija ekvivalencije na A.*

(b) *Relacija $\widehat{R}$ na količničkom skupu $A/\!\!/E$ definisana sa*

$$(E_a, E_b) \in \widehat{R} \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \in R,$$

za sve $a,b \in A$, je uređenje na $A/\!\!/E$.

Dokaz: Veoma jednostavno se proverava da važi (a).

(b) Najpre dokazujemo da je relacija $\widehat{R}$ dobro definisana, tj. da njena definicija ne zavisi od izbora predstavnika E-klasa. Uzmimo da su $a,a',b,b' \in A$ elementi takvi da je $E_a = E_{a'}$ i $E_b = E_{b'}$, i dokažimo da je $(a,b) \in R$ ako i samo ako je $(a',b') \in R$. Neka je $(a,b) \in R$. Iz $E_b = E_{b'}$ dobijamo da je $(b,b') \in E \subseteq R$, što zajedno sa $(a,b) \in R$, usled tranzitivnosti, daje $(a,b') \in R$. Na isti način, iz $E_a = E_{a'}$ sledi da je $(a',a) \in E \subseteq R$, što sa $(a,b') \in R$ daje $(a',b') \in R$. Prema tome, dokazali smo da $(a,b) \in R$ povlači $(a',b') \in R$, i na potpuno isti način dokazujemo obratnu implikaciju. Time je dokazano da je relacija $\widehat{R}$ dobro definisana.

Jasno je da je $\widehat{R}$ refleksivna i tranzitivna relacija. Da bi dokazali anti-simetričnost, pretpostavimo da je

$$(E_a, E_b) \in \widehat{R} \ \text{ i } \ (E_b, E_a) \in \widehat{R},$$

za neke $a,b \in A$. Tada je $(a,b) \in R$ i $(b,a) \in R$, što znači da je $(a,b) \in R \cap R^{-1} = E$, pa je $E_a = E_b$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, $\widehat{R}$ je uređenje na $A/\!\!/E$. □

Za kvazi-uređenje R na skupu A, relaciju ekvivalencije $E = R \cap R^{-1}$ označavaćemo sa E_R i nazivaćemo je *prirodna ekvivalencija kvazi-uređenja R.*

Sledeća teorema će nam takođe biti veoma važna u razmatranjima u kasnijim glavama.

Teorema 1.2.6. *Neka je R kvazi-uređenje na skupu A i neka je E njegova prirodna ekvivalencija. Tada:*

(a) *Za proizvoljne $a,b \in A$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $(a,b) \in E$;
(ii) $E_a = E_b$;
(iii) $R_a = R_b$;
(iv) $R^a = R^b$.

(b) *Funkcije $R_a \mapsto E_a$ iz $A /\!\!/ R$ u $A /\!\!/ E$ i $R_a \mapsto R^a$ iz $A /\!\!/ R$ u $A \backslash\!\!\backslash R$ su bijekcije.*

Dokaz: (a) Razmotrimo proizvoljne $a,b \in A$.

Ekvivalencija (i)⇔(ii) je očigledna.

(i)⇒(iii). Neka je $(a,b) \in E = R \cap R^{-1}$, tj. $(a,b) \in R$ i $(b,a) \in R$. Tada za proizvoljno $c \in A$ imamo da $c \in R_b$ povlači $(b,c) \in R$, što sa $(a,b) \in R$ daje $(a,c) \in R$, odnosno $c \in R_a$. Na isti način dobijamo da $c \in R_a$ povlači $c \in R_b$, čime smo dokazali da je $R_a = R_b$.

(iii)⇒(i). Neka je $R_a = R_b$. Tada imamo da je $b \in R_b = R_a$ i $a \in R_a = R_b$, što znači da je $(a,b) \in R$ i $(b,a) \in R$, odnosno $(a,b) \in E$.

Ekvivalencija (i)⇔(iv) se dokazuje na potpuno isti način kao (i)⇔(iii).

Tvrđenje (b) sledi neposredno iz (a). □

Prema Teoremi 1.2.6., skupovi $A /\!\!/ R$ svih R-aftersetova, $A \backslash\!\!\backslash R$ svih R-foresetova i $A /\!\!/ E$ svih E-klasa imaju istu kardinalnost, što će biti veoma važna činjenica u našim kasnijim razmatranjima.

Neka je A neprazan skup. Presek proizvoljne familije tranzitivnih relacija na A, ukoliko je neprazan, je i sam tranzitivna relacija na A. Prema tome, za proizvoljnu relaciju R na A, presek svih tranzitivnih relacija na A koje sadrže R je tranzitivna relacija. Tu relaciju ćemo označavati sa R^∞ i nazivaćemo je *tranzitivnim zatvorenjem* relacije R. Slično tome, presek svih tranzitivnih i refleksivnih relacija na A koje sadrže R je tranzitivna i refleksivna relacija, odnosno kvazi-uređenje. Tu relaciju označavamo sa R^q i nazivamo je *tranzitivno-refleksivnim zatvorenjem* relacije R. Lako se proverava da je

$$R^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n, \quad R^q = R^\infty \cup \Delta_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} R^n,$$

gde je $R^0 = \Delta_A$.

Presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije na skupu A je neprazan, jer sadrži identičku relaciju na A. Taj presek je takođe i relacija ekvivalencije na A. Prema tome, za proizvoljnu relaciju R na skupu A, presek svih relacija ekvivalencije koje sadrže relaciju R je relacija ekvivalencije koju ćemo nazivati *relacijom ekvivalencije generisanom relacijom R*, i označavaćemo je sa R^e. Lako se proverava da je

$$R^e = (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^\infty.$$

1.3. Uniformne relacije

Neka su A i B neprazni skupovi. Setimo se da se za relaciju $R \subseteq A \times B$ kaže da je *kompletna* ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $(a,b) \in R$, odnosno da je *surjektivna* ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $(a,b) \in R$. Primetimo da je R kompletna ako i samo ako postoji funkcija $f : A \to B$ takva da je $(a, f(a)) \in R$, za svaki $a \in A$. Funkciju f sa tim svojstvom nazivaćemo *funkcionalnim opisom* relacije R, i sa $FD(R)$ označavaćemo skup svih takvih funkcija. Za relaciju ekvivalencije F na skupu B, funkciju $f : A \to B$ ćemo nazivati *F-surjektivnom* ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da $(f(a), b) \in F$. Drugim rečima, f je F-surjektivna ako i samo ako je $f \circ F^\natural : A \to B/\!\!/F$ surjektivna funkcija.

Za proizvoljnu relaciju $R \subseteq A \times B$ definišemo relacije ekvivalencije E_A^R na A i E_B^R na B na sledeći način: za sve $a_1, a_2 \in A$ i $b_1, b_2 \in B$ stavljamo da je

$$(a_1, a_2) \in E_A^R \iff (\forall b \in B)((a_1, b) \in \varphi \Leftrightarrow (a_2, b) \in R), \tag{1.25}$$

$$(b_1, b_2) \in E_B^R \iff (\forall a \in A)((a, b_1) \in \varphi \Leftrightarrow (a, b_2) \in R). \tag{1.26}$$

Ekvivalenciju E_A^R nazivamo *jezgro*, a ekvivalenciju E_B^R nazivamo *ko-jezgro* relacije R.

Neka su A i B neprazni skupovi. *Parcijalnom uniformnom relacijom* iz A u B nazivamo relaciju $R \subseteq A \times B$ za koju važi $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$. Kako obratna inkluzija uvek važi, to imamo da je R parcijalna uniformna relacija ako i samo ako je $R \circ R^{-1} \circ R = R$. Parcijalnu uniformnu relaciju koja je kompletna i surjektivna nazivamo *uniformnom relacijom*. Primetimo da parcijalna uniformna relacija $R \subseteq A \times B$ jeste uniformna relacija iz A' u B', gde je $A' = \{a \in A \mid (\exists b \in B)\, (a,b) \in R\}$ (domen od R) i $B' = \{b \in B \mid (\exists a \in A)\, (a,b) \in R\}$ (slika od R).

Sledeća teorema daje nam karakterizaciju parcijalnih uniformnih relacija.

Teorema 1.3.1. *Neka su A i B neprazni skupovi i $R \subseteq A \times B$ je relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je parcijalna uniformna relacija;*

(ii) *R^{-1} je parcijalna uniformna relacija;*

(iii) $R \circ R^{-1} \subseteq E_A^R$;

(iv) $R^{-1} \circ R \subseteq E_B^R$.

Dokaz: (i)⇒(iii). Neka je $(a_1, a_2) \in R \circ R^{-1}$. Tada je $(a_1, b_0) \in R$ i $(b_0, a_2) \in R^{-1}$, za neko $b_0 \in B$, i za svaki $b \in B$ imamo da $(a_1, b) \in R$ povlači $(a_2, b) \in R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$, i slično, iz $(a_2, b) \in R$ sledi $(a_1, b) \in R$. Prema tome, $(a_1, a_2) \in E_A^R$.

(iii)⇒(i). Uzmimo da je $(a, b) \in R \circ R^{-1} \circ R$. Tada postoje $a' \in A$ i $b' \in B$ tako da $(a, b') \in R$, $(b', a') \in R^{-1}$ i $(a', b) \in R$, odakle je $(a, a') \in R \circ R^{-1} \subseteq E_A^R$, i iz $(a', b) \in R$ i (1.25) dobijamo da je $(a, b) \in R$. Dakle, $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$.

Slično dokazujemo (i)⇔(iv), dok je ekvivalencija (i)⇔(ii) očigledna. □

Ako je $R \subseteq A \times B$ parcijalna uniformna relacija, tada se lako može proveriti da su $R \circ R^{-1}$ i $R^{-1} \circ R$ simetrične i tranzitivne relacije, ali one nisu neophodno refleksivne. Naime, $R \circ R^{-1}$ je refleksivna ako i samo ako je R kompletna, i $R^{-1} \circ R$ je refleksivna ako i samo ako je φ surjektivna. Dakle, ako je R uniformna relacija, tada su i $R \circ R^{-1}$ i $R^{-1} \circ R$ relacije ekvivalencije. Pored toga, važi i sledeće:

Teorema 1.3.2. *Neka su dati neprazni skupovi A i B i relacija $R \subseteq A \times B$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je uniformna relacija;*

(ii) *R^{-1} je uniformna relacija;*

(iii) *R je surjektivna i $R \circ R^{-1} = E_A^R$;*

(iv) *R je kompletna i $R^{-1} \circ R = E_B^R$;*

(v) *R je kompletna i za sve $f \in FD(R)$, $a \in A$ i $b \in B$, f je E_B^R-surjektivna i*

$$(a,b) \in R \;\Leftrightarrow\; (f(a),b) \in E_B^R; \tag{1.27}$$

(vi) *R je kompletna i za sve $f \in FD(R)$ i $a_1,a_2 \in A$, f j E_B^R-surjektivna i*

$$(a_1,f(a_2)) \in R \;\Leftrightarrow\; (a_1,a_2) \in E_A^R. \tag{1.28}$$

Dokaz: (i)$\Leftrightarrow$(ii). Ova ekvivalencija je očigledna.

(i)$\Rightarrow$(iii). Prema Teoremi 1.3.1., imamo da je $R \circ R^{-1} \subseteq E_A^R$.

Neka je $(a_1,a_2) \in E_A^R$. Kako je R kompletna, to postoji $b \in B$ tako da $(a_1,b) \in R$, pa (1.25) daje $(a_2,b) \in R$, odakle dobijamo da je $(a_1,a_2) \in R \circ R^{-1}$. Prema tome, $E_A^R \subseteq R \circ R^{-1}$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Prema Teoremi 1.3.1., R je parcijalna uniformna relacija. Dalje, iz pretpostavke (iii) neposredno sledi da je R surjektivna, i zbog refleksivnosti relacije $R \circ R^{-1}$ dobijamo da je R kompletna.

(ii)$\Leftrightarrow$(iv). Ova ekvivalencija se može dokazati na isti način kao (i)$\Leftrightarrow$(iii).

(iv)$\Rightarrow$(v). Neka je $f \in FD(R)$, $a \in A$ i $b \in B$. Ako je $(a,b) \in R$, tada odatle i iz $(a,f(a)) \in R$ sledi da je $(f(a),b) \in R^{-1} \circ R = E_B^R$.

Sa druge strane, ako je $(f(a),b) \in E_B^R = R^{-1} \circ R$, odatle i iz $(a,f(a)) \in R$ dobijamo da je $(a,b) \in R \circ R^{-1} \circ R = R$. Prema tome, važi (1.27). Konačno, na osnovu (1.27) i surjektivnosti relacije R sledi da f jeste E_B^R-surjektivna.

(v)$\Rightarrow$(iv). Na osnovu E_B^R-surjektivnosti funkcije f i (1.27) dobijamo da je R surjektivna. Neka $(b_1,b_2) \in E_B^R$. Tada postoji $a \in A$ tako da je $(f(a),b_1) \in E_B^R$, pa je $(f(a),b_2) \in E_B^R$. Sada iz (1.27) sledi da je $(a,b_1) \in R$ i $(a,b_2) \in R$, što povlači da je $(b_1,b_2) \in R^{-1} \circ R$.

Obratno, neka je $(b_1,b_2) \in R^{-1} \circ R$. Tada postoji $a \in A$ tako da je $(a,b_1) \in R$ i $(a,b_2) \in R$, i prema (1.27) dobijamo da $(f(a),b_1) \in E_B^R$ i $(f(a),b_2) \in E_B^{\varphi}$, pa zaključujemo da je $(b_1,b_2) \in E_B^R$.

(iii)$\Leftrightarrow$(vi). Ova ekvivalencija se može dokazati slično kao (iv)$\Leftrightarrow$(v). $\square$

Napomena 1.3.3. Neka su A i B neprazni skupovi i neka je R parcijalna uniformna relacija iz A u B. Tada je R uniformna relacija iz $\operatorname{Dom} R$ u $\operatorname{Im} R$, i iz tog razloga smo uveli naziv parcijalna uniformna relacija.

Lako se proverava da sve relacije ekvivalencije i sve surjektivne funkcije jesu uniformne relacije, a sve funkcije su parcijalne uniformne relacije. To potvrđuje našu raniju napomenu da uniformne relacije predstavljaju zajedničko uopštenje (surjektivnih) funkcija i relacija ekvivalencije.

Teorema 1.3.4. *Neka su A i B neprazni skupovi, neka je E relacija ekvivalencije na A i F je relacija ekvivalencije na B. Tada postoji uniformna relacija $R \subseteq A \times B$ takva da je $E = E_A^R$ i $F = E_B^R$ ako i samo ako postoji bijektivna funkcija $\phi : A /\!\!/ E \to B /\!\!/ F$.*

Ta bijektivna funkcija se može predstaviti sa $\phi = \widetilde{R}$, gde je $\widetilde{R} : A /\!\!/ E \to B /\!\!/ F$ funkcija zadata sa

$$\widetilde{R}(E_a) = F_{f(a)}, \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } f \in FD(R). \tag{1.29}$$

Takođe imamo da je $(\widetilde{R})^{-1} = \widetilde{R^{-1}}$.

Dokaz: Neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija takva da je $E = E_A^R$ i $F = E_B^R$.

Najpre pokazujemo da je formulom (1.29) zadata dobro definisana funkcija $\widetilde{R} : A /\!\!/ E \to B /\!\!/ F$, tj. da vrednosti za $\widetilde{R}$ ne zavise od izbora funkcije $f \in FD(R)$ i elementa $a \in A$ kojim je predstavljena E-klasa. Zaista, prema (1.27) i (1.28), za sve $a_1, a_2 \in A$ i $f_1, f_2 \in FD(R)$ imamo da je

$$\begin{aligned} E_{a_1} = E_{a_2} &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in E \Leftrightarrow (a_1, f_2(a_2)) \in R \Leftrightarrow (f_1(a_1), f_2(a_2)) \in F \\ &\Leftrightarrow F_{f_1(a_1)} = F_{f_2(a_2)}. \end{aligned}$$

Odatle sledi da je $\widetilde{R}$ dobro definisana funkcija, i takođe, da je ta funkcija injektivna. Dalje, prema Teoremi 1.3.2. (v) i (vi), svako $f \in FD(R)$ je F-surjektivna funkcija, pa imamo da je $\widetilde{R}$ surjektivna. Prema tome, $\widetilde{R}$ je bijektivna funkcija.

Obratno, neka je $\phi : A /\!\!/ E \to B /\!\!/ F$ bijektivna funkcija. Definišimo $R \subseteq A \times B$ sa

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow \phi(E_a) = F_b, \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } b \in B. \tag{1.30}$$

Jasno je da je R kompletna i surjektivna. Ako je $(a, b) \in R \circ R^{-1} \circ R$, tada imamo da $(a, b'), (a', b'), (a', b) \in R$, za neke $a' \in A$ i $b' \in B$, pa $\phi(E_e) = F_{b'} = \phi(E_{a'}) = F_b$, odakle je $(a, b) \in R$. Dakle, $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$, i kako je obratna inkluzija evidentna, to zaključujemo da je R uniformna relacija.

Zatim, u skladu sa (1.25), za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
(a_1,a_2) \in E_A^R &\Leftrightarrow (\forall b \in B)\Big((a_1,b) \in R \Leftrightarrow (a_2,b) \in R\Big) \\
&\Leftrightarrow (\forall b \in B)\ \phi(E_{a_1}) = F_b \Leftrightarrow \phi(E_{a_2}) = F_b \\
&\Leftrightarrow \phi(E_{a_1}) = \phi(E_{a_2}) \ \Leftrightarrow \ E_{a_1} = E_{a_2} \\
&\Leftrightarrow (a_1,a_2) \in E,
\end{aligned}
$$

što znači da je $E_A^\varphi = E$. Na sličan način dokazujemo da je $E_B^R = F$.

Na kraju, za sve $a \in A$ i $f \in FD(R)$, iz $(a, f(a)) \in R$ i (1.30) sledi da je

$$
\phi(E_a) = F_{f(a)} = \widetilde{R}(E_a),
$$

pa je $\phi = \widetilde{R}$. Lako se proverava da je $(\widetilde{R})^{-1} = \widetilde{R^{-1}}$. □

Primetimo da bijektivna funkcija $\widetilde{R}$ iz Teoreme 1.3.4. određuje neku vrstu "uniformnosti" između particija koje odgovaraju ekvivalencijama E i F, zbog čega i upotrebljavamo naziv uniformna relacija.

1.4. Polugrupe

Setimo se da se *binarna operacija* na nepraznom skupu S definiše kao proizvoljna funkcija koja Dekartov proizvod $S \times S$ slika u skup S. Binarne operacije najčešće označavamo tačkom "$\cdot$", a ponekad koristimo i simbole "$*$", "$\circ$" i druge. Uređenom paru (a,b) elemenata iz S binarna operacija "$\cdot$" pridružuje element iz S koji obično označavamo sa "$a \cdot b$", mada najčešće to još više pojednostavljujemo pišući samo "ab" umesto "$a \cdot b$".

Uređeni par $(S,\cdot)$, gde je S neprazan skup i "$\cdot$" je binarna operacija na S, nazivamo *grupoidom*. Jednostavnosti radi, umesto para $(S,\cdot)$ mi obično pišemo samo S i kažemo da je S grupoid.

Neka je dat grupoid S i elementi $a,b,c \in S$. Ako pomnožimo elemente a i b, tim redom, dobijamo element ab iz S. Ako dalje pomnožimo elemente ab i c, tada ćemo njihov proizvod označiti sa $(ab)c$, pri čemu zagrade označavaju da smo najpre pomnožili a i b, a zatim njihov proizvod i c, tim redom. Sa druge strane, ako pomnožimo prvo b i c, a zatim a pomnožimo njihovim proizvodom, tim redom, dobijamo proizvod koji označavamo sa $a(bc)$. U opštem slučaju, kod grupoida se proizvodi $(ab)c$ i $a(bc)$ razlikuju. Međutim, može se desiti da operacija grupoida zadovoljava taj uslov, tj. da je $(ab)c = a(bc)$, za svaki izbor elemenata $a,b,c \in S$, i u tom slučaju kažemo da je takva operacija *asocijativna*, odnosno da zadovoljava *asocijativni zakon*. Grupoid čija je operacija asocijativna nazivamo *polugrupom*.

Ustanoviti da li je operacija grupoida asocijativna često nije jednostavno. U knjizi Kliforda (A. H. Clifford) i Prestona (G. B. Preston) [20] naveden je Lajtov test asocijativnosti konačnih grupoida. On se sastoji u sledećem: Neka je $(S,\cdot)$ grupoid. Definišimo na S dve nove operacije $*$ i $\circ$ sa:

$$x * y = x \cdot (a \cdot y), \quad x \circ y = (x \cdot a) \cdot y,$$

za sve $x, y \in S$, gde je $a \in S$ fiksirani element. Jasno je da na S važi asocijativni zakon ako i samo ako su operacije $*$ i $\circ$ jednake za svaki $a \in S$.

Oslikajmo ovaj postupak na jednom primeru.

Primer 1.4.1. Neka je $(S, \cdot)$ grupoid dat tablicom:

$\cdot$	α	β
α	α	α
β	β	α

Tada za $a = \alpha$ proizvod $a \cdot y$ je u prvoj vrsti $(\alpha\alpha)$, i za $a = \beta$ proizvod $a \cdot y$ je u drugoj vrsti $(\beta\alpha)$.

Proširimo sada datu tablicu na desno najpre pomoću prve, a potom pomoću druge vrste, i izvršimo sva množenja pomoću elemenata iz S. Na taj način dobijamo operaciju $*$ za oba elementa grupoida S. Slično, proširimo tablicu na dole pomoću kolona iz S. Tako dobijamo operaciju $\circ$ za sve elemente iz S.

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|}
 & \alpha & \beta & \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\
\hline
\alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\
\beta & \beta & \alpha & \beta & \boxed{\beta} & \alpha & \beta \\
\hline
\alpha & \alpha & \alpha \\
\beta & \beta & \boxed{\alpha} \\
\hline
\alpha & \alpha & \alpha \\
\alpha & \alpha & \alpha \\
\hline
\end{array}$$

Sada nije teško videti da se za $a = \alpha$ tablice za $*$ i $\circ$ ne poklapaju, jer je

$$\beta * \beta = \beta \cdot (\alpha \cdot \beta) = \beta \cdot \alpha = \beta, \quad \beta \circ \beta = (\beta \cdot \alpha) \cdot \beta = \beta \cdot \beta = \alpha,$$

što se vidi u proširenoj tablici. Dakle, gornjom tablicom nije definisana polugrupa.

Asocijativni zakon može se uopštiti na sledeći način. Za grupoid G kažemo da zadovoljava *uopšteni asocijativni zakon* ako za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ i proizvoljnu n-torku $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemenata iz S, svi proizvodi tih elemenata u kojima se oni javljaju tim redom (gledano sleva na desno) su jednaki. Drugim rečima, to znači da proizvod tih elemenata ne zavisi od rasporeda zagrada, odnosno od redosleda kojim se taj proizvod izračunava, već samo od redosleda javljanja činilaca u proizvodu.

Jasno, kad god važi uopšteni asocijativni zakon, tada važi i asocijativni zakon. Sledeća teorema nam kaže da važi i obratno: Da bi na grupoidu važio uopšteni asocijativni zakon, dovoljno je da važi asocijativni zakon:

Teorema 1.4.2. *Svaka polugrupa zadovoljava uopšteni asocijativni zakon.*

Dokaz: Najpre ćemo za proizvoljan prirodan broj $k \geqslant 3$ i proizvoljne $a_1, a_2, \dots, a_k \in S$ uvesti sledeću oznaku:

$$a_1 a_2 \cdots a_k = a_1(a_2(a_3 \cdots (a_{k-1} a_k) \dots)).$$

Teoremu ćemo dokazati indukcijom. Jasno, uslovi uopštenog asocijativnog zakona važe za $n = 3$. Uzmimo da je $n > 3$ i da uslovi uopštenog asocijativnog zakona važe za svaki prirodan broj $r < n$.

Uzmimo da je u element iz S jednak proizvodu elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$, sa nekim razmeštajem zagrada, u kome se ovi elementi javljaju datim redom. Tada se u može zapisati u obliku $u = vw$, gde je v proizvod elemenata $a_1, a_2, \dots, a_r$ i w je proizvod elemenata $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$, (sa nekim razmeštajima zagrada), gde je $1 \leqslant r < n$. Indukcijom dobijamo da je $v = a_1 a_2 \cdots a_r$ i $w = a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n$, i

$$\begin{aligned} u = vw &= (a_1 a_2 \cdots a_r)(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) = (a_1(a_2 \cdots a_r))(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1((a_2 \cdots a_r)(a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n)) = a_1(a_2 \cdots a_r a_{r+1} a_{r+2} \cdots a_n) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

za $r > 1$, i $u = vw = a_1(a_2 \cdots a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$, za $r = 1$. Ovim je dokazano tvrđenje teoreme. □

Teorema 1.4.2. nam dozvoljava da u polugrupi S izostavimo sve zagrade u proizvodima elemenata iz S. Na taj način, proizvod elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$ iz S, u kome se oni javljaju tim redom, označavamo prosto sa $a_1 a_2 \cdots a_n$, kao u dokazu Teoreme 1.4.2. Ako je $a_i = a$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tada proizvod $a_1 a_2 \cdots a_n$ označavamo sa a^n, i nazivamo ga *n-ti stepen* elementa $a \in S$. Primetimo da se kod grupoida ne može dati ovakva definicija stepena.

Primer 1.4.3. Jedan od najprirodnijih primera asocijativnih operacija je operacija *dopisivanja*, ili, kako se u matematici često zove, *konkatenacija*. To je operacija kojom od zadatih grafičkih simbola, koje obično nazivamo slovima, gradimo reči, kao proizvode slova u odnosu na tu operaciju. Ova operacija je asocijativna, što znači da prilikom ispisivanja reči nije važan vremenski red kojim smo ispisivali slova koja grade neku reč, već je bitan samo grafički raspored, posmatran sleva na desno, kojim se slova javljaju u reči. Na primer, za reč "BROJ", svejedno je da li smo je napisali tako što smo, jedno za drugim, sleva na desno, pisali slova "B", "R", "O" i "J", ili smo, možda, zapisali prvo slovo "O", zatim sa njegove leve strane "B", zatim desno od slova "O" zapisali "J", i na kraju, između slova "B" i "O" ubacili slovo "R".

Više o operaciji dopisivanja biće rečeno kasnije.

Ako je S proizvoljna polugrupa, tada na skupu S možemo definisati još jednu operaciju $*$ sa: $a * b = ba$. Skup S sa tako definisanom operacijom je takođe polugrupa, koju nazivamo *dualna polugrupa* polugrupe S, u oznaci $\overleftarrow{S}$. Generalno, polugrupa ne mora biti komutativna, tj. vrednost proizvoda zavisi od redosleda elemenata koji se u njemu javljaju, i kao posledica toga u izrazima koji se odnose na polugrupe, njihove podskupove ili elemente se često javljaju odrednice "levi" i "desni". *Dual* izraza koji se odnosi na polugrupu, njene podskupove ili njene elemente je izraz koji dobijamo zamenom svake od odrednica "levi" sa "desni" i obratno, i zamenom svakog proizvoda ab sa ba. Ako neko tvrđenje A povlači tvrdjenje B, tada dual od A povlači dual od B. Zbog toga, ako je B neko tvrdjenje koje smo dokazali i ako je C njegov dual, tada C često koristimo ravnopravno sa B, iako ga ne dokazujemo.

Primer 1.4.4. Drugi važan primer asocijativnih operacija su *proizvod relacija*, i specijalan slučaj te operacije - *slaganje* (*kompozicija*) *funkcija*. Tako imamo da skup $\mathcal{B}(A)$ svih binarnih relacija na skupu A čini polugrupu, koju nazivamo *polugrupa binarnih relacija* na A.

Sa druge strane, skup $\mathcal{PT}(A)$ svih parcijalnih funkcija skupa A u sebe je takođe polugrupa, u odnosu na kompoziciju, i nazivamo je *polugrupa parcijalnih transformacija* na A. Osim toga, i skup $\mathcal{T}(A)$ svih funkcija iz skupa A u sebe čini polugrupu koju nazivamo *puna polugrupa transformacija* ili samo *polugrupa transformacija* skupa A.

Primetimo da je $\mathcal{T}(A)$ podpolugrupa od $\mathcal{PT}(A)$, a $\mathcal{PT}(A)$ je podpolugrupa od $\mathcal{B}(A)$ (pojam podpolugrupe je definisan na početku narednog odeljka).

Primer 1.4.5. Kao što je poznato, operacija sabiranja matrica definisana na skupu istotipnih matrica (nad nekim datim prstenom) je asocijativna, pa ovaj skup jeste polugrupa. To isto važi i za operaciju množenja matrica definisanu na skupu istotipnih kvadratnih matrica, pa i kvadratne matrice u odnosu na operaciju množenja matrica čine polugrupu. Međutim, to ne važi za skup nekvadratnih matrica, jer na tom skupu množenje matrica nije definisano za svaki par matrica.

Neka je S polugrupa. Za elemente $a,b \in S$ kažemo da *komutiraju* ako je $ab = ba$. Ako je A neprazan podskup polugrupe S, tada sa $C(A)$ označavamo skup svih elemenata iz S koji komutiraju sa svakim elementom iz A. Skup $C(S)$ nazivamo *centar* polugrupe S a njegove elemente *centralnim elementima*. Polugrupa S je *komutativna* ako svaka dva njena elementa komutiraju, tj. $S = C(S)$. Polugrupa S je *anti-komutativna* ako za $a,b \in S$, iz $ab = ba$ sledi $a = b$, tj. ako svaki element iz S komutira samo sa sobom.

Element a polugrupe S je *idempotent* (*idempotentan*) ako je $a^2 = a$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$. Polugrupa čiji su svi elementi idempotenti je *traka*. Komutativnu traku nazivamo *polumreža*. Polumreža S je *lanac* ako za sve $a,b \in S$ je ili $ab = a$ ili $ab = b$.

Primer 1.4.6. Operacije množenja i sabiranja prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva su komutativne pa svi ovi skupovi brojeva u odnosu na operacije sabiranja i množenja čine komutativne polugrupe. Jedan od primera nekomutativnih polugrupa je polugrupa svih kvadratnih matrica proizvoljnog tipa u odnosu na operaciju množenja matrica. Na primer, za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nad prstenom celih brojeva važi

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je, dakle, $AB \neq BA$.

Element e polugrupe S je *jedinica* te polugrupe ako je $ae = ea = a$, za svaki $a \in S$. Neposredno se proverava da polugrupa može imati najviše jednu jedinicu. Polugrupu koja ima jedinicu zovemo *polugrupa sa jedinicom* ili *monoid*.

Neka je S polugrupa i e je element koji nije sadržan u S. Na skupu $S \cup \{e\}$ definišemo množenje sa: $ae = ea = a$, za svaki $a \in S$, i $ee = e$, dok proizvodi elemenata iz S ostaju isti. Tada skup $S \cup \{e\}$ sa tako definisanim množenjem je polugrupa sa jedinicom e, i zovemo je *jedinično proširenje* polugrupe S pomoću elementa e.

Ako je S polugrupa, tada sa S^1 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način:
– ako S ima jedinicu, tada je $S^1 = S$;
– ako S nema jedinicu, tada je S^1 jedinično proširenje od S pomoću elementa 1.

Jedinicu polugrupe najčešće označavamo simbolom e ili 1. Koristeći jedinično proširenje polugrupe, proširujemo i definiciju stepena u polugrupi: ako je S polugrupa i $a \in S$, tada je a^0 jedinica monoida S^1.

Element z polugrupe S je *nula* te polugrupe ako je $az = za = z$, za svaki $a \in S$. I u ovom slučaju se lako proverava da polugrupa može imati najviše jednu nulu. Polugrupu koja ima nulu nazivamo *polugrupa sa nulom*.

Ako je S polugrupa i z je element koji nije sadržan u S, na skupu $S \cup \{z\}$ definišemo množenje sa: $az = za = z$, za svaki $a \in S$, i $zz = z$, dok proizvodi elemenata iz S ostaju isti. U tom slučaju skup $S \cup \{z\}$ je polugrupa sa nulom z, koju nazivamo *nulto proširenje* od *S pomoću elementa z*.

Ako je S polugrupa, tada sa S^0 označavamo polugrupu dobijenu iz S na sledeći način:
– ako S ima nulu, tada je $S^0 = S$;
– ako S nema nulu, tada je S^0 nulto proširenje od S pomoću elementa 0.

Nulu polugrupe obično označavamo simbolom 0. Ako je S polugrupa sa nulom 0, za element $a \in S$, $a \neq 0$, kažemo da je *delitelj nule* ako postoji $b \in S$, $b \neq 0$, tako da je $ab = 0$ ili $ba = 0$. Polugrupu sa nulom koja nema delitelja nule (tj. onu kod koje skup svih nenula elemenata čini podpolugrupu) nazivamo *polugrupa bez delitelja nule*.

Primer 1.4.7. Setimo se da za neprazan skup H sa $\mathcal{P}(H)$ označavamo *partitivni skup* skupa H, odnosno skup svih podskupova skupa H.

Neka je S polugrupa. Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(S)$ polugrupe S definišemo množenje sa:

$$AB = \{x \in S \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\ x = ab\}, \qquad (A, B \in \mathcal{P}(S)).$$

Tada u odnosu na ovu operaciju $\mathcal{P}(S)$ jeste polugrupa koju zovemo *partitivna polugrupa* polugrupe S. Jasno, $\mathcal{P}(S)$ je polugrupa sa nulom $\emptyset$ (prazan skup) i bez delitelja nule. Definicije i oznake koje smo uveli za množenje elemenata polugrupe S, koristićemo i za množenje elemenata polugrupe $\mathcal{P}(S)$. Za element a polugrupe S, u proizvodima podskupova od S, često izraz "$\{a\}$" zamenjujemo izrazom "a".

Primer 1.4.8. Polugrupa $(\mathbb{N}, +)$ nema jedinicu, a njeno jedinično proširenje je upravo polugrupa $(\mathbb{N}^0, +)$, jer je 0 jedinica te polugrupe.

Sa druge strane, polugrupa $(\mathbb{N}, \cdot)$ ima jedinicu 1, ali nema nulu, i njeno nulto proširenje je upravo polugrupa $(\mathbb{N}^0, \cdot)$, jer je 0 nula te polugrupe. Polugrupa $(\mathbb{N}^0, \cdot)$ nema delitelje nule.

Inače, polugrupe $(\mathbb{N}, +)$ i $(\mathbb{N}^0, +)$ nazivamo *aditivnim polugrupama prirodnih brojeva*, a polugrupe $(\mathbb{N}, \cdot)$ i $(\mathbb{N}^0, \cdot)$ *multiplikativnim polugrupama prirodnih brojeva*. Odgovarajuće slične nazive koristimo i za cele i druge vrste brojeva, a takođe i za matrice.

Primer 1.4.9. Primer polugrupe sa deliteljima nule je multiplikativna polugrupa svih kvadratnih matrica proizvoljnog tipa. Na primer, za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je $A \neq 0$, $B \neq 0$ i $AB = 0$, gde smo sa 0 označili nula matricu, tj. matricu čiji su svi elementi nule.

Za polugrupu S kažemo da je *levo* (*desno*) *kancelativna* ako za proizvoljne $a, x, y \in S$, iz $ax = ay$ ($xa = ya$) sledi $x = y$. Ako je S i levo i desno kancelativna polugrupa, tada kažemo da je *kancelativna*.

Parcijalna (*binarna*) *operacija* nepraznog skupa S je preslikavanje nepraznog podskupa skupa $S \times S$ u S. Neprazan skup snabdeven parcijalnom operacijom nazivamo *parcijalni grupoid*. Ako je S parcijalni grupoid sa parcijalnom operacijom "$\cdot$" takav da je za proizvoljne $x, y, z \in S$, proizvod $x \cdot (y \cdot z)$ definisan ako i samo ako je definisan proizvod $(x \cdot y) \cdot z$, i pri tome su ti proizvodi jednaki, tada je *S parcijalna polugrupa*. Jasno je da svaki podskup polugrupe jeste parcijalna polugrupa. Sa druge strane, ako je Q parcijalna polugrupa, i ako je 0 element koji nije sadržan u Q, tada $Q \cup \{0\}$ sa operacijom "$\cdot$" definisanom sa:

$$x \cdot y = \begin{cases} xy, & \text{ako su } x, y, xy \in Q \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gde je xy proizvod u Q, jeste polugrupa koju označavamo sa Q^0, i nazivamo *nulto proširenje parcijalne polugrupe Q*.

Primer 1.4.10. Primer parcijalne polugrupe je skup svih matrica (nad nekim datim prstenom). Naime, za matrice A, B i C, proizvodi $(AB)C$ i $A(BC)$ ne moraju biti definisani, međutim, kad god je jedan od njih definisan, tada je definisan i onaj drugi i pri tome su oni jednaki. Na primer, uzmimo da je definisan proizvod $(AB)C$. Ako je matrica A tipa $k\times l$, za neke $k,l\in\mathbb{N}$, tada B mora biti tipa $l\times m$, za neki $m\in\mathbb{N}$, i matrica AB je tipa $k\times m$. Da bi postojao proizvod $(AB)C$, onda C mora biti tipa $m\times n$, za neki $n\in\mathbb{N}$. Prema tome, A, B i C su redom tipova $k\times l$, $l\times m$ i $m\times n$, pa je jasno da je definisan i proizvod $A(BC)$ i da je $(AB)C=A(BC)$.

1.5. Podpolugrupe, homomorfizmi i kongruencije

Neprazan podskup T polugrupe S je *podpolugrupa* od S ako je T *zatvoren za operaciju* polugrupe S, tj. ako je $ab\in T$, za sve $a,b\in T$. Drugim rečima, T je podpolugrupa od S ako i samo ako je $T^2\subseteq T$. Ako je T podpolugrupa polugrupe S, tada kažemo i da je S *nadpolugrupa* od T.

Za neprazan podskup H polugrupe S, sa $\langle H\rangle$ označavamo presek svih podpolugrupa od S koje sadrže H. Neposredno se proverava da je $\langle H\rangle$ najmanja podpolugrupa od S koja sadrži H (u odnosu na inkluziju), i zovemo je *podpolugrupa od S generisana skupom H*. Ako je $H=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, tada umesto $\langle\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\rangle$ pišemo $\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ i kažemo da je $\langle H\rangle$ *generisana elementima* $a_1,a_2,\dots,a_n$. Podpolugrupu $\langle a\rangle$ polugrupe S generisanu jednoelementnim podskupom $\{a\}$ od S nazivamo *monogena* ili *ciklična* podpolugrupa od S.

Ako je H podskup polugrupe S takav da je $\langle H\rangle=S$, tada kažemo da skup *H generiše polugrupu S* i da je *H generatorni skup* polugrupe S. Elemente iz H nazivamo *generatorni elementi* ili *generatori* od S. Na primer, multiplikativna polugrupa $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva generisana je skupom prostih brojeva. Polugrupu generisanu svojim jednoelementnim podskupom nazivamo *monogena* ili *ciklična* polugrupa.

Dokaz sledećeg tvrdjenja je elementaran, pa ga izostavljamo:

Teorema 1.5.1. *Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Tada je*

$$\langle H\rangle=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H^n.$$

Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Element $a\in S$ *ima razlaganje u proizvod elemenata iz H* ako postoje $a_1,a_2,\dots,a_n\in H$ tako da je $a=a_1a_2\cdots a_n$. Prema Teoremi 1.5.1., H je generatorni skup polugrupe S ako i samo ako svaki element iz S ima razlaganje u proizvod elemenata iz H. Za element $a\in S$ kažemo da ima *jedinstveno razlaganje u proizvod elemenata iz H* ako iz $a=a_1a_2\cdots a_n$ i $a=b_1b_2\cdots b_m$, $a_i,b_j\in H$, sledi da je $n=m$ i $a_i=b_i$, za svaki $i\in[1,n]$.

U daljem tekstu ćemo se više pozabaviti monoidima, koji, kao što ćemo videti, igraju veoma značajnu ulogu u ovoj knjizi.

Ako je S monoid sa jedinicom e, tada pod *podmonoidom* od S podrazumevamo svaku podpolugrupu T od S koja sadrži jedinicu e. Primetimo da je moguće da neka podpolugrupa T od S sama bude monoid, a da ne bude podmonoid od S, jer se može desiti da jedinica f monoida T bude različita od jedinice e monoida S. To je posledica činjenice da za proizvoljnu polugrupu S i proizvoljan idempotent $f \in E(S)$, skup

$$M_f = \{a \in S \,|\, af = fa = a\}$$

je podpolugrupa od S i monoid sa jedinicom f. Osim toga, M_f je maksimalna podpolugrupa od S koja je monoid sa jedinicom f, što znači da je svaka druga podpolugrupa od S sa takvom osobinom sadržana u M_f.

Ako je H neprazan podskup monoida S, tada slično kao kod polugrupa definišemo *podmonoid* od S *generisan skupom* H kao najmanji podmonoid od S koji sadrži H, odnosno, kao presek svih podmonoida od S koji sadrže H. Takav podmonoid ćemo označavati sa $\langle H\rangle^*$, da bi se razlikovao od podpolugrupe od S generisane sa H. Ipak, u slučajevima kada ne postoji opasnost od mešanja ta dva pojma, koristićemo i jednostavniju oznaku $\langle H\rangle$.

Slično Teoremi 1.5.1., može se dokazati da važi sledeće:

Teorema 1.5.2. *Neka je H neprazan podskup monoida S sa jedinicom e. Tada je*

$$\langle H\rangle^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} H^n,$$

pri čemu je $H^0 = \{e\}$.

Korišćenjem prethodnih teorema može se dati i algoritam za konstrukciju podpolugrupe, odnosno podmonoida, generisanog datim skupom. Daćemo teoremu koja se tiče monoida, zbog kasnijih primena te teoreme. Slična teorema se na potpuno isti način dokazuje i za polugrupe.

Teorema 1.5.3. *Neka je S monoid sa jedinicom e, neka je $H \subseteq S$ neprazan podskup i M je podmonoid od S generisan sa H. Definišimo niz $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od S sa*

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{n} H^k,$$

za $n \in \mathbb{N}^0$. Tada

(a) *Niz $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ je rastući i*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} K_n.$$

(b) *Ako postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $K_n = K_{n+1}$, tada je $K_n = M$.*

(c) *Ako je monoid S konačan, tada postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $K_n = M$.*

Dokaz: Potsetimo se najpre da prema Teoremi 1.5.2. važi

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} H^k.$$

(a) Niz $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ je rastući, jer je $K_{n+1} = K_n \cup H^{n+1}$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}^0$. Takođe, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$ je

$$K_n = \bigcup_{k=0}^{n} X^k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} H^k = M,$$

odakle je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} K_n \subseteq M.$$

Sa druge strane, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$ je $H^n \subseteq K_n$, pa je

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} H^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} K_n.$$

Prema tome, važi (a).

(b) Uzmimo da je $K_n = K_{n+1}$, za neki $n \in \mathbb{N}^0$. Kako je $K_{n+1} = K_n \cup H^{n+1}$, to znači da je $H^{n+1} \subseteq K_n$. Ako je $H^{n+i} \subseteq K_n$, za neki $i \in \mathbb{N}$, tada je

$$\begin{aligned} H^{n+i+1} &= H^{n+i} \cdot H \subseteq K_n \cdot H = \left(\bigcup_{j=0}^{n} H^j\right) \cdot H \\ &= \bigcup_{j=0}^{n} H^{j+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} H^j \subseteq K_{n+1} = K_n. \end{aligned}$$

Prema tome, indukcijom dobijamo da je $H^{n+i} \subseteq K_n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, odakle je $K_{n+i} = K_n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, što zajedno sa (a) daje $M = K_n$.

(c) Ako je monoid S konačan, tada je $\{|K_n|\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ rastući niz prirodnih brojeva ograničen odozgo sa $|S|$, odakle sledi da postoji $n \in \mathbb{N}^0$ tako da je $|K_n| = |K_{n+1}|$, što dalje znači da je $K_n = K_{n+1}$, jer je niz $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ rastući. $\square$

Neka su S i T polugrupe. Funkcija $\phi : S \to T$ naziva se *homomorfizam* ako je $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, za sve $a, b \in S$. Injektivni homomorfizam nazivamo *monomorfizam*, a surjektivni homomorfizam zovemo *epimorfizam*. Ako je ϕ bijektivni homomorfizam, onda za ϕ kažemo da je *izomorfizam* a za S i T kažemo da su *izomorfne polugrupe* i pišemo $S \cong T$. Lako se dokazuje da je inverzna funkcija izomorfizma takođe izomorfizam. Neformalno, dve polugrupe su izomorfne ako i samo ako se jedna od njih može dobiti iz druge drugačijim označavanjem elemenata. Zbog toga obično poistovećujemo izomorfne polugrupe.

Homomorfizam polugrupe S u sebe nazivamo *endomorfizam* , a izomorfizam iz S u sebe nazivamo *automorfizam*. Ako je ϕ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T, tada je $\phi(S)$ podpolugrupa od T. Polugrupa T je *homomorfna slika* polugrupe S ako postoji epimorfizam iz S na T.

Sa druge strane, za funkciju $\phi : S \to T$ kažemo da je *anti-homomorfizam* ako je $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$, za sve $a, b \in S$. Bijektivni anti-homomorfizam nazivamo *anti-izomorfizam*. Polugrupe S i T su *anti-izomorfne* ako postoji anti-izomorfizam iz S na T. Jasno je da su polugrupe S i T anti-izomorfne ako i samo ako je S izomorfna dualnoj polugrupi od T.

Za relaciju R na polugrupi S kažemo da je *levo* (*desno*) *saglasna* ako za sve $a, b, x \in S$, iz $a\,R\,b$ sledi $xa\,R\,xb$ ($ax\,R\,bx$), i da je *stabilna* ako za sve $a, b, c, d \in S$, iz $a\,R\,c$ i $b\,R\,d$ sledi $ab\,R\,cd$. Levo (desno) saglasnu relaciju ekvivalencije na polugrupi S nazivamo *levom* (*desnom*) *kongruencijom* na S, a *kongruencijom* na S nazivamo relaciju koja je istovremeno i leva i desna kongruencija na S. Jedan ekvivalent definicije kongruencije dat je sledećom lemom koja se veoma lako dokazuje, pa će stoga njen dokaz biti izostavljen.

Lema 1.5.4. *Relacija ekvivalencije R na polugrupi S je kongruencija ako i samo ako je stabilna.*

Neka je E kongruencija na polugrupi S. Tada količnički skup $A/\!\!/E$ sa množenjem definisanim sa $E_a \cdot E_b = E_{ab}$, za sve $a, b \in S$, je takođe polugrupa koju zovemo *količnička polugrupa* ili *faktor polugrupa* od S u odnosu na kongruenciju E. Neposredno se dokazuje sledeća teorema koja oslikava vezu između kongruencija i homomorfizama.

Teorema 1.5.5. (Teorema o homomorfizmu) *Ako je E kongruencija na polugrupi S, tada je $E^\natural$ homomorfizam iz S na količničku polugrupu $A/\!\!/E$.*

Obratno, ako je ϕ homomorfizam iz polugrupe S na polugrupu T, tada $F = \ker\phi$ jeste kongruencija na S i funkcija $\Phi : S/\!\!/F \to T$ definisana sa $\Phi(F_a) = \phi(a)$ za svaki $a \in S$, je izomorfizam iz $S/\!\!/F$ na T.

Drugi deo Teoreme o homomorfizmu može biti formulisan i na sledeći način: *za proizvoljan homomorfizam $\phi : S \to T$ postoji izomorfizam Φ iz $S/\!\!/\ker\phi$ na T tako da sledeći dijagram komutira:*

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(\ker\phi)^\natural"'] & T \\
S/\!\!/\ker\phi \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Za kongruenciju E, homomorfizam $E^\natural$ zovemo *prirodni homomorfizam* kongruencije E, a za homomorfizam ϕ, kongruenciju $\ker\phi$ zovemo *jezgro homomorfizma* ϕ. U svetlu Teoreme o homomorfizmu, nećemo praviti razliku između pojmova “količnička algebra” i “homomorfna slika algebre”.

Neka je E relacija ekvivalencije na polugrupi S. Tada definišemo:

$$E_l^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x \in S^1)\ (xa,xb) \in E\},$$
$$E_r^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall y \in S^1)\ (ay,by) \in E\},$$
$$E^\flat = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x,y \in S^1)\ (xay,xby) \in E\}.$$

Važna svojstva ovih relacija data su sledećom teoremom.

Teorema 1.5.6. *Neka je E relacija ekvivalencije na polugrupi S. Tada*

(a) $E_l^\flat$ *je najveća leva kongruencija na S sadržana u E;*

(b) $E_r^\flat$ *je najveća desna kongruencija na S sadržana u E;*

(c) $E^\flat$ *je najveća kongruencija na S sadržana u E.*

Dokaz: Dokazaćemo samo tvrđenje pod (c), jer se ostala tvrđenja dokazuju slično.

(c) Lako se proverava da je $E^\flat$ relacija ekvivalencije na S. Uzmimo $(a,b) \in E^\flat$ i $c \in S$. Tada je $(xcay,xcby) \in E$, za sve $x,y \in S^1$, odakle sledi da je $(ca,cb) \in E^\flat$. Prema tome, $E^\flat$ je levo saglasna. Slično dokazujemo desnu saglasnost. Ovim smo dokazali da je $E^\flat$ kongruencija na S. Jasno je da je $E^\flat$ sadržana u E.

Neka je R proizvoljna kongruencija na S sadržana u E. Razmotrimo proizvoljan par $(a,b) \in R$. Kako je R kongruencija, to je $(xay,xby) \in R$, za sve $x,y \in S^1$, odakle je $(xay,xby) \in E$, za sve $x,y \in S^1$, pa je $(a,b) \in E^\flat$, prema definiciji relacije $E^\flat$. Prema tome, $R \subseteq E^\flat$, što znači da je $E^\flat$ zaista najveća kongruencija na S sadržana u E. □

Relacije $E_l^\flat$, $E_r^\flat$ i $E^\flat$ zovemo redom *levo kongruencijsko*, *desno kongruencijsko* i *kongruencijsko otvorenje* relacije ekvivalencije E.

Proizvoljnom podskupu H polugrupe S pridružujemo relacije P_H, R_H i L_H na S definisane na sledeći način:

$$P_H = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x,y \in S^1)\ xay \in H \ \Leftrightarrow\ xby \in H\},$$
$$R_H = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x \in S^1)\ ax \in H \ \Leftrightarrow\ bx \in H\},$$
$$L_H = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x \in S^1)\ xa \in H \ \Leftrightarrow\ xb \in H\}.$$

Ove relacije imaju važna svojstva koja prikazuje sledeća teorema:

Teorema 1.5.7. *Neka je H neprazan podskup polugrupe S. Tada važi*

(a) L_H *je najveća leva kongruencija na S koja zasićuje H;*

(b) R_H *je najveća desna kongruencija na S koja zasićuje H;*

(c) P_H *je najveća kongruencija na S koja zasićuje H.*

Dokaz: Ovo sledi iz Teoreme 1.5.6., jer su L_H, R_H i P_H levo, desno i kongruencijsko otvorenje relacije ekvivalencije ε_H, tim redom. □

Relacije P_H, R_H i L_H nazivamo *glavnom kongruencijom*, *glavnom desnom kongruencijom* i *glavnom levom kongruencijom* na *S određenom skupom H*, tim redom.

1.6. Mreže i Bulove algebre

Uređeni skup čiji svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum nazivamo *mrežom*. Indukcijom se lako dokazuje da i svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum. Za beskonačne podskupove mreže to ne mora da važi. Ako je L mreža, tada se na L mogu definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ sa

$$\wedge : (a,b) \mapsto a \wedge b \qquad \text{i} \qquad \vee : (a,b) \mapsto a \vee b.$$

Po analogiji sa odgovarajućim operacijama na skupovima, operaciju $\vee$ nazivaćemo *unijom*, a operaciju $\wedge$ *presekom*. Drugim rečima, govorićemo da je $\bigvee H$ *unija skupa H* a $a \vee b$ je *unija elemenata a* i *b*, i slično, da je $\bigwedge H$ *presek skupa H* a $a \wedge b$ je *presek elemenata a* i *b*.

Koristeći operacije unije i preseka, mrežu možemo definisati i kao univerzalnu algebru sa dve fundamentalne binarne operacije koje zadovoljavaju nekoliko specijalnih uslova. Naime, neposredno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.6.1. *Ako je L mreža, tada je $(L,\wedge,\vee)$ univerzalna algebra takva da za sve $x,y,z \in L$ važe sledeći uslovi:*

$(L1)$	$x \wedge x = x,\ x \vee x = x$	(*idempotentnost*);
$(L2)$	$x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x$	(*komutativnost*);
$(L3)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	(*asocijativnost*);
$(L4)$	$x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x$	(*apsorpcija*).

Obratno, ako je L univerzalna algebra sa dve fundamentalne binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju uslove $(L1)$–$(L4)$, tada je L mreža, u odnosu na parcijalno uređenje $\leqslant$ definisano sa

$$a \leqslant b \ \Leftrightarrow\ a \wedge b = a \qquad (\textit{ili, ekvivalentno, } a \leqslant b \ \Leftrightarrow\ a \vee b = b).$$

Uslove $(L1)$–$(L4)$ u Teoremi 1.6.1. nazivamo *aksiomama mreže*.

Tretiranje mreže kao univerzalne algebre omogućava nam da kao i kod svake druge univerzalne algebre govorimo o podmrežama, kongruencijama, homomorfizmima, izomorfizmima, direktnim proizvodima mreža itd. Za mrežu L i $a \in L$, podmreže

$$[a) = \{x \in L \mid a \leqslant x\} \qquad \text{i} \qquad (a] = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$$

su *poluotvoreni intervali* mreže L, a za $a,b \in L$ takve da je $a \leqslant b$, podmreže

$$(a,b) = \{x \in L \mid a < x < b\} \qquad \text{i} \qquad [a,b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

su *otvoreni interval* i *zatvoreni interval* (*segment*) mreže L, tim redom. Na isti način definišu se i *poluotvoreni*, *otvoreni* i *zatvoreni intervali uređenih skupova*.

Neka je H podskup uređenog skupa A. Ako za proizvoljne $a,x \in A$, iz $x \leqslant a$ i $a \in H$ sledi $a \in H$, tada H nazivamo *idealom uređenog skupa* A, a ako za proizvoljne $a,x \in A$, iz $a \leqslant x$ i $a \in H$ sledi $a \in H$, tada H nazivamo *filtrom* ili *dualnim idealom uređenog skupa* A. Za proizvoljan element $a \in A$, poluotvoreni interval $(a]$ je najmanji ideal od A koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim idealom* uređenog skupa A generisanim sa a, a poluotvoreni interval $[a)$ je najmanji filter (dualni ideal) od A koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim filtrom* ili *glavnim dualnim idealom* uređenog skupa A generisanim sa a. Na potpuno isti način definišemo i *ideal* i *glavni ideal kvazi-uređenog skupa*, kao i *filter* i *glavni filter kvazi-uređenog skupa*.

Sa druge strane, za podskup H mreže L kažemo da je *ideal* mreže L ako je ideal uređenog skupa $(L,\leqslant)$ i zatvoren je za operaciju $\vee$ u L, tj. $a \vee b \in H$, za sve $a,b \in H$. Za proizvoljan element $a \in L$, poluotvoreni interval $(a]$ je takođe i najmanji ideal mreže L koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim idealom* mreže L generisanim elementom a. Takođe, H nazivamo *filtrom* ili *dualnim idealom* mreže L ako je filter uređenog skupa $(L,\leqslant)$ i zatvoren je za operaciju $\wedge$, tj. $a \wedge b \in H$, za sve $a,b \in H$. Za proizvoljan element $a \in L$, poluotvoreni interval $[a)$ je i najmanji filter (dualni ideal) mreže L koji sadrži a i nazivamo ga *glavnim filtrom* ili *glavnim dualnim idealom* mreže L generisanim sa a.

Što se tiče izomorfizama mreža, oni se mogu povezati sa izomorfizmima uređenih skupova na način koji prikazuje sledeća teorema.

Teorema 1.6.2. *Neka su L i K mreže i neka je ϕ funkcija iz L u K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *ϕ je izomorfizam mreže L na mrežu K;*

(ii) *ϕ je surjekcija iz L na K i za proizvoljne $a,b \in L$ važi*

$$a \leqslant b \;\Leftrightarrow\; \phi(a) \leqslant \phi(b);$$

(iii) *ϕ je uređajni izomorfizam iz L na K.*

Dokaz: (i)$\Rightarrow$(ii). Uzmimo proizvoljne $a,b \in L$. Ako je $a \leqslant b$, tada je $a \wedge b = a$, pa je $\phi(a) = \phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$, odakle dobijamo da je $\phi(a) \leqslant \phi(b)$.

Obratno, neka je $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Tada je $\phi(a) = \phi(a) \wedge \phi(b) = \phi(a \wedge b)$, odakle sledi da je $a = a \wedge b$, zbog injektivnosti funkcije ϕ, pa je, dakle, $a \leqslant b$. Prema tome, dokazali smo (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Iz (ii) neposredno sledi da je ϕ i injektivna funkcija, što znači da je i bijekcija, a takođe i da su ϕ i ϕ^{-1} izotone funkcije, pa dobijamo da važi (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i). Uzmimo proizvoljne $a,b \in L$. Iz $a \wedge b \leqslant a$ i $a \wedge b \leqslant b$ sledi da je

$$\phi(a \wedge b) \leqslant \phi(a), \quad \phi(a \wedge b) \leqslant \phi(b),$$

tj. da je $\phi(a \wedge b)$ donja granica za $\phi(a)$ i $\phi(b)$, pa preostaje da se dokaže da je i njihova najveća donja granica. U tom cilju, uzmimo proizvoljnu donju granicu u za $\phi(a)$ i $\phi(b)$. Kako je ϕ surjektivna funkcija, to je $u = \phi(x)$, za neki $x \in L$, i imamo da je $\phi(x) = u \leqslant \phi(a)$ i $\phi(x) = u \leqslant \phi(b)$. Iz izotonosti funkcije ϕ^{-1} dalje sledi da je $x \leqslant a$ i $x \leqslant b$, pa je $x \leqslant a \wedge b$, odakle dobijamo da je $u = \phi(x) \leqslant \phi(a \wedge b)$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$. Na potpuno isti način dokazujemo da je $\phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$. Ovim je dokazano da je ϕ izomorfizam mreže L na mrežu K. □

Najmanji element mreže L, ako takav postoji, nazivamo *nulom*, a najveći element, ukoliko postoji, nazivamo *jedinicom mreže* L. Nulu i jedinicu mreže obično označavamo sa 0 i 1, tim redom. Mrežu koja ima nulu i jedinicu nazivamo *ograničenom mrežom*. Ograničena mreža se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju ($L1$)–($L4$), i nularnim operacijama (konstantama) 0 i 1 koje zadovoljavaju uslove

($L5$) $0 \wedge x = 0$ (ili, ekvivalentno, $0 \vee x = x$), za svaki $x \in L$;

($L6$) $1 \wedge x = x$ (ili, ekvivalentno, $1 \vee x = 1$), za svaki $x \in L$.

Za neprazan podskup H mreže L kažemo da je *ograničen* ako ima bar jednu donju i bar jednu gornju granicu.

Nije teško pokazati da su na proizvoljnoj mreži L sledeći uslovi ekvivalentni:

($L7$) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, za sve $x, y, z \in L$;

($L7'$) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, za sve $x, y, z \in L$.

Mrežu koja zadovoljava bilo koji od tih uslova nazivamo *distributivnom mrežom*.

Neka je L ograničena mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Za element $y \in L$ kažemo da je *dopuna* (*komplement*) elementa $x \in L$ ako važi

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{i} \qquad x \vee y = 1.$$

U tom slučaju je i x dopuna za y, tj. relacija "biti dopuna" je simetrična. Ako je pri tome mreža L još i distributivna, tada se lako dokazuje da svaki element $x \in L$ može imati najviše jednu dopunu, koju ćemo označavati sa x'. Ograničenu distributivnu mrežu u kojoj svaki element ima dopunu nazivamo *Bulova algebra* (G. Boole). Preslikavanje $x \mapsto x'$ je unarna operacija na L, i nazivamo je *operacijom dopune*. Bulova algebra se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0 i 1 koje pored uslova ($L1$)–($L7$) zadovoljavaju i uslove

($L8$) $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$, za svaki $x \in L$;
($L9$) $(x')' = x$, za svaki $x \in L$;
($L10$) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, za sve $x, y \in L$.

Naravno, ovaj skup aksioma nije minimalan – neke aksiome se mogu izvesti kao posledice drugih aksioma, ali to ovde nije tako bitno. Podsetimo se da su aksiome ($L10$) poznate kao *DeMorganovi zakoni*.

Kako smo napred napomenuli, svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum, ali to ne mora da važi za beskonačne podskupove. Stoga mrežu u kojoj svaki neprazan podskup ima supremum i infimum nazivamo *potpunom* ili *kompletnom mrežom*. Jasno, svaka takva mreža je ograničena. Podskup K potpune mreže L je *potpuna podmreža* od L ako supremum i infumum (u L) svakog nepraznog podskupa od K leže u K.

Navedimo sada neke važne primere mreža i Bulovih algebri.

Primer 1.6.3. Najpoznatiji primer Bulove algebre je *Bulova algebra podskupova* datog skupa A. Naime, *partitivni skup* $\mathcal{P}(A)$ (skup svih podskupova od A), parcijalno uređen skupovnom inkluzijom, je Bulova algebra. Operacije unije i preseka u toj Bulovoj algebri poklapaju se sa operacijama skupovne unije i preseka, operacija dopune se poklapa sa skupovnom operacijom dopune do skupa A, jedinica u $\mathcal{P}(A)$ je ceo skup A a nula je prazan skup $\emptyset$. Ova Bulova algebra je potpuna.

Primer 1.6.4. Skup $\mathcal{B}(A)$ svih binarnih relacija na nepraznom skupu A, parcijalno uređen inkluzijom relacija, takođe čini potpunu Bulovu algebru, koju nazivamo *Bulova algebra relacija* na A. Jasno, Bulova algebra relacija na A izomorfna je Bulovoj algebri podskupova od $A \times A$.

Nula i jedinica u $\mathcal{B}(A)$ su redom prazna i univerzalna relacija na A.

Primer 1.6.5. Označimo sa $\mathcal{E}(A)$ skup svih relacija ekvivalencije na nepraznom skupu A. Taj skup je parcijalno uređen inkluzijom relacija, i u odnosu na to parcijalno uređenje on je potpuna mreža, mada nije podmreža od $\mathcal{B}(A)$. Naime, dok se operacija preseka na $\mathcal{E}(A)$ poklapa sa operacijom preseka u $\mathcal{B}(A)$, operacija unije je određena drugačije, jer skupovna unija dve ili više relacija ekvivalencije ne mora biti relacija ekvivalencije. Neka je K proizvoljan neprazan podskup od $\mathcal{E}(A)$ i neka je $\langle K\rangle$ podpolugrupa polugrupe $\mathcal{B}(A)$ binarnih relacija na A generisana sa K. Tada se $\bigvee K$ poklapa sa skupovnom unijom svih relacija iz $\langle K\rangle$.

Nula i jedinica u $\mathcal{E}(A)$ su redom Δ_A i ∇_A.

Primer 1.6.6. Neka je $\mathrm{Sub}(S)$ *skup svih podpolugrupa* polugrupe S, uključujući i praznu podpolugrupu. Tada skup $\mathrm{Sub}(S)$, parcijalno uređen skupovnom inkluzijom, čini potpunu mrežu u kojoj za proizvoljan skup $\{S_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Sub}(S)$ važi

$$\bigwedge_{i\in I} S_i = \bigcap_{i\in I} S_i \qquad \text{i} \qquad \bigvee_{i\in I} S_i = \Big\langle \bigcup_{i\in I} S_i \Big\rangle.$$

Jedinica ove mreže je cela polugrupa S, a nula je prazna podpolugrupa.

Mrežu $\mathrm{Sub}(S)$ nazivamo *mreža podpolugrupa* polugrupe S.

Primer 1.6.7. Neka je $\mathrm{Con}(S)$ *skup svih kongruencija* na polugrupi S. Tada je $\mathrm{Con}(S)$ potpuna podmreža mreže $\mathcal{E}(S)$ relacija ekvivalencije na S, sa istom nulom i jedinicom kao $\mathcal{E}(S)$.

Ako je L mreža sa najmanjim elementom 0, tada za element $a \in L \setminus \{0\}$ kažemo da je *atom* u L ako ne postoji $b \in L$ takav da je $0 < b < a$. Za L kažemo da je *atomična* ako za svaki element $x \in L - \{0\}$ postoji atom $a \in L$ takav da je $0 < a \leqslant x$, dok za L kažemo da je *atomistična* ako se svaki element iz $L - \{0\}$ može predstaviti kao supremum nekog skupa atoma. Jasno, svaka atomistična mreža je atomična, dok obratno ne mora da važi.

Primer 1.6.8. *U Bulovoj algebri $\mathcal{P}(A)$ svih podskupova skupa A, atomi su jednoelementi podskupovi od A. Jasno, ova mreža je atomična.*

Funkciju φ mreže L u sebe nazivamo *ekstenzivnom*, ako je $a \leqslant \varphi(a)$, za svako $a \in L$, *kontraktivnom*, ako je $\varphi(a) \leqslant a$, za svako $a \in L$, i *idempotentnom*, ako je $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a)$, za svako $a \in L$. Ekstenzivnu, izotonu i idempotentnu funkciju na L nazivamo *operatorom zatvorenja*, dok kontraktivnu, izotonu i idempotentnu funkciju nazivamo *operatorom otvorenja*. Ako je φ operator zatvorenja na L, tada za element $a \in L$ takav da je $\varphi(a) = a$ kažemo da je *zatvoren* za φ ili da je *φ-zatvoren*. Ukoliko je φ operator otvorenja, onda za element sa takvom osobinom kažemo da je *otvoren* za φ ili da je *φ-otvoren*.

Ovde ćemo navesti nekoliko primera operatora zatvorenja i otvorenja koji su se već pojavili u prethodnom tekstu. Mnoštvo drugih primera operatora zatvorenja i otvorenja može se naći u daljem tekstu knjige.

Primer 1.6.9. Neka je A neprazan skup. Funkcija $R \mapsto R^\infty$, za $R \in \mathcal{B}(A)$ predstavlja operator zatvorenja na $\mathcal{B}(A)$, a odgovarajući zatvoreni elementi su upravo tranzitivne relacije na A. Time je opravdano to što smo R^∞ ranije nazvali *tranzitivnim zatvorenjem* relacije R. Funkcija $R \mapsto R^e$ je takođe operator zatvorenja na $\mathcal{B}(A)$, a odgovarajući zatvoreni elementi su relacije ekvivalencije na A. To zatvorenje nazivamo *ekvivalencijskim zatvorenjem* relacije R ili *ekvivalencijom generisanom relacijom* R.

Primer operatora otvorenja je operator $R \mapsto R \cap R^{-1}$, a odgovarajući otvoreni elementi su simetrične relacije na A, pri čemu se uzima da je i prazna relacija simetrična.

Primer 1.6.10. Ako je A algebra tipa τ, tada je $H \mapsto \langle H \rangle$, gde je H podskup od A, operator zatvorenja na Bulovoj algebri $\mathcal{P}(A)$ svih podskupova od A. Skup svih elemenata iz $\mathcal{P}(A)$ zatvorenih za ovaj operator je skup svih podalgebri od A.

Primer 1.6.11. Neka je S polugrupa. Za relaciju $R \in \mathcal{B}(S)$, označimo sa $R^\#$ presek svih kongruencija na S koje sadrže relaciju R, tada je $R \mapsto R^\#$ operator zatvorenja na $\mathcal{B}(S)$ a skup svih elemenata zatvorenih za taj operator je upravo skup svih kongruencija na S. Ovaj operator nazivamo *kongruencijskim zatvorenjem* relacije R, a kongruenciju $R^\#$ nazivamo *kongruencijom* na R *generisanom sa* R.

Primer 1.6.12. Neka je R relacija na skupu A. Relacija $(R\cup\Delta_A)^\infty = \Delta_A\cup R^\infty$ je najmanja refleksivna i tranzitivna relacija na A koja sadrži relaciju R, odnosno najmanje kvazi-uređenje na A koje sadrži R, i nazivamo je *refleksivno-tranzitivnim zatvorenjem* relacije R, ili *kvazi-uređenjem* na A generisanim relacijom R.

Neka je dalje R relacija na polugrupi S. Relacija

$$R^c = \{(xay,xby)\,|\,x,y\in S^1,(a,b)\in R\}$$

je najmanja saglasna relacija na S koja sadrži R, i nazivaćemo je *saglasnim zatvorenjem* relacije R. Lako se proverava da unija proizvoljne familije saglasnih relacija i proizvod konačno mnogo saglasnih relacija na S jesu takođe saglasne relacije na S, odakle, prema definiciji tranzitivnog zatvorenja relacije, dobijamo da i tranzitivno zatvorenje saglasne relacije jeste saglasna relacija. Iz svega ovog se može lako zaključiti da, za datu relaciju R na polugrupi S, relacija $(R^c\cup\Delta_S)^\infty$ jeste najmanje saglasno kvazi-uređenje na S koje sadrži R. Kako saglasno kvazi-uređenje na polugrupi S nazivamo *polu-kongruencijom* na S, to ćemo $(R^c\cup\Delta_S)^\infty$ nazivati *polu-kongruencijom* na S *generisanom relacijom* R.

Primer 1.6.13. Neka je S polugrupa i $E_l^\flat$, $E_r^\flat$ i $E^\flat$ su relacije definisane u prethodnom odeljku. Tada su funkcije $E\mapsto E_l^\flat$, $E\mapsto E_r^\flat$ i $E\mapsto E^\flat$ operatori otvorenja na mreži relacija ekvivalencije na S, pa ćemo relaciju $E_l^\flat$ nazivati *levim kongruencijskim otvorenjem*, relaciju $E_r^\flat$ *desnim kongruencijskim otvorenjem*, a relaciju $E^\flat$ *kongruencijskim otvorenjem* relacije ekvivalencije E.

1.7. Zadaci

1.7.1. Neka je $\leqslant$ parcijalno uređenje na skupu A. Dokazati da je tada relacija $<$ na A definisana sa

$$x<y \Leftrightarrow x\leqslant y \text{ i } x\neq y$$

antirefleksivna i tranzitivna. Obratno, ako je $<$ antirefleksivna i tranzitivna relacija na skupu A, tada je relacija $\leqslant$ na A definisana sa

$$x\leqslant y \Leftrightarrow x<y \text{ ili } x=y$$

parcijalno uređenje na skupu A. Dokazati.

1.7.2. Neka je ϱ relacija na skupu A i neka je $\varrho_A = \{x\in A\mid(\exists a\in A)\,(a,x)\in\varrho\}$ i $\varrho^A = \{x\in A\mid(\exists a\in A)\,(x,a)\in\varrho\}$. Dokazati da važi:

(a) ako je ϱ simetrična, tranzitivna i $\varrho_A \cup \varrho^A \neq \emptyset$, tada je ϱ relacija ekvivalencije;
(b) ako je ϱ simetrična i antisimetrična, tada je ϱ tranzitivna.

1.7.3. Neka je R kvazi-uređenje na skupu A. Dokazati da:

(a) $\overline{R} = R \cap R^{-1}$ je relacija ekvivalencije na skupu A;
(b) za proizvoljne $\alpha, \beta \in A/\!\!/\overline{R}$ važi

$$(\exists x \in \alpha)(\exists y \in \beta)(a,b) \in R \Leftrightarrow (\forall x \in \alpha)(\forall y \in \beta)(a,b) \in R;$$

(c) relacija $\leqslant$ definisana na $A/\!\!/\overline{R}$ sa

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow (\exists x \in \alpha)(\exists y \in \beta)(a,b) \in R, \quad \text{za proizvoljne } \alpha,\beta \in A/\!\!/\overline{R},$$

je uređenje na $A/\!\!/\overline{R}$;
(d) za proizvoljne $x, y \in A$ važi

$$(x,y) \in R \Rightarrow R_y \subseteq R_x \text{ i } R^x \subseteq R^y;$$

1.7.4. Neka je R binarna relacija na skupu A. Dokazati da je R ekvivalencija ako i samo ako je $R = R \circ R^{-1} \cup \Delta_X$.

1.7.5. Neka su E i F ekvivalencije na skupu A. Dokazati da je $E \circ F$ relacija ekvivalencije ako i samo ako je $E \circ F = F \circ E$.

1.7.6. Funkcija $\phi : A \to B$ je *levo* (*desno*) *invertibilna* ako postoji funkcija $\psi : B \to A$ tako da je $\psi \circ \phi = I_B$ ($\phi \circ \psi = I_A$). Dokazati:

(a) funkcija je levo invertibilna ako i samo ako je surjektivna;
(b) funkcija je desno invertibilna ako i samo ako je injektivna.

1.7.7. Dokazati da svaka funkcija skupa u sebe može biti predstavljena kao proizvod jedne surjektivne i jedne injektivne funkcije.

1.7.8. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podskupovi skupa X. Neka je π familija podskupova Y_T skupa X oblika

$$Y_T = \bigcap_{i \in T} X_i \cap \bigcap_{i \notin T} X_i^c, \quad \text{za svaki } T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}.$$

Dokazati da je π razbijanje skupa X.

1.7.9. Neka su E i F relacije ekvivalencije (kongruencije) na skupu (polugrupi) A. Dokazati da je $(E \circ F)^\infty$ najmanja relacija ekvivalencije (kongruencija) na A koja sadrži E i F.

1.7.10. Neka su A, B i C polugrupe i $\phi : A \to B$ i $\psi : A \to C$ su homomorfizmi takvi da je ϕ surjektivan i $\ker \phi \subseteq \ker \psi$. Tada postoji homomorfizam $\varphi : B \to C$ takav da je $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \psi$ i da dijagram na slici komutira. Dokazati.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[dl, "\varphi"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

1.7.11. Neka je $\phi : A \to B$ homomorfizam polugrupe S u polugrupu T i E je kongruencija na S takva da je $E \subseteq \ker\phi$. Dokazati da je funkcija $\psi : S/\!\!/E \to T$ definisana sa

$$\psi(E_a) = \phi(a), \quad \text{za svaki } E_a \in S/\!\!/E,$$

homomorfizam.

1.7.12. Neka je ϕ endomorfizam i E je kongruencija na polugrupi S. Tada je funkcija $\overline{\phi} : S/\!\!/E \to \phi(S)/\!\!/E$ definisana sa

$$\overline{\phi}(E_a) = E_{\phi(a)}, \quad \text{za svaki } E_a \in S/\!\!/E,$$

endomorfizam algebre $S/\!\!/E$ ako i samo ako kongruencija E zadovoljava uslov

$$(a_1, a_2) \in E \Rightarrow (\phi(a_1), \phi(a_2)) \in E.$$

1.7.13. Dokazati da podpolugrupa monogene polugrupe ne mora biti monogena.

1.7.14. Neka je $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$. Dokazati da je

(a) S polugrupa u odnosu na uobičajeno množenje matrica,
(b) S ima beskonačno mnogo desnih jedinica i nema levu jedinicu,
(c) S ima nulu i svaki element iz S je delitelj nule.

1.7.15. Neka je $S = \{1,2,3,4\}$ i operacija $\cdot$ na S je definisana sa

$$a \cdot b = \max\{a, b\}.$$

Dokazati sledeće:

(a) S je polumreža,
(b) S ima jedinicu i nulu,
(c) skup $T_1 = \{1,2,3\}$ je podmonoid monoida S, a skup $T_2 = \{2,3,4\}$ je podpolugrupa monoida S i T_2 je monoid, ali nije podmonoid monoida S.

1.7.16. Neka je $G = (G, \cdot)$ grupoid i E je relacija ekvivalencije na G. Na količničkom skupu $G/\!\!/E$ definišimo množenje sa

$$(E_x) * (E_y) = E_{x \cdot y}.$$

Dokazati da je $(G /\!\!/ E, *)$ grupoid ako i samo ako je E kongruencija na grupoidu G.

1.7.17. Svaka polugrupa je izomorfna nekoj polugrupi transformacija. Dokazati.

Glava 2
Formalni jezici i gramatike

U ovoj glavi uvedeni su pojmovi jezika i formalnih gramatika, data je klasifikacija jezika, takozvana hijararhija Čomskog i prikazano predstavljanje gramatika stablima izvođenja.

2.1. Reči, slobodan monoid i jezici

Neka je X neprazan skup koji nazivamo *alfabetom*, a čije elemente nazivamo *slovima*. *Reč* (*string*) nad alfabetom X definiše se kao konačan niz

$$x_1x_2\dots x_n,$$

gde su $x_1, x_2, \dots x_n \in X$ slova.Iz ovakve definicije je jasno da se jednakost reči definiše kao jednakost nizova. To znači da su dve reči

$$u = x_1x_2\dots x_n \qquad \text{i} \qquad v = y_1y_2\dots y_m$$

jednake ako i samo ako je $m = n$ i $x_i = y_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Za reč $u = x_1x_2\dots x_n$, gde su $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, broj n, tj. broj elemenata (slova) u nizu $x_1x_2\dots x_n$, označavamo sa $|u|$, i nazivamo ga *dužinom reči u*. Dalje, sa $|u|_x$ označavamo broj pojavljivanja slova x u reči u. *Sadržaj reči u* je skup svih slova koja se pojavljuju u reči u u znaci $c(u)$. Jasno je da važi sledeća jednakost:

$$|u| = \sum_{x \in c(u)} |u|_x.$$

Prazan niz slova označava se sa e i naziva *prazna reč*. Jasno je da je $|e| = 0$.

Osnovna operacija nad rečima je operacija *nadovezivanja* ili *konkatenacije*. Konkatenacijom reči $u = x_1x_2\dots x_n$ i $v = y_1y_2\dots y_m$ dobijamo reč

$$u \cdot v = uv = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m.$$

Ova operacija je asocijativna i uvodimo sledeće oznake:

$$x^0 = e,\ x^1 = x \quad \text{i} \quad x^k = \underbrace{xx\dots x}_{k}.$$

Reverzna reč date reči $u = x_1x_2\dots x_n$ jeste reč $\overline{u} = x_n\dots x_2x_1$.

Skup svih reči nad alfabetom X, uključujući i praznu reč, označavaćemo sa X^*, a sa X^+ ćemo označavati skup svih nepraznih reči nad tim alfabetom, odnosno $X^+ = X^* - \{e\}$. Skup X^+ sa operacijom nadovezivanja predstavlja polugrupu koju nazivamo *polugrupa reči* ili *slobodna polugrupa* nad X, dok X^* predstavlja monoid sa jedinicom e, koji zovemo *monoid reči* ili *slobodan monoid* nad X. *Jezik* nad alfabetom X definišemo kao proizvoljan skup reči (praznih ili nepraznih) nad tim alfabetom, odnosno kao proizvoljan podskup od X^*. Kao i kod običnih skupova, kardinalnost jezika $L \subseteq X^*$ označavamo sa $|L|$.

U Glavi 1. smo definisali pojmove *kongruencije* i *homomorfizma* za proizvoljnu polugrupu. Kako su X^+ i X^* polugrupe, to se te definicije mogu primeniti i na njih. Ipak, ovde ćemo te pojmove definisati i za X^+ i X^* kako da bi ih se bolje prisetili. *Kongruencija* na polugrupi X^+ (monoidu X^*) je relacija ekvivalencije ϱ na X^+ (X^*) koja je kompatibilna (saglasna) sa operacijom nadovezivanja, tj. za koja važi

$$(u,v) \in \varrho \;\Rightarrow\; (xu,xv) \in \varrho \qquad \text{(leva kompatibilnost)},$$
$$(u,v) \in \varrho \;\Rightarrow\; (ux,vx) \in \varrho \qquad \text{(desna kompatibilnost)},$$

za proizvoljne reči $u,v \in X^+$ ($u,v \in X^*$) i slovo $x \in X$. Kao što smo napomenuli u Glavi 1., relacija ekvivalencije ϱ na polugrupi X^+ (monoidu X^*) je kompatibilna ako i samo je stabilna, tj. ako proizvoljne reči $u_1,u_2,v_1,v_2 \in X^+$ (odnosno $u_1,u_2,v_1,v_2 \in X^*$) iz $(u_1,u_2) \in \varrho$ i $(v_1,v_2) \in \varrho$ sledi $(u_1v_1,u_2v_2) \in \varrho$.

Funkcija $\varphi : X^+ \to Y^+$ ($\varphi : X^* \to Y^*$) je *homomorfizam* polugrupe X^+ u polugrupu Y^+ (monoida X^* u monoid Y^*) ako je $\varphi(u,v) = \varphi(u)\varphi(v)$, za sve reči $u,v \in X^+$ ($u,v \in X^*$).

Operacije na jezicima su skupovne operacije: *unija, presek, razlika i komplement*, kao i operacija *konkatenacije*. Za označavanje unije jezika, osim simbola "$\cup$" koristićemo i simbole za sabiranje "$+$" i "$\sum$". Za dva jezika L_1 i L_2 njihov *proizvod* (*konkatenacija*) je jezik

$$L_1L_2 = \{w \in X^* \mid (\exists u \in L_1)(\exists v \in L_2)\, w = uv\}. \tag{2.1}$$

Kraće pišemo $L_1L_2 = \{uv \mid u \in L_1,\, v \in L_2\}$. Jasno je da proizvod jezika zapravo jeste proizvod u partitivnoj polugrupi $\mathcal{P}(X^*)$ (videti Primer 1.4.7.), kao i to da je $\mathcal{P}(X^*)$ monoid sa jedinicom $\{e\}$.

Kao i u svakom drugom monoidu, za $L \subseteq X^*$ i $n \in \mathbb{N}^0$ sa L^n označavamo n-ti stepen jezika L u monoidu $\mathcal{P}(X^*)$, odnosno

$$L^n = \{w \in X^* \mid (\exists u_1,\dots,u_n \in L)\ w = u_1\dots u_n\}, \ \text{za } n \in \mathbb{N}, \quad L^0 = \{e\}.$$

Takođe, na jezicima definišemo i *Klinijevu +-operaciju* i *Klinijevu ∗-operaciju* na sledeći način:

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n = \sum_{n=1}^{\infty} L^n, \tag{2.2}$$

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \sum_{n=0}^{\infty} L^n, \tag{2.3}$$

Dokazaćemo nekoliko elementarnih rezultata koji se tiču jezika.

Teorema 2.1.1. *Jednakost $L^+ = L^*$ važi ako i samo ako $e \in L$.*

Dokaz: Ako $e \in L$, onda je, jasno $\{e\} = L^0 \subseteq L \subseteq L^+$, što znači da je $L^* \subseteq L^+$. Kako obrat uvek važi, to imamo da je $L^* = L^+$.

Obratno, ako $e \notin L$ svaka reč jezika L ima pozitivnu dužinu, pa $e \notin L^+$. Pošto $e \in L^*$, jasno je da je $L^* \neq L^+$. □

Teorema 2.1.2. **(Ardenova lema)** *Neka su L_1, L_2 jezici takvi da $e \notin L_1$ i neka je L jezik koji zadovoljava relaciju $L = L_1L + L_2$. Tada je $L = L_1^*L_2$.*

Dokaz: Indukcijom po dužini reči pokazaćemo da je $L \subseteq L_1^*L_2$.

Neka je $u = e$ i pretpostavimo da $e \in L = L_1L + L_2$. Kako $e \notin L_1$ zaključujemo da $e \in L_2$, pa je $e \in L_1^*L_2$.

Pretpostavimo da, za sve reči $v \in L$ dužine $|v| \leqslant n$, važi $v \in L_1^*L_2$. Posmatramo proizvoljnu reč u dužine $n+1$. Ako $u \in L$, onda $u \in L_2 \subseteq L_1^*L_2$ ili je u oblika $u = pw$, za neku reč $p \in L_1$ i $w \in L$. U tom slučaju je $p \neq e$, pa je $|w| < |u|$, što znači da na $|w|$ možemo primeniti indukcijsku pretpostavku. Dakle, $w \in L_1^*L_2$ i $u \in L_1L_1^*L_2 \subseteq L_1^*L_2$.

Obratno, opet koristimo indukciju po $n \in \mathbb{N}^0$ da dokažemo da je $L_1^nL_2 \subseteq L$. Za $n = 0$ imamo $L_1^0L_2 = L_2 \subseteq L_1L + L_2 = L$. Za $n > 0$, dobijamo, prema indukcijskoj pretpostavci, sledeću inkluziju:

$$L_1^nL_2 = L_1(L_1^{n-1}L_2) \subseteq L_1L.$$

Prema tome, $L_1^nL_2 \subseteq L_1L \subseteq L_1L + L_2 = L$, za svaki $n \geqslant 0$, što znači da je $L_1^*L_2 \subseteq L$. Ovim je tvrđenje dokazano. □

2.2. Uređenja na rečima

Neka su date proizvoljne reči u i v nad alfabetom X. Za reč u kažemo da je *levi odsečak* ili *prefiks* reči v ako postoji reč $w \in X^*$ takva da je $v = uw$, ili kraće, ako je $v \in uX^*$. Ako je pri tome $w \in X^+$, tj. $v \in uX^+$, tada kažemo da je *u pravi levi odsečak* ili *pravi prefiks* reči v. Dualno se definiše *desni odsečak* ili *sufiks* reči, kao i *pravi desni odsečak* ili *pravi sufiks* reči. Takođe, za u kažemo da je *podreč*, *odsečak* ili *infiks* reči v ako postoje reči $w', w'' \in X^*$ takve da je $v = w'uw''$, ili kraće, $v \in X^*uX^*$. Ako je pri tome bar jedna od reči w' i w'' iz X^+, tada kažemo da je u *prava podreč*, *pravi odsečak* ili *pravi infiks* reči v.

Neka je u reč nad alfabetom X i $k \in \mathbb{N}$ tako da je $k \leqslant |u|$. Tada sa $l_k(u)$ označavamo *levi odsečak reči u dužine k*, a sa $r_k(u)$ *desni odsečak reči u dužine k*. Umesto $l_1(u)$ pišemo i $h(u)$, a umesto $r_1(u)$ pišemo $t(u)$. Jasno, $h(u)$ označava prvo slovo reči u, koje nazivamo *glavom* reči u, a $t(u)$ označava poslednje slovo reči u, koje nazivamo *repom* reči u.

Inicijalni deo reči u, u oznaci $i(u)$, definišemo kao reč nastalu iz u zadržavanjem samo prvog pojavljivanja (gledano sleva na desno) svakog slova koje se pojavljuje u u, a *finalni deo* reči u, u oznaci $f(u)$, definišemo sa $f(u) = \overline{i(\overline{u})}$. *Levi deo* reči u, u oznaci $l(u)$, definišemo kao najkraći levi odsečak od u koji sadrži sva slova koja se pojavljuju u u, dok se *desni deo* reči u, u oznaci $r(u)$, definiše sa $r(u) = \overline{l(\overline{u})}$.

2.2.1. *Prefiks, sufiks i faktor uređenje*

Definišaćemo na skupu X^* relacije parcijalnog uređenja. Za proizvoljne reči $u, v \in X^*$ imamo

$$u \leqslant_p v \Leftrightarrow u \text{ je prefiks od } v,$$
$$u \leqslant_s v \Leftrightarrow u \text{ je sufiks od } v,$$
$$u \leqslant_f v \Leftrightarrow u \text{ je faktor od } v.$$

Označimo sa $u <_p v$ (odnosno $u <_s v$, $u <_f v$), *pravi prefiks* (odnosno *pravi sufiks*, *pravi faktor*) u reči v, tj. neka je:

$$u <_p v \;\Leftrightarrow\; u \leqslant_p v \;\text{ i }\; u \neq v,$$
$$u <_s v \;\Leftrightarrow\; u \leqslant_s v \;\text{ i }\; u \neq v,$$
$$u <_f v \;\Leftrightarrow\; u \leqslant_f v \;\text{ i }\; u \neq v.$$

Teorema 2.2.1. *Relacija $\leqslant_p$ je relacija parcijalnog uređenja na X^*.*

Dokaz: Dokažimo da je $\leqslant_p$ relacija poretka:

Refleksivnost: To sledi iz činjenice da je $u = ue$, za svaku reč $u \in X^*$.

Antisimetričnost: Neka su $u, v \in X^*$ reči takve da važi $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p u$. To znači da je $v = up$ i $u = vq$, za neke reči $p, q \in X^*$, pa je $u = vq = upq$. Na osnovu svojstva jednakosti reči, iz $u = upq$ sledi da mora biti $pq = e$, što dalje povlači da je $p = q = e$, odakle je $u = v$.

Tranzitivnost: Neka je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p w$. To znači da je $v = up$ i $w = vq$, za neke reči $p, q \in X^*$, odakle je $w = vq = upq$. Prema tome, $u \leqslant_p w$.

Time smo upotpunili dokaz teoreme. □

Uređenje $\leqslant_p$ nazivaćemo *prefiks uređenje*. Na sličan način pokazujemo da su i $\leqslant_s$ i $\leqslant_f$ uređenja na X^*, i $\leqslant_s$ ćemo zvati *sufiks uređenje*, a $\leqslant_f$ – *faktor uređenje* ili *infiks uređenje*.

Naredno tvrđenje ukazuje na još jedno važno svojstvo prefiks uređenja.

Teorema 2.2.2. *Dokazati da za proizvoljne reči $u, v, w \in X^*$ važi*

$$u \leqslant_p w \ \wedge \ v \leqslant_p w \quad \Rightarrow \quad u \leqslant_p v \ \vee \ v \leqslant_p u \ .$$

Dokaz: Napišimo reč w u obliku $w = x_1 x_2 \dots x_n$, za neki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ i slova $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Tada $u \leqslant_p w$ i $v \leqslant_p w$ znači da je $u = x_1 \dots x_i$ i $v = x_1 \dots x_j$, za neke $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dakle, ako je $i \leqslant j$, imamo da je $u \leqslant_p v$, a ako je $j \leqslant i$, onda je $v \leqslant_p u$. □

2.2.2. Leksikografsko uređenje

Neka je dat alfabet X. Pretpostavimo da je na njemu definisano linearno uređenje $\leqslant$. Potsetimo da je uređenje na nekom skupu linearno ako su svaka dva elementa tog skupa uporediva.

Uređenje $\leqslant$ može se proširiti do linearnog uređenja $\leqslant_l$ na X^*, koje nazivamo *leksikografsko uređenje*, na sledeći način:

$$u \leqslant_l v \ \Leftrightarrow \ u \leqslant_p v \ \text{ ili } \begin{array}{l} u = pxq, \ v = pyr, \text{ za } x < y \text{ u } X, \\ \text{gde su } p, q, r \in X^* \text{ i } x, y \in X \end{array}$$

Naime, važi sledeće:

Teorema 2.2.3. *Relacija $\leqslant_l$ je linearno uređenje na X^*.*

Dokaz: Dokažimo najpre da je $\leqslant_l$ relacija poretka:

(1) *Refleksivnost:* Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je $u \leqslant_l u$, jer je $u \leqslant_p u$.

(2) *Antisimetričnost:* Za reči $u, v \in X^*$ neka je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l u$.

Ovde razlikujemo nekoliko podslučajeva:

(2.1) Ako je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p u$, tada je $u = v$, zbog antisimetričnosti prefiks uređenja.

(2.2) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v = pxq$, $u = pyr$, za $x < y$ u X i neke $p, q, r \in X^*$. Kako je p najduži zajednički prefiks za reči u i v i $u \leqslant_p v$, to je $p = u$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $u = pyr$, za $y \in X$. Dakle, zaključujemo da slučaj (2.2) nije moguć.

(2.3) Neka je $v \leqslant_p u$ i $u = pxq$, $v = pyr$, za $x < y$ u X i neke reči $p, q, r \in X^*$. Na isti način dokazujemo da ni ovaj slučaj nije moguć.

(2.4) Neka je $x_1 < y_1$, gde je x_1, y_1 prvi par različitih slova koja se nalaze na istoj poziciji u u i v, i neka je $y_2 < x_2$, gde je y_2, x_2 prvi par različitih slova na istoj poziciji u v i u. Tada je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$, što istovremeno daje $x_1 < y_1$ i $y_1 < x_1$, a to nije moguće. Prema tome, ni slučaj (2.4) nije moguć.

(3) *Tranzitivnost:* Neka su $u, v, w \in X^*$ reči takve da je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l w$.

I ovde razlikujemo četiri podslučaja.

(3.1) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v \leqslant_p w$. Tada je $u \leqslant_p w$, zbog tranzitivnosti prefiks uređenja, pa je $u \leqslant_l w$.

(3.2) Neka je $u \leqslant_p v$ i $v = pxq$, $w = pyr$, za $x < y$ u X i neke reči $p, q, r \in X^*$. Kako u ovom slučaju važi da je $u \leqslant_p v$ i $p \leqslant_p v$, to dobijamo da je $u \leqslant_p p$ ili $p \leqslant_p u$.

Ako je $u \leqslant_p p$, tada, obzirom da je $p \leqslant_p w$, imamo da je $u \leqslant_p w$. Dakle $u \leqslant_l w$, što je i trebalo dokazati.

Neka je sada $p \leqslant_p u$. Kako je slučaj $p = u$ obuhvaćen prethodnim slučajem $u \leqslant_p p$, to možemo uzeti da je $p <_p u$, tj. da je p pravi prefiks od u. U tom slučaju imamo da je $u = pxq'$, za neku reč $q' \in X^*$, što zajedno sa $w = pyr$ i $x < y$ daje $u \leqslant_l w$.

(3.3) Neka je $u = pxq$ i $v = pyr$, za $x < y$ u X i $p, q, r \in X^*$ i neka je $v \leqslant_p w$. Tada, na potpuno isti način kao u (3.2), dokazujemo da je $u \leqslant_l w$.

(3.4) Neka je $u = p_1x_1q_1$ i $v = p_1y_1r_1$, za reči $p_1, q_1, r_1 \in X^*$ i slova $x_1, y_1 \in X$, takva da je $x_1 < y_1$, i neka je $v = p_2x_2q_2$, $w = p_2y_2r_2$, za neke $p_2, q_2, r_2 \in X^*$ pri čemu je $x_2 < y_2$ u X.

Kako je $p_1 \leqslant_p v$ i $p_2 \leqslant_p v$, to imamo da je $p_1 \leqslant_p p_2$ ili $p_2 \leqslant_p p_1$. Oba slučaja se razmatraju na sličan način, pa bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $p_1 \leqslant_p p_2$.

Pretpostavimo najpre da je $p_1 = p_2$. Tada je $y_1 = x_2$ i $x_1 < y_1 = x_2 < y_2$. Kako je $u = p_1x_1q_1$, $w = p_1y_2r_2$ i $x_1 < y_2$ zaključujemo da je $u \leqslant_l w$.

Neka je, sada, $p_1 <_p p_2$. Iz $v = p_1y_1r_1$, $v = p_2x_2q_2$ i $p_1 <_p p_2$ zaključujemo da je $p_2 = p_1y_1s$, za neku reč $s \in X^*$, odakle sledi da je $w = p_1y_1t$, za neku reč $t \in X^*$. Prema tome, $u = p_1x_1q_1$ i $w = p_1y_1t$, uz uslov $x_1 < y_1$, odakle sledi da je $u \leqslant_l w$.

Ovim je dokazana tranzitivnost relacije $\leqslant_l$, a time i da je $\leqslant_l$ uređenje. Dalje, dokazujemo linearnost tog uređenja.

(4) *Linearnost:* Neka su date proizvoljne reči $u, v \in X^*$. Ako u i v nemaju zajednički prefiks, to znači da im se razlikuju već prva slova. Neka je x prvo slovo reči u i y je prvo slovo reči v. Kako je, prema pretpostavci, alfabet X linearno uređen, to je $x < y$ ili je $y < x$, što znači da je $u <_l v$ ili $v <_l u$.

Dalje, pretpostavimo da u i v imaju zajednički prefiks. Označimo sa p najduži zajednički prefiks reči u i v. Dakle važi $u = pxq$ i $v = pyr$, za neke $q, r \in X^*$ i slova $x, y \in X$ takva da je $x \neq y$, pa opet na osnovu linearnosti uređenja na alfabetu X zaključujemo da je $x < y$, i u tom slučaju je $u <_l v$, ili je $y < x$ kada je $v <_l u$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primer 2.2.4. Uredićemo leksikografski sve binarne reči dužine 4. Prema definiciji leksikografskog uređenja, sve binarne reči dužine 4 su uređene na sledeći način:

0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111

1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111 .

2.2.3. *Alfabetsko uređenje*

Neka je alfabet X linearno uređen nekim uređenjem $\leqslant$. Tada se $\leqslant$ može proširiti do uređenja $\leqslant_a$ na X^*, koje nazivamo *alfabetsko uređenje* i definišemo na sledeći način:

$$u \leqslant_a v \Leftrightarrow |u| < |v| \text{ ili } \big(|u| = |v| \text{ i } u \leqslant_l v\big).$$

Za relaciju $\leqslant_a$ važi sledeće:

Teorema 2.2.5. *Relacija $\leqslant_a$ je linearno uređenje na X^*.*

Dokaz: Dokažimo da je $\leqslant_a$ linearno uređenje.

(1) *Refleksivnost*: Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je $u \leqslant_a u$, jer je $|u| = |u|$ i $u \leqslant_l u$.

(2) *Antisimetričnost*: Neka je $u \leqslant_a v$ i $v \leqslant_a u$, za neke $u,v \in X^*$. Ako je $|u| = |v|$, tada imamo da je $u \leqslant_l v$ i $v \leqslant_l u$, odakle je $u = v$, zbog antisimetričnosti leksikografskog uređenja.

Sa druge strane, slučaj $|u| \neq |v|$ nije moguć, jer bi u suprotnom dobili da je $|u| < |v|$ i $|v| < |u|$. Prema tome, zaključujemo da je $\leqslant_a$ antisimetrična relacija.

(3) *Tranzitivnost*: Neka je $u \leqslant_a v$ i $v \leqslant_a w$, za neke reči $u,v,w \in X^*$. Razlikujemo sledeće podslučajeve:

(3.1) Ako je $|u| < |v|$ i $|v| < |w|$, tada je $|u| < |w|$, pa je $u \leqslant_a w$.

(3.2) Ako je $|u| < |v|$, $|v| = |w|$ i $v \leqslant_l w$, tada je $|u| < |w|$, odakle sledi da je $u \leqslant_a w$.

(3.3) Ako je $|u| = |v|$, $u \leqslant_l v$ i $|v| < |w|$, tada je opet $|u| < |w|$, odakle je $u \leqslant_a w$.

(3.4) Neka je $|u| = |v|$, $u \leqslant_l v$ i $|v| = |w|$ i $v \leqslant_l w$. Tada dobijamo da je $|u| = |w|$ i $u \leqslant_l w$, zbog tranzitivnosti leksikografskog uređenja, odakle sledi da je $u \leqslant_a w$.

Ovim smo dokazali tranzitivnost relacije $\leqslant_a$.

(4) *Linearnost*: Neka su date proizvoljne reči $u,v \in X^*$. Ako je $|u| \neq |v|$, tada je $|u| < |v|$ i u tom slučaju je $u \leqslant_a v$, ili je $|v| < |u|$ kada je $v \leqslant_a u$.

Ako je $|u| = |v|$, tada iz linearnosti leksikografskog uređenja sledi da je $u \leqslant_l v$ ili $v \leqslant_l u$, što zajedno sa $|u| = |v|$ daje $u \leqslant_a v$ ili $v \leqslant_a u$. □

U sledećem primeru videćemo razliku između leksikografskog i alfabetskog uređenja na rečima.

Primer 2.2.6. Uredićemo leksikografski i alfabetski sve binarne reči dužine manje ili jednake 3.

Leksikografski poredak je:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 00 & 000 & 001 & 01 & 010 & 011 \\ 1 & 10 & 100 & 101 & 11 & 110 & 111 \end{array}$$

Iste reči mogu se urediti i na sledeći način:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 00 & 01 & 10 & 11 & & \\ 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array}$$

i to je alfabetski poredak.

2.3. Formalne gramatike

Pod *formalnom gramatikom*, ili kraće *gramatikom*, podrazumeva se trojka $G = (V, X, \pi)$ za koju važi:

- V je konačan skup koji nazivamo *rečnikom gramatike* G;
- skup $X \subseteq V$ je neprazan skup koji nazivamo *terminalnim alfabetom*;
- $\pi \subseteq (V - X)^+ \times V^*$ je konačan skup koji nazivamo *pravilima gramatike* G.

Skup $V - X$ nazivamo *pomoćnim alfabetom*, a njegove elemente *pomoćnim simbolima*.

Znači, rečnik V se sastoji iz dva disjunktna dela: $V = X \cup (V - X)$.

Da bi pojednostavili pisanje, kao zamenu za izraz $(u, v) \in \pi$ koristićemo izraz $u \to v$.

Za reč $w' \in V$ kažemo da je neposredno izvodljiva iz reči $w \in V$, što označavamo sa $w \Rightarrow w'$, ako postoje $p, q \in V^*$ i pravilo $u \to v$ iz π, tako da je $w = puq$ i $w' = pvq$.

Dakle, reč w' je *neposredno izvedena* iz reči w ako postoji pravilo $u \to v$ iz π takvo da je u podreč od w, a reč w' je dobijena iz w tako što smo podreč u u w zamenili sa v.

Reč $w' \in V^*$ je *izvodljiva* iz reči $w \in V^*$, što označavamo sa $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$ ako je ili $w = w'$ ili postoji niz $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, gde je $n \geqslant 2$, takav da važi

$$w = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w'.$$

U tom slučaju, niz $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazivamo *izvođenjem* reči w' iz w.

Za pomoćni simbol $\sigma \in V - X$, skup $L(G, \sigma) = \{w \in X^* \mid \sigma \overset{*}{\Rightarrow} w\}$ nazivamo *jezikom generisanim gramatikom* G polazeći od simbola σ.

Za jezik $L \subseteq X^*$ kažemo da je *generisan gramatikom*, ili da je jezik *tipa* 0, ako postoji gramatika $G = (V, X, \pi)$ i pomoćni simbol $\sigma \in V - X$ tako da je $L = L(G, \sigma)$.

Iz definicije jezika generisanog gramatikom vidi se razlog zbog čega su simboli iz $V - X$ nazvani pomoćnim simbolima. Naime, oni su samo pomoćno sredstvo u izvođenjima koja se vrše prilikom generisanja jezika, jer se tokom izvođenja gube, a krajnje rezultate izvođenja predstavljaju samo reči izgrađene od terminalnih (završnih) simbola.

2.3.1. *Saglasnost izvođenja*

Kao što smo videli, za reči $w, w' \in V^*$, neposredno izvođenje reči w' iz reči w u gramatici G, u oznaci $w \Rightarrow w'$, definiše se sa

$$w \Rightarrow w' \;\Leftrightarrow\; (\exists p, q \in V^*)(\exists (u,v) \in \pi)\; w = puq \;\&\; w' = pvq,$$

pri čemu govorimo da je reč w' neposredno izvodljiva iz w u gramatici G. Relacija $\Rightarrow$ na slobodnom monoidu V^* nazivamo *relacijom neposrednog izvođenja* u gramatici G. Za reči $w, w' \in V^*$ kažemo da je reč w' izvodljiva iz w u gramatici G i pišemo $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, ako je ili $w = w'$, ili postoji niz

$$w \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n \Rightarrow w', \qquad n \in \mathbb{N}^0,$$

neposrednih izvođenja u gramatici G. U slučaju da je $w \neq w'$ i postoji niz neposrednih izvođenja u G, tada taj niz nazivamo izvođenjem u G, i u tom slučaju neposredna izvođenja iz tog niza nazivamo *koracima* izvođenja, a broj koraka u izvođenju nazivamo *dužinom izvođenja*. Primetimo,takođe, da se i izvođenje $\overset{*}{\Rightarrow}$ može tretirati kao relacija na V^*, definisana kao refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\Rightarrow$, koju ćemo nazivati *relacijom izvođenja* u gramatici G. U slučajevima kada je to potrebno da bi se izbegla moguća zabuna, ove relacije ćemo označavati sa $\Rightarrow_G$ i $\overset{*}{\Rightarrow}_G$.

Lako se dokazuje sledeća lema:

Lema 2.3.1. *Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$. Dokazati da tada važi:*

(i) $\Rightarrow$ *je saglasno zatvorenje od π (najmanja saglasna relacija na V^* koja sadrži π);*

(ii) $\overset{*}{\Rightarrow}$ *je polu-kongruencija na V^* generisana sa π (najmanje saglasno kvazi-uređenje na V^* koje sadrži π).*

Dokaz: (i) Neka su reči $u, v \in X^*$ i pravilo $u \to v$ iz π (što možemo zapisati kao $(u,v) \in \pi$). Po definiciji relacije izvođenja, iz $u = eue$ i $v = eve$ zaključujemo da je $u \Rightarrow v$, tj. da relacija $\Rightarrow$ sadrži π. Po definiciji je očigledno da je relacija izvodjenja saglasna, pa za $u, v \in X^*$, uslov $u \Rightarrow v$ povlači $uw \Rightarrow vw$ i $wu \Rightarrow wv$, za proizvoljnu reč $w \in X^*$.

Posmatrajmo proizvoljnu saglasnu relaciju ϱ na X^* koja sadrži π i neka važi $w \Rightarrow w'$. To znači da postoje $p, q \in X^*$ takvi da je $w = puq$ i $w' = pvq$ za neke $(u,v) \in \pi \subseteq \varrho$. Zbog saglasnosti relacije ϱ važi da su $(w, w') \in \varrho$, odakle je očito $\Rightarrow$ sadržana u ϱ, čime je tvrđenje (i) dokazano.

(ii) Da bi dokazali tvrđenje (ii) dovoljno je da pokažemo tranzitivnost relacije $\overset{*}{\Rightarrow}$. Posmatrajmo reči $w, w', w'' \in X^*$ takve da je $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$ i $w' \overset{*}{\Rightarrow} w''$. To znači da važi jedan od slučajeva:

(1) $w = w'$ i $w' = w''$, odakle je $w = w''$, što, prema definiciji relacije $\stackrel{*}{\Rightarrow}$, znači da $w \stackrel{*}{\Rightarrow} w''$.

(2) $w = w'$ i postoji niz $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, gde je $n \geqslant 2$, takav da važi

$$w = w' = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w'', \text{ tj. } w \stackrel{*}{\Rightarrow} w''.$$

(3) $w' = w''$ i postoji niz $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, gde je $n \geqslant 2$, takav da važi

$$w = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w' = w'', \text{ pa je } w \stackrel{*}{\Rightarrow} w''.$$

(4) Postoje nizovi $w_1, w_2, \dots, w_n \in V^*$, $w'_1, w'_2, \dots, w'_m \in V^*$ gde su $n, m \geqslant 2$, takvi da važi

$$w = w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w' \text{ i } w' = w'_1 \Rightarrow w'_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w'_m = w'',$$

odnosno

$$w \stackrel{*}{\Rightarrow} w' \stackrel{*}{\Rightarrow} w'' \quad \Leftrightarrow \quad w \stackrel{*}{\Rightarrow} w''.$$

Jasno je da je relacija izvođenja tranzitivna, te je ona najmanja polukongruencija na V^* generisana sa π. Ovim je dokaz završen. □

Dokazujemo sledeću osobinu izvođenja u gramatici:

Teorema 2.3.2. *Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$, neka su $u, v, w \in V^*$ i neka je $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$. Dokazati da tada postoje izvođenja*

$$uw \stackrel{*}{\Rightarrow} vw \quad i \quad wu \stackrel{*}{\Rightarrow} wv \tag{2.4}$$

za koja važi

(i) *) dužine izvođenja (2.4) nisu veće od dužine izvođenja $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$;*

(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenjima (2.4) nalaze se među pravilima koja se koriste u izvođenju $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$.*

Dokaz: Tvrđenja ćemo dokazati indukcijom po dužini izvođenja $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$.

Pretpostavimo najpre da je $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine 1, tj. neposredno izvođenje. To znači da je $u = pu'q$ i $v = pv'q$, za neke $p, q \in V^*$ i neko pravilo $u' \to v'$ iz π. Tada imamo da je $uw = pu'(qw)$, $vw = pv'(qw)$, $wu = (wp)u'q$ i $wv = (wp)v'q$, odakle dobijamo da $uw \Rightarrow vw$ i $wu \Rightarrow wv$.

Uzmimo dalje da je $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine $n > 1$ i da tvrđenje važi za sva izvođenja dužine manje od n. Tada imamo da je $u \stackrel{*}{\Rightarrow} u' \stackrel{*}{\Rightarrow} v$ za neki $u' \in V^*$, pri čemu je $u' \stackrel{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje dužine $n-1$, pa prema napred dokazanom i induktivnoj pretpostavci imamo da je

$$uw \Rightarrow u'w \stackrel{*}{\Rightarrow} vw \quad \text{i} \quad wu \Rightarrow wu' \stackrel{*}{\Rightarrow} wv,$$

pri čemu su izvođenja $u'w \overset{*}{\Rightarrow} vw$ i $wu' \overset{*}{\Rightarrow} wv$ dužine ne veće od $n-1$ i, takođe, izvođenja $uw \Rightarrow u'w$ i $wu \Rightarrow wu'$ su zasnovana na istom pravilu kao i $u \Rightarrow u'$, a izvođenja $u'w \overset{*}{\Rightarrow} vw$ i $wu' \overset{*}{\Rightarrow} wv$ su zasnovana na istim pravilima kao i kao i izvođenja $u' \overset{*}{\Rightarrow} v$. Ovim je dokaz kompletan. □

Videli smo da su pojmovi kompatibilnosti i stabilnosti na relacijama ekvivalencije ekvivalentni. Kako se u dokazu koriste samo refleksivnost i tranzitivnost relacije, ovi pojmovi su ekvivalentni i za kvazi-uređenja. Odavde, prema Lemi 2.3.1. zaključujemo da je relacija izvođenja u gramatici G stabilna. Važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.3. *Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$ i neka za reči $u_1, u_2, \dots u_n$; $v_1, v_2, \dots v_n \in V^*$, $n \in N$, važi*

$$u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i \ \text{ za svaki } \ i \in \{1, 2, \dots n\}. \tag{2.5}$$

Dokazati da tada postoji izvođenje

$$u_1 u_2 \cdots u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 v_2 \cdots v_n \tag{2.6}$$

za koje važi

(i) *dužina izvođenja* (2.6) *nije veća od zbira dužina izvođenja* (2.5)*;*
(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenju* (2.6) *nalaze se među pravilima koja se koriste u izvođenjima* (2.5)*.*

Dokaz: Tvrđenje zadatka biće dokazano indukcijom po n. Označimo sa l_i dužinu izvođenja $u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Jasno je da tvrđenje zadatka važi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $n > 1$ i da tvrđenje važi za sva izvođenja dužine $n-1$. Tada prema indukcijskoj pretpostavci dobijamo da postoji izvođenje

$$u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \overset{*}{\Rightarrow} v_1 v_2 \cdots v_{n-1}, \tag{2.7}$$

čija dužina nije veća od $l_1 + l_2 + \cdots l_{n-1}$ i u kome se koriste samo pravila koja se koriste u izvođenjima $u_i \overset{*}{\Rightarrow} v_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Sa druge strane, prema prethodnom zadatku, imamo da postoje izvođenja

$$u_1 \cdots u_{n-1} u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \cdots v_{n-1} u_n \quad \text{i} \quad v_1 \cdots v_{n-1} u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \cdots v_{n-1} v_n, \tag{2.8}$$

pri čemu dužina prvog ne prelazi dužinu izvođenja (2.7), odnosno ne prelazi $l_1 + l_2 + \cdots l_{n-1}$, a dužina drugog ne prelazi l_n, i takođe, među pravilima koja se koriste u prvom su samo pravila koja se koriste u (2.7), a među pravilima koja se koriste u drugom od izvođenja (2.8) se koriste samo pravila koja se koriste u izvođenju $u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_n$. Dakle, iz (2.8) sledi da postoji izvođenje oblika (2.6) koje zadovoljava uslove teoreme. Ovim je dokaz završen. □

Pokazaćemo da za neke trivijalne jezike postoje gramatike koje ih generišu, odnosno da su to jezici tipa 0.

Teorema 2.3.4. *Prazan jezik $\emptyset$ je generisan formalnom gramatikom.*

Dokaz: Gramatika koja generiše prazan jezik definiše se vrlo jednostavno. Ako je $X = \emptyset$, $V - X = \{\sigma\}$ i jedino pravilo iz π dato sa $\sigma \to \sigma$, jednostavno se pokazuje da je $L(G,\sigma) = L = \emptyset$. □

Teorema 2.3.5. *Alfabet X, posmatran kao jezik u X^*, je generisan formalnom gramatikom.*

Dokaz: Jednostavno se pokazuje da je, za neki alfabet X, jezik $L = X$, generisan gramatikom $G = (V, X, \pi)$, u kojoj je $V - X = \{\sigma\}$ i skup pravila izvođenja je $\pi = \{\sigma \to x \mid x \in X\}$. □

Teorema 2.3.6. *Jezik X^* je generisan formalnom gramatikom.*

Dokaz: Definišimo formalnu gramatiku $G = \{V, X, \pi)$, u kojoj je X dati alfabet, pomoćni simbol $V - X = \{\sigma\}$, a pravila izvođenja data sa

$$\pi = \{\sigma \to \sigma\lambda\} \cup \{\lambda \to x \mid x \in X\} \cup \{\sigma \to e\}.$$

Dokazaćemo da je $X^* = L(G,\sigma)$.

Posmatrajmo proizvoljnu reč $w \in X^*$. Indukcijom po dužini reči w pokazaćemo da $w \in L(G,\sigma)$.

Ako je $w = e$, na osnovu pravila $\sigma \to e$, direktno sledi da $w \in L(G,\sigma)$. Pretpostavimo da za svaku reč dužune $|w| = n-1$ važi da $w \in L(G,\sigma)$. Dokažimo da tvrđenje važi za reč w dužine n. Tada je reč w oblika $w = w'x$, za neki $x \in X$ i $|w'| = n-1$.

Prema induktivnoj pretpostavci i Zadatku 2.3.2. postoji izvođenje $\sigma \Rightarrow^* w'$ i važi

$$\sigma \Rightarrow \sigma\lambda \overset{*}{\Rightarrow} w'\lambda \overset{*}{\Rightarrow} w'x = w,$$

pa je $w \in L(G,\sigma)$, odnosno $X^* \subseteq L(G,\sigma)$.

Indukcijom po dužini izvođenja dokazaćemo obratnu inkluziju. Jedino izvođenje dužine jedan je $\sigma \to e$ i $e \in X^*$, pa tvrđenje važi. Reči dužine jedan (slova iz X) dobijamo samo u sledećem izvođenju dužine tri

$$\sigma \Rightarrow \sigma\lambda \Rightarrow e\lambda \Rightarrow ex = x,$$

za proizvoljan $x \in X$. Pretostavimo da tvrđenje važi za sva izvođenja dužine $n > 3$ (kada dobijamo reči iz X^* dužine $n-2$) i dokažimo da važi ako je izvođenje dužine $n+2$. Neka je $w \in L(G,\sigma)$. Tada je u izvođenju

$$\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \cdots \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n+1} \Rightarrow w_{n+2} = w.$$

prvi korak je sigurno $\sigma \Rightarrow \sigma\lambda$, te je $w_1 = \sigma\lambda$. Kako se niz ne zaustavlja, to u narednom koraku imamo izvođenje $\lambda \Rightarrow x$ i $w_2 = \sigma x$, pri čemu je, očigledno, $x \in X$ poslednje slovo reči w, tj. možemo pisati $w = w'x$ i reč $w' \in L(G,\sigma)$ se može dobiti u $n-2$ koraka polazeći od σ. Primenom indukcijske pretpostavke dobijamo $w' \in X^*$, pa je jasno da i $w = w'x \in X^*$, tj. $L(G,\sigma) \subseteq X^*$. Dakle, X^* je jezik tipa 0 generisan gramatikom $L(G,\sigma)$. □

Pokazaćemo da jezici tipa 0 čine klasu jezika koja je zatvorena za uniju, proizvod i Klinijevu zvezda operaciju.

Teorema 2.3.7. *Ako su L_1 i L_2 jezici generisani formalnim gramatikama, onda je i njihova unija $L_1 \cup L_2$ generisana formalnom gramatikom.*

Dokaz: Pretpostavimo da su L_1 i L_2 jezici generisani gramatikama $G_1 = (V_1, X, \pi_1)$ i $G_2 = (V_2, X, \pi_2)$, tim redom. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su skupovi pomoćnih simbola datih gramatika $L_1 = L(G_1, \sigma_1)$ i $L_2 = L(G_2, \sigma_2)$ disjunktni, tj. $(V_1 - X) \cap (V_2 - X) = \emptyset$. Konstruišimo gramatiku

$$G_U = (V_1 \cup V_2 \cup \{\sigma\}, X, \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1 + \sigma_2\}).$$

Pokazaćemo da je $L(G_U, \sigma) = L = L_1 \cup L_2$.

Posmatrajmo reč $w \in L(G_U, \sigma)$. To znači da postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, pa imamo $\sigma \to \sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w$ ili $\sigma \to \sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} w$, odnosno $w \in L_1$ ili $w \in L_2$, što znači da $w \in L_1 \cup L_2$.

Obratno, neka je $w \in L_1 \cup L_2$. Pretpostavimo da $w \in L_1$. To znači da postoji izvođenje $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w$ i kako, po definiciji, postoji pravilo $\sigma \to \sigma_1$ u gramatici G_U, to imamo $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, to $w \in L$. Ako je $w \in L_2$ dokaz izvodimo analogno. Dakle, $L(G_U, \sigma) = L$. □

Teorema 2.3.8. *Ako su L_1 i L_2 jezici generisani formalnim gramatikama, onda je i njihov proizvod L_1L_2 generisan formalnom gramatikom.*

Dokaz: Neka su L_1 i L_2 jezici generisani, redom, gramatikama $G_1 = (V_1, X, \pi_1)$ i $G_2 = (V_2, X, \pi_2)$. Konstruišimo gramatiku

$$G_P = (V_1 \cup V_2 \cup \{\sigma\}, X, \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1\sigma_2\}).$$

Pokazaćemo da je $L(G_P, \sigma) = L_1L_2 = L$.

Ako je $w \in L_1L_2$. Tada postoje reči $u \in L_1$ i $v \in L_2$ takve da je $w = uv$ i postoje izvođenja $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} u$ i $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} v$. To znači da postoji izvođenje

$$\sigma \to \sigma_1\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} uv = w,$$

pa je $L \subseteq L(G_P, \sigma)$. Sa druge strane, ako je $w \in L(G_P, \sigma)$, onda postoji izvođenje $\sigma \to \sigma_1\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w$ i tada je $w = uv$, za neke reči u, v za koje je $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} u$ i $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} v$. Dakle, $u \in L_1$ i $v \in L_2$, tj. $w \in L$. Ovim smo pokazali da je $L(G_P, \sigma) = L$. □

Teorema 2.3.9. *Ako je L_1 jezik generisan formalnom gramatikom, onda je i L_1^* jezik generisan formalnom gramatikom.*

Dokaz: Neka je jezik L_1 generisan gramatikom $G_1 = (V_1, X, \pi_1)$. Uvedimo novi pomoćni simbol $\lambda \notin V_1 - X$ i konstruišimo gramatiku

$$G = (V_1 \cup \lambda, X, \pi_1 \cup \{\lambda \to \lambda\sigma_1 + e\}.$$

Pokazaćemo da je $L = L_1^* = L(G, \lambda)$.

Proizvoljna reč $w \in L$ je ili prazna reč $w = e$ ili se w može napisati u obliku $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, gde $w_i \in L_1$, za $i = \overline{1,n}$. Ako je $w = e$ u skupu pravila izvođenja imamo $\lambda \to e$, tj. $w \in L(G, \lambda)$. U protivnom, za svaku reč w_i, za $i = \overline{1,n}$ postoji izviđenje $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w_i$. Dakle,

$$\lambda \to \lambda\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_G \lambda w_n \Rightarrow_G \lambda\sigma_1 w_n \overset{*}{\Rightarrow}_G \lambda w_{n-1} w_n \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G$$
$$\Rightarrow_G \lambda w_1 w_2 \ldots w_{n-1} w_n \Rightarrow_G e w_1 w_2 \ldots w_{n-1} w_n = w,$$

odakle zaključujemo $L \subseteq L(G, \lambda)$.

Obratnu inkluziju pokazaćemo indukcijom po dužini izvođenja.

Jedino izvođenje dužine jedan je $\lambda \to e$ i $e \in L$, te u ovom slučaju tvrđenje važi. Pretpostavimo da svaka reč koja se može dobiti iz λ izvođenjem dužine manje ili jednake n pripada jeziku L.

Uzmimo reč $w \in L(G, \lambda)$ koja se može dobiti izvođenjem $\lambda \overset{*}{\Rightarrow}_G w$ dužine $n+1$. Prvi korak ovom izvođenju je $\lambda \to \lambda\sigma$, pa možemo pisati $w = uv$, pri čemu postoje izvođenja $\lambda \overset{*}{\Rightarrow}_G u$ i $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} v$ od kojih ni jedno nije duže od n. Kako je svako pravilo iz π_1 istovremeno pravilo u π, to na obe reči primenjujemo indukcijsku pretpostavku i dobijamo da $u, v \in L$, odnosno da reč $w = uv \in L$. Ovim je dokaz kompletiran. □

2.3.2. *Hijerarhija Čomskog (Chomsky)*

Napred smo definisali jezike tipa 0, tj. jezike generisane nekom formalnom gramatikom.Kalsu svih formalnih gramatika zovemo gramatikama tipa 0.

Formalnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazivamo *kontekstno-zavisnom* gramatikom , ili *gramatikom tipa* 1, ako svako pravilo iz π ima oblik

$$u\alpha v \to upv$$

gde je $\alpha \in V - X$, $p \in V^*$ i $u, v \in (V - X)^*$. Odgovarajuće jezike nazivamo *kontekstno-zavisnim jezicima* ili *jezicima tipa* 1.

Ako je svako pravilo iz π oblika $\alpha \to p$, gde je $\alpha \in V - X$ i $p \in V^*$, tada gramatiku G nazivamo *kontekstno-nezavisnom* gramatikom, *kontekstno-slobodnom* gramatikom ili *gramatikom tipa* 2.

Jezike generisane ovakvim gramatikama nazivamo *kontekstno-nezavisnim jezicima* ili *jezicima tipa* 2.

Osim ovih gramatika, veoma su važne i *regularne gramatike*, koje se ponegde nazivaju i *gramatikama tipa* 3, *desno-linearnim gramatikama* ili *racionalnim gramatikama*. Kod ovih gramatika svako pravilo ima oblik

$$\alpha \to p\beta$$

gde su $\alpha, \beta \in V - X$ i $p \in X^+$, ili $\alpha \to q$, gde je $\alpha \in V - X$ i $q \in X^*$. Jezike generisane ovim gramatikama nazivamo *regularnim jezicima* ili *jezicima tipa* 3.

Ovakvu klasifikaciju gramatika i jezika prvi je napravio američki lingvista Noam Chomsky, i naziva se *hijerarhija Chomsky*.

Ako za $k \in \{0,1,2,3\}$, sa $\mathcal{L}_k$ označimo klasu svih jezika tipa k, i ako sa $\mathcal{L}'_2$ označimo klasu svih jezika iz $\mathcal{L}_2$ koji ne sadrže praznu reč, tada imamo da je

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_0 \ \text{ i } \ \mathcal{L}'_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0.$$

Postoje primeri koji potvrđuju da su prethodne inkluzije stroge.

Za dve gramatike G_1 i G_2 kažemo da su *ekvivalentne* ako generišu isti jezik, tj. ako je $L(G_1, \sigma_1) = L(G_2, \sigma_2)$.

Napomenimo da prilikom navođenja skupa pravila gramatike često koristimo dogovor prema kome, ukoliko se u skupu pravila gramatike nalazi niz pravila oblika

$$u \to v_1, u \to v_2, \ldots, u \to v_n,$$

onda taj niz zamenjujemo jednostavnijim izrazom

$$u \to v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Teorema 2.3.10. *Postoji neprebrojivo mnogo jezika nad alfabetom X koji nisu generisani gramatikom.*

Dokaz: Skup svih jezika nad alfabetom X je neprebrojiv, tj.

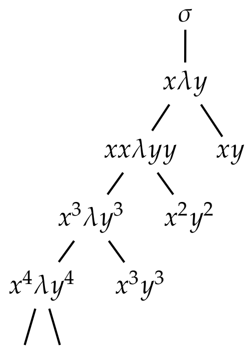
$$|\{L \mid L \subseteq X^*\}| = |\mathcal{P}(X^*)| = 2^{\aleph_0}.$$

Sa druge strane svaka gramatika se zadaje sa konačno mnogo simbola, što znači da je skup svih gramatika prebrojiv skup. Tako ostaje neprebrojivo jezika koji nisu generisani gramatikama. □

Primer 2.3.11. Neka je $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{x, y\}$, $V - X = \{\sigma, \lambda\}$ i neka su pravila iz π data sa $\sigma \to x\lambda y$, $\lambda \to x\lambda y$, $\lambda \to e$.

Primetimo da je G konteksno-nezavisna gramatika. Pokazaćemo da je $L(G, \sigma) = \{x^n y^n \mid n \in N\}$.

Izvođenja za datu gramatiku možemo predstaviti stablom



Za proizvoljnu reč $w = x^n y^n$ postoji izvođenje

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow xx\lambda yy \overset{*}{\Rightarrow} x^n \lambda y^n \Rightarrow x^n y^n,$$

što znači da je $\{x^n y^n \mid n \in N\} \subseteq L(G,\sigma)$.

Sa druge strane, neka je reč $w \in L(G,\sigma)$, tj. neka postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$. To znači da postoji niz izvođenja

$$\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n+1} = w,$$

za neke $w_1, w_2, \cdots w_{n+1} \in V^*$ i $n \geqslant 2$. Kako je pravilo $\sigma \to x\lambda y$ jedino koje sadrži σ sa leve strane, to dobijamo da je $w_1 = x\lambda y$. Dalje, pravilo $\lambda \to x\lambda y$ je jedino previlo u kome se λ javlja sa leve strane i sadrži pomomoćni simbol sa desne strane, pa je $w_2 = x^2\lambda y^2$. Nastavljajući postupak zaključujemo da je $w_{n-1} = x^{n-1}\lambda y^{n-1}$. Jasno da je, odatle, $w_n = x^n \lambda y^n$, odnosno $w_{n+1} = x^n y^n$, jer je $\lambda \to e$ jedino pravilo koje ne sadrži pomoćni simbol sa desne strane.

Time smo dokazali da važi $L(G,\sigma) = \{x^n y^n | n \in N\}$.

2.4. Stabla izvođenja i parsirajuća stabla

U ovoj sekciji ćemo izvođenja u kontekstno-nezavisnih gramatikama predstaviti grafovima ili, preciznije, stablima.

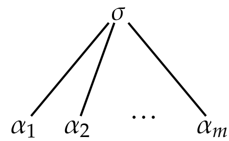
2.4.1. Stabla izvođenja

Neka je data kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$, $\sigma \in V - X$ i izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u G, gde je $w \in V^*$. Tada tom izvođenju odgovara stablo D označeno elementima iz V koje definišemo na sledeći način:

Neka je izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ dato sa:

$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n = w.$

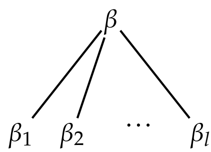
Koren stabla D označen je sa σ. Ako se u izvođenju $\sigma \Rightarrow w_1$ koristi pravilo oblika $\sigma \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, gde su $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m \in V$, tada stablo izvođenja $\sigma \Rightarrow w_1$, u oznaci D_1, definišemo sa:



Dalje, neka je definisano stablo izvođenja

$$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_k,$$

gde je $1 \leqslant k < n$, koje ćemo označiti sa D_k. Pretpostavimo da je neposredno izvođenje $w_k \Rightarrow w_{k+1}$ zasnovano na primeni pravila oblika $\beta \to \beta_1\beta_2\cdots\beta_l$, gde su $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l \in V$. To znači da se jedno od pojavljivanja simbola β u reči w_k zamenjuje sa $\beta_1\beta_2\cdots\beta_l$. Kako tom pojavljivanju simbola β u w_k odgovara jedno određeno pojavljivanje tog simbola kao oznake lista u D_k, to ćemo stablo D_{k+1} dobiti na taj način što ćemo tom čvoru u D_k prikačiti stablo



Na ovaj način smo induktivno definisali niz stabala $D_1,D_2,\ldots,D_n$. Stablo D_n nazivamo *stablom izvođenja* $\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n = w$.

Primetimo da, koristeći grafičko predstavljanje stabla D, grane koje polaze iz proizvoljnog čvora stabla D možemo urediti uzimajući, na primer, njihov redosled sa leva na desno. Slično možemo urediti i puteve u stablu D koji polaze iz korena. Naime, za svaka dva takva puta p_1 i p_2 postoji čvor a stabla D u kome se oni razdvajaju, odnosno račvaju, pa ako se grana puta p_1 koja izlazi iz a nalazi levo od odgovarajuće grane puta p_2, tada ćemo reći da se put p_1 nalazi levo od puta p_2.

Konačno, za dva lista l_1 i l_2 stabla D ćemo reći da se list l_1 nalazi levo od l_2 ako se put koji ide od korena do l_1 nalazi levo od puta koji ide od korena do l_2.

Ako kod stabla D izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w \in V^*$, čitamo oznake listova sa leva na desno, pročitaćemo upravo reč w, za koju kažemo da je *rezultat stabla D*.

Primer 2.4.1. Neka je data gramatika $G = (V,X,\pi)$, u kojoj je $V - X = \{\sigma,\lambda,\mu\}$, $X = \{x,y,z\}$ i pravila su

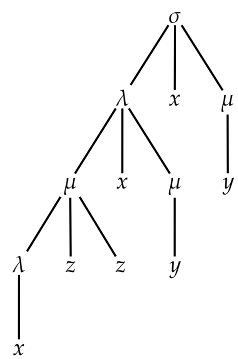
$$\sigma \to \lambda x\mu, \quad \lambda \to \mu x\mu, \quad \mu \to \lambda z^2, \quad \mu \to y, \quad \lambda \to x.$$

Ispitatićemo da li reč $xz^2(xy)^2$ pripada jeziku $L = L(G,\sigma)$.

Primetimo da postji stablo izvođenja, prikazano na slici, koje odgovara izvođenju

$$\sigma \Rightarrow \lambda x\mu \Rightarrow \mu x\mu x\mu \Rightarrow \lambda z^2 x\mu x\mu \Rightarrow \lambda z^2 xyx\mu \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xz^2 xyx\mu \Rightarrow xz^2 xyxy = xz^2(xy)^2,$$

jer čitanjem oznaka listova, sa leva na desno, dobijamo reč $xzzxyxy$. Ovim smo dokazali da je $xz^2(xy)^2 \in L(G,\sigma)$.



Slika 2.1 Stablo izvođenja

2.4.2. *Parsirajuća stabla (stabla raščlanjenja)*

Parsiranje (*raščlanjenje*) je jedan od najvažnijih zadataka u dizajnu kompajlera. To je postupak formiranja tzv. parsirajućeg stabla za datu reč u, koje se dobija iz pravila izvođenja kontekstno-nezavisne gramatike. Ima više tehnika parsiranja. Mi ćemo se zadržati na najopštijoj, ali ne uvek najefikasnijoj, *top-down* metodi parsiranja.

Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika. Reč $u \in V^*$ nazivamo *rečeničnom formom* u gramatici G ako postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u$, a *levom rečeničnom formom* ako postoji krajnje-levo izvođenje od σ do u.

Za svaku kontekstno-nezavisnu gramatiku G definisaćemo *krajnje-levi graf* $g(G)$ na sledeći način:

(a) Čvorovi u $g(G)$ su leve rečenične forme u gramatici G;

(b) Za dve leve rečenične forme u_1 i u_2, ako u π postiji izvođenje $\alpha \to u$, takvo da je $u_1 = v\alpha w$ i $u_2 = vuw$, za neki $v \in X^*$ i $w \in V^*$, onda postoji usmerena grana iz u_1 u u_2.

Ako leve rečenične forme u gramatici G imaju jedinstveno krajnje-levo izvođenje iz početnog simbola σ, tada je $g(G)$ stablo čiji je koren početni simbol σ.

Parsirajuće stablo reči $u \in X^*$ možemo odrediti jednostavnim pretraživanjem grafa $g(G)$.

Kako graf $g(G)$ može biti beskonačan, to nije sigurno da će se algoritam pretraživanja zaustaviti za sve ulazne reči.

Međutim, ukoliko kontekstno-nezavisnu gramatiku svedemo na gramatiku bez e-pravila pretraživanje će se sigurno zaustaviti. Dužina rečeničnih formi se, u ovom slučaju, ne smanjuje tokom izvođenja, tako da određivanje izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u$ u $g(G)$ jednostavno možemo ograničiti na podgraf u kome dužina puteva ne prelazi $|u|$.

Kontekstno-nezavisna gramatika je *dvoznačna* ako postoji reč $u \in X^*$ koja ima dva parsirajuća stabla. Sintaksička struktura reči, koju daje parsirajuće stablo G indukuje i semantičku strukturu (značenje) te reči u $L(G)$. Kada postoje dva parsirajuća stabla, teško je odrediti koja je semantička struktura korektna. Zato uvek težimo konstrukciji jednoznačne kontekstno-nezavisne gramatike.

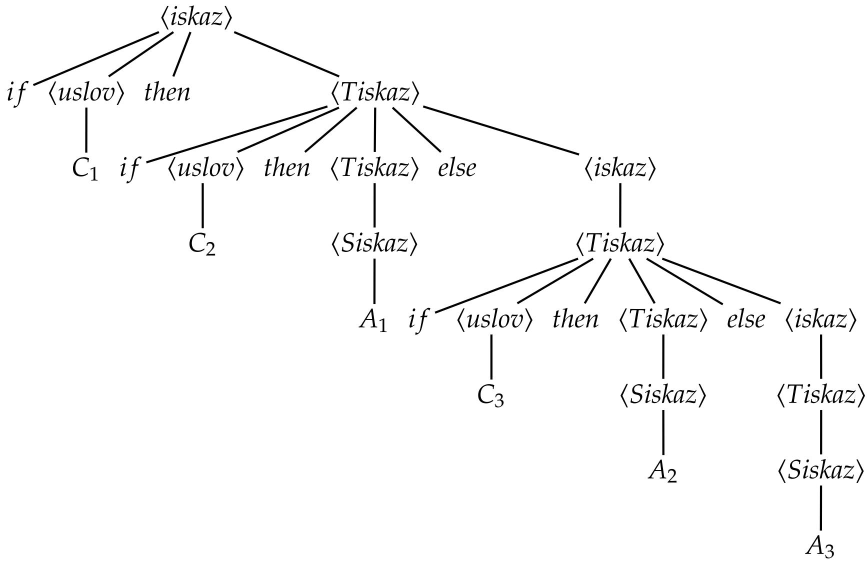
Primer 2.4.2. Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika u kojoj su simboli oblika $\langle \cdots \rangle$ pomoćni simboli, dok su ostali simboli terminalni, a pravila izvođenja su:

$$\begin{aligned}
\langle iskaz\rangle &\to if\ \langle uslov\rangle\ then\ \langle Tiskaz\rangle + \langle Tiskaz\rangle \\
\langle Tiskaz\rangle &\to if\ \langle uslov\rangle\ then\ \langle Tiskaz\rangle\ else\ \langle iskaz\rangle + \langle Siskaz\rangle \\
\langle uslov\rangle &\to C_1 + C_2 + C_3 \\
\langle Siskaz\rangle &\to A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Naći ćemo dva različita parsirajuća stabla za rečenicu:

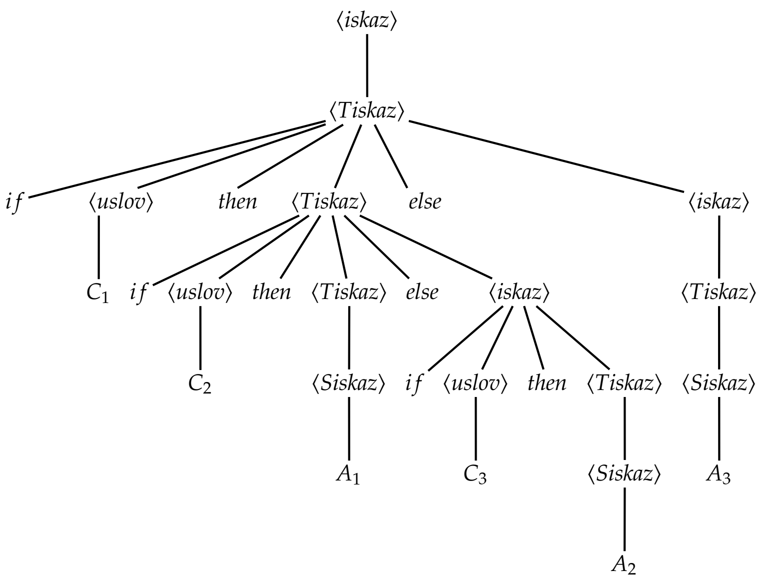
$$\text{if } C_1 \text{ then if } C_2 \text{ then } A_1 \text{ else if } C_3 \text{ then } A_2 \text{ else } A_3.$$

Primetićemo da iz prvog parsirajućeg stabla ne možemo odrediti šta se dešava ako uslov C_1 ne važi. Očigledno je da se ne dobija ni jedan od jednostavnih iskaza (Siskaz) A_1, A_2 ili A_3.



U drugom parsirajućem stablu, u slučaju kada uslov C_1 ne važi, dobijamo jednostavan iskaz A_3.

Dakle, data gramatika je dvoznačna i vidimo da je teško odrediti značenje tražene rečenice iz dva parsirajuća stabla. Zato je poželjno konstruisati jednoznačnu gramatiku uvek kada je to moguće.



2.5. Zadaci

2.5.1. Rešiti jednačinu $u011 = 011u$ nad alfabetom $\{0,1\}$, odnosno, naći skup svih reči $u \in \{0,1\}^*$ koje zadovoljavaju datu jednačinu.

2.5.2. Za sve jezike L_1 i L_2 nad alfabetom X važi $(L_1^* L_2)^* L_1^* = (L_1 + L_2)^*$. Dokazati.

2.5.3. Urediti leksikografski sledeće binarne reči:

$$u = 01000001, \ \ v = 00110111, \ \ w = 00111111 \,.$$

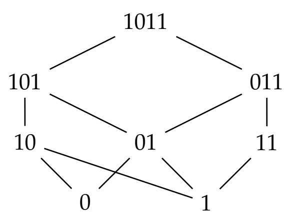
2.5.4. Počev od najmanjeg, pa do najvećeg, leksikografski urediti sledeće binarne reči:

$A = 01001011$, $B = 00101010$, $C = 01100100$,
$D = 01101111$, $E = 01000101$.

2.5.5. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na skupu binarnih reči

$$X = \{0,1,10,01,11,101,011,1011\}$$

zadato sledećim Haseovim dijagramom.



Koje od sledećih uređenja ima $\preccurlyeq$ kao svoju restrikciju na skupu X:

(a) prefiks uređenje
(b) leksikografsko uređenje
(c) faktor uređenje
(d) alfabetsko uređenje
(e) sufiks uređenje

2.5.6. Neka je data gramatika $G = (V,X,\pi)$, gde je $X = \{x\}$, $V - X = \{\sigma\}$ i pravila su data sa $\sigma \to x\sigma$, $\sigma \to e$. Tada je $L(G,\sigma) = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}^0\}$. Dokazati.

2.5.7. Neka je data gramatika $G = (V,X,\pi)$, gde je $X = \{x,y\}$, skup pomoćnih simbola $V - X = \{\sigma,\lambda,\mu\}$ i pravila su data sa

$$\sigma \to x\sigma, \ \ \sigma \to y\sigma, \ \ \sigma \to x\lambda, \ \ \lambda \to y\mu, \ \ \mu \to e.$$

Dokazati da je $L(G,\sigma) = X^* xy$.

2.5.8. Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{a, b\}$, $V - X = \{\sigma\}$ i pravila iz π su data sa $\sigma \to a\sigma a$, $\sigma \to b\sigma b$, $\sigma \to a$, $\sigma \to b$, $\sigma \to e$. Dokazati da je tada $L(G, \sigma)$ skup svih palindroma (reči koje su jednake svojim reverznim rečima).

2.5.9. Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{a, b\}$, $V - X = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ i pravila iz π su data sa $\sigma \to a\beta$, $\sigma \to b\alpha\sigma$, $\sigma \to a\beta\sigma$, $\alpha \to b\alpha\alpha$, $\alpha \to a$, $\beta \to a\beta\beta$, $\beta \to b$. Naći jezik $L(G, \sigma)$ generisan ovom gramatikom.

2.5.10. Neka je data gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{a, b\}$, skup pomoćnih simbola $V - X = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ i neka su pravila iz π data sa $\sigma \to \alpha\beta$, $\alpha \to a\alpha$, $\alpha \to a$, $\beta \to b\beta$, $a\beta \to b$. Dokazati da ova gramatika generiše jezik $L(G, \sigma) = \{a^n b^m \,|\, n, m \geqslant 1\}$.

2.5.11. Data je gramatika $G = (V, X, \pi)$, gde je $X = \{a, b\}$, $V - X = \{\sigma, \lambda\}$ i pravila iz π su $\sigma \to \lambda\lambda$, $\lambda \to \lambda\lambda\lambda$, $\lambda \to a$, $\lambda \to b\lambda$, $\lambda \to \lambda b$.

(a) Naći jezik $L(G, \sigma)$;
(b) Koje se reči jezika $L(G, \sigma)$ mogu dobiti izvođenjima koja imaju četiri ili više koraka?
(c) Za bilo koje $m, n, k \geqslant 0$ opisati izvođenja, u gramatici G, reči $b^m a b^n a b^k$.

2.5.12. Konstruisati formalnu gramatiku kojom je moguće opisati svaki aritmetički izraz sa tri promenljive, koji može da sadrži zagrade, pri čemu je bitan prioritet operacija.

2.5.13. Konstruisati kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generiše jezik

$$L = \{u \in \{a, b\}^* \mid 2|u|_a = |u|_b\}.$$

2.5.14. Konstruisati kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generiše jezik

$$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m + n = p + q\}.$$

2.5.15. Odrediti da li reč *abaca* pripada jeziku $L(G, \sigma)$, ako je $G = (V, X, \pi)$ data gramatika , u kojoj je $V - X = \{\sigma\}$, $X = \{a, b, c\}$, a pravila izvođenja su

$$\sigma \to \sigma b \sigma, \quad \sigma \to \sigma c \sigma, \quad \sigma \to a.$$

2.5.16. (a) Dokazati da je kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ aritmetičkih izraza sa dve promenljive $X = \{a, b\}$ i pravilima izvođenja

$$\sigma \to \sigma + \sigma,\;\; \sigma \to \sigma - \sigma,\;\; \sigma \to \sigma \cdot \sigma,\;\; \sigma \to \sigma : \sigma,\;\; \sigma \to (\sigma),\;\; \sigma \to a + b,$$

dvoznačna gramatika.

(b) Naći ekvivalentnu jednoznačnu gramatiku jezika $L(G)$.

Glava 3
Deterministički automati

Treća glava je posvećena determinističkim konačnim automatima i jezicima koji mogu biti raspoznati ovim automatima. Predstavljeni su algoritmi za konstrukciju minimalnog automata datog jezika i minimizaciju datog automata. Takođe se govori o raspoznavanju jezika monoidom, monoidu prelaza automata i sintaksičkom monoidu i predstavljeni su efektivni postupci za konstrukciju ovih monoida.

3.1. Osnovni koncepti

Mašine za obradu informacija transformišu ulazne signale u izlaze. Uglavnom se, kada je o ovim mašinama reč, za njih vezuju dva alfabeta: ulazni alfabet za komunikaciju sa mašinom i izlazni alfabet za dobijanje odgovora. Na primer, mašina prihvata, na ulazu, rečenice na engleskom jeziku, a izlazi su odgovarajuće rečenice na ruskom.

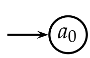
Postoje, međutim, mašine za obradu informacija koje reči procesiraju na drugi način i o njima će biti reči u ovoj glavi. Kod ovakvih mašina svaka reč ulaznog alfabeta uzrokuje jedan od dva izlazna signala: ″da″ ili ″ne″. Kaže se da mašina *prihvata* ulazne reči koje dovode do izlaza ″da″ i da *odbija* one koje uzrokuju izlaz ″ne″. Na taj način ulazni alfabet se deli na dva disjunktna podskupa: podskup ″da″ koji se naziva jezik *raspoznatljiv* (*prihvaćen*) ovom mašinom i podskup ″ne″ jezik koji mašina *ne raspoznaje* (*ne prihvata*).

Naš zadatak je da izgradimo matematičke modele ovih mašina koji bi činili posebnu klasu i koje ćemo nazivati *deterministički konačni automati*.

Konačan deterministrički automat je jednostavan, apstraktan matematički model mašine. Intuitivno, automat čita ulaznu reč slovo po slovo, po jedno slovo u diskretnoj jedinici vremena, i pošto je ulaz potpuno pročitan odlučuje o tome da li da ga prihvati ili odbije.

Princip rada ovog automata je sledeći:

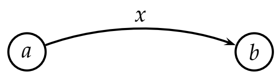
Na početku rada, automat se nalazi u jednom stanju a_0, koje nazivamo *inicijalno stanje*. Inicijalno stanje ćemo grafički označavati ulazećom strelicom na sledeći način:



Prelaz iz jednog stanja u drugo, pod uticajem nekog ulaznog slova, određen je *funkcijom prelaza*.

Najprirodniji način za predstavljanje automata njihovo zadavanje pomoću grafova prelaza.

Graf prelaza automata je označen, usmereni graf čiji su čvorovi stanja automata, a oznake grana su slova ulaznog alfabeta. Iz stanja $a \in A$, pod uticajem ulaznog simbola $x \in X$, automat prelazi u stanje b, pri čemu graf prelaza ima granu (a,b) koja je označena sa x.



Pored fiksiranja inicijalnog stanja $a_0 \in A$, unapred ćemo fiksirati i skup stanja $\tau^A \subseteq A$, koji nazivamo skup *finalnih stanja* (*završnih stanja* ili *terminalnih stanja*). Završna stanja označavaćemo grafički duplim kružićima, na sledeći način:

Formalno se *deterministički konačan automat* može definisati kao uređena četvorka $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ u kojoj je

A – konačan, neprazan skup stanja;
X – ulazni alfabet;
$\delta^A : A \times X \to A$ – funkcija prelaza;
a_0 – inicijalno stanje;
$\tau^A \subseteq A$ – neprazan skup *završnih* (*finalnih*) stanja.

Kako je δ^A funkcija iz $A \times X$ u A, to postoji tačno jedno stanje $b \in A$ tako da je $b = \delta^A(a,x)$, odnosno postoji tačno jedno stanje u koje se sa x prelazi iz a.

Konačni automati se, takođe, mogu predstavljati takozvanim *tablicama prelaza*.

Tablica prelaza automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ je pravougaona tablica sa vrstama koje odgovaraju svakom ulaznom simbolu i kolonama koje odgovaraju stanjima.

Na mestu u tablici koje odgovara vrsti određenoj ulaznim slovom $x \in X$ i koloni određenoj stanjem $a \in A$ upisuje se stanje $\delta^A(a,x)$.

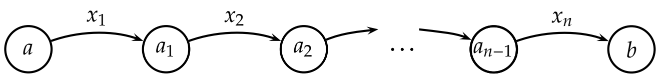
$$
\begin{array}{c|ccc}
A & \ldots & a & \ldots \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
x & \ldots & \delta^A(a,x) & \ldots \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Automat prelazi iz stanja u stanje čitajući reč ulaznog alfabeta, slovo po slovo. Dakle, rad automata se ne sastoji samo u jednom prelazu iz stanja u stanje, pod uticajem jednog ulaznog signala, već iz niza uzastopnih prelaza, pod dejstvom niza uzastopnih ulaznih signala. Zato je prirodno funkciju prelaza δ^A proširti uvođenjem preslikavanja koje stanje $a \in A$, pod uticajem niza ulaznih simbola $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in X^*$, vodi u stanje $b \in A$. Kako ne postoji opasnost od zabune, proširenu funkciju prelaza, koja je jednoznačno određena funkcijom prelaza, označavaćemo na isti način sa δ^A.

Naime, ako je ulazna reč $u \in X^*$ predstavljena u obliku $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ slova ulaznog alfabeta, i ako su $a, b \in A$ i

$$\delta^A(a, x_1) = a_1,\ \delta^A(a_1, x_2) = a_2,\ \dots,\ \delta^A(a_{n-1}, x_n) = b,$$

onda kažemo da automat A pod uticajem ulazne reči u prelazi iz stanja a u stanje b preko niza *međustanja* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. U tom slučaju je $b = \delta^A(a, u)$ i to se grafički može predstaviti sa



Dakle, funkciju prelaza δ^A sa domena $A \times X$ proširujemo na domen $A \times X^*$, pri čemu se funkcija prelaza $\delta^A : A \times X^* \to A$ induktivno definiše na sledeći način:

(1) Za stanje $a \in A$ i praznu reč $e \in X^*$ je $\delta^A(a, e) = a$;

(2) Za stanje $a \in A$ i ulazno slovo $x \in X$ je proširena funkcija prelaza jednaka funkciji prelaza $\delta^A(a, x)$;

(3) Za stanje $a \in A$, svaku reč $u \in X^*$ i svako slovo $x \in X$, ako je definisano $\delta^A(a, u)$, važi

$$\delta^A(a, ux) = \delta^A(\delta^A(a, u), x).$$

Drugim rečima, ova definicija kaže sledeće:

– Značenje uslova (1) je da se, kada na ulaz automata dođe prazna ulazna reč (prazan signal), u automatu ništa ne dešava.
  Dakle, prazna ulazna reč nema nikakav efekat na rad automata.
– Uslov (2) kaže da se proširenje funkcije prelaza poklapa sa funkcijom prelaza na skupu $A \times X$.
– Konačno, uslov (3) kaže da, ako ulazna reč u prevodi automat iz stanja a u stanje $b = \delta^A(a, u)$ i ako ulazno slovo x prevodi automat iz stanja b u stanje $c = \delta^A(b, x)$, onda ulazna reč ux prevodi automat iz stanja a u stanje c, odnosno $c = \delta^A(a, ux)$.

Za proizvoljne reči $u, v \in X^*$ se jednostavno, indukcijom po dužini reči v, pokazuje da važi

$$\delta^A(a, uv) = \delta^A(\delta^A(a, u), v).$$

Za stanje a automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ kažemo da je *dostižno stanje* ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je $\delta^A(a_0, u) = a$. U protivnom, $a \in A$ je *nedostižno stanje*.

Jasno je da je stanje $a \in A$ dostižno ako se do njega može stići iz inicijalnog stanja, odnosno, ako u grafu prelaza automata postoji put iz inicijalnog stanja a_0 u stanje a.

Automat čija su sva stanja dostižna naziva se *dostižan automat*.

Dostižan deo datog automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ definiše se kao automat $\mathcal{A}_d = (A_d, X, \delta^{A_d}, a_0, \tau^{A_d})$ gde je:

A_d je skup svih dostižnih stanja automata A;
$\delta^{A_d} : A_d \times X^* \to A_d$ je restrikcija preslikavanja δ na $A_d \times X^*$;
$a_0 \in A_d$, jer je inicijalno stanje automata uvek je dostižno;
$\tau^{A_d} = \tau \cap A_d$, tj. τ^{A_d} je skup svih dostižnih završnih stanja od A.

Dokazaćemo da je skup dostižnih stanja automata $\mathcal{A}$ zatvoren za funkciju prelaza.

Za proizvoljno stanje $a \in A_d$ imamo da je $a = \delta^A(a_0, u) = \delta^{A_d}(a_0, u)$, za neku reč $u \in X^*$ i za $v \in X^*$ važi

$$\delta^A(a, v) = \delta^A(\delta^{A_d}(a_0, u), v) = \delta^A(a_0, uv) = \delta^{A_d}(a_0, uv),$$

što znači da je $\delta^A(a, v) \in A_d$.

Dakle, δ^{A_d} slika $A_d \times X^*$ u A_d, te je opravdana prethodna definicija automata $\mathcal{A}_d$. Jasno je da je dostižni deo automata dostižan automat.

Koja je svrha razmatranja dostižnog dela automata?

Kako svaki automat počinje svoj rad iz inicijalnog stanja, u daljem radu će se uvek nalaziti u dostižnom stanju. Prema tome, nedostižna stanja ni na koji način ne utiču na rad automata. Zbog toga ih možemo slobodno odbaciti, zajedno sa prelazima koji polaze iz njih ili se završavaju u njima.

Odbacivanjem nedostižnih stanja ništa ne menjamo u radu automata, a pri tome automat pojednostavljujemo, smanjujući mu broj stanja.

Efektivan postupak za nalaženje dostižnog dela $\mathcal{A}_d$ automata $\mathcal{A}$ predstavljen je sledećim algoritmom za nalaženje stabla prelaza datog automata.

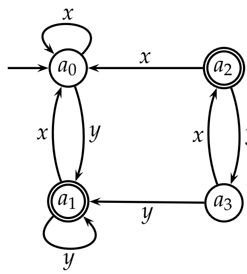
Algoritam 3.1.1. **(***Stablo prelaza automata* $\mathcal{A}$**)** Ulaz ovog algoritma je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$. Postupak se sastoji u konstrukciji stabla prelaza automata $\mathcal{A}$. Stablo se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je a_0, i mi stavljamo $T_0 = \{a_0\}$.
(A2) Nakon i-tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeno ili sa 'zatvoren' ili sa 'nezatvoren'. Značenje ova dva izraza biće razjašnjeno u nastavku.
(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} dograđivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoren list a koji se pojavljuje u T_i i svako $x \in X$, mi dodajemo čvor $\delta^A(a, x)$ i granu iz a u $\delta^A(a, x)$ označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je stanje $\delta^A(a, x)$ neko stanje koje

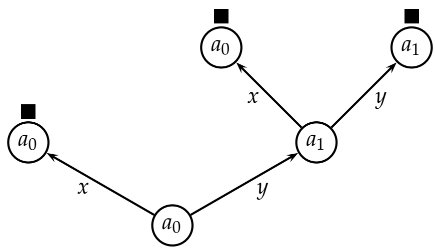
je već dobijeno i ako je to tačno, onda kažemo da je ovaj čvor ′zatvoren′ i označavamo ga sa ■. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo prelaza konstruisano, njegovi unutrašnji čvorovi odgovaraju dostižnim stanjima automata.

Primer 3.1.2. Neka je automat $\mathcal{A}$ dat sledećim grafom:



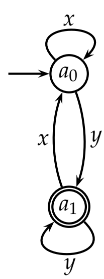
Primenom prethodnog algoritma dobijamo stablo izvođenja automata $\mathcal{A}$:



Dostižna stanja ovog automata su a_0 i a_1, jer je

$$a_0 = \delta^A(a_0, e) \;\text{ i }\; a_1 = \delta^A(a_0, y)$$

Stanja a_2 i a_3 su nedostižna, jer je očigledno da se ni do jednog od njih ne može stići iz inicijalnog stanja a_0. Dostižni deo $\mathcal{A}_d$ ima samo dva stanja i može se predstaviti na sledeći način:

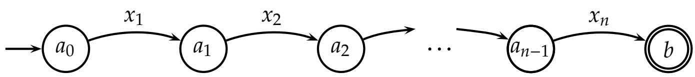


Kao što smo videli, automat prelazi iz stanja u stanje čitajući reč ulaznog alfabeta, slovo po slovo. U zavisnosti od toga da li se posle toga automat našao u stanju koje pripada datom skupu završnih stanja ili ne, on *prihvata* (*prepoznaje*, *raspoznaje*), odnosno *ne prihvata* (*ne prepoznaje*, *ne raspoznaje*) tu reč.

Označimo sa $[\![\mathcal{A}]\!]$ skup svih reči ulaznog alfabeta koje su prihvaćene konačnim determinističkim automatom $\mathcal{A}$. Skup $[\![\mathcal{A}]\!]$ naziva se *jezik automata* $\mathcal{A}$ (ili jezik raspoznatljiv automatom $\mathcal{A}$). Tada kažemo da automat $\mathcal{A}$ *raspoznaje* jezik $[\![\mathcal{A}]\!]$. Formalno $[\![\mathcal{A}]\!]$ definišemo sa

$$[\![\mathcal{A}]\!] = \{u \in X^* \mid \delta^A(a_0, u) \in \tau^A\} \tag{3.1}$$

To ćemo grafički predstaviti sa:



Teorema 3.1.3. *Za proizvoljan automat* $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ *i njegov dostižni deo* $\mathcal{A}_d$ *je* $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{A}_d]\!]$.

Dokaz: Za proizvoljnu reč $u \in [\![\mathcal{A}_d]\!]$ postoji stanje $a \in A_d$ tako da je $\delta^{A_d}(a_0, u) = a \in \tau^{A_d}$. Dakle, $\delta^A(a_0, u) = a \in \tau^A$ što znači da je $u \in [\![\mathcal{A}]\!]$, pa važi $[\![\mathcal{A}_d]\!] \subseteq [\![\mathcal{A}]\!]$.

Obratno, neka je $u \in [\![\mathcal{A}]\!]$. To znači da je $\delta^A(a_0, u) = a \in \tau$, i jasno je da stanje a i sva međustanja u prelazu iz a_0 u a pod dejstvom ulazne reči u jesu dostižna stanja. Prema tome, $\delta^{A_d}(a_0, u) = \delta^A(a_0, u) = a \in \tau^A \cap A_d = \tau^{A_d}$, odakle sledi da reč $u \in [\![\mathcal{A}_d]\!]$, odnosno da važi $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{A}_d]\!]$. Prema tome, $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{A}_d]\!]$. □

3.2. Kongruencije i homomorfizmi determinističkih automata

Kada se bavimo dizajniranjem automata radi njihovih praktičnih primena, srećemo se sa dva osnovna problema:

Da li za dati jezik postoji konačan automat koji ga raspoznaje?
Kako konstruisati automat sa što je moguće manje stanja koji raspoznaje dati jezik?

Prvi problem je važan jer u praktičnim primenama automata učestvuju samo konačni automati. Beskonačni automati imaju samo teoretski značaj, i izučavaju se iz metodoloških razloga, jer je lakše raditi u teoriji u kojoj nismo sputani uslovom konačnosti skupa stanja automata.

Drugi problem je bitan iz razloga što veći broj stanja automata znači

– veći broj hardverskih komponenti, kada se radi o primeni automata u dizajniranju hardvera;
– glomaznije i sporije programe, kada se radi o primeni automata u dizajniranju softvera.

Podsetimo da je osnovni smisao upotrebe relacija ekvivalencija upravo u redukciji broja elemenata iz A formiranjem količničkog (faktor) skupa sa manjim brojem elemenata. Da bi, pri tome, elementi faktor skupa sačuvali osnovna svojstva elemenata iz A, relacija ekvivalencije treba da zadovolji još neke uslove.

Ako A predstavlja neku algebarsku strukturu, odnosno, ako je na A definisan izvestan sistem operacija, nije dovoljno da ϱ bude samo relacija ekvivalencije, jer definisane operacije, na prirodan način, treba preneti na $A/\!\!/\varrho$. Iz tog razloga potrebno je da relacija ekvivalencije ϱ bude *saglasna* sa operacijama na A, i takva relacija ekvivalencije naziva se *kongruencija*.

Ako deterministički automat posmatramo kao algebarsku strukturu sa konstantama (inicijalno stanje i završna stanja), i unarnom operacijom (funkcija prelaza) možemo kongruenciju na automatu definisati na sledeći način:

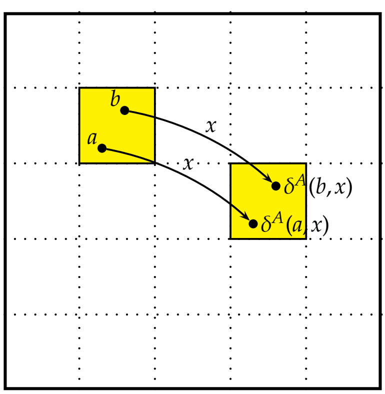
Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ i relacija ekvivalencije ϱ na skupu stanja A tog automata.

Relacija ekvivalencije ϱ je *kongruencija* na automatu A ako je *saglasna* sa funkcijom prelaza δ^A, pri čemu završna stanja mogu biti u relaciji samo sa završnim stanjima, tj. ako, za proizvoljna stanja $a, b \in A$, važi sledeće:

ako je $a \in \tau^A$ i $b \notin \tau^A$ uvek važi $(a,b) \notin \varrho$;
iz $(a,b) \in \varrho$ sledi $(\delta^A(a,x), \delta^A(b,x)) \in \varrho$, za svaki $x \in X$.

Indukcijom se lako dokazuje da je relacija kongruencije ϱ saglasna sa proširenom funkcijom prelaza, odnosno da, za proizvoljna stanja $a, b \in A$, takva da su $(a,b) \in \varrho$ sledi da su $(\delta^A(a,u), \delta^A(b,u)) \in \varrho$, za sve reči $u \in X^*$.

Značenje saglasnosti možemo objasniti grafički na sledeći način:



Dakle, relacija ekvivalencije ϱ je saglasna sa funkcijom prelaza ako za proizvoljna stanja a i b iz iste ϱ-klase i svi njihovi prelazi $\delta^A(a,x)$ i $\delta^A(b,x)$ pripadaju istoj ϱ-klasi.

Neka je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$.

Definišimo funkciju $\delta^{A/\!\!/\varrho} : (A/\!\!/\varrho) \times X^* \to A/\!\!/\varrho$ na sledeći način:

$$\delta^{A/\!\!/\varrho}(\varrho_a, x) = \varrho_{\delta^A(a,x)} \tag{3.2}$$

za svako $a \in A$ i $x \in X$. Korišćenjem činjenice da je ϱ kongruencija na $\mathcal{A}$, lako se proverava da vrednosti preslikavanja $\delta^{A/\!/\varrho}$ ne zavise od izbora predstavnika klasa, dok se indukcijom po dužini reči $u \in X^*$ pokazuje se da je funkcija prelaza korektno definisana, tj. da važi $\delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_a, u) = \varrho_{\delta^A(a,u)}$.

Zaista, ako je u slovo ulaznog alfabeta imamo (3.2), pa jednakost važi. Pretpostavimo da, za reč $v \in X^*$ dužine $|v| = n-1$, imamo $\delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_a, v) = \varrho_{\delta^A(a,v)}$. Za reč $u = vx$ dobijamo

$$\begin{aligned}\delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_a, u) &= \delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_a, vx) = \delta^{A/\!/\varrho}(\delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_a, v), x) = \delta^{A/\!/\varrho}(\varrho_{\delta^A(a,v)}, x)\\ &= \varrho_{\delta^A(\delta^A(a,v),x)} = \varrho_{\delta^A(a,vx)} = \varrho_{\delta^A(a,u)},\end{aligned}$$

što znači da je funkcija $\delta^{A/\varrho}$ dobro definisana. Ovo nam omogućava da uvedemo pojam *količničkog* (*faktor*) *automata* na sledeći način:

Automat $\mathcal{A}/\!/\varrho = (A/\!/\varrho, X, \delta^{A/\!/\varrho}, \varrho_{a_0}, \tau^{A/\!/\varrho})$ naziva se *količnički* (*faktor*) automat sa skupom stanja $A/\!/\varrho$, funkcijom prelaza $\delta^{A/\!/\varrho}$, inicijalnim stanjem ϱ_{a_0} i skupom završnih stanja $\tau^{A/\!/\varrho} = \varrho_{\tau^A} = \{\varrho_a \,|\, a \in \tau^A\}$.

Kao što smo videli, funkcija prelaza automata ima izvesna svojstva bliska algebarskim operacijama, što nam omogućava da, po analogiji sa odgovarajućim algebarskim pojmom, definišemo *homomorfizam* izmedju automata, kao preslikavanje koje je saglasno sa funkcijom prelaza i očuvava njena algebarska svojstva.

Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, b_0, \tau^B)$ konačni deterministički automati. Preslikavanje $\varphi : A \to B$ je *homomorfizam* automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{B}$ ako za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$ važi:

$$\begin{aligned}&\varphi(\delta^A(a,x)) = \delta^B(\varphi(a), x),\\ &\varphi(a_0) = b_0 \ \text{ i } \ \tau^B = \varphi(\tau^A) = \{\varphi(a) \,|\, a \in \tau^A\}.\end{aligned}$$

Pokazaćemo da, ako je φ homomorfizam, za proizvoljno stanje $a \in A$ i ulaznu reč $u \in X^*$ važi $\varphi(\delta^A(a,u)) = \delta^B(\varphi(a), u)$.

Za reči dužine jedan, ovo jasno važi prema definiciji homomorfizma. Pretpostavimo da, za sve reči $v \in X^*$ dužine $n-1$, važi $\varphi(\delta^A(a,v)) = \delta^B(\varphi(a), v)$, za $a \in A$. Neka je $u \in X^*$ reč dužine n oblika $u = vx$ za $v \in X^*$ i $x \in X$.

$$\begin{aligned}\varphi(\delta^A(a,u)) &= \varphi(\delta^A(a,vx)) = \varphi(\delta^A(\delta^A(a,v),x)) = \delta^B(\varphi(\delta^A(a,v)),x)\\ &= \delta^B(\delta^B(\varphi(a),v),x) = \delta^B(\varphi(a),vx) = \delta^B(\varphi(a),u).\end{aligned}$$

Dakle, jednakost važi za sve reči ulaznog alfabeta, što je i trebalo pokazati.

Injektivno preslikavanje automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ u $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, b_0, \tau^B)$, koje je homomorfizam naziva se *monomorfizam*. Surjektivni homomorfizam automata $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$ naziva se *epimorfizam*.U tom slučaju automat $\mathcal{B}$ zovemo *homomorfna slika* automata $\mathcal{A}$. Bijektivni homomorfizam zove se *izomorfizam* automata, a ako postoji bijektivni homomorfizam između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ onda su ovi automati *izomorfni* i pišemo $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Lema 3.2.1. *Neka je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$. Tada je prirodno preslikavanje $\varrho^\natural : A \mapsto A/\!\!/\varrho$ epimorfizam iz $\mathcal{A}$ na faktor automat $\mathcal{A}/\!\!/\varrho = (A/\!\!/\varrho, X, \delta^{A/\!\!/\varrho}, \varrho_{a_0}, \tau^{A/\!\!/\varrho})$.*

Dokaz: Prirodno preslikavanje $\varrho^\natural : A \mapsto A/\!\!/\varrho$ definiše se sa

$$\varrho^\natural(a) = \varrho_a, \text{ za svako stanje } a \in A.$$

Očigledno da je preslikavanje "na", jer je svaka klasa ekvivalencije neprazna i postoji element koji pripada toj klasi, tj. za proizvoljno $\varrho_a \in A/\!\!/\varrho$ važi $\varrho^\natural(a) = \varrho_a$. Za stanje $a \in A$ i reč $u \in X^*$ imamo

$$\varrho^\natural(\delta^A(a,u)) = \varrho_{\delta^A(a,u)} = \delta^{A/\varrho}(\varrho_a, u) = \delta^{A/\varrho}(\varrho^\natural(a), u),$$

što je i trebalo dokazati. □

Dakle, ako je relacija ekvivalencije ϱ saglasna sa funkcijom prelaza automata $\mathcal{A}$, onda prirodno preslikavanje na izvestan način prenosi određena algebarska svojstva sa automata $\mathcal{A}$ na faktor automat $\mathcal{A}/\!\!/\varrho$.

3.3. Minimalni automat jezika

Da bi smo dokazali postojanje automata koji raspoznaje dati jezik L, uvodimo pojam razlomka jezika. U opštem slučaju, automat koji prihvata dati jezik L ne mora biti konačan. Neka je dat jezik $L \subseteq X^*$ i reč $u \in X^*$.

Razlomak jezika L ili *izvod jezika L* u odnosu na reč u, u oznaci $u^{-1}L$ (ili $L.u$), je jezik u X^* definisan sa

$$u^{-1}L = \{w \in X^* \mid uw \in L\}.$$

Pokazuje se da važi sledeća lema:

Lema 3.3.1. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, reči $u, v \in X^*$ i praznu reč $e \in X^*$ važi sledeće:*

(i) $v^{-1}(u^{-1}L) = (uv)^{-1}L$;
(ii) $e^{-1}L = L$;
(iii) $e \in u^{-1}L \;\Leftrightarrow\; u \in L$.

Dokaz: (i) Imamo da važi niz ekvivalencija

$$w \in v^{-1}(u^{-1}L) \;\Leftrightarrow\; vw \in u^{-1}L \;\Leftrightarrow\; u(vw) \in L \;\Leftrightarrow\; (uv)w \in L \;\Leftrightarrow\; w \in (uv)^{-1}L,$$

odakle sledi da je $v^{-1}(u^{-1}L) = (uv)^{-1}L$.

(ii) Prema definiciji razlomka jezika imamo da je

$$w \in e^{-1}L \;\Leftrightarrow\; ew \in L \;\Leftrightarrow\; w \in L,$$

odakle zaključujemo da je $e^{-1}L = L$.

(iii) Pošto važi

$$e \in u^{-1}L \quad \Leftrightarrow \quad ue \in L \quad \Leftrightarrow \quad u \in L,$$

dobijamo (iii). □

Za jezik $L \subseteq X^*$, označimo sa A_L skup svih razlomaka jezika L, tj.

$$A_L = \{u^{-1}L \mid u \in X^*\}.$$

Definišimo podskup $\tau^{A_L} \subseteq A_L$ na sledeći način:

$$\tau^{A_L} = \{u^{-1}L \mid u \in L\}.$$

Na osnovu dela (iii) prethodne leme, τ^{A_L} se može izraziti i sa:

$$\tau^{A_L} = \{H \in A_L \mid e \in H\}.$$

Primetimo da, za proizvoljan razlomak $H \in A_L$ i $v \in X^*$ važi $v^{-1}H \in A_L$.

Naime, ako je $H = u^{-1}L$, za neku reč $u \in X^*$, na osnovu tvrđenja (ii) imamo da je

$$v^{-1}H = v^{-1}(u^{-1}L) = (uv)^{-1}L \in A_L. \tag{3.3}$$

Odavde se vidi da ima smisla definisati preslikavanje $\delta^{A_L} : A_L \times X \to A_L$ sa

$$\delta^{A_L}(H,x) = x^{-1}H, \text{ za } H \in A_L \text{ i } x \in X.$$

Dakle, $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$ je automat sa inicijalnim stanjem L i skupom završnih stanja τ^{A_L}, dok je proširena funkcija prelaza $\delta^{A_L} : A_L \times X^* \to A_L$ data sa $\delta_L(H,v) = v^{-1}H$ dobro definisana prema (3.3).

Teorema 3.3.2. *Proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$ može biti raspoznat (ne obavezno konačnim) determinističkim automatom $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$.*

Dokaz: Neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Na osnovu (3.3) važi $\delta^{A_L}(L,w) = w^{-1}L$ i takođe,

$$w^{-1}L \in \tau^{A_L} \quad \Leftrightarrow \quad e \in w^{-1}L \quad \Leftrightarrow \quad we \in L \quad \Leftrightarrow \quad w \in L.$$

Prema tome,

$$[\![\mathcal{A}_L]\!] = \{w \in X^* \mid \delta^{A_L}(L,w) \in \tau^{A_L}\} = \{w \in X^* \mid w^{-1}L \in \tau^{A_L}\} = L,$$

čime smo dokazali da automat $\mathcal{A}_L$ raspoznaje jezik L. □

Automat $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$ naziva se *automat desnih razlomaka* ili *izvodni automat* jezika L.

Prirodno se nameće pitanje kako odrediti sve razlomke datog jezika.

Naredna teorema nam daje algoritam za konstrukciju svih razlomaka jezika L, u slučaju kada su alfabet X i skup A_L konačni.

Teorema 3.3.3. *Neka je $L \subseteq X^*$ proizvoljan jezik. Definišimo induktivno niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od A_L sa:*

$$\begin{aligned} &A_0 = \{L\}, \\ &A_{k+1} = A_k \cup \{x^{-1}H \,|\, H \in A_k, x \in X\}, \qquad k \in \mathbb{N}^0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tada:

(a) *Niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je rastući.*

(b) *Ako postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_{k+1}$, tada je $A_k = A_L$.*

(c) *Ako je A_L konačan skup, tada postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_L$.*

Dokaz. Tvrđenje (a) sledi neposredno iz (3.4).

(b) Podskup $A' \subseteq A_L$ koji sadrži L nazvaćemo zatvorenim za slovo $u \in X^*$ ako je $u^{-1}H \in A'$, za svaki element $H \in A'$.

Kako je svaki element iz A_L oblika $u^{-1}L$, za neku reč $u \in X^*$, i A' sadrži L, to je A' zatvoren za sve reči iz X^* ako i samo ako je $A' = A_L$.

Drugim rečima, A_L je jedini podskup od A_L zatvoren za sve reči iz X^*.

Sa druge strane, nije teško dokazati da je A' zatvoren za sve reči iz X^* ako i samo ako je zatvoren za sva slova iz X.

Kako jednakost $A_k = A_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$ u stvari znači da je

$$\{x^{-1}H \,|\, H \in A_k, x \in X\} \subseteq A_k,$$

odnosno da je skup A_k zatvoren za sva slova iz X, to prema napred ustanovljenom imamo da je $A_k = A_L$, što je i trebalo dokazati.

(c) Kako je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući, to je

$$|A_0| \leqslant |A_1| \leqslant \cdots \leqslant |A_k| \leqslant |A_{k+1}| \leqslant \cdots \leqslant |A_L|,$$

pa kada je A_L konačan skup dobijamo da je $|A_k| = |A_{k+1}|$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, i u tom slučaju je $A_k = A_{k+1}$, ponovo iz razloga što je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući.

Prema tome, zaključujemo da je $A_k = A_L$. □

U narednim primerima primenjujemo navedenu teoremu za nalaženje skupa svih desnih razlomaka, odnosno za naleženje izvodnog automata datog jezika L.

Primer 3.3.4. Konstruisaćemo automat desnih razlomaka koji raspoznaje jezik

$$L = \{x^m y^n \,|\, m, n \in \mathbb{N}\},$$

nad alfabetom $X = \{x, y\}$.

Najpre određujemo skup A_1:

$$x^{-1}L = \{u \in X^* \mid xu \in L\} = L \cup \{y\}^+,$$
$$y^{-1}L = \{u \in X^* \mid yu \in L\} = \emptyset,$$

pa je $A_1 = \{L, L_1, L_2\}$, gde je $L_1 = x^{-1}L = L \cup \{y\}^+$ i $L_2 = y^{-1}L = \emptyset$.

Dalje, određujemo skup A_2:

$$x^{-1}L_1 = (x^2)^{-1}L = \{u \in X^* \mid x^2u \in L\} = L \cup \{y\}^+ = L_1,$$
$$y^{-1}L_1 = (xy)^{-1}L = \{u \in X^* \mid xyu \in L\} = \{y\}^* = L_3,$$
$$x^{-1}L_2 = x^{-1}\emptyset = \emptyset = L_2,$$
$$y^{-1}L_2 = y^{-1}\emptyset = \emptyset = L_2,$$

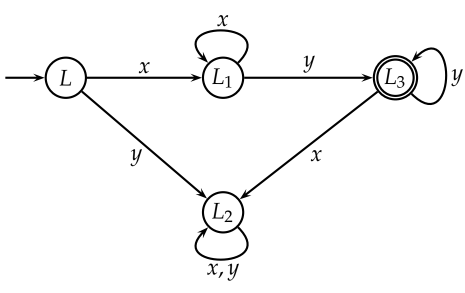
pa je $A_2 = \{L, L_1, L_2, L_3\}$, gde je $L_3 = L.xy = \{y\}^*$.

Nastavljajući isti postupak određujemo skup A_3 i dobijamo

$$x^{-1}L_3 = (xyx)^{-1}L = \{u \in X^* \mid xyxu \in L\} = \emptyset = L_2,$$
$$y^{-1}L_3 = (xy^2)^{-1}L = \{u \in X^* \mid xy^2u \in L\} = \{y\}^* = L_3,$$

pa je $A_3 = A_2$. Prema tome, $A_L = A_2 = \{L, L_1, L_2, L_3\}$.

Kako je $L_3 = \{y\}^*$ jedini razlomak iz A_L koji sadrži praznu reč e, to je $\tau^{A_L} = \{L_3\}$. Dakle, automat $\mathcal{A}_L$ je zadat grafom:



Primer 3.3.5. Neka je $X = \{x, y\}$ i jezik $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Videćemo da ne postoji konačan automat koji raspoznaje dati jezik kontrukcijom izvodnog automata $\mathcal{A}_L$ datog jezika L.

Primetimo, najpre, da je

$$x^{-1}L = \{u \in X^* \mid xu \in L\} = \{x^{n-1}y^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$y^{-1}L = \{u \in X^* \mid yu \in L\} = \emptyset,$$

pa je $A_1 = \{L, L_1, K_1\}$, gde je $L_1 = \{x^{n-1}y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $K_1 = \emptyset$.

Zatim imamo da je

$$\begin{aligned}
x^{-1}L_1 &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L_1\} = \{x^{n-2}y^n \,|\, n \geqslant 2\},\\
y^{-1}L_1 &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L_1\} = \{e\},\\
x^{-1}K_1 &= y^{-1}K_1 = \emptyset = K_1,
\end{aligned}$$

odakle je $A_2 = A_1 \cup \{L_2, K_2\}$, gde je $L_2 = \{x^{n-2}y^n \,|\, n \geqslant 2\}$ i $K_2 = \{e\}$.

Dalje je

$$\begin{aligned}
x^{-1}L_2 &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L_2\} = \{x^{n-3}y^n \,|\, n \geqslant 3\},\\
y^{-1}L_2 &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L_2\} = \{y\},\\
x^{-1}K_2 &= \{u \in X^* \,|\, xu \in K_2\} = \{u \in X^* \,|\, xu = e\} = \emptyset = K_1,\\
y^{-1}K_2 &= \{u \in X^* \,|\, yu \in K_2\} = \{u \in X^* \,|\, yu = e\} = \emptyset = K_1,
\end{aligned}$$

pa je $A_3 = A_2 \cup \{L_3, K_3\}$, gde je $L_3 = \{x^{n-3}y^n \,|\, n \geqslant 3\}$ i $K_3 = \{y\}$.

Nastavljajući na isti način u sledećem koraku dobijamo da je

$$\begin{aligned}
x^{-1}L_3 &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L_3\} = \{x^{n-4}y^n \,|\, n \geqslant 4\},\\
y^{-1}L_3 &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L_3\} = \{y^2\},\\
x^{-1}K_3 &= \{u \in X^* \,|\, xu \in K_3\} = \{u \in X^* \,|\, xu = y\} = \emptyset = K_1,\\
y^{-1}K_3 &= \{u \in X^* \,|\, yu \in K_3\} = \{u \in X^* \,|\, yu = y\} = \{e\} = K_2,
\end{aligned}$$

pa je $A_4 = A_3 \cup \{L_4, K_4\}$, gde je $L_4 = \{x^{n-4}y^n \,|\, n \geqslant 4\}$ i $K_4 = \{y^2\}$.

Sada već možemo zaključiti da za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ važi

$$A_m = A_{m-1} \cup \{L_m, K_m\}, \tag{3.5}$$

gde su L_m i K_m zadati sa

$$\begin{aligned}
L_m &= \{x^{n-m}y^n \,|\, n \geqslant m\},\\
K_m &= \{y^{m-2}\}, \text{ za } m \geqslant 2, \qquad K_1 = \emptyset.
\end{aligned}$$

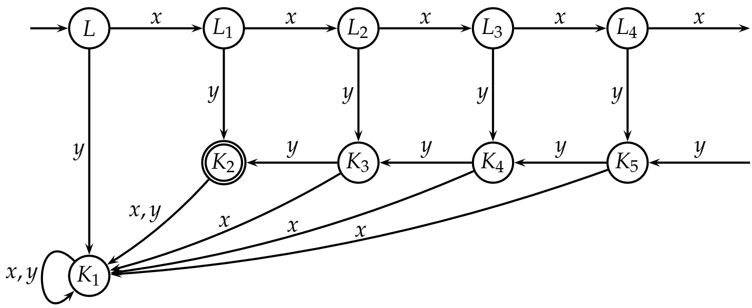
To ćemo dokazati indukcijom.

Pretpostavimo da je naše tvrđenje tačno. Tada je

$$\begin{aligned}
x^{-1}L_m &= \{u \in X^* \,|\, xu \in L_m\} = \{x^{n-m-1}y^n \,|\, n \geqslant m+1\} = L_{m+1},\\
y^{-1}L_m &= \{u \in X^* \,|\, yu \in L_m\} = \{y^{m-1}\} = K_{m+1},\\
x^{-1}K_m &= \{u \in X^* \,|\, xu \in K_m\} = \{u \in X^* \,|\, xu = y^{m-2}\} = \emptyset = K_1,\\
y^{-1}K_m &= \{u \in X^* \,|\, yu \in K_m\} = \{u \in X^* \,|\, yu = y^{m-2}\} = \{y^{m-1}\} = K_{m+1},
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $A_{m+1} = A_m \cup \{L_{m+1}, K_{m+1}\}$. Iz svega zaključujemo da ima beskonačno mnogo razlomaka datog jezika $L = \{x^n y^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, kao i da je

$\mathcal{A}_L$ automat sa beskonačno mnogo stanja, koji se može grafički predstaviti kao na Slici 3.1.



Slika 3.1 Automat $\mathcal{A}_L$ jezika $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Kako je K_2 jedini razlomak koji sadrži praznu reč, to je $\tau^{A_L} = \{K_2\}$, pa $\mathcal{A}_L$ raspoznaje jezik L stanjem K_2.

Pokazaćemo da, među svim automatima koji raspoznaju dati jezik, izvodni automat $\mathcal{A}_L$ jeste automat *najmanje kardinalnosti*, odnosno, automat sa najmanjim brojem stanja, ako se radi o konačnom automatu.

Automat najmanje kardinalnosti koji raspoznaje dati jezik $L \subseteq X^*$ zovemo *minimalni automat* jezika L.

Teorema 3.3.6. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ automat koji raspoznaje jezik $L \subseteq X^*$, i $\mathcal{A}_d = (A_d, X, \delta^{A_d}, a_0, \tau^{A_d})$ njegov dostižni deo. Tada je izvodni automat $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$ homomorfna slika automata $\mathcal{A}_d$, što znači da broj stanja automata $\mathcal{A}_L$ nije veći od broja stanja automata $\mathcal{A}_d$, tj. $|A_L| \leqslant |A_d|$.*

Dokaz: Za proizvoljno stanje $a \in A_d$ postoji reč $u \in X^*$ tako da je $a = \delta^{A_d}(a_0, u)$ i definišaćemo preslikavanje $\varphi : A_d \mapsto A_L$ na sledeći način:

$$\varphi(a) = u^{-1}L.$$

Dokažimo, najpre, da je φ dobro definisano preslikavanje iz A_d u A_L, odnosno, da ne zavisi od izbora reči u za koju je $a = \delta^{A_d}(a_0, u)$.

Neka su $u, v \in X^*$ reči za koje važi $a = \delta^{A_d}(a_0, u)$ i $a = \delta^{A_d}(a_0, v)$. Dokazaćemo da je tada $u^{-1}L = v^{-1}L$. Zaista, za proizvoljnu reč $w \in X^*$ važi

$$\delta^{A_d}(a_0, uw) = \delta^{A_d}(\delta^{A_d}(a_0, u), w) = \delta^{A_d}(a, w) = \delta^{A_d}(\delta^{A_d}(a_0, v), w) = \delta^{A_d}(a_0, vw),$$

odakle dobijamo da

$$w \in u^{-1}L \Leftrightarrow uw \in L \Leftrightarrow \delta^{A_d}(a_0, uw) \in \tau^{A_d}$$
$$\Leftrightarrow \delta(a_0, vw) \in \tau^{A_d} \Leftrightarrow vw \in L \Leftrightarrow w \in v^{-1}L.$$

Prema tome, $u^{-1}L = v^{-1}L$, čime smo dokazali da je φ dobro definisano preslikavanje iz A_d u A_L.

Neka je $a \in A_d$ proizvoljno dostižno stanje i neka je reč $u \in X^*$ takva da je $a = \delta^{A_d}(a_0, u)$. Tada važi

$$\begin{aligned}\varphi(\delta^{A_d}(a,v)) &= \varphi(\delta^{A_d}(\delta^{A_d}(a_0,u),v)) = \varphi(\delta^{A_d}(a_0,uv)) \\ &= (uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L) = \delta^{A_L}(\varphi(a),v), \text{ za svaki } v \in X^*.\end{aligned}$$

Inicijalno stanje slika se u inicijalno stanje automata $\mathcal{A}_L$, jer važi

$$\varphi(a_0) = e^{-1}L = L,$$

a sva završna stanja se slikaju u završna stanja

$$\begin{aligned}\{\varphi(a) \,|\, a \in \tau^{A_d}\} &= \{\varphi(\delta^{A_d}(a_0,u)) \,|\, \delta^{A_d}(a_0,u) = a \in \tau^{A_d}\} = \\ &= \{u^{-1}L \,|\, \delta^{A_d}(a_0,u) = a \in \tau^{A_d}\} = \{u^{-1}L \,|\, u \in L\} = \tau^{A_L},\end{aligned}$$

čime smo dokazali da je φ homorfizam.

Dalje, svako stanje iz A_L je razlomak $u^{-1}L$, za reč $u \in X^*$ i ako važi $\delta^{A_d}(a_0,u) = a$, dobijamo da je $\varphi(a) = u^{-1}L$. Prema tome, φ je surjektivno preslikavanje, pa je $|A_L| \leqslant |A_d|$, što je i trebalo pokazati. □

Teorema 3.3.7. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, automat desnih razlomaka $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$ je automat sa najmanjim brojem stanja među automatima koji raspoznaju L.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ proizvoljan automat koji raspoznaje jezik L i $\mathcal{A}_d = (A_d, X, \delta^{A_d}, a_0, \tau^{A_d})$ njegov dostižni deo. Prema prethodnoj teoremi imamo da je $|A_L| \leqslant |A_d|$. Skup dostižnih stanja A_d je podskup skupa svih stanja A polaznog automata, te je $|A_d| \leqslant |A|$, odakle zaključujemo $|A_L| \leqslant |A_d| \leqslant |A|$. Kako smo pošli od proizvoljnog automata $\mathcal{A}$ koji raspoznaje L i dobili $|A_L| \leqslant |A|$, znači da izvodni automat ima najmanji broj stanja među svim automatima koji raspoznaju dati jezik. Ovim je dokaz kompletiran. □

Dakle, za dati jezik $L \subseteq X^*$ automat $\mathcal{A}_L$ desnih razlomaka je *minimalni automat* jezika L.

Posledica 3.3.8. *Jezik je raspoznatljiv konačnim determinističkim automatom ako i samo ako ima konačan broj različitih desnih razlomaka.*

Uočili smo da se raspoznavanje jezika L automatom vrši unutar njegovog dostižnog dela, odnosno samo stanja do kojih je moguće stići iz inicijalnog stanja učestvuju u raspoznavanju jezika L.

Algoritam 3.3.9. (*Konstrukcija minimalnog automata $\mathcal{A}_L$*) Ulaz ovog algoritma je raspoznatljiv jezik L. Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla prelaza* izvodnog automata $\mathcal{A}_L$ i tokom tog postupka koristimo pokazivače $l(\cdot)$

koji, čvorovima stabla koje gradimo, pridružuju odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je L i mi stavljamo da je $T_0 = \{L\}$ i $l(L) = 1$. Istovremeno proveravamo da li L sadrži praznu reč i ako je to tačno, onda L registrujemo kao završno stanje, tj. $L \in \tau^{A_L}$.

(A2) Posle $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i i neka su čvorovi u T_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U sledećem koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoren list M u stablu T_i i svako $x \in X$, dodajemo čvor $x^{-1}M$ i granu iz M u $x^{-1}M$ označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je $x^{-1}M$ razlomak jezika L koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je $x^{-1}M$ jednak nekom prethodno izračunatom skupu M', onda označavamo $x^{-1}M$ kao zatvoren i stavljamo $l(x^{-1}M) = l(M')$. U protivnom, stavljamo da je $l(x^{-1}M)$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $e \in x^{-1}M$ i ako je to tačno, onda $x^{-1}M \in \tau^{A_L}$, tj. $x^{-1}M$ registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

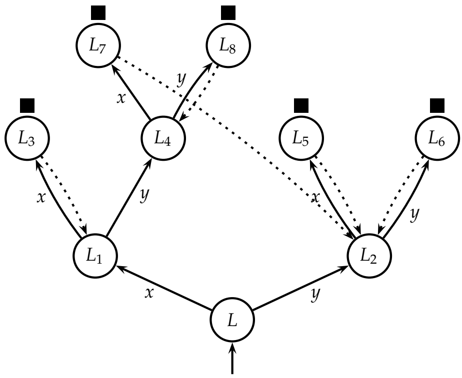
(A4) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_L$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_L$.

Primer 3.3.10. Razmotrimo još jednom Primer 3.3.4. u kome je konstruisan izvodni automat jezika $L = \{x^m y^n \,|\, m,n \in \mathbb{N}\}$, nad alfabetom $X = \{x, y\}$. Prema prethodnom, to je minimalni automat jezika L.

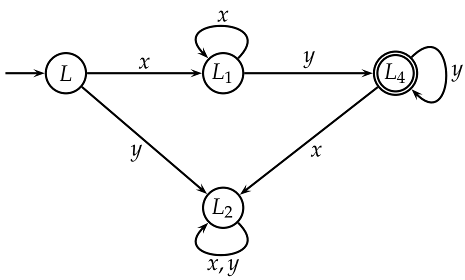
Konstruisaćemo, sada, stablo prelaza minimalnog automata datog jezika L primenom prethodnog Algoritma 3.3.9.:

$$
\begin{array}{llll}
T_0: & L = \{x^m y^n \,|\, m,n \in \mathbb{N}\}, & l(L) = 1, & L \notin \tau^{A_L}, \\
T_1: & x^{-1}L = L \cup \{y\}^+ = L_1, & l(L_1) = 2, & L_1 \notin \tau^{A_L}, \\
 & y^{-1}L = \emptyset = L_2, & l(L_2) = 3, & L_2 \notin \tau^{A_L}, \\
T_2: & x^{-1}L_1 = L \cup \{y\}^+ = L_3 = L_1 \;\blacksquare, & l(L_3) = l(L_1) = 2, & \\
 & y^{-1}L_1 = \{y\}^* = L_4, & l(L_4) = 4, & L_4 \in \tau^{A_L}, \\
 & x^{-1}L_2 = L_5 = L_2 \;\blacksquare, & l(L_5) = l(L_2) = 3, & \\
 & y^{-1}L_2 = L_6 = L_2 \;\blacksquare, & l(L_6) = l(L_2) = 3, & \\
T_3: & x^{-1}L_4 = \emptyset = L_7 = L_2 \;\blacksquare, & l(L_7) = l(L_2) = 3, & \\
 & y^{-1}L_4 = \{y\}^* = L_8 = L_4 \;\blacksquare, & l(L_8) = l(L_4) = 4. &
\end{array}
$$

Kako su očigledno svi listovi postali zatvoreni, to je konstrukcija stabla minimalnog automata $\mathcal{A}_L$ završena, i to stablo je prikazano na sledećoj slici:



Isprekidane strelice na ovoj slici spajaju listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača, i slepljivanjem zatvorenih listova sa odgovarajućim unutrašnjim čvorovima i označavanjem inicijalnog i završnih stanja dobijamo graf minimalnog automata $\mathcal{A}_L$ datog jezika L, koji je prikazan na sledećoj slici:



Ako je jezik L raspoznatljiv, algoritam za konstukciju minimalnog automata završava se u konačnom broju koraka.

3.4. Minimizacija konačnih determinističkih automata

U ovom odeljku opisaćemo algoritme za nalaženje minimalnog automata koji raspoznaje isti jezik kao dati automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$. Pošto ne može doći do zabune, funkciju prelaza i skup završnih stanja, u daljem tekstu, označavaćemo jednostavno sa δ i τ, tim redom.

Postupak redukcije broja stanja konačnog, determinističkog automata, pri čemu se dobija minimalni automat koji raspoznaje isti jezik kao polazni automat naziva se *minimizacija automata*.

Prvi postupak minimizacije automata, koji ćemo predstaviti u ovom odeljku, blizak je algoritmu za konstrukciju minimalnog automata datog jezika.

Za dati deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ definisaćemo skupove

$\tau_a = \{u \in X^* \mid \delta(a,u) \in \tau\}$, za sva stanja $a \in A$.

Primetimo da su ovi skupovi jezici nad ulaznim alfabetom, za svako stanje datog automata. Skup τ_a nazivaćemo *desni jezik* skupa završnih stanja τ određen stanjem $a \in A$.

Skup svih razlomaka skupa τ označićemo sa A_τ.

Teorema 3.4.1. *Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$. Tada za proizvoljne $a \in A$ i $u \in X^*$ važi*

$$\tau_{\delta(a,u)} = u^{-1}\tau_a,$$

Osim toga, ako je $\mathcal{A}$ dostižan automat koji raspoznaje jezik L, tj. ako je $L = [\![A]\!]$, onda je $A_L = A_\tau$ (skup svih razlomaka jezika L jednak je skupu svih desnih jezika skupa τ).

Dokaz: Neka je $a \in A$ i reč $u \in X^*$. Tada, za proizvoljnu reč $v \in X^*$, imamo da je

$$\begin{aligned} v \in \tau_{\delta(a,u)} &\Leftrightarrow \delta(\delta(a,u),v) \in \tau && \text{(def. desnih jezika)}\\ &\Leftrightarrow \delta(a,uv) \in \tau && \text{(jer } \delta(\delta(a,u),v) = \delta(a,uv)\text{)}\\ &\Leftrightarrow uv \in \tau_a && \text{(def. desnih jezika)}\\ &\Leftrightarrow v \in u^{-1}\tau_a && \text{(def. razlomka jezika),} \end{aligned}$$

što znači da je $\tau_{\delta(a,u)} = u^{-1}\tau_a$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ dostižan automat koji raspoznaje jezik L. Jasno da je $L = \tau_{a_0}$. Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je

$$u^{-1}L = u^{-1}(\tau_{a_0}) = \tau_{\delta(a_0,u)},$$

odakle je jasno da je $A_L \subseteq A_\tau$. Obratno, kako je, prema pretpostavci, svako stanje $a \in A$ dostižno, to postoji reč $u \in X^*$ takva da je $a = \delta(a_0, u)$ i imamo

$$\tau_a = \tau_{\delta(a_0,u)} = u^{-1}\tau_{a_0} = u^{-1}L,$$

te je $A_\tau \subseteq A_L$. Dakle, $A_L = A_\tau$, čime je dokaz teoreme završen. □

Efektivan postupak za konstrukciju minimalnog automata, koji raspoznaje jezik L automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$, svodi se na primenu dva napred navedena algoritma:

1. Najpre primenjujemo Algoritam 4.3.12. za konstrukciju dostižnog dela $\mathcal{A}_d$ automata $\mathcal{A}$, koji raspoznaje L skupom $\tau^{A_d} = \tau \cap A_d$.
2. U automatu $\mathcal{A}_d$ nalazimo desne jezike $\{\tau_x^{A_d} \mid x \in X\}$, a već naredni korak se svodi na primenu Algoritma 3.3.9. za nalaženje desnih razlomaka ovih jezika, jer je, prema prethodnoj teoremi, skup svih desnih jezika skupa $A_{\tau^{A_d}}$ jednak skupu A_L razlomaka jezika L.

Drugi algoritam za minimizaciju zasniva se na nalaženju faktor automata polaznog automata u odnosu na kongruenciju definisanu na skupu stanja, pri čemu se klasa međusobno ekvivalentnih stanja zamenjuje samo jednim stanjem i dobija se minimalni automat koji raspoznaje isti jezik kao polazni automat.

Za automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$, relaciju π^τ na $\mathcal{A}$ određenu sa τ definišemo sa:

$$(a,b) \in \pi^\tau \iff \tau_a = \tau_b, \text{ za } a,b \in A.$$

Teorema 3.4.2. *Neka je dat konačan, deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$. Tada je π^τ kongruencija na $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Jasno da je π^τ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija, tj. relacija ekvivalencije.

Neka su $a, b \in A$ stanja takva da važi $(a,b) \in \pi^\tau$, tj. takva da je $\tau_a = \tau_b$ i neka je $v \in X^*$ proizvoljna reč.

Tada za svaku reč $u \in X^*$ važi sledeće

$$\begin{aligned} u \in \tau_{\delta(a,v)} &\iff \delta(\delta(a,v),u) \in \tau \iff \delta(a,vu) \in \tau \\ &\iff vu \in \tau_a \iff vu \in \tau_b \\ &\iff \delta(b,vu) \in \tau \iff \delta(\delta(a,v),u) \in \tau \\ &\iff u \in \tau_{\delta(b,v)}. \end{aligned}$$

Jasno, $\tau_{\delta(a,v)} = \tau_{\delta(b,v)}$, odnosno $(\delta(a,v), \delta(b,v)) \in \pi^\tau$. Za stanja $a \in \tau$ i $b \notin \tau$ jasno je da desni jezik τ_a sadrži praznu reč, dok $e \notin \tau_b$, pa je jasno da je $\tau_a \neq \tau_b$, tj. $(a,b) \notin \pi^\tau$. Ovi smo dokazali da je π^τ kongruencija na automatu $\mathcal{A}$. □

Naredna teorema pokazuje da je faktor automat dostižnog automata $\mathcal{A}$ u odnosu na kongruenciju π^τ izomorfan minimalnom automatu koji raspoznaje isti jezik kao polazni automat $\mathcal{A}$. Relaciju π^τ, u daljem tekstu, ćemo označavati kraće sa π kako bi pojednostavili pisanje.

Teorema 3.4.3. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ dostižan automat koji raspoznaje jezik $L \subseteq X^*$. Tada je faktor automat $\mathcal{A} /\!\!/ \pi$ izomorfan minimalnom automatu $\mathcal{A}_L$ jezika L.*

Dokaz: Neka je $\varphi : A /\!\!/ \pi \mapsto A_L$ preslikavanje definisano sa

$$\varphi(\pi_a) = \tau_a\,, \qquad \text{za svaki } a \in A.$$

Kako je $\mathcal{A}$ dostižan automat, to postoji $u \in X^*$ tako da je $a = \delta(a_0, u)$, pa imamo

$$\varphi(\pi_a) = \tau_a = \tau_{\delta(a_0,u)} = u^{-1}\tau_{a_0} = u^{-1}L.$$

Jednostavno se pokazuje da je φ dobro definisano i bijektivno preslikavanje. Dokažimo da je φ homomorfizam. Saglasnost sa funkcijom prelaza sledi iz:

$$\begin{aligned} \varphi(\delta^{A_\pi}(\pi_a, x)) &= \varphi(\pi_{\delta(a,x)}) = \tau_{\delta(a,x)} = \tau_{\delta(\delta(a_0,u),x)} = \tau_{\delta(a_0,ux)} = \\ &= (ux)^{-1}L = x^{-1}(u^{-1}L) = \delta^{A_L}(\varphi(\pi_a), x). \end{aligned}$$

Inicijalno stanje slika se u inicijalno stanje automata $\mathcal{A}_L$, jer važi

$$\varphi(\pi_{a_0}) = \tau_{a_0} = e^{-1}L = L,$$

a sva završna stanja se slikaju u završna stanja

$$\{\varphi(\pi_a) | a \in \tau\} = \{\tau_a | a \in \tau\} = \{u^{-1}L | \delta(a_0,u) = a \in \tau\} = \{u^{-1}L | u \in L\} = \tau^{A_L}.$$

Ovim je dokaz kompletiran. □

Pokazaćemo da je kongruenciju π moguće konstruisati korišćenjem niza relacija.

Za automat $\mathcal{A} = (A,X,\delta,a_0,\tau)$, neka je ε^τ relacija ekvivalencije na A koja ima samo dve klase: τ i $A-\tau$, tj.

$$\varepsilon^\tau = \tau \times \tau \cup (A-\tau) \times (A-\tau).$$

Drugim rečima, za proizvoljne $a,b \in A$ važi

$$(a,b) \in \varepsilon^\tau \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \tau \ \Leftrightarrow \ b \in \tau).$$

Pokazuje se da među relacijama π i ε^τ na automatu $\mathcal{A}$ postoji sledeća veza:

$$(a,b) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in X^*)\ (\delta(a,u),\delta(b,u)) \in \varepsilon^\tau, \ \text{ za proizvoljne } \ a,b \in A.$$

Teorema 3.4.4. *Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A,X,\delta,a_0,\tau)$. Definišimo niz relacija $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ na skupu stanja A sa:*

$$\pi_0 = \varepsilon^\tau,$$
$$\pi_{k+1} = \Big\{(a,b) \in \pi_k \ \Big|\ (\forall x \in X)\,(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \pi_k\Big\}.$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\varepsilon^\tau = \pi_0 \supseteq \pi_1 \supseteq \ldots \supseteq \pi_k \supseteq \pi_{k+1} \supseteq \ldots \supseteq \pi.$$

(b) *Ako je $\pi_k = \pi_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, tada je $\pi_k = \pi_{k+m} = \pi$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$.*
(c) *Ako je A konačan automat, tada postoji $k \in \mathbb{N}^0$ tako da je $\pi_k = \pi$.*

Dokaz: (a) Jasno da su svi članovi niza $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ relacije ekvivalencije, a neposredno iz definicije sledi da je ovaj niz opadajući lanac. Preostaje da dokažemo da je $\pi \subseteq \pi_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$, indukcijom po k.

Najpre, ako je $(a,b) \in \pi_k$, onda imamo da je $(a,b) = (\delta(a,e),\delta(b,e)) \in \varepsilon^\tau$, što znači da je $\pi \subseteq \varepsilon^\tau = \pi_0$. Dalje, pretpostavimo da je $\pi \subseteq \pi_k$ za neki $k \in \mathbb{N}^0$ i uzmimo da je $(a,b) \in \pi$. Ako $(a,b) \notin \pi_{k+1}$, to znači da postoji $x \in X$ tako da $(\delta(a,x),\delta(b,x)) \notin \pi_k \subseteq \varepsilon^\tau$. Međutim, ovo bi značilo da $(a,b) \notin \pi$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Zaključujemo da mora da važi $(a,b) \in \pi_{k+1}$, što znači da je $\pi \subseteq \pi_{k+1}$, odnosno $\pi \subseteq \pi_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$.

(b) I ovo tvrđenje ćemo dokazati indukcijom, sada po m. Na osnovu polazne pretpostavke imamo da tvrđenje važi za $m = 1$.

Pretpostavimo da je $\pi_k = \pi_{k+m}$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}\pi_{k+m+1} &= \Big\{(a,b) \in \pi_{k+m} \;\Big|\; (\forall x \in X)\,(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \pi_{k+m}\Big\} \\ &= \Big\{(a,b) \in \pi_k \;\Big|\; (\forall x \in X)\,(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \pi_k\Big\} \\ &= \pi_{k+1} = \pi_k,\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

Prema (a), da bi dokazali da je $\pi_k = \pi$, dovoljno je da pokažemo da je $\pi_k \subseteq \pi$. U tom cilju, uzmimo proizvoljan par $(a,b) \in \pi_k$ i indukcijom po dužini reči u dokažimo da je $(\delta(a,u),\delta(b,u)) \in \varepsilon^\tau$, za svaku reč $u \in X^*$.

Ako je $|u| = 0$, tj. ako je u prazna reč, tada je

$$(\delta(a,u),\delta(b,u)) = (a,b) \in \pi_k \subseteq \varepsilon^\tau.$$

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}^0$, uzmimo da je $(\delta(a,u),\delta(b,u)) \in \varepsilon^\tau$, za svaku reč u dužine $|u| \leqslant n$, i neka je $v \in X^*$ proizvoljna reč dužine $|v| = n+1$. Tada je $v = ux$, za neke $u \in X^*$, $|u| = n$, i $x \in X$. Prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je

$$(\delta(a,u),\delta(b,u)) \in \pi_k = \pi_{k+1}.$$

Odatle neposredno sledi da je

$$\begin{aligned}(\delta(a,v),\delta(b,v)) &= (\delta(a,ux),\delta(b,ux)) \\ &= (\delta(\delta(a,u),x),\delta(\delta(b,u),x)) \in \pi_k \subseteq \varepsilon^\tau,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Zaključujemo da je $(\delta(a,u),\delta(b,u)) \in \varepsilon^\tau$, za svaku reč $u \in X^*$, što znači da $(a,b) \in \pi$. Time smo dokazali da je $\pi_k = \pi$, čime je dokaz tvrđenja (b) završen.

(c) Ako je automat $\mathcal{A}$ konačan, tada postoji konačno mnogo relacija na njegovom skupu stanja A. To znači da bar dve relacije u opadajućem lancu iz (a) moraju biti jednake. Prema tome, postoje $k \in \mathbb{N}^0$ i $m \in \mathbb{N}$ tako da je $\pi_k = \pi_{k+m}$. Sada je jasno da je $\pi_k = \pi_{k+1}$, pa prema (b) sledi da je $\pi_k = \pi$. Ovim je dokaz teoreme kompletiran. □

Algoritam 3.4.5. (*Minimizacija datog automata $\mathcal{A}$***)** Ulaz ovog algoritma je automat $\mathcal{A} = (A,X,\delta,a_0,\tau)$ koji raspoznaje jezik L. Algoritam računa kongruenciju π, a na izlazu se dobija faktor automat $\mathcal{A}/\!\!/\pi$ (minimalni automat koji raspoznaje jezik L).

(A1) Formiramo listu P svih parova stanja automata A. Listu P možemo grafički predstaviti tablicom, pri čemu je, zbog simetričnosti relacija koje konstruišemo, dovoljno je razmatrati samo parove koji leže ispod (iznad) glavne dijagonale. Presek vrste i kolone koji odgovara jednom uređenom paru nazivaćemo 'ćelijom' tabele. Zbog refleksivnosti relacije koju konstruišemo ćelije na glavnoj dijagonali tabele ostaju prazne. Određujemo dostižni deo A_d automata A, brisanjem sa liste P svih kolona i vrsta koje odgovaraju nedostižnim stanjima, pri čemu odgovarajuće ćelije u tabeli označavamo sa $\times$. Konstruišemo relaciju ε^τ, brisanjem sa liste P svih parova iz skupa $\tau \times (A_d - \tau) \cup (A_d - \tau) \times \tau$, pri čemu ćelije u tabeli koje odgovaraju uređenim parovima iz ovog skupa označavamo sa $\times$. Parovi koji ostaju čine relaciju $\varepsilon^\tau = \pi_0$.

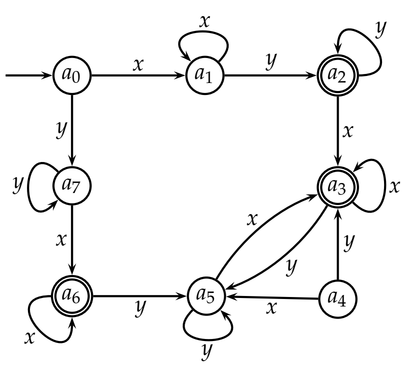
(A2) Ako posle $k+1$-vog koraka imamo relaciju π_k, gde je $k \geqslant 0$, onda se u $k+2$-gom koraku konstruiše relacija π_{k+1}.

- Razmatramo parove (a,b) koji su na početku ovog koraka bili na listi P, tj. kojima odgovara prazna ćelija u tabeli.
- Ukoliko proverom ustanovimo da postoji slovo $x \in X$ takvo da na početku ovog koraka par $(\delta(a,x), \delta(b,x))$ nije bio na listi P, tj. da je odgovarajuća ćelija bila označena sa $\times$, onda se sa liste brišu parovi (a,b) i (b,a) i njihove ćelije takođe označimo $\times$.

(A3) Ovaj postupak se završava prvim korakom u kome nije bilo nijednog brisanja sa liste. Parovi koji su ostali na listi, odnosno kojima odgovaraju neoznačene ćelije u tabeli, čine relaciju π.

(A4) Od klasa relacije π formiramo faktor automat $\mathcal{A}/\!\!/\pi$.

Primer 3.4.6. Za dati automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ predstavljen grafom:



naći ćemo minimalni automat koji raspoznaje isti jezik.

1. korak: Izbacujemo iz liste P sve parove iz vrsti i kolona koje odgovaraju nedostižnim stanjima, u ovom slučaju vrstu i kolonu koje odgovaraju stanju a_4.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0					X			
a_1					X			
a_2					X			
a_3					X			
a_4	X	X	X	X	X	X	X	X
a_5					X			
a_6					X			
a_7					X			

Dakle, dostižni deo je $A_d = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7\}$.
2. korak: Izbacujemo iz liste P sve parove iz skupa $\tau \times (A_d - \tau) \cup (A_d - \tau) \times \tau$. Vidimo da je

$$\tau = \{a_2, a_3, a_6\}, \quad A_d - \tau = \{a_0, a_1, a_5, a_7\}.$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0		X	X	X	X	X	X	X
a_1	X		X	X	X	/	X	X
a_2	X	X			X	X	X	X
a_3	X	X			X	X		X
a_4	X	X	X	X	X	X	X	X
a_5	X	X	X	X	X		X	
a_6	X	X	\		X	\		X
a_7	X	X	X	X	X		X	

Lista P

3. korak: Proveravamo parove koji su posle 2. koraka ostali na listi:

$(\delta(a_1, x), \delta(a_0, x)) = (a_1, a_1)$ – na listi je;
$(\delta(a_1, y), \delta(a_0, y)) = (a_2, a_7)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_1, a_0) i (a_0, a_1);
$(\delta(a_3, x), \delta(a_2, x)) = (a_3, a_3)$ – na listi je;
$(\delta(a_3, y), \delta(a_2, y)) = (a_5, a_2)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_3, a_2) i (a_2, a_3);
$(\delta(a_5, x), \delta(a_0, x)) = (a_3, a_1)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_5, a_0) i (a_0, a_5);
$(\delta(a_5, x), \delta(a_1, x)) = (a_3, a_1)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_5, a_1) i (a_1, a_5);
$(\delta(a_6, x), \delta(a_2, x)) = (a_6, a_3)$ – na listi je;
$(\delta(a_6, y), \delta(a_2, y)) = (a_5, a_2)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_6, a_2) i (a_2, a_6);
$(\delta(a_7, x), \delta(a_0, x)) = (a_6, a_1)$ – nije na listi,
brišemo parove (a_7, a_0) i (a_0, a_7);
$(\delta(a_7, x), \delta(a_1, x)) = (a_6, a_1)$ – nije na listi,

briŠemo parove (a_7,a_1) i (a_1,a_7);
$(\delta(a_7,x),\delta(a_5,x)) = (a_6,a_3)$ – na listi je;
$(\delta(a_7,y),\delta(a_5,y)) = (a_7,a_5)$ – na listi je.

Dakle, sa liste brišemo parove
(a_1,a_0), (a_0,a_1), (a_3,a_2), (a_2,a_3), (a_5,a_0), (a_0,a_5), (a_5,a_1), (a_1,a_5), (a_6,a_2), (a_2,a_6), (a_7,a_0), (a_0,a_7), (a_7,a_1), (a_1,a_7)
tako da je tabela predstavljena na prethodnoj slici.
4. korak: U ovom koraku proveravamo parove (a_6,a_3) i (a_7,a_5) koji su jedini ostali na listi.

$(\delta(a_6,x),\delta(a_3,x)) = (a_6,a_3)$,

$(\delta(a_6,y),\delta(a_3,y)) = (a_5,a_5)$,

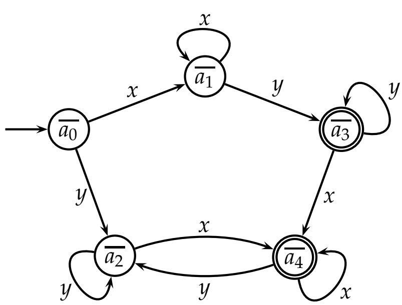
$(\delta(a_7,x),\delta(a_5,x)) = (a_6,a_3)$,

$(\delta(a_7,y),\delta(a_5,y)) = (a_7,a_5)$.

Kako su ovi parovi na listi, u ovom koraku nema brisanja.
To znači da je algoritam završen i da tražena relacija π na automatu A_d ima sledeće klase:

$$\{a_0\},\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3,a_6\},\ \{a_5,a_7\}.$$

Dakle minimalni automat, $\mathcal{A}/\!\!/\pi$ se može predstaviti sledećim grafom:



Napomena: Stanja dobijenog automata su $\overline{a_0} = \{a_0\}$, $\overline{a_1} = \{a_1\}$, $\overline{a_2} = \{a_2\}$, $\overline{a_3} = \{a_3,a_6\}$, $\overline{a_4} = \{a_5,a_7\}$.

3.5. Monoid prelaza automata i sintaksički monoid jezika

U ovom odeljku preduzećemo još neke korake u opisivanju algebarskih metoda kako bi se što uspešnije odgovorilo na pitanja o raspoznatljivosti jezika. Osnovna ideja je jednostavna. Neka je dat konačan deterministički automat i pretpostavićemo, bez umanjenja opštosti, da je dostižan. Svaka ulazna reč definiše na automatu funkciju koja skup stanja automata slika u sam taj skup. Bez obzira na to što ima beskonačno mnogo ulaznih reči, ovakvih funkcija može biti samo konačno mnogo, jer polazni automat ima konačan skup stanja. Tako pomoću beskonačnog skupa ulaznih reči definišemo konačan skup funkcija na skupu stanja, koji ima još jednu osobinu: kompozicija bilo koje dve funkcije ovog skupa, takođe, pripada tom skupu. Kako je kompozicija preslikavanja asocijativna operacija, ovaj skup funkcija predstavlja "konačnu polugrupu".

Tako je, svakim konačnim automatom, određena jedna konačna polugrupa. Dakle, konačnim minimalnom automatom koji raspoznaje dati jezik, takođe je određena je konačna polugrupa, te svakom raspoznatljivom jeziku odgovara polugrupa određena njegovim minimalnim automatom. Ovu polugrupu iskoristićemo da bi dobili neke značajne informacije o datom jeziku.

Uočimo, najpre, kakav uticaj ulazne reči imaju na stanja automata.

Neka je dat konačan, dostižan deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$. Svakoj reči $x \in X$ možemo pridružiti preslikavanje $\eta_x : A \to A$ definisano sa

$$\eta_x(a) = \delta(a, x), \ \text{ za } \ a \in A.$$

Ovako definisano preslikavanje nazivamo *funkcijom prelaza* automata $\mathcal{A}$ određenom ulaznim slovom x. Skup svih funkcija prelaza određenih slovima ulaznog alfabeta automata označićemo sa $T_X = \{\eta_x \mid x \in X\}$.

Teorema 3.5.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ konačan, dostižan automat. Tada je $\eta_{xy} = \eta_x \circ \eta_y$, za sve $x, y \in X^*$. Funkcija prelaza η_e, određena praznom reči e, jeste identičko preslikavanje skupa A.*

Dokaz: Za slova $x, y \in X$ i preslikavanja $\eta_x, \eta_y : A \to A$ imamo da važi

$$(\eta_x \circ \eta_y)(a) = \eta_y(\eta_x(a)) = \delta(\delta(a, x), y) = \delta(a, xy) = \eta_{xy},$$

za svako stanje $a \in A$. Pored toga je $\eta_e(a) = \delta(a, e) = a$, za svako $a \in A$, te je jasno da je η_e identičko preslikavanje na skupu stanja automata $\mathcal{A}$. Ovim je tvrđenje dokazano. □

Kompoziciju funkcija $\eta_x \circ \eta_y$ ćemo, jednostavnosti radi, pisati $\eta_x \eta_y$. Indukcijom po dužini $n \in \mathbb{N}$ reči $x_1 x_2 \ldots x_n$ primenom prethodnog tvrđenja pokazujemo da je

$$\eta_{x_1 x_2 \ldots x_n} = \eta_{x_1} \circ \eta_{x_2} \circ \cdots \circ \eta_{x_n} = \eta_{x_1} \eta_{x_2} \ldots \eta_{x_n}.$$

Odavde zaključujemo da za sve reči $u, v \in X^*$, važi

$$\eta_{uv} = \eta_u \eta_v. \tag{3.6}$$

Skup svih funkcija prelaza automata $\mathcal{A}$ određenih rečima ulaznog alfabeta označićemo sa $M(A) = \{\eta_u \mid u \in X^*\}$. Iz prethodnog direktno sledi naredno tvrđenje:

Teorema 3.5.2. *Za proizvoljan konačan automat* $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ *je* $M(A)$ *monoid generisan skupom* T_X.

Dokaz: Prema 3.6 skup $M(A)$ sadrži kompoziciju svake dve funkcije prelaza određene rečima ulaznog alfabeta. Kompozicija funkcija je asocijativna i η_e je neutral u skupu $M(A)$, pa je $M(A)$ monoid. Kako svaka reč $u = x_1x_2 \ldots x_n \in X^*$ određuje funkciju $\eta_u = \eta_{x_1}\eta_{x_2}\ldots\eta_{x_n}$, jasno je da se svaki element monoida $M(A)$ može predstaviti kao kompozicija elemenata iz T_X, tj. $M(A)$ je generisan skupom T_X. □

Monoid $M(A)$ nazivamo *monoidom prelaza* automata $\mathcal{A}$.

Naredno tvrđenje direktno sledi iz prethodne teoreme i predstavlja efektivan postupak za nalaženje monoida prelaza datog automata.

Teorema 3.5.3. *Neka je* $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ *konačan, deterministički automat. Definišimo niz* $\{H^k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *podskupova monoida prelaza* $M(A)$ *tako da je:*

$$H^0 = \{\eta_e\}, \ \ H^1 = T_X, \ldots$$
$$H^k = \{\eta_{x_1}\eta_{x_2}\ldots\eta_{x_k} = \eta_{x_1x_2\ldots x_k} \,|\, \eta_{x_i} \in T_X, \ i = \overline{1,k}\}.$$

Zatim, induktivno formiramo niz skupova $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *sa:*

$$Y_0 = H^0, \ Y_1 = Y_0 \cup H^1,$$
$$Y_{k+1} = Y_k \cup H^{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}^0.$$

Tada važi sledeće:

(a) Niz $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *je rastući.*

(b) Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}^0$ *takav da je* $Y_{n_0} = Y_{n_0+1}$, *tada je* $M(A) = Y_{n_0}$.

Algoritam 3.5.4. (*Konstrukcija stabla monoida prelaza automata* $\mathcal{A}$**)** Ulaz ovog algoritma je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$. Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla monoida prelaza* automata $\mathcal{A}$. Stablo se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je η_e i mi stavljamo da je $Y_0 = \{\eta_e\}$.

(A2) Posle *i*tog koraka neka je konstruisano stablo Y_i i neka su čvorovi u Y_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U sledećem koraku konstruišemo stablo Y_{i+1} proširivanjem stabla Y_i na sledeći način: za svaki nezatvoren list η_u, za $u \in X^*$, u stablu Y_i i svako $x \in X$, dodajemo čvor $\eta_{ux} = \eta_u\eta_x$ i granu iz η_u u η_{ux} označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je η_{ux} funkcija prelaza koja je već bila konstruisana, i ako je to tačno, ako je funkcija η_{ux} jednaka nekom prethodno izračunatom prelazu, onda kažemo da je čvor η_{ux} 'zatvoren' i označavamo ga sa ■. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo monoida prelaza $M(A)$ automata $\mathcal{A}$ konstruisano, njegovi unutrašnji čvorovi predstavljaju različite elemente monoida $M(A)$.

Primer 3.5.5. Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$, sa skupom stanja $A = \{a, b, c\}$, inicijalnim stanjem a i ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$, čija je funkcija prelaza zadata tablicom:

$$\begin{array}{c|ccc} \delta & a & b & c \\ \hline x & b & c & a \\ y & b & b & b \end{array}.$$

Nalazimo monoid $M(A)$ generisan skupom T_X korišćenjem prethodne teoreme.

$$\eta_e = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \eta_x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \eta_y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

Dakle, $Y_0 = H^0 = \{\eta_e\}$, $H = \{\eta_x, \eta_y\}$ i $Y_1 = \{\eta_e, \eta_x, \eta_y\}$.

$$\eta_{xx} = \eta_x \eta_x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \eta_{xy} = \eta_x \eta_y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix} = \eta_y = \beta,$$

$$\eta_{yx} = \eta_y \eta_x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & c \end{pmatrix} = \gamma, \quad \eta_{yy} = \eta_y \eta_y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix} = \eta_y = \beta.$$

Odavde dobijamo $Y_2 = Y_1 \cup H^2 = \{\eta_e, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{yx}\} = \{\eta_e, \eta_x, \beta, \eta_{xx}, \gamma\}$.

$$\eta_{xxx} = \eta_x \eta_{xx} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \eta_e, \quad \eta_{xxy} = \eta_x \eta_{xy} = \eta_x \beta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix} = \beta,$$

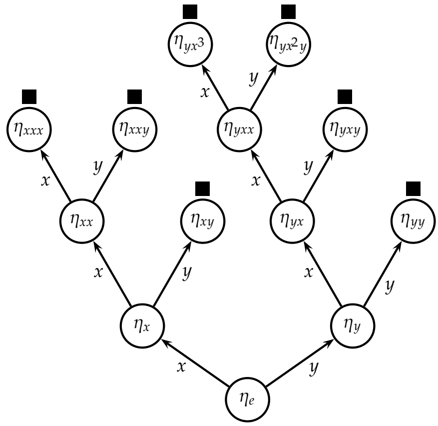
$$\eta_{yxx} = \gamma \eta_x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix} = \alpha, \quad \eta_{yxy} = \eta_y \beta = \beta,$$

Dobili smo skup $Y_3 = Y_2 \cup H^3 = \{\eta_e, \eta_x, \beta, \eta_{xx}, \gamma, \alpha\}$.

$$\eta_{yx^3} = \alpha \eta_x = \beta, \quad \eta_{yxxy} = \alpha \eta_y = \beta.$$

Vidimo da je $Y_4 = Y_3 \cup H^4 = Y_3$, što znači da monoid prelaza sadrži sledeće funkcije:

$$M(A) = Y_3 = \{\eta_e, \eta_x, \beta, \eta_{xx}, \gamma, \alpha\}.$$



Kao i svaku polugrupu i monoid prelaza automata, u odnosu na operaciju kompozicije preslikavanja možemo predstaviti Kejlijevom tablicom (pri čemu je potrebno znati kompoziciju svaka dva prelaza).

$$\eta_{xy}\eta_x = \eta_x\eta_{yx} = \eta_x\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & c \end{pmatrix} = \gamma, \quad \eta_{xy}\eta_y = \beta\eta_y = \beta,$$
$$\eta_{yy}\eta_x = \beta\eta_x = \gamma, \quad \eta_{yy}\eta_y = \beta\eta_y = \beta.$$

$$\eta_{x^3}\eta_x = \eta_x\eta_e = \eta_x, \quad \eta_{x^3}\eta_y = \eta_e\eta_y = \beta, \quad \eta_{xxy}\eta_x = \beta\eta_x = \gamma, \quad \eta_{xxy}\eta_y = \eta_x\beta = \beta.$$

$\circ$	η_e	η_x	β	η_{xx}	γ	α
η_e	η_e	η_x	β	η_{xx}	γ	α
η_x	η_x	η_{xx}	β	η_e	γ	α
β	β	γ	β	α	γ	α
η_{xx}	η_{xx}	η_e	β	η_x	γ	α
γ	γ	α	β	β	γ	α
α	α	β	β	γ	γ	α

Videli smo da, od beskonačno mnogo reči ulaznog monoida X^*, samo konačno mnogo utiče na rad konačnog, determinističkog automata. Zbog toga funkcije prelaza mogu znatno da pojednostave ispitivanje uticaja ulaznog alfabeta na rad automata jer, grupišu reči prema tome kako one utiču na prelaze iz jednog stanja u drugo. Na taj način se definiše relacija ekvivalencije, koja redukuju ulazni monoid na konačan broj klasa. Jednostavno se pokazuje da, relacija ϱ definisana na X^* na sledeći način:

$$(u,v) \in \varrho \quad \Leftrightarrow \quad \eta_u = \eta_v, \text{ za reči } u,v \in X^*,$$

jeste relacija ekvivalencije, koja ulazni monoid razbija na klase, pri čemu samo predstavnici svake od klasa utiču na rad automata. Primetimo da je ovako definisana relacija desna kongruencija određena desnim translacijama (prelazima) iz stanja u stanje.

3.6. Sintaksički monoid jezika

U ovom odeljku definisaćemo još jedan monoid koji je "do na izomorfzam" isti kao monoid prelaza minimalnog automata datog jezika L.

Kao što smo definisati raspoznatljivost jezika automatom, može se definisati i *raspoznavanje jezika monoidom* i to na sledeći način:

Monoid S raspoznaje jezik $L \subseteq X^*$ skupom $H \subseteq S$, ako postoji homomorfizam $\varphi : X^* \to S$ takav da je $L = \varphi^{-1}(H)$, tj.

$$L = \{u \in X^* \mid \varphi(u) \in H\} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in X^*)\; u \in L \;\Leftrightarrow\; \varphi(u) \in H.$$

Može se reći da monoid S raspoznaje jezik L homomorfizmom $\varphi : X^* \to S$ ako je $L = (\varphi \circ \varphi^{-1})(L)$.

Podsetimo da je *glavna kongruencija* (*sintaksička kongruencija*) na X^* određena jezikom L relacija definisana sa:

$$(u,v) \in \mu_L \quad \Leftrightarrow \quad (\forall p,q \in X^*)\; (puq \in L \;\Leftrightarrow\; pvq \in L).$$

Svaki par reči $(p,q) \in X^*$ za koji važi da je $puq \in L$ nazivamo *kontekstom reči $u \in X^*$ u odnosu na jezik L.*

Za dve reči u i v koje se javljaju u istim kontekstima u jeziku L kažemo da su *sintaksički ekvivalentne*.

Ako na faktor skupu $X^* /\!\!/ \mu_L$, u odnosu na operaciju konkatenacije, prirodno definišemo operaciju "$\cdot$" na sledeći način:

$$\mu_{L_u} \cdot \mu_{L_v} = \mu_{L_{uv}}, \text{ za proizvoljne } \mu_{L_u},\ \mu_{L_v} \in X^*.$$

onda je $(X^*/\mu_L, \cdot)$ faktor monoid koji se naziva *sintaksički monoid* jezika L i označava se sa $Syn(L)$.

Teorema 3.6.1. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, $Syn(L)$ je monoid najmanje kardinalnosti koji raspoznaje jezik L.*

Dokaz: Prirodno preslikavanje $\mu_L^\natural : X^* \mapsto X^* /\!\!/ \mu_L$ je homomorfizam i očigledno je da $Syn(L)$ raspoznaje jezik L podskupom $\{\mu_{L_u} \mid u \in L\} \subseteq X^*$. Neka je S monoid koji raspoznaje jezik L podskupom H. Tada postoji homomorfizam $\varphi : X^* \to S$ takav da je $L = \varphi^{-1}(H)$. Pokažimo da je $\ker\varphi \subseteq \mu_L$. Za proizvoljne reči $u,v \in X^*$ koje su u relaciji $(u,v) \in \ker\varphi$ je $\varphi(u) = \varphi(v)$. Ako $u \in L$, za sve reči $p,q \in X^*$ imamo $\varphi(puq) = \varphi(p)\varphi(u)\varphi(q) = \varphi(p)\varphi(v)\varphi(q) = \varphi(pvq)$, što prema definiciji glavne kongruencije znači da $(u,v) \in \mu_L$.

$$|Syn(L)| = |X^* /\!\!/ \mu_L| \leqslant |X^* /\!\!/ \ker\varphi| = |H| \leqslant |S|.$$

Ovim je dokaz komletiran. □

Narednu teoremu dokazaćemo na dva načina kako bi predstavili važne algebarske metode kojima se pokazuju iste karakteristike nekih struktura.

Teorema 3.6.2. *Sintaksički monoid $Syn(L)$ jezika $L \subseteq X^*$ izomorfan je monoidu prelaza minimalnog automata $\mathcal{A}_L$ jezika L.*

Dokaz: Definišimo preslikavanje $\varphi : X^* \to M(A_L)$ na sledeći način:

$$\varphi(u) = \eta_u, \quad \text{za} \quad u \in X^*.$$

Skup stanja minimalnog automata je $A_L = \{u^{-1}L \mid u \in X^*\}$, a dobru definisanost preslikavanja φ dokazujemo direktno, jer za svako $w \in X^*$, iz $u = v$ sledi

$$\eta_u(w) = \delta^{A_L}(w^{-1}L, u) = \delta^{A_L}(w^{-1}L, v) = \eta_v(w).$$

Prema jednakosti (3.6) preslikavanje φ je homomorfizam i očigledno je sirjektivno i prema tome epimorfizam. Videli smo da je $\ker\varphi \subseteq \mu_L$ i dokazaćemo da u ovom slučaju važi obratna inkluzija. Za $(u,v) \in \mu_L$ i proizvoljne reči $p,q \in X^*$ imamo

$$\begin{aligned}
(puq \in L) &\Leftrightarrow (pvq \in L)\\
(uq \in p^{-1}L) &\Leftrightarrow (vq \in p^{-1}L)\\
(q \in u^{-1}(p^{-1}L)) &\Leftrightarrow (q \in v^{-1}(p^{-1}L))\\
q \in \delta^{A_L}(p^{-1}L, u) &\Leftrightarrow q \in \delta^{A_L}(p^{-1}L, v)\\
q \in \eta_u(p^{-1}L) &\Leftrightarrow q \in \eta_v(p^{-1}L).
\end{aligned}$$

Kako ovo važi za proizvoljno izabrane reči zaključujemo da je $\eta_u = \eta_v$, tj. $\varphi(u) = \varphi(v)$. Pošto je $ker\varphi = \mu_L$, prema prvoj teoremi o izomorfizmu sintaksički monoid $Syn(L) = X^* /\!\!/ \ker\varphi$ je izomorfan monoidu prelaza minimalnog automata $M(A_L)$. □

Teoremu možemo dokazati i na drugi način, tako što definišemo preslikavanje $\psi : X^* /\!\!/ \mu_L \mapsto M(A_L)$ sa:

$$\psi(\mu_{L_u}) = \eta_u, \quad u \in X^*.$$

Slično kao u dokazu prethodne teoreme se pokazuje da je preslikavanje ψ dobro definisano, homomorfizam i bijekcija. Preslikavanje ψ može se definisati, ekvivalentno sa:

$$\psi(\mu_L^\natural(u)) = \varphi(u), \quad u \in X^*,$$

jer sledeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mu_L^\natural"'] & & S \\
& X^* /\!\!/ \mu_L \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

3.7. Sintaksička desna kongruencija

Ako je dat jezik $L \subseteq X^*$, definisaćemo još jednu relaciju ϱ_L na monoidu X^* na sledeći način:

$$(u,v) \in \varrho_L \;\Leftrightarrow\; (\forall w \in X^*)\,(uw \in L \;\Leftrightarrow\; vw \in L), \;\; \text{za sve}\;\; u,v \in X^*$$

Jednostavno se pokazuje da je ϱ_L relacija ekvivalencije na X^*, kao i da je desno kompatibilna (saglasna), pa je ϱ_L *desna kongruencija* na slobodnom monoidu X^*. Relaciju ϱ_L nazivaćemo *glavnom desnom kongruencijom* ili *sintaksičkom desnom kongruencijom* jezika L.

Indeks ekvivalencije je broj klasa neke relacije ekvivalencije, tj. broj elemenata faktor skupa, pa je indeks relaciju ϱ_L u oznaci $Ind(\varrho_L)$ broj elemenata skupa $X^* /\!\!/ \varrho_L$.

Za relaciju ekvivalencije na skupu K kažemo da *zasićuje* podskup $H \subseteq K$ ako se H može predstaviti u obliku unije nekih klasa ekvivalencije date relacije.

Neka je dat jezik $L \subseteq X^*$. Definišimo relaciju ε_L na X^* na sledeći način:

$$(u,v) \in \varepsilon_L \;\Leftrightarrow\; (u \in L \;\Leftrightarrow\; v \in L).$$

Jednostavno se pokazuje da je data relacija ekvivalencija na X^*.

Lema 3.7.1. *Relacija ekvivalencije ϱ na X^* zasićuje jezik $L \subseteq X^*$ ako i samo ako je $\varrho \subseteq \varepsilon_L$.*

Dokaz: Neka je ϱ relacija ekvivalencije na X^* koja zasićuje L. To znači da se jezik L može napisati u obliku

$$L = \bigcup L_i,$$

gde su L_i, neke ϱ-klase monoida X^*. Posmatrajmo proizvoljan par $(u,v) \in \varrho$. Ako $u \in L$ to znači da postoji klasa L_i takva da $u \in L_i$ i kako su $(u,v) \in \varrho$ sledi da $v \in L_i \subseteq L$. Na potpuno isti način pokazujemo i implikaciju na drugu stranu, odnosno ako $v \in L$ onda i $u \in L$. Dakle, imamo da je $(u,v) \in \varepsilon_L$, tj. $\varrho \subseteq \varepsilon_L$.

Obratno, neka je $\varrho \subseteq \varepsilon_L$. Jasno je da je

$$L \subseteq \bigcup_{u \in L} \varrho_u.$$

Da bi dokazali obratnu inkluziju, treba da dokažemo da je $\varrho_u \subseteq L$, za svaku reč $u \in L$. Zaista, za proizvoljno $u \in L$ i $v \in \varrho_u$ važi $(u,v) \in \varrho \subseteq \varepsilon_L$, pa $v \in L$. Prema tome,

$$\bigcup_{u \in L} \varrho_u \subseteq L,$$

što znači da ϱ zasićuje L. □

Teorema 3.7.2. *Za dati jezik $L \subseteq X^*$ relacija ϱ_L je najveća desna kongruencija na slobodnom monoidu X^* koja zasićuje L.*

Dokaz: Za dati jezik $L \subseteq X^*$ relacija ϱ_L je desna kongruencija. Za proizvoljne reči $(u,v) \in \varrho_L$ i $w = e$ dobijamo da $u = ue \in L$ ako i samo ako $ve = v \in L$, tj. $(u,v) \in \varepsilon_L$. Dakle, $\varrho_L \subseteq \varepsilon_L$ i prema prethodnoj lemi ϱ_L zasićuje L. Dokazaćemo da je proizvoljna desna kongruencija σ na X^* koja zasićuje L, sadržana u ϱ_L. Posmatrajmo proizvoljan par $(u,v) \in \sigma$. Zbog desne saglasnosti relacije σ, za proizvoljnu reč $w \in X^*$ važi $(uw,vw) \in \sigma \subseteq \varepsilon_L$. Dakle, reč $uw \in L$ ako i samo ako $vw \in L$, za svaki $w \in X^*$, što znači da $(u,v) \in \varrho_L$. Ovim smo pokazali da je $\sigma \subseteq \varrho_L$, tj. da je ϱ_L najveća desna kongruencija na X^* koja zasićuje L. □

Neka je σ desna kongruencija na X^* konačnog indeksa.
Definišimo preslikavanje $\delta^{X^*/\!\!/\sigma} : X^*/\!\!/\sigma \times X^* \mapsto X^*/\!\!/\sigma$ na sledeći način:

$$\delta^{X^*/\!\!/\sigma}(\sigma_u, v) = \sigma_{uv},$$

za sve $u,v \in X^*$. Skup $\tau^{X^*/\!\!/\sigma}$ neka bude skup nekih σ-klasa iz $X^*/\!\!/\sigma$. Uvedimo oznaku $\mathcal{A}_\sigma = (X^*/\!\!/\sigma, X, \delta^{X^*/\!\!/\sigma}, \sigma_e, \tau^{X^*/\!\!/\sigma})$. Za reči $u,v \in X^*$ koje su u relaciji je $\sigma_u = \sigma_v$ i zbog desne kompatibilnosti relacije σ, za $w \in X^*$ su $(uw,vw) \in \sigma$, tj. $\sigma_{uw} = \sigma_{vw}$, pa je

$$\delta^{X^*/\!\!/\sigma}(\sigma_u, w) = \sigma_{uw} = \sigma_{vw} = \delta^{X^*/\!\!/\sigma}(\sigma_v, w).$$

Dakle $\mathcal{A}_\sigma$ je konačan deterministički automat, jer je funkcija prelaza dobro definisana i ne zavisi od izbora predstavnika klasa.

Teorema 3.7.3. *Neka je $L \subseteq X^*$ dati jezik i neka je σ proizvoljna desna kongruencija na X^*. Automat $\mathcal{A}_\sigma = (X^*/\!\!/\sigma, X, \delta^{X^*/\!\!/\sigma}, \sigma_e, \tau^{X^*/\!\!/\sigma})$ raspoznaje L ako i samo ako σ zasićuje jezik L.*

Dokaz: Pretostavimo da automat $\mathcal{A}_\sigma$ raspoznaje jezik L skupom finalnih stanja $\tau^{X^*/\!\!/\sigma}$. To znači da je

$$L = \{u \in X^* \mid \delta^{X^*/\!\!/\sigma}(\sigma_e, u) \in \tau^{X^*/\!\!/\sigma}\} = \{u \in X^* \mid \sigma_u \in \tau^{X^*/\!\!/\sigma}\},$$

Kako svaki element pripada svojoj klasi ekvivalencije, očigledno je da je

$$L \subseteq \bigcup_{u \in L} \sigma_u.$$

Ako je $u \in L$, za svaki $v \in \sigma_u$ je $\sigma_u = \sigma_v \in \tau^{X^*/\!\!/\sigma}$, što znači da $v \in L$ i obratno, $v \in L$ povlači $u \in L$, pa $(u,v) \in \varepsilon_L$. Pošto je $\sigma \subseteq \varepsilon_L$, prema Lemi 3.7.1. σ zasićije L.

Obratno, neka σ zasićuje L, tj. neka je L unija nekih σ-klasa. Označimo sa $\tau^{X^*/\!\!/\sigma} = \{\sigma_u \mid u \in L\}$ uniju σ-klasa svih reči sadržanih u L. Tada je

$$L = \{u \in X^* \mid \sigma_u \in \tau^{X^*/\!\!/\sigma}\} = \{u \in X^* \mid \delta^{X^*/\!\!/\sigma}(\sigma_e, u) \in \tau^{X^*/\!\!/\sigma}\},$$

što znači da $\mathcal{A}_\sigma$ raspoznaje jezik L skupom završnih stanja $\tau^{X^*/\!\!/\sigma}$. □

Posledica 3.7.4. *Proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$ moguće je raspoznati nekim automatom.*

Dokaz: Prema Teoremi 3.7.2., glavna desna kongruencija ϱ_L na X^* određena sa L zasićuje L, pa na osnovu prethodne teoreme dobijamo da automat $\mathcal{A}_{\varrho_L}$ raspoznaje L. □

Primetimo, takođe, da je glavna kongruencuja $\mu_L \subseteq \varepsilon_L$, pa prema lemi 3.7.1. i prethodnoj teoremi i faktor automat

$$\mathcal{A}_{\mu_L} = (X^*/\!\!/\mu_L, X, \delta^{X^*/\!\!/\mu_L}, \mu_{L_e}, \tau^{X^*/\!\!/\mu_L})$$

raspoznaje jezik L. Međutim, faktor automat $\mathcal{A}_{\varrho_L}$ je posebno zanimljiv, jer ima važnu osobinu da je automat sa najmanjim brojem stanja među automatima koji raspoznaju L.

Teorema 3.7.5. *Za proizvoljan jezik $L \subseteq X^*$, automat $\mathcal{A}_{\varrho_L}$ je automat najmanje kardinalnosti koji raspoznaje L, odnosno $L = [\![\mathcal{A}_{\varrho_L}]\!]$.*

Dokaz: Pokazaćemo da je faktor automat u odnosu na najveću desnu kongruenciju

$$\mathcal{A}_{\varrho_L} = (X^*/\!\!/\varrho_L, X, \delta^{X^*/\!\!/\varrho_L}, \varrho_{L_e}, \tau^{X^*/\!\!/\varrho_L})$$

automat najmanje kardinalnosti koji raspoznaje jezik L tako što ćemo pokazati da je izomorfan minimalnom automatu (automatu desnih razlomaka) $\mathcal{A}_L = (A_L, X, \delta^{A_L}, L, \tau^{A_L})$ jezika L. Jednostavnosti radi označimo najveću desnu kongruenciju sa ϱ. Definišimo preslikavanje $\varphi : X^*/\!\!/\varrho \mapsto A_L$ sa:

$$\varphi(\varrho_u) = u^{-1}L,$$

za $u \in X^*$. Neka su $u, v \in X^*$ reči takve da je $\varrho_u = \varrho_v$. Pošto su $(u,v) \in \varrho$ to $uw \in L$ ako i samo ako $vw \in L$, za svaki $w \in X^*$. Dakle, uslov $w \in u^{-1}L$ ekvivalentan je sa $w \in v^{-1}L$, što znači da je $u^{-1}L = v^{-1}L$ i time smo dokazali dobru definisanost preslikavanja φ. Slično se pokazuje da iz jednakosti slika $u^{-1}L = v^{-1}L$ sledi jednakost klasa $\varrho_u = \varrho_v$, za sve $u, v \in X^*$, pa je φ preslikavanje "1-1". Očigledno je da je preslikavanje φ surjektivno, pa je bijekcija. Takođe, $\varphi(\varrho_e) = e^{-1}L = L$ i

$$\varrho_u \in \tau^{A_\varrho} \;\Leftrightarrow\; u \in L \;\Leftrightarrow\; ue \in L \;\Leftrightarrow\; e \in u^{-1}L \;\Leftrightarrow\; u^{-1}L \in \tau^{A_L}.$$

Jasno, $\varphi(\varrho_u) \in \tau^{A_L}$ pa se inicijalno stanje preslikavanjem φ slika i inicijalno stanje automata $\mathcal{A}_L$ i svako završno stanje automata $\mathcal{A}_\varrho$ slika se u završno stanje automata desnih razlomaka. Po definiciji faktor automata, za reči $u,v \in X^*$ važi:

$$\begin{aligned}\varphi(\delta^{A_\varrho}(\varrho_u, v)) &= \varphi(\varrho_{(uv)}) = (uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)\\ &= \delta^{A_L}(u^{-1}L, v) = \delta^{A_L}(\varphi(\varrho_u), v).\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali da je φ izomorfizam iz automata $\mathcal{A}_\varrho$ na $\mathcal{A}_L$, što znači da je faktor automat u odnosu na glavnu desnu kongruenciju minimalni u klasi automata koji raspoznaju L. □

Teorema 3.7.6. *Jezik $L \subseteq X^*$ je raspoznatljiv konačnim automatom ako i samo ako je glavna desna kongruencija ϱ_L konačnog indeksa.*

Dokaz: Kako glavna desna kongruencija ϱ_L zasićuje L, faktor automat $\mathcal{A}_{\varrho_L}$ raspoznaje L. Ako je $Ind(\varrho_L)$ konačan, skup $X^* /\!\!/ \varrho_L$ je konačan, što znači da je $\mathcal{A}_{\varrho_L}$ konačan automat koji raspoznaje jezik L.

Obratno, ako je $\mathcal{A}$ konačan automat sa n stanja koji raspoznaje L i, prema prethodnoj teoremi

$$Ind(\varrho_L) = |X^* /\!\!/ \varrho_L| \leqslant n,$$

što je i trebalo dokazati. □

Gledano sa aspekta praktične realizacije raspoznavanja jezika automatom, najznačajniji su jezici nad konačnim alfabetom koji mogu biti raspoznati konačnim automatom. Videli smo da se svaki jezik može raspoznati nekim automatom koji nije obavezno konačan, odnosno da nije svaki jezik raspoznatljiv. Narednom teoremom predstavićemo neke potrebne i dovoljne uslove da jezik nad konačnim alfabetom bude raspoznatljiv.

Teorema 3.7.7. *Neka je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *L je raspoznatljiv;*

(ii) *L je zasićen nekom desnom kongruencijom na X^* konačnog indeksa;*

(iii) *glavna desna kongruencija ϱ_L na X^* je konačnog indeksa;*

(iv) *L može biti raspoznat konačnim monoidom;*

(v) *L je zasićen nekom kongruencijom na X^* konačnog indeksa;*

(vi) *sintaksička kongruencija μ_L na X^* je konačnog indeksa.*

Dokaz: (i)⇒(iii). Ako jezik L može biti raspoznat nekim konačnim automatom, to prema Teoremi 3.3.6. znači da je i minimalni automat $\mathcal{A}_L$ konačan, odnosno da važi (iii).

(iii)⇒(ii). Ovo sledi neposredno.

(ii)⇒(i). Ako je jezik L zasićen nekom desnom kongruencijom σ na X^* konačnog indeksa, tada prema Teoremi 3.7.3. faktor automat $\mathcal{A}_\sigma$ jeste konačni automat koji raspoznaje L.

(iv)⇒(vi). Ova implikacija se dokazuje slično kao implikacija (i)⇒(iii), korišćenjem Teoreme 3.6.2..

(vi)⇒(v). Ovo sledi neposredno.

(v)⇒(iv). Ovo se dokazuje slično kao (i)⇒(iii), korišćenjem Teoreme 3.6.2..

(iii)⇒(vi). Uslov (iii) znači da je minimalni automat jezika L konačan, a u tom slučaju i njegov monoid prelaza mora biti konačan, što prema Teoremi 3.6.2. povlači da je sintaksički monoid $Syn(L)$ jezika L konačan, što je ekvivalentno sa (vi).

(vi)⇒(iii). Jasno je da je $\mu_L \subseteq \varrho_L$, odakle je $Ind(\varrho_L) \leqslant Ind(\mu_L)$, što dokazuje implikaciju (vi)⇒(iii). □

Primer 3.7.8. Neka je $A = \{x, y\}$ i $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dokazaćemo da L nije raspoznatljiv jezik.

Pretpostavićemo suprotno, da postoji konačan automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ koji raspoznaje L skupom $\tau^A \subseteq A$. Uvedimo oznaku $a_n = a_0 x^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Kako smo pretpostavili da je A konačan skup, to je $a_m = a_n$, za neke $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Međutim, onda dobijamo da je

$$a_0 x^m y^n = a_m y^n = a_n y^n = a_0 x^n y^n \in \tau^A,$$

a to znači da je $x^m y^n \in L$, što je u suprotnosti sa definicijom jezika L. Ovim smo dokazali da L nije raspoznatljiv jezik.

3.8. Zadaci

3.8.1. Konstruisati minimalni deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ koji prihvata jezik:

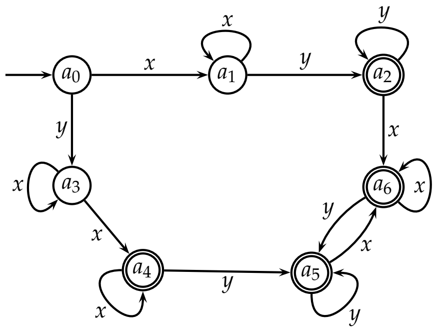
(a) $L(A) = \{w \in \{x, y\}^* \mid$ svakom x u w prethodi y i iza svakog x sledi $y\}$;

(b) $L(A) = \{w \in \{x, y\}^* \mid w$ ima $xyxy$ kao podreč$\}$;

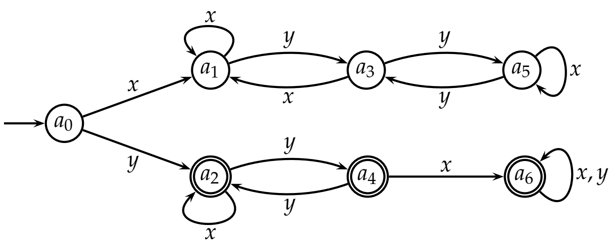
(c) $L(A) = \{w \in \{x, y\}^* \mid w$ ima neparan broj slova x i paran broj slova $y\}$;

(d) $L(A) = \{w \in \{x, y\}^* \mid w$ nema ni xx ni yy kao podreč$\}$

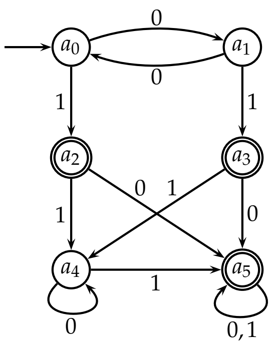
3.8.2. Minimizirati automat sa slike:



3.8.3. Minimizirati automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ predstavljen sledećim grafom:



3.8.4. Minimizirati automat sa slike:



3.8.5. Naći sintaksički monoid jezika $L = X^*xyxX^*$.

3.8.6. Neka je $L = \{u \in \{x,y\}^* \mid |u|_x = |u|_y\}$. Da li L može biti raspoznat konačnim automatom?

3.8.7. Ispitati raspoznatljivost jezika $L = \{u \in \{x,y\}^* \mid |u|_x \equiv 1 \pmod 3\}$.

3.8.8. Dokazati da jezik $L = \{u\overline{u} \mid u \in \{x,y\}^*\}$ nije raspoznatljiv.

3.8.9. Dokazati da jezik $L = \{a^p \mid p \text{ je prost broj}\}$ nije raspoznatljiv.

3.8.10. Da li je raspoznatljiv jezik $L = \{u \in X^* \mid |u|_x < |u|_y\}$?

3.8.11. Dokazati da je raspoznatljiv jezik

$$L = \{u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ je binarni zapis broja } n = 2^m(2^k - 1) + 1, \text{ za } m + k - \text{parno}\}.$$

Glava 4
Nedeterministički automati

U Glavi 4 se razmatraju nedeterministički automati i neki fundamentalni problemi koji se tiču takvih automata. Za razliku od determinističkih automata, koji se mogu minimizovati veoma brzim algoritmima, problem minimizacije nedeterminističkih automata je algoritamski težak. Zbog toga je kod nedeterminističkih automata svrsishodnije naći takve algoritme za redukciju broja stanja koji, možda, neće dati minimalni automat, ali će biti realizovani u polinomijalnom vremenu i daće automate sa razumno malim brojem stanja. Takvi algoritmi su razvijeni u Odeljku 4.3. Ključnu ulogu u tome igra koncept količničkog automata, koji je uveden u prethodnom odeljku.

Drugi važan problem koji se ovde razmatra je kako ustanoviti da li su dva data nedeterministička automata ekvivalentna, odnosno da li jedan od njih simulira rad drugog. Taj problem se razmatra u nastavku ove glave. Uvode se dva tipa simulacija i četiri tipa bisimulacija, pri čemu se pokazuje da postojanje bilo koje od tih bisimulacija povlači ekvivalenciju automata. Daju se polinomijalni algoritmi kojima se testira da li između data dva automata postoji simulacija ili bisimulacija određenog tipa i, ukoliko postoji, izračunava se najveća simulacija, odnosno bisimulacija, tog tipa. Takođe se uvode takozvane slabe simulacije i bisimulacije i daju se algoritmi za testiranje njihovog postojanja i, eventualno, izračunavanje najveće. Iako ovi algoritmi mogu biti znatno sporiji od algoritama za nalaženje običnih simulacija i bisimulacija, slabe simulacije i bisimulacije daju bolje rezultate od ovih drugih u testiranju postojanja jezičke inkluzije, odnosno jezičke ekvivalencije.

Pristup redukciji broja stanja i izračunavanju najvećih simulacija i bisimulacija, prikazan u ovoj glavi, je originalan i zasnovan je na nalaženju najvećih rešenja izvesnih sistema relacijskih nejednačina i jednačina.

4.1. Osnovni koncepti

Nedeterministički konačan automat nad alfabetom X definišemo kao uređenu petorku $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, gde je A konačan neprazan skup, koji nazivamo *skup stanja* a njegove elemente *stanjima* tog automata, $\delta^A \subseteq A \times X \times A$ je ternarna relacija, koju nazivamo *relacija prelaza*, a σ^A i τ^A su podskupovi skupa stanja A, pri čemu σ^A nazivamo skupom *inicijalnih stanja* a τ^A skupom *završnih stanja* ili *finalnih stanja*. Jednostavnosti radi, umesto nedeterministički konačan automat najčešće ćemo govoriti kraće *nedeterministički automat*, ili još kraće *automat*.

Za svaki $x \in X$, binarnu relaciju $\delta_x^A \subseteq A \times A$ definisanu sa

$$(a,b) \in \delta_x^A \;\Leftrightarrow\; (a,x,b) \in \delta^A, \;\text{ za sve } a,b \in A,$$

takođe nazivamo *relacija prelaza*. Drugim rečima, ralaciju δ^A možemo identifikovati sa familijom relacija $\{\delta_x^A\}_{x\in X}$. Za svaku reč $u \in X^*$, *proširena relacija prelaza* $\delta_u^A \subseteq A \times A$ se definiše induktivno na sledeći način: za praznu reč $e \in X^*$ uzimamo da δ_e^A jeste identička relacija na A, odnosno, $(a,b) \in \delta_e^A$ ako i samo ako je $a = b$, i za sve $u,v \in X^*$ stavljamo da je $\delta_{uv}^A = \delta_u^A \circ \delta_v^A$.

Intuitivno, rad ovako definisanog automata može se shvatiti na sledeći način. Automat kreće sa radom iz nekog od inicijalnih stanja. Ukoliko se u nekom trenutku automat nađe u stanju a, pod uticajem ulaznog simbola x može se preći u stanje b ako i samo ako je $(a,x,b) \in \delta^A$, odnosno $(a,b) \in \delta_x^A$. Štaviše, ako se automat nađe u stanju a i na njegov ulaz redom dospevaju ulazni simboli $x_1, x_2, \dots, x_n$, tada pod uticajem ulazne reči $u = x_1x_2\dots x_n$ automat može preći u stanje b ako i samo ako je $(a,b) \in \delta_u^A$, tj., ako postoji niz stanja $c_1,\dots,c_{n-1}$ tako da $(a,c_1) \in \delta_{x_1}^A, (c_1,c_2) \in \delta_{x_2}^A, \dots, (x_{n-1},b) \in \delta_{x_n}^A$. Stanja $c_1,\dots,c_{n-1}$ nazivamo međustanjima na putu od a do b. Taj niz međustanja ne mora biti jedinstven, pod uticajem ulazne reči u nedeterministički automat može dospeti iz stanja a u stanje b preko više različitih nizova međustanja. Automat može (mada ne mora) završiti rad čim dospe u neko od završnih stanja.

Ako zanemarimo inicijalna i završna stanja, tada par $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A)$ nazivamo *označeni tranzicioni sistem* nad X. Ako je $\sigma^A = \{a_0\}$, za neki $a_0 \in A$, i relacija δ^A je funkcija iz $A \times X$ u A, jasno je da tada $\mathcal{A}$ jeste *deterministički konačan automat*. U tom slučaju, izrazi $(a,x,a') \in \delta^A$ i $\delta^A(a,x) = a'$ imaće isto značenje. Primetimo da kod determinističkog automata imamo da je δ_u^A takođe funkcija iz A u A, za svaki $u \in X^*$, i obično pišemo $\delta_u^A(a) = a'$ umesto $(a,a') \in \delta_u^A$.

U brojnim izvorima koji se bave automatima može se sresti i drugačija definicija nedeterminističkih automata. Prema toj drugoj definiciji, nedeterministički automat je uređena petorka $\mathcal{A} = (A, X, \gamma^A, \sigma^A, \tau^A)$, gde je A konačan neprazan skup stanja, skupovi inicijalnih i završnih stanja σ^A i τ^A su isti kao u prvoj definiciji, a prelazi su zadati funkcijom $\gamma^A : A \times X \to 2^A$. Kod ovako definisanog nedeterminističkog automata, iz stanja a se pod uticajem ulaznog simbola x može preći u stanje b ako i samo ako je $b \in \gamma^A(a,x)$. Očigledno, ova definicija je ekvivalentna prvoj definiciji. Naime, funkciju $\gamma^A : A \times X \to 2^A$ možemo pretvoriti u relaciju $\delta^A \subseteq A \times X \times A$ tako što ćemo za $a,b \in A$ i $x \in X$ staviti da $(a,x,b) \in \delta^A$ ako i samo ako $b \in \gamma^A(a,x)$. Sa druge strane, relaciju $\delta^A \subseteq A \times X \times A$ možemo pretvoriti u funkciju $\gamma^A : A \times X \to 2^A$ tako što ćemo za $a \in A$ i $x \in X$ staviti da je $\gamma^A(a,x) = \{b \in A \,|\, (a,x,b) \in \delta^A\}$. U Glavama 4. i 5. ove knjige koristićemo uglavnom definiciju koju smo prvu naveli, dok će u Glavi 6. biti zgodnije koristiti drugu definiciju.

Napomenimo da nedeterminističke automate predstavljamo grafovima na isti način kao i determinističke automate, što je opisano u prethodnoj glavi.

Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Njegov *reverzni automat* je automat $\bar{\mathcal{A}} = (A, X, \bar{\delta}^A, \bar{\sigma}^A, \bar{\tau}^A)$ čija relacija prelaza i skupovi inicijalnih i terminalnih stanja su definisani sa $\bar{\delta}^A(a, x, b) = \delta^A(b, x, a)$, za sve $a, b \in A$ i $x \in X$, $\bar{\sigma}^A = \tau^A$ i $\bar{\tau}^A = \sigma^A$. Drugim rečima, $\bar{\delta}^A_x = (\delta^A_x)^{-1}$, za svaki $x \in X$.

Automat $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ je *podautomat* automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ ako je $B \subseteq A$, δ^B_x je restrikcija od δ^A_x na $B \times B$, za svaki $x \in X$, i σ^B i τ^B su restrikcije od σ^A i τ^A na B, tj., $\delta^B_x = \delta^A_x \cap B \times B$, $\sigma^B = \sigma^A \cap B$ i $\tau^B = \tau^A \cap B$.

Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$. *Izomorfizam* između nedeterminističkih automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je bijektivna funkcija $\phi : A \to B$ takva da, za sve $a, a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, važi sledeće:

$$(a_1, a_2) \in \delta^A_x \;\Leftrightarrow\; (\phi(a_1), \phi(a_2)) \in \delta^B_x, \tag{4.1}$$

$$a \in \sigma^A \;\Leftrightarrow\; \phi(a) \in \sigma^B, \tag{4.2}$$

$$a \in \tau^A \;\Leftrightarrow\; \phi(a) \in \tau^B. \tag{4.3}$$

Nije teško proveriti da je kompozicija dva izomorfizma automata takođe izomorfizam, i prema tome, za proizvoljne automate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, iz $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$ sledi $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$. Podsetimo da se injektivna funkcija $\phi : A \to B$ koja zadovoljava (4.1)–(4.3) naziva se *monomorfizam* iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. Lako se proverava da je $\phi : A \to B$ monomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je izomorfizam iz $\mathcal{A}$ na podautomat $\mathcal{C} = (C, X, \delta^C, \sigma^C, \tau^C)$ od $\mathcal{B}$, gde je $C = \mathrm{Im}\,\phi$.

Jezik raspoznat automatom $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, u oznaci $[\![\mathcal{A}]\!]$, je jezik u X^* definisan na sledeći način: za sve $u \in X^*$ je

$$u \in [\![\mathcal{A}]\!] \;\Leftrightarrow\; (\exists a, b \in A)\big(a \in \sigma^A \wedge (a, b) \in \delta^A_u \wedge b \in \tau^A\big). \tag{4.4}$$

Primetimo da za $u = e$ iz (4.4) dobijamo

$$e \in [\![\mathcal{A}]\!] \;\Leftrightarrow\; (\exists a \in A)\, a \in \sigma^A \cap \tau^A.$$

U oznakama iz Odeljka 1.1. (formule (1.1)–(1.4)), formula (4.4) se takođe može napisati i na sledeći način:

$$u \in [\![\mathcal{A}]\!] \;\Leftrightarrow\; \sigma^A \circ \delta^A_u \circ \tau^A = 1 \tag{4.5}$$

(kada je A konačan, onda $\sigma^A \circ \delta^A_u \circ \tau^A = (\sigma^A \circ \delta^A_u) \circ \tau^A = \sigma^A \circ (\delta^A_u \circ \tau^A)$ možemo shvatiti kao skalarne proizvode dva Bulova vektora). Ovakav način pisanja će nam u daljem tekstu značajno olakšati rad. Uočimo takođe da je $\sigma^A \circ \delta^A_e = \sigma^A$, odnosno $\delta^A_e \circ \tau^A = \tau^A$, pa (4.5) daje

$$e \in [\![\mathcal{A}]\!] \;\Leftrightarrow\; \sigma^A \circ \tau^A = 1.$$

Za dva automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su *jezički-ekvivalentni*, ili jednostavnije, samo *ekvivalentni*, ako raspoznaju isti jezik, tj., ako je $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{B}]\!]$.

4.2. Količnički automati

Da bi pojednostavili pisanje, u daljem tekstu ćemo za relacije na skupu stanja automata $\mathcal{A}$ govoriti da su relacije na automatu $\mathcal{A}$.

Neka je R proizvoljno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Potsetimo da sa $A/\!\!/R$ označavamo skup svih R-aftersetova. Bez ikakvih dodatnih zahteva nametnutih kvazi-uređenju R može se definisati relacija prelaza $\delta^{A/\!\!/R} \subseteq A/\!\!/R \times X \times A/\!\!/R$ sa

$$\begin{aligned}(R_{a_1}, x, R_{a_2}) \in \delta^{A/\!\!/R} &\Leftrightarrow (\exists a_1', a_2' \in A)\Big((a_1, a_1') \in R \wedge (a_1', x, a_2') \in \delta^A \wedge (a_2', a_2) \in R\Big)\\ &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in R \circ \delta_x \circ R,\end{aligned}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, i mogu se definisati skupovi $\sigma^{A/\!\!/R}, \tau^{A/\!\!/R} \subseteq A/\!\!/R$ sa

$$R_a \in \sigma^{A/\!\!/R} \Leftrightarrow (\exists a' \in A)\Big(a' \in \sigma^A \wedge (a', a) \in R\Big) \Leftrightarrow a \in \sigma^A \circ R, \tag{4.6}$$

$$R_a \in \tau^{A/\!\!/R} \Leftrightarrow (\exists a' \in A)\Big((a, a') \in R \wedge a' \in \tau^A\Big) \Leftrightarrow a \in R \circ \tau^A, \tag{4.7}$$

za svaki $a \in A$. Jasno, ako su $a_1, a_2, a, b_1, b_2, b \in A$ elementi takvi da je $R_{a_1} = R_{b_1}$, $R_{a_2} = R_{b_2}$ i $R_a = R_b$, tada prema Teoremi 1.2.6. imamo da je $R^{a_2} = R^{b_2}$ i $R^a = R^b$, i dalje, za sve $a_1', a_2', a' \in A$ važi

$$\begin{aligned}&(a_1, a_1') \in R \Leftrightarrow a_1' \in R_{a_1} \Leftrightarrow a_1' \in R_{b_1} \Leftrightarrow (b_1, a_1') \in R,\\ &(a_2', a_2) \in R \Leftrightarrow a_2' \in R^{a_2} \Leftrightarrow a_2' \in R^{b_2} \Leftrightarrow (a_2', b_2) \in R,\\ &(a', a) \in R \Leftrightarrow a' \in R^a \Leftrightarrow a' \in R^b \Leftrightarrow (a', b) \in R,\\ &(a, a') \in R \Leftrightarrow a' \in R_a \Leftrightarrow a' \in R_b \Leftrightarrow (b, a') \in R.\end{aligned}$$

Prema tome, relacija $\delta^{A/\!\!/R}$ i skupovi $\sigma^{A/\!\!/R}$ i $\tau^{A/\!\!/R}$ su dobro definisani, u smislu da ne zavise od izbora predstavnika R-afterseta, što znači da uređena četvorka $\mathcal{A}/\!\!/R = (A/\!\!/R, X, \delta^{A/\!\!/R}, \sigma^{A/\!\!/R}, \tau^{A/\!\!/R})$ jeste nedeterministički automat.

Na isti način se definiše automat koji kao skup stanja ima skup svih R-foreseta od $\mathcal{A}$. To je automat $\mathcal{A}\backslash\!\!\backslash R = (A\backslash\!\!\backslash R, X, \delta^{A\backslash\!\!\backslash R}, \sigma^{A\backslash\!\!\backslash R}, \tau^{A\backslash\!\!\backslash R})$ sa relacijom prelaza $\delta^{A\backslash\!\!\backslash R}$ i skupovima inicijalnih i završnih stanja $\sigma^{A\backslash\!\!\backslash R}$ i $\tau^{A\backslash\!\!\backslash R}$ definisanim sa:

$$\begin{aligned}(R^{a_1}, x, R^{a_2}) \in \delta^{A\backslash\!\!\backslash R} &\Leftrightarrow (\exists a_1', a_2' \in A)\Big((a_1, a_1') \in R \wedge (a_1', x, a_2') \in \delta^A \wedge (a_2', a_2) \in R\Big)\\ &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in R \circ \delta_x \circ R,\end{aligned}$$

za sve $a_1, a_2 \in A$ i $x \in X$, i

$$R^a \in \sigma^{A\backslash\!\backslash R} \;\Leftrightarrow\; (\exists a' \in A)\Big(a' \in \sigma^A \wedge (a',a) \in R\Big) \Leftrightarrow\; a \in \sigma^A \circ R,$$
$$R^a \in \tau^{A\backslash\!\backslash R} \;\Leftrightarrow\; (\exists a' \in A)\Big((a,a') \in R \wedge a' \in \tau^A\Big) \Leftrightarrow\; a \in R \circ \tau^A,$$

za svaki $a \in A$.

Za proizvoljno kvazi-uređenje R na automatu $\mathcal{A}$, neposredno iz definicija automata $\mathcal{A}/\!\!/R$ i $\mathcal{A}\backslash\!\backslash R$ i Teoreme 1.2.6. sledi da su ta dva automata izomorfna, zbog čega ćemo nadalje raditi samo sa automatom $\mathcal{A}/\!\!/R$. Taj automat ćemo zvati *količnički automat* od $\mathcal{A}$ u odnosu na R. Iako prema Teoremi 1.2.6. količnički automati automata $\mathcal{A}$ u odnosu na kvazi-uređenje R i njegovu prirodnu ekvivalenciju E_R imaju isti broj stanja, oni ne moraju biti izomorfni (to je pokazano u kasnijem primeru).

Naredne teoreme se mogu shvatiti kao verzija, za nedeterminističke automate, dveju dobro poznatih teorema univerzalne algebre: Druge teoreme o izomorfizmu i Teoreme o korespondenciji (videti [9, II.§6]).

Teorema 4.2.1. *Neka su R i S dva kvazi-uređenja na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ takva da je $R \subseteq S$. Tada relacija $S/\!\!/R$ na $A/\!\!/R$ definisana sa*

$$(R_a, R_b) \in S/\!\!/R \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in S, \quad \text{za sve } a,b \in A, \tag{4.8}$$

je kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$ i količnički automati $(\mathcal{A}/\!\!/R)/\!\!/(S/\!\!/R)$ i $\mathcal{A}/\!\!/S$ su izomorfni.

Osim toga, ako je S relacija ekvivalencije, onda je i $S/\!\!/R$ relacija ekvivalencije.

Dokaz: Neka su $a, a', b, b' \in A$ takvi da je $R_a = R_{a'}$ i $R_b = R_{b'}$, odnosno, u skladu sa Teoremom 1.2.6., takvi da je $(a,a'), (b,b') \in E_R$. Kako je $R \subseteq S$, to takođe imamo da je $R^{-1} \subseteq S^{-1}$, pa je $E_R \subseteq E_S$, odakle dobijamo da $(a,a'), (b,b') \in E_S$. Sada opet na osnovu Teoreme 1.2.6. zaključujemo da je $S_a = S_{a'}$ i $S^b = S^{b'}$, odakle neposredno sledi da $(a,b) \in S$ ako i samo ako $(a',b') \in S$. To znači da je relacija $S/\!\!/R$ dobro definisana, tj., ne zavisi od izbora predstavnika R-afterseta. Jednostavno se proverava $S/\!\!/R$ je kvazi-uređenje, odnosno da je relacija ekvivalencije, ukoliko je S relacija ekvivalencije.

Jednostavnosti radi stavimo da je $S/\!\!/R = Q$, i defininišimo funkciju ϕ iz $A/\!\!/S$ u $(A/\!\!/R)/\!\!/Q$ na sledeći način:

$$\phi(S_a) = Q_{R_a}, \qquad \text{za svaki } a \in A.$$

Za proizvoljne $a, b \in A$ imamo da je

$$S_a = S_b \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in S \;\Leftrightarrow\; (R_a, R_b) \in Q \;\Leftrightarrow\; Q_{R_a} = Q_{R_b} \;\Leftrightarrow\; \phi(S_a) = \phi(S_b),$$

i prema tome, ϕ je dobro definisana injektivna funkcija. Jasno je da ϕ takođe jeste i surjektivna funkcija. Prema tome, ϕ je bijekcija iz $A/\!\!/S$ na $(A/\!\!/R)/\!\!/Q$.

Kako je $R \subseteq S$ ekvivalentno sa $R \circ S = S \circ R = S$, za proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
(\phi(S_a),\phi(S_b)) \in \delta_x^{(A/\!\!/R)/\!\!/Q} &\Leftrightarrow (Q_{R_a},Q_{R_b}) \in \delta_x^{(A/\!\!/R)/\!\!/Q} \\
&\Leftrightarrow (R_a,R_b) \in (Q \circ \delta_x^{A/\!\!/R} \circ Q) \\
&\Leftrightarrow (\exists a',b' \in A)\Big((R_a,R_{a'}) \in Q \wedge (R_{a'},R_{b'}) \in \delta_x^{A/\!\!/R} \wedge (R_{b'},R_b) \in Q\Big) \\
&\Leftrightarrow (\exists a',b' \in A)\Big((a,a') \in S \wedge (a',b') \in (R \circ \delta_x^{A} \circ R) \wedge (b',b) \in S\Big) \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in S \circ R \circ \delta_x^{A} \circ R \circ S = S \circ \delta_x^{A} \circ S \\
&\Leftrightarrow (S_a,S_b) \in \delta_x^{A/\!\!/S}.
\end{aligned}
$$

Osim toga, za svaki $a \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
\phi(S_a) \in \sigma^{(A/\!\!/R)/\!\!/Q} &\Leftrightarrow Q_{R_a} \in \sigma^{(A/\!\!/R)/\!\!/Q} \Leftrightarrow R_a \in \sigma^{A/\!\!/R} \circ Q \\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\Big(R_{a'} \in \sigma^{A/\!\!/R} \wedge (R_{a'},R_a) \in Q\Big) \\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\Big(a' \in \sigma^{A} \circ R \wedge (a',a) \in S\Big) \\
&\Leftrightarrow a \in \sigma^{A} \circ R \circ S \Leftrightarrow a \in \sigma^{A} \circ S \\
&\Leftrightarrow S_a \in \sigma^{A/\!\!/S},
\end{aligned}
$$

i slično, $\phi(S_a) \in \tau^{(A/\!\!/R)/\!\!/Q}$ ako i samo ako $S_a \in \tau^{A/\!\!/S}$.

Dakle, ϕ je izomorfizam automata $\mathcal{A}/\!\!/S$ i $(\mathcal{A}/\!\!/R)/\!\!/(S/\!\!/R)$. □

U daljem tekstu sa $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ označavamo mrežu svih kvazi-uređenja na automatu $\mathcal{A}$ (odnosno na njegovom skupu stanja).

Teorema 4.2.2. *Neka je R kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A} = (A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ i neka je funkcija $\Phi : \mathcal{Q}_R(\mathcal{A}) \to \mathcal{Q}(\mathcal{A}/\!\!/R)$, gde je $\mathcal{Q}_R(\mathcal{A}) = \{S \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}) \mid R \subseteq S\}$, definisana sa*

$$
\Phi(S) = S/\!\!/R, \quad \text{za svaki } S \in \mathcal{Q}_R(\mathcal{A}). \tag{4.9}
$$

Tada važi

$$
S \subseteq T \;\Leftrightarrow\; \Phi(S) \subseteq \Phi(T), \quad \text{za sve } S,T \in \mathcal{Q}_R(\mathcal{A}), \tag{4.10}
$$

i shodno tome, Φ je injektivna funkcija.

Povrh toga, ako je R relacija ekvivalencije, tada je Φ i surjektivna funkcija, odnosno, Φ je mrežni izomorfizam iz $\mathcal{Q}_R(\mathcal{A})$ na $\mathcal{Q}(\mathcal{A}/\!\!/R)$.

Dokaz: Za proizvoljne $S,T \in \mathcal{Q}_R(\mathcal{A})$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
S \subseteq T &\Leftrightarrow (\forall (a,b) \in A \times A)\Big((a,b) \in S \Rightarrow (a,b) \in T\Big) \\
&\Leftrightarrow (\forall (a,b) \in A \times A)\Big((R_a,R_b) \in \Phi(S) \Rightarrow (R_a,R_b) \in \Phi(T)\Big) \\
&\Leftrightarrow \Phi(S) \subseteq \Phi(T),
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali da važi (4.10). Jasno je da iz (4.10) sledi da je Φ injektivna funkcija.

Dalje, neka je R relacija ekvivalencije i neka je $Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}/\!\!/R)$ proizvoljno kvazi-uređenje. Definišimo relaciju $S \subseteq A \times A$ na sledeći način:

$$(a,b) \in S \;\Leftrightarrow\; (R_a, R_b) \in Q, \quad \text{za sve } a,b \in A. \tag{4.11}$$

Lako se proverava da je S kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, i za proizvoljne $a,b \in A$, ako $(a,b) \in R$, onda $R_a = R_b$ i $(R_a, R_b) \in Q$, odakle sledi da $(a,b) \in S$. Dakle, $R \subseteq S$, tj., $S \in \mathcal{Q}_R(\mathcal{A})$, i $Q = S/\!\!/R$, čime je dokazano da je Φ surjektivna funkcija. □

Vredno je istaći da se u terminima teorije mreža $\mathcal{Q}_R(\mathcal{A})$ naziva *glavni filter* (ili *glavni dualni ideal*) mreže $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ (koji je određen ili generisan sa R).

Lema 4.2.3. *Neka je R kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Automat $\mathcal{A}$ i njegov količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R$ imaju isti broj stanja ako i samo ako je R uređenje.*

Dokaz: Jasno je da automat $\mathcal{A}$ i njegov količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R$ imaju isti broj stanja ako i samo ako je $R_a \neq R_b$, za sve $a,b \in A$ takve da je $a \neq b$, odnosno, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/R$ imaju različit broj stanja ako i samo ako postoje $a,b \in A$ takvi da je $a \neq b$ i $R_a = R_b$.

Ako $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/R$ imaju različit broj stanja, tj., ako postoje $a,b \in A$ takvi da je $a \neq b$ i $R_a = R_b$, tada imamo da $(a,b),(b,a) \in R$, što znači da R nije uređenje.

Sa druge strane, ukoliko R nije uređenje, onda postoje $a,b \in A$ takvi da je $a \neq b$ i $(a,b),(b,a) \in R$, odnosno $(a,b) \in R \cap R^{-1} = E_R$, pa na osnovu Teoreme 1.2.6. dobijamo da je $R_a = R_b$, što znači da $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/R$ imaju različit broj stanja. □

4.3. Redukcija broja stanja

Za proizvoljno kvazi-uređenje R na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, pravilom $a \mapsto R_a$ je definisana surjektivna funkcija iz A na $A/\!\!/R$, što znači da količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R$ uvek ima manji ili jednak broj stanja od originalnog automata $\mathcal{A}$. Osim toga, ako su R i S dva kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$ takva da je $R \leqslant S$, tada na osnovu Teoreme 4.2.1. imamo da automat $\mathcal{A}/\!\!/S$ ima manji ili jednak broj stanja od automata $\mathcal{A}/\!\!/R$. To znači da bi se broj stanja automata $\mathcal{A}$ mogao redukovati uz pomoć nekog pogodnog kvazi-uređenja na skupu stanja tog automata, formiranjem odgovarajućeg količničkog automata. Međutim, u opštem slučaju količnički automat ne mora biti ekvivalentan originalnom automatu, tj. ne mora raspoznavati isti jezik. Prema tome, problem redukcije broja stanja nedeterminističkih automata, kojim ćemo se baviti u daljem tekstu, svodi se na problem nalaženja takvih kvazi-uređenja na skupu stanja automata koja daju količnički automate ekvivalentne originalnom automatu. Pri tome, poželjno je da traženo kvazi-uređenje bude što je moguće veće, jer će se na taj način dobiti količnički automat sa što je moguće manjim brojem stanja.

Naka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$. Setimo se da za reč $u = x_1 x_2 \dots x_n \in X^+$, gde su $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, važi

$$u \in [\![\mathcal{A}]\!] \iff \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \dots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A = 1,$$

dok za praznu reč važi

$$e \in [\![\mathcal{A}]\!] \iff \sigma^A \circ \tau^A = 1.$$

Sa druge strane, koristeći asocijativnost kompozicije relacija i činjenicu da je $R \circ R = R$, jer je R kvazi-uređenje, dobijamo da u automatu $\mathcal{A}/\!\!/R$, za reč u, važi

$$u \in [\![\mathcal{A}/\!\!/R]\!] \iff \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \dots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A = 1,$$

dok za praznu reč važi

$$e \in [\![\mathcal{A}/\!\!/R]\!] \iff \sigma^A \circ R \circ \tau^A = 1.$$

Prema tome, količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R$ će biti ekvivalentan originalnom automatu $\mathcal{A}$, odnosno biće $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{A}/\!\!/R]\!]$, ako i samo kvazi-uređenje R zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned}
&\sigma^A \circ \tau^A = \sigma^A \circ R \circ \tau^A,\\
&\sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \dots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A = \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \dots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A,
\end{aligned}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Setimo se da je skup stanja A automata $\mathcal{A}$ po definiciji konačan, pa ako relacije na A tretiramo kao Bulove matrice, a podskupove od A kao Bulove vektore, tada ovi uslovi predstavljaju sistem Bulovih matričnih jednačina koji ćemo nazivati *opšti sistem* pridružen automatu $\mathcal{A}$. Za kvazi-uređenja koja zadovoljavaju te uslove govorićemo da su *rešenja opšteg sistema*.

Za proizvoljan automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ opšti sistem ima bar jedno rešenje, identičku relaciju na A, i to rešenje ćemo zvati *trivijalno rešenje*. Međutim, sa aspekta redukcije broja stanja identička relacija nije nimalo zanimljiva, jer daje količnički automat koji je identičan originalnom automatu $\mathcal{A}$, pa dakle, u tom slučaju ne dolazi do smanjenja broja stanja. Da bi se postigla što bolja redukcija automata $\mathcal{A}$, potrebno je pronaći što je moguće veće rešenje opšteg sistema, ako je moguće, i najveće rešenje, u koliko ono uopšte postoji. Postoje automati kod kojih opšti sistem nema najveće rešenje (Zadatak 4.5.6.). Sa druge strane, opšti sistem se može sastojati od beskonačno mnogo jednačina i nalaženje njegovih netrivijalnih rešenja može biti veoma težak zadatak. Stoga ćemo u daljem tekstu pažnju usmeriti ne toliko na sam opšti sistem koliko na neke njegove instance, pod čime podrazumevamo sisteme

Bulovih matričnih jednačina čiji skupovi svih rešenja su sadržani u skupu svih rešenja opšteg sistema. Ti sistemi treba da imaju što šire skupove rešenja, da bi njihova najveća rešenja bila što veća i davala što bolje redukcije, ali takođe, sa praktičnog aspekta, treba da budu i što jednostavniji za rešavanje.

Teorema 4.3.1. *Neka je S proizvoljno rešenje opšteg sistema pridruženog automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Tada je svako kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ sadržano u S takođe rešenje opšteg sistema.*

Shodno tome, prirodna ekvivalencija proizvoljnog rešenja opšteg sistema je takođe rešenje tog sistema.

Dokaz: Neka je R proizvoljno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ za koje važi $R \subseteq S$. Tada na osnovu refleksivnosti kvazi-uređenja R i činjenica da je $R \subseteq S$ i S je rešenje opšteg sistema, za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ imamo da je

$$\begin{aligned}\sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A &\subseteq \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A \\ &\subseteq \sigma^A \circ S \circ \delta^A_{x_1} \circ S \circ \delta^A_{x_2} \circ S \circ \cdots \circ S \circ \delta^A_{x_n} \circ S \circ \tau^A \\ &= \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A,\end{aligned}$$

odakle je $\sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A = \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A$, i slično, $\sigma^A \circ \tau^A = \sigma^A \circ R \circ \tau^A$. Prema tome, R je rešenje opšteg sistema.

Drugi deo teoreme sledi direktno iz činjenice da je $E_R = R \cap R^{-1} \subseteq R$. □

4.3.1. *Redukcije pomoću desno invarijantnih kvazi-uređenja*

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat. Za kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$ koje zadovoljava uslove

$$R \circ \delta^A_x \circ R = \delta^A_x \circ R, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.12}$$

$$R \circ \tau^A = \tau^A, \tag{4.13}$$

kažemo da je *desno invarijantno kvazi-uređenje* na $\mathcal{A}$, a ako za R važi

$$R \circ \delta^A_x \circ R = R \circ \delta^A_x, \quad \text{for every } x \in X, \tag{4.14}$$

$$\sigma^A \circ R = \sigma^A, \tag{4.15}$$

onda kažemo da R jeste *levo invarijantno kvazi-uređenje* na $\mathcal{A}$.

Teorema 4.3.2. *Sva desno invarijantna i levo invarijantna kvazi-uređenja na automatu su rešenja opšteg sistema pridruženog tom automatu.*

Dokaz: Dokazaćemo samo tvrđenje koje se tiče za desno invarijantnih kvazi-uređenja, jer se tvrđenje koje se tiče levo invarijantnih kvazi-uređenja dokazuje na sličan način.

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljan automat i R je desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$, primeniši n puta (4.12), a potom i (4.13), dobijamo da je

$$\begin{aligned}\sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \delta^A_{x_2} \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A = \\ = \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A = \sigma^A \circ \delta^A_{x_1} \circ \delta^A_{x_2} \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ \tau^A,\end{aligned}$$

i takođe, $\sigma^A \circ R \circ \tau^A = \sigma^A \circ \tau^A$. Prema tome, R je rešenje opšteg sistema. □

Teorema 4.3.3. *Neka je R je kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$;*

(ii) *$R \circ \delta^A_x \subseteq \delta^A_x \circ R$, za svaki $x \in X$;*

(iii) *važi sledeća inkluzija:*

$$R \subseteq \bigcap_{x \in X} (\delta^A_x \circ R)/(\delta^A_x \circ R). \tag{4.16}$$

Dokaz: (i)⇔(ii). Neka je R desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Kako je R refleksivna relacija, za proizvoljno $x \in X$ imamo da je

$$R \circ \delta^A_x \subseteq R \circ \delta^A_x \circ R = \delta^A_x \circ R.$$

Obratno, ako je $R \circ \delta^A_x \leqslant \delta^A_x \circ R$, za svaki $x \in X$, tada za proizvoljno $x \in X$ dobijamo da je

$$R \circ \delta^A_x \circ R \subseteq \delta^A_x \circ R \circ R = \delta^A_x \circ R,$$

i kako obratna inkluzija sledi neposredno iz refleksivnosti za R, zaključujemo da je $R \circ \delta^A_x \circ R = \delta^A_x \circ R$, za svaki $x \in X$, odnosno, R je desno invarijantno kvazi-uređenje.

(i)⇔(iii). Neka je R desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada za proizvoljno $x \in X$, osnovu svojstva reziduacije, dobijamo da iz $R \circ \delta^A_x \circ R \subseteq \delta^A_x \circ R$ sledi $R \subseteq (\delta^A_x \circ R)/(\delta^A_x \circ R)$, odakle lako dobijamo da važi (4.16).

Obratno, ako važi (4.16), odnosno ako je $R \subseteq (\delta^A_x \circ R)/(\delta^A_x \circ R)$, za svaki $x \in X$, to opet na osnovu svojstva reziduacije dobijamo da je $R \circ \delta^A_x \circ R \subseteq \delta^A_x \circ R$, za svaki $x \in X$, i kako je obratna inkluzija posledica refleksivnosti za R, to dobijamo da je R desno invarijantno kvazi-uređenje. □

Teorema 4.3.4. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat. Definišimo induktivno niz $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ relacija na A na sledeći način:*

$$R_1 = \tau^A / \tau^A, \tag{4.17}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x \in X} (\delta^A_x \circ R_k)/(\delta^A_x \circ R_k), \quad \textit{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

Tada

(a) $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je opadajući niz kvazi-uređenja na* $\mathcal{A}$;

(b) *Postoji* $n\in\mathbb{N}$ *tako da je* $R_n = R_{n+1}$, *i u tom slučaju* R_n *je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na* $\mathcal{A}$.

Dokaz: (a) Kao što smo već napomenuli u Odeljku 1.1., $R_1 = \tau^A/\tau^A$ je kvazi-uređenje, kao i $(\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k)$, za svaki $k\in\mathbb{N}$, što znači da ako je R_k kvazi-uređenje, za neki $k\in\mathbb{N}$, tada je to i R_{k+1}, kao presek familije kvazi-uređenja. Dakle, matematičkom indukcijom zaključujemo da svi članovi niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jesu kvazi-uređenja. Iz same definicije niza (formula (4.18)) neposredno sledi da je niz opadajući.

(b) Kako je skup A konačan, to je konačan i skup svih relacija na A, odakle sledi da je i niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan, tj., da postoje $n,m\in\mathbb{N}$ tako da je $R_n = R_{n+m}$. Sa druge strane, pošto je niz opadajući, imamo da je $R_n = R_{n+m} \subseteq R_{n+1} \subseteq R_n$, odakle dobijamo da je $R_n = R_{n+1}$.

Ostaje da dokažemo da R_n jeste najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Prvo, iz

$$R_n = R_{n+1} \subseteq \bigcap_{x\in X}(\delta_x^A \circ R_n)/(\delta_x^A \circ R_n),$$

na osnovu Teoreme 4.3.3., dobijamo da je R_n desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Neka je R proizvoljno desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada iz $R\circ\tau^A \subseteq \tau^A$ sledi $R \subseteq \tau^A/\tau^A = R_1$. Dalje, pretpostavimo da je $R \subseteq R_k$, za neki $k\in\mathbb{N}$. Da bi dokazali da za svaki $x\in X$ važi

$$(\delta_x^A \circ R)/(\delta_x^A \circ R) \subseteq (\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k), \tag{4.19}$$

uzmimo proivoljan $x\in X$ i pretpostavimo da je $(a,b)\in(\delta_x^A \circ R)/(\delta_x^A \circ R)$. Prema definiciji levog reziduala relacija, to znači da za svaki $c\in A$ važi

$$(b,c)\in\delta_x^A\circ R \quad\Rightarrow\quad (a,c)\in\delta_x^A\circ R. \tag{4.20}$$

Kako su R i R_k kvazi-uređenja i $R\subseteq R_k$, to je $R\circ R_k = R_k$, pa za proizvoljan $d\in A$ imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
(b,d)\in\delta_x^A\circ R_k = \delta_x^A\circ R\circ R_k \quad&\Rightarrow\\
&\Rightarrow\ (\exists c\in A)\ (b,c)\in\delta_x^A\circ R \ \wedge\ (c,d)\in R_k\\
&\Rightarrow\ (\exists c\in A)\ (a,c)\in\delta_x^A\circ R \ \wedge\ (c,d)\in R_k \qquad \text{(na osnovu (4.20))}\\
&\Rightarrow\ (a,d)\in\delta_x^A\circ R\circ R_k = \delta_x^A\circ R_k.
\end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo da za svaki $d\in A$ važi

$$(b,d)\in\delta_x^A\circ R_k \quad\Rightarrow\quad (a,d)\in\delta_x^A\circ R_k,$$

što prema definiciji levog reziduala relacija znači da $(a,b) \in (\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k)$. Ovim smo dokazali da važi (4.19), za svaki $x \in X$, pa na osnovu Teoreme 4.3.3., pretpostavke da je $R \subseteq R_k$ i (4.19) dobijamo da je

$$R \subseteq R_k \cap \bigcap_{x\in X} (\delta_x^A \circ R)/(\delta_x^A \circ R) \subseteq R_k \cap \bigcap_{x\in X} (\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k) = R_{k+1}.$$

Dakle, dobili smo da je $R \subseteq R_{k+1}$, pa na osnovu matematičke indukcije zaključujemo da je $R \subseteq R_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, što konačno daje $R \subseteq R_n$. Time smo dokazali da R jeste najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. □

Algoritam 4.3.5. (*Najveće desno invarijantno kvazi-uređenje*) Ulaz algoritma je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Algoritam izračunava najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji niza kvazi-uređenja $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, na sledeći način:

(A1) U prvom koraku stavljamo $R_1 = \tau^A/\tau^A$.
(A2) Posle $k$tog koraka neka je R_k kvazi-uređenje koje je konstruisano.
(A3) U narednom koraku konstruišemo R_{k+1} pomoću formule (4.18).
(A4) Istovremeno, proveravamo da li je $R_{k+1} = R_k$.
(A5) Kada nađemo najmanji prirodan broj n takav da je $R_{n+1} = R_n$, postupak formiranja niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se završava i R_n je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Na sličan način se mogu formulisati algoritmi za izračunavanje najvećih levo invarijantnih kvazi-uređenja i najvećih desno i levo invarijantnih ekvivalencija. Svi ti algoritmi međusobno se razlikuju jedino u formulama na osnovu kojih se izračunavaju članovi niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Uporedni pregled tih formula dat je u Tabeli 1.3.1.

Više o odnosu desno i levo invarijantnih kvazi-uređenja sa aspekta njihove upotrebe u redukciji broja stanja automata biće rečeno u narednom odeljku.

Funkcionisanje algoritma za izračunavanje najvećeg desno invarijantnog kvazi-uređenja na automatu demonstrira sledeći primer.

Primer 4.3.6. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa četiri stanja nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:

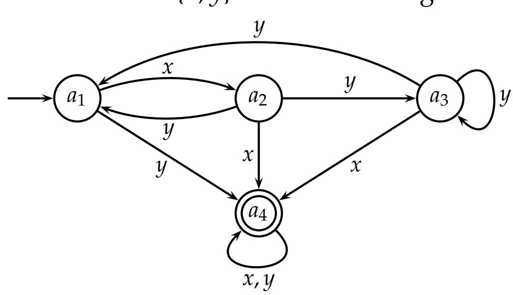


Tabela 4.3.1. Formule koje se koriste pri izračunavanju najvećih desno i levo invarijantnih kvazi-uređenja i ekvivalencija

najveće desno invarijantno kvazi-uređenje:

$$R_1 = \tau^A / \tau^A \tag{4.21}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} (\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k) \tag{4.22}$$

najveće levo invarijantno kvazi-uređenje:

$$R_1 = \sigma^A \backslash \sigma^A \tag{4.23}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} (R_k \circ \delta_x^A)\backslash(R_k \circ \delta_x^A) \tag{4.24}$$

najveća desno invarijantna ekvivalencija:

$$R_1 = (\tau^A/\tau^A) \cap (\tau^A/\tau^A)^{-1} \tag{4.25}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} ((\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k)) \cap ((\delta_x^A \circ R_k)/(\delta_x^A \circ R_k))^{-1} \tag{4.26}$$

najveća levo invarijantna ekvivalencija:

$$R_1 = (\sigma^A \backslash \sigma^A) \cap (\sigma^A \backslash \sigma^A)^{-1} \tag{4.27}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} ((R_k \circ \delta_x^A)\backslash(R_k \circ \delta_x^A)) \cap ((R_k \circ \delta_x^A)\backslash(R_k \circ \delta_x^A))^{-1} \tag{4.28}$$

Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

Primenu Algoritma 4.3.5. počinjemo izračunavanjem kvazi-uređenja R_1 pomoću formule (4.17):

$$R_1 = \tau^A/\tau^A = \left(\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Potom izračunavamo $\delta_x^A \circ R_1$ i $\delta_y^A \circ R_1$, na sledeći način:

$$\delta_x^A \circ R_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A \circ R_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix},$$

a potom izračunavamo $(\delta_x^A \circ R_1)/(\delta_x^A \circ R_1)$ i $(\delta_y^A \circ R_1)/(\delta_y^A \circ R_1)$ upotrebom formule (1.22):

$$(\delta_x^A \circ R_1) \lhd (\delta_x^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_y^A \circ R_1) \lhd (\delta_y^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_x^A \circ R_1)/(\delta_x^A \circ R_1) = \left((\delta_x^A \circ R_1) \lhd (\delta_x^A \circ R_1)^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_y^A \circ R_1)/(\delta_y^A \circ R_1) = \left((\delta_y^A \circ R_1) \lhd (\delta_y^A \circ R_1)^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, prema formuli (4.18) imamo da je

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Dalje, računamo

$$\delta_x^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je $\delta_y^A \circ R_2 = \delta_y^A \circ R_1$, pa je $(\delta_y^A \circ R_2)/(\delta_y^A \circ R_2) = (\delta_y^A \circ R_1)/(\delta_y^A \circ R_1)$, dok $(\delta_x^A \circ R_2)/(\delta_x^A \circ R_2)$ izračunavamo na sledeći način:

$$(\delta_x^A \circ R_2) \lhd (\delta_x^A \circ R_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_x^A \circ R_2)/(\delta_x^A \circ R_2) = \left((\delta_x^A \circ R_2) \lhd (\delta_x^A \circ R_2)^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Sada dobijamo da je

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} = R_2,$$

što znači da je postupak izračunavanja niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ završen i da je R_2 najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$.

Primetimo da kvazi-uređenje R_2 ima tri različita afterseta, što znači da količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R_2$ ima tri stanja. S obzirom da je

$$R_2\circ\delta_x^A\circ R_2=\delta_x^A\circ R_2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad R_2\circ\delta_y^A\circ R_2=\delta_y^A\circ R_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

i da je

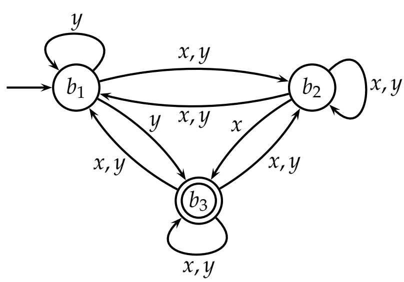
$$\sigma^A\circ R_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix},\quad R_2\circ\tau^A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

to imamo da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja količničkog automata $\mathcal{A}/\!\!/R_2$ zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima

$$\delta_x^{A/\!\!/R_2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \delta_y^{A/\!\!/R_2}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\ \sigma^{A/\!\!/R_2}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix},\ \tau^{A/\!\!/R_2}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Napomenimo da su ove matrice i vektori dobijeni identifikovanjem i spajanjem druge i treće vrste i druge i treće kolone matrica $R_2\circ\delta_x^A\circ R_2$ i $R_2\circ\delta_y^A\circ R_2$, kao i druge i treće koordinate vektora $\sigma^A\circ R_2$ i $R_2\circ\tau^A$, kao posledica jednakosti druge i treće vrste (afterseta) i druge i treće kolone (foreseta) matrice R_2.

Količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R_2$ možemo predstaviti i sledećim grafom



Sledeći primer demonstrira primenu algoritma za izračunavanje najvećeg levo invarijantnog kvazi-uređenja na automatu i pokazuje da postoje situacije kada desno invarijantna kvazi-uređenja mogu redukovati broj stanja automata dok levo invarijantna ne mogu, ili obratno.

Primer 4.3.7. Izračunaćemo najveće levo invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ iz Primera 4.3.6.

Setimo se da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najpre pomoću formule (1.20) izračunavamo prvi član niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$R_1 = \sigma^A \backslash \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potom izračunavamo $R_1 \circ \delta_x^A$ i $R_1 \circ \delta_y^A$, na sledeći način:

$$R_1 \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a potom izračunavamo $(R_1 \circ \delta_x^A)\backslash(R_1 \circ \delta_x^A)$ i $(R_1 \circ \delta_y^A)\backslash(R_1 \circ \delta_y^A)$ upotrebom formule (1.22):

$$(R_1 \circ \delta_x^A)\backslash(R_1 \circ \delta_x^A) = (R_1 \circ \delta_x^A)^{-1} \lhd (R_1 \circ \delta_x^A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(R_1 \circ \delta_y^A)\backslash(R_1 \circ \delta_y^A) = (R_1 \circ \delta_y^A)^{-1} \lhd (R_1 \circ \delta_y^A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo da je

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $R_2 \neq R_1$, nastavljamo dalje:

$$R_2 \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

pa je

$$(R_2 \circ \delta_x^A)\backslash(R_2 \circ \delta_x^A) = (R_2 \circ \delta_x^A)^{-1} \lhd (R_2 \circ \delta_x^A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(R_2\circ\delta_y^A)\backslash(R_2\circ\delta_y^A)=(R_2\circ\delta_y^A)^{-1}\lhd(R_2\circ\delta_y^A)=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}\lhd\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Sada dobijamo da je

$$R_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Kako je $R_3\neq R_2$, nastavljamo sa izračunavanjem:

$$R_3\circ\delta_x^A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad R_3\circ\delta_y^A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Primetimo da je $R_3\circ\delta_x^A=R_2\circ\delta_x^A$ i $R_3\circ\delta_y^A=R_2\circ\delta_y^A$, pa $(R_3\circ\delta_x^A)\backslash(R_3\circ\delta_x^A)$ i $(R_3\circ\delta_y^A)\backslash(R_3\circ\delta_y^A)$ imamo izračunate u prethodnom koraku, što znači da je

$$R_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=R_3.$$

Dakle, postupak izračunavanja niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je završen i R_3 je najveće levo invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$. Kako je R_3 uređenje, to se automat $\mathcal{A}$ ne može redukovati levo invarijantnim kvazi-uređenjima.

Setimo se da je isti automat razmatran i u Primeru 4.3.6. i da je tamo pokazano da se njegov broj stanja može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima. To znači da postoje situacije u kojima desno invarijantna kvazi-uređenja daju bolje rezultate u redukciji broja stanja od levo invarijantnih kvazi-uređenja. Naravno, jasno je da postoje i situacije u kojima je obrnuto, gde levo invarijantna kvazi-uređenja daju bolje redukcije od desno invarijantnih. Primer za to je reverzni automat $\bar{\mathcal{A}}$ automata $\mathcal{A}$ koji smo ovde razmatrali.

Naredni primer demonstrira primenu algoritma za izračunavanje najveće desno invarijantne ekvivalencije na automatu i pokazuje da u opštem slučaju invarijantne ekvivalencije daju slabije redukcije od invarijantnih kvazi-uređenja.

Primer 4.3.8. Neka je $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ automat sa tri stanja nad dvoelementnim alfabetom $X=\{x,y\}$ čije su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \delta_y^A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \sigma^A=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix},\quad \tau^A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ako na ovaj automat primenimo Algoritam 4.3.5., kao i gore opisani algoritam za izračunavanje najveće desno invarijantne ekvivalencije na automatu, onda dobijamo da su najveće desno invarijantno kvazi-uređenje R^{ri} na $\mathcal{A}$, njegova prirodna ekvivalencija $E_{R^{\mathrm{ri}}}$, i najveća desno invarijantna ekvivalencija E^{ri} na $\mathcal{A}$ dati sa

$$R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{R^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, ekvivalencija E^{ri} ne redukuje broj stanja automata $\mathcal{A}$, dok kvazi-uređenje R^{ri} redukuje $\mathcal{A}$ na automat sa dva stanja.

Osim toga, R^{ri} je desno invarijantno kvazi-uređenje, ali njegova prirodna ekvivalencija $E_{R^{\mathrm{ri}}}$ nije desno invarijantna ekvivalencija, jer je $E^{\mathrm{ri}} \subset E_{R^{\mathrm{ri}}}$. Takođe imamo da količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R^{\mathrm{ri}}$ nije izomorfan količničkom automatu $\mathcal{A}/\!\!/E_{R^{\mathrm{ri}}}$, jer je

$$R^{\mathrm{ri}} \circ \delta_y^A \circ R^{\mathrm{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{R^{\mathrm{ri}}} \circ \delta_y^A \circ E_{R^{\mathrm{ri}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na kraju ovog pododeljka dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 4.3.9. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat, R je desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i S je kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ takvo da je $R \subseteq S$. Tada važi sledeće:*

(a) *S je desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $S/\!\!/R$ desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*
(b) *S je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $S/\!\!/R$ najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*
(c) *R je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $R/\!\!/R$ najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*

Dokaz: (a) Kako su R i S kvazi-uređenja, to iz $R \subseteq S$ sledi da je $R \circ S = S \circ R = S$, pa za proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$ imamo da je

$$\begin{aligned} &(R_a, R_b) \in S/\!\!/R \circ \delta_x^{A/\!\!/R} \circ S/\!\!/R \iff \\ &\qquad \iff (\exists c, d \in A) \Big((R_a, R_c) \in S/\!\!/R \ \wedge \ (R_c, R_d) \in \delta_x^{A/\!\!/R} \ \wedge \ (R_d, R_b) \in S/\!\!/R \Big) \\ &\qquad \iff (\exists c, d \in A) \Big((a, c) \in S \ \wedge \ (c, d) \in R \circ \delta_x^A \circ R \ \wedge \ (d, b) \in S \Big) \\ &\qquad \iff (a, b) \in S \circ R \circ \delta_x^A \circ R \circ S = S \circ \delta_x^A \circ S, \end{aligned}$$

i, sa druge strane,

$$
\begin{aligned}
(R_a,R_b) \in \delta_x^{A/\!\!/R} \circ S/\!\!/R \quad &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists c \in A)\Big((R_a,R_c) \in \delta_x^{A/\!\!/R} \ \wedge \ (R_c,R_b) \in S/\!\!/R\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists c \in A)\Big((a,c) \in R \circ \delta_x^{A} \circ R \ \wedge \ (c,b) \in S\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad (a,b) \in R \circ \delta_x^{A} \circ R \circ S = \delta_x^{A} \circ R \circ S = \delta_x^{A} \circ S.
\end{aligned}
$$

Odatle neposredno sledi da važi (a).

(b) Neka je S je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i neka je Q najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$. Definišimo kvazi-uređenje T na $\mathcal{A}$ kao u dokazu Teoreme 4.2.2., tj., stavimo da je

$$(a,b) \in T \quad \Leftrightarrow \quad (R_a,R_b) \in Q, \quad \text{za sve } a,b \in A.$$

Prema pretpostavci, R je desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, pa na osnovu tvrđenja (a) ove teoreme imamo da je $R/\!\!/R$ desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$, što znači da je $R/\!\!/R \subseteq Q$. Odavde sledi da za proizvoljne $a,b \in A$ važi da $(a,b) \in R$ povlači $(R_a,R_b) \in R/\!\!/R$, što dalje povlači $(R_a,R_b) \in Q$, a to konačno daje $(a,b) \in T$. Dakle, dobili smo da je $R \subseteq T$ i $Q = T/\!\!/R$.

Sada opet na osnovu (a) ove teoreme dobijamo da je T desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, što znači da je $T \subseteq S$, pa opet prema Teoremi 4.2.2. dobijamo da je $Q = T/\!\!/R \subseteq S/\!\!/R$. Tvrđenje (a) ove teoreme takođe povlači da je S/R desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$, pa na osnovu polazne pretpostavke o Q zaključujemo da je $Q = S/\!\!/R$. Dakle, $S/\!\!/R$ je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.

Obratno, neka je $S/\!\!/R$ najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$ i neka je T najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Na osnovu (a) ove teoreme imamo da je S desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, odakle sledi da je $S \subseteq T$, i prema Teoremi 4.2.2. dobijamo da je $S/\!\!/R \subseteq T/\!\!/R$. Dalje, na osnovu (a) imamo i da je $T/\!\!/R$ desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$, pa na osnovu polazne pretpostavke o $S/\!\!/R$ zaključujemo da je $T/\!\!/R = S/\!\!/R$. To prema Teoremi 4.2.2. povlači da je $T = S$, što znači da S jeste najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Tvrđenje (c) sledi neposredno iz (b). □

4.3.2. *Redukcije pomoću slabo desno invarijantnih kvazi-uređenja*

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat. Za svaku reč $u \in X^*$ definišemo skupove $\sigma_u^A, \tau_u^A \subseteq A$ sa

$$\sigma_u^A = \sigma^A \circ \delta_u^A = \{a \in A \mid (\exists b \in A)\, b \in \sigma^A \wedge (b,a) \in \delta_u^A\}, \tag{4.29}$$

$$\tau_u^A = \delta_u^A \circ \tau^A = \{a \in A \mid (\exists b \in A)\, (a,b) \in \delta_u^A \wedge b \in \tau^A\}. \tag{4.30}$$

Drugim rečima, σ_u^A je skup svih stanja automata $\mathcal{A}$ u koja se može stići iz nekog inicijalnog stanja pod uticajem ulazne reči u, dok je τ_u^A skup svih stanja iz kojih se može stići u neko završno stanje pod uticajem te reči. Očigledno, za praznu reč $e \in X^*$ je $\sigma_e^A = \sigma^A$ i $\tau_e^A = \tau^A$. O ulozi ovih skupova u determinizaciji nedeterminističkih automata govorićemo u narednoj glavi.

Na sličan način, za svako stanje $a \in A$ definišemo jezike $\sigma_a^A, \tau_a^A \subseteq X^*$ sa

$$\sigma_a^A = \{u \in X^* \mid (\exists b \in A)\, b \in \sigma^A \wedge (b,a) \in \delta_u^A\} = \{u \in X^* \mid a \in \sigma_u^A\}, \tag{4.31}$$

$$\tau_a^A = \{u \in X^* \mid (\exists b \in A)\, (a,b) \in \delta_u^A \wedge b \in \tau^A\} = \{u \in X^* \mid a \in \tau_u^A\}. \tag{4.32}$$

Dakle, σ_a^A je skup svih reči koje iz nekog inicijalnog stanja vode do stanja a, a τ_a^A je skup svih reči koje iz stanja a vode do nekog završnog stanja. Jasno je da $u \in \sigma_a^A$ ako i samo ako $a \in \sigma_u^A$, dok je $u \in \tau_a^A$ ako i samo ako $a \in \tau_u^A(a)$. Jezike σ_a^A i τ_a^A zovemo redom *levi jezik* i *desni jezik* pridružen stanju a.

Kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$ koje zadovoljava

$$R \circ \tau_u^A = \tau_u^A, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.33}$$

nazivaćemo *slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjem* na automatu $\mathcal{A}$, a ako R zadovoljava

$$\sigma_u^A \circ R = \sigma_u^A, \quad \text{for every } u \in X^*, \tag{4.34}$$

zvaćemo ga *slabo levo invarijantnim kvazi-uređenjem* na $\mathcal{A}$.

Primetimo da je $\tau_u^A \subseteq R \circ \tau_u^A$ i $\sigma_u^A \subseteq \sigma_u^A \circ R$ ispunjeno kad god je R refleksivna relacija, pa je (4.33) ekvivalentno sa $R \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^A$, za svaki $u \in X^*$, dok je (4.34) ekvivalentno sa $\sigma_u^A \circ R \subseteq \sigma_u^A$, za svaki $u \in X^*$.

Teorema 4.3.10. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat. Tada*

(a) *Svako slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ je rešenje opšteg sistema pridruženog tom automatu.*
(b) *Svako desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ je slabo desno invarijantno.*

Dokaz: (a) Neka je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Indukcijom po n može se jednostavno dokazati da je

$$R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \delta_{x_2}^A \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \tau^A = \delta_{x_1}^A \circ \delta_{x_2}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \tau^A,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, što povlači da je R rešenje opšteg sistema.

(b) Neka je R desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Za proizvoljno $u \in X^*$ imamo da je $R \circ \delta_u^A \circ R = \delta_u^A \circ R$, i takođe, $R \circ \tau^A = \tau^A$, što povlači

$$R \circ \tau_u^A = R \circ \delta_u^A \circ \tau^A = R \circ \delta_u^A \circ R \circ \tau^A = \delta_u^A \circ R \circ \tau^A = \delta_u^A \circ \tau^A = \tau_u^A.$$

Prema tome, R je slabo desno invarijantno kvazi-uređenje. $\square$

Teorema 4.3.11. *Neka je Q^{wri} relacija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ definisana sa*

$$Q^{\mathrm{wri}} = \bigcap_{u \in X^*} \tau_u^A / \tau_u^A. \tag{4.35}$$

Tada važi sledeće:

(a) *Kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$ je slabo desno invarijantno ako i samo ako je $R \subseteq Q^{\mathrm{wri}}$.*

(b) *Q^{wri} je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Na osnovu svojstva reziduacije, za proizvoljno kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$ i proizvoljnu reč $u \in X^*$ imamo da je $R \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^A$ ako i samo ako je $R \subseteq \tau_u^A / \tau_u^A$, odakle neposredno sledi da važi (a).

Kao što smo pokazali, τ_u^A / τ_u^A je kvazi-uređenje, za svaku reč $u \in X^*$, odakle sledi da je i Q^{wri} kvazi-uređenje, i na osnovu (a), Q^{wri} je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. □

Na osnovu (4.35), da bi se izračunalo najveće slabo invarijantno kvazi-uređenje Q^{wri} na automatu $\mathcal{A}$, neophodno je najpre izračunati skupove τ_u^A, za sve $u \in X^*$. Sledeći algoritam prikazuje način na koji se oni mogu izračunati.

Algoritam 4.3.12. (*Izračunavanje svih članova kolekcije* $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$**)** Ulaz ovog algoritma je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Algoritam izračunava sve članove kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji stabla kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$. Stablo se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je τ_e^A, i mi stavljamo $T_0 = \{\tau_e^A\}$.

(A2) Nakon $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeno ili sa 'zatvoren' ili sa 'nezatvoren'. Značenje ova dva izraza biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} dograđivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoren list τ_u^A koji se pojavljuje u T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$, mi dodajemo čvor $\tau_{xu}^A = \delta_x^A \circ \tau_u^A$ i granu iz τ_u^A u τ_{xu}^A. Istovremeno, proveravamo da li se τ_{xu}^A poklapa sa nekim skupom koji je već konstruisan, i ako je to tačno, ako je skup τ_{xu}^A jednak nekom ranije izračunatom skupu τ_v^A, onda čvor τ_{xu}^A označavamo kao zatvoren i stavljamo $s(\tau_{xu}^A) = s(\tau_v^A)$. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$ konstruisano, njegovi unutrašnji čvorovi odgovaraju različitim članovima te kolekcije.

Sada možemo dati i algoritam kojim se izračunava najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na automatu.

Algoritam 4.3.13. (*Najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje***)** Ulaz algoritma je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$. Algoritam izračunava najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje Q^{wri} na $\mathcal{A}$.

Postupak se sastoji iz dva dela:

(A1) Najpre izračunavamo skupove τ_u^A, za sve $u \in X^*$, koristeći Algoritam 4.3.12.
(A2) Potom izračunavamo Q^{wri} pomoću formule (4.35).

Za izračunavanje najvećeg slabo levo invarijantnog kvazi-uređenja Q^{wli} i najvećih slabo desno i levo invarijantnih ekvivalencija E^{wri} i E^{wli} možemo dati slične formule i algoritme. Uporedni pregled tih formula dat je u Tabeli 4.3.2.

Tabela 4.3.2. Formule koje se koriste za izračunavanje najvećih slabo desno i levo invarijantnih kvazi-uređenja i ekvivalencija

najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje:	
$Q^{\mathrm{wri}} = \bigcap_{u \in X^*} \tau_u^A / \tau_u^A$	(4.36)
najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje:	
$Q^{\mathrm{wli}} = \bigcap_{u \in X^*} \sigma_u^A \backslash \sigma_u^A$	(4.37)
najveća slabo desno invarijantna ekvivalencija:	
$E^{\mathrm{wri}} = \bigcap_{u \in X^*} (\tau_u^A / \tau_u^A) \cap (\tau_u^A / \tau_u^A)^{-1}$	(4.38)
najveća slabo levo invarijantna ekvivalencija:	
$E^{\mathrm{wli}} = \bigcap_{u \in X^*} (\sigma_u^A \backslash \sigma_u^A) \cap (\sigma_u^A \backslash \sigma_u^A)^{-1}$	(4.39)

Primetimo da se kvazi-uređenja Q^{wri} i Q^{wli} i ekvivalencije E^{wri} i E^{wli} mogu okarakterisati i u terminima desnih i levih jezika pridruženih stanjima automata $\mathcal{A}$, na sledeći način

$$(a,b) \in Q^{\mathrm{wri}} \iff \tau_a^A \subseteq \tau_b^A, \tag{4.40}$$

$$(a,b) \in Q^{\mathrm{wli}} \iff \sigma_a^A \subseteq \sigma_b^A, \tag{4.41}$$

$$(a,b) \in E^{\mathrm{wri}} \iff \tau_a^A = \tau_b^A, \tag{4.42}$$

$$(a,b) \in E^{\mathrm{wli}} \iff \sigma_a^A = \sigma_b^A, \tag{4.43}$$

za sve $a,b \in A$.

Primer 4.3.14. Vratimo se još jednom na automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ iz Primera 4.3.6. i izračunajmo najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Setimo se da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

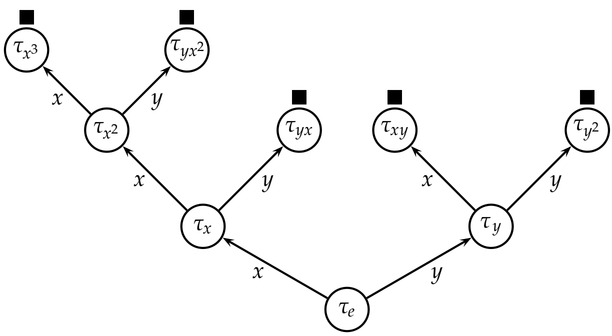
Koristeći Algoritam 4.3.12. najpre izračunavamo sve članove kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u\in X^*}$:

$$\tau_e^A = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \ \tau_x^A = \delta_x^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \ \tau_y^A = \delta_y^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \ \tau_{x^2}^A = \delta_x^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix},$$

$$\tau_{yx}^A = \delta_y^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare, \ \tau_{xy}^A = \delta_x^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare, \ \tau_{y^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare,$$

$$\tau_{x^3}^A = \delta_x^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare, \ \tau_{yx^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare.$$

Crnim kvadratićima označeni su zatvoreni čvorovi stabla kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u\in X^*}$, a samo stablo prikazano je na sledećoj slici:



Sada izračunavamo reziduale τ_u^A/τ_u^A za različite članove kolekcije.

$$\tau_e^A/\tau_e^A = (\tau_e^A \to \tau_e^A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix},$$

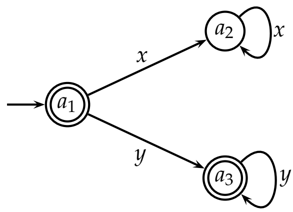
$$\tau_x^A/\tau_x^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{bmatrix}, \ \tau_y^A/\tau_y^A = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix}, \ \tau_{x^2}^A/\tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$Q^{\text{wri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kao što smo videli u Primeru 4.3.6., ista relacije bila je i najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Primer 4.3.15. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa tri stanja nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primenom Algoritma 4.3.12. najpre izračunavamo sve članove kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$:

$$\tau_e^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \tau_x^A = \delta_x^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tau_y^A = \delta_y^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare, \ \tau_{x^2}^A = \tau_{yx}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare,$$

pa je

$$Q^{\text{wri}} = \tau_e^A / \tau_e^A \cap \tau_x^A / \tau_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

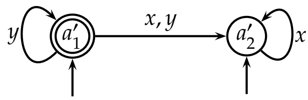
Kako je

$$Q^{\text{wri}} \circ \delta_x^A \circ Q^{\text{wri}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ Q^{\text{wri}} \circ \delta_y^A \circ Q^{\text{wri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma^A \circ Q^{\text{wri}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ Q^{\text{wri}} \circ \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

to su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja količničkog automata $\mathcal{A} /\!\!/ Q^{\text{wri}} = (A_1, \delta^{A_1}, \sigma^{A_1}, \tau^{A_1})$ zadati sa

$$\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \delta_y^{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma^{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau^{A_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a sam automat zadat je grafom



Sada prelazimo na izračunavanje najvećeg desno invarijantnog kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$. Najpre imamo da je

$$R_1 = \tau^A/\tau^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\delta_x^A \circ R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \delta_y^A \circ R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_x^A \circ R_1) \lhd (\delta_x^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_y^A \circ R_1) \lhd (\delta_y^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_x^A \circ R_1)/(\delta_x^A \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ (\delta_y^A \circ R_1)/(\delta_y^A \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje,

$$\delta_x^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \delta_x^A \circ R_1, \ \delta_y^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_y^A \circ R_2) \lhd (\delta_y^A \circ R_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\delta_x^A \circ R_2)/(\delta_x^A \circ R_2) = (\delta_x^A \circ R_1)/(\delta_x^A \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (\delta_y^A \circ R_1)/(\delta_y^A \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_2.$$

Prema tome, R_2 je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, i kako je R_2 uređenje, to ono ne redukuje broj stanja automata $\mathcal{A}$. Sa druge strane, videli smo da najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ redukuje broj stanja tog automata. To potvrđuje ranije iznetu tvrdnju da slabo desno invarijantna kvazi-uređenja generalno daju bolje redukcije od desno invarijantnih kvazi-uređenja.

Takođe dokazujemo i sledeću teoremu.

Teorema 4.3.16. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ proizvoljni automat, R je slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i S je kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ takvo da je $R \subseteq S$. Tada važi sledeće:*

(a) *S je slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $S/\!\!/R$ slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*
(b) *S je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $S/\!\!/R$ najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*
(c) *R je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $R/\!\!/R$ najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/R$.*

Dokaz: (a) Za proizvoljno $a \in A$ i reč $u = x_1 \dots x_n$, gde je $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$, indukcijom lako dobijamo da je

$$R_a \in \tau_u^{A/R} \quad \Leftrightarrow \quad a \in R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \tau^A,$$

i kako je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje, to imamo da je

$$a \in R \circ \delta_{x_1}^A \circ R \circ \cdots \circ R \circ \delta_{x_n}^A \circ R \circ \tau^A \quad \Leftrightarrow \quad a \in \delta_{x_1}^A \circ \cdots \circ \delta_{x_n}^A \circ \tau^A = \tau_u^A,$$

odakle sledi da važi

$$R_a \in \tau_u^{A/\!\!/R} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \tau_u^A. \tag{4.44}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} R_a \in (S/\!\!/R) \circ \tau_u^{A/\!\!/R} \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists b \in A)\Big((R_a, R_b) \in S/\!\!/R \ \wedge \ R_b \in \tau_u^{A/\!\!/R}\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists b \in A)\Big((a, b) \in S \ \wedge \ b \in \tau_u^A\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad a \in S \circ \tau_u^A. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Prema tome, na osnovu (4.44) i (4.45) dobijamo da je $(S/\!\!/R) \circ \tau_u^{A/\!\!/R} = \tau_u^{A/\!\!/R}$ ako i samo ako je $S \circ \tau_u^A = \tau_u^A$, i na isti način dokazujemo da je $(S/\!\!/R) \circ \tau^{A/\!\!/R} = \tau^{A/\!\!/R}$ ako i samo ako je $S \circ \tau^A = \tau^A$, odakle neposredno sledi da važi (a).

Tvrđenje (b) dokazujemo na isti način kao tvrđenje (b) Teoreme 4.3.9., koristeći tvrđenje (a), dok (c) sledi neposredno iz (b). $\square$

4.3.3. Višestruke redukcije

Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljni automat. Ako je $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) niz automata takvih da je $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1$ i za svaki $k\in[1,n-1]$ je $\mathcal{A}_{k+1}=\mathcal{A}_k/\!\!/R_k$, za neko desno invarijantno kvazi-uređenje R_k na $\mathcal{A}_k$, onda kažemo da je taj niz *višestruka redukcija* automata $\mathcal{A}$ pomoću desno invarijantnih kvazi-uređenja. Broj stanja automata koji čine višestruku redukciju generalno opada, tj.

$$|\mathcal{A}|=|\mathcal{A}_1|\geqslant\cdots\geqslant|\mathcal{A}_n|.$$

Ukoliko ne postoji nijedna višestruka redukcija automata $\mathcal{A}$ pomoću desno invarijantnih kvazi-uređenja u kojoj je bar jedna od ovih nejednakosti stroga, tj., ako za svaku višestruku redukciju $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) tog automata važi

$$|\mathcal{A}|=|\mathcal{A}_1|=\cdots=|\mathcal{A}_n|,$$

onda za automat $\mathcal{A}$ kažemo da se *ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima*.

Teorema 4.3.17. *Automat $\mathcal{A}$ se ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima ako i samo ako najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ jeste uređenje.*

Shodno tome, ako je S najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, tada se količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/S$ ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima.

Dokaz: Neka je S najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo da se automat $\mathcal{A}$ ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima. Tada automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/S$ imaju isti broj stanja, pa na osnovu Leme 4.2.3. dobijamo da je S uređenje.

Obratno, neka je S uređenje. Opet na osnovu Leme 4.2.3. dobijamo da automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/S$ imaju isti broj stanja. Dalje, neka je $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) proizvoljna višestruka redukcija automata $\mathcal{A}$ pomoću desno invarijantnih kvazi-uređenja, odnosno, za proizvoljno $k\in[1,n-1]$ neka je $\mathcal{A}_{k+1}=\mathcal{A}_k/\!\!/R_k$, za neko desno invarijantno kvazi-uređenje R_k na $\mathcal{A}_k$. Za svaki $k\in[1,n-1]$ neka je S_k najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}_k$. Jasno je da je $S_1=S$, a na osnovu Teoreme 4.3.9. imamo da je $S_{k+1}=S_k/\!\!/R_k$, za svaki $k\in[1,n-2]$, pa prema Teoremi 4.2.1. dobijamo da je

$$\mathcal{A}_{k+1}/\!\!/S_{k+1}=(\mathcal{A}_k/\!\!/R_k)/\!\!/(S_k/\!\!/R_k)\cong\mathcal{A}_k/\!\!/S_k,$$

za svaki $k\in[1,n-2]$, što znači da je $\mathcal{A}_k/\!\!/S_k\cong\mathcal{A}/\!\!/S$, za svaki $k\in[1,n-1]$. Kako je S uređenje, na osnovu Leme 4.2.3. zaključujemo da je

$$|\mathcal{A}|=|\mathcal{A}/\!\!/S|=|\mathcal{A}_k/\!\!/S_k|\leqslant|\mathcal{A}_k|, \tag{4.46}$$

za svaki $k\in[1,n-1]$. Međutim, na osnovu definicije niza $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ sledi da za svaki $k\in[1,n-1]$ važi $|\mathcal{A}_{k+1}|\leqslant|\mathcal{A}_k|$, što povlači da je $|\mathcal{A}_k|\leqslant|\mathcal{A}_1|=|\mathcal{A}|$. Prema tome, dokazali smo da je $|\mathcal{A}_k| = |\mathcal{A}|$, za svaki $k \in [1,n]$, a to znači da se automat $\mathcal{A}$ ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima.

Ovim smo dokazali prvo tvrđenje teoreme.

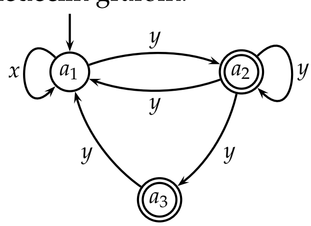
Dalje, na osnovu Teoreme 4.3.9. imamo da je $S /\!\!/ S$ najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}/\!\!/S$, a jednostavno se dokazuje da je $S/\!\!/S$ uređenje, i dakle, na osnovu prvog dela teoreme dobijamo da se automat $\mathcal{A}/\!\!/S$ ne može redukovati desno invarijantnim kvazi-uređenjima. □

Analogno možemo definisati koncepte višestruke redukcije pomoću slabo desno invarijantnih kvazi-uređenja i automata koji se *ne može redukovati slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjima*, i na isti način možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 4.3.18. *Automat $\mathcal{A}$ se ne može redukovati slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjima ako i samo ako najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ je uređenje.*

Shodno tome, ako je S najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, tada se količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/S$ ne može redukovati slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjima.

Primer 4.3.19. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa tri stanja nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Najpre ćemo izračunati najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Krećemo sa izračunavanjem članova kolekcije $\{\tau_u^A\}_{u \in X^*}$:

$$\tau_e^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \tau_x^A = \delta_x^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tau_y^A = \delta_y^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_{x^2}^A = \delta_x^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare, \ \tau_{yx}^A = \delta_y^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare,$$

$$\tau_{xy}^A = \delta_x^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \ \tau_{y^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\tau_{x^2y}^A = \delta_x^A \circ \tau_{xy}^A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \tau_{xy}^A \ \blacksquare, \ \tau_{yxy}^A = \delta_y^A \circ \tau_{xy}^A = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare,$$

$$\tau_{xy^2}^A = \delta_x^A \circ \tau_{y^2}^A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \tau_{xy}^A \ \blacksquare, \ \tau_{y^3}^A = \delta_y^A \circ \tau_{y^2}^A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_{y^2}^A \ \blacksquare,$$

a potom izračunavamo odgovarajuće reziduale:

$$\tau_e^A/\tau_e^A = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, \ \tau_x^A/\tau_{y^2} = \tau_{y^2}^A/\tau_x^A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\tau_y^A/\tau_y^A = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\tau_{xy}^A/\tau_{xy}^A = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Na taj način dobijamo da je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje R_1 na $\mathcal{A}$ jednako

$$R_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

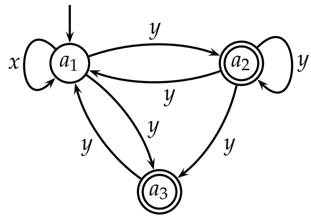
Kako je R_1 uređenje, količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R_1 = \mathcal{A}_1 = (A_1, X, \delta^{A_1}, \sigma^{A_1}, \tau^{A_1})$ će takođe imati tri stanja i relacije prelaza i skupove inicijalnih i završnih stanja date sa

$$\delta_x^{A_1} = R_1 \circ \delta_x^A \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \delta_x^A,$$

$$\delta_y^{A_1} = R_1 \circ \delta_y^A \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_1} = \sigma^A \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix} = \sigma^A, \ \tau^{A_1} = R_1 \circ \tau^A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^A.$$

Prema tome, kvazi-uređenje R_1 nije redukovalo broj stanja automata $\mathcal{A}$, ali ga je neznatno izmenilo, pa se automat $\mathcal{A}_1$ razlikuje od automata $\mathcal{A}$ samo u jednom novom prelazu koji je dodat, prelazu iz prvog u treće stanje indukovanim ulaznim slovom y. Naime, automat $\mathcal{A}_1$ dat je sledećim grafom



Dalje, tražimo najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}_1$. Najpre izračunavamo članove kolekcije $\{\sigma_u^{A_1}\}_{u\in X^*}$:

$$\sigma_e^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \sigma_x^{A_1} = \sigma^{A_1}\circ\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_e^{A_1}\ \blacksquare,$$

$$\sigma_y^{A_1} = \sigma^{A_1}\circ\delta_y^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\sigma_{yx}^{A_1} = \sigma_y^{A_1}\circ\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \sigma_{y^2}^{A_1} = \sigma_y^{A_1}\circ\delta_y^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\sigma_{yx^2}^{A_1} = \sigma_{yx}^{A_1}\circ\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_{yx}^{A_1}\ \blacksquare,\ \sigma_{yxy}^{A_1} = \sigma_{yx}^{A_1}\circ\delta_y^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_{yx}^{A_1}\ \blacksquare,$$

$$\sigma_{y^2x}^{A_1} = \sigma_{y^2}^{A_1}\circ\delta_x^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_e^{A_1}\ \blacksquare,$$

$$\sigma_{y^3}^{A_1} = \sigma_{y^2}^{A_1}\circ\delta_y^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{y^2}^{A_1}\ \blacksquare,$$

i pošto smo izračunali sve članove te kolekcije, izračunavamo odgovarajuće reziduale:

$$\sigma_e^{A_1}\backslash\sigma_e^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \sigma_y^{A_1}\backslash\sigma_y^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$\sigma_{yx}^{A_1}\backslash\sigma_{yx}^{A_1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \sigma_{y^2}^{A_1}\backslash\sigma_{y^2}^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Dakle, najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje R_2 na automatu $\mathcal{A}_1$ je jednako

$$R_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

i pošto kvazi-uređenje R_2 ima dva različita afterseta, to ono redukuje automat $\mathcal{A}_1$ na automat $\mathcal{A}_1/\!\!/R_2 = \mathcal{A}_2 = (A_2, X, \delta^{A_2}, \sigma^{A_2}, \tau^{A_2})$ sa dva stanja. Kako je

$$R_2 \circ \delta_x^{A_1} \circ R_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

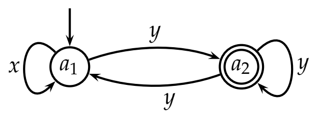
$$R_2 \circ \delta_y^{A_1} \circ R_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_1} \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}, \; R_1 \circ \tau^{A_1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

to je

$$\delta_x^{A_2} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \; \delta_y^{A_2} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}, \; \sigma^{A_2} = \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}, \; \tau^{A_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

odnosno, automat $\mathcal{A}_2$ se može zadati sledećim grafom:



S obzirom da se, prema Teoremi 4.3.18., automat $\mathcal{A}_2$ ne može dalje redukovati slabo levo invarijantnim kvazi-uređenjima, to tražimo najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje R_3 na $\mathcal{A}_2$. Imamo sledeće

$$\tau_e^{A_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \; \tau_x^{A_2} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \; \tau_y^{A_2} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \; \tau_{x^2}^{A_2} = \tau_{yx}^{A_2} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \tau_x^{A_2} \;\blacksquare, \; \tau_{xy}^{A_2} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \; \tau_{y^2}^{A_2} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \tau_y^{A_2} \;\blacksquare,$$

$$\tau_{x^2y}^{A_2} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \tau_{xy}^{A_2} \;\blacksquare, \; \tau_{yxy}^{A_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \tau_e^{A_2} \;\blacksquare,$$

$$\tau_e^{A_2}/\tau_e^{A_2} = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, \; \tau_x^{A_2}/\tau_x^{A_2} = \tau_y^{A_2}/\tau_y^{A_2} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, \; \tau_{xy}^{A_2}/\tau_{xy}^{A_2} = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},$$

odakle je

$$R_3 = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Kako je R_3 identička relacija, to je $\mathcal{A}_2/\!\!/R_3 \cong \mathcal{A}_2$, što znači da se automat $\mathcal{A}_2$ ne može redukovati ni slabo desno invarijantnim ni slabo levo invarijantnim kvazi-uređenjima, i naizmenična redukcija automata $\mathcal{A}$ u kojoj smo krenuli od redukcije najvećim slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjem se ovde završava.

Razmotrimo sada šta će se desiti ako u naizmeničnoj redukciji krenemo od redukcije najvećim slabo levo invarijantnim kvazi-uređenjem. U tom slučaju imamo da je

$$\sigma_e^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \sigma_x^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_e^{A_1}\ \blacksquare,\ \sigma_y^A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \sigma_{yx}^A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \sigma_{y^2}^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\sigma_{yx^2}^A = \sigma_{yxy}^A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_{yx}^A\ \blacksquare,\ \sigma_{y^2x}^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_e^{A_1}\ \blacksquare,\ \sigma_{y^3}^{A_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{y^2}^{A_1}\ \blacksquare,$$

$$\sigma_e^A \backslash \sigma_e^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \sigma_y^A \backslash \sigma_y^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \sigma_{yx}^A \backslash \sigma_{yx}^A = \sigma_{y^2}^A \backslash \sigma_{y^2}^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

pa je najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S_1 na $\mathcal{A}$ jednako

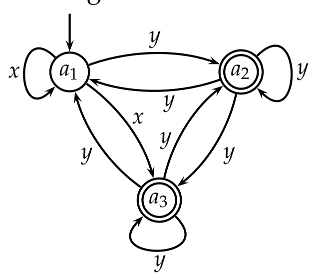
$$S_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Kao što vidimo, kvazi-uređenje S_1 ne redukuje broj stanja automata $\mathcal{A}$, tj., količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/S_1 = \mathcal{A}_1' = (A_1', X, \delta^{A_1'}, \sigma^{A_1'}, \tau^{A_1'})$ ima takođe tri stanja i relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja su zadati sa

$$\delta_x^{A_1'} = S_1 \circ \delta_x^A \circ S_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \delta_y^{A_1'} = S_1 \circ \delta_y^A \circ S_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\sigma^{A_1'} = \sigma^A \circ S_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \tau^{A_1'} = S_1 \circ \tau^A = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

odnosno, $\mathcal{A}_1'$ je zadat sledećim grafom



U nastavku izračunavamo najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje S_2 na $\mathcal{A}_1'$:

$$\tau_e^{A_1'} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\ \tau_x^{A_1'} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \tau_y^{A_1'} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\ \tau_{x^2}^{A_1'} = \tau_{yx}^{A_1'} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \tau_x^{A_1'}\ \blacksquare,\ \tau_{xy}^{A_1'} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \tau_{y^2}^{A_1'} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \tau_y^{A_1'}\ \blacksquare,$$

$$\tau_{x^2y}^{A_1'} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \tau_{xy}^{A_1'}\ \blacksquare,\ \tau_{yxy}^{A_1'} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \tau_e^{A_1'}\ \blacksquare,$$

$$\tau_e^{A_1'}/\tau_e^{A_1'} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \tau_x^{A_1'}/\tau_x^{A_1'} = \tau_y^{A_1'}/\tau_y^{A_1'} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \tau_{xy}^{A_1'}/\tau_{xy}^{A_1'} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

pa je

$$S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Prema tome, količnički automat $\mathcal{A}'_1/\!\!/S_2=\mathcal{A}'_2=(A'_2,X,\delta^{A'_2},\sigma^{A'_2},\tau^{A'_2})$ ponovo ima tri stanja i relacije prelaza i skupove inicijalnih i završnih stanja zadate sa

$$\delta_x^{A'_2}=S_2\circ\delta_x^{A'_1}\circ S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\delta_x^{A'_1},\ \ \delta_y^{A'_2}=S_2\circ\delta_y^{A'_1}\circ S_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\delta_y^{A'_1},$$

$$\sigma^{A'_2}=\sigma^{A'_1}\circ S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}=\sigma^{A'_1},\ \ \tau^{A'_2}=S_2\circ\tau^{A'_1}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\tau^{A'_1},$$

što znači da je količnički automat $\mathcal{A}'_1/\!\!/S_2=\mathcal{A}'_2$ identičan originalnom automatu $\mathcal{A}'_1$. Shodno tome, broj stanja tog automata se ne može redukovati ni slabo levo invarijantnim ni slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjima, pa se ova naizmenična redukcija ovde završava.

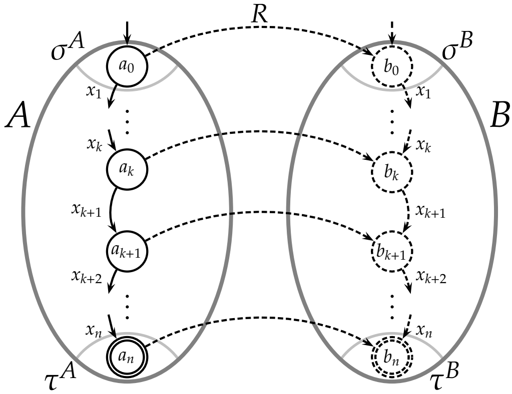
Prethodni primer je pokazao da rezultat koji će dati naizmenična redukcija zavisi od toga da li je počinjemo redukcijom pomoću najvećeg slabo desno invarijantnog ili pomoću najvećeg slabo levo invarijantnog kvazi-uređenja. U slučaju automata $\mathcal{A}$ iz prethodnog primera, naizmenična redukcija koja je počela redukcijom pomoću najvećeg slabo desno invarijantnog kvazi-uređenja smanjila je broj stanja za jedno, dok redukcija koja je počela redukcijom pomoću najvećeg slabo levo invarijantnog kvazi-uređenja nije uspela da smanji broj stanja. Naravno, moguća je i obrnuta situacija. Čak i u slučaju kada obe naizmenične redukcije kao rezultat daju automate sa istim brojem stanja, moguće je da se jedna od tih redukcija zaustavi posle manjeg broja koraka (u konstrukciji odgovarajućeg niza kvazi-uređenja) u odnosu na drugu.

4.4. Simulacije i bisimulacije

Pre nego što formalno definišemo pojmove simulacije i bisimulacije daćemo njihovo neformalno, intuitivno objašnjenje. Neka je $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ automat koji želimo da simuliramo automatom $\mathcal{B}=(B,X,\delta^B,\sigma^B,\tau^B)$ tako da ta simulacija bude realizovana uz pomoć relacije $R\subseteq A\times B$. Neka je $a_0,a_1,\dots,a_n$ proizvoljan uspešan put u automatu $\mathcal{A}$ označen ulaznom reči $u=x_1x_2\cdots x_n$ $(x_1,x_2,\dots,x_n\in X)$, odnosno niz stanja u $\mathcal{A}$ takav da važi

$$a_0\in\sigma^A,\qquad (a_k,a_{k+1})\in\delta^A_{x_{k+1}},\ \text{za sve}\ k\in[0,n-1],\qquad a_n\in\tau^A.$$

Relacija R treba da obezbedi uspešan put u automatu $\mathcal{B}$, označen istom reči u, koji simulira originalni uspešni put u automatu $\mathcal{A}$, kao što je prikazano na sledećoj slici.



Prvo što treba da obezbedimo je da se svako inicijalno stanje $a_0 \in \sigma^A$ može simulirati nekim iniicijalnim stanjem $b_0 \in \sigma^B$, što znači da za svako $a_0 \in \sigma^A$ treba da postoji $b_0 \in \sigma^B$ tako da je $(a_0, b_0) \in R$. Taj uslov se može zapisati kao

$$\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}.$$

Dalje, ako je za neko $k \in [0, n-1]$ stanje a_k simulirano nekim stanjem $b_k \in B$ (tj., ako je $(a_k, b_k) \in R$), onda treba da obezbedimo prelaz $(b_k, x_{k+1}, b_{k+1}) \in \delta^B$ u $\mathcal{B}$ koji simulira prelaz $(a_k, x_{k+1}, a_{k+1}) \in \delta^A$ u $\mathcal{A}$, tj., treba da obezbedimo postojanje stanja $b_{k+1} \in B$ koje simulira a_{k+1} (tj., $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in R$) tako da $(b_k, x_{k+1}, b_{k+1}) \in \delta^B$. Ovaj uslov se može zapisati kao

$$R^{-1} \circ \delta^A_{x_{k+1}} \subseteq \delta^B_{x_{k+1}} \circ R^{-1}.$$

Na kraju, kada smo zavšili konstrukciju niza $b_0, b_1, \dots, b_n$, poslednje stanje b_n, koje simulira završno stanje $a_n \in \tau^A$, treba takođe da bude završno, tj., treba da je $b_n \in \tau^B$. Ovaj uslov se može zapisati u obliku

$$R^{-1} \circ \tau^A \subseteq \tau^B.$$

Ako je sve ovo ispunjeno, onda niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ koji smo izgradili jeste uspešan put u automatu $\mathcal{B}$ koji odgovara reči u, koji simulira originalni uspešni put $a_0, a_1, \dots, a_n$ u $\mathcal{A}$ koji odgovara toj istoj reči.

Tri uslova koje smo formulisali definišu ono što ćemo zvati *forward simulacija* (*simulacija unapred*). Razlog zbog čega ovaj tip simulacija tako zovemo je taj što niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ gradimo krećući se unapred, polazeći od b_0 i završavajući sa b_n. Ako bi taj niz gradili krećući se unazad, polazeći od b_n i završavajući sa b_0, dobili bi ono što ćemo zvati *backward simulacija* (*simulacija unazad*).

Sada možemo preći na formalne definicije simulacija i bisimulacija. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R \subseteq A \times B$ neprazna relacija. Ako važi

$$\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}, \tag{4.47}$$

$$R^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ R^{-1}, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.48}$$

$$R^{-1} \circ \tau^A \subseteq \tau^B, \tag{4.49}$$

onda ćemo R zvati *forward simulacija*, a ako važi

$$\sigma^A \circ R \subseteq \sigma^B, \tag{4.50}$$

$$\delta_x^A \circ R \subseteq R \circ \delta_x^B, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.51}$$

$$\tau^A \subseteq R \circ \tau^B, \tag{4.52}$$

onda ćemo R zvati *backward simulacija*. Relaciju R ćemo zvati *forward bisimulacija* ako su R i R^{-1} forward simulacije, tj., ako su pored uslova (4.47)–(4.49) zadovoljeni i sledeći uslovi:

$$\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R, \tag{4.53}$$

$$R \circ \delta_x^B \subseteq \delta_x^A \circ R, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.54}$$

$$R \circ \tau^B \subseteq \tau^A. \tag{4.55}$$

Ako su R i R^{-1} backward simulacije, odnosno ako pored uslova (4.50)–(4.52) važe i uslovi

$$\sigma^B \circ R^{-1} \subseteq \sigma^A, \tag{4.56}$$

$$\delta_x^B \circ R^{-1} \subseteq R^{-1} \circ \delta_x^A, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.57}$$

$$\tau^B \subseteq R^{-1} \circ \tau^A, \tag{4.58}$$

onda za R kažemo da je *backward bisimulacija*.

Napomenimo da uslov (4.47) znači da za svaki $a \in \sigma^A$ postoji $b \in \sigma^B$ tako da je $(a,b) \in R$, što se može shvatiti kao uslov da je svako inicijalno stanje automata $\mathcal{A}$ simulirano nekim inicijalnim stanjem automata $\mathcal{B}$, dok (4.53) znači da za svaki $b \in \sigma^B$ postoji $a \in \sigma^A$ tako da je $(a,b) \in R$, što se može interpretirati na sličan način. Sa druge strane, (4.49) znači da je $\{b \in B \mid (\exists a \in \tau^A)\,(a,b) \in R\} \subseteq \tau^B$, što se može shvatiti kao uslov da svako stanje automata $\mathcal{B}$ koje simulira neko završno stanje automata $\mathcal{A}$ i samo mora biti završno, a uslov (4.55) znači da je $\{a \in A \mid (\exists b \in \tau^B)\,(a,b) \in R\} \subseteq \tau^A$, sa sličnom interpretacijom. Slične interpretacije se mogu dati i za uslove (4.50), (4.52), (4.56) i (4.58).

Dalje, relaciju R ćemo zvati *forward-backward simulacija* ako je R forward simulacija a R^{-1} je backward simulacija, tj., ako važi

$$\sigma^A = \sigma^B \circ R^{-1}, \tag{4.59}$$

$$R^{-1} \circ \delta_x^A = \delta_x^B \circ R^{-1}, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.60}$$

$$R^{-1} \circ \tau^A = \tau^B, \tag{4.61}$$

a ako je R backward simulacija a R^{-1} je forward simulacija, tj., ako važi

$$\sigma^A \circ R = \sigma^B, \tag{4.62}$$

$$\delta_x^A \circ R = R \circ \delta_x^B, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.63}$$

$$\tau^A = R \circ \tau^B. \tag{4.64}$$

onda R zovemo *backward-forward simulacija*.

Jednostavnosti radi, R ćemo zvati samo *simulacija* ako je ili forward ili backward simulacija, odnosno samo *bisimulacija* ako je bilo kog od četiri tipa bisimulacija koje smo upravo definisali. Osim toga, forward i backward bisimulacije ćemo nazivati *istotipne*, a backward-forward i forward-backward bisimulacije ćemo nazivati *heterotipne*.

Indukcijom se lako može dokazati da je uslov (4.48) ekvivalentan uslovu

$$R^{-1} \circ \delta_u^A \subseteq \delta_u^B \circ R^{-1}, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.65}$$

dok je uslov (4.51) ekvivalentan uslovu

$$\delta_u^A \circ R \subseteq R \circ \delta_u^B, \quad \text{za svaki } u \in X^*. \tag{4.66}$$

Teorema 4.4.1. *Neka su* $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *i* $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ *automati i neka je* $R \subseteq A \times B$ *proizvoljna relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *Ako je R simulacija, tada je* $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$.

(b) *Ako je R bisimulacija, tada je* $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{B}]\!]$.

Dokaz: (a) Neka je R forward simulacija. Tada za svako $u \in X^*$ imamo da je

$$\sigma^A \circ \delta_u^A \circ \tau^A \leqslant \sigma^B \circ R^{-1} \circ \delta_u^A \circ \tau^A \leqslant \sigma^B \circ \delta_u^B \circ R^{-1} \circ \tau^A \leqslant \sigma^B \circ \delta_u^B \circ \tau^B,$$

i prema (4.5) dobijamo da je $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$. Slično, ako je R backward simulacija, tada na isti način dobijamo da je $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$.

Napomenimo da smo u prethodnoj formuli koristili simbol "$\leqslant$" zato što svi izrazi u njoj predstavljaju skalare u dvoelementnoj Bulovoj algebri $\{0,1\}$ i sa "$\leqslant$" je označeno uobičajeno uređenje na $\{0,1\}$.

(b) To sledi neposredno iz (a). □

Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$, i neka je $R \subseteq A \times B$ proizvoljna relacija. Na jednostavan način se može dokazati da je R backward simulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je R^{-1} forward simulacija iz $\bar{\mathcal{B}}$ u $\bar{\mathcal{A}}$, odakle dalje sledi da je R backward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je forward bisimulacija iz $\bar{\mathcal{A}}$ u $\bar{\mathcal{B}}$, i takođe, R je forward-backward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je backward-forward bisimulacija iz $\bar{\mathcal{A}}$ u $\bar{\mathcal{B}}$.

Shodno tome, svako tvrđenje o forward simulacijama, forward bisimulacijama ili backward-forward bisimulacijama koje je univerzalno važeće (tj. važi za sve nedeterminističke automate) može se jednostavno prevesti u odgovarajuće univerzalno važeće tvrđenje o backward simulacijama, backward bisimulacijama ili forward-backward bisimulacijama. Zbog toga ćemo u daljem tekstu raditi samo sa forward simulacijama i forward i backward-forward bisimulacijama.

Istaknimo i sledeću razliku između istotipnih i heterotipnih bisimulacija. Evidentno, inverz forward (odnosno backward) bisimulacije je takođe forward (odnosno backward) bisimulacija. Međutim, inverz backward-forward (odnosno forward-backward) bisimulacije nije obavezno backward-forward (odnosno forward-backward) bisimulacija. Inverz backward-forward bisimulacije je forward-backward bisimulacija i obratno. Kasnije ćemo istaći i neke druge razlike.

Sada smo spremni za formulaciju i dokaz sledećeg fundamentalnog rezultata o forward bisimulacijama.

Teorema 4.4.2. *Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ takvi da postoji bar jedna forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.*

Tada postoji i najveća forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ i ona je parcijalna uniformna relacija.

Dokaz: Na osnovu pretpostavke teoreme, familija $\{R_i\}_{i\in I}$ svih forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ je neprazna. Neka je R unija te familije. Jednostavno se pokazuje da je R takođe forward bisimulacija, i jasno, R je najveća forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Osim toga, lako se proverava da kompozicija dve forward bisimulacije (odnosno konačno mnogo njih) takođe jeste forward bisimulacija. Odatle sledi da je i $R \circ R^{-1} \circ R$ forward bisimulacija, i kako je R najveća forward bisimulacija, to dobijamo da je $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$. To znači da je R parcijalna uniformna relacija. □

Na potpuno isti način možemo dokazati da ako postoji bar jedna forward simulacija ili backward-forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, onda postoji i najveća takva simulacija, odnosno bisimulacija. Međutim, ovde ne možemo dokazati da najveća forward simulacija, odnosno najveća backward-forward bisimulacija jeste parcijalna uniformna relacija. Naime, ako je R forward simulacija ili backward-forward bisimulacija, R^{-1} ne mora imati isto svojstvo, pa stoga ni $R \circ R^{-1} \circ R$, pa ne možemo koristiti argumentaciju kakvu smo koristili u dokazu prethodne teoreme.

U daljem radu biće nam potrebna sledeća lema.

Lema 4.4.3. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati, $R \subseteq A \times B$ je proizvoljna relacija, i neka su $\mathcal{C} = (C, X, \delta^C, \sigma^C, \tau^C)$ i $\mathcal{D} = (D, X, \delta^D, \sigma^D, \tau^D)$ podautomati od $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, gde je $C = \mathrm{Dom}\, R$ i $D = \mathrm{Im}\, R$. Tada je $R \subseteq C \times D$ i važi sledeće:*

(a) *ako je R forward (odnosno backward) simulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada je R i forward (odnosno backward) simulacija iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$;*

(b) *ako je R^{-1} forward (odnosno backward) simulacija iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{A}$, tada je R^{-1} i forward (odnosno backward) simulacija iz $\mathcal{D}$ u $\mathcal{C}$.*

Takođe, ako je $A = C$, tada važi i obratna implikacija u (a), *a ako je $B = D$, tada važi i obratna implikacija u* (b).

Dokaz: Dokazaćemo samo deo tvrđenja (a) koji se tiče forward simulacija. Preostala tvrđenja se mogu slično dokazati. Shodno tome, neka je R forward simulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Razmotrimo proizvoljno $a \in \sigma^C \subseteq \sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$. Tada postoji $b \in B$ tako da je $b \in \sigma^B$ i $(b,a) \in R^{-1}$, tj., $(a,b) \in R$, što povlači $b \in D$. To znači da je $b \in \sigma^B \cap D = \sigma^D$, pa je $a \in \sigma^D \circ R^{-1}$. Prema tome, dokazali smo da je $\sigma^C \subseteq \sigma^D \circ R^{-1}$.

Dalje, neka je $(b,a) \in R^{-1} \circ \delta_x^C \subseteq R^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ R^{-1}$. Iz $(b,a) \in R^{-1} \circ \delta_x^C$ sledi da je $(b,a') \in R^{-1}$ i $(a',a) \in \delta_x^C$, za neko $a' \in C$, što daje $b \in D$. Osim toga, iz $(b,a) \in \delta_x^B \circ R^{-1}$ dobijamo da postoji $b' \in B$ tako da je $(b,b') \in \delta_x^B$ i $(b',a) \in R^{-1}$, odakle je $b' \in D$. Prema tome, imamo da $b,b' \in D$ i $(b,b') \in \delta_x^B$, pa $(b,b') \in \delta_x^D$, i kako je $(b',a) \in R^{-1}$, to zaključujemo da je $(b,a) \in \delta_x^D \circ R^{-1}$. Dakle, dobili smo da je $R^{-1} \circ \delta_x^C \subseteq \delta_x^D \circ R^{-1}$.

Konačno, neka $b \in R^{-1} \circ \tau^C \subseteq R^{-1} \circ \tau^A \subseteq \tau^B$. Iz $b \in R^{-1} \circ \tau^C$ sledi da postoji $a \in C$ tako da $(b,a) \in R^{-1}$ i $a \in \tau^C$, odakle je $b \in D$. Dakle, $b \in \tau^B \cap D = \tau^D$, čime smo dokazali da je $R^{-1} \circ \tau^C \subseteq \tau^D$.

Ako je $A = C$ ili $B = D$, tada su obratne implikacije u (a) i (b) neposredne posledice formule (1.8). □

4.4.1. Izračunavanje najvećih simulacija i bisimulacija

Sada smo spremni da formulišemo i dokažemo teoremu koja nudi postupak kojim se može utvrditi da li postoji forward bisimulacija između dva automata i izračunati najveća forward bisimulacija, u slučaju da ona postoji.

Teorema 4.4.4. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati. Definišimo induktivno niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ na sledeći način:*

$$R_1 = (\tau^A \backslash \tau^B) \cap (\tau^A / \tau^B) \tag{4.67}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big(((\delta_x^B \circ R_k^{-1})/\delta_x^A)^{-1} \cap ((\delta_x^A \circ R_k)/\delta_x^B) \Big). \tag{4.68}$$

Tada

(a) *$\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je opadajući niz relacija i postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $R_n = R_{n+1}$.*

(b) *R_n je najveća relacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ koja zadovoljava uslove* (4.48), (4.49), (4.54) *i* (4.55).

(c) *Ako R_n zadovoljava uslove* (4.47) *i* (4.53), *tada je R_n najveća forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, a u suprotnom, ako R_n ne zadovoljava te uslove, tada ne postoji nijedna forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Dokaz: (a) Jasno je da je $R_{k+1} \subseteq R_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako su A i B konačni skupovi, to postoji konačno mnogo relacija između A i B, pa postoje $n, m \in \mathbb{N}$ tako da je $R_n = R_{n+m}$. Sada imamo da je $R_{n+1} \subseteq R_{n+m} = R_n \subseteq R_{n+1}$, i shodno tome, važi $R_n = R_{n+1}$.

Jednostavnosti radi, uzmimo da je $R = R_n$. U skladu sa formulom (1.16), relacija $S \subseteq A \times B$ zadovoljava (4.49) i (4.55) ako i samo ako je $S \subseteq R_1$, i shodno tome, R zadovoljava (4.49) i (4.55). Pored toga, iz (4.68) sledi da je

$$R = R \cap \bigcap_{x \in X} \Big(((\delta_x^B \circ R^{-1})/\delta_x^A)^{-1} \cap ((\delta_x^A \circ R)/\delta_x^B) \Big),$$

i za svaki $x \in X$ dobijamo da je

$$R \subseteq ((\delta_x^B \circ R^{-1})/\delta_x^A)^{-1} \ \text{ i } \ R \subseteq (\delta_x^A \circ R)/\delta_x^B,$$

odnosno

$$R^{-1} \subseteq (\delta_x^B \circ R^{-1})/\delta_x^A \ \text{ i } \ R \subseteq (\delta_x^A \circ R)/\delta_x^B.$$

Sada na osnovu svojstva reziduacije imamo da je

$$R^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ R^{-1} \ \text{ i } \ R \circ \delta_x^B \subseteq \delta_x^A \circ R,$$

i dakle, R zadovoljava uslove (4.48) i (4.54).

Neka je $S \subseteq A \times B$ proizvoljna relacija koja zadovoljava uslove (4.48), (4.49), (4.54) i (4.55). Kao što smo već rekli, S zadovoljava (4.49) i (4.55) ako i samo ako je $S \subseteq R_1$. Pretpostavimo da je $S \subseteq R_k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada za svako $x \in X$ imamo da je $S^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ S^{-1} \subseteq \delta_x^B \circ R_k^{-1}$, i na osnovu svojstva reziduacije (1.19), dobijamo da je $S^{-1} \subseteq (\delta_x^B \circ R_k^{-1})/\delta_x^A$, odnosno $S \subseteq ((\delta_x^B \circ R_k^{-1})/\delta_x^A)^{-1}$. Analogno pokazujemo da je $S \subseteq (\delta_x^A \circ R_k)/\delta_x^B$. Dakle,

$$S \subseteq R_k \cap \bigcap_{x \in X} \Big(((\delta_x^B \circ R_k^{-1})/\delta_x^A)^{-1} \cap ((\delta_x^A \circ R_k)/\delta_x^B) \Big) = R_{k+1},$$

i indukcijom zaključujemo da je $S \subseteq R_k$, za sve $k \in \mathbb{N}$, pa je $S \subseteq R$. To znači da je R najveća relacija koja zadovoljava uslove (4.48), (4.49), (4.54) i (4.55).

Ako pored toga R zadovoljava i uslove (4.47) i (4.53), tada R jeste forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i to upravo najveća takva bisimulacija. Sa druge strane, pretpostavimo da R ne zadovoljava (4.47) i (4.53). Ako je S proizvoljna forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tada S zadovoljava uslove (4.48), (4.49), (4.54) i (4.55), i shodno tome, $S \subseteq R$. Odatle sledi da je

$$\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ S^{-1} \subseteq \sigma^B \circ R^{-1} \ \text{ i } \ \sigma^B \subseteq \sigma^A \circ S \subseteq \sigma^A \circ R,$$

što dovodi do kontradikcije. Dakle, zaključujemo da ako R ne zadovoljava uslove (4.47) i (4.53), onda ne postoji forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Algoritam 4.4.5. (***Najveća forward bisimulacija***) Ulaz algoritma su automati $\mathcal{A} = (A, X, \sigma^A, \delta^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ nad alphabetom X. Algoritam ustanovljava da li postoji forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i u slučaju kada ona postoji izlaz algoritma je najveća forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji niza relacija $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, na sledeći način:

(A1) U prvom koraku izračunavamo $R_1 = (\tau^A \backslash \tau^B) \cap (\tau^A / \tau^B)$.
(A2) Posle $k$tog koraka neka je R_k relacija koja je konstruisana.
(A3) U narednom koraku konstruišemo relaciju R_{k+1} pomoću formule (4.68).
(A4) Istovremeno, proveravamo da li je $R_{k+1} = R_k$.
(A5) Kada nađemo najmanji prirodan broj n takav da je $R_{n+1} = R_n$, postupak formiranja niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se završava i mi proveravamo da li R_n zadovoljava uslove (4.47) i (4.53).
Ukoliko R_n zadovoljava (4.47) i (4.53), tada je R_n najveća forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, a ako R_n ne zadovoljava te uslove, onda ne postoji nijedna forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Na sličan način se mogu formulisati i algoritmi pomoću kojih se može odlučiti da li postoje ostali tipovi simulacija i bisimulacija između dva automata i izračunati najveće simulacije/bisimulacije tih tipova, u slučajevima kada one postoje. Svi ti algoritmi razlikuju se jedino u formulama na osnovu kojih se izračunavaju članovi niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i uslovima koji se u (A5) koriste za testiranje najmanjeg člana niza. Uporedni pregled tih formula i uslova dat je u Tabeli 4.4.1.

Naredni primeri pokazuju kako funkcionišu algoritmi za testiranje postojanja simulacija i bisimulacija navedenih tipova i izračunavanje onih najvećih.

Primer 4.4.6. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ predstavljeni sledećim grafovima

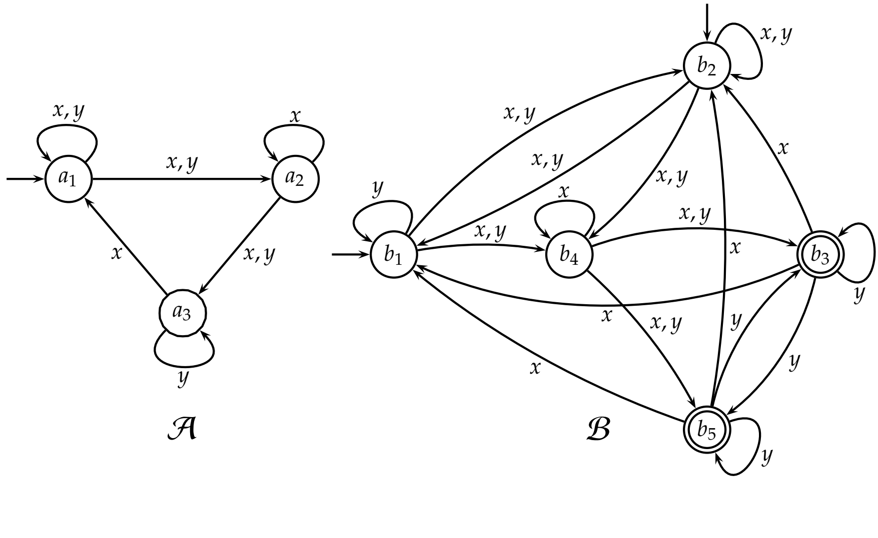


Tabela 4.4.1. Formule i uslovi koji se koriste pri utvrđivanju postojanja simulacija i bisimulacija između dva automata

forward simulacija:

$$R_1 = \tau^A \backslash \tau^B \tag{4.69}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big((\delta_x^B \circ R_k^{-1}) / \delta_x^A \Big)^{-1} \tag{4.70}$$

u (A5) se proverava (4.47): $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$

backward simulacija:

$$R_1 = \sigma^A \backslash \sigma^B \tag{4.71}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big(\delta_x^A \backslash (R_k \circ \delta_x^B) \Big) \tag{4.72}$$

u (A5) se proverava (4.52): $\tau^A \subseteq R \circ \tau^B$

forward bisimulacija:

$$R_1 = (\tau^A \backslash \tau^B) \cap (\tau^A / \tau^B) \tag{4.73}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big(((\delta_x^B \circ R_k^{-1}) / \delta_x^A)^{-1} \cap ((\delta_x^A \circ R_k) / \delta_x^B) \Big) \tag{4.74}$$

u (A5) se proverava (4.47): $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$ (4.53): $\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R$

backward bisimulacija:

$$R_1 = (\sigma^A \backslash \sigma^B) \cap (\sigma^A / \sigma^B) \tag{4.75}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big((\delta_x^A \backslash (R_k \circ \delta_x^B) \cap (\delta_x^B \backslash (R_k^{-1} \circ \delta_x^A))^{-1} \Big) \tag{4.76}$$

u (A5) se proverava (4.52): $\tau^A \subseteq R \circ \tau^B$ (4.58): $\tau^B \subseteq R^{-1} \circ \tau^A$

forward-backward bisimulacija:

$$R_1 = (\tau^A \backslash \tau^B) \cap (\sigma^A / \sigma^B) \tag{4.77}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big(((\delta_x^B \circ R_k^{-1}) / \delta_x^A)^{-1} \cap (\delta_x^B \backslash (R_k^{-1} \circ \delta_x^A))^{-1} \Big) \tag{4.78}$$

u (A5) se proverava (4.47): $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$ (4.58): $\tau^B \subseteq R^{-1} \circ \tau^A$

backward-forward bisimulacija:

$$R_1 = (\sigma^A \backslash \sigma^B) \cap (\tau^A / \tau^B) \tag{4.79}$$

$$R_{k+1} = R_k \cap \bigcap_{x\in X} \Big(((\delta_x^A \circ R_k) / \delta_x^B) \cap (\delta_x^A \backslash (R_k \circ \delta_x^B)) \Big) \tag{4.80}$$

u (A5) se proverava (4.52): $\tau^A \subseteq R \circ \tau^B$ (4.53): $\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R$

Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovih automata mogu se zadati i sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \delta_x^A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \delta_x^B = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \delta_y^B = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} \quad \tau^B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Započinjemo izračunavanje najveće relacije između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ koja zadovoljava (4.48), (4.49), (4.54) i (4.55). Najpre, imamo da je

$$\tau^A \backslash \tau^B = \tau^A \to \tau^B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$\tau^A /\, \tau^B = (\tau^B \to \tau^A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

pa je

$$R_1 = (\tau^A \backslash \tau^B) \cap (\tau^A /\, \tau^B) = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Dalje,

$$\delta_x^B \circ R_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}, \quad \delta_x^A \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\delta_y^B \circ R_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \delta_y^A \circ R_1 = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix},$$

pa je

$$\left((\delta_x^B \circ R_1^{-1})/\delta_x^A\right)^{-1} = \delta_x^A \lhd (\delta_x^B \circ R_1^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\delta_x^B \lhd (\delta_x^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&1&1\\ 0&1&0\\ 1&1&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&1&1\\ 1&1&1\\ 0&1&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix}, \quad (\delta_x^A \circ R_1)/\delta_x^B = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\left((\delta_y^B \circ R_1^{-1})/\delta_y^A\right)^{-1} = \delta_y^A \lhd (\delta_y^B \circ R_1^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^B \lhd (\delta_y^A \circ R_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&1&1\\ 0&1&1 \end{bmatrix}, \quad (\delta_y^A \circ R_1)/\delta_y^B = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix}.$$

Nastavljajući isti postupak dobijamo

$$\delta_x^B \circ R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^B \circ R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\left((\delta_x^B \circ R_2^{-1})/\delta_x^A\right)^{-1} = \delta_x^A \lhd (\delta_x^B \circ R_2^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^B \lhd (\delta_x^A \circ R_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&0&1\\ 1&0&1\\ 0&1&0\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&1 \end{bmatrix}, \quad (\delta_x^A \circ R_2)/\delta_x^B = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\left((\delta_y^B \circ R_2^{-1})/\delta_y^A\right)^{-1} = \delta_y^A \lhd (\delta_y^B \circ R_2^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^B \lhd (\delta_y^A \circ R_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&1&1\\ 0&1&1 \end{bmatrix}, \quad (\delta_y^A \circ R_2)/\delta_y^B = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} = R_2.$$

Ovim smo završili konstrukciju niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, nakon čega proveravamo da li najmanji član tog niza, relacija R_2, zadovoljava uslove (4.47) i (4.53):

$$\sigma^B \circ R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \end{bmatrix} = \sigma^A,$$

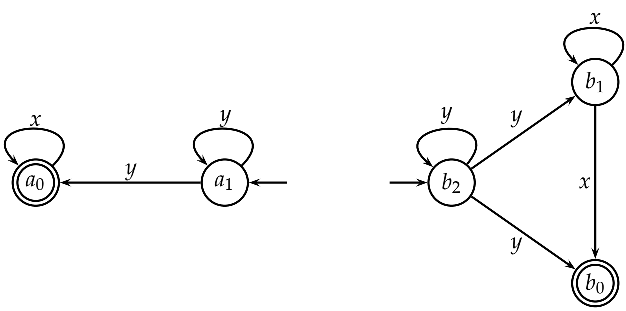
$$\sigma^A \circ R_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} = \sigma^B,$$

što znači da R_2 zadovoljava uslove (4.47) i (4.53).

Prema tome, R_2 je najveća forward bisimulacija između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Napomenimo da automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ raspoznaju isti jezik $L = (x+y)^2(x^* + y^*)^*$.

Sledeći primer prikazuje slučaj kada ne postoji forward simulacija između dva automata, i shodno tome, ne postoje ni forward i forward-backward bisimulacija između njih, ali postoje backward simulacija, kao i backward i backward-forward bisimulacija između tih automata.

Primer 4.4.7. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati nad alfabetom $X = \{x, y\}$ predstavljeni sledećim grafovima:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovih automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} 0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&0\\ 1&1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix} 0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^B = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Najpre testiramo postojanje forward simulacije između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, koristeći Algoritam 4.4.5. Najpre izračunavamo

$$R_1 = \tau^A \backslash \tau^B = \tau^A \to \tau^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a potom izračunavamo

$$\delta_x^B \circ R_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B \circ R_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_x^B \circ R_1^{-1})/\delta_x^A\right)^{-1} = \delta_x^A \lhd (\delta_x^B \circ R_1^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_y^B \circ R_1^{-1})/\delta_y^A\right)^{-1} = \delta_y^A \lhd (\delta_y^B \circ R_1^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

čime dobijamo da je

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nastavljajući izračunavanje dobijamo

$$\delta_x^B \circ R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B \circ R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_x^B \circ R_2^{-1})/\delta_x^A\right)^{-1} = \delta_x^A \lhd (\delta_x^B \circ R_2^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_y^B \circ R_2^{-1})/\delta_y^A\right)^{-1} = \delta_y^A \lhd (\delta_y^B \circ R_2^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo da je

$$\delta_x^B \circ R_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B \circ R_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_x^B \circ R_3^{-1})/\delta_x^A\right)^{-1} = \delta_x^A \lhd (\delta_x^B \circ R_3^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\left((\delta_y^B \circ R_3^{-1})/\delta_y^A\right)^{-1} = \delta_y^A \lhd (\delta_y^B \circ R_3^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, R_4 je prazna relacija, i kako je niz $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući, to dalje izračunavanje nema smisla, jer će i svi naredni članovi niza biti jednaki praznoj relaciji. To znači da je konstrukcija niza $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zavšena i da je njegov najmanji član relacija R_4. Kako relacija R_4 očigledno ne zadovoljava uslov (4.47), to zaključujemo da ne postoji nijedna forward simulacija između $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. Odatle takođe sledi da ne postoje nijedna forward i forward-backward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Prelazimo na testiranje postojanja backward simulacije između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Krećemo sa izgradnjom niza $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u skladu sa (4.97) i (4.70):

$$S_1 = \sigma^A \backslash \sigma^B = \sigma^A \to \sigma^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_1 \circ \delta_x^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 \circ \delta_y^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^A \backslash (S_1 \circ \delta_x^B) = (\delta_x^A)^{-1} \lhd (S_1 \circ \delta_x^B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^A \backslash (S_1 \circ \delta_y^B) = (\delta_y^A)^{-1} \lhd (S_1 \circ \delta_y^B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i na osnovu formule (4.72) dobijamo da je

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo da je

$$S_2 \circ \delta_x^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 \circ \delta_x^B, \quad S_2 \circ \delta_y^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_x^A \backslash (S_2 \circ \delta_x^B) = \delta_x^A \backslash (S_1 \circ \delta_x^B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_y^A \backslash (S_2 \circ \delta_y^B) = (\delta_y^A)^{-1} \lhd (S_2 \circ \delta_y^B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da je

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_2.$$

Ovim je konstrukcija niza $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ završena i mi proveravamo da li najmanji član niza, relacija S_2, zadovoljava (4.52). Kako je

$$S_2 \circ \tau^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau^A,$$

to zaključujemo da S_2 zadovoljava (4.52), i prema tome, S_2 je najveća backward simulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Takođe imamo da je

$$\sigma^B \circ S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^A,$$

$$\delta_x^B \circ S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_2^{-1} \circ \delta_x^A,$$

$$\delta_y^B \circ S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = S_2^{-1} \circ \delta_y^A,$$

$$\tau^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = S_2^{-1} \circ \tau^A,$$

i prema tome, S_2 je i backward bisimulacija, dok iz

$$\sigma^A \circ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^b,$$

$$\delta_x^A \circ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_2 \circ \delta_x^B,$$

$$\delta_y^A \circ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S_2 \circ \delta_y^B,$$

$$S_2 \circ \tau^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau^A,$$

dobijamo da je S_2 i backward-forward bisimulacija. Kako su najveća backward bisimulacija i najveća backward-forward bisimulacije uvek manje od najveće backward simulacije, to zaključujemo da je S_2 istovremeno i najveća backward bisimulacija i najveća backward-forward bisimulacija između automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Napomenimo da oba razmatrana automata raspoznaju isti jezik $L = y^+x^*$.

Nije teško proveriti da između reverznih automata $\bar{\mathcal{A}}$ and $\bar{\mathcal{B}}$ postoje forward simulacija, kao i forward i forward-backward bisimulacija, ali ne postoji nijedna backward simulacija, i nijedna backward i backward-forward bisimulacija.

4.4.2. Uniformne bisimulacije

U ovom odeljku bavimo se bisimulacijama koje su uniformne relacije. Prvo razmatramo uniformne forward bisimulacije i pokazujemo da se unutar klase uniformnih relacija forward bisimulacije mogu okarakterisati jednakostima.

Teorema 4.4.8. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati i neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija. Tada je R forward bisimulacija ako i samo ako važi sledeće:*

$$\sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}, \qquad \sigma^A \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R, \tag{4.81}$$

$$\delta_x^A \circ R \circ R^{-1} = R \circ \delta_x^B \circ R^{-1}, \quad R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R, \quad \text{za svaki } x \in X, \tag{4.82}$$

$$\tau^A = R \circ \tau^B, \qquad R^{-1} \circ \tau^A = \tau^B. \tag{4.83}$$

Dokaz: Neka je R forward bisimulacija. Tada na osnovu definicije forward bisimulacije imamo da je

$$\sigma^B \circ R^{-1} \subseteq \sigma^A \circ R \circ R^{-1} \subseteq \sigma^B \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1},$$

i prema tome, $\sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}$. Na isti način dokazujemo drugu jednakost u (4.81).

Dalje, na osnovu Teoreme 1.3.2. imamo da je $R \circ R^{-1}$ relacija ekvivalencije, pa za proizvoljno $x \in X$, zbog refleksivnosti relacije $R \circ R^{-1}$, je $\delta_x^A \subseteq R \circ R^{-1} \circ \delta_x^A$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} &\subseteq \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \subseteq R \circ R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \\ &\subseteq R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1} = R \circ \delta_x^B \circ R^{-1}, \end{aligned}$$

što znači da je $\delta_x^A \circ R \circ R^{-1} = R \circ \delta_x^B \circ R^{-1}$. Na potpuno isti način dokazujemo da za proizvoljno $x \in X$ važi $R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R = \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R$.

Usled refleksivnosti relacije $R \circ R^{-1}$ imamo i da je

$$\tau^A \subseteq R \circ R^{-1} \circ \tau^A \subseteq R \circ \tau^B \subseteq \tau^A,$$

odakle dobijamo da je $\tau^A = R \circ \tau^B$. Na isti način dokazujemo i drugu jednakost u (4.83). Prema tome, dokazali smo da važi (4.81)–(4.83).

Obratno, neka važi (4.81)–(4.83). Zbog refleksivnosti relacije $R \circ R^{-1}$ i (4.81) imamo da je $\sigma^A \subseteq \sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}$, i dakle, važi (4.47). Osim toga, koristeći (4.82), dobijamo da za svako $x \in X$ važi

$$R^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} = \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1} = \delta_x^B \circ R^{-1},$$

što znači da je $R^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^B \circ R^{-1}$, i slično, $R \circ \delta_x^B \subseteq \delta_x^A \circ R$.

Na kraju, jasno je da (4.83) povlači (4.49) i (4.55). Prema tome, dokazali smo da je R forward bisimulacija. □

Zbog simetrije smo u (4.81) uključili dve jednakosti, mada je dovoljna samo jedna od nih, i to bilo bilo koja, dok druga nije neophodna. Na primer, ako je $\sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}$, tada je $\sigma^A \circ R = \sigma^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R$, i slično pokazujemo da druga jednakost povlači prvu.

Sledeća teorema je jedan od glavnih rezultata ovog odeljka. Ona daje karakterizaciju uniformnih forward bisimulacija u terminima svojstava njihovih jezgara, ko-jezgara i odgovarajućih količničkih automata.

Teorema 4.4.9. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati i neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija. Tada je R forward bisimulacija ako i samo ako važi sledeće:*

(i) *E_A^R je desno invarijantna equivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *E_B^R je desno invarijantna equivalencija na $\mathcal{B}$;*

(iii) *$\widetilde{R}$ je izomorfizam količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$.*

Dokaz: Jednostavnosti radi stavimo da je $E_A^R = E$ i $E_B^R = F$.

Neka je R forward bisimulacija. Prema Teoremi 4.4.8., za svaki $x \in X$ imamo da je

$$\begin{aligned} E \circ \delta_x^A \circ E &= R \circ R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \\ &= R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1} \\ &= R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} = \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \\ &= \delta_x^A \circ E, \end{aligned}$$

i takođe, $E \circ \tau^A = R \circ R^{-1} \circ \tau^A = R \circ \tau^B = \tau^A$. Inkluzija $\sigma^A \subseteq \sigma^A \circ E$ je očigledna. Dakle, $E = E_A^R$ je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$. Slično, $F = E_B^R$ je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$.

Prema Teoremi 1.3.4., $\widetilde{R}$ je bijektivna funkcija. Dalje, za sve $a_1, a_2 \in A$, $x \in X$ i $f \in FD(R)$ imamo da je

$$\begin{aligned} (E_{a_1}, E_{a_2}) \in \delta_x^{A/\!\!/E} &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in E \circ \delta_x^A \circ E \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in B)\big((a_1, b_1) \in R \wedge (b_1, b_2) \in \delta_x^B \wedge (a_2, b_2) \in R\big) \\ &\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in B)\big((f(a_1), b_1) \in F \wedge (b_1, b_2) \in \delta_x^B \wedge (f(a_2), b_2) \in F\big) \\ &\Leftrightarrow (f(a_1), f(a_2)) \in F \circ \delta_x^B \circ F \Leftrightarrow (F_{f(a_1)}, F_{f(a_2)}) \in \delta_x^{B/\!\!/F} \\ &\Leftrightarrow (\widetilde{R}(E_{a_1}), \widetilde{R}(E_{a_2})) \in \delta_x^{B/\!\!/F}. \end{aligned}$$

i za sve $a \in A$ i $f \in FD(R)$ imamo

$$
\begin{aligned}
E_a \in \sigma^{A/\!\!/E} &\Leftrightarrow\ a \in \sigma^A \circ E \ \Leftrightarrow\ (\exists a' \in A)\Big(a' \in \sigma^A \wedge (a',a) \in E\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (\exists a' \in A)\Big(a' \in \sigma^A \wedge (a', f(a)) \in R\Big)\\
&\Leftrightarrow\ f(a) \in \sigma^A \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R = \sigma^B \circ F\\
&\Leftrightarrow\ F_{f(a)} \in \sigma^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \sigma^{B/\!\!/F},\\
E_a \in \tau^{A/\!\!/E} &\Leftrightarrow\ a \in E \circ \tau^A \ \Leftrightarrow\ (\exists a' \in A)\Big((a,a') \in E \wedge a' \in \tau^A\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (\exists a' \in A)\Big((f(a),a') \in R^{-1} \wedge a' \in \tau^A\Big)\\
&\Leftrightarrow\ f(a) \in R^{-1} \circ \tau^A = R^{-1} \circ R \circ \tau^B = F \circ \tau^B\\
&\Leftrightarrow\ F_{f(a)} \in \tau^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \tau^{B/\!\!/F}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, $\widetilde{R}$ je izomorfzam između automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ and $\mathcal{B}/\!\!/F$.

Obratno, neka važi (i), (ii) i (iii). Prema (i), za svaki $x \in X$ imamo da je

$$E \circ \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ E = \delta_x^A \circ R \circ R^{-1},$$

a prema (iii), za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $f \in FD(R)$ dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
(a_1,a_2) \in \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} &\Leftrightarrow\ (a_1,a_2) \in E \circ \delta_x^A \circ E \ \Leftrightarrow\ (E_{a_1}, E_{a_2}) \in \delta_x^{A/\!\!/E}\\
&\Leftrightarrow\ (\widetilde{R}(E_{a_1}), \widetilde{R}(E_{a_2})) \in \delta_x^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ (F_{f(a_1)}, F_{f(a_2)}) \in \delta_x^{B/\!\!/F}\\
&\Leftrightarrow\ (f(a_1), f(a_2)) \in F \circ \delta_x^B \circ F\\
&\Leftrightarrow\ (\exists b_1, b_2 \in B)\Big((f(a_1), b_1) \in F \wedge (b_1,b_2) \in \delta_x^B \wedge (f(a_2), b) \in F\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (\exists b_1, b_2 \in B)\Big((a_1, b_1) \in R \wedge (b_1,b_2) \in \delta_x^B \wedge (a_2, b) \in R\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (a_1,a_2) \in R \circ \delta_x^B \circ R^{-1}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, važi prva jednakost u (4.82). Na sličan način dokazujemo drugu jednakost u (4.82).

Dalje, za svaki $a \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
a \in \sigma^A \circ R \circ R^{-1} &\Leftrightarrow\ a \in \sigma^A \circ E \ \Leftrightarrow\ E_a \in \sigma^{A/\!\!/E} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \sigma^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ F_{f(a)} \in \sigma^{B/\!\!/F}\\
&\Leftrightarrow\ f(a) \in \sigma^B \circ F \ \Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\Big(b \in \sigma^B \wedge (f(a), b) \in F\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\Big(b \in \sigma^B \wedge (a,b) \in R\Big) \ \Leftrightarrow\ a \in \sigma^B \circ R^{-1},
\end{aligned}
$$

pa je $\sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}$, i dakle, $\sigma^A \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R$. Za svaki $a \in A$ takođe imamo da je

$$
\begin{aligned}
a \in \tau^A &\Leftrightarrow\ a \in E \circ \tau^A \ \Leftrightarrow\ E_a \in \tau^{A/\!\!/E} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \tau^{B/\!\!/F}\\
&\Leftrightarrow\ F_{f(a)} \in \tau^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ f(a) \in F \circ \tau^B \ \Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\Big((f(a), b) \in F \wedge b \in \tau^B\Big)\\
&\Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\Big((a,b) \in R \wedge b \in \tau^B\Big) \ \Leftrightarrow\ a \in R \circ \tau^B,
\end{aligned}
$$

odakle je $\tau^A = R \circ \tau^B$. Slično, $\tau^B = R^{-1} \circ \tau^A$. Prema tome, dokazali smo da važi i (4.81) i (4.83), i stoga, R je forward bisimulacija. □

Pitanje koje se ovde prirodno nameće je pod kojim uslovima dve date desno invarijantne ekvivalencije na dva automata određuju uniformnu forward bisimulaciju. Odgovor na to pitanje daje nam sledeća teorema.

Teorema 4.4.10. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati, i neka su E i F redom desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada postoji uniformna forward bisimulacija $R \subseteq A \times B$ tako da je $E_A^R = E$ i $E_B^R = F$ ako i samo ako su količnički automati $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$ izomorfni.

Dokaz: Direktan smer teoreme je neposredna posledica Teoreme 4.4.9.

Obratno, neka je $\phi : A/\!\!/E \to B/\!\!/F$ izomorfizam između količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$. Definišimo relaciju $R \subseteq A \times B$ kao u (1.30), tj.,

$$(a,b) \in R \;\Leftrightarrow\; \phi(E_a) = F_b, \quad \text{za sve } a \in A \text{ i } b \in B.$$

Na osnovu dokaza Teoreme 1.3.4., R je uniformna relacija za koju važi

$$E = E_A^R, \;\; F = E_B^R \;\text{ i }\; \phi = \widetilde{R},$$

i prema Teoremi 4.4.9., R je forward bisimulacija. □

Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$. Ako postoji kompletna i surjektivna forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada kažemo da su automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *forward bisimulaciono ekvivalentni*, ili kraće *FB-ekvivalentni*, i pišemo $\mathcal{A} \sim_{FB} \mathcal{B}$. Napomenimo da kompletnost i surjektivnost te forward bisimulacije znači da je svako stanje automata $\mathcal{A}$ ekvivalentno nekom stanju automata $\mathcal{B}$, i obratno. Za proizvoljne automate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ imamo da važi

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \sim_{FB} \mathcal{A};\\
&\mathcal{A} \sim_{FB} \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \sim_{FB} \mathcal{A};\\
&\big(\mathcal{A} \sim_{FB} \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \sim_{FB} \mathcal{C}\big) \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \sim_{FB} \mathcal{C}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Slično, za automate $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su *backward bisimulaciono ekvivalentni*, kraće *BB-ekvivalentni*, u oznaci $\mathcal{A} \sim_{BB} \mathcal{B}$, ako postoji kompletna i surjektivna backward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Najpre ćemo pokazati da svaki automat $\mathcal{A}$ je FB-ekvivalentan svom količničkom automatu u odnosu na proizvoljno desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$.

Teorema 4.4.11. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat, neka je E ekvivalencija na A i R_E je prirodna funkcija iz A na $A/\!\!/E$, i neka je $\mathcal{A}/\!\!/E = (A/\!\!/E, X, \delta^{A/\!\!/E}, \sigma^{A/\!\!/E}, \tau^{A/\!\!/E})$ količnički automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

Tada je R_E istovremeno forward i backward simulacija.

Osim toga, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) *E je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *R_E je forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/E$;*

(iii) *R_E je backward-forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/E$.*

Dokaz: Primetimo da za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi da je $R_E(a_1) = E_{a_2}$ (odnosno $(a_1, E_{a_2}) \in R_E$) ako i samo ako je $(a_1, a_2) \in E$.

Za proizvoljne $x \in X$ i $a_1, a_2 \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
(a_1, E_{a_2}) \in \delta_x^A \circ R_E &\Leftrightarrow (\exists a_3 \in A)\Big((a_1, a_3) \in \delta_x^A \wedge (a_3, E_{a_2}) \in R_E\Big)\\
&\Leftrightarrow (\exists a_3 \in A)\Big((a_1, a_3) \in \delta_x^A \wedge (a_3, a_2) \in E\Big)\\
&\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \delta_x^A \circ E\\
&\Rightarrow (a_1, a_2) \in E \circ \delta_x^A \circ E = E \circ E \circ \delta_x^A \circ E \qquad (4.85)\\
&\Leftrightarrow (\exists a_3 \in A)\Big((a_1, a_3) \in E \wedge (a_3, a_2) \in (E \circ \delta_x^A \circ E)\Big)\\
&\Leftrightarrow (\exists a_3 \in A)\Big((a_1, E_{a_3}) \in R_E \wedge (E_{a_3}, E_{a_2}) \in \delta_x^{A/\!\!/E}\Big)\\
&\Leftrightarrow (a_1, E_{a_2}) \in R_E \circ \delta_x^{A/\!\!/E},
\end{aligned}
$$

i dakle, $\delta_x^A \circ R_E \subseteq R_E \circ \delta_x^{A/\!\!/E}$. Na sličan način dokazujemo $R_E^{-1} \circ \delta_x^A \subseteq \delta_x^{A/\!\!/E} \circ R_E^{-1}$.

Povrh toga, za svaki $a \in A$ imamo da je

$$
a \in \sigma^A \;\Rightarrow\; E_a \in \sigma^{A/\!\!/E} \wedge (E_a, a) \in R_E^{-1} \;\Rightarrow\; a \in \sigma^{A/\!\!/E} \circ R_E^{-1},
$$

odakle je $\sigma^A \subseteq \sigma^{A/\!\!/E} \circ R_E^{-1}$, i

$$
\begin{aligned}
E_a \in \sigma^A \circ R_E &\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\; a' \in \sigma^A \wedge (a', E_a) \in R_E\\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\; a' \in \sigma^A \wedge (a', a) \in E\\
&\Leftrightarrow a \in \sigma^A \circ E \;\Leftrightarrow\; E_a \in \sigma^{A/\!\!/E},
\end{aligned}
$$

što daje $\sigma^A \circ R_E \subseteq \sigma^{A/\!\!/E}$. Na sličan način dokazujemo da je $R_E^{-1} \circ \tau^A \subseteq \tau^{A/\!\!/E}$ i $\tau^A \subseteq R_E \circ \tau^{A/\!\!/E}$.

Dakle, dokazali smo da je R_E istovremeno forward i backward simulacija.

Osim toga, imamo da važi obratna implikacija u (4.85) (tj., R_E^{-1} je forward simulacija) ako i samo ako je E forward bisimulacija na $\mathcal{A}$. To dokazuje ekvivalentnost uslova (i), (ii) i (iii). □

Sada ćemo formulisati i dokazati glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema 4.4.12. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati, i neka su E i F redom najveće desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu FB-ekvivalentni ako i samo ako količnički automati $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$ jesu izomorfni.

Dokaz: Neka $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu FB-ekvivalentni automati, tj., neka postoji kompletna i surjektivna forward bisimulacija $S \subseteq A \times B$. Tada na osnovu Teoreme 4.4.2. postoji najveća forward bisimulacija R iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, i R je parcijalna uniformna relacija. Kako je S kompletna i surjektivna i $S \subseteq R$, to je i R kompletna i surjektivna, što znači da je R uniformna forward bisimulacija.

Prema Teoremi 4.4.9., E_A^R i E_B^R su redom desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i $\widetilde{R}$ je izomorfizam količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$. Neka su P i Q redom najveće desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$. Na osnovu činjenice da je $\widetilde{R}$ izomorfizam iz $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ na $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$ dobijamo da su P i Q povezane sa

$$(\alpha_1,\alpha_2) \in P \;\Leftrightarrow\; \big(\widetilde{R}(\alpha_1),\widetilde{R}(\alpha_2)\big) \in Q, \quad \text{za sve } \alpha_1,\alpha_2 \in A/\!\!/E_A^R,$$

pa možemo definisati izomorfizam $\xi : (\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P \to (\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q$ stavivši da je $\xi(P_\alpha) = Q_{\widetilde{R}(\alpha)}$, za svaki $\alpha \in A/\!\!/E_A^R$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "R"] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\
\mathcal{A}/\!\!/E_A^R \arrow[r, dashed, "\widetilde{R}"] \arrow[d, dotted] & \mathcal{B}/\!\!/E_B^R \arrow[d, dotted] \\
(\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P \arrow[r, dashed, "\xi"] & (\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q
\end{tikzcd}$$

Sada, u skladu za Teoremom 4.4.10., $P = E/\!\!/E_A^R$ i $Q = F/\!\!/E_B^R$, i prema Teoremi 4.2.1. dobijamo da je

$$\mathcal{A}/\!\!/E \cong (\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P \cong (\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q \cong \mathcal{B}/\!\!/F,$$

što je i trebalo dokazati.

Obrat teoreme sledi neposredno iz Teoreme 4.4.10. □

Kao direktnu posledicu prethodne dve teoreme dobijamo sledeće.

Posledica 4.4.13. *Neka je $\mathcal{A}$ automat, neka je E najveća desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$, i neka je $\mathbb{FB}(A)$ klasa svih automata koji su FB-ekvivalentni sa $\mathcal{A}$.*

Tada je $\mathcal{A}/\!\!/E$ jedinstven (do na izomorfizam) minimalni automat u $\mathbb{FB}(A)$.

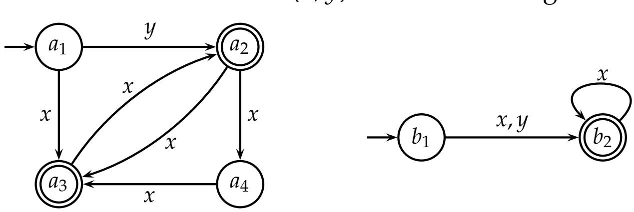
Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ bilo koji minimalni automat iz $\mathbb{FB}(A)$, i neka je F najveća desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$. Prema Teoremi 4.4.11. i (4.84), $\mathcal{B}/\!\!/F$ takođe pripada klasi $\mathbb{FB}(A)$, i na osnovu minimalnost automata $\mathcal{B}$ sledi da je F identička relacija. Sada, prema Teoremi 4.4.12. dobijamo da je $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}/\!\!/F \cong \mathcal{A}/\!\!/E$, što dokazuje naše tvrđenje. □

Prema Teoremi 4.4.12., problem testiranja FB-ekvivalencije dva automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ može se svesti na problem testiranja izomorfizma njihovih faktor automata u odnosu na najveće desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Vredno je istaći da je problem izomorfizma za nedeterminističke automate ekvivalentan dobro poznatom *problemu izomorfizma grafova*, problemu efektivnog utvrđivanja da li su dva konačna grafa izomorfna.

Pored svog praktičnog značaja, problem izomorfizma grafova predstavlja kuriozitet u teoriji složenosti izrčunavanja kao jedan od malobrojnih problema koji pripadaju klasi NP problema za koje nije poznato niti da li su izračunljivi u polinomijalnom vremenu niti da li su NP-kompletni. Zajedno sa dobro poznatim problemom faktorizacije celih brojeva, problem izomorfizma grafova je jedan od nekolicine važnih algoritamskih problema čija gruba složenost izračunavanja još uvek nije poznata, i vlada opšte mišljenje da taj problem leži između klase P i klase NP-kompletnih problema ukoliko je P≠NP (vidi [102]). Međutim, mada algoritam koji problem izomorfizma grafova i u najgorem slučaju rešava u polinomijalnom vremenu nije poznat, testiranje izomorfizma grafova u praksi obično nije preteško. Osnovni algoritam ispituje svih $n!$ mogućih bijekcija između čvorova dva grafa (sa n čvorova) i proverava da li one očuvavaju susednost čvorova. Jasno, glavni problem je ogroman rast broja bijekcija kada raste broj čvorova, što je takođe ključni problem i kada testiramo izomorfizam automata, ali algoritam se može učiniti znatno efikasnijim pogodnim particioniranjem skupova čvorova, na način prikazan u [102]. Ono što je dobro u našem slučaju je to što test izomorfizma nije primenjen na automate $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, već na faktor automate tih automata u odnosu na najveće desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Broj stanja tih faktor automata može biti mnogo manji od broja stanja automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, što može znčajno uticati na dužinu trajanja testa.

Prema Teoremi 4.4.1., FB-ekvivalentni automati su jezički ekvivalentni, ali obrat ne važi, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 4.4.14. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadati sledećim grafovima:



$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$

Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovih automata zadati su i sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \delta_x^A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \quad \delta_x^B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \delta_y^B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Ovi automati su jezički ekvivalentni, i oba raspoznaju jezik $L = (x+y)x^*$.

Koristeći napred objašnjeni postupak za testiranje postojanja forward bisimulacije između dva automata dobijamo relaciju:

$$R = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

koja ne ispunjava uslove (4.47) i (4.53), i na osnovu Teoreme 6.3, ne postoji nijedna forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. To znači da $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu FB-ekvivalentni, iako su jezički ekvivalentni.

U nastavku ćemo se baviti uniformnim backward-forward bisimulacijama. Videćemo da one imaju izvesna svojstva koja su slična odgovarajućim svojstvima uniformnih forward bisimulacija, ali ćemo takođe pokazati da postoje i neke suštinske razlike.

Najpre dokazujemo sledeći analogon Teoreme 4.4.9.

Teorema 4.4.15. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija. Tada je R backward-forward bisimulacija ako i samo ako važi sledeće:*

(i) *E_A^R je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *E_B^R je levo invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$;*

(iii) *$\widetilde{R}$ je izomorfizam količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$.*

Dokaz: Jednostavnosti radi stavimo da je $E = E_A^R$ i $F = E_B^R$. Potsetimo se da na osnovu Teoreme 1.3.2. sledi da je $E = R \circ R^{-1}$ i $F = R^{-1} \circ R$.

Uzmimo da je R backward-forward bisimulacija. Tada važi

$$\begin{aligned}
E \circ \delta_x^A \circ E &= R \circ R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} = R \circ R^{-1} \circ R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} = R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} = \\
&= \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} = \delta_x^A \circ E,\\
E \circ \tau^A &= R \circ R^{-1} \circ \tau^A = R \circ R^{-1} \circ R \circ \tau^B = R \circ \tau^B = \tau^A,\\
F \circ \delta_x^B \circ F &= R^{-1} \circ R \circ \delta_x^B \circ R^{-1} \circ R = R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = R^{-1} \circ \delta_x^A \circ R = \\
&= R^{-1} \circ R \circ \delta_x^B = F \circ \delta_x^B,\\
\sigma^B \circ F &= \sigma^B \circ R^{-1} \circ R = \sigma^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = \sigma^A \circ R = \sigma^B.
\end{aligned}$$

Dakle, $E = E_A^R$ je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i $F = E_B^R$ je levo invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$. Kao u dokazu Teoreme 4.4.9. dobijamo da $\widetilde{R}$ jeste izomorfizam automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$.

Obratno, neka važi (i), (ii) i (iii). Za sve $\psi \in FD(R)$, $\xi \in FD(R^{-1})$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ i $x \in X$, kao u dokazu Teoreme 4.4.9. pokazujemo da je

$$(a_1, a_2) \in (E \circ \delta_x^A \circ E) \Leftrightarrow (\psi(a_1), \psi(a_2)) \in (F \circ \delta_x^B \circ F),$$
$$(b_1, b_2) \in (F \circ \delta_x^B \circ F) \Leftrightarrow (\xi(b_1), \xi(b_2)) \in (E \circ \delta_x^A \circ E),$$

i na osnovu (i) i (ii) sledi da je

$$\delta_x^A \circ R = \delta_x^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = \delta_x^A \circ E \circ R = E \circ \delta_x^A \circ E \circ R = E \circ \delta_x^A \circ R,$$
$$R \circ \delta_x^B = R \circ R^{-1} \circ R \circ \delta_x^B = R \circ F \circ \delta_x^B = R \circ F \circ \delta_x^B \circ F = R \circ \delta_x^B \circ F.$$

Sada, za sve $a \in A$ i $b \in B$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \delta_x^A \circ R &\Leftrightarrow (a,b) \in E \circ \delta_x^A \circ R \\
&\Leftrightarrow (\exists a_1 \in A)\ ((a,a_1) \in E \circ \delta_x^A \wedge (a_1,b) \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists a_1 \in A)\ ((a,a_1) \in E \circ \delta_x^A \wedge (a_1,\xi(b)) \in E) \\
&\Leftrightarrow (a,\xi(b)) \in E \circ \delta_x^A \circ E \\
&\Leftrightarrow (\psi(a),\psi(\xi(b))) \in F \circ \delta_x^B \circ F \\
&\Leftrightarrow (\psi(a),b) \in F \circ \delta_x^B \circ F \\
&\Leftrightarrow (\exists b_1 \in B)\ ((\psi(a),b_1) \in F \wedge (b_1,b) \in \delta_x^B \circ F) \\
&\Leftrightarrow (\exists b_1 \in B)\ ((a,b_1) \in R \wedge (b_1,b) \in \delta_x^B \circ F) \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R \circ \delta_x^B \circ F \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in R \circ \delta_x^B,
\end{aligned}$$

i dakle, $\delta_x^A \circ R = R \circ \delta_x^B$. Na isti način kao u dokazu Teoreme 4.4.9. dokazujemo da je $\tau^A = R \circ \tau^B$, i analogno dobijamo da je $\sigma^A \circ R = \sigma^B$. Prema tome, R je forward-backward bisimulacija. □

Takođe možemo dokazati sledeći analogon Teoreme 4.4.10.

Teorema 4.4.16. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je E desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i F je levo invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$.*

Tada postoji uniformna backward-forward bisimulacija $R \subseteq A \times B$ za koju važi $E_A^R = E$ i $E_B^R = F$ ako i samo ako količnički automati $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$ jesu izomorfni.

Dokaz: To se može dokazati na sličan način kao Teorema 4.4.10. □

U Teoremi 4.4.11. smo dokazali da za svaku ekvivalenciju E, njena prirodna funkcija R_E je forward bisimulacija ako i samo ako je backward-forward bisimulacija. Sada ćemo dokazati opštiju teoremu koja pokazuje da to važi za proizvoljnu finkciju.

Teorema 4.4.17. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati, neka je $R : A \to B$ funkcija, i neka je $E = E_A^R$ jezgro od R. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *R je forward bisimulacija;*

(ii) *R je backward-forward bisimulacija;*

(iii) *E je desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i funkcija $\phi : A/\!\!/E \to B$ zadata sa $\phi(E_a) = R(a)$, za svaki $a \in A$, je monomorfizam količničkog automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ u $\mathcal{B}$.*

Dokaz: Neka je $C = \operatorname{Im} R$ i razmotrimo podautomat $\mathcal{C} = (C, \delta^C, \sigma^C, \tau^C)$ od $\mathcal{B}$.

(i)⇒(iii). Prema Lemi 4.4.3., $R \subseteq A \times C$ i R je forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{C}$. Takođe imamo da je R surjektivna funkcija iz A na C, i stoga, R je uniformna relacija iz A u C. Sada na osnovu Teoreme 4.4.9. dobijamo da $E = E_A^R$ jeste desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$, E_C^R je identička relacija na C, i $\widetilde{R}$ je izomorfizam iz $\mathcal{A}/\!\!/E$ u $\mathcal{C}/\!\!/E_B^R \cong \mathcal{C}$. Ako poistovetimo $\mathcal{C}/\!\!/E_B^R$ i $\mathcal{C}$, tada se lako vidi da se $\widetilde{R}$ može predstaviti kao ϕ, gde je ϕ definisana kao u (iii), pa je ϕ monomorfizam iz $\mathcal{A}/\!\!/E$ u $\mathcal{B}$.

(iii)⇒(i). To je direktna posledica Teoreme 4.4.9., jer je E_C^R identička relacija i $\widetilde{R}$ i ϕ se mogu poistovetiti.

(i)⇔(ii). To sledi neposredno iz Teorema 4.4.9. i 4.4.15., jer je E_C^R identička relacija na C, i istovremeno je desno i levo invarijantna ekvivalencija. □

4.4.3. Slabe simulacije i bisimulacije

Ovde razmatramo dve nove vrste bisimulacija koje su opštije od forward i backward bisimulacija.

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat. Setimo se da su za svako $u \in X^*$ podskupovi σ_u^A i τ_u^A od A definisani sa

$$\sigma_u^A = \sigma^A \circ \delta_u^A, \qquad \tau_u^A = \delta_u^A \circ \tau^A, \tag{4.86}$$

a da su *levi jezik* σ_a^A i *desni jezik* τ_a^A stanja $a \in A$ definisani sa

$$\sigma_a^A = \{u \in X^* \mid a \in \sigma_u^A\}, \quad \tau_a^A = \{u \in X^* \mid a \in \tau_u^A\}. \tag{4.87}$$

Drugim rečima, desni jezik stanja a je jezik raspoznat automatom dobijenim iz automata $\mathcal{A}$ zamenom skupa inicijalnih stanja σ^A jednoelementnim skupom $\{a\}$, a levi jezik stanja a je jezik raspoznat automatom dobijenim iz $\mathcal{A}$ zamenom skupa završnih stanja τ^A skupom $\{a\}$.

Dalje, neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ proizvoljni automati i neka je $R \subseteq A \times B$ neprazna relacija. Ukoliko relacija R zadovoljava

$$R^{-1} \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^B, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.88}$$
$$\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}, \tag{4.89}$$

onda ćemo je nazivati *slaba forward simulacija* iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, a ako zadovoljava

$$\sigma_u^A \circ R \subseteq \sigma_u^B, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.90}$$
$$\tau^A \subseteq R \circ \tau^B. \tag{4.91}$$

onda ćemo R nazivati *slaba backward simulacija* iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Ukoliko su i R i R^{-1} slabe forward simulacije, odnosno, ukoliko su pored uslova (4.88) i (4.89) zadovoljeni i uslovi

$$R \circ \tau_u^B \subseteq \tau_u^A, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.92}$$
$$\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R, \tag{4.93}$$

onda za R kažemo da je *slaba forward bisimulacija* iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, a ako su i R i R^{-1} slabe backward simulacije, odnosno, ako su pored uslova (4.90) i (4.91) zadovoljeni i uslovi

$$\sigma_u^B \circ R^{-1} \subseteq \sigma_u^A, \quad \text{za svaki } u \in X^*, \tag{4.94}$$
$$\tau^B \subseteq R^{-1} \circ \tau^A. \tag{4.95}$$

onda za R kažemo da je *slaba backward bisimulacija* iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Jednostavnosti radi, R ćemo nazivati samo *slaba simulacija* ako je ili slaba forward ili slaba backward simulacija, odnosno samo *slaba bisimulacija* ako je ili slaba forward ili slaba backward bisimulacija.

Najpre dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 4.4.18. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R \subseteq A \times B$ relacija. Tada*

(a) *Ako je R slaba simulacija, tada je $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$.*

(b) *Ako je R slaba bisimulacija, tada je $[\![\mathcal{A}]\!] = [\![\mathcal{B}]\!]$.*

(c) *Ako je R forward (odnosno backward) simulacija, tada je R takođe i slaba forward (odnosno slaba backward) simulacija.*

Dokaz: (a) Neka je R slaba forward simulacija. Tada za svako $u \in X^*$ imamo da je

$$\sigma^A \circ \delta_u^A \circ \tau^A = \sigma^A \circ \tau_u^A \leqslant \sigma^B \circ R^{-1} \circ \tau_u^A \leqslant \sigma^B \circ \tau_u^B = \sigma^B \circ \delta_u^B \circ \tau^B,$$

i prema (4.5) dobijamo da je $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$. Slično, ako je R slaba backward simulacija, tada je takođe $[\![\mathcal{A}]\!] \subseteq [\![\mathcal{B}]\!]$. Napomenimo još jednom da u prethodnoj formuli stoji "$\leqslant$" jer svi iyrazi u njoj predstavljaju skalare u dvoelementnoj Bulovoj algebri $\{0,1\}$ i "$\leqslant$" označava uobičajeno uređenje na $\{0,1\}$.

(b) To sledi neposredno iz (a).

(c) Neka je R forward simulacija. Na osnovu (4.47) neposredno sledi da važi (4.89), a na osnovu (4.49) dobijamo da (4.88) važi za $u = e$. Pretpostavimo da (4.88) važi za sve reči dužine n, za neki prirodan broj n, i razmotrimo reč $u \in X^*$ dužine $n+1$, tj., $u = xv$, za neke $x \in X$ i $v \in X^*$, pri čemu je v dužine n. Tada je

$$R^{-1} \circ \tau_u^A = R^{-1} \circ \delta_x^A \circ \tau_v^A \subseteq \delta_x^B \circ R^{-1} \circ \tau_v^A \subseteq \delta_x^B \circ \tau_v^B = \tau_u^B.$$

Dakle, matematičkom indukcijom zaključujemo da (4.88) važi za svako $u \in X^*$. Na sličan način dokazujemo tvrđenje koje se tiče backward simulacija. □

Lako se dokazuje da je R slaba backward simulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je R^{-1} slaba forward simulacija iz $\bar{\mathcal{B}}$ u $\bar{\mathcal{A}}$, odakle sledi da je R slaba backward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako je slaba forward simulacija iz $\bar{\mathcal{A}}$ u $\bar{\mathcal{B}}$. U skladu sa tim, za svako tvrđenje koje se odnosi na slabe forward bisimulacije koje je opšte važeće (važi za sve nedeterminističke automate) postoji odgovarajuće opšte važeće tvrđenje koje se tiče slabih backward bisimulacija. Stoga ćemo se u nastavku baviti samo slabim forward bisimulacijama.

Sada ćemo formulisati i dokazati fundamentalne rezultate koji se tiču slabih forward simulacija i bisimulacija. Prva od njih je teorema koja obezbeđuje postupak pomoću koga se može odlučiti da li postoji slaba forward bisimulacija između dva automata, i kada ona postoji, istim postupkom se konstruiše najveća slaba forward bisimulacija.

Teorema 4.4.19. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R^{\mathrm{wfs}} \subseteq A \times B$ relacija definisana sa*

$$R^{\mathrm{wfb}} = \bigcap_{u \in X^*} (\tau_u^A \backslash \tau_u^B) \cap (\tau_u^A / \tau_u^B)\,. \tag{4.96}$$

Tada važi sledeće:

(a) *Relacija R iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ zadovoljava uslove* (4.88) *i* (4.92) *ako i samo ako je $R \subseteq R^{\mathrm{wfb}}$, i shodno tome, R^{wfb} je najveća relacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ koja zadovoljava* (4.88) *i* (4.92).

(b) *Ako R^{wfb} zadovoljava* (4.89) *i* (4.93), *tada je R^{wfb} najveća slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.*

(c) *U suprotnom, ako R^{wfb} ne zadovoljava* (4.89) *i* (4.93), *tada ne postoji nijedna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.*

Dokaz: (a) Neka je R proizvoljna relacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. Tada za proizvoljno $u \in X^*$ imamo da je

$$R^{-1} \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^B \;\Leftrightarrow\; \tau_u^A \circ R \subseteq \tau_u^B \;\Leftrightarrow R \subseteq \tau_u^A \backslash \tau_u^B,$$

i, sa druge strane,

$$R \circ \tau_u^B \subseteq \tau_u^A \;\Leftrightarrow\; R \subseteq \tau_u^A / \tau_u^B,$$

odakle neposredno sledi da R zadovoljava (4.88) i (4.92) ako i samo ako važi $R \subseteq R^{\mathrm{wfb}}$. Imajući to u vidu, jasno je da je R^{wfb} najveća relacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ koja zadovoljava uslove (4.88) i (4.92).

(b) Ako R^{wfb} zadovoljava (4.89) i (4.93), onda je R^{wfb} slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. Ako je R proizvoljna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada R zadovoljava (4.88) i (4.92), i prema (a) dobijamo da je $R \subseteq R^{\mathrm{wfb}}$, odakle zaključujemo da je R^{wfb} najveća slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

(b) Pretpostavimo da R^{wfb} ne zadovoljava (4.89) i (4.93). Ako je R proizvoljna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada je $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1} \subseteq \sigma^B \circ (R^{\mathrm{wfb}})^{-1}$ i $\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R \subseteq \sigma^A \circ R^{\mathrm{wfb}}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da R^{wfb} ne zadovoljava (4.89) i (4.93). Prema tome, zaključujemo da ne postoji nijedna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. □

Koristeći prethodnu teoremu možemo formulisati sledeći algoritam kojim se izračunava najveća relacija između dva automata koja zadovoljava (4.88) i (4.92), i proverom da li ta relacija zadovoljava (4.89) i (4.93) se utvrđuje da li postoji slaba forward bisimulacija između tih automata.

Algoritam 4.4.20. **(***Najveća slaba forward bisimulacija***)** Ulaz algoritma su automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$. Algoritmom se ustanovljava da li postoji slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i u slučaju kada ona postoji izlaz algoritma je najveća slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Postupak se sastoji iz tri dela:

(A1) Najpre izračunavamo skupove τ_u^A, za sve $u \in X^*$, koristeći Algoritam 4.3.12.
(A2) Nakon toga izračunavamo R^{wfb} pomoću formule (4.96).
(A3) Na kraju, proveravamo da li R^{wfb} zadovoljava uslove (4.89) i (4.93). Ukoliko R^{wfb} zadovoljava te uslove, onda je R^{wfb} najveća slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, a ako R^{wfb} ne zadovoljava te uslove, onda ne postoji nijedna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Na istovetan način se mogu formulisati i algoritmi pomoću kojih se može odlučiti da li postoje ostali tipovi slabih simulacija i bisimulacija između dva automata i izračunati najveće slabe simulacije/bisimulacije tih tipova, u slučajevima kada one postoje. Svi ti algoritmi razlikuju se jedino u formulama na osnovu kojih se izračunavaju najveća relacija R^{wfs} koja zadovoljava (4.88), najveća relacija R^{wfb} koja zadovoljava (4.90), najveća relacija R^{wfb} koja zadovoljava (4.88) i (4.92), najveća relacija R^{wbb} koja zadovoljava (4.90) i (4.94), kao i u uslovima koji se u (A3) koriste za testiranje tih relacija. Uporedni pregled tih formula i uslova dat je u Tabeli 4.4.3.

Treba reći da se relacije R^{wfs}, R^{wfb}, R^{wfb} i R^{wbb}mogu okarakterisati i preko desnih i levih jezika pridruženih stanjima automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, na sledeći način

Tabela 4.4.3. Formule i uslovi koji se koriste pri utvrđivanju postojanja slabih simulacija i bisimulacija između dva automata

slaba forward simulacija:

$$R^{\mathrm{wfs}} = \bigcap_{u\in X^*} \tau_u^A \backslash \tau_u^B \tag{4.97}$$

u (A3) se proverava (4.89): $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$

slaba backward simulacija:

$$R^{\mathrm{wbs}} = \bigcap_{u\in X^*} \sigma_u^A \backslash \sigma_u^B \tag{4.98}$$

u (A3) se proverava (4.91): $\tau^A \subseteq R \circ \tau^B$

slaba forward bisimulacija:

$$R^{\mathrm{wfb}} = \bigcap_{u\in X^*} (\tau_u^A \backslash \tau_u^B) \cap (\tau_u^A / \tau_u^B) \tag{4.99}$$

u (A3) se proverava (4.89): $\sigma^A \subseteq \sigma^B \circ R^{-1}$ (4.93): $\sigma^B \subseteq \sigma^A \circ R$

slaba backward bisimulacija:

$$R^{\mathrm{wbb}} = \bigcap_{u\in X^*} (\sigma_u^A \backslash \sigma_u^B) \cap (\sigma_u^A / \sigma_u^B) \tag{4.100}$$

u (A3) se proverava (4.91): $\tau^A \subseteq R \circ \tau^B$ (4.95): $\tau^B \subseteq R^{-1} \circ \tau^A$

$$(a,b) \in R^{\mathrm{wfs}} \;\Leftrightarrow\; \tau_a^A \subseteq \tau_b^B, \tag{4.101}$$
$$(a,b) \in R^{\mathrm{wbs}} \;\Leftrightarrow\; \sigma_a^A \subseteq \sigma_b^B, \tag{4.102}$$
$$(a,b) \in R^{\mathrm{wfb}} \;\Leftrightarrow\; \tau_a^A = \tau_b^B, \tag{4.103}$$
$$(a,b) \in R^{\mathrm{wbb}} \;\Leftrightarrow\; \sigma_a^A = \sigma_b^B, \tag{4.104}$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$.

4.4.4. *Uniformne slabe bisimulacije*

U ovom odeljku bavimo se slabim forward bisimulacijama koje su uniformne relacije. Unutar klase uniformnih relacija, slabe forward bisimulacije se mogu okarakterisatio na sledeći način.

Teorema 4.4.21. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija. Tada je R slaba forward bisimulacija ako i samo ako važi sledeće:*

$$\sigma^A \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R, \qquad \sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}, \tag{4.105}$$
$$R^{-1} \circ \tau_u^A = \tau_u^B,\ \text{za sve } u \in X^*, \qquad \tau_u^A = R \circ \tau_u^B,\ \text{za sve } u \in X^*. \tag{4.106}$$

Dokaz: Neka je R slaba forward bisimulacija. Na osnovu (4.89) i (4.93) imamo da je

$$\sigma^A \circ R \subseteq \sigma^B \circ R^{-1} \circ R \subseteq \sigma^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = \sigma^A \circ R,$$

i dakle, $\sigma^A \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R$. Slično dokazujemo da je $\sigma^B \circ R^{-1} = \sigma^A \circ R \circ R^{-1}$.

Dalje, zbog refleksivnosti relacije $R^{-1} \circ R$, za svaki $u \in X^*$ imamo da je

$$\tau_u^B \subseteq R^{-1} \circ R \circ \tau_u^B \subseteq R^{-1} \circ \tau_u^A,$$

i na osnovu toga i formule (4.88) dobijamo da je $\tau_u^B = R^{-1} \circ \tau_u^A$. Na sličan način dokazujemo da je $\tau_u^A = R \circ \tau_u^B$.

Obratno, neka važi (4.105) i (4.106). Jasno je da (4.106) povlači i (4.88) i (4.92), i zbog refleksivnosti relacija $R \circ R^{-1}$ i $R^{-1} \circ R$ dobijamo da je

$$\sigma^A \subseteq \sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}, \qquad \sigma^B \subseteq \sigma^B \circ R^{-1} \circ R = \sigma^A \circ R,$$

i dakle, važi (4.89) i (4.93). Prema tome, R je slaba forward bisimulacija. □

Zatim dokazujemo sledeće dve korisne teoreme.

Teorema 4.4.22. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat, neka je E ekvivalencija na A, i neka je $\mathcal{A}/\!\!/E = (A/\!\!/E, X, \delta^{A/\!\!/E}, \sigma^{A/\!\!/E}, \tau^{A/\!\!/E})$ količnički automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na E. Ako je E slabo desno invarijantna ekvivalencija, tada je*

$$E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E} \iff a \in \tau_u^A, \tag{4.107}$$

za sve $u \in X^*$ i $a \in A$.

Dokaz: Tvrđenje će biti dokazano indukcijom po dučini reči u.

Na osnovu (4.7) i pretpostavke teoreme, tvrđenje je tačno ako je u prazna reč. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neku reč u, i razmotrimo proizvoljne $x \in X$ i $a \in A$. Tada imamo da je

$$\begin{aligned} E_a \in \tau_{xu}^{A/\!\!/E} = \delta_x^{A/\!\!/E} \circ \tau_u^{A/\!\!/E} &\iff (\exists a' \in A)\,((E_a, E_{a'}) \in \delta_x^{A/\!\!/E} \wedge E_{a'} \in \tau_u^{A/\!\!/E}) \\ &\iff (\exists a' \in A)\,((a, a') \in E \circ \delta_x^A \circ E \wedge a' \in \tau_u^A) \\ &\iff a \in E \circ \delta_x^A \circ E \circ \tau_u^A = E \circ \delta_x^A \circ \tau_u^A = E \circ \tau_{xu}^A = \tau_{xu}^A. \end{aligned}$$

Prema tome, naše tvrđenje je tačno za sve $u \in X^*$ i $a \in A$. □

Teorema 4.4.23. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat, neka je E relacija ekvivalencije na A, R_E je prirodna funkcija iz A na $A/\!\!/E$ i $\mathcal{A}/\!\!/E = (A/\!\!/E, \delta^{A/\!\!/E}, \sigma^{A/\!\!/E}, \tau^{A/\!\!/E})$ je količnički automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na E.*

Tada je E slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je R_E slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/E$.

Dokaz: Neka je E slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$. U skladu sa Lemom 4.4.22., za proizvoljne $u \in X^*$ i $a \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
E_a \in R_E^{-1} \circ \tau_u^A &\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\,((E_a, a') \in R_E^{-1} \,\wedge\, a' \in \tau_u^A) \\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\,(E_a = E_{a'} \,\wedge\, E_{a'} \in \tau_u^{A/\!\!/E}) \\
&\Rightarrow E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E},
\end{aligned}
$$

i dakle, $R_E^{-1} \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^{A/\!\!/E}$. Osim toga, imamo da je $\sigma^A \subseteq \sigma^A \circ E$, na osnovu refleksivnosti relacije E, i prema (4.6), za svaki $a \in A$ iz $a \in \sigma^A \subseteq \sigma^A \circ E$ sledi $E_a \in \sigma^{A/\!\!/E}$, i kako je $(E_a, a) \in R_E^{-1}$, to dobijamo da je $a \in \sigma^{A/\!\!/E} \circ R_E^{-1}$. Dakle, $\sigma^A \subseteq \sigma^{A/\!\!/E} \circ R_E^{-1}$. Na isti način pokazujemo da je $R_E \circ \tau_u^{A/\!\!/E} \subseteq \tau_u^A$, za sve $u \in X^*$, i $\sigma^{A/\!\!/E} \subseteq \sigma^A \circ R_E$. Prema tome, R_E je slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/E$.

Obratno, neka je R_E slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}/\!\!/E$. Prema toj pretpostavci i (4.7), za proizvoljne $u \in X^*$ i $a \in A$ imamo da važi

$$
a \in E \circ \tau_u^A \Leftrightarrow E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E} \Rightarrow (a, E_a) \in R_E \,\wedge\, E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E} \Rightarrow a \in R_E \circ \tau_u^{A/\!\!/E} \subseteq \tau_u^A.
$$

Dakle, $E \circ \tau_u^A \subseteq \tau_u^A$, čime smo dokazali da je E slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$. □

Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ i bijektivna funkcija $\phi : A \to B$. Ako ϕ zadovoljava

$$
a \in \sigma^A \Leftrightarrow \phi(a) \in \sigma^B, \qquad \text{za svaki } a \in A, \tag{4.108}
$$

$$
a \in \tau_u^A \Leftrightarrow \phi(a) \in \tau_u^B, \qquad \text{za sve } u \in X^* \text{ i } a \in A, \tag{4.109}
$$

tada za ϕ kažemo da je *slabi forward izomorfizam* između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Slično, ako ϕ zadovoljava

$$
a \in \sigma_u^A \Leftrightarrow \phi(a) \in \sigma_u^B, \qquad \text{za sve } u \in X^* \text{ i } a \in A, \tag{4.110}
$$

$$
a \in \tau^A \Leftrightarrow \phi(a) \in \tau^B, \qquad \text{za svaki } a \in A, \tag{4.111}
$$

tada ϕ nzivamo *slabi backward izomorfizam* između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Lako se proverava da je inverzna funkcija slabog forward (odnosno backward) izomorfizma takođe slabi forward (odnosno backward) izomorfizam.

Sada ćemo formulisati i dokazati sledeći analogon Teoreme 4.4.9. Glavna razlika je da u ovom slučaju količnički automati ne moraju biti izomorfni, već samo slabo forward izomorfni.

Teorema 4.4.24. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka je $R \subseteq A \times B$ uniformna relacija. Tada je R slaba forward bisimulacija ako i samo ako važi sledeće:*

(i) *E_A^R je slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$;*

(ii) *E_B^R je slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$;*

(iii) *$\widetilde{R}$ je slabi forward izomorfizam količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$.*

Dokaz: Jednostavnosti radi stavimo da je $E_A^R = E$ i $E_B^R = F$, i uzmimo proizvoljno $f \in FD(R)$.

Neka je R slaba forward bisimulacija. Tada imamo da je

$$E \circ \tau_u^A = R \circ R^{-1} \circ \tau_u^A \subseteq R \circ \tau_u^B \subseteq \tau_u^A,$$

i kako obratna inkluzija sledi iz refleksivnosti relacije E, to zaključujemo da je $E \circ \tau_u^A = \tau_u^A$. Dakle, E je slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$. Na isti način dokazujemo da je F slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$.

Dalje, za proizvoljno $a \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned} E_a \in \sigma^{A/\!\!/E} &\Leftrightarrow a \in \sigma^A \circ E = \sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,(b \in \sigma^B \ \wedge\ (a,b) \in R) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,(b \in \sigma^B \ \wedge\ (f(a),b) \in F) \\ &\Leftrightarrow f(a) \in \sigma^B \circ F \\ &\Leftrightarrow F_{f(a)} \in \sigma^{B/\!\!/F}, \end{aligned}$$

i za proizvoljne $u \in X^*$ i $a \in A$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E} &\Leftrightarrow a \in \tau_u^A = R \circ \tau_u^B \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,((a,b) \in R \ \wedge\ b \in \tau_u^B) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,((f(a),b) \in F \ \wedge\ b \in \tau_u^B) \\ &\Leftrightarrow f(a) \in F \circ \tau_u^B = \tau_u^B \\ &\Leftrightarrow F_{f(a)} \in \tau_u^{B/\!\!/F}. \end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da je $\widetilde{R} : E_a \mapsto F_{f(a)}$ slabi forward izomorfizam između $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$.

Obratno, neka važi (i), (ii) i (iii). Za proizvoljno $a \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned} a \in \sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^A \circ E \ \Leftrightarrow\ E_a \in \sigma^{A/\!\!/E} \ &\Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \sigma^{B/\!\!/F} \\ &\Leftrightarrow F_{f(a)} \in \sigma^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ f(a) \in \sigma^B \circ F \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,(b \in \sigma^B \ \wedge\ (b,f(a)) \in F) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)\,(b \in \sigma^B \ \wedge\ (a,b) \in R) \\ &\Leftrightarrow a \in \sigma^B \circ R^{-1}, \end{aligned}$$

pa je $\sigma^A \circ R \circ R^{-1} = \sigma^B \circ R^{-1}$, i stoga,

$$\sigma^A \circ R = \sigma^A \circ R \circ R^{-1} \circ R = \sigma^B \circ R^{-1} \circ R.$$

Osim toga, za proizvoljne $u \in X^*$ i $a \in A$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
a \in \tau_u^A \ &\Leftrightarrow\ E_a \in \tau_u^{A/\!\!/E} \ \Leftrightarrow\ \widetilde{R}(E_a) \in \tau_u^{B/\!\!/F} \\
&\Leftrightarrow\ F_{f(a)} \in \tau_u^{B/\!\!/F} \ \Leftrightarrow\ f(a) \in \tau_u^B = F \circ \tau_u^B \\
&\Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\,((f(a),b) \in F \ \wedge\ b \in \sigma^B) \\
&\Leftrightarrow\ (\exists b \in B)\,((a,b) \in R \ \wedge\ b \in \sigma^B) \\
&\Leftrightarrow\ a \in R \circ \tau_u^B,
\end{aligned}
$$

pa $\tau_u^A = R \circ \tau_u^B$, što takođe daje $R^{-1} \circ \tau_u^A = R^{-1} \circ R \circ \tau_u^B = F \circ \tau_u^B = \tau_u^B$. Dakle, na osnovu Teoreme 4.4.21. dobijamo da je R slaba forward bisimulacija. □

Takođe dokazujemo sledeće.

Teorema 4.4.25. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i neka su E i F redom slabo desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada postoji uniformna slaba forward bisimulacija $R \subseteq A \times B$ takva da je $E_A^R = E$ i $E_B^R = F$ ako i samo ako postoji slabi forward izomorfizam između količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$.

Dokaz: Ova teorema se može dokazati na sličan način kao Teorema 4.4.10., koristeći Teoremu 4.4.24. □

Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$. Ako postoji kompletna i surjektivna slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada ćemo govoriti da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *slabo forward bisimulaciono ekvivalentni*, ili kraće *WFB-ekvivalentni*, i pisaćemo $\mathcal{A} \sim_{WFB} \mathcal{B}$. Primetimo još jednom da kompletnost i surjektivnost te slabe forward bisimulacije znače da je svako stanje automata $\mathcal{A}$ ekvivalentno nekom stanju automata $\mathcal{B}$, i obratno.

Za proizvoljne automate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ imamo da važi

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} \sim_{WFB} \mathcal{A}; \\
&\mathcal{A} \sim_{WFB} \mathcal{B} \ \Rightarrow\ \mathcal{B} \sim_{WFB} \mathcal{A}; \\
&\Big(\mathcal{A} \sim_{WFB} \mathcal{B} \ \wedge\ \mathcal{B} \sim_{WFB} \mathcal{C}\Big) \Rightarrow \mathcal{A} \sim_{WFB} \mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{4.112}
$$

Slično, kažemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *slabo backward bisimulaciono ekvivalentni*, ili kraće *WBB-ekvivalentni*, u oznaci $\mathcal{A} \sim_{WBB} \mathcal{B}$, ako postoji kompletna i surjektivna slaba backward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

U daljem radu biće nam potrebna sledeća lema.

Lema 4.4.26. *Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati, neka je ϕ slabi forward izomorfizam imeđu $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, i neka su E i F redom najveće slabo desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi sledeće:

$$
(a_1, a_2) \in E \ \Leftrightarrow\ (\phi(a_1), \phi(a_2)) \in F. \tag{4.113}
$$

Dokaz: Definišimo relaciju F' na B sa

$$(b_1,b_2)\in F' \quad\Leftrightarrow\quad (\phi^{-1}(b_1),\phi^{-1}(b_2))\in E, \tag{4.114}$$

za proizvoljne $b_1,b_2\in B$. Jasno je da je F' relacija ekvivalencije na B.

Razmotrimo proizvoljno $u\in X^*$. Ako je $b_1\in F'\circ\tau_u^B$, tada postoji is $b_2\in B$ tako da $(b_1,b_2)\in F'$ i $b_2\in\tau_u^B$, i na osnovu (4.114) i (4.109) dobijamo da

$$(\phi^{-1}(b_1),\phi^{-1}(b_2))\in E \;\text{ i }\; \phi^{-1}(b_2)\in\tau_u^A.$$

To znači da $\phi^{-1}(b_1)\in E\circ\tau_u^A\subseteq\tau_u^A$, i opet iz (4.109) sledi $b_1=\phi(\phi^{-1}(b_1))\in\tau_u^B$. Prema tome, $F'\circ\tau_u^B\subseteq\tau_u^B$, za sve $u\in X^*$, što znači da je F' slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$, odakle je $F'\subseteq F$. Sada, za sve $a_1,a_2\in A$ imamo da $(a_1,a_2)\in E$ povlači $(\phi(a_1),\phi(a_2))\in F'\subseteq F$, čime smo dokazali direktnu implikaciju u (4.113). Analogno dokazujemo obratnu implikaciju. □

Sada dokazujemo glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema 4.4.27. *Neka su $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ i $\mathcal{B}=(B,X,\delta^B,\sigma^B,\tau^B)$ automati i neka su E i F redom najveće slabo desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.*

Tada $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu WFB-ekvivalentni automati ako i samo ako postoji slab forward izomorfizam između količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$.

Dokaz: Neka $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jesu WFB-ekvivalentni automati. Na isti način kao u dokazu Teoreme 4.4.12. dobijamo da najveća slaba forward bisimulacija R između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jeste uniformna relacija.

Prema Teoremi 4.4.24., E_A^R i E_B^R su slabo desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tim redom, i $\widetilde{R}$ je slabi forward izomorfizam količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$. Neka su P i Q redom najveće slabo desno invarijantne ekvivalencije na $\mathcal{A}/\!\!/E_A^R$ i $\mathcal{B}/\!\!/E_B^R$, i neka je $\xi:(\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P\to(\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q$ funkcija definisana sa $\xi(P_\alpha)=Q_{\widetilde{R}(\alpha)}$, za sve $\alpha\in A/\!\!/E_A^R$. Jednostavno se proverava da je ξ dobro definisana bijektivna funkcija, i na osnovu (4.107), (4.113) i činjenice da je $\widetilde{R}$ slabi forward izomorfizam dobijamo da je ξ takođe slabi forward izomorfizam.

Na osnovu Teoreme 1.3.4. dobijamo da je $P=E/\!\!/E_A^R$ i $Q=F/\!\!/E_B^R$, i prema Teoremi 4.2.1., $\mathcal{A}/\!\!/E$ je izomorfno sa $(\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$ je izomorfno sa $(\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q$. Kako smo već pokazali da je ξ slabi forward izomorfizam između $(\mathcal{A}/\!\!/E_A^R)/\!\!/P$ i $(\mathcal{B}/\!\!/E_B^R)/\!\!/Q$, to zaključujemo da postoji slabi forward izomorfizam između količničkih automata $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$.

Obrat sledi neposredno iz Teoreme 4.4.25. □

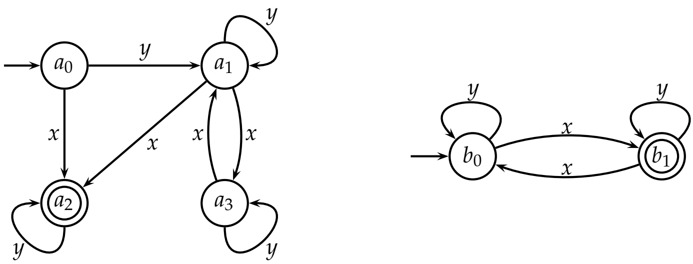
Posledica 4.4.28. *Neka je $\mathcal{A}$ automat, neka je E najveća slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{A}$, i neka je $\mathbb{WFB}(A)$ klasa svih automata koji su WFB-ekvivalentni sa $\mathcal{A}$.*

Tada je $\mathcal{A}/\!\!/E$ minimalni automat u $\mathbb{WFB}(A)$. Osim toga, ako je $\mathcal{B}$ bilo koji minimalni automat u $\mathbb{WFB}(A)$, tada postoji slabi forward izomorfizam između $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljni minimalni automat u $\mathbb{WFB}(A)$ i neka je F najveća slabo desno invarijantna ekvivalencija na $\mathcal{B}$. Prema Teoremi 4.4.27., postoji slab forward izomorfizam između $\mathcal{A}/\!\!/E$ i $\mathcal{B}/\!\!/F$, i na osnovu Leme 4.4.23. i (4.112) sledi da je $\mathcal{B}/\!\!/F \in \mathbb{WFB}(A)$. Sada, zbog minimalnosti automata $\mathcal{B}$ dobijamo da je F identička relacija na B, što znači da je $\mathcal{B}/\!\!/F \cong \mathcal{B}$. Prema tome, postoji slabi forward izomorfizam između $\mathcal{A}/\!\!/F$ i $\mathcal{B}$, i stoga, $\mathcal{A}/\!\!/F$ je takođe minimalni automat u $\mathbb{WFB}(A)$. □

Naredni primer pokazuje da postoje automati koji su WFB-ekvivalentni ali nisu FB-ekvivalentni, i takođe, da postoje automati koji su jezički ekvivalentni ali nisu WFB-ekvivalentni.

Primer 4.4.29. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ predstavljeni sledećim grafovima:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovih automata mogu se predstaviti sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_x^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći Algoritam 4.4.20. dobijamo relaciju

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

koja zadovoljava (4.89) i (4.93), pa je R najveća slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Jasno, R je kompletna i surjektivna. Sa druge strane, koristeći Algoritam 4.4.5. dobijamo da ne postoji nijedna forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Prema tome, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su WFB-ekvivalentni ali nisu FB-ekvivalentni.

Ako promenimo σ^A u

$$\sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tada dobijamo da R ne zadovoljava (4.93), i u tom slučaju ne postoji nijedna slaba forward bisimulacija između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tj., $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nisu WFB-ekvivalentni. Međutim, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su i u ovom slučaju jezički ekvivalentni, jer raspoznaju isti jezik $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = \{(y^*x)^{2k+1} \,|\, k \in \mathbb{N}^0\}$.

4.5. Zadaci

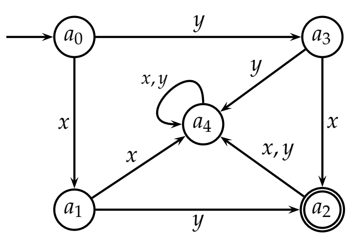
4.5.1. Konstruisati nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ koji raspoznaje jezik $L = y^*x^+ + x^*y^+$, nad alfabetom $X = \{x, y\}$.

4.5.2. Konstruisati nedeterministi automat koji prihvata one reči koje počinju sa x i iza svakog x je obavezno bar jedno y.

4.5.3. Konstruisati nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ koji raspoznaje jezik $L = x^*(xy + yx)$ nad alfabetom $X = \{x, y\}$.

4.5.4. Čovek, koza, vuk i salata treba da se prevezu u malom čamcu sa leve na desnu obalu reke. Čamac je mali i čovek (koji naravno jedini zna da upravlja čamcem), može povesti samo kozu, samo vuka ili samo salatu, pri čemu mora biti oprezan i ne sme ostaviti ni kozu sa vukom, ni kozu sa salatom. Konstruisati nedeterministički automat koji rešava opisani problem.

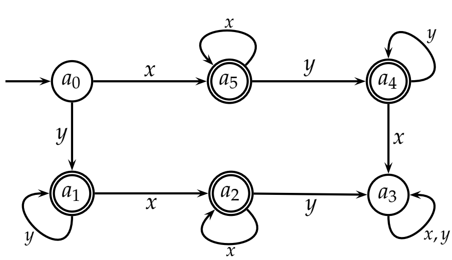
4.5.5. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa pet stanja nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Da li je moguć redukovati broj stanja ovog automata pomoću invarijantnih kvazi-uređenja ili nekom od naizmeničnih redukcija?

4.5.6. Dokazati da postoji automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, takav da opšti sistem nema najveće rešenje.

4.5.7. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Naći najveće desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$, a takođe i najveće slabo desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i uporediti ih. Da li odgovarajući količnički automati imaju manji broj stanja od polaznog automata?

4.5.8. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat nad alfabetom $X = \{x, y\}$ čije su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pronaći najveće desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$, kao i najveće slabo desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i uporediti ih.

4.5.9. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa sedam stanja nad alfabetom $X = \{x, y\}$ čije su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Naći najveće desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje i najveće slabo desno (levo) invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ i uporediti ih.

4.5.10. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat nad alfabetom $X = \{x, y\}$ čije su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

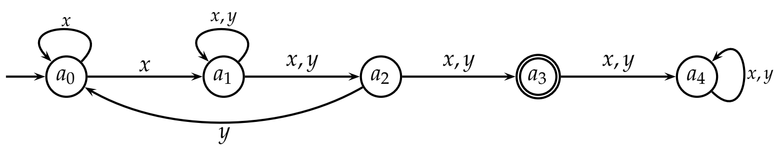
$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

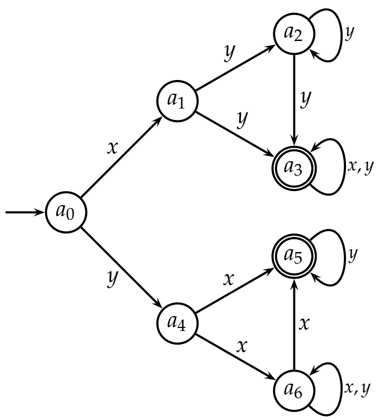
Da li je moguće redukovati broj stanja ovog automata pomoću invarijantnih kvazi-uređenja ili naizmeničnim redukcijama?

4.5.11. Dokazati da važi sledeće:

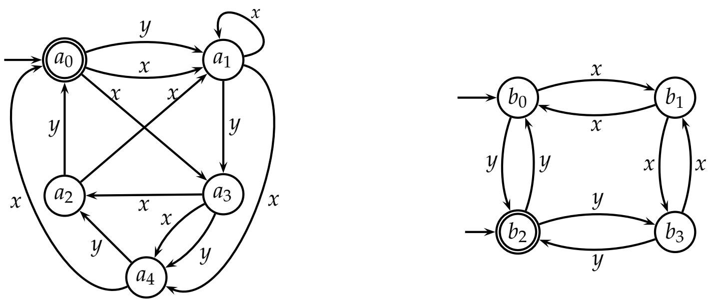
(a) Kompozicija dve slabe forward simulacije (bisimulacije) je takođe slaba forward simulacija (bisimulacija).
(b) Unija proizvoljne familije slabih forward simulacija (bisimulacija) je takođe slaba forward simulacija (bisimulacija).

4.5.12. Da li između automata zadatih sledećim grafovima postoji neki tip simulacija/bisimulacija?

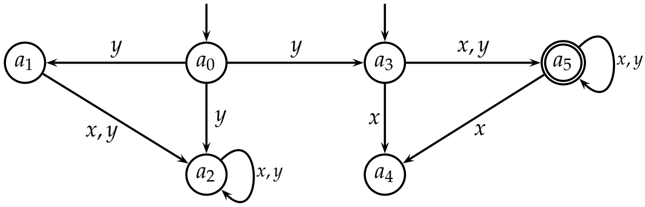


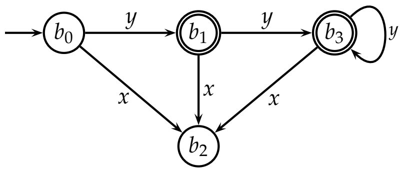


4.5.13. Da li između automata predstavljenih sledećim grafovima postoji neki tip simulacija/bisimulacija?



4.5.14. Ispitati da li su automati zadati sledećim grafovima FB-ekvivalentni.





Glava 5
Determinizacija nedeterminističkih automata

U mnogim slučajevima, na primer prilikom pretvaranja regularnog izraza u automat, je jednostavnije konstruisati nedeterministički od determinističkog automata. Međutim, praktične primene automata najčešće zahtevaju da taj automat bude determnistički. Zbog toga je jedan od najvažnijih problema teorije automata da se razviju što efikasniji algoritmi za determinizaciju – prevođenje nedetrminističkog automata u ekvivalentan deteministički.

Koristeći originalan pristup, u ovoj glavi razvijamo više takvih algoritama. Konstrukcija Nerodovog automata, koja je prikazana u prvom odeljku, je zapravo poznata dostižna podskup konstrukcija. Potom se pokazuje kako se data konstrukcija može poboljšati tako da se dobije deterministički automat sa manjim brojem stanja. U Odeljku 5.2 to je učinjeno uz pomoć slabo invarijantnih kvazi-uređenja, a u Odeljku 5.3 uz pomoć takozvanog dečjeg automata.

Posebno značajni determinizacioni metodi su kanonizacioni metodi, koji rezultuju minimalnim determinističkim automatima. Najpoznatiji takav metod je metod Brzozovskog, koji je prikazan u Odeljku 5.4. U poslednjem odeljku dat je jedan novi kanonizacioni metod, koji je teorijski brži od metoda Brzozovskog.

5.1. Nerodov i reverzni Nerodov automat

Klasičan način da se nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ preobrati u deterministički je da se formira deterministički konačni automat $\mathcal{A}_P = (A_P, X, \delta^{A_P}, \sigma^A, \tau^{A_P})$, čiji skup stanja je $A_P = 2^A$, skup svih podskupova od A, jedinstveno inicijalno stanje je $\sigma^A \in A_P$, funkcija prelaza $\delta^{A_P} : A_P \times X \to A_P$ je definisana sa

$$\delta^{A_P}(\alpha, x) = \alpha \circ \delta^A_x, \qquad \text{za sve } \alpha \in A_P \text{ i } x \in X, \tag{5.1}$$

i skup τ^{A_P} završnih stanja je zadat sa

$$\tau^{A_P} = \{\alpha \in A_P \mid \alpha \cap \tau^A \neq \emptyset\} = \{\alpha \in A_P \mid \alpha \circ \tau^A = 1\}. \tag{5.2}$$

Za automat $\mathcal{A}_P$ kažemo da je nastao iz $\mathcal{A}$ *podskupovnom konstrukcijom* (engl. *subset construction*).

Jasno, podskupovna konstrukcija ne bi imala mnogo smisla ako njome konstruisan automat $\mathcal{A}_P$ ne bi bio ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, i sledeća teorema pokazuje da on to zaista jeste.

Teorema 5.1.1. *Za proizvoljan nedeterministički automat $\mathcal{A}$, deterministički automat $\mathcal{A}_P$ dobijen iz $\mathcal{A}$ podskupovnom konstrukcijom je ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Polazeći od (5.1), indukcijom lako dokazujemo da je

$$\delta^{A_P}(\alpha, u) = \alpha \circ \delta_u^A, \qquad \text{za sve } \alpha \in A_P \text{ i } u \in X^*, \tag{5.3}$$

i na osnovu toga, (3.1) i (4.5), za proizvoljnu reč $u \in X^*$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} u \in [\![\mathcal{A}_P]\!] \quad &\Leftrightarrow \quad \delta^{A_P}(\sigma^A, u) \in \tau^{A_P} \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma^A \circ \delta_u^A \in \tau^{A_P} \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma^A \circ \delta_u^A \circ \tau^A = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad u \in [\![\mathcal{A}]\!]. \end{aligned}$$

Prema tome, deterministički automat $\mathcal{A}_P$ je ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. □

Kao neposrednu posledicu Teoreme 5.1.1. dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 5.1.2. *Jezik $L \subseteq X^*$ može biti raspoznat determinističkim konačnim automatom ako i samo ako može biti raspoznat nedeterminističkim konačnim automatom.*

Dokaz: Ako jezik L može biti raspoznat nedeterminističkim konačnim automatom $\mathcal{A}$, onda na osnovu Teoreme 5.1.1. može biti raspoznat i determinističkim konačnim automatom $\mathcal{A}_P$.

Obrat sledi direktno iz činjenice da deterministički konačni automati jesu specijalan slučaj nedeterminističkih konačnih automata. □

Podskupovnu konstrukciju predstavićemo u obliku algoritma na sledeći način:

Algoritam 5.1.3. (*Podskupovna konstrukcija*) Ulaz ovog algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad konačnim alfabetom X, a izlaz je deterministički konačni automat $\mathcal{A}_P = (A_P, X, \delta^{A_P}, \sigma^{A_P}, \tau^{A_P})$.

Postupak se sastoji iz konstrukcije grafa G automata $\mathcal{A}_P$, što se čini na sledeći način:

(A1) Čvorove grafa G formiramo kao sve podskupove skupa A, a čvor koji odgovara skupu σ^A označavamo kao inicijalno stanje.

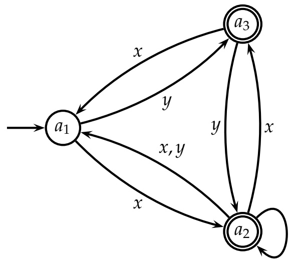
(A2) Za svaki $\alpha \in A_P$ proveravamo da li je $\alpha \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako jeste, onda čvor koji odgovara skupu α označavamo kao završno stanje.

(A3) Za svaki $\alpha \in A_P$ i svaki $x \in X$ izračunavamo $\alpha \circ \delta_x^A$ i formiramo granu iz čvora koji odgovara skupu α u čvor koji odgovara skupu $\alpha \circ \delta_x^A$, koju označavamo sa x.

Dijagram koji je dobijen nakon realizacije ova tri koraka je graf automata $\mathcal{A}_P$.

Funkcionisanje ovog algoritma demonstrirano je sledećim primerom:

Primer 5.1.4. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa tri stanja nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podskupove skupa $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ označićemo na sledeći način

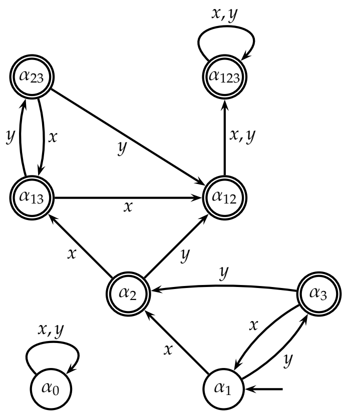
$$\alpha_0 = \emptyset, \quad \alpha_i = \{a_i\}, \text{ za } i \in \{1,2,3\}, \quad \alpha_{ij} = \{a_i, a_j\}, \text{ za } i, j \in \{1,2,3\},\ i < j, \quad \alpha_{123} = A\,.$$

Jasno, inicijalno stanje je $\alpha_1 = \sigma^A$, a završna stanja su oni podskupovi koji imaju neprazan presek sa τ^A, odnosno sadrže a_2 ili a_3, a to su α_2, α_3, α_{12}, α_{13}, α_{23} i α_{123}.

Konačno, množeći sve podskupove relacijama δ_x^A i δ_y^A dobijamo da je

$$\alpha_0 \circ \delta_x^A = \alpha_0 \circ \delta_y^A = \alpha_0,\ \alpha_1 \circ \delta_x^A = \alpha_2,\ \alpha_1 \circ \delta_y^A = \alpha_3,\ \alpha_2 \circ \delta_x^A = \alpha_{13},\ \alpha_2 \circ \delta_y^A = \alpha_{12},$$
$$\alpha_3 \circ \delta_x^A = \alpha_1,\ \alpha_3 \circ \delta_y^A = \alpha_2,\ \alpha_{12} \circ \delta_x^A = \alpha_{12} \circ \delta_y^A = \alpha_{123},\ \alpha_{13} \circ \delta_x^A = \alpha_{12},\ \alpha_{13} \circ \delta_y^A = \alpha_{23},$$
$$\alpha_{23} \circ \delta_x^A = \alpha_{13},\ \alpha_{23} \circ \delta_y^A = \alpha_{12},\ \alpha_{123} \circ \delta_x^A = \alpha_{123} \circ \delta_y^A = \alpha_{123},$$

čime smo dobili sledeći dijagram koji predstavlja graf automata $\mathcal{A}_P$:



Ovim je konstrukcija automata $\mathcal{A}_P$ završena.

Očigledan nedostatak podskupovne konstrukciije je u tome što se njenom primenom eksponencijalno uvećava broj stanja. Naime, nedeterministički automat $\mathcal{A}$ sa n stanja se podskupovnom konstrukcijom pretvara u deterministički automat $\mathcal{A}_P$ sa 2^n stanja. Pri tome, mnoga stanja automata $\mathcal{A}_P$ mogu biti suvišna. Najjednostavnija modifikacija podskupovne konstrukcije, pomoću koje se gradi samo dostižni deo automata $\mathcal{A}_P$, poznata je kao *dostižna podskupovna konstrukcija* (engl. *accessible subset construction*). Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ ovom konstrukcijom se gradi deterministički automat $\mathcal{A}_N = (A_N, X, \delta^{A_N}, \sigma_e^A, \tau^{A_N})$, čiji skup stanja je $A_N = \{\sigma_u^A \mid u \in X^*\}$, funkcija prelaza $\delta^{A_N} : A_N \times X \to A_N$ je definisana kao u (5.1), tj.

$$\delta^{A_N}(\alpha, x) = \alpha \circ \delta_x^A, \qquad \text{za sve } \alpha \in A_N \text{ i } x \in X, \tag{5.4}$$

odnosno

$$\delta^{A_N}(\sigma_u^A, x) = \sigma_{ux}^A \qquad \text{za sve } u \in X^* \text{ i } x \in X, \tag{5.5}$$

a skup završnih stanja τ^{A_N} je takođe zadat kao u (5.2), tj.

$$\tau^{A_N} = \{\alpha \in A_N \mid \alpha \cap \tau^A \neq \emptyset\} = \{\alpha \in A_N \mid \alpha \circ \tau^A = 1\}. \tag{5.6}$$

Automat $\mathcal{A}_N$ nazivaćemo *Nerodov automat* (A. Nerode) automata $\mathcal{A}$. Jednostavno se pokazuje da je i ovaj automat ekvivalentan automatu $\mathcal{A}$.

Teorema 5.1.5. *Proizvoljan nedeterministički automat $\mathcal{A}$ je ekvivalentan svom Nerodovom automatu $\mathcal{A}_N$.*

Dokaz: Očigledno je da je Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ zapravo dostižni deo automata $\mathcal{A}_P$, što znači da je ekvivalentan sa $\mathcal{A}_P$, pa prema Teoremi 5.1.1. dobijamo da je $\mathcal{A}$ ekvivalentan sa $\mathcal{A}_N$. □

U nastavku dajemo efektivan postupak za konstrukciju Nerodovog automata. Setimo se da smo u prethodnoj glavi dali algoritam za izračunavanje svih članova kolekcije skupova $\{\tau_u^A\}_{u\in X^*}$ (vidi Teoremu 4.3.12.). Taj algoritam se na jednostavan način može prevesti u algoritam za izračunavanje svih članova kolekcije $\{\sigma_u^A\}_{u\in X^*}$, a daljom modifikacijom dobijamo sledeći algoritam za konstrukciju Nerodovog automata.

Algoritam 5.1.6. (*Konstrukcija Nerodovog automata* $\mathcal{A}_N$) Ulaz ovog algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad konačnim alfabetom X, a izlaz je Nerodov automat $\mathcal{A}_N = (A_N, X, \delta^{A_N}, \sigma_\varepsilon^A, \tau^{A_N})$ automata $\mathcal{A}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla prelaza* Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ konstruiše se induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je σ_e^A, i mi stavljamo da je $T_0 = \{\sigma_e^A\}$ i $s(\sigma_e^A) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $\sigma_e^A \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda σ_e^A registrujemo kao završno stanje.

(A2) Posle $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list σ_u^A u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor $\sigma_{ux}^A = \sigma_u^A \circ \delta_x^A$ i granu iz σ_u^A u σ_{ux}^A označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je σ_{ux}^A skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je σ_{ux}^A jednak nekom prethodno izračunatom skupu σ_v^A, onda označavamo σ_{ux}^A kao zatvoren i stavljamo $s(\sigma_{ux}^A) = s(\sigma_v^A)$.
U suprotnom, stavljamo da je $s(\sigma_{ux}^A)$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $\sigma_{ux}^A \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda σ_{ux}^A registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_N$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_N$.

Primer 5.1.7. Razmotrimo još jednom automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ iz Primera 5.1.4. Iako se Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ automata $\mathcal{A}$ može dobiti iz automata $\mathcal{A}_P$ konstruisanog u Primeru 5.1.4. eliminisanjem jedinog njegovog nedostižnog stanja α_0, jer znamo da je $\mathcal{A}_N$ dostižni deo automata $\mathcal{A}_P$, iz metodoloških razloga Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ konstruišemo koristeći Algoritam 5.1.6.

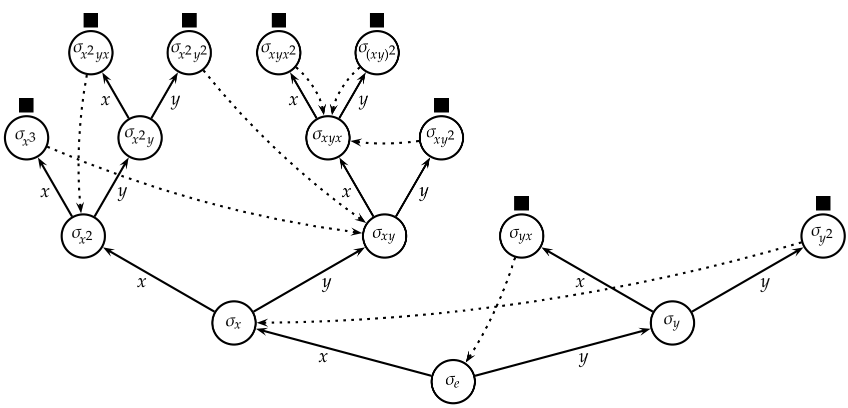
Setimo se da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja automata $\mathcal{A}$ zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

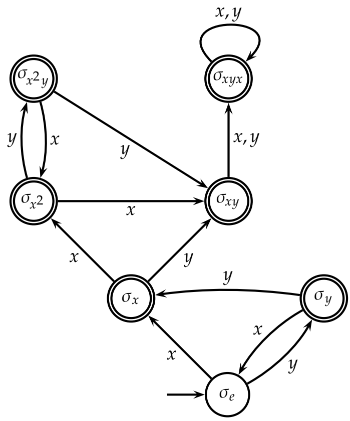
Primenom Algoritma 5.1.6. dobijamo sledeće:

$$
\begin{array}{llll}
T_0: & \sigma_e^A = \sigma^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, & s(\sigma_e^A) = 1, & \\
T_1: & \sigma_x^A = \sigma_e^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}, & s(\sigma_x^A) = 2, & \sigma_x^A \in \tau^{A_N}, \\
 & \sigma_y^A = \sigma_e^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_y^A) = 3, & \sigma_y^A \in \tau^{A_N}, \\
T_2: & \sigma_{x^2}^A = \sigma_x^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_{x^2}^A) = 4, & \sigma_{x^2}^A \in \tau^{A_N}, \\
 & \sigma_{xy}^A = \sigma_x^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}, & s(\sigma_{xy}^A) = 5, & \sigma_{xy}^A \in \tau^{A_N}, \\
 & \sigma_{yx}^A = \sigma_y^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \sigma_e^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{yx}^A) = s(\sigma_e^A) = 1, & \\
 & \sigma_{y^2}^A = \sigma_y^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \sigma_x^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{y^2}^A) = s(\sigma_x^A) = 2, & \\
T_3: & \sigma_{x^3}^A = \sigma_{x^2}^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \sigma_{xy}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{x^3}^A) = s(\sigma_{xy}^A) = 5, & \\
 & \sigma_{x^2y}^A = \sigma_{x^2}^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_{x^2y}^A) = 6, & \sigma_{x^2y}^A \in \tau^{A_N}, \\
 & \sigma_{xyx}^A = \sigma_{xy}^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_{xyx}^A) = 7, & \sigma_{xyx}^A \in \tau^{A_N}, \\
 & \sigma_{xy^2}^A = \sigma_{xy}^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{xyx}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{xy^2}^A) = s(\sigma_{xyx}^A) = 7, & \\
T_4: & \sigma_{x^2yx}^A = \sigma_{x^2y}^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{x^2}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{x^2yx}^A) = s(\sigma_{x^2}^A) = 4, & \\
 & \sigma_{x^2y^2}^A = \sigma_{x^2y}^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \sigma_{xy}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{x^2y^2}^A) = s(\sigma_{xy}^A) = 5, & \\
 & \sigma_{xyx^2}^A = \sigma_{xyx}^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{xyx}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{xyx^2}^A) = s(\sigma_{xyx}^A) = 7, & \\
 & \sigma_{(xy)^2}^A = \sigma_{xyx}^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \sigma_{xyx}^A \ \blacksquare, & s(\sigma_{(xy)^2}^A) = s(\sigma_{xyx}^A) = 7. &
\end{array}
$$

Napomenimo da smo znak "■" koristili da označimo odgovarajuće čvorove kao zatvorene. Kako su očigledno svi listovi postali zatvoreni, to je konstrukcija stabla prelaza Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ završena, i to stablo je prikazano na sledećoj slici:



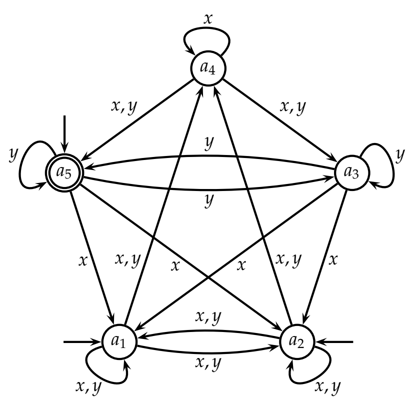
Isprekidane strelice na ovoj slici spajaju listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača, i slepljivanjem tih listova sa odgovarajućim unutrašnjim čvorovima i označavanjem inicijalnog i završnih stanja dobijamo graf Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ koji je prikazan na sledećoj slici:



Da bi pojednostavili gornje slike, kod označavanja skupova σ_u^A, $u \in X^*$, smo izostavljali oznaku "A" u gornjem indeksu, što sigurno neće dovesti do zabune jer je jasno o čemu se radi. Tako nešto radićemo i ubuduće, kod stabala i grafova koje ćemo konstruisati u nastavku.

Kao što smo mogli da vidimo, u prethodnom primeru postojala je veoma mala razlika u broju stanja Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ i automata $\mathcal{A}_P$ dobijenog iz $\mathcal{A}$ podskupovnom konstrukcijom, ta dva automata razlikovala su se samo za jedno stanje. Sledećim primerom pokazujemo da ta razlika može biti i znatno veća.

Primer 5.1.8. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



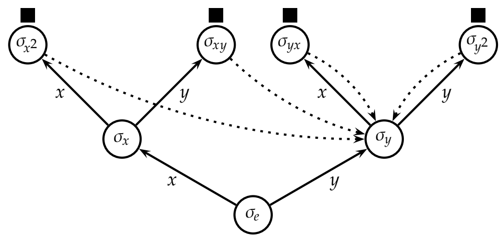
Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja automata $\mathcal{A}$ mogu se zadati i sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

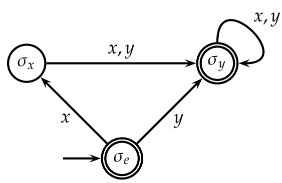
Korišćenjem Algoritma 5.1.6. dobijamo sledeće:

$$
\begin{array}{llll}
T_0: & \sigma_e^A = \sigma^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 0\ 0\ 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_e^A) = 1, & \sigma_e^A \in \tau^{A_N}, \\
T_1: & \sigma_x^A = \sigma_e^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 0\ 1\ 0\end{bmatrix}, & s(\sigma_x^A) = 2, & \\
 & \sigma_y^A = \sigma_e^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 1\ 1\ 1\end{bmatrix}, & s(\sigma_y^A) = 3, & \sigma_y^A \in \tau^{A_N}, \\
T_2: & \sigma_{x^2}^A = \sigma_x^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 1\ 1\ 1\end{bmatrix} = \sigma_y^A\ \blacksquare, & s(\sigma_{x^2}^A) = s(\sigma_y^A) = 3, & \\
 & \sigma_{xy}^A = \sigma_x^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 1\ 1\ 1\end{bmatrix} = \sigma_y^A\ \blacksquare, & s(\sigma_{xy}^A) = s(\sigma_y^A) = 3, & \\
 & \sigma_{yx}^A = \sigma_y^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 1\ 1\ 1\end{bmatrix} = \sigma_y^A\ \blacksquare, & s(\sigma_{yx}^A) = s(\sigma_y^A) = 3, & \\
 & \sigma_{y^2}^A = \sigma_y^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix}1\ 1\ 1\ 1\ 1\end{bmatrix} = \sigma_y^A\ \blacksquare, & s(\sigma_{y^2}^A) = s(\sigma_y^A) = 3, &
\end{array}
$$

i pošto su svi listovi postali zatvoreni, postupak konstrukcije stabla prelaza Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ je završen, i to stablo je prikazano na sledećoj slici:



Nakon što u tom stablu slepimo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača i unesemo oznake za inicijalno i završna stanja dobijamo graf Nerodovog automata $\mathcal{A}$ prikazan na sledećoj slici:



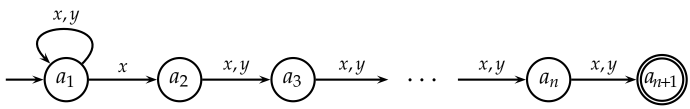
Prema tome, Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ automata $\mathcal{A}$ ima samo 3 stanja, odakle se vidi da može postojati vrlo značajna razlika u broju stanja Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ i automata $\mathcal{A}_P$ dobijenog iz $\mathcal{A}$ primenom podskupovne konstrukcije, jer automat $\mathcal{A}_P$ ima $2^5 = 32$ stanja.

U prethodnom primeru smo videli da se dostižnom podskupovnom konstrukcijom može dobiti znatno manji deterministički automat ekvivalentan datom nedeterminističkom automatu $\mathcal{A}$ od determinističkog automata koji se iz $\mathcal{A}$ dobija podskupovnom konstrukcijom. U Primeru 5.1.7. ta razlika u broju stanja bila je neznatna, ali se drugim metodima koji će biti razmatrani u narednim odeljcima mogu konstruisati znatno manji deterministički automati ekvivalentni sa $\mathcal{A}$. Međutim, postoje slučajevi u kojima čak i minimalni deterministički automat ekvivalentan nedeterminističkom automatu $\mathcal{A}$

ima broj stanja koji je eksponencijalan u odnosu na broj stanja automata $\mathcal{A}$. O tome se govori u sledećoj teoremi.

Teorema 5.1.9. *Za svaki prirodan broj n postoji nedeterministički automat $\mathcal{A}$ sa $n+1$ stanja za koji ne postoji ekvivalentan deterministički automat sa manje od 2^n stanja.*

Dokaz: Neka je n proizvoljan prirodan broj i $\mathcal{A}$ je nedeterministički automat sa $n+1$ stanja nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Očigledno je da se jezik $[\![\mathcal{A}]\!]$ raspoznat automaton $\mathcal{A}$ sastoji od svih reči dužine veće ili jednake n čije je n-to slovo od pozadi x.

Pretpostavimo da postoji deterministički automat $\mathcal{B}$ sa manje od 2^n stanja koji raspoznaje isti jezik $[\![\mathcal{A}]\!]$. Kako u X^* postoji 2^n različitih reči dužine n, a automat $\mathcal{B}$ ima manje od 2^n stanja, to postoje stanje b automata $\mathcal{B}$ i dve različite reči $x_1x_2\dots x_n$ i $y_1y_2\dots y_n$ iz X^* dužine n koje iz inicijalnog stanja automata $\mathcal{B}$ vode u stanje b. Pošto su reči $x_1x_2\dots x_n$ i $y_1y_2\dots y_n$ različite, imamo da postoji $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tako da su slova x_i i y_i različita, što znači da je jedno od njih jednako x a drugo y. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $x_i = x$ i $y_i = y$.

Ako je $i = 1$, onda je $x_1x_2\dots x_n = xx_2\dots x_n \in [\![\mathcal{A}]\!]$, odakle sledi da je stanje b završno, a sa druge strane, $y_1y_2\dots y_n = yy_2\dots y_n \notin [\![\mathcal{A}]\!]$, odakle dobijamo da stanje b nije završno. Prema tome, došli smo do protivrečnosti. U slučaju da je $i > 1$, za proizvoljnu reč $u \in X^*$ dužine $i-1$ imamo da iz inicijalnog stanja automata $\mathcal{B}$ reči $x_1x_2\dots x_nu$ i $y_1y_2\dots y_nu$ vode u jedno isto stanje c (jer reči $x_1x_2\dots x_n$ i $y_1y_2\dots y_n$ iz inicijalnog stanja vode u b, a reč u vodi iz b u c). Međutim, iz

$$
\begin{aligned}
&x_1x_2\dots x_nu = x_1\dots x_{i-1}xx_{i+1}\dots x_nu \in [\![\mathcal{A}]\!],\\
&y_1y_2\dots y_nu = y_1\dots y_{i-1}yy_{i+1}\dots y_nu \notin [\![\mathcal{A}]\!],
\end{aligned}
$$

dobijamo da c i jeste i nije završno stanje, pa smo opet došli do protivrečnosti.

Dakle, iz svega ovog zaključujemo da nam je bila pogrešna pretpostavka da postoji deterministički automat sa manje od 2^n stanja ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, odakle zaključujemo da je tvrđenje teoreme tačno. □

U kasnijim odeljcima ove glave veoma važnu ulogu igraće i Nerodov automat reverznog automata datog automata $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$, pa ćemo se ovde malo pozabaviti i njime. Taj automat konstruišemo direktno iz $\mathcal{A}$ kao deterministički automat $\mathcal{A}_{\overline{N}} = (A_{\overline{N}}, X, \delta^{A_{\overline{N}}}, \tau^A_e, \tau^{A_{\overline{N}}})$, gde je $A_{\overline{N}} = \{\tau^A_u \mid u \in X^*\}$, funkcija prelaza $\delta^{A_{\overline{N}}} : A_{\overline{N}} \times X \to A_{\overline{N}}$ je zadata sa

$$\delta^{A_{\overline{N}}}(\tau_u^A, x) = \tau_{xu}^A, \tag{5.7}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$, a skup završnih stanja $\tau^{A_{\overline{N}}}$ je zadat sa

$$\tau^{A_{\overline{N}}} = \{\alpha \in A_{\overline{N}} \mid \sigma^A \cap \alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha \in A_{\overline{N}} \mid \sigma^A \cap \alpha = 1\}, \tag{5.8}$$

za sve $u \in X^*$. Automat $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ nazivaćemo *reverzni Nerodov automat* automata $\mathcal{A}$. Jasno, $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ je Nerodov automat reverznog automata $\overline{\mathcal{A}}$ automata $\mathcal{A}$, i ekvivalentan je njemu.

Efektivni postupak za konstrukciju reverznog Nerodovog automata automata $\mathcal{A}$ sličan je onom za konstrukciju Nerodovog automata i prikazan je u nastavku.

Algoritam 5.1.10. (*Konstrukcija reverznog Nerodovog automata* $\mathcal{A}_{\overline{N}}$) Ulaz algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad alfabetom X, a izlaz je deterministički konačni automat $\mathcal{A}_{\overline{N}} = (A_{\overline{N}}, X, \delta^{A_{\overline{N}}}, \tau_e^A, \tau^{A_{\overline{N}}})$.

Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla prelaza* reverznog Nerodovog automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza reverznog Nerodovog automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ konstruiše se induktivno, na sledeći način:

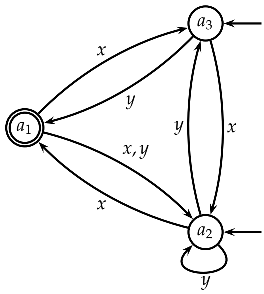
(A1) Koren stabla je τ_e^A, i mi stavljamo da je $T_0 = \{\tau_e^A\}$ i $s(\tau_e^A) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $\sigma^A \cap \tau_e^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda τ_e^A registrujemo kao završno stanje.

(A2) Nakon $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list τ_u^A u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor $\tau_{xu}^A = \delta_x^A \circ \tau_u^A$ i granu iz τ_u^A u τ_{xu}^A označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je τ_{xu}^A skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je τ_{xu}^A jednak nekom prethodno izračunatom skupu τ_v^A, onda označavamo τ_{xu}^A kao zatvoren i stavljamo $s(\tau_{xu}^A) = s(\tau_v^A)$.
U suprotnom, stavljamo da je $s(\tau_{xu}^A)$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $\sigma^A \cap \tau_{xu}^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda τ_{xu}^A registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$.

Primer 5.1.11. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa tri stanja nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Reverzni automat od $\mathcal{A}$ razmatran je u Primerima 5.1.4. i 5.1.7., i u Primeru 5.1.7. je konstruisan Nerodov automat reverznog automata od $\mathcal{A}$, koji je zapravo reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}$. Međutim, iz metodoloških razloga mi ovde dajemo direktnu konstrukciju reverznog Nerodovog automata od $\mathcal{A}$.

Primenom Algoritma 5.1.10. dobijamo sledeće:

$$T_0: \ \tau_e^A = \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad s(\tau_e^A) = 1,$$

$$T_1: \ \tau_x^A = \delta_x^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau_y^A = \delta_y^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s(\tau_x^A) = 2, \quad \tau_x^A \in \tau^{A_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_y^A) = 3, \quad \tau_y^A \in \tau^{A_{\overline{N}}},$$

$$T_2: \ \tau_{x^2}^A = \delta_x^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tau_{yx}^A = \delta_y^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$s(\tau_{x^2}^A) = 4, \quad \tau_{x^2}^A \in \tau^{A_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_{yx}^A) = 5, \quad \tau_{yx}^A \in \tau^{A_{\overline{N}}},$$

$$\tau_{xy}^A = \delta_x^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare, \qquad \tau_{y^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{xy}^A) = s(\tau_e^A) = 1, \qquad s(\tau_{y^2}^A) = s(\tau_x^A) = 2,$$

$$T_3: \ \tau_{x^3}^A = \delta_x^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_{yx}^A \ \blacksquare, \qquad \tau_{yx^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s(\tau_{x^3}^A) = s(\tau_{yx}^A) = 5, \qquad s(\tau_{yx^2}^A) = 6, \quad \tau_{yx^2}^A \in \tau^{A_{\overline{N}}},$$

$$\tau_{xyx}^A = \delta_x^A \circ \tau_{yx}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tau_{y^2x}^A = \delta_y^A \circ \tau_{yx}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_{xyx}^A \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{xyx}^A) = 7, \quad \tau_{xyx}^A \in \tau^{A_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_{y^2x}^A) = s(\tau_{xyx}^A) = 7,$$

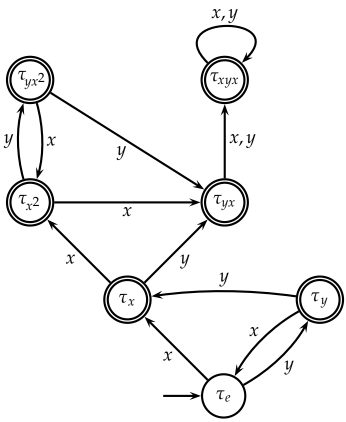
$$T_4: \ \tau^A_{xyx^2} = \delta^A_x \circ \tau^A_{yx^2} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \tau^A_{x^2} \ \blacksquare, \qquad \tau^A_{y^2x^2} = \delta^A_y \circ \tau^A_{yx^2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \tau^A_{yx} \ \blacksquare,$$

$$s(\tau^A_{xyx^2}) = s(\tau^A_{x^2}) = 4, \qquad s(\tau^A_{y^2x^2}) = s(\tau^A_{yx}) = 5,$$

$$\tau^A_{x^2yx} = \delta^A_x \circ \tau^A_{xyx} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^A_{xyx} \ \blacksquare, \qquad \tau^A_{(yx)^2} = \delta^A_y \circ \tau^A_{xyx} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^A_{xyx} \ \blacksquare,$$

$$s(\tau^A_{x^2yx}) = s(\tau^A_{xyx}) = 7, \qquad s(\tau^A_{(yx)^2}) = s(\tau^A_{xyx}) = 7.$$

S obzirom da je ovim postupak izračunavanja završen, formiramo stablo prelaza, a zatim i graf reverznog Nerodovog automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, koji je prikazan na sledećoj slici:



5.2. Determinizacija pomoću slabo invarijantnih kvazi-uređenja

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \sigma^A, \delta^A, \tau^A)$ nedeterministički automat i neka je R relacija na $\mathcal{A}$. Za svako $u \in X^*$ definišemo podskup $R_u \subseteq A$ induktivno, na sledeći način: za praznu reč e stavljamo da je

$$R_e = \sigma^A \circ R, \tag{5.9}$$

a za proizvoljne $u \in X^*$ i $x \in X$ stavljamo da je

$$R_{ux} = R_u \circ \delta^A_x \circ R \tag{5.10}$$

Jasno, ako je $u = x_1 \dots x_n$, gde su $x_1, \dots, x_n \in X$, tada je

$$R_u = \sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \dots \circ \delta^A_{x_n} \circ R. \tag{5.11}$$

Sada, stavimo da je $A_R = \{R_u \mid u \in X^*\}$, i definišimo $\delta^{A_R} : A_R \times X \to A_R$ sa

$$\delta^{A_R}(R_u, x) = R_{ux}, \tag{5.12}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$, kao i $\tau^{A_R} \subseteq A_R$ sa

$$\tau^{A_R} = \{\alpha \in A_R \mid \alpha \cap \tau^A \neq \emptyset\} = \{\alpha \in A_R \mid \alpha \circ \tau^A = 1\}. \tag{5.13}$$

Ako je $R_u = R_v$, za neke $u, v \in X^*$, tada za svako $x \in X$ imamo da je

$$\delta^{A_R}(R_u, x) = R_{ux} = R_u \circ \delta_x^A \circ R = R_v \circ \delta_x^A \circ R = R_{vx} = \delta^{A_R}(R_v, x),$$

što znači da je δ^{A_R} je dobro definisana funkcija. Odatle neposredno dobijamo da je $\mathcal{A}_R = (A_R, X, \delta^{A_R}, R_e, \tau^{A_R})$ dobro definisan deterministički automat.

Osnovno pitanje koje se ovde nameće je kako izabrati relaciju R tako da automat $\mathcal{A}_R$ bude ekvivalentan polaznom automatu $\mathcal{A}$. Odgovor na to pitanje daje nam sledeća teorema.

Teorema 5.2.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat i neka je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}_R = (A_R, \sigma^A, \delta^{A_R}, R_e, \tau^{A_R})$ dostižan deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Jasno je da je $\mathcal{A}_R$ dostižan deterministički automat. Osim toga, u skladu sa (5.11) i (4.7), indukcijom lako dokazujemo da je

$$\tau^A_{x_1 x_2 \dots x_n} = R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \cdots \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A. \tag{5.14}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$.

Sada prema (5.14), za svaku reč $u = x_1 \dots x_n$, gde $x_1, \dots, x_n \in X$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
u \in [\![\mathcal{A}_R]\!] &\Leftrightarrow \delta^{A_R}(R_e, u) \in \tau^{A_R} \Leftrightarrow R_u \in \tau^{A_R} \Leftrightarrow R_u \circ \tau^A = 1 \\
&\Leftrightarrow (\sigma^A \circ R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \ldots \circ \delta^A_{x_n} \circ R) \circ \tau^A = 1 \\
&\Leftrightarrow \sigma^A \circ (R \circ \delta^A_{x_1} \circ R \circ \ldots \circ \delta^A_{x_n} \circ R \circ \tau^A) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sigma^A \circ \tau^A_u = 1 \Leftrightarrow \sigma^A \circ \delta^A_u \circ \tau^A = 1 \\
&\Leftrightarrow u \in [\![\mathcal{A}]\!],
\end{aligned}$$

i takođe,

$$\begin{aligned}
e \in [\![\mathcal{A}_R]\!] &\Leftrightarrow R_e \in \tau^{A_R} \Leftrightarrow R_e \circ \tau^A = 1 \Leftrightarrow \sigma^A \circ R \circ \tau^A = 1 \\
&\Leftrightarrow \sigma^A \circ \tau^A = 1 \Leftrightarrow e \in [\![\mathcal{A}]\!],
\end{aligned}$$

što znači da je $[\![\mathcal{A}_R]\!] = [\![\mathcal{A}]\!]$. Dakle, automati $\mathcal{A}_R$ i $\mathcal{A}$ su ekvivalentni. □

Za automat $\mathcal{A}_R$ važi i sledeće.

Teorema 5.2.2. *Neka je* $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ *nedeterministički automat i* R *je slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na* $\mathcal{A}$*. Tada je automat* $\mathcal{A}_R$ *izomorfan Nerodovom automatu količničkog automata* $\mathcal{A}/\!\!/R$*.*

Dokaz: Jednostavnosti radi, stavimo da je $B = A/\!\!/R$ i $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\!\!/R$, odnosno, neka je $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ količnički automat automata $\mathcal{A}$ određen sa R. Razmotrimo Nerodov automat $\mathcal{B}_N = (B_N, X, \delta^{A_N}, \sigma^B_e, \tau^{A_N})$ automata $\mathcal{B}$.

Najpre ćemo indukcijom po dužini reči dokazaćemo da za svaku reč $u \in X^*$ važi sledeće:

$$R_a \in \sigma^B_u \quad\Leftrightarrow\quad a \in R_u, \quad \text{za svaki } a \in A. \tag{5.15}$$

Za svaki $a \in A$ imamo da je

$$R_a \in \sigma^B_e \quad\Leftrightarrow\quad R_a \in \sigma^B \quad\Leftrightarrow\quad (a \in \sigma^A \circ R \quad\Leftrightarrow\quad a \in R_e),$$

i prema tome, (5.15) važi u slučaju kada je u prazna reč. Dalje, pretpostavimo da (5.15) važi za neku reč $u \in X^*$. Na osnovu (5.11) i idempotentnosti kvazi-uređenja R dobijamo da je $R_u \circ R = R_u$, pa za sve $x \in X$ i $a \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned}
R_a \in \sigma^B_{ux} &\Leftrightarrow R_a \in \sigma^B_u \circ \delta^B_x \\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A)\Big(R_b \in \sigma^B_u \ \wedge\ (R_b, R_a) \in \delta^B_x\Big) \\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A)\Big(b \in R_u \ \wedge\ (b, a) \in R \circ \delta^A_x \circ R\Big) \\
&\Leftrightarrow a \in R_u \circ R \circ \delta^A_x \circ R \\
&\Leftrightarrow a \in R_u \circ \delta^A_x \circ R \\
&\Leftrightarrow a \in R_{ux}.
\end{aligned}$$

Prema tome, zaključujemo da (5.15) važi za svaki $u \in X^*$.

Sada, definišimo funkciju $\xi : A_R \to B_N$ sa $\xi(R_u) = \sigma^B_u$, za svaki $u \in X^*$. Za proizvoljne $u, v \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned}
R_u = R_v &\Leftrightarrow (\forall a \in A)(a \in R_u(a) \Leftrightarrow a \in R_v(a)) \\
&\Leftrightarrow (\forall a \in A)(R_a \in \sigma^B_u \Leftrightarrow R_a \in \sigma^B_v) \\
&\Leftrightarrow \sigma^B_u = \sigma^B_v,
\end{aligned}$$

što znači da je ξ dobro definisana i injectivna funkcija. Jasno je da je ξ takođe surjektivna, i shodno tome, ξ je bijektivna funkcija. Pored toga, za sve $u \in X^*$ i $x \in X$ imamo da je

$$\delta^{A_N}(\xi(R_u), x) = \delta^{A_N}(\sigma^B_u, x) = \sigma^B_{ux} = \xi(R_{ux}) = \xi(\delta^{A_R}(R_u, x)),$$

i takođe,

$$\begin{aligned}\xi(R_u)\in\tau^{A_N} &\Leftrightarrow\ \sigma_u^B\in\tau^{A_N}\ \Leftrightarrow\ \sigma_u^B\cap\tau^B\neq\emptyset\ \Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{B}]\!]\\ &\Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{A}]\!]\ \Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{A}_R]\!]\ \Leftrightarrow\ R_u\cap\tau^A\neq\emptyset\\ &\Leftrightarrow\ R_u\in\tau^{A_R},\end{aligned}$$

pa je ξ izomorfizam automata $\mathcal{A}_R$ na Nerodov automat $\mathcal{B}_N$ količničkog automata $\mathcal{B}=\mathcal{A}/\!\!/R$. □

Uočimo da nam je u prethodnoj teoremi bio potrebno da je kvazi-uređenje R slabo desno invarijantno samo da bi dokazali da je $\xi(R_u)\in\tau^{A_N}$ ako i samo ako je $R_u\in\tau^{A_R}$. Sve ostalo može se dokazati pod slabijom pretpostavkom da je R kvazi-uređenje.

U prethodnim razmatranjima radili smo sa kvazi-uređenjem R koje je slabo desno invarijantno. U strožem slučaju kada to kvazi-uređenje desno invarijantno, moguće je upoređivati veličinu odgovarajućih automata. To sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 5.2.3. *Neka je $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ nedeterministički automat i neka su R i S desno invarijantna kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$ takva da je $R\leqslant S$. Tada je automat $\mathcal{A}_S$ homomorfna slika automata $\mathcal{A}_R$.*

Shodno tome, $|\mathcal{A}_S|\leqslant|\mathcal{A}_R|$.

Dokaz: Napomenimo prvo da je $R\leqslant S$ ekvivalentno sa $R\circ S=S\circ R=S$, jer su R i S kvazi-uređenja.

Definišimo funkciju $\xi:A_R\to A_S$ sa $\xi(R_u)=S_u$, za svaki $u\in X^*$. Prvo dokazujemo da je ξ dobro definisana, tj. da ne zavisi od izbora predstavnika afterseta. Neka su $u,v\in X^*$ reči za koje je $R_u=R_v$. Na osnovu (4.6) i (5.11), indukcijom lako dokazujemo da je $R_w=\sigma_w^A\circ R$ i $S_w=\sigma_w^A\circ S$, za svako $w\in X^*$, odakle je

$$S_u=\sigma_u^A\circ S=\sigma_u^A\circ R\circ S=R_u\circ S=R_v\circ S=\sigma_v^A\circ R\circ S=\sigma_v^A\circ S=S_v.$$

Prema tome, ξ je dobro definisana funkcija. Jasno je da je ξ takođe surjektivna funkcija. Osim toga, jasno je da je $\delta^{A_S}(\xi(R_u),x)=\xi(\delta^{A_R}(R_u,x))$, za sve $u\in X^*$ i $x\in X$, i

$$\begin{aligned}\xi(R_u)\in\tau^{A_R} &\Leftrightarrow\ S_u\in\tau^{A_S}\ \Leftrightarrow\ S_u\cap\tau^A\neq\emptyset\ \Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{A}_S]\!]\ \Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{A}]\!]\\ &\Leftrightarrow\ u\in[\![\mathcal{A}_R]\!]\ \Leftrightarrow\ R_u\cap\tau^A\neq\emptyset\ \Leftrightarrow\ R_u\in\tau^{A_R},\end{aligned}$$

i dakle, ξ je is a homomorfzam iz $\mathcal{A}_R$ na $\mathcal{A}_S$ i $|\mathcal{A}_S|\leqslant|\mathcal{A}_R|$. □

Za dati automat $\mathcal{A}$ i slabo desno invarijantno kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$, automat $\mathcal{A}_R$ može se efektivno konstruisati postupkom koji je analogan postupku za konstrukciju Nerodovog automata.

Algoritam 5.2.4. (*Konstrukcija automata $\mathcal{A}_R$*) Ulaz algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A}=(A,X,\delta^A,\sigma^A,\tau^A)$ nad alfabetom X, i slabo desno invarijantno kvazi-uređenje R na $\mathcal{A}$, a izlaz je deterministički konačan automat $\mathcal{A}_R = (A_R, X, \delta^{A_R}, R_e, \tau^{A_R})$.

Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla prelaza* automata $\mathcal{A}_R$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza automata $\mathcal{A}_R$ konstruiše se induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je R_e, i mi stavljamo da je $T_0 = \{R_e\}$ i $s(R_e) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $R_e \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda R_e registrujemo kao završno stanje.

(A2) Posle $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list R_u u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor $R_{ux} = R_u \circ \delta_x^A$ i granu iz R_u u R_{ux} označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je R_{ux} skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je R_{ux} jednak nekom prethodno izračunatom skupu R_v, onda R_{ux} označavamo kao zatvoren čvor i stavljamo $s(R_{ux}) = s(R_v)$.
U suprotnom, stavljamo da je $s(R_{ux})$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $R_{ux} \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda R_{ux} registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_R$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_R$.

Primer 5.2.5. Razmotrimo još jednom automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ koji je ranije razmatran u Primerima 5.1.4. i 5.1.7.

Setimo se da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja automata $\mathcal{A}$ zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavnosti radi, neka je najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ označeno sa R, a najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje sa S. Pomoću Algoritama 4.3.5. i 4.3.13. dobijamo da je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

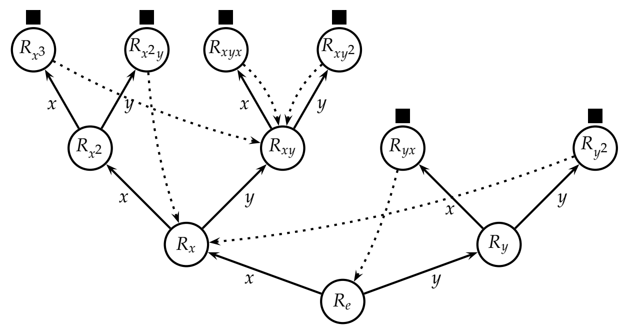
Najpre ćemo konstruisati automat $\mathcal{A}_R$, primenom Algoritma 5.2.4. Izračunavanje možemo pojednostaviti ako prvo izračunamo $\delta_x^A \circ R$ i $\delta_y^A \circ R$:

$$\delta_x^A \circ R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^A \circ R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

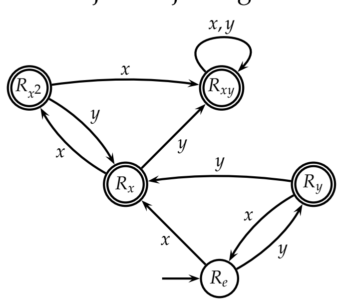
Nakon toga dobijamo sledeće:

$$\begin{array}{lll}
T_0: \; R_e = \sigma^A \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & s(R_e) = 1, & \\
T_1: \; R_x = R_e \circ (\delta_x^A \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & s(R_x) = 2, & R_x \in \tau^{A_R}, \\
 R_y = R_e \circ (\delta_y^A \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & s(R_y) = 3, & R_y \in \tau^{A_R}, \\
T_2: \; R_{x^2} = R_x \circ (\delta_x^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & s(R_{x^2}) = 4, & R_{x^2} \in \tau^{A_R}, \\
 R_{xy} = R_x \circ (\delta_y^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & s(R_{xy}) = 5, & R_{xy} \in \tau^{A_R}, \\
 R_{yx} = R_y \circ (\delta_x^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_e \; \blacksquare, & s(R_{yx}) = s(R_e) = 1, & \\
 R_{y^2} = R_y \circ (\delta_y^A \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R_x \; \blacksquare, & s(R_{y^2}) = s(R_x) = 2, & \\
T_3: \; R_{x^3} = R_{x^2} \circ (\delta_x^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R_{xy} \; \blacksquare, & s(R_{x^3}) = s(R_{xy}) = 5, & \\
 R_{x^2y} = R_{x^2} \circ (\delta_y^A \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R_x \; \blacksquare, & s(R_{x^2y}) = s(R_x) = 2, & \\
 R_{xyx} = R_{xy} \circ (\delta_x^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R_{xy} \; \blacksquare, & s(R_{xyx}) = s(R_{xy}) = 5, & \\
 R_{xy^2} = R_{xy} \circ (\delta_y^A \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R_{xy} \; \blacksquare, & s(R_{xy^2}) = s(R_{xy}) = 5. &
\end{array}$$

Kako su nakon ovog koraka svi listovi postali zatvoreni, konstrukcija stabla automata $\mathcal{A}_R$ je završena, i to stablo je prikazano na sledećoj slici:



Slepljivanjem listova sa odgovarajućim unutrašnjim čvorovima i označavanjem inicijalnog i završnih stanja dobijamo graf automata $\mathcal{A}_R$ prikazan sa



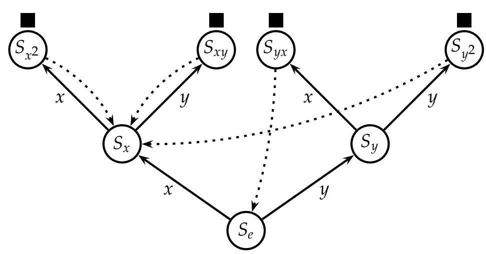
Sada ćemo ceo postupak ponoviti za najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje S i konstruisati odgovarajući deterministički automat $\mathcal{A}_S$. I u ovom slučaju prvo izračunavamo kompozicije $\delta_x^A \circ S$ i $\delta_y^A \circ S$:

$$\delta_x^A \circ S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_y^A \circ S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

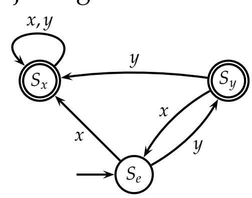
Zatim dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
T_0:\ & S_e = \sigma^A \circ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, && s(S_e) = 1, && \\
T_1:\ & S_x = S_e \circ (\delta_x^A \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, && s(S_x) = 2, && S_x \in \tau^{A_S}, \\
& S_y = S_e \circ (\delta_y^A \circ S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, && s(S_y) = 3, && S_y \in \tau^{A_S}, \\
T_2:\ & S_{x^2} = S_x \circ (\delta_x^A \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S_x \blacksquare, && s(S_{x^2}) = s(S_x) = 2, && \\
& S_{xy} = S_x \circ (\delta_y^A \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S_x \blacksquare, && s(S_{xy}) = s(S_x) = 2, && \\
& S_{yx} = S_y \circ (\delta_x^A \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_e \blacksquare, && s(S_{yx}) = s(S_e) = 1, && \\
& S_{y^2} = S_y \circ (\delta_y^A \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S_x \blacksquare, && s(S_{y^2}) = s(S_x) = 2. &&
\end{aligned}$$

Nakon ovog koraka svi listovi su postali zatvoreni, pa je konstrukcija stabla automata $\mathcal{A}_S$ završena, i to stablo je prikazano na sledećoj slici:



Kada listove slepimo sa odgovarajućim unutrašnjim čvorovima i označimo inicijalno i završna stanja, dobijamo graf automata $\mathcal{A}_S$ prikazan na sledećoj slici:



Kao što vidimo, ovaj primer pokazuje da ne samo sa aspekta primene u redukciji broja stanja, već i sa aspekta primene u determinizaciji, slabo desno invarijantna kvazi-uređenja mogu dati bolje rezultate od desno invarijantnih kvazi-uređenja. Osim toga, ovaj primer pokazuje i da slabo desno invarijantna kvazi-uređenja i desno invarijantna kvazi-uređenja generalno daju bolje rezultate u determinizaciji od konstrukcije Nerodovog automata, jer kao što smo videli u Primeru 5.1.7., Nerodov automata automata $\mathcal{A}$ ima 7 stanja.

Važno je primetiti i to da su svi aftersetovi kvazi-uređenja R i S međusobno različiti, što znači da R i S ne mogu da redukuju broj stanja automata $\mathcal{A}$, ali bez obzira na to, kada se primene u determinizaciji, ta kvazi-uređenja daju determinističke automate koji imaju manji broj stanja od onog koji daje standardna dostižna podskupovna konstrukcija.

Za razliku od ovog slučaja, u narednom primeru imamo slučaj kada najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje redukuje broj stanja automata, ali kada se primeni u determinizaciji ne dobija se manji automat od onog koji se dobija dostižnom podskupovnom konstrukcijom.

Primer 5.2.6. Razmotrimo još jednom automat $\mathcal{A}$ iz Primera 5.1.8. Najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje i najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ se poklapaju i predstavljeni su Bulovom matricom

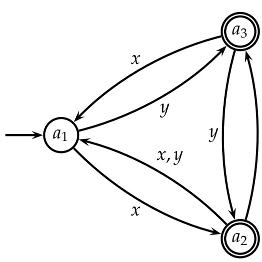
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kao što se vidi, ova matrica ima 4 različite vrste, što znači da odgovarajući količnički automat $\mathcal{A}/\!\!/R$ ima 4 stanja, odnosno, R redukuje broj stanja automata $\mathcal{A}$.

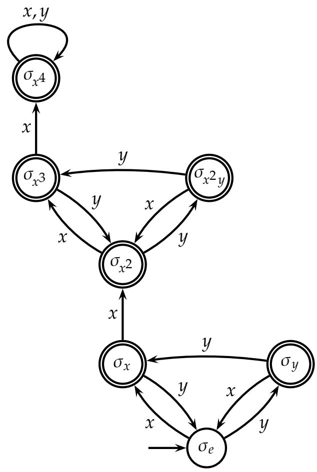
Sa druge strane, dobija se da je automat $\mathcal{A}_R$ izomorfan Nerodovom automatu $\mathcal{A}_N$, i prema tome, R ne daje manji deterministički automat od onoga koji se dobija dostižnom podskupovnom konstrukcijom.

Sledeći primer pokazuje da automat dobijen determinizacijom automata $\mathcal{A}$ pomoću najvećeg slabo desno invarijantnog kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$ ne mora biti minimalan.

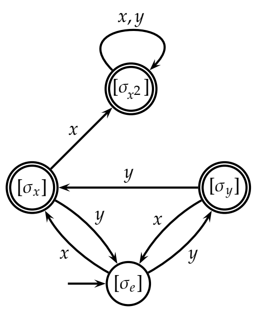
Primer 5.2.7. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Upotrebom Algoritama 4.3.5. i 4.3.13. dobija se da su i najveće desno invarijantno kvazi-uređenje i najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$ jednaki identičkoj relaciji. To znači da oba ova kvazi-uređenja određuju determinističke automate koji su izomorfni Nerodovom automatu $\mathcal{A}_N$ automata $\mathcal{A}$. Sa druge strane, koristeći Algoritam 5.1.6. dobijamo da je Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ deterministički automat sa 7 stanja koji se može predstaviti sledećim grafom:



Treba reći da ovaj deterministički automat nije minimalan. Upotrebom algoritma za minimizaciju tog determinističkog automata, ili nekog od kanonizacionih algoritama prikazanih u narednim odeljcima (vidi Primer 5.4.4.), dobijamo da minimalni deterministički automat ekvivalentan polaznom automatu $\mathcal{A}$ jeste deterministički automat sa 4 stanja zadat sledećim grafom:



Prema tome, ovaj primer pokazuje da se determinizacijom upotrebom najvećeg slabo desno invarijantnog kvazi-uređenja ne mora dobiti minimalni deterministički automat ekvivalentan automatu koji smo determinizovali.

Setimo se da smo automat $\mathcal{A}_R$ definisali za proizvoljnu relaciju R, nakon čega smo razmatrali situaciju kada je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje i dokazali da je u tom slučaju automat $\mathcal{A}_R$ ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. Prirodno se nameće pitanje: Šta će se desiti ako je R slabo levo invarijantno kvazi-uređenje. Imajući u vidu definicije slabo levo invarijantnog kvazi-uređenja i automata $\mathcal{A}_R$, na jednostavan način se možemo uveriti da u tom slučaju $\mathcal{A}_R$ nije ništa drugo do Nerodov automat od $\mathcal{A}$, što znači da u tom slučaju ne dobijamo nikakvu novu konstrukciju. Povrh toga, važi i sledeće:

Teorema 5.2.8. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat i R je slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je Nerodov automat količničkog automata $\mathcal{A}/\!\!/R$ izomorfan Nerodovom automatu od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Jednostavnosti radi, stavimo da je $B = A/\!\!/R$ i $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\!\!/R$, odnosno, neka je $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ količnički automat od $\mathcal{A}$ koji odgovara kvazi-uređenju R.

Najpre indukcijom po dužini reči dokazujemo da za svako $u \in X^*$ važi sledeće:

$$R_a \in \sigma_u^B \iff a \in \sigma_u^A, \text{ za svaki } a \in A. \tag{5.16}$$

Za proizvoljno $a \in A$ imamo da je

$$R_a \in \sigma_e^B \iff a \in \sigma^A \circ R \iff a \in \sigma^A \iff a \in \sigma_e^A,$$

što znači da (5.16) važi u slučaju kada je u prazna reč. Dalje, pretpostavimo da (5.16) važi za neku reč $u \in X^*$. Na osnovu (5.16) i naše polazne pretpostavke da je R slabo levo invarijantno kvazi-uređenje, za sve $x \in X$ i $a \in A$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} R_a \in \sigma_{ux}^B &\iff R_a \in \sigma_u^B \circ \delta_x^B \\ &\iff (\exists b \in A)(R_b \in \sigma_u^B \wedge (R_b, R_a) \in \delta_x^B) \\ &\iff (\exists b \in A)(b \in \sigma_u^A \wedge (b, a) \in R \circ \delta_x^A \circ R) \\ &\iff a \in \sigma_u^A \circ R \circ \delta_x^A \circ R \iff a \in \sigma_u^A \circ \delta_x^A \circ R \\ &\iff a \in \sigma_{ux}^A \circ R \iff a \in \sigma_{ux}^A, \end{aligned}$$

što upotpunjuje dokaz za (5.16).

Definišimo sada funkciju $\xi : B_N \to A_N$ sa $\xi(\sigma_u^B) = \sigma_u^A$, za svaki $u \in X^*$. Za proizvoljne $u, v \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned} \sigma_u^B = \sigma_v^B &\iff (\forall a \in A)(R_a \in \sigma_u^B \Leftrightarrow R_a \in \sigma_v^B) \\ &\iff (\forall a \in A)(a \in \sigma_u^A \Leftrightarrow a \in \sigma_v^A) \iff \sigma_u^A = \sigma_v^A, \end{aligned}$$

što znači da je ξ dobro definisana i injektivna funkcija. Povrh toga, ξ je surjektivna, i stoga, ξ je bijektivna funkcija. Lako se proverava da je ξ homomorfizam, i prema tome, ξ je izomorfizam iz Nerodovog automata od $\mathcal{B}$ na Nerodov automat od $\mathcal{A}$. $\square$

Kao što smo ranije rekli, kada je R slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na automatu $\mathcal{A}$, tada je $\mathcal{A}_R$ ništa drugo do Nerodov automat od $\mathcal{A}$, i u tom slučaju ne dobijamo nikakvu novu konstrukciju. Međutim, sada ćemo pokazati da slabo levo invarijantna kvazi-uređenja dobro rade sa jednom drugom konstrukcijom i mogu biti veoma korisne u determinizaciji reverznog automata od $\mathcal{A}$.

Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i relacija S na A. Za svako $u \in X^*$ podskup S^u od A definišemo induktivno, na sledeći način: za praznu reč e

stavljamo da je

$$S^e = S \circ \tau^A, \tag{5.17}$$

a za proizvoljne $u \in X^*$ i $x \in X$ stavljamo

$$S^{xu} = S \circ \delta_x^A \circ S^u \tag{5.18}$$

Jasno, ako je $u = x_1 \dots x_n$, gde su $x_1, \dots, x_n \in X$, tada

$$S^u = S \circ \delta_{x_1}^A \circ S \circ \dots \circ \delta_{x_n}^A \circ S \circ \tau^A. \tag{5.19}$$

Stavimo sada da je $A^S = \{S^u \mid u \in X^*\}$, i definišimo funkciju $\delta^{A^S} : A^S \times X \to A^S$ sa

$$\delta^{A^S}(S^u, x) = S^{xu}, \tag{5.20}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$, i podskup τ^{A^S} od A^S sa

$$\tau^{A^S} = \{\alpha \in A^S \mid \sigma^A \cap \alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha \in A^S \mid \sigma^A \circ \alpha = 1\}. \tag{5.21}$$

Ako je $S^u = S^v$, za neke $u, v \in X^*$, tada za proizvoljno $x \in X$ imamo da je

$$\delta^{A^S}(S^u, x) = S^{xu} = S \circ \delta_x^A \circ S^u = S \circ \delta_x^A \circ S^v = S^{xv} = \delta^{A^S}(S^v, x),$$

što znači da je δ^{A^S} dobro definisana funkcija. Dakle, $\mathcal{A}^S = (A^S, X, \delta^{A^S}, S^e, \tau^{A^S})$ je dobro definisan deterministički automat.

Sada dokazujemo da važi sledeće.

Teorema 5.2.9. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat i S je slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}^S = (A^S, X, \delta^{A^S}, S^e, \tau^{A^S})$ dostižan deterministički automat ekvivalentan reverznom automatu od $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Razmotrimo proizvoljnu reč $u = x_1 \dots x_n$, gde su $x_1, \dots, x_n \in X$. Na osnovu (4.34), indukcijom dobijamo da je

$$\sigma^A \circ S \circ \delta_{x_n}^A \circ S \circ \cdots \circ \delta_{x_1}^A \circ S = \sigma_{x_n \dots x_1}^A,$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} u \in [\![\mathcal{A}^S]\!] &\Leftrightarrow \delta^{A^S}(S^e, u) \in \tau^{A^S} \Leftrightarrow S^{\bar{u}} \in \tau^{A^S} \Leftrightarrow \sigma^A \circ S^{\bar{u}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma^A \circ (S \circ \delta_{x_n}^A \circ S \circ \dots \circ \delta_{x_1}^A \circ S \circ \tau^A) = 1 \\ &\Leftrightarrow (\sigma^A \circ S \circ \delta_{x_n}^A \circ S \circ \dots \circ \delta_{x_1}^A \circ S) \circ \tau^A = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_{x_n \dots x_1}^A \circ \tau^A = 1 \Leftrightarrow \sigma_{\bar{u}}^A \circ \tau^A = 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{u} \in [\![\mathcal{A}]\!] \Leftrightarrow u \in [\![\overline{\mathcal{A}}]\!]. \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$e \in [\![\mathcal{A}^S]\!] \;\Leftrightarrow\; S^e \in \tau^{A^S} \;\Leftrightarrow\; \sigma^A \circ S^e = 1 \;\Leftrightarrow\; \sigma^A \circ S \circ \tau^A = 1$$
$$\Leftrightarrow\; \sigma^A \circ \tau^A = 1 \;\Leftrightarrow\; e \in [\![\mathcal{A}]\!] \;\Leftrightarrow\; e \in [\![\overline{\mathcal{A}}]\!].$$

Prema tome, $[\![\mathcal{A}^S]\!] = [\![\overline{\mathcal{A}}]\!]$, tj., automat $\mathcal{A}^S$ je ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{A}}$. □

Sledeće dve teoreme se mogu dokazati slično kao Teoreme 5.2.2. i 5.2.3., pa će njihovi dokazi biti izostavljeni.

Teorema 5.2.10. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat i S je slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je automat $\mathcal{A}^S$ izomorfan reverznom Nerodovom automatu količničkog automata $\mathcal{A}/\!\!/S$.*

Teorema 5.2.11. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat i neka su S i T levo invarijantna kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$ takva da je $S \leqslant T$. Tada je automat $\mathcal{A}^T$ homomorfna slika automata $\mathcal{A}^S$.*

Efektivni postupak za konstrukciju automata $\mathcal{A}^S$, za dato slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na automatu $\mathcal{A}$, sličan je postupku za konstrukciju reverznog Nerodovog automata i prikazan je u nastavku.

Algoritam 5.2.12. (*Konstrukcija automata* $\mathcal{A}^S$) Ulaz algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad alfabetom X i slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$, a izlaz je deterministički konačni automat $\mathcal{A}^S = (A^S, X, \delta^{A^S}, S^e, \tau^{A^S})$.

Postupak se sastoji u konstrukciji *stabla prelaza* automata $\mathcal{A}^S$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza automata $\mathcal{A}^S$ konstruiše se induktivno, na sledeći način:

(A1) Koren stabla je S^e, i mi stavljamo da je $T_0 = \{S^e\}$ i $s(S^e) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $\sigma^A \cap S^e \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda S^e registrujemo kao završno stanje.

(A2) Nakon $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni ili kao 'zatvoreni' ili kao 'nezatvoreni'. Značenje ta dva termina biće razjašnjeno u nastavku.

(A3) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list S^u u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor $S^{xu} = \delta_x^A \circ S^u$ i granu iz S^u u S^{xu} označenu sa x. Istovremeno, proveravamo da li je S^{xu} skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je S^{xu} jednak nekom prethodno izračunatom skupu S^v, onda S^{xu} označavamo kao zatvoren čvor i stavljamo $s(S^{xu}) = s(S^v)$.
U suprotnom, stavljamo da je $s(S^{xu})$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $\sigma^A \cap S^{xu} \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda S^{xu} registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A4) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}^S$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}^S$.

Primer 5.2.13. Vratimo se na automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ iz Primera 5.1.11. Setimo se da su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Najpre ćemo izračunati najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Kako je

$$\sigma_e^A = \sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma_x^A = \sigma_e^A \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_y^A = \sigma_e^A \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_{x^2}^A = \sigma_x^A \circ \delta_x^A = \sigma_y^A \ \blacksquare, \ \sigma_{xy}^A = \sigma_x^A \circ \delta_y^A = \sigma_e^A \ \blacksquare, \ \sigma_{yx}^A = \sigma_y^A \circ \delta_x^A = \sigma_y^A \ \blacksquare, \ \sigma_{y^2}^A = \sigma_y^A \circ \delta_y^A = \sigma_y^A \ \blacksquare,$$

to je $A_N = \{\sigma_e^A, \sigma_x^A, \sigma_y^A\}$, i iz

$$\sigma_e^A \backslash \sigma_e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma_x^A \backslash \sigma_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma_y^A \backslash \sigma_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dobijamo da se najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ može izraziti sa

$$S = (\sigma_e^A \backslash \sigma_e^A) \cap (\sigma_x^A \backslash \sigma_x^A) \cap (\sigma_y^A \backslash \sigma_y^A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada prelazimo na konstrukciju automata $\mathcal{A}^S$. Najpre izračunavamo

$$S \circ \delta_x^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S \circ \delta_y^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a zatim dobijamo da je

$$T_0: \ S^e = S \circ \tau^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad s(S^e) = 1,$$

$$T_1: \ S^x = (S \circ \delta_x^A) \circ S^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s(S^x) = 2, \quad S^x \in \tau^{A^S},$$

$$S^y = (S \circ \delta_y^A) \circ S^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s(S^y) = 3, \quad S^y \in \tau^{A^S},$$

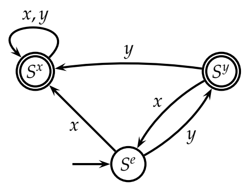
$$T_2: \ S^{x^2} = (S \circ \delta_x^A) \circ S^x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S^x \ \blacksquare, \qquad s(S^{x^2}) = s(S^x) = 2,$$

$$S^{yx} = (S \circ \delta_y^A) \circ S^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S^x \ \blacksquare, \qquad s(S^{yx}) = s(S^x) = 2,$$

$$S^{xy} = (S \circ \delta_x^A) \circ S^y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = S^e \ \blacksquare, \qquad s(S^{xy}) = s(S^e) = 1,$$

$$S^{y^2} = (S \circ \delta_y^A) \circ S^y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = S^x \ \blacksquare, \qquad s(S^{y^2}) = s(S^x) = 2.$$

Kako su svi listovi postali zatvoreni, stablo automata $\mathcal{A}^S$ nema novih čvorova i dobijamo da je automat $\mathcal{A}^S$ zadat sledećim grafom:



5.3. Determinizacija konstrukcijom dečjeg automata

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i neka je R relacija na A. Za svako $u \in X^*$ definišimo $(m+1)$-torku R_u^c sa

$$R_u^c = (R_{ux_1}, \dots, R_{ux_m}, R_u \circ \tau^A) = (R_u \circ \delta_{x_1}^A, \dots, R_u \circ \delta_{x_m}^A, R_u \circ \tau^A),$$

gde su $R_u, R_{ux_1}, \dots, R_{ux_m}$ skupovi definisani formulama (5.9) i (5.10). Dalje, stavimo da je $A_R^c = \{R_u^c \mid u \in X^*\}$, i definišimo funkciju $\delta^{A_R^c} : A_R^c \times X \to A_R^c$ sa

$$\delta^{A_R^c}(R_u^c, x) = R_{ux}^c, \tag{5.22}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$, i podskup $\tau^{A_{R^c}}$ od A_R^c sa

$$\tau^{A_R^c} = \{R_u^c \in A_R^c \mid R_u \cap \tau^A \neq \emptyset\} = \{R_u^c \in A_R^c \mid R_u \circ \tau^A = 1\}. \tag{5.23}$$

Dokazujemo da važi sledeće:

Teorema 5.3.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i neka je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}_R^c = (A_R^c, X, \delta^{A_R^c}, R_e^c, \tau^{A_R^c})$ dostižni deterministički konačni automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $R_u^c = R_v^c$, za neke $u, v \in X^*$. To znači da je $R_{ux_i} = R_{vx_i}$, za svako $i \in \{1, \dots, m\}$, i $R_u \circ \tau^A = R_v \circ \tau^A$. Za proizvoljno $x \in X$ imamo da je $R_{ux} = R_{vx}$, odakle je

$$R_{uxx_i} = R_{ux} \circ \delta_{x_i}^A \circ R = R_{vx} \circ \delta_{x_i}^A \circ R = R_{vxx_i},$$

za svako $i \in \{1, \dots, m\}$, i takođe, $R_{ux} \circ \tau^A = R_{vx} \circ \tau^A$. Prema tome, $R_{ux}^c = R_{vx}^c$, pa je

$$\delta^{A_R^c}(R_u^c, x) = R_{ux}^c = R_{vx}^c = \delta^{A_R^c}(R_v^c, x),$$

što znači da je $\delta^{A_R^c}$ dobro definisana funkcija. Jasno, $\tau^{A_R^c}$ je takođe dobro definisan skup, i dakle, $\mathcal{A}_R^c$ je dostižan deterministički konačni automat.

Dalje, za proizvoljno $u \in X^*$ imamo da je

$$\begin{aligned} u \in [\![\mathcal{A}_R^c]\!] \;&\Leftrightarrow\; \delta^{A_R^c}(R_e^c, u) \in \tau^{A_R^c} \;\Leftrightarrow\; R_u^c \in \tau^{A_R^c} \\ &\Leftrightarrow\; R_u \cap \tau^A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; u \in [\![\mathcal{A}_R]\!] \;\Leftrightarrow\; u \in [\![\mathcal{A}]\!], \end{aligned}$$

čime smo dokazali da je automat $[\![\mathcal{A}_R^c]\!]$ ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. □

Uočimo da je prvih m koordinata u $(m+1)$-torci R_u^c čine deca čvora R_u u stablu prelaza automata $\mathcal{A}_R$ (videti Algoritam 5.2.4.), a poslednja koordinata je Bulova promenljiva koja na kaže da li je R_u završno stanje u automatu $\mathcal{A}_R$. Iz tog razloga automat $\mathcal{A}_R^c$ ćemo nazivati *dečji automat* automata $\mathcal{A}_R$. Ukoliko je R identička relacija na A, onda je $\mathcal{A}_R^c$ dečji automat Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ od $\mathcal{A}$, on će biti označavan sa $\mathcal{A}_N^c = (A_N^c, X, \delta^{A_N^c}, \sigma_e^c, \tau^{A_N^c})$.

Teorema 5.3.2. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i neka su R i S desno invarijantna kvazi-uređenja na $\mathcal{A}$ takva da je $R \leqslant S$. Tada je automat $\mathcal{A}_S^c$ homomorfna slika automata $\mathcal{A}_R^c$, i shodno tome, $|\mathcal{A}_S^c| \leqslant |\mathcal{A}_R^c|$.*

Dokaz: Ova teorema se može dokazati na analogan način kao Teorema 5.2.3., pa će njen dokaz biti izostavljen. □

Teorema 5.3.3. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i neka je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je automat $\mathcal{A}_R^c$ izomorfan automatu $\mathcal{B}_N^c$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{A} /\!\!/ R$ količnički automat od $\mathcal{A}$ u odnosu na R.*

Dokaz: Definišimo funkciju $\xi : A_R^c \to B_N^c$ sa

$$\xi(R_u^c) = \sigma_u^{B,c} = (\sigma_{ux_1}^B, \dots, \sigma_{ux_m}^B, \sigma_u^B \circ \tau^B),$$

za svako $u \in X^*$. Kao u dokazu Teoreme 5.2.2. dobijamo da $R_a \in \sigma_u^B$ ako i samo ako je $a \in R_u$, za sve $u \in X^*$ i $a \in A$, i odatle sledi da je

$$\begin{aligned} R_{ux_i} = R_{vx_i} &\Leftrightarrow (\forall a \in A)(a \in R_{ux_i} \Leftrightarrow a \in R_{vx_i}) \\ &\Leftrightarrow (\forall a \in A)(R_a \in \sigma^B_{ux_i} \Leftrightarrow R_a \in \sigma^B_{vx_i}) \Leftrightarrow \sigma^B_{ux_i} = \sigma^B_{vx_i}, \end{aligned}$$

i takođe,

$$\begin{aligned} R_u \circ \tau^A = R_v \circ \tau^A &\Leftrightarrow \big(u \in [\![\mathcal{A}_R]\!] \Leftrightarrow v \in [\![\mathcal{A}_R]\!]\big) \Leftrightarrow \big(u \in [\![\mathcal{A}]\!] \Leftrightarrow v \in [\![\mathcal{A}]\!]\big) \\ &\Leftrightarrow \big(u \in [\![\mathcal{B}]\!] \Leftrightarrow v \in [\![\mathcal{B}]\!]\big) \Leftrightarrow \big(u \in [\![\mathcal{B}_N]\!] \Leftrightarrow v \in [\![\mathcal{B}_N]\!]\big) \\ &\Leftrightarrow \sigma^B_u \circ \tau^B = \sigma^B_v \circ \tau^B, \end{aligned}$$

za sve $u,v \in X^*$ i $x_i \in X$, i prema tome, $R^c_u = R^c_v$ ako i samo ako je $\sigma^{B,c}_u = \sigma^{B,c}_v$. To znači da je ξ dobro definisana i injektivna funkcija. Jasno je da je ξ takođe i surjektivna, i može se jednostavno proveriti da je homomorfizam. Dakle, ξ je izomorfizam sa $\mathcal{A}^c_R$ na $\mathcal{B}^c_N$. □

Teorema 5.3.4. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički konačni automat nad alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i neka je R slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je automat $\mathcal{A}^c_R$ homomorfna slika i automata $\mathcal{A}_R$ i automata $\mathcal{A}^c_N$, i shodno tome, $|\mathcal{A}^c_R| \leqslant |\mathcal{A}_R|$ i $|\mathcal{A}^c_R| \leqslant |\mathcal{A}^c_N|$.*

Dokaz: Definišimo funkciju $\xi : A_R \to A^c_R$ sa $\xi(R_u) = R^c_u$, za svako $u \in X^*$. Ako su $u,v \in X^*$ reči takve da je $R_u = R_v$, tada je

$$R^c_u = (R_u \circ \delta^A_{x_1}, \dots, R_u \circ \delta^A_{x_m}, R_u \circ \tau^A) = (R_v \circ \delta^A_{x_1}, \dots, R_v \circ \delta^A_{x_m}, R_v \circ \tau^A) = R^c_v,$$

odakle sledi da je ξ dobro definisana funkcija. Jasno je da je ξ surjekcija.

Dalje, za proizvoljne $u \in X^*$ i $x \in X$ imamo da je

$$\xi(\delta^{A_R}(R_u, x)) = \xi(R_{ux}) = R^c_{ux} = \delta^{A^c_R}(R^c_u, x) = \delta^{A^c_R}(\xi(R_u), x),$$

što znači da je ξ homomorfizam iz $\mathcal{A}_R$ na $\mathcal{A}^c_R$, i dakle, automat $\mathcal{A}^c_R$ je homomorfna slika automata $\mathcal{A}_R$.

Sa druge strane, automat $\mathcal{A}^c_N$ je izomorfan sa $\mathcal{A}^c_\Delta$, gde je Δ identička relacija na A, pa prema Teoremi 5.3.2. imamo da je $\mathcal{A}^c_R$ homomorfna slika od $\mathcal{A}^c_N$. □

Sada dajemo efektivan postupak za konstrukciju dečjeg automata $\mathcal{A}^c_R$.

Algoritam 5.3.5. (*Konstrukcija dečjeg automata $\mathcal{A}^c_R$*) Ulaz algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad konačnim alfabetom $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i relacija R na A, a izlaz je dečji automat $\mathcal{A}^c_R = (A^c_R, X, \delta^{A^c_R}, R^c_e, \tau^{A^c_R})$.

Postupak se sastoji iz simultane konstrukcije stabla prelaza T automata $\mathcal{A}_R$ i grafa G automata $\mathcal{A}^c_R$ direktno iz $\mathcal{A}$. Osim pokazivača $s(\cdot)$ koji smo koristili u Algoritmu 5.2.4., ovde koristimo i pokazivač $t(\cdot)$ koji čvorovima grafa koji gradimo pridružuje odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza automata $\mathcal{A}_R$ i graf automata $\mathcal{A}^c_R$ konstruišu se na sledeći način:

(A1) Stablo prelaza T automata $\mathcal{A}_R$ konstruišemo koristeći Algoritam 5.2.4.

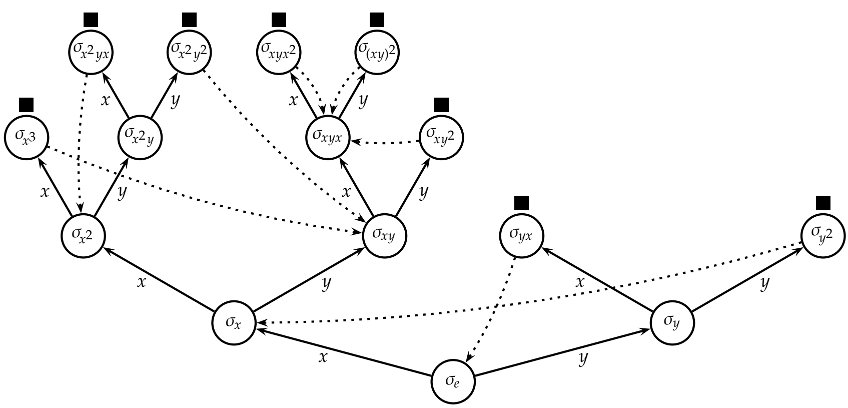
(A2) Svakom nezatvorenom čvoru R_u stabla T pridružujemo čvor R_u^c grafa G na sledeći način: Kada su formirana sva deca $R_{ux_1},\dots,R_{ux_m}$ čvora R_u u stablu T, onda formiramo čvor $R_u^c = (R_{ux_1},\dots,R_{ux_m}, R_u\circ\tau^A)$ u grafu G. Istovremeno, proveravamo da li R_u^c jeste $(m+1)$-torka koja je već bila konstruisana. Ako je to tačno, ako je R_u^c jednako nakom ranije izračunatom R_v^c, tada čvor R_u^c označavamo kao zatvoren i stavljamo $t(R_u^c) = t(R_v^c)$.
U suprotnom, stavljamo da je $t(R_u^c)$ naredni prirodan broj koji nije bio korišćen kao vrednost pokazivača $t(\cdot)$ i proveravamo da li je $R_u\cap\tau^A\neq\emptyset$, i ako je to tačno, onda R_u^c registrujemo kao završno stanje.

(A3) Za svaki nezatvoreni čvor R_u^c grafa G i svako $x\in X$, ako je R_v nezatvoreni čvor u stablu T takav da je $s(R_{ux}) = s(R_v)$, u grafu G dodajemo granu iz R_u^c u R_v^c označenu sa x.

(A4) Kada je graf G konstruisan, slepljujemo zatvorene čvorove sa nezatvorenim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača $t(\cdot)$ i brišemo oznake za zatvorenost. Dijagram koji je dobijen na takav način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_R^c$.

Primer 5.3.6. Vratimo se na automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ koji smo razmatrali u Primerima 5.1.4., 5.1.7. i 5.2.5. i konstruišimo dečji automat Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ automata $\mathcal{A}$.

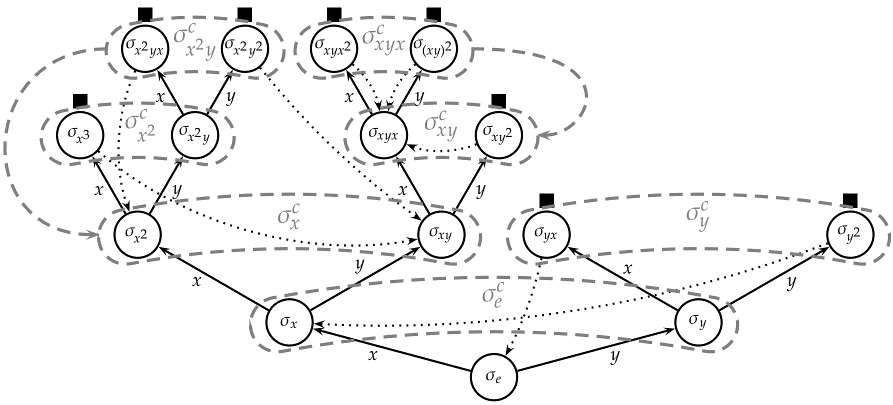
Setimo se da je stablo prelaza Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ predstavljeno sa



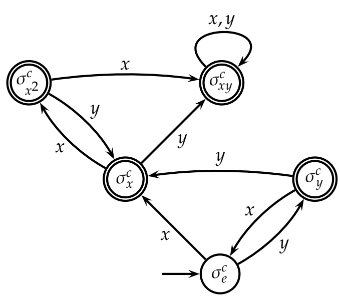
Prema tome, simultanom konstrukcijom stabla Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ i grafa njegovog dečjeg automata $\mathcal{A}_N^c$ dobijamo sledeće:

$$
\begin{array}{lll}
\sigma_e^c = (\sigma_x,\sigma_y,0), & t(\sigma_e^c) = 1, & \\
\sigma_x^c = (\sigma_{x^2},\sigma_{xy},1), & t(\sigma_x^c) = 2, & \sigma_x^c\in\tau^{A_N^c}, \\
\sigma_y^c = (\sigma_{yx},\sigma_{y^2},1) = (\sigma_e,\sigma_x,1), & t(\sigma_y^c) = 3, & \sigma_y^c\in\tau^{A_N^c}, \\
\sigma_{x^2}^c = (\sigma_{x^3},\sigma_{x^2y},1) = (\sigma_{xy},\sigma_{x^2y},1), & t(\sigma_{x^2}^c) = 4, & \sigma_{x^2}^c\in\tau^{A_N^c}, \\
\sigma_{xy}^c = (\sigma_{xyx},\sigma_{xy^2},1) = (\sigma_{xyx},\sigma_{xyx},1), & t(\sigma_{xy}^c) = 5, & \sigma_{xy}^c\in\tau^{A_N^c}, \\
\sigma_{x^2y}^c = (\sigma_{x^2yx},\sigma_{x^2y^2},1) = (\sigma_{x^2},\sigma_{xy},1) = \sigma_x^c, & t(\sigma_{x^2y}^c) = t(\sigma_x^c) = 2, & \\
\sigma_{xyx}^c = (\sigma_{xyx^2},\sigma_{(xy)^2},1) = (\sigma_{xyx},\sigma_{xyx},1) = \sigma_{xy}^c, & t(\sigma_{xyx}^c) = t(\sigma_{xy}^c) = 5. &
\end{array}
$$

Ovo se grafički može predstaviti na sledeći način:



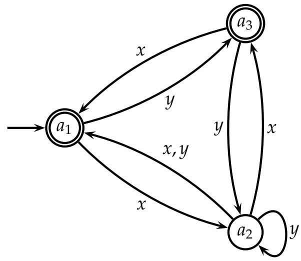
Slepljivanjem zatvorenih čvorova sa nezatvorenim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača $t(\cdot)$, brisanjem oznaka za zatvorenost, i dodavanjem oznaka za inicijalno i završna stanja, dobijamo graf dečjeg automata $\mathcal{A}_N^c$ čiji grafički prikaz je sledeći:



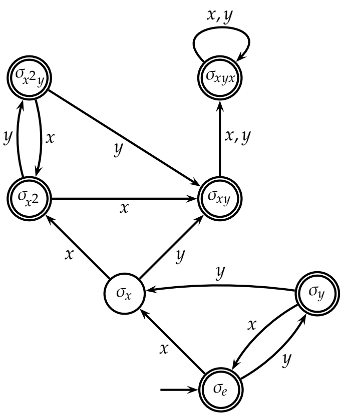
Dakle, dečji automat $\mathcal{A}_N^c$ ima 2 stanja manje od odgovarajućeg Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$. Evidentno, automat $\mathcal{A}_N^c$ je izomorfan automatu $\mathcal{A}_R$, gde je R najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ (videti Primer 5.2.5.).

Ako bi istu proceduru sproveli za najveće desno invarijantno kvazi-uređenje R i najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$, dobili bi da je dečji automat $\mathcal{A}_R^c$ izomorfan sa $\mathcal{A}_R$, i $\mathcal{A}_S^c$ izomorfan sa $\mathcal{A}_S$. To znači da u tim slučajevima konstrukcija dečjeg automata ne dovodi do smanjenja broja stanja determinističkog automata koji konstruišemo.

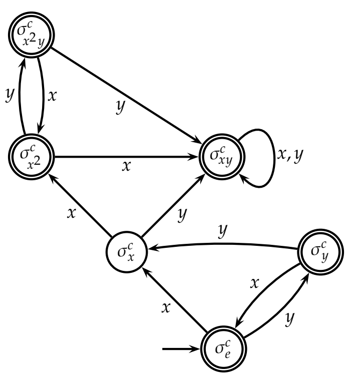
Primer 5.3.7. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat nad dvoelementnim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Primenom Algoritma 4.3.5. dobija se da je najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$ (kao i najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$) jednako identičkoj relaciji, tako da je automat $\mathcal{A}_S$ izomorfan Nerodovom automatu $\mathcal{A}_N$ koji je ima 7 stanja i predstavljen je sledećim grafom:

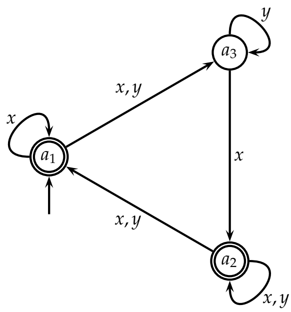


Sa druge strane, primenom algoritma za konstrukciju dečjeg automata dobijamo da dečji automat $\mathcal{A}_N^c$ Nerodovog automata $\mathcal{A}_N$ (a time i dečji automat od $\mathcal{A}_S$) ima 6 stanja i predstavljen je sledećim grafom:

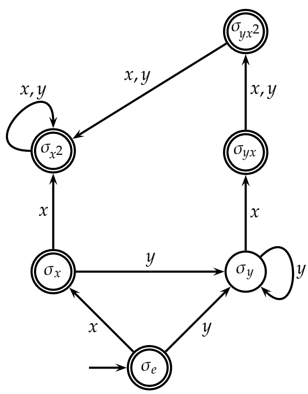


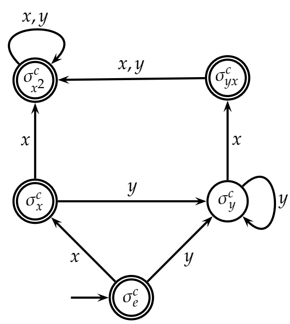
Dakle, ovaj primer pokazuje da konstrukcija dečjeg automata može popraviti performanse prethodno razmatranih determinizacionih metoda.

Primer 5.3.8. Razmotrimo sada automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Upotrebom algoritama za konstrukciju Nerodovog automata i njegovog dečjeg automata dobija se da su Nerodov automat $\mathcal{A}_N$ automata $\mathcal{A}$ i njegov dečji automat $\mathcal{A}_N^c$ predstavljeni sledećim grafovima:

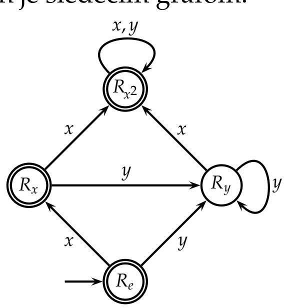




Sa druge strane, najveće slabo desno invarijantno kvazi-uređenje i najveće desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$ se poklapaju i predstavljeni su matricom

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a automat $\mathcal{A}_R$ predstavljen je sledećim grafom:



Konačno, konstrukcijom dečjeg automata $\mathcal{A}_R^c$ dobijamo da je $\mathcal{A}_R^c$ izomorfan sa $\mathcal{A}_R$, pa i u ovom slučaju ta konstrukcija ne daje nikakvo poboljšanje.

Dakle, ovaj primer je pokazao da determinizacija automata $\mathcal{A}$ pomoću najvećeg slabo desno invarijantnog kvazi-uređenja ili najvećeg desno invarijantnog kvazi-uređenja može dati bolje rezultate od konstrukcije dečjeg automata Nerodovog automata od $\mathcal{A}$ (za razliku od prethodnog primera u kome je situacija bila obrnuta).

5.4. Kanonizacioni metod Brzozovskog

U Odeljku 5.1. uveli smo koncept reverznog Nerodovog automata za nedeterminističke automate. Za deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$, reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}} = (A_{\overline{N}}, X, \delta^{A_{\overline{N}}}, \tau_e^A, \tau^{A_{\overline{N}}})$ se definiše na potpuno isti način, jedina razlika je u tome što se skup završnih stanja može predstaviti na jednostavniji način, sa

$$\tau^{A_{\overline{N}}} = \{\alpha \in A_{\overline{N}} \mid a_0 \in \alpha\}. \tag{5.24}$$

Sledeća teorema prikazuje jedno veoma važno svojstvo reverznog Nerodovog automata dostižnog determinističkog automata.

Teorema 5.4.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ dostižan deterministički automat. Tada je reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{A}}$.*

Dokaz: Već smo ranije napomenuli da je $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ deterministički automat ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{A}}$, pa ostaje da se dokaže njegova minimalnost. Prema Posledici 3.3.8. i Teoremi 3.4.1., dovoljno je dokazati da su svi desni jezici pridruženi stanjima automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ međusobno različiti.

Jednostavnosti radi, stavićemo da je $A_{\overline{N}} = B$, a desni jezik stanja $\tau_u^A \in B$, za $u \in X^*$, označićemo sa $\tau_{\tau_u}^B$ (tj., izostavljamo gornji indeks 'A' kod τ_u^A). Neka su sada $\tau_u^A, \tau_v^A \in B$, za $u, v \in X^*$, dva različita stanja automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$. Tada postoji stanje $a \in A$ tako da a pripada jednom od skupova τ_u^A i τ_v^A, a ne pripada drugom od njih. Kako je $\mathcal{A}$ dostižan automat, to postoji $w \in X^*$ tako da je $a = \delta^A(a_0, w)$, pa imamo da je

$$\begin{aligned}
\overline{w} \in \tau_{\tau_u}^B \;&\Leftrightarrow\; \delta^B(\tau_u, \overline{w})) \in \tau^B \;\Leftrightarrow\; \tau_{wu} \in \tau^B \;\Leftrightarrow\; a_0 \in \tau_{wu} \;\Leftrightarrow\; wu \in \tau_{a_0} \\
&\Leftrightarrow\; \delta^A(a_0, wu) \in \tau^A \;\Leftrightarrow\; \delta^A(\delta^A(a_0, w), u) \in \tau^A \;\Leftrightarrow\; \delta^A(a, u) \in \tau^A \\
&\Leftrightarrow\; a \in \tau_u^A.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\overline{w} \in \tau_{\tau_u}^B$ ako i samo ako je $a \in \tau_u^A$, i na potpuno isti način dobijamo da je $\overline{w} \in \tau_{\tau_v}^B$ ako i samo ako je $a \in \tau_u^A$. Kako, prema pretpostavci, stanje a pripada jednom od skupova τ_u^A i τ_v^A, a ne pripada drugom od njih, to zaključujemo da reč $\overline{w}$ pripada jednom od jezika $\tau^B_{\tau_u}$ i $\tau^B_{\tau_v}$, a ne pripada drugom od njih, što znači da su desni jezici $\tau^B_{\tau_u}$ i $\tau^B_{\tau_v}$ pridruženi stanjima τ^A_u i τ^A_v automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ međusobno različiti. Kako je to upravo ono što je trebalo dokazati, to je dokaz teoreme završen. □

Neka je $\mathcal{A}$ nedeterministički automat. *Automat Brzozovskog* (J. Brzozowski) automata $\mathcal{A}$, u oznaci $\mathcal{A}_B$, je deterministički automat dobijen iz $\mathcal{A}$ primenom konstrukcije reverznog Nerodovog automata dva puta, tj.,

$$\mathcal{A}_B = \left(\mathcal{A}_{\overline{N}}\right)_{\overline{N}} = \left(\overline{(\overline{\mathcal{A}})_N}\right)_N.$$

Glavni rezultat ovog odeljka je sledeća teorema.

Teorema 5.4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljan nedeterministički automat. Automat Brzozovskog $\mathcal{A}_B$ je minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: U Odeljku 5.1. smo videli da je reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}} = (\overline{\mathcal{A}})_N$ deterministički automat ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{A}}$, a njegov reverzni Nerodov automat $\left(\mathcal{A}_{\overline{N}}\right)_{\overline{N}}$ je deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Sa druge strane, na osnovu Teoreme 5.4.1. sledi da je automat Brzozovskog $\mathcal{A}_B = \left(\mathcal{A}_{\overline{N}}\right)_{\overline{N}}$ minimalan deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. □

Prethodna teorema nam daje vrlo jasna uputstva o tome kako se direktno iz datog nedeterminističkog automata $\mathcal{A}$ može konstruisati njemu ekvivalentan minimalni deterministički automat. Potpunosti radi, ta uputstva formalno izkazujemo sledećim algoritmom.

Algoritam 5.4.3. (*Kanonizacioni algoritam Brzozovskog*) Ulaz ovog algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A}$ nad alfabetom X, a izlaz je automat Brzozovskog $\mathcal{A}_B$, tj., minimalni deterministički konačni automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Konstrukcija automata Brzozovskog $\mathcal{A}_B$ vrši se u dva koraka:

(A1) Koristeći Algoritam 5.1.10. konstruišemo reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ automata $\mathcal{A}$.

(A2) Ponovo koristeći Algoritam 5.1.10., konstruišemo reverzni Nerodov automat automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ konstruisanog u (A1). Tako dobijeni automat je automat Brzozovskog $\mathcal{A}_B$.

Funkcionisanje ovog algoritma demonstriraju sledeća dva primera.

Primer 5.4.4. Razmotrimo još jednom automat iz Primera 5.2.7. Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta^A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta^A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruisaćemo automat Brzozovskog od $\mathcal{A}$, i stoga najpre krećemo sa konstrukcijom reverznog Nerodovog automata od $\mathcal{A}$.

$$T_0: \ \tau_e^A = \tau^A = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad s(\tau_e^A) = 1,$$

$$T_1: \ \tau_x^A = \delta_x^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \tau_y^A = \delta_y^A \circ \tau_e^A = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$s(\tau_x^A) = 2, \quad \tau_x^A \in \tau^{A_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_y^A) = 3, \quad \tau_y^A \in \tau^{A_{\overline{N}}},$$

$$T_2: \ \tau_{x^2}^A = \delta_x^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad \tau_{yx}^A = \delta_y^A \circ \tau_x^A = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{x^2}^A) = 4, \quad \tau_{x^2}^A \in \tau^{A_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_{yx}^A) = s(\tau_e^A) = 1,$$

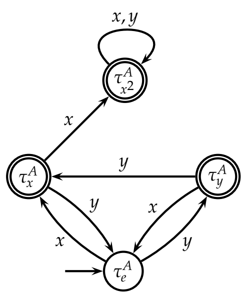
$$\tau_{xy}^A = \delta_x^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare, \qquad \tau_{y^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_y^A = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \tau_x^A \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{xy}^A) = s(\tau_e^A) = 1, \qquad s(\tau_{y^2}^A) = s(\tau_x^A) = 2,$$

$$T_3: \ \tau_{x^3}^A = \delta_x^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare, \qquad \tau_{yx^2}^A = \delta_y^A \circ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau_{x^2}^A \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{x^3}^A) = s(\tau_{x^2}^A) = 4, \qquad s(\tau_{yx^2}^A) = s(\tau_{x^2}^A) = 4.$$

Prema tome, reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ je zadat sledećim grafom:



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^C = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \delta_y^C = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \sigma^C = \begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \tau^C = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Jednostavnosti radi, umesto $A_{\overline{N}}$ ovde smo pisali kraće "C", što ćemo raditi i u nastavku primera.

Dalje konstruišemo reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}_{\overline{N}}$.

$$T_0: \ \tau_e^C = \tau^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s(\tau_e^C) = 1,$$

$$T_1: \ \tau_x^C = \delta_x^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tau_y^C = \delta_y^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s(\tau_x^C) = 2, \quad \tau_x^C \in \tau^{C_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_y^C) = 3, \quad \tau_y^C \in \tau^{C_{\overline{N}}},$$

$$T_2: \ \tau_{x^2}^C = \delta_x^C \circ \tau_x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tau_{yx}^C = \delta_y^C \circ \tau_x^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_e^C \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{x^2}^C) = 4, \quad \tau_{x^2}^C \in \tau^{C_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_{yx}^C) = s(\tau_e^C) = 1,$$

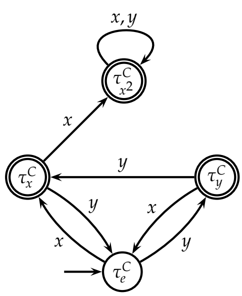
$$\tau_{xy}^C = \delta_x^C \circ \tau_y^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_e^A \ \blacksquare, \qquad \tau_{y^2}^C = \delta_y^C \circ \tau_y^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_x^C \ \blacksquare,$$

$$s(\tau_{xy}^C) = s(\tau_e^C) = 1, \qquad s(\tau_{y^2}^C) = s(\tau_x^C) = 2,$$

$$T_3: \ \tau_{x^3}^C = \delta_x^C \circ \tau_{x^2}^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^C \ \blacksquare, \qquad \tau_{yx^2}^C = \delta_y^C \circ \tau_{x^2}^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_{x^2}^C \ \blacksquare,$$

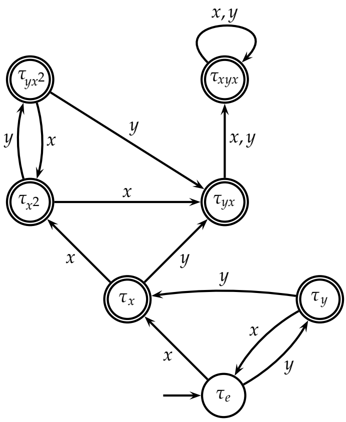
$$s(\tau_{x^3}^C) = s(\tau_{x^2}^C) = 4, \qquad s(\tau_{yx^2}^C) = s(\tau_{x^2}^C) = 4.$$

Prema tome, reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, odnosno automat Brzozovskog od $\mathcal{A}$, je zadat sledećim grafom:



Kao što znamo, ovaj automat je minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, što potvrđuje ono što smo rekli u Primeru 5.2.7., gde smo isto to tvrdili za automat koji je izomorfan ovom automatu.

Primer 5.4.5. Vratimo se još jednom na automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ koji smo razmatrali u Primerima 5.1.11. i 5.2.13. Setimo se da smo u Primeru 5.1.11. konstruisali njegov reverzni Nerodov automat $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, koji je zadat sledećim grafom



Relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ zadati su sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^C = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^C = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^C = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^C = \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}.$$

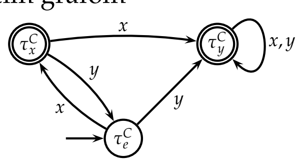
Da bi pojednostavili oznake, ovde smo umesto $A_{\overline{N}}$ pisali C.

Prelazimo na konstrukciju reverznog Nerodovog automata automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$.

$$\tau_e^C = \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \tau_x^C = \delta_x^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \tau_y^C = \delta_y^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{ll} s(\tau_e^C) = 1, & \\ s(\tau_x^C) = 2, & \tau_x^C \in \tau^{C_{\overline{N}}}, \\ s(\tau_y^C) = 3, & \tau_y^C \in \tau^{C_{\overline{N}}}, \end{array}$$

$$\tau_{x^2}^C = \delta_x^C \circ \tau_x^C = \tau_y^C \ \blacksquare, \ s(\tau_{x^2}^C) = s(\tau_y^C) = 2, \qquad \tau_{yx}^C = \delta_y^C \circ \tau_x^C = \tau_e^C \ \blacksquare, \ s(\tau_{yx}^C) = s(\tau_e^C) = 1,$$
$$\tau_{xy}^C = \delta_x^C \circ \tau_y^C = \tau_y^C \ \blacksquare, \ s(\tau_{xy}^C) = s(\tau_y^C) = 2, \qquad \tau_{y^2}^C = \delta_y^C \circ \tau_y^C = \tau_y^C \ \blacksquare, \ s(\tau_{y^2}^C) = s(\tau_y^C) = 2.$$

Prema tome, reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, odnosno automat Brzozovskog od $\mathcal{A}$, zadat je sledećim grafom



Jasno, to je minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Teorema 5.4.6. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat i neka je S slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Tada je reverzni Nerodov automat automata $\mathcal{A}^S$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Kao što smo dokazali u Teoremi 5.2.9., $\mathcal{A}^S$ je dostižni deterministički automat ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{A}}$, pa prema Teoremi 5.4.1., reverzni Nerodov automat $(\mathcal{A}^S)_{\overline{N}}$ automata $\mathcal{A}^S$ je minimalni deterministički automat ekvivalentan reverznom automatu od $\overline{\mathcal{A}}$, tj., automatu $\mathcal{A}$. □

Prethodna teorema nam daje sledeće poboljšanje algoritma Brzozovskog.

Algoritam 5.4.7. (*Poboljšani algoritam Brzozovskog*) Ulaz ovog algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A}$ nad alfabetom X, a izlaz je minimalni deterministički konačni automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Konstrukcija tog automata vrši se u dva koraka:

(A1) Koristeći Algoritme 4.3.5. i 5.2.12. izračunavamo najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$ i konstruišemo odgovarajući automat $\mathcal{A}^S$.

(A2) Koristeći Algoritam 5.1.10., konstruišemo reverzni Nerodov automat automata $\mathcal{A}^S$ konstruisanog u (A1). Tako dobijeni automat je minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Sledeći primer demonstrira funkcionisanje ovog algoritma.

Primer 5.4.8. Ponovo ćemo se pozabaviti automatom $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ koji smo razmatrali u Primerima 5.1.11., 5.2.13. i 5.4.5. U Primeru 5.2.13. smo izračunali najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$ i konstruisali odgovarajući automat $\mathcal{A}^S$, čije relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja su zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Radi pojednostavljenja oznaka ovde smo umesto A^S pisali "C", što ćemo činiti i u nastavku ovog primera.

U skladu sa Teoremom 5.4.6., u konstrukciji automata Brzozovskog od $\mathcal{A}$ njen prvi korak, konstrukciju reverznog Nerodovog automata od $\mathcal{A}$, možemo zameniti konstrukcijom automata $\mathcal{A}^S$, čiji reverzni Nerodov automat takođe daje minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. Dakle, krećemo sa konstrukcijom reverznog Nerodovog automata od $\mathcal{A}^S$:

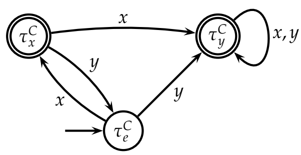
$$T_0: \ \tau_e^C = \tau^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad s(\tau_e^C) = 1,$$

$$T_1: \ \tau_x^C = \delta_x^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \tau_y^C = \delta_y^C \circ \tau_e^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s(\tau_x^C) = 2, \qquad \tau_x^C \in \tau^{C_{\overline{N}}}, \qquad s(\tau_y^C) = 3, \qquad \tau_y^C \in \tau^{C_{\overline{N}}},$$

$$T_2: \ \tau^C_{x^2} = \delta^C_x \circ \tau^C_x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^C_y \ \blacksquare, \qquad \tau^C_{yx} = \delta^C_y \circ \tau^C_x = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^C_e \ \blacksquare,$$
$$s(\tau^C_{x^2}) = s(\tau^C_y) = 3, \qquad s(\tau^C_{yx}) = s(\tau^C_e) = 1,$$
$$\tau^C_{xy} = \delta^C_x \circ \tau^C_y = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^C_y \ \blacksquare, \qquad \tau^C_{y^2} = \delta^C_y \circ \tau^C_y = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \tau^C_y \ \blacksquare,$$
$$s(\tau^C_{xy}) = s(\tau^C_y) = 3, \qquad s(\tau^C_{y^2}) = s(\tau^C_y) = 3.$$

Prema tome, reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}^S$, tj., minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, zadat je sledećim grafom



Kao što je i moralo da se desi, i u ovom primeru i u Primeru 5.4.5. smo na dva različita načina došli do istog minimalnog determinističkog automata ekvivalentnog sa $\mathcal{A}$. Međutim, dok smo u Primeru 5.4.5. (odnosno u Primeru 5.1.11.) konstruisali reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}$ koji je imao 7 stanja, ovde smo umesto toga konstruisali automat $\mathcal{A}^S$ koji ima 3 stanja i čija je konstrukcija bila znatno jednostavnija. Osim toga, u Primeru 5.4.5. smo u drugoj fazi, gde smo konstruisali reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, radili sa matricama dimanzije 7×7 i vektorima dužine 7, dok smo u ovom primeru u drugoj fazi konstruisali reverzni Nerodov automat od $\mathcal{A}^S$ i radili sa matricama dimenzije 3×3 i vektorima dužine 3. Dakle, Algoritam 5.4.7. može biti znatno efikasniji od Algoritma 5.4.3.

5.5. Kanonizacija pomoću jezičke inkluzije

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X. Kao i ranije, koristićemo oznaku $A_{\overline{N}} = \{\tau^A_u \mid u \in X^*\}$, i osim toga, za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$ uvodimo oznake

$$\Phi_a = \{\alpha \in A_{\overline{N}} \mid a \in \alpha\}, \qquad \Phi^x_a = \{\alpha_x \mid \alpha \in \Phi_a\},$$

gde je $\alpha_x = \delta^A_x \circ \alpha$, za svako $\alpha \in A_{\overline{N}}$. Kako je za svaki $\alpha \in A_{\overline{N}}$ takođe i $\alpha_x \in A_{\overline{N}}$ (ako je $\alpha = \tau^A_u$, za neko $u \in X^*$, onda je $\alpha_x = \tau^A_{xu}$), to su i Φ_a i Φ^x_a podskupovi od $A_{\overline{N}}$.

Dalje definišemo familiju $\{p_u\}_{u\in X^*}$ podskupova od A sa

$$p_u = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, \sigma^A_u \cap \alpha \neq \emptyset\}, \tag{5.25}$$

za proizvoljnu reč $u \in X^*$. Uočimo da se skup d_u može predstaviti i sa

$$\begin{aligned} p_u &= \{a \in A \mid (\forall \alpha \in A_{\overline{N}})(\alpha \in \Phi_a \Rightarrow \sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset)\}, \\ &= \{a \in A \mid (\forall \alpha \in A_{\overline{N}})(a \in \alpha \Rightarrow \sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset)\}, \\ &= \{a \in A \mid (\forall w \in X^*)(a \in \tau_w^A \Rightarrow \sigma_u^A \cap \tau_w^A \neq \emptyset)\}, \end{aligned}$$

i ako takođe uočimo da je $a \in \tau_w^A$ ekvivalentno sa $w \in \tau_a^A$, a $\sigma_u^A \cap \tau_w^A \neq \emptyset$ je ekvivalentno sa $uw \in [\![\mathcal{A}]\!]$, odnosno sa $w \in u^{-1}[\![\mathcal{A}]\!]$, to se (5.25) može napisati i kao

$$p_u = \{a \in A \mid \tau_a^A \subseteq u^{-1}[\![\mathcal{A}]\!])\}. \tag{5.26}$$

To znači da je familija $\{p_u\}_{u\in X^*}$ definisana pomoću inkluzije desnih jezika pridruženih stanjima automata $\mathcal{A}$ u desne razlomke jezika $[\![\mathcal{A}]\!]$ raspoznatog tim automatom, zbog čega i kanonizacioni metod baziran na familiji $\{p_u\}_{u\in X^*}$, kojim se ovde bavimo, nazivamo kanonizacijom pomoću jezičke inkluzije.

Najpre dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 5.5.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X. Tada za sve $u \in X^*$ i $\alpha \in A_{\overline{N}}$ važi*

$$p_u \cap \alpha \neq \emptyset \iff \sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset. \tag{5.27}$$

Dokaz: Razmotrimo proizvoljne $u \in X^*$ i $\alpha \in A_{\overline{N}}$.

Neka je $p_u \cap \alpha \neq \emptyset$, tj., neka postoji $a \in A$ tako da je $a \in p_u$ i $a \in \alpha$. To znači da je $\alpha \in \Phi_a$, i iz $a \in p_u$, na osnovu definicije skupa p_u, dobijamo da je $\sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset$.

Obratno, neka je $\sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset$, tj., neka postoji $a \in A$ tako da je $a \in \sigma_u^A$ i $a \in \alpha$. Tada za proizvoljno $\beta \in \Phi_a$ imamo da je $a \in \beta$, i kako već imamo da je $a \in \sigma_u^A$, dobili smo da je $a \in \sigma_u^A \cap \beta$, što znači da je $\sigma_u^A \cap \beta \neq \emptyset$. Kako to važi za proizvoljno $\beta \in \Phi_a$, zaključujemo da je $a \in p_u$, što sa $a \in \alpha$ daje $a \in p_u \cap \alpha$, i prema tome, $p_u \cap \alpha \neq \emptyset$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Setimo se da su sve familije skupova na kojima su zasnovani prethodno razmatrani determinizacioni metodi bile definisane induktivno, što je bila ključna stvar kod njihove efektivne izgradnje. Kako napred data definicija familije $\{p_u\}_{u\in X^*}$ nije bila induktivna, a za efektivnu izgradnju te familije nam je takođe potrebna induktivna definicija, to sledećom teoremom dajemo ekvivalentnu induktivnu definiciju.

Teorema 5.5.2. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X. Tada je*

$$p_e = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\sigma^A \cap \alpha \neq \emptyset\}, \tag{5.28}$$

$$p_{ux} = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, p_u \cap \alpha_x \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \beta \in \Phi_a^x)\, p_u \cap \beta \neq \emptyset\}, \tag{5.29}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$.

Dokaz: Neposredno iz (5.25), za $u = e$, dobijamo da važi (5.28).

Dalje, razmotrimo proizvoljne $u \in X^*$ i $x \in X$. Za proizvoljno $\alpha \in A_{\overline{N}}$ je

$$\begin{aligned}
\sigma_{ux}^A \cap \alpha \neq \emptyset &\Leftrightarrow (\exists a \in A)(a \in \sigma_{ux}^A \ \wedge \ a \in \alpha) \\
&\Leftrightarrow (\exists a \in A)(a \in \sigma_u^A \circ \delta_x^A \ \wedge \ a \in \alpha) \\
&\Leftrightarrow (\exists a \in A)\Big(\big((\exists b \in A)(b \in \sigma_u^A \ \wedge \ (b,a) \in \delta_x^A)\big) \ \wedge \ a \in \alpha\Big) \\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A)\Big(b \in \sigma_u^A \ \wedge \ \big((\exists a \in A)((b,a) \in \delta_x^A \ \wedge \ a \in \alpha)\big)\Big) \\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A)(b \in \sigma_u^A \ \wedge \ b \in \delta_x^A \circ \alpha) \\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A)(b \in \sigma_u^A \ \wedge \ b \in \alpha_x) \\
&\Leftrightarrow \sigma_u^A \cap \alpha_x \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

i na osnovu toga, (5.25) i (5.27) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
p_{ux} &= \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, \sigma_{ux}^A \cap \alpha \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, \sigma_u^A \cap \alpha_x \neq \emptyset\} \\
&= \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, p_u \cap \alpha_x \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \beta \in \Phi_a^x)\, p_u \cap \beta \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Za nedeterministički konačan automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ stavimo da je $A_p = \{p_u \mid u \in X^*\}$, i neka je funkcija $\delta^{A_p} : A_p \times X \to A_p$ definisana sa

$$\delta^{A_p}(p_u, x) = p_{ux}, \tag{5.30}$$

za sve $p_u \in A_p$ i $x \in X$, i neka je podskup τ^{A_p} od A_p definisan sa

$$\tau^{A_p} = \{p_u \in A_p \mid p_u \cap \tau^A \neq \emptyset\}. \tag{5.31}$$

Imamo da važi sledeće:

Teorema 5.5.3. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X. Tada je $\mathcal{A}_p = (A_p, X, \delta^{A_p}, p_e, \tau^{A_p})$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka su $u, v \in X^*$ reči za koje je $p_u = p_v$. Tada za svaki $x \in X$ imamo da je

$$p_{ux} = \{a \in A \mid (\forall \beta \in \Phi_a^x)\, p_u \cap \beta \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \beta \in \Phi_a^x)\, p_v \cap \beta \neq \emptyset\} = p_{vx},$$

odakle sledi da je δ^{A_p} dobro definisana funkcija. Jasno je da je i skup τ^{A_p} dobro definisan. Dakle, $\mathcal{A}_p = (A_p, \delta^{A_p}, p_e, \tau^{A_p})$ je dostižan deterministički automat. Na osnovu Teoreme 5.5.1. i definicije jezika raspoznatog nedeterminističkim i determinističkim automatom imamo da je

$$\begin{aligned}
[\![\mathcal{A}_p]\!] &= \{u \in X^* \mid \delta^{A_p}(p_e, u) \in \tau^{A_p}\} = \{u \in X^* \mid p_u \in \tau^{A_p}\} \\
&= \{u \in X^* \mid p_u \cap \tau^A \neq \emptyset\} = \{u \in X^* \mid \sigma_u^A \cap \tau^A \neq \emptyset\} = [\![\mathcal{A}]\!],
\end{aligned}$$

što znači da je automat $\mathcal{A}_p$ ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Ostaje da se dokaže minimalnost automata $\mathcal{A}_p$. Jednostavnosti radi stavimo da je $[\![\mathcal{A}]\!] = L$. Prema Teoremi 3.3.7., izvodni automat $\mathcal{A}_L$ jezika L je minimalni deterministički automat koji raspoznaje L, tj., minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. Prema tome, da bi dokazali da je $\mathcal{A}_p$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$ dovoljno je dokazati da postoji surjektivna funkcija iz $\mathcal{A}_L$ na $\mathcal{A}_p$.

Neka je $\phi : A_L \to A_p$ funkcija definisana sa $\phi(u^{-1}L) = p_u$. Prema (4.5) i Teoremi 3.4.1., za sve $u, v \in X$ za koje je $u^{-1}L = v^{-1}L$ imamo da je

$$\sigma_u^A \cap \tau_w^A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; uw \in L \;\Leftrightarrow\; w \in u^{-1}L \;\Leftrightarrow\; w \in v^{-1}L \;\Leftrightarrow\; vw \in L \;\Leftrightarrow\; \sigma_v^A \cap \tau_w^A \neq \emptyset,$$

za svako $w \in X^*$, odakle je

$$p_u = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, \sigma_u^A \cap \alpha \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \alpha \in \Phi_a)\, \sigma_v^A \cap \alpha \neq \emptyset\} = p_v.$$

Dakle, dobili smo da je $p_u = p_v$, što znači da je ϕ dobro definisana funkcija. Jasno je da je ϕ surjektivna. Time smo dokazali da je $\mathcal{A}_p$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. $\square$

Sada dajemo sledeći algoritam za konstrukciju automata $\mathcal{A}_d$.

Algoritam 5.5.4. (*Konstrukcija automata* $\mathcal{A}_p$) Ulaz ovog algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad alfabetom X, a izlaz je konačni deterministički automat $\mathcal{A}_p = (A_p, X, \delta^{A_p}, p_e, \tau^{A_p})$.

Postupak se sastoji u konstrukciji stabla prelaza automata $\mathcal{A}_p$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza od $\mathcal{A}_p$ se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Najre izračunavamo sve članove familije $A_{\overline{N}} = \{\tau_w^A\}_{w \in X^*}$, koristeći Algoritam 4.3.12., a potom i skupove Φ_a i Φ_a^x, za sve $a \in A$ i $x \in X$.

(A2) Koren stabla je p_e, koji izračunavamo pomoću formule (5.28), i stavljamo $T_0 = \{p_e\}$ i $s(p_e) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $p_e \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda p_e registrujemo kao završno stanje.

(A3) Posle $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni kao 'zatvoren' ili 'nezatvoren'.

(A4) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list p_u u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor p_{ux} izračunat pomoću formule (5.29), i granu iz p_u u p_{ux} označenu sa x.

Istovremeno, proveravamo da li je p_{ux} skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je p_{ux} jednak nekom prethodno izračunatom skupu p_v, onda p_{ux} označavamo kao zatvoren i stavljamo $s(p_{ux}) = s(p_v)$.

U suprotnom, stavljamo da je $s(p_{ux})$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $p_{ux} \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda p_{ux} registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A5) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_d$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na ovaj način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata$\mathcal{A}_p$.

Sledećim primerom pokazujemo kako funkcioniše ovaj algoritam.

Primer 5.5.5. Razmotrimo još jednom automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ kojim smo se bavili u Primerima 5.1.11., 5.2.13., 5.4.5. i 5.4.8. Setimo se da su funkcije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja ovog automata zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Familiju $\{\tau_w^A\}_{w \in X^*}$, koja je izračunata u Primeru 5.1.11., čine skupovi zadati sa

$$\tau_e^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tau_x^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tau_y^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \tau_{x^2}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \tau_{yx}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tau_{yx^2}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \tau_{xyx}^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pa imamo da važi sledeće:

$$\Phi_{a_1} = \{\tau_e^A, \tau_{x^2}^A, \tau_{yx}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_2} = \{\tau_x^A, \tau_{yx}^A, \tau_{yx^2}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_3} = \{\tau_y^A, \tau_{x^2}^A, \tau_{yx^2}^A, \tau_{xyx}^A\},$$
$$\Phi_{a_1}^x = \{\tau_x^A, \tau_{yx}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_2}^x = \{\tau_{x^2}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_3}^x = \{\tau_e^A, \tau_{yx}^A, \tau_{x^2}^A, \tau_{xyx}^A\},$$
$$\Phi_{a_1}^y = \{\tau_y^A, \tau_{yx^2}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_2}^y = \{\tau_{yx}^A, \tau_{xyx}^A\}, \quad \Phi_{a_3}^y = \{\tau_x^A, \tau_{yx^2}^A, \tau_{yx}^A, \tau_{xyx}^A\}.$$

Kako za proizvoljno $\alpha \in A_{\overline{N}}$ imamo da je $\sigma^A \cap \alpha = \emptyset$ ako i samo ako je $\alpha = \tau_e^A$, i $\tau_e^A \in \Phi_{a_1}$, $\tau_e^A \notin \Phi_{a_2}, \Phi_{a_3}$, to dobijamo da $a_1 \notin p_e$ i $a_2, a_3 \in p_e$, pa je skup p_e dat sa

$$p_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

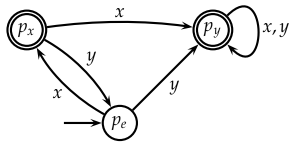
Dalje, za proizvoljno $\alpha \in A_{\overline{N}}$ imamo da je $p_e \cap \alpha = \emptyset$ ako i samo ako je $\alpha = \tau_e^A$, pa iz $\tau_e^A \in \Phi_{a_3}^x$ i $\tau_e^A \notin \Phi_{a_1}^x, \Phi_{a_2}^x$ dobijamo $a_3 \notin p_x$ i $a_1, a_2 \in p_x$, dok iz $\tau_e^A \notin \Phi_{a_1}^y, \Phi_{a_2}^y, \Phi_{a_3}^y$ dobijamo da $a_1, a_2, a_3 \in p_y$, odnosno

$$p_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

U sledećem koraku, za svaki $\alpha \in A_{\overline{N}}$ imamo da važi $p_y \cap \alpha \neq \emptyset$, dok je $p_x \cap \alpha = \emptyset$ ako i samo je $\alpha = \tau_y^A$, i kako $\tau_y^A \in \Phi_{a_1}^y$ i $\tau_y^A \notin \Phi_{a_2}^y, \Phi_{a_3}^y, \Phi_{a_1}^x, \Phi_{a_2}^x, \Phi_{a_3}^x$, to je

$$p_{x^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = p_y \ \blacksquare, \quad p_{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = p_e \ \blacksquare, \quad p_{yx} = p_{y^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = p_y \ \blacksquare.$$

Pošto su sada svi listovi zatvoreni konstrukcija stabla prelaza automata $\mathcal{A}_p$ je završena, i taj automat je zadat sledećim grafom:



Jasno, dobili smo automat identičan automatima koje smo dobili u Primerima 5.4.5. i 5.4.8., što je i trebalo da se desi.

Ako ovaj kanonizacioni metod baziran na jezičkoj inkluziji uporedimo sa originalnim metodom Brzozovskog, videćemo da oba metoda u suštini imaju isti prvi korak – konstrukciju reverznog Nerodovog automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$ nedeterminističkog automata $\mathcal{A}$ koji treba da se determinizuje. Međutim, u drugom koraku ovaj metod ima očiglednu prednost nad metodom Brzozovskog jer se kod njega radi sa podskupovima skupa stanja automata $\mathcal{A}$, dok se kod metoda Brzozovskog radi sa podskupovima skupa stanja automata $\mathcal{A}_{\overline{N}}$, koji može imati znatno veći broj stanja od automata $\mathcal{A}$, možda i eksponencijalno veći. Primera radi, automat $\mathcal{A}$ iz prethodnog primera imao je 3 stanja, dok je njegov reverzni Nerodov automat imao 7 stanja.

Kao što smo u prethodnom odeljku dali poboljšanje originalnog kanonizacionog metoda Brzozovskog, na sličan način ćemo poboljšati i kanonizacioni metod baziran na jezičkoj inkluziji. Time se bavimo u nastavku ovog odeljka.

Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X i neka je S slabo desno invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. Ranije smo koristili oznaku $A^S = \{S^u \mid u \in X^*\}$, a ovde za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$ uvodimo i oznake

$$\Sigma_a = \{\gamma \in A^S \mid a \in \gamma\}, \qquad \Sigma_a^x = \{\gamma^x \mid \gamma \in \Sigma_a\},$$

gde je $\gamma^x = \delta_x^A \circ \gamma$, za sve $\gamma \in A^S$ (ako je $\gamma = S^u$, za neko $u \in X^*$, onda je $\gamma^x = S^{xu}$).

Definišimo sada familiju $\{q_u\}_{u \in X^*}$ podskupova od A sa

$$q_u = \{a \in A \mid (\forall \gamma \in \Sigma_a)\, \sigma_u^A \cap \gamma \neq \emptyset\}, \tag{5.32}$$

za proizvoljnu reč $u \in X^*$. Na potpuno isti način kao u Teoremi 5.5.2. dokazuje se da se familija $\{q_u\}_{u \in X^*}$ može definisati i induktivno, na sledeći način:

$$q_e = \{a \in A \mid (\forall \gamma \in \Sigma_a)\, \sigma^A \cap \gamma \neq \emptyset\}, \tag{5.33}$$

$$q_{ux} = \{a \in A \mid (\forall \gamma \in \Sigma_a)\, q_u \cap \gamma_x \neq \emptyset\} = \{a \in A \mid (\forall \xi \in \Sigma_a^x)\, q_u \cap \xi \neq \emptyset\}, \tag{5.34}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$.

Dalje, neka je $A_q = \{q_u \mid u \in X^*\}$, i neka je funkcija $\delta^{A_q} : A_q \times X \to A_q$ definisana sa

$$\delta^{A_q}(q_u, x) = q_{ux}, \tag{5.35}$$

za sve $q_u \in A_q$ i $x \in X$, i neka je podskup τ^{A_q} od A_q definisan sa

$$\tau^{A_q} = \{ q_u \in A_q \mid q_u \cap \tau^A \neq \emptyset \}. \tag{5.36}$$

Tada važi sledeće:

Teorema 5.5.6. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nedeterministički automat nad alfabetom X. Tada je $\mathcal{A}_q = (A_q, X, \delta^{A_q}, q_e, \tau^{A_q})$ minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Na isti način kao u Teoremi 5.5.3. dokazujemo da je δ^{A_q} dobro definisana funkcija i $\mathcal{A}_q$ je dostižan deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$, kao i da je $\mathcal{A}_q$ minimalan deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$. □

Efektivni postupak za konstrukciju automata $\mathcal{A}_q$, za dato slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na automatu $\mathcal{A}$, sličan je postupku za konstrukciju automata $\mathcal{A}_d$ i prikazan je u nastavku.

Algoritam 5.5.7. (*Konstrukcija automata* $\mathcal{A}_q$) Ulaz algoritma je nedeterministički konačni automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ nad alfabetom X, i slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$, dok je izlaz algorotma konačni deterministički automat $\mathcal{A}_q = (A_q, X, \delta^{A_q}, q_e, \tau^{A_q})$.

Postupak se sastoji u konstrukciji stabla prelaza automata $\mathcal{A}_q$ direktno iz $\mathcal{A}$, i tokom tog postupka koristimo pokazivače $s(\cdot)$ kojima čvorovima stabla koje gradimo pridružujemo odgovarajuće prirodne brojeve. Stablo prelaza od $\mathcal{A}_q$ se konstruiše induktivno, na sledeći način:

(A1) Najre izračunavamo sve članove familije $A^S = \{S^w\}_{w \in X^*}$, koristeći Algoritam 5.2.12., a potom i skupove Σ_a i Σ_a^x, za sve $a \in A$ i $x \in X$.

(A2) Koren stabla je q_e, koji izračunavamo pomoću formule (5.33), i stavljamo $T_0 = \{q_e\}$ i $s(q_e) = 1$. Istovremeno proveravamo da li je $q_e \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda q_e registrujemo kao završno stanje.

(A3) Posle $i$tog koraka neka je konstruisano stablo T_i, i neka su čvorovi u T_i označeni kao 'zatvoren' ili 'nezatvoren'.

(A4) U narednom koraku konstruišemo stablo T_{i+1} proširivanjem stabla T_i na sledeći način: za svaki nezatvoreni list q_u u stablu T_i, gde je $u \in X^*$, i svako $x \in X$ dodajemo čvor q_{ux} izračunat pomoću formule (5.34), i granu iz q_u u q_{ux} označenu sa x.

Istovremeno, proveravamo da li je q_{ux} skup koji je već bio konstruisan, i ako je to tačno, ako je q_{ux} jednak nekom prethodno izračunatom skupu q_v, onda q_{ux} označavamo kao zatvoren i stavljamo $s(q_{ux}) = s(q_v)$.

U suprotnom, stavljamo da je $s(q_{ux})$ naredni nepridruženi prirodan broj i proveravamo da li je $q_{ux} \cap \tau^A \neq \emptyset$, i ako je to tačno, onda q_{ux} registrujemo kao završno stanje. Postupak se završava kada svi listovi budu označeni kao zatvoreni.

(A5) Kada je stablo prelaza automata $\mathcal{A}_q$ konstruisano, brišemo oznake za zatvorenost listova i slepljujemo listove sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu vrednost pokazivača. Dijagram koji je dobijen na ovaj način, dopunjen oznakama za inicijalno i završna stanja, je graf automata $\mathcal{A}_q$.

Sa aspekta efektivnog konstruisanja minimalnog determinističkog automata ekvivalentnog sa $\mathcal{A}$, najbolje je da familija A^S ima što je moguće manji broj članova, što se može postići tako što ćemo uzeti da je S najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$. U tom slučaju u okviru koraka (A1) najpre izračunavamo najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje na $\mathcal{A}$, koristeći Algoritam 4.3.13., a potom izračunavamo članove familije A^S.

Sledećim primerom pokazujemo kako funkcioniše ovaj algoritam.

Primer 5.5.8. Vratimo se još jednom na automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ kojim smo se bavili u Primeru 5.5.5. (kao i u Primerima 5.1.11., 5.2.13., 5.4.5., i 5.4.8.). Najveće slabo levo invarijantno kvazi-uređenje S na $\mathcal{A}$ izračunato je u Primeru 5.2.13., gde su određeni i članovi familije A^S, koju čine

$$S^e = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad S^x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad S^y = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

i stoga imamo da je:

$$\Sigma_{a_1} = \{S^e, S^x\}, \quad \Sigma_{a_2} = \{S^x\}, \quad \Sigma_{a_3} = \{S^x, S^y\},$$

$$\Sigma^x_{a_1} = \{S^x\}, \quad \Sigma^x_{a_2} = \{S^x\}, \quad \Sigma^x_{a_3} = \{S^x, S^e\}, \quad \Sigma^y_{a_1} = \{S^y, S^x\}, \quad \Sigma^y_{a_2} = \{S^x\}, \quad \Sigma^y_{a_3} = \{S^x\}.$$

Kako za proizvoljno $\gamma \in A^S$ imamo da je $\sigma^A \cap \gamma = \emptyset$ ako i samo ako je $\gamma = S^e$, i kako $S^e \in \Sigma_{a_1}$ i $S^e \notin \Sigma_{a_2}, \Sigma_{a_3}$, to $a_1 \notin q_e$ i $a_2, a_3 \in q_e$, odnosno

$$q_e = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Dalje imamo da za proizvoljno $\gamma \in A^S$ važi $q_e \cap \gamma = \emptyset$ ako i samo ako je $\gamma = S^e$, i kako $S^e \in \Sigma^x_{a_3}$ i $S^e \notin \Sigma^x_{a_1}, \Sigma^x_{a_2}, \Sigma^y_{a_1}, \Sigma^y_{a_2}, \Sigma^y_{a_3}$, to $a_3 \notin q_x$, $a_1, a_2 \in q_x$ i $a_1, a_2, a_3 \in q_y$, tj.

$$q_x = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad q_y = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Zatim za proizvoljno $\gamma \in A^S$ imamo da je $q_x \cap \gamma = \emptyset$ ako i samo ako je $\gamma = S^y$, pri čemu $S^y \notin \Sigma^x_{a_1}, \Sigma^x_{a_2}, \Sigma^x_{a_3}, \Sigma^y_{a_2}, \Sigma^y_{a_3}$ i $S^y \in \Sigma^y_{a_1}$, što znači da $a_1, a_2, a_3 \in q_{x^2}$, $a_1 \notin q_{xy}$ i $a_2, a_3 \in q_{xy}$, a sa druge strane imamo da je $q_y \cap \gamma \neq \emptyset$, za svaki $\gamma \in A^S$, odakle sledi da $a_1, a_2, a_3 \in q_{yx}, q_{y^2}$. Prema tome,

$$q_{x^2} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = q_y \ \blacksquare, \quad q_{xy} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = q_e \ \blacksquare, \quad q_{yx} = q_{y^2} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = q_y \ \blacksquare.$$

Ovim se konstrukcija automata $\mathcal{A}_q$ završava i dobijamo isti automat kao u Primeru 5.5.5. Međutim, jasno je da je u ovom primeru konstrukcija bila jednostavnija jer se familija A^S, na kojoj je bazirana ova konstrukcija, sastojala od

3 skupa, dok se familija $A_{\overline{N}}$ iz Primera 5.5.5. sastojala od 7 skupova. U slučaju automata sa većim brojem članova ta razlika može biti znatno veća.

5.6. Zadaci

5.6.1. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i $R \subseteq A \times B$ je uniformna relacija. Tada je R slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako zadovoljava (4.89) i (4.93), i funkcije zadate sa

$$\tau_u^A \mapsto R^{-1} \circ \tau_u^A, \qquad \tau_u^B \mapsto R \circ \tau_u^B, \tag{5.37}$$

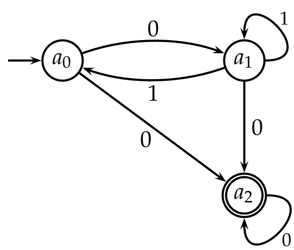
za svaki $u \in X^*$, su međusobno inverzni izomorphizmi između reverznih Nerodovih automata $\bar{\mathcal{A}}_N$ i $\bar{\mathcal{B}}_N$. Dokazati!

5.6.2. Neka su $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ automati i $R \subseteq A \times B$ je uniformna relacija. Tada je R slaba forward bisimulacija iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako i samo ako zadovoljava (4.91) i (4.95), i funkcije zadate sa

$$\sigma_u^A \mapsto \sigma_u^A \circ R, \qquad \sigma_u^B \mapsto \sigma_u^B \circ R^{-1}, \tag{5.38}$$

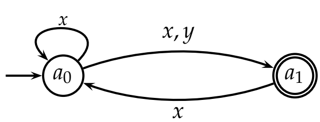
za svaki $u \in X^*$, su međusobno inverzni izomorphizmi između Nerodovih automata $\mathcal{A}_N$ i $\mathcal{B}_N$. Dokazati!

5.6.3. Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_2, \tau^A)$ dat grafom prelaza:



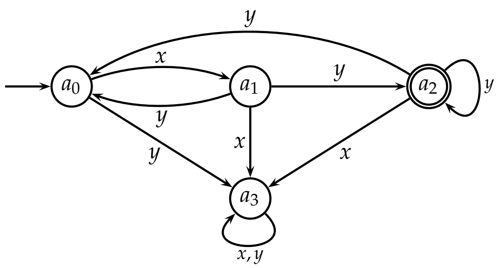
naći odgovarajući Nerodov automat i deterministički automat određen najvećim desno invarijantnim kvazi-uređenjem na $\mathcal{A}$, njihove dečije automate, i sve ih uporediti.

5.6.4. Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_2, \tau^A)$ dat grafom prelaza:



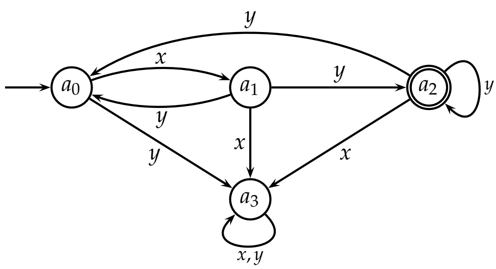
naći odgovarajući Nerodov automat i deterministički automat određen najvećim desno invarijantnim kvazi-uređenjem na $\mathcal{A}$, njihove dečije automate, i sve ih uporediti.

5.6.5. Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ dat grafom prelaza:



naći odgovarajući Nerodov automat i deterministički automat određen najvećim slabo desno invarijantnim kvazi-uređenjem na $\mathcal{A}$, njihove dečije automate, i sve ih uporediti.

5.6.6. Za nedeterministički automat,



predstavljen u prethodnom zadatku, primeniti kanonizacioni algoritam Brzozovskog i poboljšani algoritam Brzozovskog kako bi dobili minimalni automat koji raspoznaje isti jezik.

5.6.7. Na bar dva načina naći minimalni autmat koji raspoznaje isti jezik kao dati nedeterministički automat.

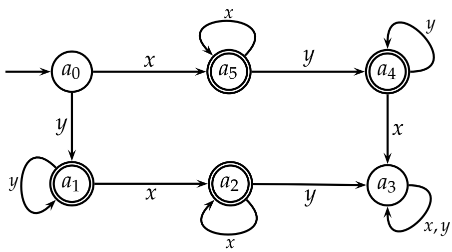
$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

5.6.8. Za nedeterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}.$$

primeniti kanonizacioni metod Brzozovskog i poboljšani algoritam Brzozovskog i uporediti dobijene automate.

5.6.9. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat sa šest stanja nad alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sledećim grafom:



Naći Nerodov i dečiji automat datog automata i uporediti ih. Naći minimalni automat koji raspoznaje isti jezik kao dati automat.

5.6.10. Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, \sigma^A, \tau^A)$ automat nad alfabetom $X = \{x, y\}$ čije su relacije prelaza i skupovi inicijalnih i završnih stanja zadati sledećim Bulovim matricama i vektorima:

$$\delta_x^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_y^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kanonizacijom pomoću jezičke inkluzije naći minimalni deterministički automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Glava 6
Raspoznatljivi jezici

Glavni zadatak automata svakako je raspoznavanje jezika, a problem opisivanja jezika koji se mogu raspoznati konačnim automatima, takozvanih raspoznatljivih jezika, jedan je od najvažnijih u Teoriji automata. Prvi korak u izučavanju takvih jezika predstavlja rad Klinija (Kleene) iz 1956. u kome su raspoznatljivi jezici okarakterisani kao jezici koji se mogu dobiti iz elementarnih jezika upotrebom operacija unije, množenja i zvezda operacije, konačan broj puta, odnosno, kao jezici koji se mogu predstaviti regularnim izrazima.

U ovoj glavi je dokazano nekoliko teorema o ekvivalentnosti regularnih izraza i konačnih automata, kao i o njihovoj ekvivalentnosti sa regularnim gramatikama.

6.1. Osnovna svojstva raspoznatljivih jezika

6.1.1. Raspoznatljivost elementarnih jezika

Ako je X neprazan alfabet, bilo koji $L \subseteq X^*$ nazivamo jezikom nad alfabetom X. Najjednostavniji jezici su konačni jezici nad alfabetom X, uključujući i elementarne jezike.

Klasu *elementarnih jezika* čine prazan jezik $\emptyset$, jezik koji sadrži praznu reč $\{e\}$ i jednoelementni jezici $\{\{x\} \mid x \in X\}$. Kao što smo videli, za nas su posebno značajni jezici koji mogu biti raspoznati konačnim automatima, tzv. raspoznatljivi jezici. Pokazaćemo da su elementarni jezici raspoznatljivi, kao i da je klasa raspoznatljivih jezika zatvorena za osnovne Bulove operacije.

Teorema 6.1.1. *Svaki jednoelementan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz: Neka je X konačan alfabet i $L = \{w\}$, za neki $w \in X^*$. Dokazaćemo da je L raspoznatljiv na taj način što ćemo konstruisati njegov minimalni automat.

Ako je $w = e$, tada za proizvoljno slovo $x \in X$ imamo

$$x^{-1}L = \{u \in X^* \mid xu \in L\} = \{u \in X^* \mid xu = e\} = \emptyset.$$

Kako je $\emptyset.x = \emptyset$, za svako $x \in X$, to je $A_L = \{L, \emptyset\}$, što znači da je minimalni automat $\mathcal{A}_L$ jezika L konačan.

Sa druge strane, uzmimo da je $w \in X^+$, odnosno $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ je

$$u^{-1}L = \{v \in X^* \,|\, uv = w\},$$

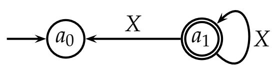
pa je $u^{-1}L \neq \emptyset$ ako i samo ako je u odsečak reči u, odnosno ako je $u = l_k(w)$, za neki $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Jasno je da je tada $u^{-1}L = \{r_{n-k}(w)\}$. Ako uvedemo oznaku

$$L_k = (l_k(w))^{-1}L = \{r_{n-k}(w)\},$$

za $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, i $L_{n+1} = \emptyset$, tada imamo da je $A_L = \{L_k \,|\, 0 \leqslant k \leqslant n\}$, što znači da je minimalni automat A_L jezika L konačan, pa je L raspoznatljiv jezik. □

Teorema 6.1.2. *Prazan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz: Za proizvoljan alfabet X, automat dat grafom



raspoznaje prazan jezik. □

Teorema 6.1.3. *Unija dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz: Neka su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ raspoznatljivi jezici nad konačnim alfabetom X. Za $i \in \{1,2\}$, neka automati $\mathcal{A}_i = (A_i, X, \delta^{A_i}, a_0^i, \tau^{A_i})$ raspoznaju jezike L_i skupovima $\tau^{A_i} \subseteq A_i$, tim redom. Konstruišimo automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ na sledeći način: neka je $A = A_1 \times A_2$, $a_0 = (a_0^1, a_0^2)$ i $\delta^A : A \times X^* \to A$ funkcija prelaza definisana sa

$$\delta^A((a_1,a_2),u) = (\delta_1^A(a_1,u), \delta_2^A(a_2,u)), \text{ za } u \in X^*.$$

Dokazaćemo da automat $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik $L_1 \cup L_2$ skupom završnih stanja $\tau^A = (\tau^{A_1} \times A_2) \cup (A_1 \times \tau^{A_2})$. Odavde sledi da

$$\begin{aligned} u \in L_1 \cup L_2 &\Leftrightarrow u \in L_1 \text{ ili } u \in L_2 \\ &\Leftrightarrow \delta^{A_1}(a_0^1, u) \in \tau^{A_1} \ \text{ ili } \ \delta^{A_2}(a_0^2, u) \in \tau^{A_2} \\ &\Leftrightarrow (\delta_1^A(a_0^1, u), \delta_2^A(a_0^2, u)) \in (\tau^{A_1} \times A_2) \cup (A_1 \times \tau^{A_2}) \\ &\Leftrightarrow \delta^A(a_0, u) \in \tau^A. \end{aligned}$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Teorema 6.1.4. *Svaki konačan jezik je raspoznatljiv.*

Dokaz: Ovo sledi iz Teorema 6.1.1. i 6.1.3., jer se svaki konačan jezik može predstaviti u obliku konačne unije jednoelementnih jezika. □

Teorema 6.1.5. *Presek dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz: Ako koristimo oznake iz dokaza Teoreme 6.1.3., jednostavno pokazujemo da automat $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik $L_1 \cap L_2$ skupom $\tau^A = \tau^{A_1} \times \tau^{A_2}$. □

Teorema 6.1.6. *Komplement raspoznatljivog jezika je takođe raspoznatljiv jezik.*

Dokaz: Neka je L raspoznatljiv jezik nad konačnim alfabetom X. Ako konačan automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ raspoznaje L skupom $\tau^A \subseteq A$, tada isti automat raspoznaje komplement jezika L u X^* komplementom skupa τ^A. □

Posledica 6.1.7. *Razlika dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz: Ovo tvrđenje sledi neposredno iz Teorema 6.1.5. i 6.1.6., jer za jezike L_1 i L_2 nad alfabetom X je $L_1 - L_2 = L_1 \cap L_2^c$, gde L_2^c označava komplement od L_2 u X^*. □

6.1.2. Proizvod raspoznatljivih jezika

Osim operacija unije, preseka i komplementiranja jezika, koje nazivamo Bulovim operacijama koje očuvavaju raspoznatljivost jezika, važnu ulogu u izučavanju jezika igraju i operacija množenja jezika i zvezda operacija na jeziku.

Neka je dat slobodan monoid X^* nad konačnim alfabetom X. Za jezike $L_1, L_2 \subseteq X^*$, proizvod jezika L_1 i L_2, u oznaci L_1L_2 definišemo kao

$$L_1L_2 = \{u_1u_2 \,|\, u_1 \in L_1,\, u_2 \in L_2\} = \{u \in X^* \,|\, (\exists u_1 \in L_1)(\exists u_2 \in L_2)\, u = u_1u_2\}.$$

Sledećom teoremom dokazaćemo da i operacija množenja jezika očuvava raspoznatljivost jezika.

Teorema 6.1.8. *Proizvod dva raspoznatljiva jezika je raspoznatljiv jezik.*

Dokaz: Neka su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ raspoznatljivi jezici nad konačnim alfabetom X i neka je $L = L_1L_2$. Razlikovaćemo slučajeve kada jezik L sadrži praznu reč $e \in L$ i kada L ne sadrži praznu reč $e \notin L$.

Slučaj $e \notin L$: Za $i \in \{1,2\}$ neka su $\mathcal{A}_i = (A_i, X, \delta^{A_i}, a_0^i, \tau^{A_i})$ konačni automati koji raspoznaju L_i skupvima τ^{A_i}, za $i = 1,2$, redom. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Stavimo da je $A = A_1 \cup A_2$ i definišimo konačan nedeterministički automat $A = (A, X, \gamma^A, \sigma^A, \tau^A)$ na sledeći način: Inicijalno stanje je $\sigma^A = \{a_0^1\}$, funkcija prelaza $\gamma^A : A \times X \to 2^A$ je definisana sa

$$\gamma^A(a,x) = \begin{cases} \{\delta^{A_1}(a,x)\} & \text{ako je } a \in A_1 \text{ i } \delta^{A_1}(a,x) \notin \tau^{A_1} \\ \{\delta^{A_1}(a,x), a_0^2\} & \text{ako je } a \in A_1 \text{ i } \delta^{A_1}(a,x) \in \tau^{A_1} \\ \{\delta^{A_2}(a,x)\} & \text{ako je } a \in A_2, \end{cases} \tag{6.1}$$

a skup završnih stanja je $\tau^A = \tau^{A_2}$. Dokazaćemo da automat $\mathcal{A}$ raspoznaje L, tj. da za proizvoljan $u \in X^+$ važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow \gamma^A(\sigma^A, u) \cap \tau^A \neq \emptyset.$$

Proizvoljna reč $u \in L$ je oblika $u = u_1 u_2$, za neke $u_1 \in L_1$ i $u_2 \in L_2$. Pretpostavimo da je $\gamma^A(\sigma^A, u) = \beta_m$, pri čemu je

$$u_1 = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad u_2 = y_1 y_2 \cdots y_m,$$

gde su $m, n \in \mathbb{N}^0$, pri čemu je $m + n > 0$, i $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m \in X$. Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \gamma^A(\sigma^A, x_1) = \{\delta^{A_1}(a_0^1, x_1)\}, \\
&\alpha_2 = \gamma^A(\alpha_1, x_2) = \{\delta^{A_1}(\alpha_1, x_2)\}, \\
&\vdots \\
&\alpha_n = \gamma^A(\alpha_{n-1}, x_n) = \{\delta^{A_1}(\alpha_{n-1}, x_n), a_0^2\}, \\
&\beta_1 = \gamma^A(a_0^2, y_1) = \{\delta^{A_2}(a_0^2, y_1)\}, \\
&\beta_2 = \gamma^A(\beta_1, y_2) = \{\delta^{A_2}(\beta_1, y_2)\}, \\
&\vdots \\
&\beta_m = \gamma^A(\beta_{n-1}, y_m) = \{\delta^{A_2}(\beta_{n-1}, y_m)\}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Uočimo dalje da iz $u_1 \in L_1$ sledi da je $\delta^{A_1}(a_0^1, u_1) \in \tau^{A_1}$ i

$$\gamma^A(\sigma^A, u_1) = \gamma^A(\delta^{A_1}(a_0^1, x_1 \cdots x_{n-1}), x_n) = \gamma^A(\alpha_{n-1}, x_n) = \alpha_n = \{\delta^{A_1}(\alpha_{n-1}, x_n), a_0^2\},$$

odakle dobijamo da je $\gamma^A(a_0^2, u_2) = \beta_m$, pa kako je $\beta_m = \gamma^A(\sigma^A, u)$, a iz $u_2 \in L_2$ imamo da je $\delta^{A_2}(a_0^2, u_2) \in \tau^{A_2}$, to dobijamo $\beta_m = \gamma^A(a_0^2, u_2) \in \tau^{A_2} \cap \gamma^A(\sigma^A, u)$. Pošto je $\tau^A = \tau^{A_2}$, dokazali smo da iz $u \in L$ sledi $\gamma^A(\sigma^A, u) \cap \tau^A \neq \emptyset$.

Obratno, uzmimo $u \in X^+$ za koje je $\gamma^A(\sigma^A, u) \cap \tau^A \neq \emptyset$. Neka je $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, za $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Tada je

$$\gamma^A(\sigma^A, u) = \alpha_n,$$

pri čemu je

$$\alpha_1 = \gamma^A(\sigma^A, x_1), \; \alpha_2 = \gamma^A(\alpha_1, x_2), \; \cdots, \; \alpha_n = \gamma^A(\alpha_{n-1}, x_n)$$

Neka je $m = \min\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \;\&\; \alpha_i \cap A_2 \neq \emptyset\}$. Iz pretpostavke da je $\gamma^A(\sigma^A, u) \cap \tau^A \neq \emptyset$, odnosno da je $\alpha_n \cap \tau^{A_2} \neq \emptyset$, imamo da je $\alpha_n \cap A_2 \neq \emptyset$, što znači da je gornji skup neprazan, pa zaista ima najmanji element. Prema definiciji broja m imamo da za svaki i, $1 \leqslant i < m$ važi $\alpha_n \cap A_2 = \emptyset$, što znači da je

$$\alpha_i = \{\delta^{A_1}(a_0^1, x_1 \cdots x_i)\}, \quad \text{za svaki } i, \; 1 \leqslant i < m.$$

Sa druge strane, iz $\alpha_n \cap A_2 \neq \emptyset$, dobijamo da je

$$\delta^{A_1}(a_0^1, x_1\cdots x_{m-1}x_m) = \delta^{A_1}(\delta^{A_1}(a_0^1, x_1\cdots x_{m-1}), x_m) \in \tau^{A_1},$$

i da je $\alpha_m = \{\delta^{A_1}(a_0^1, x_1\cdots x_m), a_0^2\}$.

Dakle imamo da je $\alpha_m \cap \tau^{A_1} \neq \emptyset$. Neka su $m_1, m_2, \ldots, m_k$ svi brojevi iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ za koje važi da je $\alpha_{m_i} \cap \tau^{A_1} \neq \emptyset$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pri čemu je $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Bar jedan takav broj sigurno postoji i indukcijom ćemo dokazati da za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$ važi

$$\alpha_{m_i} = \{\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_{m_i}), \gamma^A(a_0^2, x_{m_1+1}\cdots x_{m_i}), \ldots, \gamma^A(a_0^2, x_{m_{i-1}+1}\cdots x_{m_i}), a_0^2\},$$

i $x_1\cdots x_{m_i} \in L_1$.

Ako je $m_1 = m$, već smo pokazali da je $\alpha_{m_1} = \{\delta^{A_1}(a_0^1, x_1\cdots x_{m_1}), a_0^2\}$ za $i = 1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki j, $1 \leqslant j \leqslant i < k$, i dokažimo da važi za $i+1$. Za proizvoljan l, $m_i < l < m_{i+1}$, je $\alpha_l \cap \tau^{A_1} \neq \emptyset$, što prema indukcijskoj hipotezi daje

$$\alpha_l = \{\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_l), \gamma^A(a_0^2, x_{m_1+1}\cdots x_l), \ldots, \gamma^A(a_0^2, x_{m_{i+1}}\cdots x_l), a_0^2\}.$$

Odavde, kako je $\alpha_{m_{i+1}} \cap \tau^{A_1} \neq \emptyset$, dobijamo da je

$$\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_{m_{i+1}}) = \delta^{A_1}(\delta^{A_1}(a_0^1, x_1\cdots x_{m_{i+1}-1}), x_{m_{i+1}}) \in \tau^{A_1}$$

i da je

$$\alpha_{m_{i+1}} = \{\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_{m_{i+1}}), \gamma^A(a_0^2, x_{m_1+1}\cdots x_{m_{i+1}}), \ldots, \gamma^A(a_0^2, x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}}), a_0^2\}$$

što znači da $x_1x_2\cdots x_{m_{i+1}} \in L_1$.

Dakle, tvrđenje važi za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Dalje, za svaki l, $m_k < l \leqslant n$ (ako takav l postoji) imamo da je $\alpha_l \cap \tau^{A_1} = \emptyset$, što znači da je

$$\alpha_l = \{\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_l), \gamma^A(a_0^2, x_{m_1+1}\cdots x_l), \ldots, \gamma^A(a_0^2, x_{m_k+1}\cdots x_l), a_0^2\},$$

što za $l = n$ daje

$$\alpha_n = \{\gamma^A(a_0^1, x_1\cdots x_n), \gamma^A(a_0^2, x_{m_1+1}\cdots x_n), \ldots, \gamma^A(a_0^2, x_{m_k+1}\cdots x_n)\},$$

Iz pretpostavke $\alpha_n \cap \tau^{A_2} = \gamma^A(\sigma^A, u) \cap \tau^A \neq \emptyset$ dobijamo da je

$$\gamma^A(a_0^2, x_{m_i+1}\cdots x_n) = \delta^{A_2}(a_0^2, x_{m_i+1}\cdots x_n) \in \tau^{A_2},$$

za neki i, $1 \leqslant i \leqslant k$, odnosno da je $x_{m_i+1}\cdots x_n \in L_2$.

Prema tome $u = x_1\cdots x_n = (x_1\cdots x_{m_i})(x_{m_i+1}\cdots x_n) \in L_1L_2 = L$, što je i trebalo dokazati. Ovim je upotpunjen dokaz za slučaj $e \notin L$.

Slučaj $e \in L$. Ovaj slučaj je moguć samo ako je $e \in L_1$ i $e \in L_2$. Uvedimo oznake

$$L' = L - \{e\}, \quad L_1' = L_1 - \{e\} \quad \text{i} \quad L_2' = L_2 - \{e\}.$$

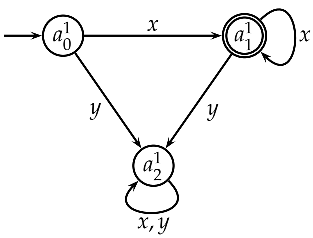
Lako se proverava da je $L' = L_1'L_2' \cup L_1' \cup L_2'$, odakle sledi da je

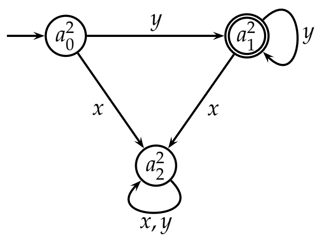
$$L = L_1'L_2' \cup L_1' \cup L_2' \cup \{e\}.$$

Prema Posledici 6.1.7., L_1' i L_2' su raspoznatljivi jezici, pri čemu $e \notin L_1'L_2'$ i, kao što je napred dokazano, $L_1'L_2'$ je raspoznatljiv jezik. Dakle, L raspoznatljiv jezik kao konačna unija raspoznatljivih jezika. Ovim je dokaz teoreme završen. □

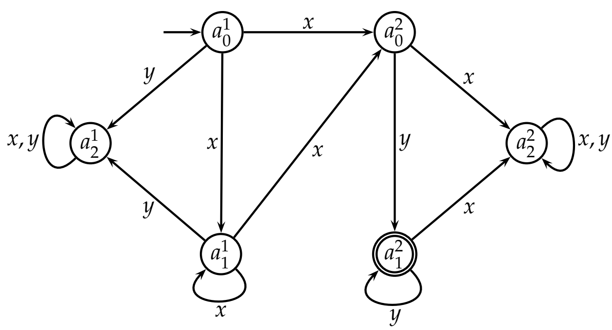
Primer 6.1.9. Podsetimo da smo ranije pokazali da je $L = \{x^n y^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ raspoznatljiv jezik. Ovde ćemo njegovu raspoznatljivost dokazati korišćenjem prethodne teoreme. Predstavimo jezik L kao proizvod $L = L_1L_2$ jezika $L_1 = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $L_2 = \{y^m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Lako se proverava da su jezici L_1 i L_2 raspoznatljivi, a minimalni automati koji ih raspoznaju dati su, redom, grafovima:





Nedeterministički automat koji raspoznaje jezik $L = L_1L_2$, kao u prethodnoj teoremi, dat je sledećim grafom:



Inicijalno stanje nedeterminističkog automata je inicijalno stanje prvog automata $\sigma^A = \{a_0^1\}$ i ovaj automat raspoznaje jezik L skupom $\tau^A = \tau^{A_2} = \{a_1^2\}$.

6.1.3. Klinijeva zvezda operacija

Polugrupu generisanu datim jezikom L označavaćemo sa $L^{(+)}$, a monoid generisan sa L ćemo označiti sa $L^{(*)}$. Znakove + i $*$ stavljamo u zagrade da bi smo napravili razliku između $L^{(+)}$ i $L^{(*)}$, od slobodne polugrupe L^+, odnosno slobodnog monoida L^*, nad L kao alfabetom. U nekim slučajevima se ti pojmovi ne razlikuju, pa tada izostavljamo zagrade.

Preslikavanja $L \mapsto L^{(+)}$ i $L \mapsto L^{(*)}$ su unarne operacije na jezicima. Prvu od njih ćemo nazivati *plus operacijom*, a drugu *Klinijevom zvezda operacijom* (u literaturi se takođe sreću i nazivi zvezda operacija kao i iteracija). Jednostavno se pokazuje da važi

$$L^{(+)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \qquad \text{i} \qquad L^{(*)} = L^{(+)} \cup \{e\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} L^n,$$

pri čemu je $L^0 = \{e\}$.

Sledećom teoremom dokazujemo da gornje operacije takođe očuvavaju raspoznatljivost jezika.

Teorema 6.1.10. *Za proizvoljan raspoznatljiv jezik L nad konačnim alfabetom X, $L^{(+)}$ i $L^{(*)}$ su raspoznatljivi jezici.*

Dokaz: Neka je L raspoznatljiv jezik nad konačnim alfabetom X i neka je $A = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ konačan automat koji raspoznaje L. Definišimo nedeterministički automat $\mathcal{B} = (A, X, \delta^B, \sigma^B, \tau^B)$ u kome je $\sigma^B = \{a_0\}$, skup završnih stanja $\tau^B = \tau^A$ i funkcija prelaza $\delta^B : A \times X \to 2^A$ je definisana sa

$$\delta^B(a,x) = \begin{cases} \{\delta(a,x)\} & \text{ako } \delta(a,x) \notin \tau^B \\ \{\delta(a,x), a_0\} & \text{ako } \delta(a,x) \in \tau^B. \end{cases} \tag{6.3}$$

Dokazaćemo da automat $\mathcal{B}$ raspoznaje jezik $L^{(+)}$, tj. da za svaki $u \in X^*$ važi

$$u \in L^{(+)} \iff \delta^B(\sigma^B, u) \cap \tau^B \neq \emptyset.$$

Neka je $u = e$. Ako je $\delta^B(\sigma^B, u) \cap \tau^B \neq \emptyset$, odnosno $\sigma^B \cap \tau^B \neq \emptyset$, tada je $a_0 \in \tau^B$, što znači da $e \in L$, pa je $u = e \in L \subseteq L^{(+)}$. Obratno, ako je $u = e \in L^{(+)}$, to se može desiti samo ako je $e \in L$, što je ekvivalentno sa $a_0 \in \tau^B$, pa u ovom slučaju dobijamo da je $\delta^B(\sigma^B, u) \cap \tau^B = \sigma^B \cap \tau^B = \{a_0\} \neq \emptyset$, što je i trebalo dokazati.

Uzmimo dalje da je $u \neq e$. Tada je $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, za $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, pa je dalje

$$\delta^B(\sigma^B, u) = \beta_n,$$

pri čemu je

$$\beta_1 = \delta^B(\sigma^B, x_1),\ \beta_2 = \delta^B(\beta_1, x_2), \dots,\ \beta_n = \delta^B(\beta_{n-1}, x_n).$$

Neka je $\delta^B(\sigma^B,u)\cap\tau^B\neq\emptyset$. Označimo sa $m_1,m_2,\dots,m_k$, sve brojeve iz skupa $\{1,2,\dots,n\}$ za koje je $\beta_{m_i}\cap\tau^B\neq\emptyset$, za $1\leqslant i\leqslant k$, pri čemu je $m_1<m_2<\cdots<m_k$. Sigurno je da postoji bar jedan broj sa takvom osobinom, jer je po pretpostavci $\beta_n\cap\tau^B=\delta^B(\sigma^B,u)\cap\tau^B\neq\emptyset$ i jasno je, takođe, da je $m_k=n$. Indukcijom ćemo dokazati da za svaki i, $1\leqslant i\leqslant k$, važi

$$\beta_{m_i}=\{\delta^A(a_0,x_1\cdots x_{m_i}),\delta^A(a_0,x_{m_1+1}\cdots x_{m_i}),\dots,\delta^A(a_0,x_{m_{i-1}+1}\cdots x_{m_i}),a_0\}$$

i $x_1\cdots x_{m_i}\in L\cup L^2\cup\cdots L^i$.

Zaista, kako je $\beta_l\cap\tau^B=\emptyset$, za $1\leqslant l<m_1$, to je $\beta_l=\{\delta^A(a_0,x_1\cdots x_l)\}$, dok iz $\beta_{m_1}\cap\tau^B\neq\emptyset$ dobijamo da je

$$\delta^B(\sigma^B,x_1\cdots x_{m_1})=\delta^A(\delta^A(a_0,x_1\cdots x_{m_1-1}),x_{m_1})\in\tau^B,$$

što znači da je

$$\beta_{m_1}=\{\delta^A(a_0,x_1\cdots x_{m_1}),a_0\}\qquad\text{i}\qquad x_1\cdots x_{m_1}\in L,$$

te za β_1 pretpostavka važi.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki j takav da je $1\leqslant j\leqslant i<k$, i dokažimo da važi i za $i+1$. Obzirom da je $\beta_l\cap\tau^B=\emptyset$, za $m_i<l<m_{i+1}$, prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je

$$\beta_l=\{\delta^A(a_0,x_1\cdots x_l),\delta^A(a_0,x_{m_1+1}\cdots x_l),\dots,\delta^A(a_0,x_{m_{i-1}+1}\cdots x_l),\delta^A(a_0,x_{m_i}\cdots x_l)\},$$

dok iz $\beta_{m_{i+1}}\cap\tau^B\neq\emptyset$ sledi da je ili

$$\delta^B(\sigma^B,x_1\cdots x_{m_{i+1}})=\delta^A(\delta^A(a_0,x_1\cdots x_{m_{i+1}-1}),x_{m_{i+1}})\in\tau^B,$$

ili je

$$\delta^B(\sigma^B,x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}})=\delta^A(\delta^A(a_0,x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}-1}),x_{m_{i+1}})\in\tau^B\ ,$$

za neki j, $1\leqslant j\leqslant i$, pri čemu u oba slučaja važi

$$\beta_{m_{i+1}}=\{\delta^A(a_0,x_1\cdots x_{m_{i+1}}),\delta^A(a_0,x_{m_1+1}\cdots x_{m_{i+1}}),\cdots\delta^A(a_0,x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}}),a_0\}.$$

Sa druge strane, $x_1\cdots x_{m_{i+1}}\in L$ i $x_{m_j+1}\cdots x_{m_{i+1}}\in L$, pa prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je

$$x_1\cdots x_{m_j}\in L\cup L^2\cup\cdots\cup L^j,$$

što znači da

$$x_1\cdots x_{m_{i+1}}\in\left(L\cup L^2\cup\cdots\cup L^j\right)\cdot L\subseteq L^2\cup L^3\cup\cdots\cup L^{j+1}\subseteq L\cup L^2\cup\cdots\cup L^{i+1},$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, zbog činjenice da je $m_k=n$, sledi da je

$$u = x_1x_2\cdots x_{m_k} \in L \cup L^2 \cup \cdots \cup L^k \subseteq L^{(+)}.$$

Obratno, uzmimo da je

$$u \in L^{(+)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k.$$

Tada se u može predstaviti u obliku $u = u_1u_2\cdots u_k$, za neki $k \in \mathbb{N}$ i neke $u_i \in L$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Jasno da je $k \leqslant n$ i

$$u_1 = x_1\cdots x_{m_1},\ u_2 = x_{m_1+1}\cdots x_{m_2}, \cdots,\ u_k = x_{m_k+1}\cdots x_{m_k},$$

za neke $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ takve da je $1 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_k = n$. Indukcijom ćemo dokazati da za svaki $i \in \{1,\dots,k\}$ važi $a_0 \in \beta_{m_i}$ i $\beta_{m_i} \cap \tau^B \neq \emptyset$.

Zaista, za proizvoljan l, takav da je $1 \leqslant l < m_1$, imamo da je

$$\delta^B(\sigma^B, x_1\cdots x_l) = \delta^A(\delta^A(a_0, x_1\cdots x_{l-1}), x_l) \in \beta_l,$$

dok iz $x_1\cdots x_{m_1} = u_1 \in L$ dobijamo da je

$$\delta^A(\delta^A(a_0, x_1\cdots x_{m_1-1}), x_{m_1}) = \delta^B(\sigma^B, x_1\cdots x_{m_1}) \in \tau^B,$$

što znači da je $a_0 \in \beta_{m_1}$ i $\delta^B(\sigma^B, x_1\cdots x_{m_1}) \in \beta_{m_1} \cap \tau^B$, pa je $\delta^B(\sigma^B, x_1\cdots x_{m_1}) \cap \tau^B \neq \emptyset$ za $i = 1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve j za koje je $1 \leqslant j \leqslant i < k$, i dokažimo da važi i za $i+1$. Zaista, iz pretpostavke da je $a_0 \in \beta_{m_i}$ imamo da je

$$\delta^B(\sigma^B, x_{m_i+1}\cdots x_l) \in \beta_l,$$

za svaki l, takav da je $m_i < l < m_{i+1}$, dok iz $x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}} = u_{i+1} \in L$ dobijamo da je

$$\delta^A(\delta^A(a_0, x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}-1}), x_{m_{i+1}}) = \delta^B(\sigma^B, x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}}) \in \tau^B.$$

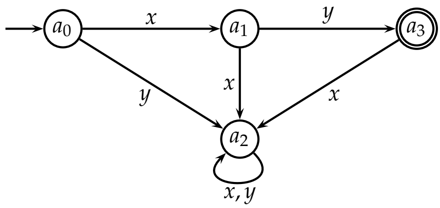
Dakle, $a_0 \in \beta_{m_{i+1}}$ i $\delta^B(\sigma^B, x_{m_i+1}\cdots x_{m_{i+1}}) \in \beta_{m_{i+1}} \cap \tau^B$.

Imajući u vidu da je $m_k = n$, ovim smo pokazali da je

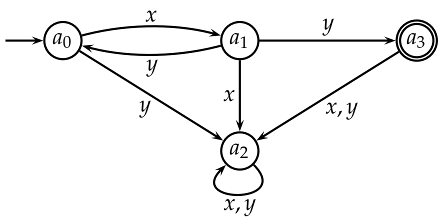
$$\delta^B(\sigma^B, u) \cap \tau^B = \beta_n \cap \tau^B \neq \emptyset,$$

čime je završen dokaz raspoznatljivosti jezika $L^{(+)}$. Raspoznatljivost jezika $L^{(*)}$ sledi na osnovu Teorema 6.1.1. i 6.1.3., jer je $L^{(*)} = L^{(+)} \cup \{e\}$. □

Primer 6.1.11. Neka je dat jezik $L = \{xy\}$. Lako se proverava da je minimalni automat $\mathcal{A}_L$ koji ga raspoznaje predstavljen grafom



Nedeterministički automat koji raspoznaje jezik $L^{(+)} = \{(xy)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, prema prethodnoj teoremi može se predstaviti sledećim grafom:



6.1.4. *Lema o napumpavanju*

Važno svojstvo raspoznatljivih jezika biće predstavljeno narednom teoremom. Jezik koji nema svojstvo "napumpavanja" ne može biti raspoznatljiv. Međutim, postoje jezici koji nisu raspoznatljivi, a imaju ovo svojstvo, te je važno zapamtiti da teorema važi samo u jednom smeru, odnosno, da je možemo koristiti samo da pokažemo da jezik nije raspoznatljiv.

Teorema 6.1.12. (Lema o napumpavanju.) *Neka je $L \subseteq X^*$ beskonačan raspoznatljiv jezik. Tada postoji broj $n \in \mathbb{N}$ takav da svaka reč $u \in L$ dužine $|u| \geqslant n$ može biti zapisana u obliku $u = v_1 w v_2$, pri čemu važi:*

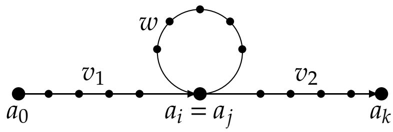
(a) $v_1, v_2 \in X^*$ *i* $w \in X^+$;
(b) $|v_1 w| \leqslant n$;
(c) $v_1 w^m v_2 \in L$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_0, \tau^A)$ konačan automat koji raspoznaje jezik L. Neka je $n = |A|$ broj stanja automata $\mathcal{A}$. Uzmimo proizvoljnu reč $u \in L$ dužine $|u| \geqslant n$, i predstavimo je u obliku

$$u = x_1 x_2 \cdots x_k,$$

gde je $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$, i $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$. Za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ neka je $a_i = \delta^A(a_0, x_1 \cdots x_i)$.

Kako je prema pretpostavci $k \geqslant n$, to se u nizu stanja $a_0, a_1, \dots, a_k$ bar jedno stanje ponavlja. Uzmimo da je a_i prvo stanje u datom nizu koje se ponavlja i neka je a_j prvo njegovo ponavljanje. Uočimo da je $i \geqslant 0$, $j - i > 0$ i $j \leqslant n$, jer su, zbog načina izbora stanja a_i i a_j, stanja $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$ međusobno različita. To je prikazano na sledećoj slici:



Uzmimo sada da je

$$v_1 = \begin{cases} x_1 \cdots x_i & \text{ako je } i \geqslant 1 \\ e & \text{ako je } i = 0 \end{cases},$$

$$w = x_{i+1} \cdots x_j,$$

$$v_2 = \begin{cases} x_{j+1} \cdots x_k & \text{ako je } j \leqslant k-1 \\ e & \text{ako je } j = k \end{cases}.$$

Jasno da važi (a) i (b). Takođe, kako imamo da je

$$a_i = \delta^A(a_0, v_1), \qquad \delta^A(a_i, w) = a_j = a_i \qquad \text{i} \qquad \delta^A(a_j, v_2) = a_k = \delta^A(a_0, u) \in \tau^A,$$

to za proizvoljan $m \in \mathbb{N}^0$ imamo da je

$$\delta^A(a_0, v_1 w^m v_2) = \delta^A(a_i, w^m v_2) = \delta^A(a_i, v_2) = \delta^A(a_j, v_2) \in \tau^A,$$

što znači da je $v_1 w^m v_2 \in L$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Pomenuli smo da se Lema o napumpavanju može uspešno koristiti za dokazivanje neraspoznatljivosti jezika, što ćemo predstaviti sledećim primerom.

Primer 6.1.13. Vratimo se, još jednom, na jezik $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, za koji smo pokazali da ne može biti raspoznat konačnim automatom. Koristeći Lemu o napumpavanju, pokazaćemo još jedan način, kojim se može dokazati neraspoznatljivost jezika L.

Ukoliko bi L bio raspoznatljiv, onda bi postojao broj $n \in \mathbb{N}$ za koji važe uslovi Leme o napumpavanju, pa bi reč $u = x^n y^n$ mogla biti zapisana u obliku $u = v_1 w v_2$. U tom slučaju bi iz $|v_1 w| \leqslant n$ sledilo da je $v_1 = x^i$, $w = x^j$ i $v_2 = x^k y^n$, pri čemu je $i + j + k \leqslant n$, $i, k \geqslant 0$ i $j \geqslant 1$, pa bi smo imali da je

$$x^n y^n = u = v_1 w^0 v_2 = x^i x^k y^n = x^{i+k} y^n,$$

pri čemu je $i + k < n$, što nije moguće. Prema tome, jezik L ne može biti raspoznatljiv.

6.2. Regularni izrazi i Teorema Klinija

U prethodnoj glavi dali smo karakterizaciju raspoznatljivih jezika nad monoidom X^* preko konačnih determinističkih automata i preko relacija glavne (sintaksičke) kongruencije i glavne desne kongruencije na X^*. Lema o napumpavanju nam obezbeđuje alat kojim možemo utvrditi da jezik nije raspoznatljiv. U ovom odeljku ćemo dati karakterizaciju raspoznatljivih jezika u terminima regularnih izraza.

Regularni jezici (ili *regularni skupovi*) nad alfabetom X definišu se rekurzivno na sledeći način:

(1) Prazan skup $\emptyset$ je regularan jezik.
(2) Za svako slovo $x \in X$, $\{x\}$ je regularan jezik.
(3) Ako su L_1 i L_2 regularni jezici, onda su $L_1 \cup L_2$, L_1L_2 i L_1^* regularni jezici

Prazan jezik i jednoelementni jezici se nazivaju *elementarnim jezicima*. Dakle, klasa regularnih jezika predstavlja najmanju klasu jezika koja sadrži elementarne jezike i zatvorena je za operacije unije, množenja i Klinijevu zvezda operaciju.

Da bi pojednostavili predstavljanje regularnih jezika koristimo *regularne izraze* nad alfabetom X na sledeći način:

(1) $\emptyset$ je regularan izraz koji predstavlja prazan skup.
(2) e je regularan izraz koji predstavlja jezik $\{e\}$.
(3) Za $x \in X$, x jeste regularni izraz koji predstavlja jezik $\{x\}$.
(4) Ako su r_{L_1} i r_{L_2} regularni izrazi koji predstavljaju jezike L_1 i L_2, redom, onda su $(r_{L_1}) + (r_{L_2})$ (ili $(r_{L_1}) \cup (r_{L_2})$), $(r_{L_1})(r_{L_2})$ i $(r_{L_1})^*$ regularni izrazi koji predstavljaju $L_1 \cup L_2$, L_1L_2 i L_1^*, redom.

Da bi smanjili broj zagrada u regularnim izrazima dajemo prioritet nekim operacijama:

(1) Zvezda operacija ima prioritet nad unijom i konkatenacijom.
(2) Konkatenacija ima prioritet nad unijom.

Jednostavno se pokazuje da operacije + (operacija unije) i $\cdot$ u regularnim izrazima zadovoljavaju distributivni zakon: Za proizvoljne regularne izraze r_1, r_2 i s važi

$$s(r_1 + r_2) = sr_1 + sr_2,$$
$$(r_1 + r_2)s = r_1s + r_2s.$$

Dakle, jezik L je regularan ako može biti predstavljen nekim regularnim izrazom r_L. Naredna teorema nam ukazuje na mogućnost da isti regularan jezik predstavimo različitim regularnim izrazima, odnosno ukazuje na to da regularna reprezentacija jezika nije jedinstvena.

Teorema 6.2.1. *Svaki regularan jezik može se predstaviti regularanim izrazom u disjunktivnoj normalnoj formi $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, u kome ni jedan r_i, za $i = 1, 2, \ldots n$ ne sadrži operaciju $''+''$.*

Dokaz: Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po složenosti regularnog jezika.

Jezik $L = \emptyset$ sadrži regularan izraz $\emptyset$ u disjunktivnoj normalnoj formi. Za proizvoljno slovo x, jezik $L = \{x\}$ ima regularan izraz x u disjunktivnoj normalnoj formi.

Pretpostavimo da jezik L_1 sadrži regularan izraz $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ u disjunktivnoj normalnoj formi i jezik L_2 sadrži regularan izraz $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ u disjunktivnoj normalnoj formi. Tada

(i) jezik $L_1 \cup L_2$ sadrži regularan izraz $r_1 + r_2 + \cdots + r_m + s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(ii) $L_1 L_2$ ima regularan izraz

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} r_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} s_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_i s_j.$$

(iii) L_1^* ima regularan izraz $(\sum_{i=1}^{m} r_i)^* = (r_1^* r_2^* \cdots r_m^*)^*$ (jednostavno se pokazuje).

Odavde je jasno da svaki regularni jezik može biti predstavljen regularnim izrazom u disjunktivnoj normalnoj formi. □

Teorema 6.2.2. *Dokazati da nad svakom azbukom X postoji neprebrojivo mnogo neregularnih jezika.*

Dokaz: Kako je $X \neq \emptyset$, skup X^* je beskonačan, pa je skup svih jezika nad monoidom X^*(skup svih podskupova od X^*) neprebrojiv, tj. ima 2^{X^*} jezika. Sa druge strane, regularnih izraza nad konačnim skupom X ima samo prebrojivo mnogo. Tako postoji neprebrojivo mnogo jezika nad X koji se ne mogu predstaviti regularnim izrazom. □

Regularan jezik L predstavljen regularnim izrazom r označićemo sa $L(r)$ i jezik L je u tom slučaju *interpretacija regularnog izraza r*.

Pokazaćemo sada, da su regularni jezici raspoznatljivi konačnim automatima i obratno, da se svaki raspoznatljiv jezik može predstaviti regularnim izrazom.

Neka je dat konačan deterministički automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_1, \tau^A)$, stanja $a, b \in A$ i reč $u \in X^*$ takva da je $\delta^A(a, u) = b$. Ako je u slovo ili prazna reč, tada kažemo da reč u prevodi automat $\mathcal{A}$ direktno iz stanja a u stanje b, a ako je $u = x_1 \cdots x_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$, tada kažemo da reč u prevodi automat A iz stanja a u stanje b preko niza međustanja

$$\delta^A(a, x_1), \delta^A(a, x_1x_2), \ldots, \delta^A(a, x_1x_2\cdots x_{m-1}).$$

Pošto je automat $\mathcal{A}$ konačan, njegova stanja se mogu svrstati u konačan niz, tj. skup stanja A se može zapisati u obliku $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, za neki $n \in \mathbb{N}$.

Uzmimo proizvoljne $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sa $L_{ij}^{(0)}$ ćemo označavati skup svih reči iz X^* koje automat $\mathcal{A}$ prevode direktno iz stanja a_i u stanje a_j. Jasno, proizvoljan element iz $L_{ij}^{(0)}$ je ili prazna reč ili neko slovo. Dalje, za $k \in \{1, \ldots, n\}$, sa $L_{ij}^{(k)}$ ćemo označavati skup svih reči iz X^* koje prevode stanje a_i u stanje a_j ili direktno, ili preko međustanja koja pripadaju skupu $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Teorema 6.2.3. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_1, \tau^A)$ konačan automat sa n stanja. Tada za proizvoljne $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi sledeća rekurentna formula:*

$$L_{ij}^{(k)} = L_{ij}^{(k-1)} \cup L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)}. \tag{6.4}$$

Dokaz: Označimo sa K desnu stranu jednakosti 6.4.

Najpre ćemo dokazati da je $K \subseteq L_{ij}^{(k)}$. Uzmimo proizvoljnu reč $u \in K$. Ako je $u \in L_{ij}^{(k-1)}$, onda je jasno da je $u \in L_{ij}^{(k)}$, što i treba dokazati. Neka je

$$u \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)}.$$

Tada je $u = u_1 u_2 u_3$, gde je $u_1 \in L_{ik}^{(k-1)}$, $u_3 \in L_{kj}^{(k-1)}$ i $u_2 \in \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)}$, što znači da je ili $u_2 = e$, ili je $u_2 = v_1 \cdots v_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke $v_1, \ldots, v_m \in L_{kk}^{(k-1)}$. Sada imamo da je

$$\delta^A(a_i, u_1) = a_k, \quad \delta^A(a_k, u_2) = a_k, \quad \delta^A(a_k, u_3) = a_j \quad \text{i} \quad \delta^A(a_i, u) = a_j.$$

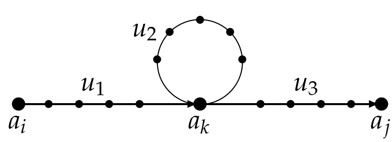
Jasno, sva međustanja u prelazima iz a_i u a_k sa u_1, iz a_k u a_k sa u_2 i iz a_k u a_j sa u_3, ako ih ima, pripadaju skupu $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, dok se, u prelazu iz a_i u a_j sa u, osim njih, javlja i a_k kao međustanje. Ovim smo dokazali da $u \in L_{ij}^{(k)}$, što znači da je $K \subseteq L_{ij}^{(k)}$.

Obratno, uzmimo da je $u \in L_{ij}^{(k)}$. Ako a_k nije međustanje u prelazu iz a_i u a_j sa u, tada je $u \in L_{ij}^{(k-1)} \subseteq K$. Uzmimo da je a_k međustanje u tom prelazu. Tada je jasno da je $u \in X^+$, odnosno $u = x_1 x_2 \cdots x_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Neka su $s_1, \ldots, s_t$, $1 \leqslant t \leqslant m$, svi brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$ za koje važi

$$\delta^A(a_i, x_1 \cdots x_{s_l}) = a_k,$$

$1 \leqslant l \leqslant t$, pri čemu je $s_1 < s_2 < \cdots < s_t$.

Prema gornjoj pretpostavci, postoji bar jedan takav broj. To je prikazano na sledećoj slici:



Neka je

$$u_1 = x_1 \cdots x_{s_1}, \quad u_2 = \begin{cases} x_{s_1+1} \cdots x_{s_t} & \text{za } t > 1 \\ e & \text{za } t = 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad u_3 = x_{s_t+1} \cdots x_m.$$

Jasno da je $u_1 \in L_{ik}^{(k-1)}$ i $u_3 \in L_{kj}^{(k-1)}$. Ako je $t = 1$, odnosno $u_2 = e$, tada neposredno dobijamo da je

$$u = u_1 u_2 u_3 \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)} \subseteq K.$$

Uzmimo da je $t > 1$, odnosno da je $u_2 = x_{s_1+1} \cdots x_{s_t}$.

Tada se u_2 može zapisati u obliku $u_2 = v_1 \cdots v_{t-1}$, gde za $1 \leqslant l \leqslant t-1$ važi $v_l = x_{s_l+1} \cdots x_{s_{l+1}}$. Odavde je jasno da

$$v_1, \ldots, v_{t-1} \in L_{kk}^{(k-1)},$$

što dokazuje da je $u_2 \in \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)}$. Prema tome, imamo da je

$$u = u_1 u_2 u_3 \in L_{ik}^{(k-1)} \left(L_{kk}^{(k-1)}\right)^{(*)} L_{kj}^{(k-1)} \subseteq K.$$

Dakle, dokazali smo da je $L_{ij}^{(k)} \subseteq K$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Veza između regularnih i raspoznatljivih jezika data je čuvenom Klinijevom teoremom:

Teorema 6.2.4. (Teorema Klinija.) *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je raspoznatljiv ako i samo ako se može predstaviti regularnim izrazom.*

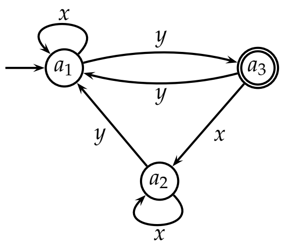
Dokaz: Neka je L raspoznatljiv jezik i neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_1, \tau^A)$ konačan automat sa n stanja koji raspoznaje L. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $T = \{a_{s_1}, \ldots, a_{s_m}\}$, za neke $s_1, \ldots, s_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada imamo da je

$$L = \{u \in X^* \mid \delta^A(a_1, u) \in \tau^A\} = \bigcup_{k=1}^{m} L_{1s_k}^{(n)}.$$

Korišćenjem rekurentne formule 6.4, za svaki $k \in \{1, \ldots, m\}$, jezik $L_{1s_k}^{(n)}$ se može dobiti iz elementarnih jezika oblika $L_{ij}^{(0)}$, korišćenjem samo operacija unije, proizvoda i zvezda operacije, koje se jedine javljaju u 6.4, konačno mnogo puta. Prema tome, i jezik L se može dobiti iz elementarnih jezika upotrebom samo operacija unije, proizvoda i zvezda operacije konačno mnogo puta. Dakle, L je regularan jezik.

Obrat sledi neposredno iz Teorema 6.1.1., 6.1.3., 6.1.8. i 6.1.10. □

Primer 6.2.5. Neka je automat $\mathcal{A} = (A, X, \delta^A, a_1, \tau^A)$ dat grafom



i neka je L jezik raspoznatljiv automatom $\mathcal{A}$. Imamo da je

$$L = L_{13}^{(3)} = L_{13}^{(2)} \cup L_{13}^{(2)} \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)} L_{33}^{(2)} = L_{13}^{(2)}\Big(\{e\} \cup \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)} L_{33}^{(2)}\Big) =$$
$$= L_{13}^{(2)}\Big(\{e\} \cup \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)}\Big) = L_{13}^{(2)} \left(L_{33}^{(2)}\right)^{(*)},$$

pri čemu je

$$L_{13}^{(2)} = L_{13}^{(1)} \cup L_{12}^{(1)} \left(L_{22}^{(1)}\right)^{(*)} L_{23}^{(1)} \quad \text{i} \quad L_{33}^{(2)} = L_{33}^{(1)} \cup L_{32}^{(1)} \left(L_{22}^{(1)}\right)^{(*)} L_{23}^{(1)}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
L_{13}^{(1)} &= L_{13}^{(0)} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \Big(\{e\} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)}\Big) L_{13}^{(0)} = \\
&= \Big(\{e\} \cup \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)}\Big) L_{13}^{(0)} = \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \{x, e\}^{(*)} y = x^* y \\
L_{12}^{(1)} &= L_{12}^{(0)} \cup L_{11}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = x^* \cdot \emptyset = \emptyset \\
L_{22}^{(1)} &= L_{22}^{(0)} \cup L_{21}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \{x, e\} \cup y x^* \cdot \emptyset = \{x, e\} \\
L_{23}^{(1)} &= L_{23}^{(0)} \cup L_{21}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \emptyset \cup y x^* y = y x^* y \\
L_{33}^{(1)} &= L_{33}^{(0)} \cup L_{31}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{13}^{(0)} = \{e\} \cup y x^* y \\
L_{32}^{(1)} &= L_{32}^{(0)} \cup L_{31}^{(0)} \left(L_{11}^{(0)}\right)^{(*)} L_{12}^{(0)} = \{x\} \cup y x^* \cdot \emptyset = \{x\},
\end{aligned}$$

to je $L_{23}^{(2)} = x^* y$ i $L_{33}^{(2)} = \{e\} \cup y x^* \cup x \{x, e\}^{(*)} y x^* y = \{e\} \cup x^* y X^{(*)} y$, odakle je

$$L = x^* y\Big(\{e\} \cup x^* y x^* y\Big)^{(*)} = x^* y\Big(x^* y x^* y\Big)^{(*)}.$$

Poslednji izraz daje nam regularno predstavljanje jezika L.

6.3. Jezici generisani regularnim gramatikama

Podsetimo da smo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazvali regularnom gramatikom ako svako njeno pravilo ima ili oblik

$$\alpha \to p\beta, \tag{6.5}$$

gde su $\alpha, \beta \in V - X$ i $p \in X^+$, ili oblik

$$\alpha \to q, \tag{6.6}$$

gde je $\alpha \in V - X$ i $q \in X^*$, kao i da smo jezike generisane ovakvim gramatikama nazivali regularnim jezicima.

Glavni cilj ovog odeljka je da pokažemo jednakost klase jezika generisanih ovim gramatikama i klase jezika predstavljenih regularnim izrazima, odakle i potiče njihov zajednički naziv.

Teorema 6.3.1. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je regularan ako i samo ako je generisan gramatikom $G = (V, X, \pi)$ čije svako pravilo je ili oblika*

$$\alpha \to x\beta, \tag{6.7}$$

gde su $\alpha, \beta \in V - X$ i $x \in X$, ili je oblika

$$\alpha \to e, \tag{6.8}$$

gde je $\alpha \in V - X$.

Dokaz: Neka je $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ neka regularna gramatika i $\sigma \in V - X$. Konstruisaćemo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$ na taj način što ćemo pravila iz π oblika (6.5), za $|p| > 1$ zameniti nizom pravila oblika (6.7), a pravila oblika (6.6), za $|q| \geqslant 1$, pravilima oblika (6.8), pri čemu ćemo uvesti i neke nove pomoćne simbole. Naime, svako pravilo oblika (6.5), gde je $p = x_1 x_2 \cdots x_n$, za neki $n \geqslant 2$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, zamenićemo skupom pravila oblika

$$\alpha \to x_1\xi_1,\ \xi_1 \to x_2\xi_2,\ \dots,\ \xi_{n-1} \to x_n\beta, \tag{6.9}$$

pri čemu nove pomoćne simbole $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ dodajemo skupu pomoćnih simbola gramatike G. Sa druge strane, svako pravilo oblika (6.6), gde je $q = y_1 y_2 \cdots y_m$, za $m \in \mathbb{N}$ i $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$, zamenjujemo pravilima oblika

$$\alpha \to y_1\eta_1,\ \eta_1 \to y_2\eta_2,\ \dots,\ \eta_{m-1} \to y_m\eta_m,\ \eta_m \to e, \tag{6.10}$$

pri čemu nove pomoćne simbole $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ dodajemo skupu pomoćnih simbola gramatike G. Jasno da je poslednje pravilo u (6.10) oblika (6.8), dok su ostala oblika (6.7). Prema tome, pravila novodobijene gramatike G' zadovoljavaju uslove (6.7) i (6.8). Takođe, svakom pravilu oblika (6.5) gramatike G, za $p = x_1 x_2 \cdots x_n$, u gramatici G' odgovara izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} x_1 x_2 \cdots x_n \beta$, dok pravilu oblika (6.6), gde je $q = y_1 y_2 \cdots y_m$, u gramatici G' odgovara izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} y_1 y_2 \cdots y_m$. Prema tome, svakom izvođenju $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u gramatici G odgovara neko (duže) izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u gramatici G', odakle dobijamo da je $L(G,\sigma) \subseteq L(G',\sigma)$.

Da bi dokazali obratnu inkluziju, krenućemo od reči $w \in L(G',\sigma)$. Ako posmatramo gramatiku $G'' = (V', X, \pi \cup \pi')$, tada je jasno da je $w \in L(G'',\sigma)$. Prema tome, reč w ima u gramatici G'' izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w. \tag{6.11}$$

Indukcijom po broju javljanja simbola iz $V' - V$ u (6.11) dokazaćemo da w ima izvođenje iz σ i u G. Ako u (6.11) nema simbola iz $V' - V$, tada je jasno da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ u G. U suprotnom, prvo pojavljivanje simbola iz $V' - V$ u (6.11) zasnovano je ili na pravilu oblika

$$\alpha \to x_1\xi_1,$$

nastalom iz pravila π oblika (6.5), njegovom zamenom sa (6.9), ili na pravilu oblika

$$\alpha \to y_1\eta_1,$$

nastalom iz nekog pravila iz π oblika (6.6), njegovom zamenom sa (6.10). U prvom slučaju, kako reč w ne sadrži pomoćne simbole, a gramatika G'' nema pravila oblika $\xi_i \to u$, za $u \in X^*$, to jedini način na koji se ξ_1 može izgubiti u izvođenju (6.11) jeste da se ξ_1 zameni sa $x_2\xi_2$. Ista argumentacija važi i za $\xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, pa na isti način dolazimo do zamene simbola ξ_{n-1} sa $x_n\beta$. Prema tome, u izvođenju (6.11) može se naći niz prelaza oblika (6.9), koji se u gramatici G'' može zameniti prelazom $\alpha \to x_1x_2\cdots x_n\beta$, pa broj pojavljivanja simbola iz $V' - V$ u (6.11) može biti redukovan. Slično, u drugom slučaju izvođenje uključuje uzastopne zamene η_1 sa $y_2\eta_2$, itd., do zamene η_{m-1} sa $y_m\eta_m$, i svi ti prelazi mogu biti zamenjeni jednim prelazom $\alpha \to y_1y_2\cdots y_m$ u G''.

U oba slučaja izvođenje (6.11) zamenjuje se drugim izvođenjem koje ima manji broj pojavljivanja simbola iz $V' - V$. Odavde indukcijom dobijamo da se to izvođenje može zameniti izvođenjem u kome nema simbola iz $V' - V$, a to znači izvođenjem u G. Prema tome, $w \in L(G,\sigma)$, pa je $L(G',\sigma) \subseteq L(G,\sigma)$, što je i trebalo dokazati. □

Sada smo spremni da dokažemo teoremu koja uspostavlja jednakost među jezicima generisanim regularnim gramatikama i raspoznatljivim jezicima.

Teorema 6.3.2. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je generisan regularnom gramatikom ako i samo ako je raspoznatljiv.*

Dokaz: Neka je L raspoznatljiv jezik i neka je $\mathcal{A} = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ konačan automat koji raspoznaje jezik L. Posmatrajmo gramatiku $G = (V, X, \pi)$, za koju je $V = A \cup X$ i skup π pravila je zadat sa

$$\begin{array}{ll} a \to x(\delta(a,x)) & \text{za sve } a \in A,\, x \in A, \\ t \to e & \text{za svaki } t \in \tau. \end{array} \tag{6.12}$$

Dokazaćemo da je $L = L(G,a_0)$.

Najpre ćemo dokazati, indukcijom po dužini reči u, da za proizvoljne $a,b \in A$ i $u \in X^*$ važi

$$a \overset{*}{\Rightarrow} ub \;\Leftrightarrow\; \delta(a,u) = b. \tag{6.13}$$

Prema (6.12), to važi za sva slova. Uzmimo dalje da je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $n \geqslant 2$ i $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$ i pretpostavimo da (6.13) važi za sve reči dužine manje od n.

Ako je $\delta(a,u) = b$, tada za $c = \delta(a,x_1\cdots x_{n-1})$ imamo da je $a \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}c$, prema indukcijskoj pretpostavci, dok iz $\delta(c,x_n) = b$, prema (6.12) imamo da je $c \to x_nb$ pravilo iz π, pa dobijamo izvođenje $x_1\cdots x_{n-1}c \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_nb$. Prema tome,

$$a \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}c \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_nb = ub,$$

pa je dakle $a \overset{*}{\Rightarrow} ub$.

Obratno, neka je $a \overset{*}{\Rightarrow} ub$. Poslednji član u ovom izvođenju mora biti oblika $w \Rightarrow ub$, gde je $w \in V^*$, pri čemu ovo neposredno izvođenje dobijamo primenom nekog pravila oblika $c \to x(\delta(c,x))$, za neke $c \in A$ i $x \in X$. To znači da je $w = pcq$ i $ub = pxc'q$, gde su $p,q \in V^*$ i $c' = \delta(c,x) \in A$. Iz $ub = pxc'q$, kako je $b \in A$ i $u \in X^+$, sledi da je $q = e$, $c' = b$ i $px = u$, pa je dakle $w = pc$, pri čemu je $p \in X^+$ i $|p| < n$. Sada iz $a \overset{*}{\Rightarrow} w = pc$, prema indukcijskoj pretpostavci dobijamo da je $\delta(a,p) = c$, odakle imamo da je

$$b = c' = \delta(c,x) = \delta(\delta(a,p),x) = \delta(a,px) = \delta(a,u),$$

što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da (6.13) zaista važi.

Sada dobijamo da važi

$$\begin{aligned} u \in L &\Leftrightarrow \delta(a_0,u) = t, \text{ za neki } t \in \tau, \\ &\Leftrightarrow a_0 \overset{*}{\Rightarrow} ut, \text{ za neki } t \in \tau, && \text{(prema (6.13))} \\ &\Leftrightarrow a_0 \overset{*}{\Rightarrow} u, && \text{(prema (6.12))}, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $L = L(G,a_0)$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka je $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (V,X,\pi)$ regularna gramatika. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je svako pravilo ili oblika (6.7) ili oblika (6.8). Uzmimo da je $A = V - X$ i $\gamma: A \times X \to 2^A$ preslikavanje definisano sa

$$\gamma(\alpha,x) = \{\beta \in A \,|\, \alpha \to x\beta \text{ je pravilo iz } \pi\}, \tag{6.14}$$

gde je $\alpha \in A = V - X$ i $x \in X$. Tada je $\mathcal{A} = (A,X,\gamma,\sigma,\tau)$ nedeterministički automat. Neka je, takođe,

$$\tau = \{\alpha \in A \,|\, \alpha \to e \text{ je pravilo iz } \pi\}.$$

Dokazaćemo da za $\alpha \in A$ i $u \in X^+$ važi

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \gamma(\sigma,u). \tag{6.15}$$

Za $|u| = 1$, tj. za $u = x \in X$ imamo

$$\begin{aligned} \sigma \overset{*}{\Rightarrow} x\alpha &\Leftrightarrow \sigma \to x\alpha \text{ je pravilo iz } \pi \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \gamma(\sigma,x), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Uzmimo dalje da je $u = x_1x_2\cdots x_n$, za $n \geqslant 2$ i $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$, i pretpostavimo da (6.15) važi za sve reči iz X^* dužine manje od n.

Uzmimo da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha = x_1x_2\cdots x_n\alpha$. To znači da je

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}\alpha' \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_n\alpha,$$

pri čemu je $\alpha' \to x_n\alpha$ pravilo iz π. To znači da je $\alpha \in \gamma(\alpha',x_n)$, dok sa druge strane, prema indukcijskoj pretpostavci imamo da je $\alpha' \in \gamma(\sigma,x_1\cdots x_{n_1})$. Prema tome, imamo da je

$$\alpha \in \gamma(\alpha',x_n) \subseteq \gamma(\gamma(\sigma,x_1\cdots x_{n-1}),x_n) = \gamma(\sigma,x_1\cdots x_n) = \gamma(\sigma,u),$$

što je i trebalo dokazati.

Sa druge strane, uzmimo da je $\alpha \in \gamma(\sigma,u)$. Neka je

$$\gamma(\sigma,x_1\cdots x_n) = \mu_n,$$

gde je

$$\mu_1 = \gamma(\sigma,x_1),\;\; \mu_2 = \gamma(\mu_1,x_2),\;\; \dots,\;\; \mu_n = \gamma(\mu_{n-1},x_n).$$

Tada je $\alpha = \gamma(\sigma,u) = \mu_n$, odnosno $\alpha \in \gamma(\beta,x_n)$, za neki $\beta \in \mu_{n-1}$, što prema (6.14) znači da je $\beta \to x_n\alpha$ pravilo iz π, odakle dobijamo

$$x_1\cdots x_{n-1}\beta \Rightarrow x_1\cdots x_{n-1}x_n\alpha = u\alpha.$$

Takođe, iz $\beta \in \mu_{n-1} = \gamma(\sigma,x_1\cdots x_{n-1})$, prema indukcijskoj pretpostavci imamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}\beta$. Prema tome, $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} x_1\cdots x_{n-1}\beta \Rightarrow u\alpha$, čime smo dokazali da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha$, a time i upotpunili dokaz za (6.15).

Sada imamo da važi

$$\begin{aligned} u \in L = L(G,\sigma) &\Leftrightarrow \sigma \overset{*}{\Rightarrow} u, \\ &\Leftrightarrow \sigma \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha, \;\text{ za neki } \alpha \in \tau^A \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \gamma(\sigma,u), \;\text{ za neki } \alpha \in \tau^A \qquad \text{(prema (6.15))} \\ &\Leftrightarrow \gamma(\sigma,u) \cap \tau^A \neq \emptyset, \end{aligned}$$

što znači da automat A raspoznaje jezik L. Ovim je dokaz kompletiran. □

Iz prethodne teoreme i Teoreme Klinija direktno sledi naredno tvrđenje

Posledica 6.3.3. *Jezik $L \subseteq X^*$ nad konačnim alfabetom X je generisan nekom regularnom gramatikom ako i samo ako može biti predstavljen nekim regularnim izrazom.*

6.4. Reprezentacija regularnih izraza pomoću grafova

Jedan od načina reprezentacije regularnih izraza je njihovo predstavljanje pomoću grafova.

Usmereni graf je uređeni par $G = (V,E)$, gde je V neprazan skup, čije elemente nazivamo *čvorovima* grafa, dok je $E \subseteq V \times V$ i njegove elemente nazivamo *granama* grafa. Za granu $(a,b) \in E$ kažemo da polazi iz čvora a i završava se u b i kažemo da je usmerena grana grafa G. Prema tome, grana (a,b) je izlazna grana za čvor a i ulazna grana za čvor b.

Petlja je grana koja i počinje izavršava se u istom čvoru, tj. koja je istovremeno i ulazna i izlazna grana za isti čvor.

Put u grafu predstavlja konačan niz grana $e_1,e_2,\dots,e_n$, takav da za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, početni čvor grane e_{i+1} jeste završni čvor grane e_i. *Ciklus* je put koji počinje i završava se u istom čvoru.

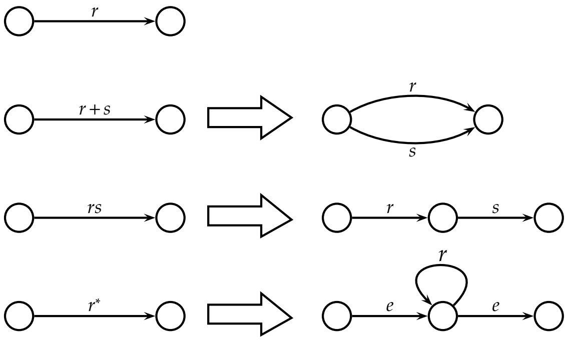
U dijagramu grafa $G = (V,E)$ čvor se obično predstavlja krugom unutar koga se piše oznaka čvora, dok strelica koja počinje u čvoru a i završava se u čvoru b predstavlja granu (a,b). Kako ponekad postoji više takvih grana, svakoj grani pridružićemo *oznaku*, tj. posmatraćemo, tzv. *označene grafove*. Formalno, grana u označenom grafu je trojka (a,x,b), gde su a i b čvorovi, a x je oznaka grane.

Postoji interesantan način za predstavljanje regularnih izraza označenim grafovima pri čemu su oznake grana iz skupa $X \cup \{e\}$. Graf kojim se može predstaviti dati regularan izraz r, u oznaci $G(r)$, dobija se na sledeći način:

1) Počinjemo sa dva čvora-*inicijalnim* i *završnim* i crtamo granu, od inicijalnog ka završnom čvoru, koju označavamo sa r.
2) Naredni postupak ponavljamo sve dok oznaka svake grane ne bude slovo iz $X \cup \{e\}$:

   Svaku granu koja ima oznaku $r+s$ menjamo sa dve grane sa oznakama r i s.
   Svaku granu sa oznakom rs menjamo dodavanjem novog čvora i dve grane označene sa r i s.
   Svaku granu čija je oznaka r^* zamenjujemo novim čvorom i dodajemo tri nove grane označene sa e,r,e kao na datoj slici.

3) Brišemo sve grane sa oznakom $\emptyset$.



(R1) Graf reprezentacija $G(r)$ regularnog izraza r.

Teorema 6.4.1. *Neka je r regularan izraz. Reč u pripada jeziku $L(r)$ ako i samo ako postoji put u grafu $G(r)$ koji je označen sa u.*

Dokaz: Primetimo da važi sledeće:

Reč $u \in L(r)$ ako i samo ako postoji inicijalni čvor a_1 i završni a_k i put među čvorovima $a_1, a_2, \dots a_k$ grafa G takav da $u \in L(r_1)L(r_2)\dots L(r_{k-1})$, pri čemu je r_i oznaka grane (a_i, a_{i+1}) za $i = 1, \dots, k-1$.

Obratno, ako $u \in G(R)$ i ako pogledamo graf reprezentaciju (R1), onda tvrđenje $u \in L(r)$ važi za izraz u oblika $x + y$, xy, x^*, gde su x, y slova ulaznog alfabeta. Dalje, zbog načina zamene broja grana i oznaka grana u grafu, koji predstavlja dati izraz, tvrđenje će važiti i za izraze koji se dobijaju kombinacijom i većim brojem ponavljanja izraza ovog oblika. Zatim brišemo grane sa oznakom $\emptyset$, jer je $L(\emptyset) = \emptyset$. Dakle, svaka grana je označena tačno jednim simbolom iz $X \cup \{e\}$, te $u \in L(r)$ ako i samo ako postoji put u $G(r)$ čija je oznaka upravo u. □

Teorema 6.4.2. *Neka je r regularan izraz. Tada svaka e-grana (u, v) u $G(r)$ koja je jedinstvena izlazna grana nefinalnog čvora a ili jedinstvena ulazna grana neinicijalnog čvora b može da se skupi u jedan čvor, pri čemu se zadržavaju sve osobine grafa.*

Dokaz: Da bi uočili zašto je moguće obrisati e-grane, pretpostavimo da je e-grana (a, b) jedinstvena izlazna grana iz a, uz pretpostavku da a nije finalni čvor. Neka je $G'(r)$ graf dobijen iz $G(r)$ skupljanjem grane (a, b) u jedan čvor c. Označimo sa a_1 inicijalni, a sa a_k finalni čvor, između kojih je put označen izrazom r. Pokazaćemo da za svaki put π od a_1 do a_k u $G(r)$ postoji put π' iz a_1 u a_k u $G'(r)$ označen na isti način kao π i obratno.

Neka je π put od a_1 do a_k. Ako put ne prolazi kroz čvor a, jasno je da isti put postoji i u $G'(r)$ i da su oznake nepromenjene. Ako π prolazi kroz a delimo ga na dva puta, jedan od a_1 do prvog pojavljivanja čvora a i drugi, od prvog pojavljivanja a do a_k. Obzirom da je (a, b) jedina izlazna grana iz a, drugi deo puta mora da počinje ovom granom sa oznakom e. Skupljanje grane (a, b) u jedan čvor c ne menja prvi deo puta, dok skupljanje početka drugog dela puta u jedan čvor čuva oznake. Tako dobijamo put π' u $G'(r)$ koji ima iste oznake kakve ima i put π u $G(r)$.

Obratno, neka je π' put od a_1 do a_k u $G'(r)$. Ako put ne prolazi kroz c jasno je da nije došlo do promene puta π iz $G(r)$. Ako put prolazi kroz c, označimo sa π_1' prvi deo puta od a_1 do c i sa π_2' deo puta od c do a_k. Kako je (a,b) jedina izlazna e-grana iz a, prva grana (c,x) u π_2', ako postoji, odgovara grani (b,x) u $G(r)$ (ili, ako je $x = c$, onda (c,c) odgovara (b,b)).

Takođe, ako poslednja grana u π_1' jeste (y,c), onda, ili postoji grana (y,a) u $G(r)$ ili grana (y,b) u $G(r)$ koja ima istu oznaku kao (y,c). U prvom slučaju menjamo c na putu π_1' granom (a,b), dok u drugom slučaju čvor c, jednostavno, zamenjujemo čvorom b. Na ovaj način eliminisali smo pojavljivanje čvora c u π' bez promena oznaka.

Nastavljamo postupak sve dok ne eliminišemo sva pojavljivanja čvora c i dobijamo put π u $G(r)$ sa istim oznakama. Na ovaj način dobijamo put π koji počinje u a_1 i završava se u a_k. Ako c nije finalni čvor u $G'(r)$ nismo promenili poslednji čvor na putu π', što znači da se i π i π' završavaju u istom čvoru a_k. Ako je c finalni čvor u $G'(r)$, onda b mora da bude finalni čvor u $G(r)$, obzirom da je, prema pretpostavci, a nefinalni čvor. Ovim smo kompletirali dokaz prvog dela zadatka.

Drugi deo tvrđenja pokazuje se dualno. □

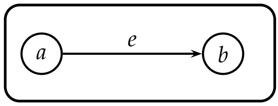
6.5. Automati sa e-prelazima

U ovom poglavlju predstavićemo klasu nedeterminističkih automata sa e-prelazima, u kojima postoji put između stanja označen praznom rečju e . Graf prelaza e-automata je označeni graf koji predstavlja neki regularni izraz r, pri čemu je jezik raspoznatljiv automatom interpretacija ovog regularnog izraza, tj. $L = L(r)$.

Nedeterministički automat sa e-prelazima ili, jednostavnije, *e-automat* je uređena petorka $\mathcal{A}_e = (A_e, X, \gamma^{A_e}, \sigma^{A_e}, \tau^{A_e})$, gde svi simboli imaju isto značenje kao u nedeterminističkom slučaju osim prelaza

$$\gamma^{A_e} : A_e \times (X \cup \{e\}) \to 2^{A_e}.$$

Dakle, jedina razlika između ovih automata i nedeterminističkih automata je što su dozvoljeni prelazi:



Ovakvi prelazi se nazivaju e-prelazi.

Put u e-automatu je niz prelaza iz stanja u stanje, od kojih je svaki označen elementom skupa $X \cup \{e\}$. Reč (string) koja odgovara ovom putu je niz ovih oznaka redom. Kažemo da e-automat prihvata reč u ako postoji put iz nekog inicijalnog stanja u neko završno (terminalno) stanje, tako da konkatenacijom njegovih oznaka dobijamo upravo reč u.

Za $x \in X$ i proizvoljne prirodne brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ uvek važi $x = e^m x e^n$, te se može smatrati da je x reč kod koje slovu x predhodi proizvoljan broj, recimo m praznih reči, a iza x sledi još neki broj, na pr. n, praznih reči.

Ovu reč nazivamo *e-ekstenzijom* simbola x. Vrednost ove ekstenzije je x. Možemo definisati i *e-ekstenziju* reči $u \in X^*$, kao proizvod e-ekstenzija svakog slova koje se javlja u reči u, redom.

Kažemo da e-automat $\mathcal{A}_e$ prihvata reč $u \in X^*$ ako neka e-ekstenzija od u označava put iz nekog inicijalnog, do nekog terminalnog stanja.

Skup svih reči koje prihvata e-automat $\mathcal{A}_e$ nazivamo *jezik e-automata* i kao i obično, s označavamo ga sa $[\![\mathcal{A}_e]\!]$.

Za stanje $a \in A_e$, definisaćemo *e-zatvorenje* stanja a, u oznaci a^ε, sastoji se od stanja a i svih stanja do kojih se iz a može stići putevima koji su označeni samo e-ovima.

Definišimo *e-zatvorenje* skupa stanja A_e kao uniju e-zatvorenja svih stanja iz A.

$$A_e^\varepsilon = \bigcup_{a \in A_e} a^\varepsilon,$$

Pre nego što definišemo proširenu funkciju prelaza na e-automatu uvešćemo sledeću oznaku kako bi pojednostavili pisanje

$$\gamma^{A_e}(a^\varepsilon, x) = \bigcup_{b \in a^\varepsilon} \gamma^{A_e}(b, x).$$

Proširena funkcija prelaza (u istoj oznaci) $\gamma^{A_e} : A_e \times X^* \to 2^{A_e}$ je jedinstvena funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:

$$\gamma^{A_e}(a, e) = a^\varepsilon;$$
$$\gamma^{A_e}(a, x) = (\gamma^{A_e}(a^\varepsilon, x))^\varepsilon;$$
$$\gamma^{A_e}(a, xu) = \bigcup_{b \in (\gamma^{A_e}(a^\varepsilon, x))^\varepsilon} \gamma^{A_e}(b, u);$$

za $a \in A$, $x \in X$ i $u \in X^*$.

Jasno je da se jezik raspoznatljv e-automatom može definisati sa

$$[\![\mathcal{A}_e]\!] = \{u \in X^* \mid \gamma^{A_e}(a, u) \cap \tau^{A_e} \neq \emptyset \text{ za neko } a \in \sigma^A\}.$$

Neka je $\mathcal{A}_e = (A_e, X, \gamma^{A_e}, \sigma^{A_e}, \tau^{A_e})$ nedeterministički automat sa e-prelazima. Definišimo nedeterministički automat

$$\mathcal{B}^e = (B^e, X, \gamma^{B^e}, \sigma^{B^e}, \tau^{B^e}),$$

na sledeći način:

$B^e = A_e \cup \{\beta\}$, pri čemu je $\beta \notin A_e$ novo stanje;
$\sigma^{B^e} = \sigma^{A_e} \cup \{\beta\}$;
$\tau^{B^e} = \begin{cases} \tau^{A_e} \cup \beta & \text{ako je } e \in [\![\mathcal{A}]\!] \\ \tau^{A_e} & \text{u protivnom} \end{cases};$
Funlcija $\gamma^{B^e} : B^e \times X \to 2^{B_e}$ je definisana sa:

$$\gamma^{B^e}(\beta, x) = \emptyset, \text{ za } x \in X \text{ i}$$
$$\gamma^{B^e}(a, x) = (\gamma^{A_e}(a^\varepsilon, x))^\varepsilon, \text{ za sve } a \in A \text{ i } x \in X.$$

Naredna teorema pokazuje da, za proizvoljan, konačan e-automat, postoji njemu ekvivalentan nedeterministički automat.

Teorema 6.5.1. *Neka je $\mathcal{A}_e = (A_e, X, \gamma^{A_e}, \sigma^{A_e}, \tau^{A_e})$ nedeterministički automat sa e-prelazima i $\mathcal{B}^e = (B^e, X, \gamma^{B^e}, \sigma^{B^e}, \tau^{B^e})$ odgovarajući nedeterministički automat. Ovi automati raspoznaju isti jezik, odnosno $[\![\mathcal{B}^e]\!] = [\![\mathcal{A}_e]\!]$.*

Dokaz: Najpre ćemo indukcijom dokazati da za svako stanje $a \in A$ i $u \in X^+$ važi jednakost:

$$\gamma^{B^e}(a, u) = \gamma^{A_e}(a, u).$$

Dokazujemo, dakle, da ova jednakost važi za neprazne reči.

Za slovo $x \in X$ i stanje $a \in A$ važi, prema definiciji,

$$\gamma^{B^e}(a, x) = (\gamma^{A_e}(a^\varepsilon, x))^\varepsilon = \gamma^{A_e}(a, x). \tag{6.16}$$

Pretpostavimo da jednakost važi za sve $u \in X^+$, gde je $|u| = n$. Tada za $v = xu$ važi za

$$\gamma^{B^e}(a, v) = \gamma^{B^e}(a, xu) = \bigcup_{b \in \gamma^{B^e}(a,x)} \gamma^{B^e}(b, u). \tag{6.17}$$

Prema induktivnoj pretpostavci i prema jednakosti (6.16) imamo

$$\begin{aligned} \gamma^{B^e}(a, v) &= \bigcup_{b \in \gamma^{B^e}(a,x)} \gamma^{B^e}(b, u) = \bigcup_{b \in \gamma^{A_e}(a,x)} \gamma^{A_e}(b, u), \\ &= \gamma^{A_e}(a, xu) = \gamma^{A_e}(a, v), \end{aligned}$$

te jednakost važi za sve neprazne reči. Sada ćemo pokazati da je $[\![\mathcal{A}_e]\!] = [\![\mathcal{B}^e]\!]$. Primetimo najpre da

$$e \in [\![\mathcal{A}_e]\!] \;\Leftrightarrow\; \beta \in \tau^{B^e} \;\Leftrightarrow\; e \in [\![\mathcal{B}^e]\!].$$

Ako ovo ne važi, posmatrajmo $u \in X^+$.

Po definiciji $u \in [\![\mathcal{B}^e]\!]$ ako postoji stanje $a \in \sigma^{B^e}$ za koje je $\gamma^{B^e}(a,u) \cap \tau^{B^e} \neq \emptyset$. Kako je $x \neq e$ stanje β nema nikakvu ulogu, pa možemo reći da postoji $a \in \sigma^{A_e}$ tako da je $\gamma^{B^e}(a,u) \cap \tau^{B^e} \neq \emptyset$. Kako je $\gamma^{B^e}(a,u) = \gamma^{A_e}(a,u)$ važi $\gamma^{A_e}(a,u) \cap \tau^{A_e} \neq \emptyset$, pa $u \in [\![\mathcal{A}_e]\!]$.

Kako svuda važi i obratna implikacija, važi i inkluzija na drugu stranu, pa imamo da $u \in [\![\mathcal{B}^e]\!]$ ako i samo ako $u \in [\![\mathcal{A}_e]\!]$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz kompletiran. □

Jednostavno se pokazuje da je za svaki regularan izraz r moguće konstruisati nedeterministički e-automat $\mathcal{A}_e$ sa jednim inicijalnim stanjem, takav da je $[\![\mathcal{A}_e]\!] = L(r)$ i obratno. Ovo je važno, jer predstavlja još jedan dokaz Klinijeve teoreme.

6.6. Zadaci

6.6.1. Konstruisati automat koji raspoznaje jezik $L = L_1 + L_2$, gde je jezik $L_1 = y^*x^+$ i $L_2 = x^*y^+$.

6.6.2. Konstruisati automat koji prihvata one reči koje počinju sa x i iza svakog x je obavezno bar jedno y.

6.6.3. Konstruisati automat koji raspoznaje jezik $L = x^*(xy + yx)$.

6.6.4. Dokazati da, iz raspoznatljivosti jezika L konačnim automatom, sledi da je raspoznatljiv i jezik $L_1 = \{uv \mid vu \in L\}$.

6.6.5. Dokazati da ako je jezik L raspoznatljiv konačnim automatom, onda je raspoznatljiv i jezik

$$L_{\frac{1}{2}} = \{u \in X^* \mid (\exists v \in X^*)\, |u| = |v|,\, uv \in L\}.$$

6.6.6. Dokazati da jezik $L = \{a^p \mid p \text{ je prost broj}\}$ nije raspoznatljiv.

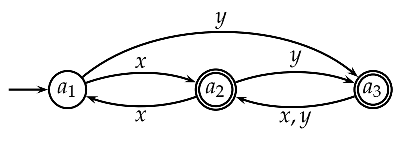
6.6.7. Da li je raspoznatljiv jezik $L = \{u \in X^* \mid |u|_x < |u|_y\}$?

6.6.8. Ispitati raspoznatljivost jezika

$$L = \{u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ je binarni zapis broja } (2^{k+1} - 1)^2, \text{ za prirodan broj } k\}.$$

6.6.9. Ispitati raspoznatljivost jezika $L = \{x^{3n}yz^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

6.6.10. Naći jezik automata sa slike:



Glava 7
Kontekstno-nezavisni jezici

Kontekstno-nezavisni jezici uvedeni su u radovima Čomskog [16, 17] sa namerom da posluže kao formalizacija gramatičkih svojstava prirodnih jezika, ali su se veoma brzo pokazali kao veoma pogodni za formalno opisivanje sintakse programskih jezika i našli značajne primene kod definisanja programskih jezika, u sintaksnoj analizi jezika i konstrukciji kompajlera. Te primene dovele su do razvoja teorije kontekstno-nezavisnih jezika kao jedne od najznačajnijih oblasti Teorije formalnih jezika.

Kontekstno-nezavisni jezici se mogu definisati na više različitih, međusobno ekvivalentnih načina. U Glavi 2, mi smo ih već definisali kao jezike koji se mogu generisati kontekstno-nezavisnim gramatikama. Kako su pokazali, nezavisno jedni od drugih, Čomski i Šucenberger (Schützenberger) [19] i Ginsburg i Rajs (Rice) [49], kontekstno-nezavisni jezici se mogu definisati i kao komponente najmanjeg rešenja sistema polinomialnih jednačina, odakle potiče i naziv *algebarski jezici* pod kojim se sreću u nekim izvorima. Treći važan način zadavanja kontekstno-nezavisnih jezika je njihovo generisanje potisnim automatima, matematičkim modelom uvedenim u radu Šucenberger [99].

Glavna tema ove glave je dokaz ekvivalentnosti koncepata generisanja jezika kontekstno-nezavisnom gramatikom i raspoznavanja jezika potisnim automatom, koju su prvi dokazali Čomski [18] i Evij (Evey) [40]. U prvom odeljku ove glave prikazuju se neke osnovne osobine kontekstno-nezavisnih gramatika i jezika, u Odeljku 7.2 i 7.3 se dokazuje da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika, udaljavanjem e-pravila i trivijalnih pravila, svođenjem na formu čiste gramatike i gramatike u Normalnoj formi Čomski, može svesti na gramatiku jednostavnije forme koja raspoznaje isti jezik, a u Odeljku 7.4 se dokazuje veoma korisna Lema o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezike. Potom u odeljcima 7.5, 7.6 i 7.7 uvodimo pojam potisnog automata, tj. automata sa potiskujućom memorijom (stekom), pojmove raspoznavanja jezika skupom stanja potisnog automata i raspoznavanja jezika praznim stekom, dokazujemo ekvivalentnost ta dva načina raspoznavanja, i konačno, dokazujemo glavnu teoremu ove glave koja kaže da je jezik kontekstno-nezavisan ako i samo ako se može raspoznati nekim potisnim automatom.

7.1. Kontekstno-nezavisne gramatike

Podsetimo se da smo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazvali *kontekstno-nezavisnom*, ako je svako pravilo iz π oblika $\alpha \to p$, gde je $\alpha \in V - X$ i $p \in V^*$. Jezike generisane ovakvim gramatikama nazvali smo *kontekstno-nezavisnim jezicima*. Ovde će biti reči o osnovnim osobinama kontekstno-nezavisnih gramatika i jezika.

Najpre ćemo dokazati jednu teoremu koja je u izvesnom smislu obrat Teoreme 2.3.3., i važi kod kontekstno-nezavisnih gramatika.

Teorema 7.1.1. *Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika i*

$$u_1 u_2 \cdots u_n \overset{*}{\Rightarrow} v \tag{7.1}$$

je izvođenje u G, za $u_1, u_2, \dots, u_n, v \in V^*$. Tada se v može zapisati u obliku $v = v_1 v_2 \cdots v_n$, za $v_1, v_2, \dots, v_n \in V^*$, tako da važi

$$u_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1,\ u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2,\ \dots,\ u_n \overset{*}{\Rightarrow} v_n, \tag{7.2}$$

pri čemu važi

(i) *nijedno od izvođenja iz* (7.2) *nije duže od izvođenja* (7.1);
(ii) *sva pravila koja se koriste u izvođenjima iz* (7.2) *nalaze se među pravilima koja se koriste u* (7.1).

Dokaz: Jasno je da je tvrđenje teoreme dovoljno dokazati za slučaj $n = 2$.

Dokaz će biti izveden indukcijom po dužini izvođenja $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$. Uzmimo najpre da je izvođenje $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ dužine 1, tj. da je neposredno izvođenje. Tada je ono zasnovano na pravilu oblika $u \to w$, gde je $u \in V - X$ i $w \in V^*$, što znači da je $u_1 u_2 = puq$ i $v = pwq$, za neke $p, q \in V^*$. Jasno je da je pu podreč od u_1, ili je uq podreč od u_2. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je pu podreč od u_1. Tada je $u_1 = pur$ i $ru_2 = q$, za neki $r \in V^*$. Ako stavimo da je $v_1 = pwr$ i $v_2 = u_2$, tada imamo da je $u_1 \Rightarrow v_1$, prema pravilu $u \to w$, $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$, pri čemu je jasno da se radi o izvođenjima dužine ne veće od 1, i $v_1 v_2 = pwru_2 = pwq = v$, što je i trebalo dokazati.

Uzmimo dalje da je izvođenje $u_1 u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ dužine $m > 1$ i da tvrđenje teoreme važi za sva izvođenja dužine manje od m. Neka je $u_1 u_2 \Rightarrow w$ prvi korak u ovom izvođenju. Prema napred dokazanom za neposredna izvođenja, $w = w_1 w_2$, za neke $w_1, w_2 \in V^*$, pri čemu su $u_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ i $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_2$ izvođenja dužine ne veće od 1. Sa druge strane, iz $w = w_1 w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$, prema indukcijskoj pretpostavci, imamo da je $v = v_1 v_2$, za neke $v_1, v_2 \in V^*$, pri čemu postoje izvođenja $w_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1$ i $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$, dužine manje od m, u kojima se koriste samo pravila koja se koriste i u izvođenju $w_1 w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$. Prema tome $v = v_1 v_2$ i

$$u_1 \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1 \quad \text{i} \quad u_2 \overset{*}{\Rightarrow} w_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$$

su izvođenja dužine ne veće od m, što je i trebalo dokazati. □

Posledica 7.1.2. *Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika i neka je $u_1 w u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v$ izvođenje u G, za $u_1, u_2, v \in V^*$ i $w \in X^*$. Tada se v može zapisati u obliku $v = v_1 w v_2$, za $v_1, v_2 \in V^*$, tako da $u_1 \overset{*}{\Rightarrow} v_1$ i $u_2 \overset{*}{\Rightarrow} v_2$.*

Dokaz: To sledi iz Teoreme 7.1.1. i činjenice da za $w \in X^*$ postoji izvođenje $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$, $w' \in V^*$, ako i samo ako je $w' = w$. □

Dalje će biti reči o zatvorenosti klase kontekstno-nezavisnih jezika u odnosu na neke operacije na jezicima.

Teorema 7.1.3. *Neka je X konačan alfabet.*

(a) *ako su $L_1, L_2 \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisni jezici, tada su takvi i jezici $L_1 \cup L_2$ i $L_1 L_2$.*
(b) *ako je $L \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisan jezik, tada je takav i jezik $L^{(*)}$.*

Dokaz: (a) Za $i \in \{1, 2\}$, neka je $L_i = L(G_i, \sigma_i)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G_i = (V_i, X, \pi_i)$ i $\sigma_i \in V_i - X$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je $(V_1 - X) \cap (V_2 - X) = \emptyset$. Konstruišimo gramatike

$$G_U = (V_U, X, \pi_U) \quad \text{i} \quad G_P = (V_P, X, \pi_P)$$

sa

$$\begin{aligned} V_U &= V_P = V_1 \cup V_2 \cup \{\sigma\}, &\qquad& \text{gde } \sigma \notin V_1 \cup V_2, \\ \pi_U &= \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1, \sigma \to \sigma_2\}, \\ \pi_P &= \pi_1 \cup \pi_2 \cup \{\sigma \to \sigma_1 \sigma_2\}. \end{aligned}$$

Dokazaćemo da je $L_1 \cup L_2 = L(G_U, \sigma)$ i $L_1 L_2 = L(G_P, \sigma)$.

Neka je $w \in L_1 \cup L_2$. Tada je $w \in L_1$ ili $w \in L_2$, što znači da $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w$ ili $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} w$, odakle dobijamo $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$ ili $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, jer gramatika G_U obuhvata obe gramatike G_1 i G_2. Kako $\sigma \Rightarrow \sigma_1$ i $\sigma \Rightarrow \sigma_2$, to u oba slučaja dobijamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$. Prema tome, $w \in L(G_U, \sigma)$, čime smo dokazali $L_1 \cup L_2 \subseteq L(G_U, \sigma)$.

Obratno, neka je $w \in L(G_U, \sigma)$, tj. $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$. Prvi korak u ovom izvođenju mora biti ili $\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_1$ ili $\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_2$, tj. imamo

$$\sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w \quad \text{ili} \quad \sigma \Rightarrow_{G_U} \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w.$$

Međutim, iz definicije gramatike G_U je jasno da izvođenje $\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, odnosno $\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_U} w$, ako postoji, mora biti izvođenje u G_1, odnosno G_2. Prema tome

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} w \quad \text{ili} \quad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} w,$$

odakle sledi da je $w \in L_1 \cup L_2$, što znači da je $L(G_U,\sigma) \subseteq L_1 \cup L_2$. Ovim smo dokazali da je $L_1 \cup L_2 = L(G_U,\sigma)$.

Uzmimo $w \in L_1L_2$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in L_1$ i $v \in L_2$, tj.

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_1} u \quad \text{i} \quad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_2} v,$$

a kako gramatika G_P obuhvata obe gramatike G_1 i G_2, to je

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} u \quad \text{i} \quad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} v.$$

Odavde prema Teoremi 2.3.3. dobijamo

$$\sigma_1\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} uv = w,$$

pa je, prema tome,

$$\sigma \Rightarrow_{G_P} \sigma_1\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w,$$

što znači da je $w \in L(G_P,\sigma\}$, čime smo dokazali da je $L_1L_2 \subseteq L(G_P,\sigma)$.

Obratno, uzmimo $w \in L(G_P,\sigma)$. Tada postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w$, čiji prvi korak može biti samo $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} \sigma_1\sigma_2$, odakle sledi da postoji izvođenje

$$\sigma_1\sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} w.$$

Odavde, prema Teoremi 7.1.1., sledi da je $w = uv$, za neke $u,v \in X^*$, i da postoje izvođenja

$$\sigma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} u \qquad\qquad \text{i} \qquad\qquad \sigma_2 \overset{*}{\Rightarrow}_{G_P} v.$$

Jasno je da je prvo od ovih izvođenja ustvari izvođenje u G_1, a drugo je izvođenje u G_2. Prema tome, dobili smo da je $u \in L_1$, $v \in L_2$ i $w = uv$, što znači da je $w \in L_1L_2$, čime smo dokazali da je $L(G_P,\sigma) \subseteq L_1L_2$. Dakle, dokazali smo da je $L_1L_2 = L(G_P,\sigma)$.

(b) Uzmimo da je $L = L(G,\sigma)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V,X,\pi)$ i neki $\sigma \in V - X$. Konstruišimo gramatiku $G' = (V',X,\pi')$ sa:

$$V' = V \cup \{\sigma'\}, \text{ gde } \sigma' \notin V, \quad \text{i} \quad \pi' = \pi \cup \{\sigma' \to \sigma\sigma', \sigma' \to e\},$$

i dokazžimo da je $L^{(*)} \subseteq L(G',\sigma')$.

Najpre ćemo indukcijom dokazati da je $L^n \subseteq L(G',\sigma')$, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$. Za $n = 0$, to tvrđenje važi zbog prisustva pravila $\sigma' \to e$ u π'. Za proizvoljnu reč $w \in L$ imamo da $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, pa dakle i $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$, pa s obzirom da $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} e$, na osnovu Teoreme 2.3.3. dobijamo $\sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} we = w$. Prema tome

$$\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w,$$

što znači da je $w \in L(G',\sigma')$, čime smo dokazali da je $L \subseteq L(G',\sigma')$.

Pretpostavimo da je $L^n \subseteq L(G',\sigma')$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i dokažimo da je $L^{n+1} \subseteq L(G',\sigma')$. Uzmimo $w \in L^{n+1}$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in L$, $v \in L^n$. Prema indukcijskoj pretpostavci imamo $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v$, dok sa druge strane imamo $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G} u$, odnosno $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u$, odakle, prema Teoremi 2.3.3., sledi

$$\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} uv = w.$$

Dakle, $w \in L(G',\sigma')$, što znači da je $L^{n+1} \subseteq L(G',\sigma')$, što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da je $L^{(*)} \subseteq L(G',\sigma')$.

Dokažimo sada da je $L(G',\sigma') \subseteq L^{(*)}$. Uvedimo oznake

$$K = L(G',\sigma') \quad \text{i} \quad K_n = \{w \in K \mid |w| \leqslant n\},\ n \in \mathbb{N}^0.$$

Kako je $K = \cup_{n\in\mathbb{N}^0} K_n$, to je dovoljno dokazati da je $K_n \subseteq L^{(*)}$, za svaki $n \in \mathbb{N}^0$, što će biti dokazano indukcijom.

Jasno je da je $K_0 \subseteq L^{(*)}$. Pretpostavimo da je $K_n \subseteq L^{(*)}$, za neki $n \in \mathbb{N}^0$, i dokažimo da je $K_{n+1} \subseteq L^{(*)}$. Uzmimo proizvoljan $w \in K_{n+1}$. Ako je $w = e$, tada je $w \in L^{(*)}$. Neka je $w \neq e$. Tada prvi korak u izvođenju $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$ mora biti $\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma'$, tj. imamo

$$\sigma' \Rightarrow_{G'} \sigma\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w.$$

Prema Teoremi 7.1.1., $w = uv$, za neke $u, v \in X^*$, pri čemu važi

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u \qquad \text{i} \qquad \sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v.$$

Jasno je da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} u$ ustvari izvođenje u G, što znači da je $u \in L$, a sa druge strane, iz $\sigma' \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} v$ dobijamo da je $v \in K_n$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke dobijamo da je $v \in L^i$, za neki $i \in \mathbb{N}^0$. Prema tome, $w = uv \in LL^i = L^{i+1} \subseteq L^{(*)}$, što dokazuje da je $L(G',\sigma') \subseteq L^{(*)}$. Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. □

Prethodnom teoremom smo dokazali da za proizvoljan konačan alfabet X, klasa kontekstno-nezavisnih jezika u X^* je zatvorena za uniju, proizvod i zvezda operaciju. Međutim, ova klasa nije zatvorena za presek i komplement, što će biti dokazano kasnije, Teoremom 7.4.4. Međutim, ta klasa je zatvorena za preseke sa raspoznatljivim jezicima, što dokazujemo sledećom teoremom:

Teorema 7.1.4. *Neka je X konačan alfabet. Ako je $L_1 \subseteq X^*$ raspoznatljiv, a $L_2 \subseteq X^*$ je kontekstno-nezavisan jezik, tada je i $L_1 \cap L_2$ kontekstno-nezavisan jezik.*

Dokaz: Neka je $A = (A, X, \delta, a_0, \tau)$ konačan automat koji raspoznaje L_1 skupom $\tau \subseteq A$. Kako je klasa kontekstno-nezavisnih jezika zatvorena za uniju, to bez umanjenja opštosti dokaza možemo uzeti da je skup τ jednoelementan, tj. $\tau = \{t\}$.

Uzmimo da je $L_2 = L(G, \sigma)$, za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ i $\sigma \in V - A$. Definišimo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$ na sledeći način: uzećemo da je

$$V' = X \cup (A \times V \times A),$$

a da se π' sastoji od pravila sledećih oblika

(a) $(a, \alpha, b) \to (a, \alpha_1, c_1)(c_1, \alpha_2, c_2) \cdots (c_{m-1}, \alpha_m, b)$, za proizvoljno pravilo

$$\alpha \to \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \text{ iz } \pi,$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$, i proizvoljne $a, c_1, \dots, c_{m-1}, b \in A$;

(b) $(a, u, b) \to u$, ako je $\delta(a, u) = b$ u automatu $\mathcal{A}$.

Neposredno se proverava da je $L_1 \cap L_2 = L(G', \sigma')$, gde je $\sigma' = (a_0, \sigma, t)$. □

Na kraju ćemo dokazati zatvorenost kontekstno-nezavisnih jezika za homomorfizme slobodnih monoida.

Teorema 7.1.5. *Neka su X i Y konačni alfabeti i $\varphi : X^* \to Y^*$ je homomorfizam. Tada za svaki kontektstno-nezavisan jezik $L \subseteq X^*$, $\varphi(L)$ je kontekstno-nezavisan jezik u Y^*.*

Dokaz: Neka je $L = L(G, \sigma)$, za kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ i $\sigma \in V - X$. Jasno, φ možemo proširiti do homomorfizma $\psi : V^* \to ((V - X) \cup Y)^*$, na sledeći način:

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha)\,, & \text{ako je } \alpha \in X, \\ \alpha, & \text{ako je } \alpha \in V - X. \end{cases}$$

Dalje, neka je $\pi_\psi = \{\psi(\alpha) \to \psi(u) \mid \alpha \to u \text{ je pravilo iz } \pi\}$. Jasno je da je $G_\psi = (\psi(V), Y, \pi_\psi)$ kontekstno-nezavisna gramatika, i neposredno se proverava da je $\varphi(L) = L(G_\psi, \sigma_\psi)$. Prema tome, $\varphi(L)$ je kontekstno-nezavisan jezik. □

7.2. Udaljavanje *e*-pravila i trivijalnih pravila

U ovom i narednom poglavlju ćemo pokazati da za svaku kontekstno-nezavisnu gramatiku postoji kontekstno-nezavisna gramatika koja generiše isti jezik, a čija su pravila jednostavnija od pravila prve gramatike. Krenućemo sa udaljavanjem takozvanih *e*-pravila i trivijalnih pravila iz kontekstno-nezavisne gramatike.

Najpre ćemo dokazati sledeću teoremu:

Teorema 7.2.1. *Postoji algoritam kojim se može utvrditi da li jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom sadrži praznu reč ili ne.*

Dokaz: Neka je data kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$. Neka je $U \subseteq V$ skup definisan sa

$$U = \{\alpha \in V - X \,|\, \alpha \overset{*}{\Rightarrow} e\}.$$

Dokazaćemo najpre da postoji algoritam za određivanje skupa U. Naime, definisaćemo niz $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podskupova od $V - X$ sa

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\alpha \in V - X \,|\, (\alpha, e) \in \pi\}, \\ U_{n+1} &= U_n \cup \Big\{\alpha \in V - X \,\Big|\, (\exists u \in U_n^*)\ (\alpha, u) \in \pi\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jasno je da je $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz podskupova od $V - X$ i lako se proverava da je

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Kako je $V - X$ konačan skup, to postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $U_n = U_{n+1}$, i nije teško proveriti da je tada $U = U_n$. Ovim je dokazano da postoji algoritam za određivanje skupa U.

Algoritam kojim se može utvrditi da li jezik $L(G, \sigma)$, za $\sigma \in V - X$ sadrži praznu reč zasnovan je na algoritmu za nalaženje skupa U, jer je $e \in L(G, \sigma)$ ako i samo ako je $\sigma \in U$. $\square$

Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika. Pravila iz π oblika $\alpha \to e$, gde je $\alpha \in V - X$ i e je prazna reč, nazivaćemo *e-pravilima*.

Teorema 7.2.2. *Za proizvoljan kontekstno-nezavisan jezik $L \subseteq X^*$ postoji kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ bez e-pravila koja generiše jezik $L - \{e\}$.*

Dokaz: Neka je $L = L(G_0, \sigma)$, gde je $G_0 = (V, X, \pi_0)$ kontekstno-nezavisna gramatika i $\sigma \in V - X$. Uočimo skup

$$U = \{\alpha \in V - X \,|\, \alpha \overset{*}{\Rightarrow} e \text{ u } G_0\}.$$

Za reč $w \in V^*$, označimo sa $D(w, U)$ skup svih reči iz V^* koje su nastale iz reči w brisanjem izvesnog broja slova iz skupa U, moguće i nijednog. Neka je $G = (V, X, \pi)$ gramatika sa skupom pravila π definisanim sa

$$\pi = \Big\{(\alpha, u) \in (V - X) \times V^+ \,\Big|\, (\exists w \in V^*)\ (\alpha, w) \in \pi_0 \ \wedge\ u \in D(w, U)\Big\}. \tag{7.3}$$

Drugim rečima, za proizvoljno pravilo $\alpha \to w$ iz π_0, ako reč w sadrži k javljanja slova iz skupa U, onda to pravilo zamenjujemo sa 2^k pravila oblika $\alpha \to u$, $u \in D(w, U)$, $u \neq e$, u slučaju da je $w \notin U^*$, odnosno sa $2^k - 1$ pravila tog oblika, u slučaju da je $w \in U^*$. Jasno je da gramatika G ne sadrži e-pravila.

Dokazaćemo da je $L(G,\sigma) = L - \{e\}$.

Ako je $\alpha \to u$ pravilo iz π, tada prema definiciji gramatike G imamo da je $\alpha \to w$ pravilo iz π_0, pri čemu je $u \in D(w,U)$. Uzmimo da je

$$w = v_1 v_2 \cdots v_m,$$

za neke $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Iz $u \in D(w,U)$ dobijamo da je

$$u = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j},$$

za neke $i_1, i_2, \ldots, i_j \in \{1,2,\ldots,m\}$, pri čemu za svaki $i \in \{1,2,\ldots,m\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$ je $v_i \overset{*}{\Rightarrow} e$ u G_0. Odavde se neposredno dobija da je $\alpha \Rightarrow w \overset{*}{\Rightarrow} u$ u G_0. Prema tome, svakom pravilu $\alpha \to u$ iz π odgovara neko izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} u$ u G_0, što znači da je relacija π sadržana u polu-kongruenciji $\overset{*}{\Rightarrow}_{G_0}$ na V^*. Kako prema Lemi 2.3.1. imamo da je $\overset{*}{\Rightarrow}_G$ najmanja polukongruencija na V^* koja sadrži π, to je $\overset{*}{\Rightarrow}_G \subseteq \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0}$, što znači da je $L(G,\sigma) \subseteq L(G_0,\sigma) = L$. Konačno, kako $e \notin L(G,\sigma)$, jer π ne sadrži e-pravila, to je $L(G,\sigma) \subseteq L - \{e\}$.

Obratno, da bi smo dokazali da je $L - \{e\} \subseteq L(G,\sigma)$, dovoljno je dokazati da za proizvoljne $\alpha \in V - X$ i $w \in V^+$, $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ povlači $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$. To ćemo dokazati indukcijom po dužini izvođenja $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$.

Uzmimo najpre da je $\alpha \Rightarrow_{G_0} w$. Tada je $\alpha \to w$ pravilo iz π_0, jer je $\alpha \in V - X$, odakle je $\alpha \to w$ pravilo iz π, prema (7.3), odakle je $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$.

Pretpostavimo dalje da je izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ dužine $m > 1$ i pretpostavimo da tvrđenje koje dokazujemo važi za sva izvođenja dužine manje od m. Uočimo najpre da je

$$\alpha \Rightarrow_{G_0} v_1 v_2 \cdots v_k \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w,$$

za neke $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Prema Teoremi 7.1.1., w se može zapisati u obliku $w = u_1 u_2 \cdots u_k$, za neke $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V^*$, takve da je $v_i \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} u_i$, za svaki $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, pri čemu dužina ovih izvođenja nije duža od dužine izvođenja $v_1 v_2 \cdots v_k \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, tj. od $m-1$. Prema tome, kad god je $u_i \neq e$, na ta izvođenja možemo primeniti indukcijsku hipotezu, čime dobijamo da je tada $v_i \overset{*}{\Rightarrow}_G u_i$. Neka je $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$ skup svih elemenata iz skupa $\{1,2,\ldots,k\}$ za koje je $u_i \neq e$ i neka je $v = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j}$. Kako je reč v nastala iz reči $v_1 v_2 \cdots v_k$ brisanjem slova iz skupa U, to je $\alpha \to v$ pravilo iz π. Sa druge strane, iz

$$v_{i_1} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_1}, \ \cdots, \ v_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_j},$$

zbog saglasnosti relacije $\overset{*}{\Rightarrow}_G$ dobijamo da je

$$v = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_j} \overset{*}{\Rightarrow}_G w.$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\alpha \Rightarrow_G v \overset{*}{\Rightarrow}_G w,$$

što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Za jezik $L \subseteq X^+$ ćemo govoriti da je X^+-*jezik*. Neposredno iz prethodne teoreme dobija se:

Posledica 7.2.3. *Proizvoljan kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan nekom kontekstno-nezavisnom gramatikom bez e-pravila.*

Primer 7.2.4. Neka je data gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$ sa $X = \{x, y\}$, $V - X = \{\sigma, \lambda\}$ i pravilima

$$\sigma \to x\lambda y, \quad \lambda \to x\lambda y, \quad \lambda \to e.$$

Ova gramatika generiše jezik $L(G_0, \sigma) = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jasno je da je $U = \{\lambda\}$, a gramatika $G = (V, X, \pi)$ dobijena metodama iz Teoreme 7.2.2. ima pravila

$$\sigma \to x\lambda y, \quad \sigma \to xy, \quad \lambda \to x\lambda y, \quad \lambda \to xy.$$

Na primer, izvođenju

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^3\lambda y^3 \Rightarrow x^3y^3$$

u G_0, u G odgovara izvođenje

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^2xyy^2 = x^3y^3.$$

Primer 7.2.5. Gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$, sa $X = \{x, y\}$ i $V - X = \{\sigma\}$ i pravilima

$$\sigma \to x\sigma y, \quad \sigma \to e,$$

generiše jezik $L = L(G_0, \sigma) = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}^0\}$ koji sadrži praznu reč. Gramatika dobijena iz G_0 metodom datom u dokazu Teoreme 7.2.2. ima pravila

$$\sigma \to x\sigma y, \quad \sigma \to xy,$$

i generiše jezik $L(G, \sigma) = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\} = L - \{e\}$.

Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika. *Trivijalnim pravilima* nazivamo pravila oblika $\alpha \to \beta$, gde su $\alpha, \beta \in V - X$. Jasno je da se primenom ovakvih pravila vrši samo preimenovanje pomoćnih simbola, što opravdava naziv koji smo im dali. Sledeća teorema pokazuje da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika sa trivijalnim pravilima može zameniti kontekstno-nezavisnom gramatikom bez takvih pravila koja generiše isti jezik.

Teorema 7.2.6. *Proizvoljan kontekstno-nezavisan jezik može biti generisan nekom kontekstno-nezavisnom gramatikom bez trivijalnih pravila.*

Dokaz: Neka je $L = L(G_0,\sigma)$ jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom $G_0 = (V,X,\pi_0)$, za $\sigma \in V - X$. Definišimo novu gramatiku $G_1 = (V,X,\pi_1)$ na sledeći način: Uzećemo da se skup pravila π_1 sastoji iz svih pravila iz π_0 i iz svih parova $(\alpha,u) \in (V - X)\times V^*$ za koje postoji $\beta \in V - X$ takav da važe sledeća dva uslova:

(i) $\beta \to u$ je netrivijalno pravilo iz π_0;
(ii) α i β su povezani nekim nizom

$$\alpha \to \beta \quad \text{ili} \quad \alpha \to \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta,\ n \in \mathbb{N},$$

trivijalnih pravila iz π_0.

Takođe ćemo uzeti da je $G = (V,X,\pi)$ gramatika čiji skup pravila π čine sva netrivijalna pravila iz π_1. Dokazaćemo da je $L(G_0,\sigma) = L(G,\sigma)$, pri čemu će nam gramatika G_1 služiti kao pomoćna gramatika. To znači da za proizvoljnu reč $w \in X^*$ treba dokazati da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$ ako i samo ako je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G} w$. Kako gramatika G_1 obuhvata gramatike G_0 i G, to izvođenja u njoj nećemo posebno označavati indeksom G_1, kao što ćemo činiti u slučaju izvođenja u gramatikama G_0 i G.

Neka je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$. Posmatrajmo izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w \tag{7.4}$$

u G_1. Ako se u ovom izvođenju ne koriste trivijalna pravila, tada je jasno da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G} w$, što i treba dokazati.

Uzmimo da se u izvođenju (7.4) trivijalna pravila koriste k puta, gde je $k \geqslant 1$. Neka je $w_1 \Rightarrow w_2$ poslednji korak u tom izvođenju kod koga se koristi neko trivijalno pravilo, recimo pravilo $\alpha \to \beta$, $\alpha,\beta \in V - X$. Tada se izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$ može zapisati u obliku

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \Rightarrow w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w,$$

pri čemu se u izvođenju $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$ ne koriste trivijalna pravila. Iz pretpostavke da je u $w_1 \Rightarrow w_2$ korišćeno pravilo $\alpha \to \beta$ dobijamo da je $w_1 = p\alpha q$ i $w_2 = p\beta q$, za neke $p,q \in V^*$. Prema Teoremi 7.1.1., $w = p'uq'$, za neke $p',u,q' \in V^*$, takve da postoje izvođenja

$$p \overset{*}{\Rightarrow} p', \quad \beta \overset{*}{\Rightarrow} u, \quad q \overset{*}{\Rightarrow} q' \tag{7.5}$$

u kojima se koriste samo pravila koja se koriste i u izvođenju $w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$, što znači da se u tim izvođenjima ne koriste trivijalna pravila. Neka je $\beta \Rightarrow v$ prvi korak u izvođenju $\beta \overset{*}{\Rightarrow} u$. Jasno je da je tada $\beta \to v$ pravilo iz π_0, i to netrivijalno, jer smo rekli da se u izvođenju $\beta \overset{*}{\Rightarrow} u$ ne koriste trivijalna pravila. Prema tome, imamo da je $\alpha \to \beta$ trivijalno pravilo iz π_0 i $\beta \to v$ je netrivijalno pravilo iz π_0, odakle je $\alpha \to v$ netrivijalno pravilo iz π_1, odnosno pravilo iz π, prema definiciji gramatika G_1 i G. Korišćenjem tog pravila dobijamo da važi

$$w_1 = p\alpha q \Rightarrow pvq. \tag{7.6}$$

Sa druge strane, iz $p \overset{*}{\Rightarrow} p'$, $v \overset{*}{\Rightarrow} u$ i $q \overset{*}{\Rightarrow} q'$, prema Teoremi 2.3.3. dobijamo da postoji izvođenje

$$pvq \overset{*}{\Rightarrow} p'uq' = w \tag{7.7}$$

u kome se koriste samo ona pravila koja se koriste u prelazima $p \overset{*}{\Rightarrow} p'$, $v \overset{*}{\Rightarrow} u$ i $q \overset{*}{\Rightarrow} q'$. To znači da se u (7.7) ne koriste trivijalna pravila. Dakle, iz (7.6) i (7.7) dobijamo da postoji izvođenje $w_1 \overset{*}{\Rightarrow} w$ u kome se ne koriste trivijalna pravila, čime smo dobili da se izvođenje (7.4) može zameniti izvođenjem u kome se koristi samo $k-1$ trivijalnih pravila, odnosno da se broj korišćenja trivijalnih pravila u tom izvođenju može smanjiti, i ako ponovimo taj postupak još $k-1$ put, dobićemo izvođenje reči w iz σ u kome se ne koristi nijedno trivijalno pravilo, što znači da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$.

Obratno, uzmimo da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$ i posmatrajmo ga kao izvođenje

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w \tag{7.8}$$

u G_1. Ako se u njemu koriste samo pravila iz π_0, tada je jasno da je $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, što i treba dokazati.

Uzmimo da se u izvođenju pravila iz skupa $\pi_1 - \pi_0$ koriste k puta. Zapišimo izvođenje (7.8) u obliku

$$\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \Rightarrow w_2 \overset{*}{\Rightarrow} w, \tag{7.9}$$

pri čemu je izvođenje $w_1 \Rightarrow w_2$ zasnovano na primeni pravila $\alpha \to u$ iz $\pi_1 - \pi_0$. To znači da je $w_1 = p\alpha q$ i $w_2 = puq$, za neke $p, q \in V^*$, dok prema definiciji skupa π_1 imamo da postoji netrivijalno pravilo $\beta \to u$ u π_0 i niz

$$\alpha \to \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta, \qquad n \in \mathbb{N}^0,$$

trivijalnih pravila iz π_0. Sada je jasno da se izvođenje $w_1 \Rightarrow w_2$ može u (7.9) zameniti izvođenjem

$$w_1 = p\alpha q \Rightarrow p\alpha_1 q \Rightarrow \cdots \Rightarrow p\alpha_n q \Rightarrow p\beta q \Rightarrow puq = w_2$$

u kome se ne koriste pravila iz $\pi_1 - \pi_0$. Prema tome, u izvođenju (7.8) broj primena pravila iz $\pi_1 - \pi_0$ možemo smanjiti, sve dok ih potpuno ne eliminišemo, posle čega dobijamo izvođenje u G_0. Prema tome, $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G_0} w$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primer 7.2.7. Neka je data gramatika $G_0 = (V, X, \pi_0)$, gde je $V - X = \{\sigma, \lambda, \mu\}$, $X = \{x, y\}$ i π_0 se sastoji iz pravila

$$\begin{array}{lll} \sigma \to \lambda, & \lambda \to \mu, & \mu \to \sigma \\ \sigma \to x^2, & \lambda \to x, & \mu \to y. \end{array}$$

Ova gramatika generiše jezik $L = L(G_0, \sigma) = \{x^2, x, y\}$. Kako u π_0 imamo sledeće nizove trivijalnih pravila

$$\begin{array}{ll} \mu \to \sigma, & \lambda \to \mu \to \sigma, \\ \sigma \to \lambda, & \mu \to \sigma \to \lambda, \\ \lambda \to \mu, & \sigma \to \lambda \to \mu, \end{array}$$

to netrivijalnim pravilima $\sigma \to x^2$, $\lambda \to x$ i $\mu \to y$ gramatike G_0 pridružujemo redom pravila

$$\mu \to x^2,\ \lambda \to x^2, \qquad \sigma \to x,\ \mu \to x, \qquad \lambda \to y,\ \sigma \to y,$$

čime smo dobili pravila

$$\begin{array}{lll} \sigma \to x^2, & \mu \to x^2, & \lambda \to x^2, \\ \lambda \to x, & \sigma \to x, & \mu \to x, \\ \mu \to y, & \lambda \to y, & \sigma \to y, \end{array}$$

nove gramatike $G = (V, X, \pi)$ koja nema trivijalnih pravila i koja generiše jezik L, tj. $L = L(G, \sigma)$.

Ovaj primer nam takođe pokazuje da smo u definiciji pravila iz π_1 morali koristiti nizove trivijalnih pravila, a ne samo trivijalna pravila. Naime, ako bi smo koristili samo trivijalna pravila, tada bi smo dobili gramatiku $G' = (V, X, \pi')$ sa pravilima

$$\sigma \to x^2, \quad \mu \to x^2, \quad \lambda \to x, \quad \sigma \to x, \quad \mu \to y, \quad \lambda \to y,$$

koja generiše jezik $L(G', \sigma) = \{x^2, x\} \neq L$.

7.3. Gramatike u Normalnoj formi Čomski

Ovde ćemo nastaviti sa redukcijama kontekstno-nezavisnih gramatika. Uvešćemo pojmove čiste gramatike i gramatike u Normalnoj formi Čomski i dokazati da se svaka kontekstno-nezavisna gramatika može zameniti nekom čistom gramatikom, odnosno gramatikom u Normalnoj formi Čomski, koja generiše isti jezik.

Kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ nazivamo *čistom gramatikom* ako je svako pravilo iz π ili oblika

$$\alpha \to \beta, \qquad \text{gde je } \alpha \in V - X,\ \beta \in (V - X)^+,\ |\beta| > 1,$$

ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V - X,\ x \in X.$$

Uočimo da čista gramatika nema ni e-pravila, ni trivijalnih pravila.

Sada dokazujemo sledeće:

Teorema 7.3.1. *Svaki kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan čistom gramatikom.*

Dokaz: Neka je $G = (V, X, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika koja generiše jezik $L = L(G, \sigma)$, $\sigma \in V - X$. Prema Teoremama 7.2.2. i 7.2.6., ne umanjujući opštost dokaza, možemo uzeti da gramatika G ne sadrži e-pravila niti trivijalna pravila. Proizvoljnom slovu $x \in X$ pridružimo simbol $\beta_x \notin V$ i stavimo da je

$$V' = V \cup \{\beta_x \,|\, x \in X\}.$$

Pravila iz π su ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V - X,\ x \in X, \tag{7.10}$$

ili su oblika

$$\alpha \to u, \qquad \text{gde je } u \in V^+ - V. \tag{7.11}$$

Pravila oblika (7.10) nećemo dirati, dok ćemo svako pravilo iz π oblika (7.11) zameniti pravilom oblika

$$\alpha \to u', \tag{7.12}$$

pri čemu je u' reč dobijena iz u zamenom svakog terminalnog simbola x koji se javlja u u sa β_x. Označimo sa π' novi skup pravila dobijen iz π zadržavanjem svih pravila iz π oblika (7.10), zamenom svih pravila oblika (7.11) odgovarajućim pravilima oblika (7.12), i dodavanjem novih pravila

$$\beta_x \to x, \qquad \text{za svaki } x \in X. \tag{7.13}$$

Jasno je da je $G' = (V', X, \pi')$ čista gramatika. Ostaje još samo da se dokaže da je $L(G, \sigma) = L(G', \sigma)$.

Uočimo proizvoljno neposredno izvođenje

$$p\alpha q \Rightarrow_G puq, \tag{7.14}$$

u gramatici G koje se koristi pravilom oblika (7.11), gde su $p,q \in V^*$. Kako u G imamo pravilo $\alpha \to u'$, gde je u' reč dobijena iz u zamenom svakog terminalnog slova $x \in X$ koje se javlja u u novim pomoćnim simbolom β_x, to imamo da je $p\alpha q \Rightarrow_{G'} pu'q$, sa druge strane, reč u se može dobiti iz u' ponovnom zamenom simbola β_x sa x, pa koristeći pravila iz π' oblika (7.13) dobijamo da je $pu'q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} puq$. Prema tome, neposredno izvođenje (7.14) u G koje se koristi pravilom oblika (7.11) možemo zameniti u G' izvođenjem

$$p\alpha q \Rightarrow_{G'} pu'q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} puq,$$

pa ako to učinimo sa svim izvođenjima u G koja koriste pravila oblika (7.11), dobićemo da svakom izvođenju $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, u G, $w \in X^+$, odgovara neko izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$ u G'. Prema tome, $L(G,\sigma) \subseteq L(G',\sigma)$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da svakom izvođenju

$$\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w \tag{7.15}$$

u G', gde je $\alpha \in (V-X)^+$ i $w \in X^+$, odgovara neko izvođenje $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$ u G. To će biti dokazano indukcijom po dužini izvođenja (7.15).

Uzmimo najpre da se radi o neposrednom izvođenju $\alpha \Rightarrow_{G'} w$. Neka je $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$ i neke $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in V-X$. Prema Teoremi 2.3.3., $w = w_1w_2\cdots w_n$, za neke $w_1,w_2,\ldots,w_n \in X^+$, pri čemu je $\alpha_i \Rightarrow_{G'} w_i$, za svaki $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Jasno je da je svako od tih izvođenja dobijeno primenom pravila oblika (7.10), što znači da je $\alpha_i \Rightarrow_G w_i$, za svaki $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, odakle prema Teoremi 2.3.3. dobijamo da je

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1w_2\cdots w_n = w,$$

što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo dalje da je (7.15) izvođenje dužine $m > 1$ i da tvrđenje koje dokazujemo važi za izvođenja oblika (7.15) dužine manje od m. Neka je $\alpha \Rightarrow_{G'} u$, za $u \in V^*$, prvi korak izvođenja (7.15). Pretpostavimo da je to izvođenje dobijeno primenom pravila $\beta \to v$ iz π'. To znači da je $\alpha = p\beta q$ i $u = pvq$, za neke $p,q \in (V')^*$. Kako je $\alpha \in (V-X)^+$, to je jasno da je $\beta \in V-X$ i $p,q \in V^*$. Ako je $\beta \to v$, pravilo iz π, tada je $\alpha \Rightarrow_G u$, što i želimo dokazati. U suprotnom je $v \in (V')^+$, i v se može zapisati u obliku

$$v = v_1\beta_{x_1}v_2\beta_{x_2}\cdots v_k\beta_{x_k}v_{k+1},$$

za neke $v_1,v_2,\cdots,v_{k+1} \in (V-X)^*$ i $x_1,x_2,\cdots,x_k \in X$. Prema definiciji pravila gramatike G', pravilo $\beta \to v$ je dobijeno iz nekog pravila

$$\beta \to v_1x_1v_2x_2\cdots v_kx_kv_{k+1}, \tag{7.16}$$

iz π. Sa druge strane, iz

$$u = pvq = pv_1\beta_{x_1}v_2\beta_{x_2}\cdots v_k\beta_{x_k}v_{k+1}q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w,$$

prema Teoremi 7.1.1. sledi da je

$$w = w_1s_1w_2s_2\cdots w_ks_kw_{k+1},$$

pri čemu postoje izvođenja

$$pv_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_1, \quad v_i \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_i, \text{ za } 2 \leqslant i \leqslant k, \quad v_{k+1}q \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w_{k+1}, \tag{7.17}$$

$$\beta_{x_i} \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} s_i, \quad \text{za } 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{7.18}$$

dužine ne veće od dužine izvođenja $u \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} w$. Sada na izvođenja (7.17) možemo primeniti indukcijsku pretpostavku, čime dobijamo da postoje izvođenja

$$pv_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{G} w_1, \qquad v_i \overset{*}{\Rightarrow}_{G} w_i, \quad \text{za } 2 \leqslant i \leqslant k, \qquad v_{k+1}q \overset{*}{\Rightarrow}_{G} w_{k+1} \tag{7.19}$$

u G. Sa druge strane, za proizvoljan $i \in \{1,2,\dots,k\}$, jedino pravilo u π' koje sadrži β_{x_i} na levoj strani je pravilo $\beta_{x_i} \to x_i$, odakle prema (7.18) dobijamo da je $s_i = x_i$, za svaki $i \in \{1,2,\dots,k\}$, što znači da je

$$w = w_1x_1w_2x_2\cdots w_kx_kw_{k+1}. \tag{7.20}$$

Prema tome, korišćenjem pravila (7.16) iz π dolazimo do izvođenja

$$\alpha = p\beta q \Rightarrow_G pv_1x_1v_2x_2\cdots v_kx_kv_{k+1}q, \tag{7.21}$$

dok iz (7.19) i (7.20), prema Teoremi 2.3.3., dobijamo

$$pv_1x_1v_2x_2\cdots v_kx_kv_{k+1}q \overset{*}{\Rightarrow}_G w_1x_1w_2x_2\cdots w_kx_kw_{k+1} = w. \tag{7.22}$$

Dakle, iz (7.21) i (7.22) dobijamo da je $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G w$, što je i trebalo dokazati. Dakle, $L(G',\sigma) \subseteq L(G,\sigma)$, što je upotpunilo dokaz teoreme. □

Primer 7.3.2. Neka je data gramatika $G = (V,X,\pi)$ sa $V - X = \{\sigma,\lambda\}$, $X = \{x,y\}$ i skupom π pravila datim sa

$$\sigma \to x\lambda y, \qquad \sigma \to xy, \qquad \lambda \to x\lambda y, \qquad \lambda \to xy.$$

Setimo se da smo do ove gramatike došli u Primeru 7.2.4. uklanjanjem e-pravila.

Metodama koje su date u dokazu prethodne teoreme dobijamo gramatiku $G' = (V',X,\pi')$, gde je $V' = V \cup \{\beta_x,\beta_y\}$ i skup π' se sastoji iz pravila

$$\sigma \to \beta_x\lambda\beta_y, \qquad \sigma \to \beta_x\beta_y, \qquad \lambda \to \beta_x\lambda\beta_y, \qquad \lambda \to \beta_x\beta_y,$$
$$\beta_x \to x, \qquad \beta_y \to y.$$

Na primer, izvođenju

$$\sigma \Rightarrow x\lambda y \Rightarrow x^2\lambda y^2 \Rightarrow x^2(xy)y^2 = x^3y^3$$

u gramatici G odgovara u gramatici G' izvođenje

$$\sigma \Rightarrow \beta_x\lambda\beta_y \Rightarrow \beta_x^2\lambda\beta_y^2 \Rightarrow \beta_x^2(\beta_x\beta_y)\beta_y^2 = \beta_x^3\beta_y^3 \overset{*}{\Rightarrow} x^3y^3.$$

Za kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V, X, \pi)$ kažemo da je u *Normalnoj formi Čomski* ako je svako pravilo iz π ili oblika

$$\alpha \to \beta\gamma, \qquad \text{gde su } \alpha, \beta, \gamma \in V - X, \tag{7.23}$$

ili oblika

$$\alpha \to x, \qquad \text{gde je } \alpha \in V - X,\ x \in X. \tag{7.24}$$

Teorema 7.3.3. *Svaki kontekstno-nezavisan X^+-jezik može biti generisan gramatikom u Normalnoj formi Čomski.*

Dokaz: Neka je $L = L(G, \sigma)$ X^+-jezik generisan kontekstno-nezavisnom gramatikom $G = (V, X, \pi)$. Prema Teoremi 7.3.1., ne umanjujući opštost dokaza možemo uzeti da je G čista gramatika. Prema tome, pravila iz π mogu biti ili oblika (7.23) ili oblika (7.24) ili oblika

$$\alpha \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k, \qquad \text{gde su } \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in V - X,\ k \geqslant 3. \tag{7.25}$$

Kako su pravila oblika (7.23) i (7.24) već u Normalnoj formi Čomski, to ćemo se zadržati samo na pravilima oblika (7.25), i svako od takvih pravila ćemo zameniti nekim novim pravilima koja su u Normalnoj formi Čomski. Naime, svakom pravilu oblika (7.25) pridružićemo skup

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-2}\} \tag{7.26}$$

novih pomoćnih simbola, tako da skupovi oblika (7.26) koji odgovaraju različitim pravilima iz π oblika (7.25) budu međusobno disjunktni, i pravilo (7.25) ćemo zameniti nizom pravila

$$\alpha \to \alpha_1\gamma_1,\ \gamma_1 \to \alpha_2\gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_{k-3} \to \alpha_{k-2}\gamma_{k-2},\ \gamma_{k-2} \to \alpha_{k-1}\alpha_k. \tag{7.27}$$

Kada to učinimo sa svim pravilima iz π oblika (7.25), dobićemo novi rečnik V' i novi skup pravila π', odnosno dobićemo novu gramatiku $G' = (V', X, \pi')$, koja je očigledno u Normalnoj formi Čomski. Ostaje da se dokaže da je $L = L(G, \sigma) = L(G', \sigma)$.

Primetimo najpre da svakom pravilu iz π oblika (7.25) odgovara u gramatici G' izvođenje

$$\alpha \Rightarrow_{G'} \alpha_1\gamma_1 \Rightarrow_{G'} \alpha_1\alpha_2\gamma_2 \Rightarrow_{G'} \cdots \Rightarrow_{G'} \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k,$$

odakle dobijamo da svakom izvođenju u G odgovara neko izvođenje u G'. Prema tome, $L(G,\sigma) \subseteq L(G',\sigma)$.

Uočimo dalje gramatiku $G'' = (V', X, \pi \cup \pi')$. Kako ona obuhvata obe gramatike G i G', to neće biti opasnosti od zabune ako pri označavanju izvođenja u G'' izostavimo pisanje indeksa G''. Da bi smo dokazali inkluziju $L = (G',\sigma) \subseteq L(G,\sigma)$, dovoljno je dokazati da se iz proizvoljnog izvođenja

$$\sigma = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_m = w, \tag{7.28}$$

gde je $m \in \mathbb{N}$ i $w \in X^*$, mogu eliminisati primene svih pravila iz $\pi' - \pi$, odnosno svi simboli iz $V' - V$.

Pretpostavimo da se pravila iz $\pi' - \pi$ u izvođenju (7.28) koriste n puta, gde je $n \in \mathbb{N}$, i dokažimo da se taj broj može smanjiti, t.j. da postoji neko drugo izvođenje $\sigma \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ u G'' u kome se pravila iz $\pi' - \pi$ koriste manje od n puta.

Neka je $w_{i_1} \Rightarrow w_{i_1+1}$, gde je $0 \leqslant i_1 < m$, proizvoljno neposredno izvođenje pri kome se koristi pravilo $\alpha \to \alpha_1\gamma_1$ iz (7.27). To znači da važi

$$w_{i_1} = p_1\alpha q_1 \Rightarrow p_1\alpha_1\gamma_1 q_1 = w_{i_1+1},$$

za neke $p_1, q_1 \in (V')^*$. Simbol γ_1, koji je ovom prilikom uveden u izvođenje (7.28), izgubiće se prilikom primene pravila $\gamma_1 \to \alpha_2\gamma_2$ u nekom neposrednom izvođenju $w_{i_2} \Rightarrow w_{i_2+1}$, gde je $i_1 < i_2 < m$. U međuvremenu, tokom izvođenja $w_{i_1+1} \stackrel{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$, on će biti samo prepisivan, dok će se zamene pomoćnih simbola rečima iz $(V')^*$, prema pravilima gramatike G'', u rečima $w_{i_1+1}, \dots, w_{i_2-1}$, vršiti levo i desno od tog simbola. Na taj način dobijamo da je

$$w_{i_2} = p_2\alpha_1^{(2)}\gamma_1 q_2,$$

gde su $p_2, \alpha_1^{(2)}, q_2 \in (V')^*$ reči za koje važi

$$p_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} p_2, \qquad \alpha_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha_1^{(2)}, \qquad q_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} q_2. \tag{7.29}$$

Pri tome su sva pravila koja se koriste u sva tri izvođenja iz (7.29) tačno ona koja se koriste u izvođenju $w_{i_1+1} \stackrel{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$, odakle lako zaključujemo da ukupan broj primena pravila iz $\pi' - \pi$ u izvođenjima iz (7.29) nije veći od broja primena tih pravila u izvođenju $w_{i_1+1} \stackrel{*}{\Rightarrow} w_{i_2}$.

Nastavljajući na isti način dalje, dobićemo da se izvođenje (7.28) može zapisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\sigma = w_0 \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_1} &= p_1\alpha q_1 \Rightarrow p_1\alpha_1\gamma_1 q_1 = w_{i_1+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2} &= p_2\alpha_1^{(2)}\gamma_1 q_2 \Rightarrow p_2\alpha_1^{(2)}\alpha_2\gamma_2 q_2 = w_{i_2+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_3} &= p_3\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\gamma_2 q_3 \Rightarrow p_3\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3\gamma_3 q_3 = w_{i_3+1} \\
\cdots \quad \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{k-1}} &= p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\gamma_{k-2}q_{k-1} \\
&\qquad \Rightarrow p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1} = w_{i_{k-1}+1} \\
\overset{*}{\Rightarrow} w,
\end{aligned}
$$

pri čemu su $p_j, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{j-1}^{(j)}, q_j \in (V')^*$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, reči za koje važi

$$
p_j \overset{*}{\Rightarrow} p_{j+1},\ \alpha_1^{(j)} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1^{(j+1)},\ \cdots\ ,\ \alpha_{j-1}^{(j)} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_{j-1}^{(j+1)},\ q_j \overset{*}{\Rightarrow} q_{j+1}, \tag{7.30}
$$

za $1 \leqslant j \leqslant k-2$. Pri tome, kao i napred, dobijamo da ukupan broj primena pravila iz $\pi' - \pi$ u izvođenjima iz (7.30) nije veći od broja primena tih pravila u izvođenju $w_{i_j+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{j+1}}$, za svaki j, $1 \leqslant j \leqslant k-2$. Prema tome, imamo izvođenja

$$
p_1 \overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}, \qquad \alpha_i \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_i^{(k-1)},\ \text{za } 1 \leqslant i \leqslant k-2, \qquad q_1 \overset{*}{\Rightarrow} q_{k-1}, \tag{7.31}
$$

u kojima ukupan broj primena pravila iz $\pi' - \pi$ nije veći od ukupnog broja primena tih pravila u izvođenjima

$$
w_{i_1+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_2},\ w_{i_2+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_3},\ \cdots\ ,\ w_{i_{k-2}+1} \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_{k-1}}. \tag{7.32}
$$

Sada iz (7.31), prema Teoremi 2.3.3., dobijamo da postoji izvođenje

$$
p_1\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k q_1 \overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1}, \tag{7.33}
$$

u kome broj primena pravila iz $\pi' - \pi$ nije veći od ukupnog broja primena tih pravila u izvođenjima iz (7.32).

Dakle, imamo da važi

$$
\begin{aligned}
\sigma = w_0 \overset{*}{\Rightarrow} w_{i_1} &= p_1\alpha q_1 \\
&\Rightarrow p_1\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k q_1 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} p_{k-1}\alpha_1^{(k-1)}\cdots\alpha_{k-2}^{(k-1)}\alpha_{k-1}\alpha_k q_{k-1} = w_{i_{k-1}+1} \\
&\overset{*}{\Rightarrow} w,
\end{aligned} \tag{7.34}
$$

prema (7.33), koristeći pravilo $\alpha \to \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ iz π. Jasno je da se u izvođenju (7.34) pravila iz $\pi' - \pi$ primenjuju manji broj puta nego u (7.28), što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Primer 7.3.4. Gramatiku čiju smo redukciju započeli u Primeru 7.2.4., doveli smo u Primeru 7.3.2. do čiste gramatike sa pravilima

$$\sigma \to \beta_x\lambda\beta_y, \quad \sigma \to \beta_x\beta_y, \quad \lambda \to \beta_x\lambda\beta_y, \quad \lambda \to \beta_x\beta_y,$$
$$\beta_x \to x, \quad \beta_y \to y.$$

Ako nastavimo redukciju dalje, na način prikazan u dokazu Teoreme 7.3.3., dolazimo do gramatike u Normalnoj formi Čomski sa pravilima

$$\sigma \to \beta_x\gamma, \quad \gamma \to \lambda\beta_y, \quad \sigma \to \beta_x\beta_y, \quad \lambda \to \beta_x\delta,$$
$$\delta \to \lambda\beta_y, \quad \lambda \to \beta_x\beta_y, \quad \beta_x \to x, \quad \beta_y \to y,$$

pri čemu su uvedeni novi pomoćni simboli γ i δ. Jedno od izvođenja reči x^3y^3 u ovoj gramatici je

$$\sigma \Rightarrow \beta_x\gamma \Rightarrow x\gamma \Rightarrow x\lambda\beta_y \Rightarrow x\beta_x\delta\beta_y \Rightarrow x^2\delta\beta_y \Rightarrow x^2\lambda\beta_y^2$$
$$\Rightarrow x^2\beta_x\beta_y^3 \Rightarrow x^3\beta_y^3 \Rightarrow x^3y\beta_y^2 \Rightarrow x^3y^2\beta_y \Rightarrow x^3y^3.$$

7.4. Lema o napumpavanju

Podsetimo da smo u Odeljku 2.4.1. govorili o predstavljanju izvođenja u kontekstno-nezavisnim gramatikama takozvanim *stablima izvođenja*, U ovom odeljku ćemo stablo izvođenja koristiti da bi dokazali Lemu o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezik. Ova lema je veoma korisna u slučajevima kada treba dokazati da dati jezik nije kontekstno-nezavisan. Koristeći je, dokazaćemo da klasa kontekstno-nezavisnih jezika nad datim konačnim alfabetom nije zatvorena za presek i uniju, što smo ranije obećali da ćemo učiniti.

Teorema 7.4.1. (Lema o napumpavanju) *Neka je X konačan alfabet i $L \subseteq X^*$ je beskonačan kontekstno-nezavisan jezik. Tada postoji broj $n \in \mathbb{N}$ takav da svaka reč $w \in L$ dužine $|w| \geqslant n$ može biti zapisana u obliku*

$$w = puqvr,$$

gde su $p,u,q,v,r \in X^*$ reči za koje važi:

(a) $|uv| \geqslant 1$;

(b) $|uqv| \leqslant n$;

(c) $pu^mqv^mr \in L$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$.

Dokaz: Prema Teoremama 7.2.2. i 7.3.3., postoji kontekstno-nezavisna gramatika $G = (V, X, \pi)$ u Normalnoj formi Čomskog i $\sigma \in V - X$ tako da je $L - \{e\} = L(G, \sigma)$. Neka je k broj pomoćnih simbola gramatike G, tj. $k = |V - X|$, i neka je $n > 2^{k+1}$.

Uzmimo proizvoljnu reč $w \in L$ dužine $|w| \geqslant n$. Neka je D stablo izvođenja $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$. Kako je gramatika G u Normalnoj formi Chomsky, to iz proizvoljnog čvora tog stabla koji nije list mogu izlaziti najviše dve grane, pa ako stablo

D ima i nivoa, tada ne može imati više od 2^i listova, zbog gornje napomene o broju listova potpunog binarnog stabla. Kako su listovi stabla D označeni slovima reči w, čiji je broj jednak $|w| \geqslant n > 2^{k+1}$, to stablo D mora imati najmanje $k+2$ nivoa. Prema tome, u stablu D postoji neki put $\mathcal{P}$ dužine ne manje od $k+1$ na kome leže $k+2$ čvora, od kojih je najmanje $k+1$ označeno pomoćnim simbolima. Posmatrajmo poslednja $k+2$ čvora na putu $\mathcal{P}$. Kako su oni označeni simbolima iz $V-X$ kojih ima k, to među nijima postoje dva čvora, recimo a i b, koji su označeni istim pomoćnim simbolom, recimo λ. Uzmimo takođe, da je čvor b na višem nivou od čvora a. Uočimo podstabla D_a i D_b od D generisana redom čvorovima a i b. Rezultate tih stabala označimo redom sa q' i q. Jasno, $q',q \in X^*$ i D_a i D_b su stabla nekih izvođenja $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q'$ i $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$. Kako je D_b pravo podstablo od D_a, jer je b na višem nivou od a, to je q prava podreč od q', što znači da je $q' = uqv$, za neke $u,v \in X^*$ za koje je $|uv| \geqslant 1$. Dalje, jasno je da je $q' = uqv$ podreč od w, pa se w može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke $p,r \in X^*$. Prema tome, ostaje da se dokaže (b) i (c).

Uslov (b) je posledica činjenice da smo uzeli čvor a među poslednjih $k+2$ čvorova na putu $\mathcal{P}$. Naime, to znači da stablo D_a ima $k+1$ nivo, odnosno najviše $2^{k+1} < n$ listova, što dalje znači da je $|uqv| = |q'| \leqslant 2^{k+1} < n$, što je i trebalo dokazati.

Posmatrajući stabla D_a i D_b vidimo da postoje izvođenja $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u\lambda v$, $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$ i $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} uqv$, dok posmatrajući celo stablo D vidimo da postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p\lambda r$. Iz $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u\lambda v$, prema Teoremi 2.3.3., sledi $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} u^m\lambda v^m$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$, što zajedno sa $\lambda \overset{*}{\Rightarrow} q$ i $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} p\lambda r$, ponovo prema Teoremi 2.3.3., daje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} pu^mqv^mr$. Dakle, $pu^mqv^mr \in L$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$, što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Kao i u slučaju Leme o napumpavanju za raspoznatljive jezike, i Lema o napumpavanju za kontekstno-nezavisne jezike je veoma korisna u dokazivanju da određeni jezici nisu kontekstno-nezavisni.

Primer 7.4.2. Jezik $L = \{x^ny^nx^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ nije kontekstno-nezavisan.

Pre nego što dokažemo ovo tvrđenje, uvešćemo nekoliko novih pojmova. Za reč $w \in X^*$, gde je X proizvoljan alfabet, *granicom* u reči w nazivaćemo bilo koju podreč od w dužine 2 koja se sastoji od različitih slova. Pod *brojem granica* u reči w, u oznaci $B(w)$, podrazumevaćemo broj pojavljivanja takvih podreči u w. Na primer, proizvoljna reč w iz datog jezika L ima tačno dve granice xy i yx, koje dele tu reč na tri odsečka podjednakih dužina, označimo ih sa $s_1(w)$, $s_2(w)$ i $s_3(w)$, što slikovito možemo prikazati na sledeći način

$$\underbrace{xx\cdots x}_{s_1(w)}|\underbrace{yy\cdots y}_{s_2(w)}|\underbrace{xx\cdots x}_{s_3(w)}.$$

Pretpostavimo sada da je L kontekstno-nezavisan jezik. Tada prema Lemi o napumpavanju postoji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslove te leme, i reč $w = x^ny^nx^n$ se može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke reči $p,u,q,v,r \in X^*$ koje ispunjavaju uslove (a), (b) i (c) Leme o napumpavanju. Reči u i v ne mogu sadržati granice, jer u suprotnom dobijamo

$$B(pu^3qv^3r) > 2 \quad \text{i} \quad pu^3qv^3r \in L,$$

što nas je dovelo do protivrečnosti. Prema tome, reči u i v su cele sadržane u nekom od odsečaka reči w, ali naravno, u najviše dva od tri odsečka te reči. Zbog toga u reči $w' = pu^2qv^2r \in L$, odsečci $s_1(w')$, $s_2(w')$ i $s_3(w')$ neće biti iste dužine, čime smo ponovo došli do protivrečnosti. Prema tome, odavde zaključujemo da jezik L ne može biti kontekstno-nezavisan.

Primetimo da u prethodnom primeru nismo koristili osobinu (b) iz Leme o napumpavanju. Međutim, ona će biti veoma važna u sledećem primeru:

Primer 7.4.3. Jezik $L = \{x^m y^n x^m y^n \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ nije kontekstno-nezavisan.

Proizvoljna reč $w \in L$ ima tačno tri granice xy, yx i xy, koje dele tu reč na četiri odsečka $s_1(w)$, $s_2(w)$, $s_3(w)$ i $s_4(w)$, pri čemu je $|s_1(w)| = |s_3(w)|$ i $|s_2(w)| = |s_4(w)|$, što možemo prikazati sa:

$$\underbrace{xx\cdots x}_{s_1(w)} | \underbrace{yy\cdots y}_{s_2(w)} | \underbrace{xx\cdots x}_{s_3(w)} | \underbrace{yy\cdots y}_{s_4(w)}.$$

Pretpostavimo sada da je L kontekstno-nezavisan jezik. Tada prema Lemi o napumpavanju postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava uslove te leme, i za proizvoljne $m,n \geqslant n_0$ se reč $w = x^m y^n x^m y^n$ može zapisati u obliku $w = puqvr$, za neke reči $p,u,q,v,r \in X^*$ koje ispunjavaju uslove (a), (b) i (c) Leme o napumpavanju. Kao i u prethodnom primeru dokazujemo da reči u i v ne mogu sadržati granice, što znači da su cele sadržane u nekim od četiri odsečaka reči w. Pri tome nam uslov $|uqv| \leqslant n_0 \leqslant m,n$ kaže da mogu biti sadržane samo u istom ili u dva uzastopna odsečka, pa ponovo dobijamo da će za reč $w' = pu^2qv^2r$, za koju prema Lemi o napumpavanju znamo da je u L, biti $|s_1(w')| \neq |s_3(w)|$ ili $|s_2(w')| \neq |s_4(w)|$, čime smo opet došli do protivrečnosti. Dakle, ovim zaključujemo da L nije kontekstno-nezavisan jezik.

Primer 7.4.2. biće nam važan u dokazu sledeće teoreme, koju smo obećali još u Odeljku 7.1. Njome dokazujemo da klasa kontekstno-nezavisnih jezika, za koju smo Teoremom 7.1.3. dokazali da je zatvorena za uniju, proizvod i zvezda operaciju, nije zatvorena za presek i komplement.

Teorema 7.4.4. (a) *Presek dva kontekstno-nezavisna jezika ne mora biti kontekstno-nezavisan jezik.*

(b) *Komplement kontekstno-nezavisnog jezika ne mora biti kontekstno-nezavisan jezik.*

Dokaz: (a) Neka je $X = \{x,y\}$ i $L = \{x^n y^n x^m \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. Jezik L može se predstaviti kao proizvod jezika $\{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, za koji smo u Primeru 7.2.4. videli da je kontektsno-nezavisan, i jezika x^+, za koji znamo da je raspoznatljiv, pa time i kontekstno-nezavisan. Prema tome, L je kontekstno-nezavisan jezik, kao proizvod dva kontekstno-nezavisna jezika. Slično, i $L' = \{x^m y^n x^n \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ je kontekstno-nezavisan jezik. Međutim, kao što smo pokazali u Primeru 7.4.2., jezik

$$L \cap L' = \{x^n y^n x^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

nije kontekstno-nezavisan.

(b) Ovo sledi iz (a), jer za proizvoljna dva jezika $L_1, L_2 \subseteq X^*$ važi

$$L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c,$$

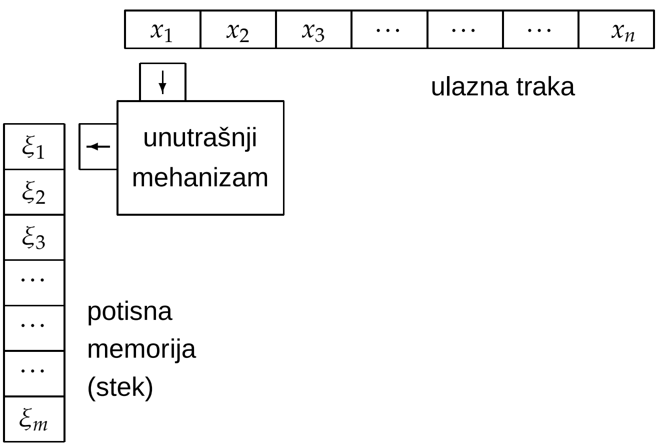
gde je L^c oznaka za komplement jezika L u X^*. □

7.5. Potisni automati

Podsetimo se još jednom da smo kontekstno-nezavisne jezike definisali kao jezike generisane kontekstno-nezavisnim gramatikama. U ovom i narednim odeljcima govorićemo o jednom drugom modelu generisanja jezika, o njihovom generisanju potisnim automatima, za koji ćemo dokazati da je ekvivalentan generisanju kontekstno-nezavisnim gramatikama.

Pre nego što damo formalnu matematičku definiciju pojma potisnog automata, objasnićemo šta se zamišlja pod realnim modelom potisnog automata.

Realni model potisnog automata prikazan je na sledećoj slici



Kao što se vidi sa slike, potisni automat se u ovom modelu sastoji od ulazne trake, potisne memorije i unutrašnjeg mehanizma.

Na ulaznoj traci upisana je ulazna reč $x_1 x_2 \cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slova ulaznog alfabeta X. Ta reč se čita slovo po slovo, glavom za čitanje označenom na slici simbolom ↓. Posle učitavanja svakog slova, ono se briše, a ostatak reči se pomera za jedno mesto ulevo, tako da je potisni automat spreman da učita sledeće slovo ulazne reči.

U potisnoj memoriji upisana je reč $\xi_1\xi_2\cdots\xi_m$, gde su $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m$ slova alfabeta memorije M. Glava za upisivanje, označana na slici sa ←, deluje samo na znak na vrhu memorije, u ovom slučaju na znak ξ_1. Taj znak može se zameniti proizvoljnom reči $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k \in M^*$. Reč w se u memoriju upisuje počev od poslednjeg slova α_k, do prvog slova α_1, pri čemu upisivanje svakog narednog slova potiskuje ostatak sadržaja memorije za jedno mesto naniže. Zbog toga se ovakva memorija naziva *potisna memorija* ili *stek*, a ovakav automat se zove *potisnim automatom* ili *automatom sa potiskujućom memorijom*. Zamena simbola ξ_1 praznom reči znači prosto brisanje tog simbola, pri čemu se ostatak sadržaja memorije podiže za jedno mesto naviše. Do proizvoljnog slova sadržanog u memoriji se može doći samo brisanjem svih slova koja se nalaze iznad njega.

Na kraju, unutrašnji mehanizam se karakteriše unutrašnjim stanjima potisnog automata, i u toku rada tog automata vrši se permanentna promena stanja.

Prema tome, možemo reći da se u toku rada, potisni automat u svakom trenutku karakteriše trojkom koju čine stanje u kome se trenutno nalazi, trenutni sadržaj memorije i trenutni sadržaj ulazne trake. Tu trojku nazivamo konfiguracijom tog automata.

Sada ćemo preći na formalnu definiciju potisnog automata. Pod *potisnim automatom $\mathcal{A}$* podrazumevamo sedmorku

$$\mathcal{A} = (A, X, M, a_0, \xi_0, \mu, \delta),$$

gde je

A – konačan skup, *skup stanja* od $\mathcal{A}$;
X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* od $\mathcal{A}$;
M – neprazan konačan skup, *alfabet steka* (*potisne memorije*) od $\mathcal{A}$;
a_0 – element iz A, *početno stanje* od $\mathcal{A}$;
ξ_0 – element iz M, *početni simbol steka* od $\mathcal{A}$;
μ – preslikavanje iz $A\times M$ u $\mathcal{F}(A\times M^*)$, gde $\mathcal{F}(A\times M^*)$ označava skup svih konačnih podskupova od $A\times M^*$, uključujući tu i prazan podskup;
δ – preslikavanje iz $A\times M\times(A\cup\{e\})$ u $\mathcal{F}(A\times M^*)$.

Preslikavanja μ i δ nazivamo *funkcijama prelaza* potisnog automata $\mathcal{A}$. Kako su slike pri ovim preslikavanjima podskupovi od $A\times M^*$, to je jasno da se potisni automati "ponašaju *nedeterministički*", što će se bolje videti iz daljeg teksta.

Proizvoljnu trojku $(a,\alpha,u) \in A\times M^*\times X^*$ nazivaćemo *konfiguracijom* potisnog automata $\mathcal{A}$. U napred datom modelu potisnog automata, ova konfiguracija bi odgovarala trenutku u kome se potisni automat $\mathcal{A}$ nalazi u stanju a, u steku se nalazi zapamćena reč α, a na ulaznoj traci na očitavanje čeka ulazna reč u. Rad potisnog automata A sastoji se u nizu prelazaka iz konfiguracije u konfiguraciju, koji su određeni funkcijama prelaza μ i δ. Te funkcije se takođe mogu shvatiti kao izvesni *program*, ili, tačnije rečeno, *skup instrukcija* po kome radi potisni automat A. Taj skup instrukcija čine sve relacije oblika

$$(b,\beta) \in \mu(a,\xi)$$

koje važe za $(b,\beta) \in A \times M^*$ i $(a,\xi) \in A \times M$, i sve relacije oblika

$$(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$$

koje važe za $(b,\beta) \in A \times M^*$ i $(a,\xi,x) \in A \times M \times (X \cup \{e\})$.

Možemo razlikovati tri vrste prelaza u potisnom automatu.

1. Stacionarni prelazi.

Neka je data konfiguracija (a,α,u), pri čemu je $\alpha \in M^+$, što znači da je stek neprazan. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$. Ako je $(b,\beta) \in \mu(a,\xi)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a,α,u) na konfiguraciju $(b,\beta\alpha',u)$, što simbolički označavamo

$$(a,\alpha,u) \to (b,\beta\alpha',u).$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b,\beta) \in \mu(a,\xi),$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β
i ostavi ulaznu reč u nepromenjenom.

Dakle, prelazi ovog tipa ne zavise od ulaza. Ovakve prelaze nazivamo *stacionarnim prelazima*, jer se prilikom njih ne menja sadrzaj ulazne trake.

2. Progresivni prelazi.

Neka je data konfiguracija (a,α,u), pri čemu je $\alpha \in M^+$ i $u \in X^+$, što znači da su i stek i ulazna traka neprazni. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$, i označimo sa x prvo slovo ulazne reči u, tj. uzmimo da je $u = xu'$, za neki $u' \in X^*$. Ako je $(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a,α,u) na konfiguraciju $(b,\beta\alpha',u')$, što simbolički označavamo

$$(a,\alpha,u) \to (b,\beta\alpha',u').$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b,\beta) \in \delta(a,\xi,x)$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β
i izbriši prvo slovo x ulazne reči u.

Prelaze ovakvog tipa nazivamo *progresivnim prelazima*, jer se prilikom njih briše prvi simbol sa ulazne trake.

3. Prelazi sa praznim ulazom.

Neka je data konfiguracija (a,α,e), pri čemu je $\alpha \in M^+$. Označimo sa ξ prvo slovo reči α, tj. uzmimo da je $\alpha = \xi\alpha'$, za neki $\alpha' \in M^*$. Ako je $(b,\beta) \in \delta(a,\xi,e)$, tada je moguć prelaz sa konfiguracije (a,α,u) na konfiguraciju $(b,\beta\alpha',e)$, što simbolički označavamo

$$(a,\alpha,e) \to (b,\beta\alpha',e).$$

Drugim rečima, relaciju

$$(b,\beta) \in \delta(a,\xi,e)$$

možemo smatrati instrukcijom programa potisnog automata A koja kaže

pređi iz stanja a u b, zameni prvi simbol steka ξ rečju β
i ostavi ulaznu traku praznom

(kakva je bila i pre prelaza). Ovakve prelaze ćemo nazivati *prelazima sa praznim ulazom*.

Stacionarni i progresivni prelazi i prelazi sa praznim ulazom predstavljaju sve moguće prelaze iz jedne konfiguracije potisnog automata A u drugu. Možemo smatrati da smo na ovaj način definisali relaciju $\to$ na skupu svih konfiguracija potisnog automata A, pri čemu je

$$(a_1,\alpha_1,u_1) \to (a_2,\alpha_2,u_2)$$

ako i samo ako je moguć prelaz iz konfiguracije (a_1,α_1,u_1) u konfiguraciju (a_2,α_2,u_2), koji je bilo stacionaran, bilo progresivan, bilo prelaz sa praznim ulazom.

Sa $\xrightarrow{*}$ ćemo označavati refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\to$. To znači da za dve konfiguracije (a,α,u) i (b,β,v) potisnog automata A važi

$$(a,\alpha,u) \xrightarrow{*} (b,\beta,v) \tag{7.35}$$

ako i samo ako je ili $(a,\alpha,u) = (b,\beta,v)$, ili postoji niz konfiguracija

$$\Big\{(a_i,\alpha_i,u_i)\Big\}_{i=1}^{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

takav da važi

$$(a,\alpha,u) = (a_1,\alpha_1,u_1) \to (a_2,\alpha_2,u_2) \to \cdots \to (a_n,\alpha_n,u_n) = (b,\beta,v). \tag{7.36}$$

Izraz oblika (7.35), odnosno niz prelaza (7.36), nazivamo *izračunavanjem* u A, a pojedinačne prelaze u (7.36) nazivamo *koracima* u tom izračunavanju.

Primetimo da sa konfiguracije oblika (a,e,u) nije moguće preći ni na jednu drugu konfiguraciju potisnog automata A. To znači da ako u nekom izračunavanju u A dođemo do konfiguracije tog oblika, izračunavanje se prekida. Drugim rečima, ukoliko se u toku rada potisnog automata stek isprazni, što se može desiti, jer prvi simbol steka možemo zameniti i praznom reči, što znači obrisati, tada se rad potisnog automata prekida.

U literaturi se mogu naći i slične definicije potisnog automata u kojima se uzima da su μ i δ parcijalna preslikavanja. Međutim, to u suštini ništa ne menja, jer je za rad potisnog automata, tj. za prelaze u njemu, potpuno svejedno da li je $\mu(a,\xi) = \emptyset$ ili $\mu(a,\xi)$ nije definisano, i slično, da li je $\delta(a,\xi,x) = \emptyset$ ili $\delta(a,\xi,x)$ nije definisano.

7.6. Raspoznavanje jezika potisnim automatima

U ovom odeljku pokazaćemo da se pojam raspoznavanja, odnosno generisanja jezika potisnim automatom može definisati na dva načina – kao raspoznavanje skupom stanja i raspoznavanje praznim stekom, i dokazaćemo da su ta dva načina ekvivalentna.

Prvi način sličan je onom koji smo koristili u prethodnoj glavi, kada smo govorili o raspoznavanju jezika konačnim automatima. Naime, govorićemo da potisni automat *A raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *skupom* $T \subseteq A$ ako je

$$L = \Big\{u \in X^* \,\Big|\, (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M^*)\ (a_0,\xi_0,u) \xrightarrow{*} (a,\alpha,e)\Big\},$$

odnosno ako za $u \in X^*$ važi

$$u \in L \iff (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M^*)\ (a_0,\xi_0,u) \xrightarrow{*} (a,\alpha,e).$$

Drugi način raspoznavanja jezika potisnim automatom je raspoznavanje praznim stekom. Naime, govorićemo da potisni automat *A raspoznaje jezik L praznim stekom* ako je

$$L = \Big\{u \in X^* \,\Big|\, (\exists a \in A)\ (a_0,\xi_0,u) \xrightarrow{*} (a,e,e)\Big\},$$

odnosno ako za $u \in X^*$ važi

$$u \in L \;\Leftrightarrow\; (\exists a \in A)\,(a_0,\xi_0,u) \xrightarrow{*} (a,e,e).$$

I pored očite razlike u definiciji ovih načina raspoznavanja, sledećom teoremom se dokazuje da su oni u suštini ekvivalentni.

Teorema 7.6.1. *Neka je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X. Tada postoji potisni automat koji raspoznaje L skupom stanja ako i samo ako postoji potisni automat koji raspoznaje L praznim stekom.*

Dokaz: Pretpostavimo najpre da postoji potisni automat

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, X, M_1, a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, \mu_1, \delta_1)$$

koji raspoznaje L skupom $T \subseteq A_1$. To znači da je

$$L = \left\{ u \in X^* \,\middle|\, (\exists a \in T)(\exists \alpha \in M_1^*)\,(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a,\alpha,e) \right\}.$$

Konstruišimo potisni automat

$$\mathcal{A}_2 = (A_2, X, M_2, a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, \mu_2, \delta_2)$$

na sledeći način: uzmimo da je

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cup \{a_0^{(2)}, a_1^{(2)}\}, &\quad& \text{pri čemu } a_0^{(2)}, a_1^{(2)} \notin A_1,\\ M_2 &= M_1 \cup \{\xi_0^{(2)}\}, && \text{pri čemu } \xi_0^{(2)} \notin M_1, \end{aligned}$$

i definišimo $\mu_2 : A_2 \times M_2 \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\mu_2(a,\xi) = \mu_1(a,\xi), \qquad \text{za } (a,\xi) \in A_1 \times M_1, \tag{7.37}$$

$$\mu_2(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}) = \left\{ (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)}) \right\}, \tag{7.38}$$

$$\mu_2(a,\xi) = \emptyset, \qquad \text{u ostalim slučajevima,}$$

i $\delta_2 : A_2 \times M_2 \times (X \cup \{e\}) \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\delta_2(a,\xi,x) = \delta_1(a,\xi,x), \qquad \text{za } (a,\xi,x) \in A_1 \times M_1 \times X, \tag{7.39}$$

$$\delta_2(a,\xi,e) = \delta_1(a,\xi,e), \qquad \text{za } a \in A_1 - T,\ \xi \in M_1, \tag{7.40}$$

$$\delta_2(a,\xi,e) = \left\{ (a_1^{(2)}, e) \right\}, \qquad \text{za } a \in T \cup \{a_1^{(2)}\},\ \xi \in M_2, \tag{7.41}$$

$$\delta_2(a,\xi,x) = \emptyset, \qquad \text{u ostalim slučajevima.} \tag{7.42}$$

Označimo sa L' jezik koji potisni automat $\mathcal{A}_2$ raspoznaje praznim stekom, tj.

$$L' = \left\{ u \in X^* \,\middle|\, (\exists a \in A_2)\,(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a,e,e) \right\}.$$

Dokazaćemo da je $L = L'$.

Razmotrimo najpre kako funkcioniše potisni automat A_2. Kada A_2 krene sa izračunavanjem iz konfiguracije oblika $(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u)$, za neki $u \in X^*$, tada uslov (7.38) služi da načini prelaz

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \to (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)}, u). \tag{7.43}$$

Štaviše, iz (7.38) i (7.42) se dobija da svako izračunavanje koje polazi iz konfiguracije $(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u)$ mora započeti korakom (7.43). Dalje, uslovi (7.37), (7.39) i (7.40) služe da se svakom izračunavanju u A_1 jednoznačno pridruži izračunavanje u A_2, njegova "kopija" u A_2, čije se konfiguracije razlikuju od odgovarajućih konfiguracija prvog izračunavanja samo po tome što je pri drugom izrač unavanju na dnu steka stalno prisutan simbol $\xi_0^{(2)}$. Preciznije, za konfiguracije (a, α, u) i (b, β, v) u A_1 važi tvrđenje:

(‡) *$(a, \alpha, u) \to (b, \beta, v)$ je stacionarni (progresivni) prelaz u A_1 ako i samo ako je $(a, \alpha\xi_0^{(2)}, u) \to (b, \beta\xi_0^{(2)}, v)$ stacionarni (progresivni) prelaz u A_2, a u slučaju da je $a \in A_1 - T$ i $u = v = e$, tada odgovarajuće tvrđenje važi i za prelaze sa praznim ulazom.*

U zavisnosti o kom tipu prelaza se radi, ovo tvrđenje se lako dokazuje korišćenjem osobina (7.37), (7.39) i (7.40), tim redom. Na kraju, uslov (7.41) služi da se njegovom upotrebom stek isprazni, kad god se dođe do konfiguracije oblika (a, ξ, e), za neki $a \in T$.

Pošto smo objasnili način funkcionisanja potisnog automata A_2, vratimo se na dokaz teoreme. Uzećemo da je $u \in L$, tj. da u A_1 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha, e), \tag{7.44}$$

gde je $a \in T$ i $\alpha \in M_1^*$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da osim konfiguracije (a, α, e) u izračunavanuju (7.44) ne postoji druga konfiguracija koja pripada skupu $T \times M_1^* \times \{e\}$ (jer izračunavanje (7.44) možemo prekinuti prilikom prvog pojavljivanja takve konfiguracije u njemu). Tada iz (7.44), prema tvrđenju (‡), dobijamo da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \alpha\xi_0^{(2)}, e). \tag{7.45}$$

Dalje, prema uslovu (7.41), kojim, kao što smo već rekli, praznimo stek, imamo u A_2 sledeće izračunavanje:

$$(a, \alpha\xi_0^{(2)}, e) \xrightarrow{*} (a_1^{(2)}, e, e). \tag{7.46}$$

Ako sada spojimo prelaz (7.43) i izračunavanja (7.45) i (7.46) u A_2, dobijamo izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a_1^{(2)}, e, e),$$

što znači da je $u \in L'$. Ovim je dokazano da je $L \subseteq L'$.

Da bi smo dokazali obratnu inkluziju, uzmimo da je $u \in L'$, tj. da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e), \tag{7.47}$$

za neki $a \in A_2$. Prema napred uočenom, prvi korak ovog izračunavanja mora biti

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \to (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)}, u).$$

Zbog uslova (7.37), (7.39) i (7.40), pri daljim prelazima potisni automat A_2 će se zadržati u stanjima iz A_1 sve dok ne dođe do konfiguracije oblika (a', α, e), gde je $a' \in T$ i $\alpha \in M_2^*$. Prema tome, u okviru izračunavanja (7.47) javlja se izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)} \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a', \alpha, e), \tag{7.48}$$

takvo da sva stanja u konfiguracijama iz (7.48) pripadaju skupu A_1. Kako su koraci u tom izračunavanju bazirani samo na (7.37), (7.39) i (7.40), to se u stek unose samo reči iz M_1^*, pa je svaka konfiguracija koja se javlja u njemu oblika $(q, \beta\xi_0^{(2)}, v)$, gde je $q \in A_1$, $\beta \in M_1^*$ i $v \in X^*$. Odavde prema (‡) dobijamo da izračunavanju (7.48) u A_2 odgovara u A_1 izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a', \alpha', e),$$

gde je $\alpha' \in M_1^*$ reč takva da je $\alpha = \alpha' \xi_0^{(2)}$. Ovo znači da je $u \in L$, čime smo dokazali da je $L = L'$.

Sada prelazimo na dokaz obrata teoreme. Dakle, pretpostavićemo da postoji potisni automat

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, X, M_1, a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, \mu_1, \delta_1)$$

koji raspoznaje jezik L praznim stekom, tj.

$$L = \left\{ u \in X^* \,\middle|\, (\exists a \in A_1)\ (a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e) \right\},$$

i konstruisaćemo potisni automat

$$\mathcal{A}_2 = (A_2, X, M_2, a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, \mu_2, \delta_2)$$

koji raspoznaje L nekim skupom $T \subseteq A_2$. Zaista, uzećemo da je

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cup \{a_0^{(2)}, t\}, \qquad && \text{pri čemu } a_0^{(2)}, t \notin A_1, \\ M_2 &= M_1 \cup \{\xi_0^{(2)}\}, && \text{pri čemu } \xi_0^{(2)} \notin M_1, \end{aligned}$$

i definisaćemo preslikavanja $\mu_2 : A_2 \times M_2 \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\begin{aligned}
&\mu_2(a,\xi) = \mu_1(a,\xi), \qquad \text{za } (a,\xi) \in A_1 \times M_1, \\
&\mu_2(a_0^{(2)},\xi_0^{(2)}) = \left\{(a_0^{(1)},\xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)})\right\}, \\
&\mu_2(a,\xi) = \emptyset, \qquad \text{u ostalim slučajevima,}
\end{aligned} \tag{7.49}$$

i $\delta_2 : A_2 \times M_2 \times (X \cup \{e\}) \to \mathcal{F}(A_2 \times M_2^*)$ sa:

$$\delta_2(a,\xi,x) = \delta_1(a,\xi,x), \qquad \text{za } (a,\xi,x) \in A_1 \times M_1 \times (X \cup \{e\}), \tag{7.50}$$

$$\delta_2(a,\xi_0^{(2)},e) = \left\{(t,\xi_0^{(2)})\right\}, \qquad \text{za } a \in A_2, \tag{7.51}$$

$$\delta_2(a,\xi,x) = \varnothing, \qquad \text{u ostalim slučajevima.} \tag{7.52}$$

Označimo sa L' jezik koji A_2 raspoznaje skupom $T = \{t\}$, tj.

$$L' = \left\{u \in X^* \,\middle|\, (\exists \alpha \in M_2^*)\ (a_0^{(2)},\xi_0^{(2)},u) \xrightarrow{*} (t,\alpha,e)\right\}.$$

Dokazaćemo da je $L = L'$.

Jasno je da je potisni automat A_2 konstruisan slično onom konstruisanom u prvom delu teoreme, a takođe i da slično funkcioniše. Bez većih teškoća se i za ovaj automat može dokazati da je prvi korak u svakom izračunavanju u A_2 koje polazi iz konfiguracije oblika $(a_0^{(2)},\xi_0^{(2)},u)$, gde je $u \in X^*$, dat sa (7.43) i da važi tvrđenje (‡). Uslov koji razlikuje ovaj automat i automat konstruisan u prvom delu teoreme je (7.51), koji upotrebljavamo da zaustavimo izračunavanje u A_2 kad god dospemo do konfiguracije oblika $(a,\xi_0^{(2)},e)$, $a \in A_1$, kojoj u A_1 odgovara konfiguracija (a,e,e).

Posle ovih komentara vezanih za funkcionisanje potisnog automata A_2, nastavljamo dokaz. Uzećemo najpre da je $u \in L$, tj. da u A_1 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(1)},\xi_0^{(1)},u) \xrightarrow{*} (a,e,e),$$

gde je $a \in A_1$. Prema (‡), tom izračunavanju u A_2 odgovara izračunavanje

$$(a_0^{(1)},\xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)},u) \xrightarrow{*} (a,\xi_0^{(2)},e), \tag{7.53}$$

dok prema (7.51) imamo

$$(a,\xi_0^{(2)},e) \xrightarrow{*} (t,\xi_0^{(2)},e), \tag{7.54}$$

pa iz (7.43), (7.53) i (7.54) dobijamo da važi

$$(a_0^{(2)},\xi_0^{(2)},u) \xrightarrow{*} (t,\xi_0^{(2)},e),$$

što znači da je $u \in L'$, pa je dakle $L \subseteq L'$.

Obratno, uzmimo da je $u \in L'$, tj. da u A_2 postoji izračunavanje

$$(a_0^{(2)}, \xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (t, \alpha, e), \tag{7.55}$$

za neki $\alpha \in M_2^*$. Prvi korak u ovom izračunavanju dat je sa (7.43). Sa druge strane, jasno je da se potisni automat ne može vratiti u stanje $a_0^{(2)}$, a posle ulaska u stanje t ne može iz njega više izaći, pa u okviru izračunavanja (7.55) možemo izdvojiti izračunavanje oblika

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \beta, e) \to (t, \alpha, e), \tag{7.56}$$

pri čemu su sva stanja u konfiguracijama iz (7.56), osim poslednje, iz skupa A_1, a zadnji korak u (7.56) je zasnovan na (7.51), što je moguće samo ukoliko je $\beta = \alpha = \xi_0^{(2)}$, pa dobijamo izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}, u) \xrightarrow{*} (a, \xi_0^{(2)}, e). \tag{7.57}$$

Kako su svi koraci u (7.57) zasnovani ili na (7.49) ili na (7.50), to se tokom tih koraka u stek unose samo reči iz M_1^*, pa su sve druge koordinate svih konfiguracija u (7.57) oblika $\gamma\xi_0^{(2)}$, odakle prema (‡) dobijamo da izračunavanju (7.55) u A_2 odgovara u A_1 izračunavanje

$$(a_0^{(1)}, \xi_0^{(1)}, u) \xrightarrow{*} (a, e, e).$$

Prema tome, $u \in L$, čime smo dokazali da je $L = L'$, što je i trebalo dokazati.

Ovim smo završili dokaz teoreme. □

U svetlu prethodne teoreme, ako je $L \subseteq X^*$ jezik nad konačnim alfabetom X, i A je potisni automat koji raspoznaje L bilo nekim podskupom skupa stanja, bilo praznim stekom, tada ćemo govoriti prosto da A *raspoznaje* L i da je L jezik *raspoznatljiv potisnim automatom*.

7.7. Kontekstno-nezavisni jezici i potisni automati

U ovom odeljku dokazujemo glavnu teoremu ove glave koja kaže da jezici koji mogu biti raspoznati potisnim automatom jesu upravo kontekstno-nezavisni jezici.

Teorema 7.7.1. *Neka je X konačan alfabet i neka je $L \subseteq X^*$ neprazan jezik. Tada je L kontekstno-nezavisan ako i samo ako može biti raspoznat nekim potisnim automatom.*

Dokaz: Prikazaćemo samo glavne crte ovog dokaza. Pretpostavimo prvo da je L kontekstno-nezavisan jezik. Razlikovaćemo slučajeve $e \notin L$ i $e \in L$.

<u>Slučaj $e \notin L$</u>: Prema Teoremi 7.3.3. možemo uzeti da je $L = L(G,\sigma)$ za neku kontekstno-nezavisnu gramatiku $G = (V,X,\pi)$ koja je u Normalnoj formi Chomsky. Konstruišimo potisni automat

$$A = (A,X,M,a_0,\xi_0,\mu,\delta) \tag{7.58}$$

na sledeći način

$$\begin{aligned}
&A = \{a_0,a_1,t\}, \quad M = (V-X)\cup\{\xi_0\}, \text{ gde } \xi_0 \notin V \text{ i } X\cap V = \emptyset,\\
&\mu(a_0,\xi_0) = \{(a_1,\sigma\xi_0)\},\\
&\mu(a_1,\lambda) = \{(a_1,\alpha\beta)\,|\,\lambda \to \alpha\beta \text{ je pravilo iz } \pi\},\\
&\mu(a,\lambda) = \emptyset, \quad \text{u ostalim slučajevima},\\
&\delta(a_1,\xi_0,e) = \{(t,\xi_0)\},\\
&\delta(a_1,\lambda,x) = \{(a_1,e)\}, \quad \text{ako je } \lambda \to x \text{ pravilo iz } \pi,\\
&\delta(a,\lambda,x) = \emptyset, \quad \text{u ostalim slučajevima.}
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Tada potisni automat A raspoznaje L skupom $T = \{t\}$.

<u>Slučaj $e \in L$</u>: U ovom slučaju posmatramo jezik $L' = L - \{e\}$. Tada automat A definisan za L' sa (7.58) raspoznaje L', i ako u (7.59) dodamo

$$\delta(a_0,\xi_0,e) = \{(t,\xi_0)\},$$

tada ćemo dobiti novi potisni automat koji raspoznaje L.

Obratno, pretpostavimo da jezik L može biti raspoznat nekim potisnim automatom

$$A = (A,X,M,a_0,\xi_0,\mu,\delta).$$

Prema Teoremi 7.6.1. možemo uzeti da se radi o raspoznavanju praznim stekom. Definišimo gramatiku $G = (V,X,\pi)$ na sledeći način: Uzmimo najpre da je

$$V - X = (A\times M\times A)\cup\{\sigma\}.$$

Elemente iz $V-X$ zapisivaćemo u obliku $[p,\alpha,q]$, da ih ne bi pomešali sa konfiguracijama potisnig automata A. Skup π pravila definisaćemo na sledeći način: Najpre ćemo za svaki $a\in A$ staviti da je

$$\sigma \to [a_0,\xi_0,a]$$

pravilo iz π. Dalje, svakoj "instrukciji" $(a',\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)\in\mu(a,\alpha)$, za $k \geqslant 1$, pridružićemo skup pravila

$$[a,\alpha,a_k] \to [a',\beta_1,a_1][a_1,\beta_2,a_2]\cdots[a_{k-1},\beta_k,a_k],$$

gde je $a_1,\dots,a_k$ proizvoljan niz elemenata iz A, dok ćemo "instrukciji" oblika $(a',e) \in \mu(a,\alpha)$ pridružiti pravilo

$$[a,\alpha,a'] \to e.$$

Na kraju, proizvoljnoj "instrukciji" $(a',\beta_1\beta_2\cdots\beta_k) \in \delta(a,\alpha,x)$, za $k \geqslant 1$, pridružujemo skup pravila

$$[a,\alpha,a_k] \to x[a',\beta_1,a_1][a_1,\beta_2,a_2]\cdots[a_{k-1},\beta_k,a_k],$$

gde je $a_1,\dots,a_k$ proizvoljan niz elemenata iz A, dok ćemo "instrukciji" oblika $(a',e) \in \delta(a,\alpha,x)$ pridružiti pravilo

$$[a,\alpha,a'] \to x.$$

Kada sva ova pravila sakupimo i njima formiramo skup π, dobijamo gramatiku G koja je očigledno kontekstno-nezavisna (mada ne u Normalnoj formi Chomsky), i za koju je $L = L(G,\sigma)$. □

7.8. Zadaci

7.8.1. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ homomorfizam slobodnih monoida. Ako je $L \subseteq X^*$ kontekstno-nezavisan jezik, dokazati da je tada i $L\phi$ kontekstno-nezavisan jezik.

7.8.2. Odrediti jezik generisan gramatikom $G = (V,X,\pi)$, gde je $X = \{x,y\}$, $V - X = \{\sigma,\lambda\}$ i pravila izvođenja su $\sigma \to x\lambda y$, $\lambda \to x\lambda y + e$. Naći gramatiku bez e-izvođenja koja generiše jezik $L(G,\sigma)$.

7.8.3. Data je kontekstno-nezavisna gramatika $G = (\{\sigma,\alpha,\beta,x,y,z\}, \{x,y,z\}, \pi)$, gde je $\pi = \{\sigma \to x\sigma y, \sigma \to \alpha\beta, \sigma \to z, \alpha \to \beta\alpha z, \alpha \to y, \beta \to \alpha\sigma\}$. Naći gramatiku u Normalnoj formi Čomski ekvivalentnu gramatici G.

7.8.4. Neka je $G = (\{\sigma,p,q,\Rightarrow,\rceil,(,)\}, \{p,q,\Rightarrow,\rceil,(,)\}, \pi)$ kontekstno-nezavisna gramatika sa skupom pravila $\pi = \{\sigma \to \rceil\sigma, \sigma \to (\sigma \Rightarrow \sigma), \sigma \to p, \sigma \to q\}$. Naći gramatiku u Normalnoj formi Čomski koja generiše $L(G,\sigma)$.

7.8.5. Odrediti kontekstno-nezavisnu gramatiku bez e-pravila koja generiše jezik nad alfabetom $\{b,c\}$ koji čine sve reči u kojima se bcc javlja najmanje tri puta kao podreč.

7.8.6. Odrediti tip jezika $\{u^2v \mid u,v \in \{0,1\}^*,\ u \neq v\}$.

7.8.7. Da li je jezik $\{uz\bar{u}zu \mid u \in \{x,y\}^*\}$ kontekstno-nezavisan?

7.8.8. Dokazati da jezik $\{uu \mid u \in \{x,y\}^*\}$ nije kontekstno-nezavisan.

7.8.9. Dokazati da jezik $\{x^n \mid n$ je prost broj $\}$ nije kontekstno-nezavisan.

7.8.10. Odrediti gramatiku bez trivijalnih i e-izvođenja koja generiše jezik $L(G,\sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ i $X = \{x, y\}$, $V = X \cup \{\sigma, \lambda, \mu\}$ i skup π čine pravila

$$\sigma \to \lambda + xx, \qquad \lambda \to \mu + x, \qquad \mu \to \sigma + y.$$

Konstruisati potisni automat koji raspoznaje taj jezik.

7.8.11. Konstruisati potisni automat koji raspoznaje jezik

$$L = \{wx\overline{w} \mid w \in \{x, y\}^*\}.$$

7.8.12. Dat je potisni automat $\mathcal{A} = (A, X, V, \delta)$ gde su $A = \{i, q, t\}$, $X = \{x, y\}$, $V = \{\xi, \alpha, \beta\}$ i funkcija δ je određena sa

$$\begin{array}{lll}
\delta(i,\xi,x) = (i,\alpha\xi), & \delta(q,\beta,y) = (q,e), & \delta(i,\beta,x) = (i,\alpha\beta), \\
\delta(i,\alpha,x) = \{(i,\alpha^2),(q,e)\}, & \delta(i,\xi,y) = (i,\beta\xi), & \delta(i,\beta,y) = \{(i,\beta^2),(q,e)\}, \\
\delta(i,\alpha,y) = (i,\beta\alpha), & \delta(q,\xi,e) = \{(t,\xi)\}, & \delta(q,\alpha,x) = (q,e), \\
\mu = \emptyset,\ T = \{t\}. & &
\end{array}$$

Dokazati da je ulaz $x^2y^2x^2$ raspoznatljiv i odrediti jezik koji je raspoznat ovim automatom pomoću skupa T. Konstruisati kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generiše dobijeni jezik.

7.8.13. Neka je L skup svih palindroma, tj. reči w takvih da je $w = \overline{w}$, nad datim alfabetom.

(a) Dokazati da je L kontekstno-nezavisan.
(b) Odrediti kontekstno-nezavisnu gramatiku koja generise taj jezik.
(c) Konstruisati potisni automat koji raspoznaje jezik L.

Glava 8
Raspoznavanje jezika tipova 0 i 1

U prethodnim glavama smo jezike tipa 3 (regularne jezike) okarakterisali kao jezike koji se mogu raspoznati konačnim automatima, a za jezike tipa 2 (kontekstno-zavisne jezike) smo dokazali da su to upravo jezici koji se mogu raspoznati potisnim automatima. Prirodno se nameće pitanje: Da li se i jezici tipa 0 i 1 mogu okarakterisati na sličan način? Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i u ovoj glavi dajemo dva modela apstraktnih matematičkih mašina koje raspoznaju te jezike.

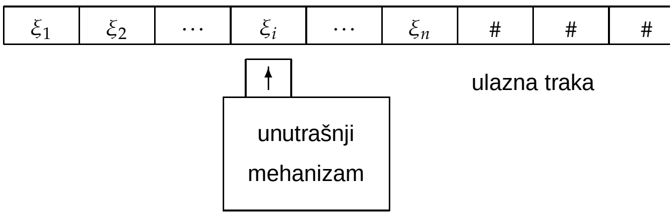
Za raspoznavanje jezika tipa 0 koriste se apstraktne mašine koje je uveo Tjuring (A. Turing) [106], i koje se u njegovu čast nazivaju Tjuringovim mašinama. U Odeljku 7.1 uvode se pojmovi determinističke i nedeterminističke Tjuringove mašine i raspoznavanja jezika tim mašinama, pri čemu se dokazuje da oba ova tipa Tjuringovih mašina raspoznaju istu klasu jezika, a u Odeljku 7.2 se dokazuje da ta klasa jeste upravo klasa svih jezika tipa 0.

Sa druge strane, jezici tipa 1, tj. kontekstno-zavisni jezici, raspoznaju se specijalnim tipom Tjuringovih mašina uvedenim u radu Majhila (J. Myhill) [81], koje se nazivaju linearno ograničenim automatima. Njihova definicija daje se u Odeljku 7.3, gde se takođe dokazuju rezultati Landvebera (P. S. Landweber) [69] i Kurode (S. Y. Kuroda) [67], prema kojima klasa jezika koji se mogu raspoznati nedeterminističkim linearno ograničenim automatima jeste upravo klasa kontekstno-zavisnih jezika, tj. jezika tipa 1.

8.1. Tjuringove mašine

Postoji više različitih načina za definisanje Tjuringovih mašina. Međutim, svi oni su međusobno ekvivalentni, pa ćemo ovde dati osnovni model Tjuringove mašine. Jednostavnom modifikacijom tog osnovnog modela dobijaju se ostali modeli.

Pre nego što damo formalnu definiciju Tjuringove mašine opisaćemo neformalno njen rad. Tjuringova mašina se sastoji iz *ulazne trake* koja je podeljena na ćelije i u svakoj od njih zabeležen je po jedan simbol iz konačnog alfabeta Σ, koji se naziva skup *simbola trake*. Ulazna traka ima početak sa leve strane, a sa desne strane je neograničena, tj. ima beskonačno mnogo ćelija. U svakom diskretnom trenutku vremena, *glava mašine* pokazuje na jednu ćeliju, odnosno na simbol trake koji je u njoj zabeležen. Na početku rada mašine,



na ulaznoj traci su u prvih n ćelija, za neki prirodan broj n, zabeleženi simboli iz *ulaznog alfabeta* X, gde je $X \subseteq \Sigma$. Preostali deo trake je prazan, tako da među simbolima trake postoji i simbol # koji označava praznu ćeliju i važi $\# \notin X$. *Unutrašnji mehanizam* mašine određen je *stanjima* mašine, pri čemu je skup A svih stanja mašine konačan. Rad mašine kontrolisan je *instrukcijama* koje u svakom diskretnom trenutku vremena, zavisno od trenutnog stanja mašine i simbola na koji glava mašine trenutno pokazuje, određuju šta će se desiti u narednom trenutku. Sam rad mašine sastoji se u izvršavanju sledećih operacija:

1. prelazak iz jednog stanja u drugo;
2. zamena simbola u ćeliji drugim simbolom, pri čemu je moguće da se on zameni i istim simbolom, tj. da sadržaj ćelije ostane nepromenjen;
3. pomeranje glave mašine za jedno mesto ulevo ili jedno mesto udesno.

U pomeranju glave ključnu ulogu igraju dva posebna simbola L i R, pri čemu je, jasno, sa L određeno pomeranje glave ulevo, a sa R udesno. Pri tome može da postoji najviše jedna instrukcija koja za trenutno stanje i simbol na traci ukazuje na dalji rad mašine. Mašina završava sa radom kada za trenutno stanje i simbol na traci ne postoji nijedna instrukcija koja predviđa dalje ponašanje mašine.

U vezi sa tačkom 2 treba napomenuti da se u literaturi često razmatraju Tjuringove mašine kod kojih postoji mogućnost da posmatrani simbol na traci bude i obrisan. Takva mogućnost indirektno postoji i kod mašina koje se ovde razmatraju. Naime, alfabetu Σ se može dodati novi pomoćni simbol B (čita se *prazno* ili *blanko*) koji je moguće upisati umesto razmatranog simbola, čime bi on bio tretiran kao obrisan. Znajući to, u nekim neformalnim razmatranjima podrazumevaćemo da Tjuringova mašina ima mogućnost brisanja posmatranog simbola.

Sada ćemo dati formalnu definiciju Tjuringove mašine. Pod *Tjuringovom mašinom* podrazumevamo petorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, gde je

A – neprazan konačan skup, *skup stanja* mašine $\mathcal{A}$;

a_0 – element iz A, *početno stanje* mašine $\mathcal{A}$;

X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* mašine $\mathcal{A}$;

Σ – neprazan konačan skup koji sadrži X i simbol $\# \notin X$, *alfabet trake* mašine $\mathcal{A}$;

δ – parcijalno preslikavanje iz $A \times \Sigma$ u $A \times \Sigma - \{\#\} \times \{L, R\}$, *funkcija prelaza* mašine $\mathcal{A}$.

Pod pojmom *konfiguracije* Tjuringove mašine $\mathcal{A}$ podrazumevaćemo proizvoljnu trojku $(a, \alpha, i) \in A \times (\Sigma - \{\#\})^* \times \mathbb{N}$. U napred datom neformalnom modelu mašine, ova konfiguracija bi odgovarala trenutku kada se mašina $\mathcal{A}$ nalazi u stanju a, u nepraznom delu trake je upisana reč α, čitano sleva na desno, a i je redni broj ćelije na koju glava pokazuje u tom trenutku, takođe brojano sleva na desno, od početka trake. Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \xi', D)$, za neki $(a, \xi) \in A \times \Sigma$ i $D \in \{L, R\}$, tada izraz

$$\delta(a, \xi) = (b, \xi', D)$$

nazivamo *instrukcijom* mašine $\mathcal{A}$. Rad Tjuringove mašine $\mathcal{A}$ sastoji se iz niza prelaza iz jedne konfiguracije u drugu, pri čemu su ti prelazi određeni instrukcijama te mašine, na način koji ćemo objasniti u daljem tekstu.

Neka je $(a, \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n, i)$ proizvoljna konfiguracija, gde su $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Sigma - \{\#\}$. Razlikujemo više tipova prelaza:

1. Neka je $i \in [1, n]$ i $\delta(a, \xi_i) = (b, \xi, R)$. Tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1} \xi \xi_{i+1} \ldots \xi_n, i+1)$, što pišemo

$$(a, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n, i) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1} \xi \xi_{i+1} \ldots \xi_n, i+1).$$

Drugim rečima, instrukcija $\delta(a, \xi_i) = (b, \xi, R)$ kaže sledeće: pređi iz stanja a u stanje b, zameni simbol ξ_i u i-toj ćeliji simbolom ξ i pomeri glavu za jedno mesto udesno, nad ćeliju sa rednim brojem $i+1$.

2. Neka je $i \in [2, n]$ i $\delta(a, \xi_i) = (b, \xi, L)$. Tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1} \xi \xi_{i+1} \ldots \xi_n, i-1)$, što pišemo

$$(a, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n, i) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a, \xi_1 \ldots \xi_{i-1} \xi \xi_{i+1} \ldots \xi_n, i-1).$$

Drugim rečima, instrukcija $\delta(a, \xi_i) = (b, \xi, L)$ kaže sledeće: pređi iz stanja a u stanje b, zameni simbol ξ_i u i-toj ćeliji simbolom ξ i pomeri glavu za jedno mesto ulevo, nad ćeliju sa rednim brojem $i-1$.

3. Neka je $i = n+1$. Tada glava pokazuje na praznu ćeliju, tj. na ćeliju u kojoj je zabeležen znak #, pa razlikujemo sledeće podslučajeve:

3.1. Ako je $\delta(a, \#) = (b, \xi, R)$, tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a, \xi_1 \ldots \xi_n \xi, n+2)$, što pišemo

$$(a, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n, n+1) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a, \xi_1 \ldots \xi_n \xi, n+2).$$

Znači, instrukcija $\delta(a, \#) = (b, \xi, R)$ kaže: zabeleži simbol ξ u $(n+1)$-vu ćeliju i pomeri glavu za jedno mesto udesno, nad $(n+2)$-gu ćeliju.

3.2. Ako je $\delta(a,\#) = (b,\xi,L)$, tada se sa date konfiguracije prelazi na konfiguraciju $(a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n)$, što pišemo

$$(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,n+1) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a,\xi_1\dots\xi_n\xi,n).$$

Prema tome, u ovom slučaju instrukcija $\delta(a,\#) = (b,\xi,L)$ kaže: upiši simbol ξ u $(n+1)$-vu ćeliju i pomeri glavu za jedno mesto ulevo, nad n-tu ćeliju.

Konačan niz konfiguracija (a_k,α_k,i_k), $k \in [0,n]$, gde je $n \in \mathbb{N}^0$, nazivaćemo *izračunavanjem* u Tjuringovoj mašini $\mathcal{A}$, ako za svako $k \in [0,n-1]$ važi

$$(a_k,\alpha_k,i_k) \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a_{k+1},\alpha_{k+1},i_{k+1}).$$

Ove pojedinačne prelaze nazivamo *koracima* tog izračunavanja. Broj koraka u ovom izračunavanju, tj. broj n, nazivamo *dužinom* tog izračunavanja. Ako su (a,α,i) i (b,β,j) konfiguracije za koje postoji izračunavanje (a_k,α_k,i_k), $k \in [0,n]$, takvo da je

$$(a,\alpha,i) = (a_0,\alpha_0,i_0) \quad \text{i} \quad (b,\beta,j) = (a_n,\alpha_n,i_n),$$

tada pišemo

$$(a,\alpha,i) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}} (b,\beta,j),$$

pri čemu, bez opasnosti od zabune, i taj izraz nazivamo izračunavanjem, tj. identifikujemo ga sa gornjim nizom konfiguracija. Jasno, to izračunavanje je dužine 0 ako i samo ako je $(a,\alpha,i) = (b,\beta,j)$. Ukoliko je jasno o kojoj se Tjuringovoj mašini radi, u oznakama $\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}$ i $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}}$ izostavljamo $\mathcal{A}$, tj. pišemo samo $\rightarrow$ i $\overset{*}{\rightarrow}$.

Drugim rečima, na skupu $A \times \Sigma^* \times \mathbb{N}$ svih konfiguracija definisana je relacija $\rightarrow$ tako da su dve konfiguracije (a,α,i) i (b,β,j) u relaciji $\rightarrow$ ako i samo ako se iz konfiguracije (a,α,i) može preći u (b,β,j) u jednom koraku. Takođe, definisana je i relacija $\overset{*}{\rightarrow}$, koja predstavlja refleksivno-tranzitivno zatvorenje relacije $\rightarrow$.

Napomena 8.1.1. Već smo pomenuli da je moguće definisati Tjuringovu mašinu tako da postoji mogućnost upisivanja praznog simbola. Osim toga, često se u literaturi javljaju i Tjuringove mašine kod kojih glava posle čitanja simbola sa trake ne ide obavezno levo ili desno, već može ostati i na istom mestu. Takva mogućnost postoji i kod ovako uvedenog pojma Tjuringove mašine. Naime, ako želimo da mašina, koja se nalazi u stanju a i čita simbol ξ sa trake, pređe u stanje a_1, ispiše ξ_1 na traci i glava ostane na istom mestu, skupu stanja mašine $\mathcal{A}$ dodajemo novo stanje b, a instrukcijama mašine $\mathcal{A}$ dodajemo sledeće instrukcije:

$$\delta(a,\xi) = (b,\xi_1,R),$$

$$\delta(b,\mu) = (a_1,\mu,L), \quad \text{za svaki simbol trake } \mu.$$

Takođe, postoje i tzv. Tjuringove mašine kod kojih ulazna traka ima više staza. To su, zapravo, Tjuringove mašine kod kojih alfabet trake, a i ulazni alfabet, jesu Dekartovi proizvodi nekih skupova. Mašina ima onoliko staza koliko činilaca ima u tim Dekartovim proizvodima. Tjuringova mašina sa k staza, za neki $k \in \mathbb{N}$, jeste mašina kod koje alfabet trake jeste neki skup k-torki. U neformalnim razmatranjima se uzima da se na svakoj stazi pojavljuju simboli iz odgovarajućeg skupa koji predstavlja alfabet te trake.

Analogno pojmu raspoznavanja jezika automatima uvodi se i pojam raspoznavanja jezika Tjuringovim mašinama. Kažemo da Tjuringova mašina $\mathcal{A} = (A,a_0,X,\Sigma,\delta)$ *raspoznaje jezik* $L \subseteq X^*$ *pomoću skupa* $T \subseteq A$ ako je

$$L = \{u \in X^* \mid (a_0,u,1) \xrightarrow{*} (a,\alpha,i)\,, \ \text{gde je } a \in T, \alpha \in \Sigma^*, i \in \mathbb{N}\},$$

tj.

$$u \in L \Leftrightarrow (a_0,u,1) \xrightarrow{*} (a,\alpha,i) \ \ \text{gde je } a \in T, \alpha \in \Sigma^*, i \in \mathbb{N},$$

a za jezik L u tom slučaju kažemo da je *raspoznatljiv Tjuringovom mašinom*. Skup T nazivamo skupom *finalnih stanja* Tjuringove mašine $\mathcal{A}$. Neformalno, Tjuringova mašina $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik L ako je L skup svih reči ulaznog alfabeta koje vode do nekog finalnog stanja. Često se kaže i da Tjuringova mašina $\mathcal{A}$ *prihvata reč* $u \in X^*$ *skupom* T ako je $(a_0,u,1) \xrightarrow{*} (a,\alpha,i)$, za neko stanje $a \in T$. Primetimo da se ovde govori samo o prihvatanju reči nad alfabetom X, dok simboli iz skupa $\Sigma - X$ imaju pomoćnu ulogu, koja se može uporediti sa ulogom pomoćnih simbola kod gramatika.

Primer 8.1.2. Opisaćemo Tjuringovu mašinu $\mathcal{A} = (A,a_0,X,\Sigma,\delta)$ koja raspoznaje kontekstno-nezavisan jezik $L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Stavimo

$$A = \{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}, \ \ X = \{x,y\}, \ \ \Sigma = \{x,y,\#,\alpha,\beta\}.$$

Skup finalnih stanja je $T = \{a_5\}$, a funkcija prelaza δ je data na sledeći način. Ukoliko prvi ulazni simbol jeste x, mašina ga menja u α, dok se u suprotnom zaustavlja. Zatim se kreće udesno, do prvog y, i menja ga u β. Onda se vraća ulevo do poslednjeg α, pa prvi desni x, ako ga ima, menja u α i ponovo odlazi udesno u potragu za novim y. Dakle, u svakom krugu mašina menja prvi levi x u α i prvi levi y u β, a dolazi do finalnog stanja samo ukoliko nema više x-ova levo od prvog levog y i iza poslednjeg desnog y se nalazi #. Funkcija prelaza je data sa:

1. $\delta(a_0,x) = (a_1,\alpha,R)$
2.a. $\delta(a_1,x) = (a_1,x,R)$
2.b. $\delta(a_1,\beta) = (a_1,\beta,R)$
2.c. $\delta(a_1,y) = (a_2,\beta,L)$
3.a. $\delta(a_2,\beta) = (a_2,\beta,L)$
3.b. $\delta(a_2,\alpha) = (a_3,\alpha,R)$
3.c. $\delta(a_2,x) = (a_4,x,L)$
4.a. $\delta(a_4,x) = (a_4,x,L)$
4.b. $\delta(a_4,\alpha) = (a_0,\alpha,R)$
5.a. $\delta(a_3,\beta) = (a_3,\beta,R)$
5.b. $\delta(a_3,\#) = (a_5,\beta,R)$

Sledeća šema prikazuje ponašanje mašine A u slučaju kada je ulazna reč x^3y^3. Takođe su data i pravila koja se koriste u svakom od koraka.

konfiguracija	pravilo
$(a_0,xxxyyy,1)$	start
$(a_1,\alpha xxyyy,2)$	1
$(a_1,\alpha xxyyy,3)$	2.a
$(a_1,\alpha xxyyy,4)$	2.a
$(a_2,\alpha xx\beta yy,3)$	2.c
$(a_4,\alpha xx\beta yy,2)$	3.c
$(a_4,\alpha xx\beta yy,1)$	4.a
$(a_0,\alpha xx\beta yy,2)$	4.b
$(a_1,\alpha\alpha x\beta yy,3)$	1
$(a_1,\alpha\alpha x\beta yy,4)$	2.a
$(a_1,\alpha\alpha x\beta yy,5)$	2.b
$(a_2,\alpha\alpha x\beta\beta y,4)$	2.c
$(a_2,\alpha\alpha x\beta\beta y,3)$	3.a

konfiguracija	pravilo
$(a_4,\alpha\alpha x\beta\beta y,2)$	3.c
$(a_0,\alpha\alpha x\beta\beta y,3)$	4.b
$(a_1,\alpha\alpha\alpha\beta\beta y,4)$	1
$(a_1,\alpha\alpha\alpha\beta\beta y,5)$	2.b
$(a_1,\alpha\alpha\alpha\beta\beta y,6)$	2.b
$(a_2,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,5)$	2.c
$(a_2,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,4)$	3.a
$(a_2,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,3)$	3.a
$(a_3,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,4)$	3.b
$(a_3,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,5)$	5.a
$(a_3,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,6)$	5.a
$(a_3,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,7)$	5.a
$(a_5,\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,8)$	5.b

Slično kao kod automata, i ovde uvodimo pojam nedeterminističke Tjuringove mašine. Kao što se i očekuje, to će biti Tjuringova mašina kod koje δ nije parcijalno preslikavanje, već je relacija, pa za neke $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ ima više izbora za $\delta(a,\xi)$, tj. $\delta(a,\xi)$ je podskup skupa $A \times \Sigma - \{\#\} \times \{L,R\}$. Tako ćemo ranije definisanu Tjuringovu mašinu nazivati i *determinističkom Tjuringovom mašinom*, a petorku $\mathcal{A} = (A,a_0,X,\Sigma,\delta)$ nazivamo *nedeterminističkom Tjuringovom mašinom* ako A, a_0, X i Σ imaju isto značenje kao u definiciji determinističke Tjuringove mašine, dok je δ relacija između skupova $A \times \Sigma$ i $A \times \Sigma - \{\#\} \times \{L,R\}$.

Jezik $L \subseteq X^*$ je raspoznatljiv nedeterminističkom Tjuringovom mašinom $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ pomoću skupa $T \subseteq A$ ako je

$$L = \{u \in X^* \mid (a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i) \text{ gde je } a \in T, \alpha \in \Sigma^*, i \in \mathbb{N}\},$$

tj.

$$u \in L \Leftrightarrow (a_0, u, 1) \xrightarrow{*} (a, \alpha, i) \text{ gde je } a \in T, \alpha \in \Sigma^*, i \in \mathbb{N}.$$

Skup T je skup *finalnih stanja* Tjuringove mašine $\mathcal{A}$. Neformalno, nedeterministička Tjuringova mašina $\mathcal{A}$ raspoznaje jezik L ako je L skup svih reči ulaznog alfabeta koje vode iz početnog do nekog od finalnih stanja, za neki izbor niza prelaza. Često se kaže i da Tjuringova mašina $\mathcal{A}$ *prihvata reč* $u \in X^*$ *skupom* T ako postoji način da se, polazeći od a_0 i reči u na ulaznoj traci, dođe do nekog finalnog stanja.

Kao i u slučaju automata bez izlaza, i ovde važi da determinističke i nedeterminističke Tjuringove mašine imaju iste mogućnosti u raspoznavanju jezika. To se dokazuje u sledećoj teoremi:

Teorema 8.1.3. *Jezik je raspoznatljiv determinističkom Tjuringovom mašinom ako i samo ako je raspoznatljiv nedeterminističkom Tjuringovom mašinom.*

Dokaz: Kako se svaka deterministička Tjuringova mašina može smatrati nedeterminističkom, to je direktni deo teoreme trivijalan.

Dokazaćemo obrat. Pretpostavimo da nedeterministička Tjuringova mašina $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ raspoznaje L pomoću skupa T. Opisaćemo determinističku Tjuringovu mašinu $\mathcal{A}' = (A', a_0, X, \Sigma', \delta')$ koja raspoznaje L. Naime, skup stanja A' se poklapa sa skupom stanja A, a takođe će i skup finalnih stanja biti T. Za fiksirane $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ takve da je $\delta(a, \xi)$ definisano, označimo sa $k(a, \xi)$ broj definisanih prelaza iz stanja a za ulaz ξ, i numerišimo redom prelaze $\delta(a, \xi) = (a', \mu, D)$, gde je $D \in \{R, L\}$, brojevima od 1 do $k(a, \xi)$. Uvedimo oznaku $r = \max\{k(a, \xi) \mid a \in A, \xi \in \Sigma\}$. Svaka transformacija u $\mathcal{A}'$ okarakterisana je konačnim nizom brojeva između 1 i r koji predstavljaju brojeve prelaza koji su upotrebljeni u toj transformaciji. Jasno je da svaki ovakav niz brojeva ne mora da predstavlja transformaciju, jer je moguće da za izvestan par (a, ξ) ima manje od r izbora za prelaz, tj. $k(a, \xi) < r$.

Neka je sada Σ' skup koji se sastoji od nekih trojki oblika $[x, i, \xi]$, gde je $x \in X$, $i \in [0, r]$, $\xi \in \Sigma$, pri čemu skup Σ' ne mora da obuhvata sve trojke tog oblika. Naime, s obzirom da alfabet trake čine trojke, to možemo smatrati da je traka podeljena na tri staze. U prvoj će se nalaziti ulazna reč. Na drugoj su na početku nule, a nadalje $\mathcal{A}'$ generiše niz brojeva skupa $\{1, 2, \ldots, r\}$, gde svaki od tih brojeva predstavlja broj prelaza koji je upotrebljen. Na trećoj stazi je na početku kopija ulazne reči, a u toku rada se na njoj simulira rad mašine A, za ulaze sa prve staze i prelaze određene nizom u drugoj stazi. Pri tome X identifikujemo sa trojkama oblika $[x, 0, x]$, za svaki $x \in X$. Dakle, ako je A' u stanju a i na ulazu se javlja trojka (x, i, ξ), i ako sa $\delta_i(a, \xi)$ označimo

i-ti prelaz u našoj numeraciji nedeterminističke mašine $\mathcal{A}$, definisan za par (a,ξ), tada za $\delta_i(a,\xi) = (a',\xi',R)$ mašina $\mathcal{A}'$ prelazi u stanje a', na treću stazu upisuje simbol ξ' i pomera glavu jedno mesto udesno. Analogno se razmatra i slučaj $\delta_i(a,\xi) = (a',\xi',L)$.

Jasno je da ukoliko $\mathcal{A}$ prihvata reč u tada će nas odgovarajući izbor transformacija, tj. niza na drugoj stazi, dovesti do finalnog stanja i kod mašine $\mathcal{A}'$. Obratno, ako mašina $\mathcal{A}$ ne prihvata reč u tada nas nijedan izbor niza na drugoj stazi, koji predstavlja izbor odgovarajućih prelaza, ne može dovesti do finalnog stanja u $\mathcal{A}'$. □

8.2. Tjuringove mašine i jezici tipa 0

U ovom odeljku dokazujemo da jezici raspoznati Tjuringovim mašinama jesu upravo jezici tipa 0, tj. jezici generisani gramatikama.

Najpre dokazujemo jedan deo teoreme koja to tvrdi.

Teorema 8.2.1. *Neka je X proizvoljan alfabet i L jezik nad alfabetom X koji je raspoznatljiv Tjuringovom mašinom. Tada je L jezik tipa* 0.

Dokaz: Pretpostavimo da Tjuringova mašina $\mathcal{A} = (A,a_0,X,\Sigma,\delta)$ raspoznaje jezik L skupom stanja T. Konstruisaćemo gramatiku $G = (V,X,\pi)$ koja generiše dve kopije neke reči iz Σ^* i onda simulira rad mašine $\mathcal{A}$ na jednoj od kopija. Ako $\mathcal{A}$ prihvata razmatranu reč, tada G transformiše drugu kopiju u reč iz X^*. Ako $\mathcal{A}$ ne prihvata početnu reč, tada izvođenje ne vodi do reči iz X^*. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $\delta(a,\xi)$ nedefinisano za sve $a \in T$ i $\xi \in \Sigma$.

Uzmimo da je $V = \{[x,\xi] \mid x \in X \cup \{e\},\ \xi \in \Sigma\} \cup A \cup \{\sigma,\rho,\eta\}$, i neka su pravila izvođenja data sa:

1. $\sigma \to a_0\rho$,
2. $\rho \to [x,x]\rho$,
3. $\rho \to \eta$,
4. $\eta \to [e,\#]\eta$,
5. $\eta \to e$,
6. $a[x,\xi] \to [x,\mu]a'$, za sve $a \in A$ i $\xi \in \Sigma$ takve da je $\delta(a,\xi) = (a,\mu,R)$,
7. $[y,\nu]a[x,\xi] \to [y,\nu][x,\mu]a'$, za sve $\xi,\mu\nu \in \Sigma$ i $x,y \in X \cup \{e\}$ i $a \in A$ takve da je $\delta(a,\xi) = (a',\mu,L)$,
8. $[x,\xi]a \to axa$, $a[x,\xi] \to axa$, $a \to e$, za sve $x \in X \cup \{e\}$, $\xi \in \Sigma$, $a \in T$.

Pretpostavimo da $\mathcal{A}$ prihvata reč $u = x_1x_2\dots x_n$, gde je $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$. Koristeći pravila 1 i 2 dobijamo

$$\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n]\rho.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ broj ćelija koje $\mathcal{A}$ koristi za izračunavanje. Koristeći pravilo 3, a zatim m puta pravilo 4, i konačno pravilo 5, imamo

$$\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n][e,\#]^m.$$

Nadalje koristimo pravila 6 i 7 sve dok ne dođemo do nekog finalnog stanja. Primetimo da pri tome prva komponenta u paru $[x,\xi]$, $x \in X \cup \{e\}$, $\xi \in \Sigma$, ostaje neizmenjena.

Indukcijom po dužini izračunavanja

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_s, r),$$

dokazaćemo da iz njega sledi

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n][e,\#]^m \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$$
$$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\xi_1][x_2,\xi_2]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_{n+m},\xi_{n+m}],$$

gde su

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X,\ x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+m} = e,$$

i

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m} \in \Sigma, \quad \text{pri čemu je } \xi_{s+1} = \xi_{s+2} = \dots = \xi_{n+m} = \#.$$

Tvrđenje evidentno važi za izračunavanja dužine 0. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sva izračunavanja dužine $k-1$, i uzmimo da je

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}} (a, \xi_1\xi_2\dots\xi_s, r),$$

izračunavanje dužine k. To izračunavanje možemo podeliti na izračunavanje

$$(a_0, x_1x_2\dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}} (a', \mu_1\mu_2\dots\mu_t, r'),$$

dužine $k-1$, i korak

$$(a', \mu_1\mu_2\dots\mu_t, r') \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} (a, \xi_1\xi_2\dots\mu_s, r').$$

Prema induktivnoj hipotezi, postoji izvođenje

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n][e,\#]^m \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$$
$$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1,\mu_1]\dots[x_{r'-1},\mu_{r'-1}]a'[x_{r'},\mu_{r'}]\dots[x_{n+m},\mu_{n+m}].$$

Stavimo

$$D = \begin{cases} L, & \text{ako je } r = r' - 1, \\ R, & \text{ako je } r = r' + 1. \end{cases}$$

Tada svakako za neki D važi $\delta(a', \mu_{r'}) = (a, \xi_{r'}, D)$. Prema pravilima 6 ili 7 je

$$a'[x_{r'}, \mu_{r'}] \underset{G}{\longrightarrow} [x_{r'}, \xi_{r'}]a$$

ili

$$[x_{r'-1}, \mu_{r'-1}]a'[x_{r'}, \mu_{r'}] \underset{G}{\longrightarrow} a[x_{r'-1}, \mu_{r'-1}][x_{r'}, \xi_{r'}]$$

zavisno od vrednosti D. Jasno je da je $\mu_i = \xi_i$ za sve $i \neq r'$. Odatle je

$$\begin{aligned} &a_0[x_1, x_1][x_2, x_2] \dots [x_n, x_n][e, \#]^m \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ &\qquad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1, \xi_1] \dots [x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r] \dots [x_{n+m}, \xi_{n+m}], \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sada prema pravilu 8 za $a \in T$ imamo

$$[x_1, \xi_1] \dots [x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r] \dots [x_{n+m}, \xi_{n+m}] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 x_2 \dots x_n.$$

Dakle, $L(G, \sigma)$ sadrži sve reči koje raspoznaje mašina A, tj. $L \subseteq L(G, \sigma)$.

Preostaje da se dokaže da $\mathcal{A}$ prihvata sve reči iz jezika $L(G, \sigma)$. Posmatrajmo izvođenje u G koje vodi do reči $u \in L \subseteq X^*$, pri čemu smo uzeli da je $u = x_1 x_2 \dots x_n$, za neke $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Početni deo tog izvođenja mora biti oblika

$$\sigma \underset{G}{\longrightarrow} a_0 \rho \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a_0[x_1, x_1] \dots [x_n, x_n].$$

Dokazaćemo indukcijom po dužini izvođenja

$$\begin{aligned} &a_0[x_1, x_1][x_2, x_2] \dots [x_n, x_n] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \\ &\qquad \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} [x_1, \xi_1] \dots [x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r] \dots [x_n, \xi_n] \end{aligned} \tag{8.1}$$

da iz njega sledi

$$(a_0, x_1 x_2 \dots x_n, 1) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}} (a, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n, r),$$

za neke $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \Sigma$.

Neka je (8.1) izvođenje dužine 1, tj. neposredno izvođenje

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n]\underset{G}{\Longrightarrow}[x_1,\xi_1]a[x_2,x_2]\dots[x_n,x_n].$$

Ovo izvođenje je moguće samo ako je zadovoljeno $\delta(a_0,x_1)=(a,\xi_1,R)$. Tada je jasno da važi

$$(a_0,x_1x_2\dots x_n,1)\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}(a,\xi_1x_2\dots x_m,2),$$

što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo da gornje tvrđenje važi za sva izvođenja dužine $k-1$ i dokažimo da važi i za izvođenje (8.1) dužine k. Tada se to izvođenje može podeliti na izvođenje

$$a_0[x_1,x_1][x_2,x_2]\dots[x_n,x_n]\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}[x_1,\xi_1']\dots[x_{r'-1},\xi_{r'-1}']a'[x_{r'},\xi_{r'}']\dots[x_n,\xi_n']$$

dužine $k-1$ i neposredno izvođenje

$$\begin{aligned}&[x_1,\xi_1']\dots[x_{r'-1},\xi_{r'-1}']a'[x_{r'},\xi_{r'}']\dots[x_n,\xi_n']\underset{G}{\Longrightarrow}\\&\qquad\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}[x_1,\xi_1]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_n,\xi_n].\end{aligned}$$

Prema indukcijskoj hipotezi je

$$(a_0,x_1x_2\dots x_n,1)\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}}(a,\xi_1'\xi_2'\dots\xi_n',r').$$

Takođe, iz poslednjeg neposrednog izvođenja sledi

$$\delta(a',x_{r'})=\begin{cases}(a,\xi_{r'+1},R), & \text{ako je } r=r'+1,\\ (a,\xi_{r'-1},L), & \text{ako je } r=r'-1.\end{cases}$$

Odatle je

$$(a,\xi_1'\xi_2'\dots\xi_n',r')\to(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,r).$$

Prema tome,

$$(a_0,x_1x_2\dots x_n,1)\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}}(a,\xi_1\xi_2\dots\xi_n,r),$$

što je i trebalo dokazati.

Vratimo se ponovo izvođenjima u gramatici G. Ona su sledećeg oblika

$$\begin{aligned}&\sigma\underset{G}{\longrightarrow}a_0\rho\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}a_0[x_1,x_1]\dots[x_n,x_n]\\&\qquad\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}[x_1,\xi_1]\dots[x_{r-1},\xi_{r-1}]a[x_r,\xi_r]\dots[x_n,\xi_n].\end{aligned}$$

Izvođenje do reči iz X^* je moguće samo ako primenimo u izvesnom koraku pravilo 8, a ono je primenljivo samo ako su nas već upotrebljena izvođenja dovela do stanja $a \in T$, a onda prema već dokazanom važi

$$(a_0, x_1x_2 \dots x_n, 1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} (a, \xi_1\xi_2 \dots \xi_n, r).$$

Jasno je da primenom pravila 8 konačan broj puta dobijamo

$$[x_1, \xi_1] \dots [x_{r-1}, \xi_{r-1}]a[x_r, \xi_r] \dots [x_n, \xi_n] \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 \dots x_n.$$

Kako je $u = x_1x_2 \dots x_n \in L(G, \sigma)$, to niz izvođenja koji vodi do reči iz X^* svakako postoji, i u njemu se pojavljuje i izvođenje (8.1) kod koga je $a \in T$. Odatle, prema već dokazanom važi

$$(a_0, x_1x_2 \dots x_n, 1) \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} (a, \xi_1\xi_2 \dots \xi_n, r),$$

što znači da mašina $\mathcal{A}$ prihvata reč u. Dakle, $L(G, \sigma) \subseteq L$, što je i trebalo dokazati. □

Sledećom teoremom dokazuje se i obratna implikacija.

Teorema 8.2.2. *Neka je L jezik tipa 0 nad proizvoljnim alfabetom X. Tada postoji Tjuringova mašina koja raspoznaje jezik L.*

Dokaz: Neka je $L = L(G, \sigma)$, gde je $G = (V, X, \pi)$ gramatika tipa 0. Konstruisaćemo nedeterminističku Tjuringovu mašinu $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ koja raspoznaje L. Uzmimo $\Sigma = V \cup \{\#, \rho, \mu\}$, pri čemu $\#, \rho, \mu$ ne pripadaju alfabetu V. Smatraćemo, takođe, da $\mathcal{A}$ može da upisuje prazan simbol #.

Opisaćemo u grubim crtama rad mašine $\mathcal{A}$. Na početku se na ulaznoj traci mašine nalazi reč $w \in X^*$. Mašina $\mathcal{A}$ upisuje ρ na prvom mestu trake i pomera reč w jedno mesto udesno. Zatim iza reči w dopisuje $\rho\sigma\rho$. Dakle, neprazan deo trake je reč $\rho w \rho \sigma \rho$. Sada $\mathcal{A}$ simulira izvođenja u G na drugom delu trake, tj. ako je $\sigma \to u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_{n-1} \Rightarrow u_n$ izvođenje u G, tada $\mathcal{A}$ menja σ u u_1, zatim u_1 u $u_2, \dots$, zatim u_{n-1} u u_n. Naime, ako je sadržaj trake oblika $\rho w \rho \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \rho$, tada $\mathcal{A}$ bira reč $\xi_i \xi_{i+1} \dots \xi_{i+r-1}$ takvu da postoji pravilo $\xi_i \xi_{i+1} \dots \xi_{i+r-1} \to \alpha$ u π, gde je α neka reč iz V^*, i menja podreč $\xi_i \xi_{i+1} \dots \xi_{i+r-1}$ sa α. Pri tome se po potrebi vrši pomeranje reči $\xi_{i+r} \dots \xi_k$ ulevo ili udesno kako bi se napravilo dovoljno prostora za reč α ako ona nije dužine r. Na kraju dolazimo do reči $u_n \in V^*$ takve da nijedna njena podreč nije leva strana nekog izvođenja iz π. Sadržaj trake je $\rho w \rho u_n \rho$. Uporedimo reči w i u_n. Mašina prihvata reč w ako je $u_n = w$, tj. ako postoji izvođenje $\sigma \overset{*}{\Rightarrow} w$, odakle je jasno da $\mathcal{A}$ raspoznaje L. □

Konačno, formulisaćemo i glavnu teoremu ovog odeljka, kojom su prethodne dve teoreme sumirane u jednu.

Teorema 8.2.3. *Jezik je tipa 0 ako i samo ako jeste raspoznatljiv Tjuringovom mašinom.*

8.3. Linearno ograničeni automati

U ovom odeljku uvodimo pojmove determinističkog i nedeterminističkog linearno ograničenog automata i dokazujemo da je upravo nedeterministički linearno ograničeni automat mašina koja raspoznaje jezike tipa 1. Naziv ovih mašina potiče otuda što su to Tjuringove mašine koje za svoj rad koriste ograničen broj ćelija ulazne trake i taj broj je, u opštem slučaju, linearna funkcija broja ćelija u kojima se nalazi ulazna reč. Međutim, dokazuje se da modeli linearno ograničenih automata sa različitim linearnim funkcijama granica koje ih karakterišu zapravo raspoznaju istu klasu jezika. Zato će ovde biti predstavljen model u kome je ta funkcija identička, odnosno model linearno ograničenog automata koji za svoj rad koristi deo ulazne trake na kome se nalazi ulazna reč. Primetimo da ovi automati, za razliku od "običnih" automata razmatranih u ranijim glavama, imaju beskonačnu memoriju, ali, za razliku od Tjuringovih mašina, ograničen pristup memoriji.

Formalno, *linearno ograničeni automat*, ili *deterministički linearno ograničeni automat*, je petorka $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, gde je

A – neprazan konačan skup, *skup stanja* automata $\mathcal{A}$;
a_0 – element iz A, *početno stanje* automata $\mathcal{A}$;
X – neprazan konačan skup, *ulazni alfabet* automata $\mathcal{A}$;
Σ – neprazan konačan skup koji sadrži skup X i simbole $\#, \Delta, \$ \notin X$, *alfabet trake* automata $\mathcal{A}$;
δ – parcijalno preslikavanje iz $A \times \Sigma$ u $A \times \Sigma - \{\#\} \times \{L, R\}$, *funkcija prelaza* automata $\mathcal{A}$.

Primećujemo da osim obaveznog znaka # za praznu ćeliju, takođe imamo i specijalne znake

Δ – znak koji označava *početak ulazne reči*,
\$ – znak koji označava *kraj ulazne reči*.

Zapazimo da je ulazna reč oblika $\Delta u \$$, gde je $u \in X^*$. Simboli Δ i \$ služe da "spreče" glavu da prilikom rada izađe iz obeleženog dela trake.

Pod *nedeterminističkim linearno ograničenim automatom* podrazumevamo petorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$, kod koje A, a_0, X i Σ imaju isto značenje kao kod determinističkog linearno ograničenog automata, dok je δ relacija između skupova $A \times \Sigma$ i $A \times \Sigma - \{\#\} \times \{L, R\}$. Dakle, to je nedeterministička Tjuringova mašina koja koristi samo onaj deo ulazne trake na kome se nalazi ulazna reč.

Kako su ovi automati specijalan slučaj Tjuringovih mašina, relacije $\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}$ i $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow}}$, odnosno $\rightarrow$ i $\overset{*}{\rightarrow}$, se definišu analogno kao kod Tjuringovih mašina. Na isti način kao kod Tjuringovih mašina definišu se i pojmovi raspoznavanja jezika i prihvatanja reči determinističkim i nedeterminističkim linearno ograničenim automatom.

Međutim, za razliku od rezultata datog u Teoremi 8.1.3., gde je dokazana ekvivalentnost raspoznatljivosti jezika determinističkim i nedeterminitičkim Tjuringovim mašinama, kod linearno ograničenih mašina još uvek nije ustanovljeno da li to važi. Naime, još uvek je nepoznato da li svaki jezik koji je raspoznat nedeterminističkim linearno ograničenim automatom može biti raspoznat i determinističkim linearno ograničenim automatom. S obzirom na Teoremu 8.1.3., on je svakako raspoznatljiv determinističkom Tjuringovom mašinom. Međutim, broj ćelija ulazne trake koje koristi ta Tjuringova mašina je eksponencijalna funkcija dužine ulazne reči.

Naredna teorema daje prvi deo glavnog rezultata ovog odeljka.

Teorema 8.3.1. *Ako je jezik L raspoznatljiv nedeterminističkim linearno ograničenim automatom, tada je on kontekstno-zavisan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \Sigma, \delta)$ linearno ograničeni automat koji raspoznaje L pomoću skupa T, i konstruišimo gramatiku $G = (V, X, \pi)$ takvu da je $L = L(G, \sigma)$.

Za svaki $\xi \in \Sigma$ uvedimo nove simbole ξ' i ξ'', stavimo da je $\Sigma' = \{\xi' \mid \xi \in \Sigma\}$, $\Sigma'' = \{\xi'' \mid \xi \in \Sigma\}$ i $\overline{\Sigma} = \Sigma' \cup \Sigma''$, i uzmimo da je

$$V = X \cup \{\sigma\} \cup T \cup \{[\Delta, z] \mid z \in \overline{\Sigma} \cup A \times \Sigma''\} \cup A \times \Sigma'' \cup \overline{\Sigma},$$

gde su σ i Δ novi simboli. Pravila koja čine skup pravila π definišemo tako da gramatika G simulira rad automata $\mathcal{A}$ unazad. Naime, za proizvoljne $\xi, \mu, \eta \in \Sigma$ i $a, b \in A$, skup pravila π gradimo na sledeći način:

1) Ako je $a \in T$, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned}
&\sigma \to [\Delta, \xi']a, \\
&[\Delta, \xi'] \to [\Delta, \xi''], \\
&[\Delta, \xi'] \to [\Delta, \xi']\mu', \\
&[\Delta, \xi'']\mu' \to [\Delta, \xi'']\mu'', \\
&\mu''\eta' \to \mu''\eta''.
\end{aligned}$$

2) Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \mu, R)$ prelaz u $\mathcal{A}$, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned}
&\mu'' b \to (a, \xi''), \\
&[\Delta, \mu'']b \to [\Delta, (a, \xi'')], \\
&\mu''(b, \eta'') \to (a, \xi'')\eta'', \\
&[\Delta, \mu''](b, \eta'') \to [\Delta, (a, \xi'')]\eta''.
\end{aligned}$$

3) Ako je $\delta(a, \xi) = (b, \mu, L)$ prelaz u $\mathcal{A}$, tada u skup π uključujemo pravila

$$\begin{aligned}
&(b, \eta'')\mu'' \to \eta''(a, \xi''), \\
&[\Delta, (b, \eta'')]\mu'' \to [\Delta, \eta''](a, \xi'')].
\end{aligned}$$

4) U skup π uključujemo i pravila

$$[\Delta,(a_0,\xi'')] \to \xi'',$$
$$\xi'' \to \xi.$$

Za ovako definisanu gramatiku G važi $L = L(G,\sigma)$. □

Sa ciljem da dokažemo obrat ove teoreme uvodimo pojamove reda gramatike i linearno ograničene gramatike, i dokazujemo da za svaku kontekstno-zavisnu gramatiku postoji linearno ograničena kontekstno-zavisna gramatika koja generiše isti jezik.

Kontekstno-zavisna gramatika je *reda* n ako je n najveća dužina reči koje se pojavljuju u pravilima date gramatike. Takođe, gramatika *očuvava dužinu* ako za svako izvođenje $\alpha \to \beta$ važi ili da je α početni simbol ili da β ne sadrži početni simbol i $|\alpha| = |\beta|$.

Kontekstno zavisna gramatika G je *linearno ograničena* ako važi:

(a) G je reda 2,

(b) G očuvava dužinu,

(c) ako je σ početni simbol, tada iz $\sigma \to \alpha\beta$ sledi $\alpha = \sigma$.

Sada dokazujemo sledeće:

Lema 8.3.2. *Za svaku kontekstno-zavisnu gramatiku G postoji linearno ograničena kontekstno-zavisna gramatika koja generiše isti jezik kao gramatika G.*

Dokaz: Dokazaćemo najpre da za proizvoljnu kontekstno-zavisnu gramatiku $G = (V,X,\pi)$ reda n postoji neka kontekstno-zavisna gramatika $G' = (V',X,\pi')$ reda $n-1$ koja generiše isti jezik kao G. Odatle će se, daljim smanjenjem stepena gramatike, dobiti i kontekstno-zavisna gramatika reda 2 koja generiše isti jezik kao G.

Možemo pretpostaviti da nijedno pravilo u gramatici G nema simbol iz X ni na jednoj svojoj strani, osim pravila oblika $\alpha \to x$.

Neka je sada $\phi \to \psi$ pravilo u π. Ako je $|\psi| < 3$ onda to pravilo postaje pravilo u π'. U suprotnom je $\phi = \alpha\phi'$ i $\psi = \beta\gamma\delta\psi'$, za neke $\alpha,\beta,\gamma \in V - X$ i $\phi',\psi' \in (V-X)^*$. Ako je $\phi' = e$, tada uvodimo nove simbole $\alpha_1,\alpha_2 \in V' - X$ i skupu π' dodajemo pravila $\alpha \to \alpha_1\alpha_2, \alpha_1 \to \beta\gamma, \alpha_2 \to \delta\psi'$. Ako je $\phi' \neq e$, tada je $\phi' = v\phi''$, gde je $v \in V - X$ i $\phi'' \in (V-X)^*$. Uvodimo nove simbole $\alpha', v' \in V' - X$ i pravilima π' dodajemo pravila $\alpha v \to \alpha' v'$, $\alpha' \to \beta$, $v'\phi'' \to \gamma\delta\psi''$.

Menjajući na ovaj način pravila gramatike G novim pravilima očigledno formiramo gramatiku nižeg reda koja generiše isti jezik kao gramatika G.

Dakle, možemo smatrati da je data gramatika G reda 2. Dokazaćemo sada da postoji linearno ograničena gramatika $G' = (V',X,\pi')$ koja generiše isti jezik kao G.

Stavimo $V' = V \cup \{\sigma',\rho\}$, gde je $\sigma',\rho \notin V$. Pravila u π' su određena sa

$$\sigma' \to \sigma'\rho, \quad \sigma' \to \sigma,$$
$$\rho\alpha \to \alpha\rho, \quad \alpha\rho \to \rho\alpha \ \text{ za svaki } \alpha \in V,$$

$\alpha \to \beta$, ako je $\alpha \to \beta$ pravilo u G
$\alpha\beta \to \gamma\delta$, ako je $\alpha\beta \to \gamma\delta$ pravilo u G
$\alpha\rho \to \beta\gamma$, ako je $\alpha \to \beta\gamma$ pravilo u G

Gramatika G' je očigledno linearno ograničena. Dokazaćemo da je G' generiše isti jezik kao G, tj. da je $L(G,\sigma) = L(G',\sigma')$. Neka je $\Phi : (V')^* \to V^*$ homomorfizam određen sa $\sigma'\Phi = \sigma$, $\rho\Phi = e$ i $\alpha\Phi = \alpha$, za svaki $\alpha \in V$. Tada iz $u \underset{G'}{\longrightarrow} v$ sledi $u\Phi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v\Phi$, pa je $L(G',\sigma') \subseteq L(G,\sigma)$. Obratno, ako je $u \underset{G}{\longrightarrow} v$ tada je ili $u \underset{G'}{\longrightarrow} v$ ili $u\rho \underset{G'}{\longrightarrow} v$. Dakle, ako je $u \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v$ tada je ili $u \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} v$ ili $u\rho \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} v$. Imajući u vidu prva dva pravila iz π', za $v \in L(G,\sigma)$ je $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v$, za neki $u \in V^*$, a onda je ili

$$\sigma' \underset{G'}{\longrightarrow} \sigma \underset{G}{\longrightarrow} u \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} u\rho \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} v$$

ili

$$\sigma' \underset{G'}{\longrightarrow} \sigma \underset{G}{\longrightarrow} u \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} v$$

izvođenje za v u gramatici G'. Dakle, $L(G,\sigma) \subseteq L(G',\sigma')$.

Prema tome, gramatike G i G' generišu isti jezik. □

Sada smo spremni da dokažemo obrat Teoreme 8.3.1..

Teorema 8.3.3. *Za svaki jezik generisan linearno ograničenom gramatikom postoji nedeterministički linearno ograničen automat koji ga raspoznaje.*

Dokaz: Neka je $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (V,X,\pi)$ linearno ograničena gramatika. Nedeterministički linearno ograničen automat $\mathcal{A} = (A,a_0,X,V,\delta)$ koji raspoznaje L konstruisaćemo na sledeći način: skup stanja biće

$$\begin{aligned} A = \{a_0,a_1,b_0,b_0',b_1,c_0,c_1\} \cup \\ \cup \{d_\alpha \mid \text{ za svaki } \alpha \in V \text{ takav da postoji pravilo } \alpha\beta \underset{G}{\longrightarrow} \gamma\delta\}, \end{aligned}$$

i stavljamo $T = \{a_0\}$. Funkcija prelaza biće određena sa:

$$\begin{aligned}
\delta(a_0,\Delta) &= (a_1,\Delta,R), \\
\delta(a_1,x) &= (a_1,x,R), && \text{za svaki } x \in X, \\
\delta(a_1,\Delta) &= (b_0,\Delta,L), \\
\delta(b_0,\xi) &= (b_0,\xi,R), && \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0,\xi) &= (b_0,\xi,L), && \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0',\xi) &= (b_0',\xi,L), && \text{za svaki } \xi \in V, \\
\delta(b_0,\mu) &= (b_0',\xi,R), && \text{za svako pravilo } \xi \underset{G}{\longrightarrow} \mu, \\
\delta(b_0,\eta) &= (d_\xi,\xi,R), && \text{za svako pravilo } \xi\mu \underset{G}{\longrightarrow} \eta\nu, \\
\delta(s_\xi,\nu) &= (b_0',\mu,R), && \text{za svako pravilo } \xi\mu \underset{G}{\longrightarrow} \eta\nu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(b_0,\sigma) &= (c_0,\sigma,L),\\
\delta(b_0,\Delta) &= (b_1,\Delta,R),\\
\delta(c_1,\sigma) &= (b_1,\Delta,R), && \text{za svako pravilo } \sigma \underset{G}{\longrightarrow} \sigma\xi,\\
\delta(b_1,\xi) &= (b_0',\sigma,R), && \text{za svako pravilo } \sigma \underset{G}{\longrightarrow} \sigma\xi,\\
\delta(b_1,\xi) &= (b_0',\sigma,R), && \text{za svako pravilo } \sigma \underset{G}{\longrightarrow} \sigma\xi,\\
\delta(b_1,\Delta) &= (a_0,\Delta,R).
\end{aligned}$$

Ovako definisan automat A raspoznaje jezik $L(G,\sigma)$. □

Konačno, može se dokazati i glavni rezultat ovog odeljka dat sledećom teoremom.

Teorema 8.3.4. *Jezik je raspoznatljiv nedeterminističkim linearnim ograničenim automatom ako i samo ako je kontekstno-zavisan.*

Dokaz: Neposredno sledi na osnovu Teorema 8.3.1. i 8.3.3., kao i Leme 8.3.2..
□

Već smo pomenuli da nije poznato da li se svaki kontekstno-zavisan jezik može raspoznati determinističkim linearno ograničenim automatom. Međutim, u narednoj teoremi je pokazano da za kontekstno-nezavisne jezike to važi.

Teorema 8.3.5. *Svaki kontekstno-nezavisan jezik se može raspoznati determinističkim linearno ograničenim automatom.*

Dokaz: Prema Teoremi 7.3.3. svaka kontekstno-nezavisna gramatika može biti zadata gramatikom u Normalnoj formi Čomskog, tj. sva pravila su oblika

$$\alpha \to \beta\gamma \text{ ili } \alpha \to x,$$

za neke $\alpha,\beta,\gamma \in V - X$ i $x \in X$. Tada izvođenje reči dužine n ima dužinu $2n-1$. Kako je skup pravila izvođenja konačan, to ga možemo dobro urediti, tj. numerisati pravila nekim redosledom, brojevima od 1 do k, gde je k ukupan broj pravila. Tada svako izvođenje karakteriše niz brojeva koji odgovaraju upotrebljenim pravilima u pojedinim koracima. Ovaj niz brojeva možemo smatrati zapisom nekog broja sa osnovom k.

Opisaćemo automat $\mathcal{A}$ koji raspoznje dati jezik L. Ovaj automat ima tri staze. Na prvoj se nalazi ulazna reč $w \in X^*$ dužine n. Na drugoj se nalazi $(2n-1)$-nocifreni broj sa osnovom k. Treća staza služi za simuliranje izvođenja u gramatici G pri čemu se primenjuju redom pravila numerisana ciframa broja sa druge staze. Ako je automat došao do kraja druge trake, tj. upotrebio sva zadata izvođenja, onda upoređuje reči na prvoj i trećoj stazi. Ako je reč dobijena na trećoj stazi jednaka reči na prvoj, tada automat prihvata reč w, u suprotnom broju na drugoj stazi dodaje 1 i ponavlja postupak sve dok na drugoj stazi ne dođe do broja k^{2n-1}, kada konačno odbacuje reč w. □

8.4. Zadaci

8.4.1. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja reč $w \in \{x, y\}^*$ zadatu na traci na početku rada mašine pretvara u reč

(a) $\overline{w}$,
(b) $x^{|w|_x} y^{|w|_y}$,
(c) $t(w)w'h(w)$, ako je $w = h(w)w't(w)$,
(d) x^{2n}, ako je $w = x^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

8.4.2. Dokazati da mašina $T = \{\{a_0, a_1\}, a_0, \{x, y\}, \{x, y, \#\}, \delta\}$ gde je funkcija δ data sa

$$\begin{aligned}\delta(a_0, x) &= (a_1, x, R)\\ \delta(a_1, x) &= (a_0, x, R)\end{aligned}$$

raspoznaje pomoću $\{a_0\}$ sve reči sa parnim brojem pojavljivanja slova x.

8.4.3. Ako su date Tjuringove mašine koje raspoznaju jezike L_1 i L_2 konstruisati Tjuringove mašine koje raspoznaju jezike $L_1 \cup L_2$ i $L_1 \cap L_2$.

8.4.4. Koristeći metod opisan u Teoremi 7.2.1, konstruisati gramatiku koja generiše jezik raspoznatljiv Tjuringovom mašinom datom u Zadatku 8.4.2.

8.4.5. Posmatrajmo Tjuringovu mašinu

$$T = (\{a_0, a_1, a_2, a_3\}, a_0, \{\$, [,]\}, \{\#, \$, [,], \alpha, \beta\}, \delta)$$

gde je δ data sa:

$$\begin{array}{rclrcl}
\delta(a_0, \$) &=& (a_0, \$, R) & \delta(a_1,]) &=& (a_2, \alpha, L)\\
\delta(a_0, \alpha) &=& (a_0, \alpha, R) & \delta(a_2, \gamma) &=& (a_2, \gamma, L) \text{ za svaki } \gamma \neq \$\\
\delta(a_0, [) &=& (a_1, \alpha, R) & \delta(a_2, \$) &=& (a_0, \$, R)\\
\delta(a_1, [) &=& (a_1, [, R) & \delta(a_0, \beta) &=& (a_3, \alpha, R)\\
\delta(a_1, \alpha) &=& (a_1, \alpha, R). & & &
\end{array}$$

Koje od reči oblika $\$w$, gde je $w \in \{[,]\}^*$, T raspoznaje pomoću $\{a_3\}$? Konstruisati gramatiku koja generiše jezik koji T raspoznaje pomoću $\{a_3\}$ koristeći algoritam dat u Teoremi 7.2.1. Da li se može konstruisati jednostavnija gramatika?

8.4.6. Odrediti jezik $L = L(G, \sigma)$ i konstruisati Tjuringovu mašinu koja ga raspoznaje, ako je $G = (\{\sigma, \alpha, x, y\}, \{x, y\}, \pi)$ i pravila izvođenja su:

$$\begin{aligned}\sigma &\to \alpha x + x\\ \alpha &\to \alpha\alpha + y\sigma + y\\ \sigma x &\to \alpha y\\ \sigma y &\to e.\end{aligned}$$

Da li je jezik L kontekstno-nezavisan? Da li je regularan?

8.4.7. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja raspoznaje jezik $L = L(G,\sigma)$, gde je $G = (\{\sigma,\alpha,a,b,c,d\},\{a,b,c,d\},\pi)$ i pravila izvođenja su:

$$\begin{aligned} \sigma &\to c\alpha b\sigma + a\sigma b\sigma c + a\alpha b \\ c\alpha b &\to d\alpha b + db \\ \alpha &\to ef. \end{aligned}$$

8.4.8. Dokazati da za deterministički linearno ograničen automat $\mathcal{A}$ postoji deterministički linearno ograničen automat $\mathcal{A}'$ takav da se $\mathcal{A}'$ zaustavlja za bilo koju konfiguraciju i $\mathcal{A}'$ raspoznaje isti jezik kao $\mathcal{A}$.

8.4.9. Dokazati da je $\{x^n y^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$, gde je $f : n \mapsto f(n)$ funkcija dobijena primenom konačno mnogo sabiranja i/ili množenja, kontekstno-zavisan jezik.

8.4.10. Konstruisati linearno ograničeni automat koji raspoznaje jezik

$$\{x^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } n \text{ nije prost broj }\}.$$

Glava 9
Automati sa izlazom

Automati sa izlazom, koji će biti glavni predmet razmatranja u ovoj glavi, predstavljaju matematičku apstrakciju mašine koja radi u diskretnoj vremenskoj skali, i koja tokom tog rada, pod uticajem ulaznih signala, menja svoja unutrašnja stanja i emituje odgovarajuće izlazne signale. Glavni zadatak ovih automata je da vrše obradu informacija, na taj način što će ulaznu informaciju, predstavljenu nekim nizom ulaznih simbola, transformisati u izlaznu informaciju, predstavljenu odgovarajućim nizom izlaznih simbola. Pitanje koje se prirodno nameće je: Kakve se transformacije mogu realizovati pomoću automata sa izlazom? Odgovor na to dali su, nezavisno jedan od drugog, Rejni (G. N. Raney) [88] i Gluškov (V. M. Glushkov) [50], koji su pokazali da su to transformacije ulaznih u izlazne reči zadate takozvanim automatovnim preslikavanjima. Pri tome je Gluškov dokazao da za svaku takvu transformaciju postoji automat sa minimalnim brojem stanja koji je realizuje. Ovi rezultati inicirali su intenzivno izučavanje uslova pod kojima su dva automata ekvivalentna, pod čime podrazumevamo da realizuju iste transformacije ulaznih u izlazne reči, i rad na pronalaženju postupaka za minimizaciju automata, tj. za nalaženje automata sa minimalnim brojem stanja ekvivalentnog datom automatu.

U ovoj glavi prikazaćemo najznačajnije rezultate dobijene u ovoj oblasti. Algoritam za minimizaciju automata koji će biti prikazan dali su Aufenkamp (D. D. Aufenkamp) i Hon (F. E. Hohn) [5]. Biće dokazana i poznata teorema Džila (A. Gill) [43] i Bloha (A. Š. Bloh) [8] koja kaže da je svaki automat Milijevog tipa (G. H. Mealy) ekvivalentan nekom automatu Murovog tipa (E. F. Moore). Na kraju glave će biti prikazano i nekoliko metoda za kompoziciju automata, odnosno za konstrukciju automata polazeći od unapred datih jednostavnijih automata.

9.1. Pojam automata sa izlazom

Automati koje razmatramo u ovoj glavi predstavljaju matematičku apstrakciju mašine koja radi u diskretnoj vremenskoj skali i koja tokom tog rada, pod uticajem ulaznih signala, menja svoja unutrašnja stanja i emituje odgovarajuće izlazne signale. O stanjima mašine razmišljamo kao o nekim njenim unutrašnjim atributima, koji, zajedno sa ulazom, određuju izlaz u datom trenutku. U digitalnom računaru, na primer, pod poznavanjem stanja podrazumevamo poznavanje sadržaja svih registara, ili bar onih koji su relevantni za ponašanje izlaza mašine.

Kada u ovoj glavi budemo govorili *automat*, mislićemo na najopštiji tip automata sa izlazom – *Milijev automat* (G. H. Mealy), ili *automat Milijevog tipa*, koji se definiše kao uređena petorka $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ za koju važi:

– A je neprazan skup koji nazivamo *skup stanja* automata $\mathcal{A}$;
– X je neprazan skup koji nazivamo *skup ulaza* (*ulaznih signala*, *ulaznih simbola*) automata $\mathcal{A}$;
– Y je neprazan skup koji nazivamo *skup izlaza* (*izlaznih signala*, *izlaznih simbola*) automata $\mathcal{A}$;
– $\delta^A : A \times X \to A$ je preslikavanje koje nazivamo *funkcija prelaza* (*funkcija narednog stanja*) automata $\mathcal{A}$;
– $\lambda^A : A \times X \to Y$ je preslikavanje koje nazivamo *funkcija izlaza* automata $\mathcal{A}$.

U slučajevima kada nema opasnosti od zabune, izostavljaćemo gornji indeks "A" u oznakama funkcija prelaza i izlaza, odnosno, pisaćemo δ i λ umesto δ^A i λ^A.

Princip rada ovako definisanog automata možemo shvatiti na sledeći način: Automat $\mathcal{A}$ se u određenom trenutku nalazi u stanju $a \in A$, a na njegov ulaz dospeva ulazni signal $x \in X$. Pod dejstvom tog signala automat menja stanje i u sledećem trenutku prelazi u stanje $\delta(a, x) \in A$, i istovremeno se na izlaz automata šalje izlazni signal $\lambda(a, x) \in Y$. Prema tome, ovako definisani automat je matematička apstrakcija realnog sistema koji radi u diskretnoj vremenskoj skali.

Specijalizacijom ovako definisanog pojma automata dobijamo razne druge zanimljive tipove automata. Ako automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ zadovoljava uslov

$$\delta(a, x) = \delta(a', x') \;\Rightarrow\; \lambda(a, x) = \lambda(a', x'),$$

za sve $a, a' \in A$, $x, x' \in X$, što je ekvivalentno uslovu da postoji preslikavanje $\mu : A \to Y$ takvo da se preslikavanje λ može izraziti preko μ i δ sa

$$\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x)),$$

za sve $a \in A$, $x \in X$, tada $\mathcal{A}$ zovemo *Murov automat* (E. F. Moore), ili *automat Murovog tipa*, i pišemo $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$. Preslikavanje μ nazivamo *funkcija znaka*, a $\mu(a)$ nazivamo *znak* stanja $a \in A$. Razlika između Milijevog i Murovog automata leži u tome da se kod Milijevog automata istovremeno vrši prelazak u naredno stanje i šalje izlazni signal, dok se kod Murovog automata najpre vrši prelaz u naredno stanje, a tek onda šalje izlazni signal koji zavisi samo od stanja u koje je automat prešao (taj signal je znak tog stanja), dok ne zavisi direktno od ulaznog signala. Drugim rečima, zavisnost izlaznog signala od ulaznog je posredna i ispoljava se samo kroz njegov uticaj na promenu stanja.

Automat svoj rad uvek započinje iz nekog određenog stanja koje ponekad unapred ističemo. U tom slučaju govorimo o *inicijalnom* (*Milijevom*) *automatu* koji definišemo kao uređenu šestorku $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$, gde je $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ Milijev automat a $a_0 \in A$ je fiksirano stanje koje nazivamo *početno* (*inicijalno*) *stanje*. Slično definišemo *inicijalni Murov automat*, u oznaci $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \mu)$.

Ako su skupovi stanja, ulaza i izlaza automata sa izlazom konačni, tada ga nazivamo *konačan automat sa izlazom*. Jasno, od najvećeg praktičnog značaja su upravo ovakvi automati, i uglavnom ćemo raditi sa takvim automatima. Mogućnost da skup stanja bude beskonačan ovde dozvoljavamo samo iz metodoloških razloga.

Neka je dat Milijev automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. Tada se njegove funkcije prelaza i izlaza mogu proširiti do preslikavanja $\delta : A \times X^* \to A^*$ i $\lambda : A \times X^* \to Y^*$, tim redom, na sledeći način: za $a \in A$ i $u \in X^+$, $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, stavljamo da je

$$\delta(a, u) = a_1 a_2 \cdots a_n, \tag{9.1}$$

gde je

$$a_1 = \delta(a, x_1),\ a_2 = \delta(a_1, x_2), \ldots,\ a_n = \delta(a_{n-1}, x_n), \tag{9.2}$$

i

$$\lambda(a, u) = y_1 y_2 \cdots y_n, \tag{9.3}$$

pri čemu je

$$y_1 = \lambda(a, x_1),\ y_2 = \lambda(a_1, x_2), \ldots,\ y_n = \lambda(a_{n-1}, x_n). \tag{9.4}$$

Takođe

$$\delta(a, e) = a, \qquad \lambda(a, e) = e, \tag{9.5}$$

gde smo prazne reči i u X^* i u Y^* označili istim slovom e.

Primetimo da smo i funkcije prelaza i izlaza i njihova proširenja označavali istim slovima δ i λ. Iako to sa matematičke strane nije sasvim korektno, usvajamo takvu konvenciju u označavanju da bi olakšali rad. Pri tome imamo u vidu da nema opasnosti od zabune ako znamo odakle je argument na koji ta preslikavanja deluju, jer se vrednosti funkcija prelaza i izlaza i njihovih proširenja poklapaju na skupu $A \times X$.

Skup X ćemo nadalje nazivati i *ulazni alfabet*, polugrupu X^+ i monoid X^* ćemo nazivati *ulazna polugrupa* i *ulazni monoid* a njihove elemente *ulazne reči* automata $\mathcal{A}$, dok ćemo skup Y nazivati *izlazni alfabet*, polugrupu Y^+ i monoid

Y^* *izlazna polugrupa* i *izlazni monoid* a njihove elemente *izlazne reči* automata $\mathcal{A}$. Princip rada Milijevog automata sada možemo prikazati i na sledeći način: na ulaz automata dolaze jedan za drugim ulazni signali $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, tj. ulazna reč $x_1 x_2 \cdots x_n \in X^+$, i pod njenim uticajem automat $\mathcal{A}$ prelazi iz stanja a u stanje a_n preko niza *međustanja* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, a na izlaz se jedan za drugim šalju izlazni signali $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$, odnosno izlazna reč $y_1 y_2 \cdots y_n \in Y^+$. Naravno, ako na ulaz automata dospe prazna reč, tada automat ostaje u istom stanju i nema izlaznog signala (na izlaz se šalje prazna reč).

Poslednje stanje a_n u nizu datom u (9.1), odnosno (9.2), označavamo sa au. Ovom oznakom zadato je preslikavanje

$$(a,u) \mapsto au \tag{9.6}$$

koje slika $A \times X^*$ u A, koje je takođe proširenje funkcije prelaza. U većem broju knjiga koje se bave teorijom automata to preslikavanje se koristi umesto preslikavanja definisanog sa (9.1), i označava se upravo sa δ. Međutim, mi ćemo ovde koristiti oba ova preslikavanja, zavisno od konkretnih potreba, sa oznakama kakve smo dali. Primetimo da preslikavanje δ definisano sa (9.1) daje više informacija o radu automata nego preslikavanje definisano sa (9.6). Naime, preslikavanjem $(a,u) \mapsto au$ određeno je samo poslednje stanje au u koje se iz stanja a dospeva pod uticajem ulazne reči u, dok je preslikavanjem δ određen i niz međustanja preko kojih se stiže iz stanja a u stanje au. Sa druge strane, u slučaju kada nam taj niz međustanja nije bitan, zbog jednostavnijeg pisanja radije koristimo drugo preslikavanje.

Lako se dokazuje da važi sledeća lema.

Lema 9.1.1. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Milijev automat. Tada za proizvoljne $a \in A$ i $u, v \in X^*$ važi:*

(a) $\delta(a, uv) = \delta(a, u)\delta(au, v)$;

(b) $\lambda(a, uv) = \lambda(a, u)\lambda(au, v)$;

(c) $a(uv) = (au)v$.

9.2. Predstavljanje automata sa izlazom

Kao i kod automata bez izlaza, koje smo razmatrali u ranijim glavama, prirodan način predstavljanja automata jeste njihovo predstavljanje zadavanjem skupova i preslikavanja koji ga čine, korišćenjem uobičajenih metoda koji se generalno koriste u predstavljanju skupova i preslikavanja. To je posebno jednostavno kada se radi o konačnim automatima. Konačne automate sa izlazom je takođe veoma zgodno zadavati takozvanim prelazno–izlaznim tablicama, sličnim Kejlijevim (Cayley) tablicama koje se koriste za predstavljanje algebarskih struktura.

Prelazno–izlazna tablica Milijevog automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ je pravougaona tablica sa vrstama koje odgovaraju svakom ulaznom simbolu i kolonama koje odgovaraju stanjima. Na mestu u tablici koje odgovara vrsti određenoj ulaznim simbolom $x \in X$ i koloni određenoj stanjem $a \in A$ upisuje se uređeni par $(\delta(a,x), \lambda(a,x))$, pri čemu nećemo koristiti tu oznaku uobičajenu za uređene parove već jednostavniju oznaku $\delta(a,x)/\lambda(a,x)$. To je prikazano u sledećoj tablici

$$\begin{array}{c|ccc}
\mathcal{A} & \dots & a & \dots \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
x & \dots & \delta(a,x)/\lambda(a,x) & \dots \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Kao što smo videli u ranijim glavama, veoma pogodan način zadavanja automata je i njihovo zadavanje grafovima. Neka je dat Milijev automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$. *Prelazno-izlaznim grafom* automata $\mathcal{A}$ nazivamo označeni graf čiji skup čvorova je skup stanja A, skup oznaka je $X \times Y$, a grane i njihove oznake su određene na sledeći način: ako se iz stanja $a \in A$ pod uticajem ulaznog signala $x \in X$ prelazi u stanje $b\,(= \delta(a,x) \in A)$, pri čemu se emituje izlazni signal $y\,(= \lambda(a,x) \in Y)$, tada graf ima granu (a,b) koja je označena uređenim parom (x,y), pri čemu, kao što smo napred napomenuli, taj par označavamo sa x/y. Setimo se da smo ranije, kada smo govorili o označenim grafovima, istakli da su grane označenog grafa u opštem slučaju označene sa više simbola, tj. skupom simbola, pa ako je M skup svih oznaka iz $X \times Y$ pridruženih grani (a,b), tada kažemo da je ta grana označena skupom M.

Primer 9.2.1. Neka je dat Milijev automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, gde je

$$A = \{a, b, c\}, \quad X = \{x, x', x''\} \quad \text{i} \quad Y = \{y, y'\},$$

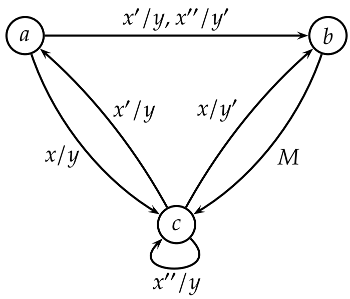
i funkcije prelaza i izlaza su definisane sa:

$$\begin{aligned}
&\delta(a,x) = \delta(b,x) = \delta(b,x') = \delta(b,x'') = \delta(c,x'') = c, \\
&\delta(a,x') = \delta(a,x'') = \delta(c,x) = b, \ \delta(c,x') = a \\
&\lambda(a,x) = \lambda(a,x') = \lambda(b,x) = \lambda(c,x') = \lambda(c,x'') = y \\
&\lambda(a,x'') = \lambda(b,x') = \lambda(b,x'') = \lambda(c,x) = y'.
\end{aligned}$$

Prelazno-izlazna tablica ovog automata je sledeća

$\mathcal{A}$	a	b	c
x	c/y	c/y	b/y'
x'	b/y	c/y'	a/y
x''	b/y'	c/y'	c/y

dok je njegov prelazno-izlazni graf dat sa



gde je $M = \{x/y, x'/y', x''/y'\}$.

Kada se radi o inicijalnom automatu, tada pri njegovom zadavanju tablicom koristimo konvenciju prema kojoj je za inicijalno stanje rezervisano prvo mesto u nizu stanja.

Pri zadavanju Murovih automata, umesto para $\delta(a,x)/\lambda(a,x)$ u tablicu se upisuje samo $\delta(a,x)$, dok se preslikavanje μ zadaje tako što se iznad vrste u kojoj su poređana stanja dodaje još jedna vrsta u koju se upisuju njihovi znakovi, pri čemu se znak $\mu(a)$ stanja $a \in A$ piše upravo iznad a. To je prikazano u sledećoj tablici:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \dots & \mu(a) & \dots \\
\cline{2-4}
\mathcal{A} & \dots & a & \dots \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
x & \dots & \delta(a,x) & \dots \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Prelazno-izlazni graf Murovog automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ ima nešto drugačiji izgled nego graf Milijevog automata. Naime, kod grafa Murovog automata čvorovi su označeni uređenim parovima oblika (a, y), gde je $a \in A$, $y \in Y$ i $\mu(a) = y$, a grane su označene samo odgovarajućim ulaznim simbolima. Kao i u ranije razmatranim slučajevima, imesto (a, y) pišemo a/y.

Primer 9.2.2. Neka je dat Murov automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$, gde je

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad X = \{x_1, x_2\}, \quad Y = \{y_1, y_2\},$$

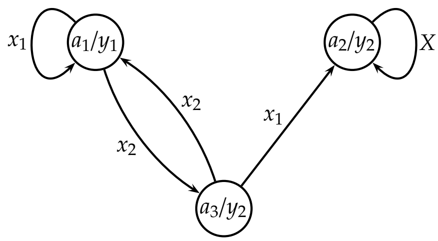
i funkcije δ i μ su zadate sa:

$$\begin{aligned}
&\delta(a_1, x_1) = \delta(a_3, x_2) = a_1, \quad \delta(a_1, x_2) = a_3, \\
&\delta(a_2, x_1) = \delta(a_2, x_2) = \delta(a_3, x_1) = a_2 \\
&\mu(a_1) = y_1, \quad \mu(a_2) = \mu(a_3) = y_2.
\end{aligned}$$

Ovaj automat zadaje se tablicom

$\mathcal{A}$	y_1	y_2	y_2
	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_2
x_2	a_3	a_2	a_1

i predstavlja se sledećim prelazno-izlaznim grafom



Automat $\mathcal{A}$ može biti zadat kao Milijev automat tablicom

$\mathcal{A}$	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1/y_1	a_2/y_2	a_2/y_2
x_2	a_3/y_2	a_2/y_2	a_1/y_1

Primer 9.2.3. Uzmimo da prekidač lampe radi na sledeći način: Pritiskom na dugme on ili zatvara ili otvara električno kolo zavisno od toga da li je ono ranije bilo otvoreno ili zatvoreno. Sistem koji se satoji od lampe i prekidača možemo razmatrati kao Murov automat sa dva stanja – *kolo je otvoreno* i *kolo je zatvoreno*, jednim ulaznim signalom – *pritiskanje dugmeta* i dva izlazna signala – *lampa svetli* i *lampa ne svetli*. Rad ovakvog automata predstavljen je sledećom tablicom:

Lampa	lampa svetli	lampa ne svetli
	kolo je zatvoreno	kolo je otvoreno
pritiskanje dugmeta	kolo je otvoreno	kolo je zatvoreno

9.3. Homomorfizmi, kongruencije, podautomati i generatorni skupovi

Setimo se da smo se u Odeljku 3.2. bavili konceptima homomorfizma i kongruencije za determinističke automate bez izlaza. Ovde ćemo slične koncepte definisati i za automate sa izlazom. Definicije koje će biti date važe za automate koji imaju iste skupove ulaznih i iste skupove izlaznih simbola. Takve automate nazivaćemo *automatima istog tipa*[1]. Slične definicije mogu se dati i za automate koji nisu istog tipa, ali takve definicije nam ovde nisu potrebne, zbog čega ih izostavljamo.

Pod pojmom *podskupa* automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ podrazumevaćemo svaki podskup njegovog skupa stanja, a pod pojmom *relacije na automatu* $\mathcal{A}$ podrazumevaćemo svaku relaciju na njegovom skupu stanja. Slično, ako su data dva automata istog tipa $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$, pod pojmom *funkcije* ili *preslikavanja* iz automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{B}$ podrazumevaćemo svaku funkciju koja skup stanja automata $\mathcal{A}$ slika u skup stanja automata $\mathcal{B}$.

Neka su sada $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ dva automata istog tipa za koje važi da je $B \subseteq A$, i funkcije δ^B i λ^B su restrikcije funkcija δ^A i λ^A na $B \times X$, tim redom. Tada automat $\mathcal{B}$ nazivamo *podautomatom* automata $\mathcal{A}$, a ako je B pravi podskup od A, onda kažemo da je $\mathcal{B}$ *pravi podautomat* od $\mathcal{A}$. Drugim rečima, $\mathcal{B}$ je podautomat od $\mathcal{A}$ ako i samo ako je skup B *zatvoren za prelaze* u automatu $\mathcal{A}$, što znači da za sve $a \in B$ i $x \in X$ važi $\delta^A(a, x) \in B$. Ako je $\mathcal{A}$ inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, i B osim gornjih uslova ispunjava i uslov da je $a_0 \in B$, tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je *inicijalni podautomat* od $\mathcal{A}$.

Kao i kod determinističkih automata, sa A_d ćemo označavali skup svih dostižnih stanja automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$, i ako funkcije $\delta^{A_d} : A_d \times X \to A_d$ i $\lambda^{A_d} : A_d \times X \to Y$ definišemo tako da δ^{A_d} bude restrikcija od δ^A na $A_d \times X$ a λ^{A_d} bude restrikcija od λ^A na $A_d \times X$, onda je $\mathcal{A}_d = (A_d, X, Y, \delta^{A_d}, \lambda^{A_d})$ podautomat od $\mathcal{A}$ koji zovemo *stablo* automata $\mathcal{A}$. Jednostavnosti radi, za označavanje funkcija prelaza, odnosno funkcija izlaza, automata $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_d$ koristićemo iste simbole.

Dalje, ako su $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ automati istog tipa i $\varphi : A \to B$ je funkcija takva da za sve $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$\varphi(\delta^A(a, x)) = \delta^B(\varphi(a), x) \qquad \text{i} \qquad \lambda^A(a, x) = \lambda^B(\varphi(a), x),$$

tada funkciju φ nazivamo *homomorfizmom* automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{B}$. Lako se proverava da tada skup $\varphi(A)$ određuje podautomat automata $\mathcal{B}$, koji nazivamo *homomorfnom slikom* automata $\mathcal{A}$. Ako je, pored toga, φ i bijekcija, onda φ nazivamo *izomorfizmom* automata $\mathcal{A}$ na automat $\mathcal{B}$, a za automate $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su *izomorfni*. Kao što je uobičajeno u algebri, izomorfne automate poistovećujemo.

Lako se proverava da važi sledeća lema:

Lema 9.3.1. *Neka su dati automati $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ istog tipa i homomorfizam φ iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$. Tada za sve $a \in A$ i $u \in X^*$ važi:*

(a) $\delta^A(a, u) = a_1 a_2 \cdots a_n \;\Rightarrow\; \delta^B(\varphi(a), u) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n)$;

---

[1] U stvari, možemo reći da su dva automata istog tipa ako su im skupovi ulaznih simbola, odnosno skupovi izlaznih simbola, iste kardinalnosti. Međutim, kako takve skupove poistovećujemo, a kao što znamo, i monoidi nad takvim skupovima su izomorfni, to nema potrebe komplikovati te definicije.

(b) $\lambda^A(a,u) = \lambda^B(\varphi(a),u)$;

(c) $\varphi(au) = \varphi(a)u$.

U slučaju kada su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ inicijalni automati, tada *homomorfizmom inicijalnih automata* nazivamo homomorfizam automata $\mathcal{A}$ u automat $\mathcal{B}$ koji inicijalno stanje automata $\mathcal{A}$ slika u inicijalno stanje automata $\mathcal{B}$.

Sledeći pojam koji uvodimo je pojam kongruencije na automatu. Neka je ϱ relacija na automatu $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$. Ako za sve $a,b \in A$ i $x \in X$, iz $(a,b) \in \varrho$ sledi da je

$$(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \varrho \quad \text{i} \quad \lambda(a,x) = \lambda(b,x),$$

tada za ϱ kažemo da je *saglasna* (*kompatibilna*) na $\mathcal{A}$, a saglasnu relaciju ekvivalencije na $\mathcal{A}$ nazivamo *kongruencijom* na automatu $\mathcal{A}$. Sledeća lema pokazuje da se to svojstvo kongruencija sa slova prenosi i na proizvoljne reči.

Lema 9.3.2. *Neka je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$. Tada za $a,b \in A$, iz $(a,b) \in \varrho$ sledi da je*

$$(au,bu) \in \varrho \qquad i \qquad \lambda(a,u) = \lambda(b,u),$$

za svako $u \in X^*$.

Dokaz: Tvrđenje leme se lako dokazuje indukcijom po dužini reči ostavlja se čitaocu za vežbu. □

Ako je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$, tada slično kao kod determinističkih automata razmatranih u Glavi 3 uvodimo pojam faktor-automata na sledeći način: Na faktor-skupu A/ϱ definišemo funkcije

$$\delta^{A/\varrho} : (A/\varrho)\times X \to A/\varrho \quad \text{i} \quad \lambda^{A/\varrho} : (A/\varrho)\times X \to Y,$$

sa

$$\delta^{A/\varrho}(\varrho_a,x) = \varrho_{\delta^A(a,x)} \quad \text{i} \quad \lambda^{A/\varrho}(\varrho_a,x) = \lambda(a,x), \tag{9.7}$$

za sve $a \in A$ i $x \in X$. Koristeći činjenicu da je ϱ kongruencija na $\mathcal{A}$, lako se proverava da su funkcije $\delta^{A/\varrho}$ i $\lambda^{A/\varrho}$ dobro definisane, tj. da njihove vrednosti ne zavise od izbora predstavnika ϱ-klasa, pa je $\mathcal{A}/\varrho = (A/\varrho,X,Y,\delta^{A/\varrho},\lambda^{A/\varrho})$ automat koji nazivamo *faktor-automatom* automata $\mathcal{A}$ u odnosu na kongruenciju ϱ.

Vezu između kongruencija na automatu i homomorfizama daje nam sledeća teorema.

Teorema 9.3.3. (Teorema o homomorfizmu). *Ako je ϱ kongruencija na automatu $\mathcal{A}$, tada je $\varrho^\natural$ homomorfizam iz $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}/\varrho$.*

Obratno, ako su $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta^A,\lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B,X,Y,\delta^B,\lambda^B)$ automati istog tipa i φ je homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, tada je $\varrho = \ker\varphi$ kongruencija na automatu $\mathcal{A}$ i funkcija $\Phi : A/\varrho \to B$ definisana sa

$$\Phi(\varrho_a) = \varphi(a) \qquad \textit{za sve } a \in A,$$

je izomorfizam iz $\mathcal{A}/\varrho$ *na* $\mathcal{B}$.

Dokaz: Dokaz je elementaran i ostavlja se čitaocu za vežbu. □

9.4. Preslikavanja indukovana automatima

Svakom stanju a automata $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ možemo pridružiti preslikavanje $\phi_a : X^* \to Y^*$ definisano sa

$$\phi_a(u) = \lambda(a, u), \quad \text{za } u \in X^*, \tag{9.8}$$

koje nazivamo *preslikavanje indukovano stanjem a* automata $\mathcal{A}$. U slučaju kada je $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ inicijalni automat, tada preslikavanje ϕ_{a_0} indukovano inicijalnim stanjem a_0 automata $\mathcal{A}$ nazivamo *preslikavanje indukovano inicijalnim (Milijevim) automatom* $\mathcal{A}$.

Štaviše, ako su dati slobodni monoidi X^* i Y^* i funkcija $\phi : X^* \to Y^*$, tada za ϕ kažemo da može biti indukovano inicijalnim Milijevim automatom ako postoji neki inicijalni Milijev automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ takav da je $\phi = \phi_{a_0}$, a za automat $\mathcal{A}$ kažemo da *predstavlja* ili *realizuje* preslikavanje ϕ.

Šta praktično predstavljaju preslikavanja indukovana automatima? Uzmimo da je automat $\mathcal{A}$ započeo svoj rad iz stanja a. Kao rezultat njegovog rada imamo da se ulaznim rečima pridružuju odgovarajuće reči, i to pridruživanje je određeno upravo preslikavanjem ϕ_a. Možemo reći i da automat $\mathcal{A}$ vrši obradu informacija na taj način što se svakoj ulaznoj informaciji, predstavljenoj nekom reči iz X^*, pridružuje neka informacija predstavljena nekom reči iz Y^*. Prirodno se postavlja pitanje: Kakve transformacije informacija mogu biti realizovane automatima sa izlazom? To pitanje se matematičkim jezikom može iskazati i na sledeći način: Pod kojim uslovima preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* može biti indukovano nekim inicijalnim Mealyevim automatom? Odgovor na to pitanje biće dat u daljem tekstu.

Najpre uvodimo sledeći pojam. Preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* nazivamo *automatovnim preslikavanjem* ako zadovoljava sledeće uslove:

(A1) ϕ očuvava dužinu reči, tj. $|\phi(u)| = |u|$, za svaki $u \in X^*$;

(A2) svaki prefiks proizvoljne reči $u \in X^*$ se preslikavanjem ϕ slika u prefiks reči $\phi(u)$.

Naziv "automatovno preslikavanje" biće opravdan osobinom ovih preslikavanja da mogu biti indukovana inicijalnim Milijevim automatom.

Potsetimo se da za reč u i prirodan broj $k \leqslant |u|$, $r_k(u)$ označava *sufiks* reči u dužine k.

Teorema 9.4.1. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Svakoj reči $u \in X^*$ pridružimo preslikavanje $\phi_u : X^* \to Y^*$ definisano sa*

$$\phi_u(v) = r_{|v|}(\phi(uv)), \quad \text{za } v \in X^*. \tag{9.9}$$

Tada:

(a) *Za proizvoljne $u, v \in X^*$, $\phi_u(v)$ je jedinstveno rešenje jednačine*

$$\phi(uv) = \phi(u)w \tag{9.10}$$

u Y^*, po promenljivoj w.

(b) *ϕ_u je automatovno preslikavanje, za svaki $u \in X^*$, i $\phi_e = \phi$.*

(c) *$\phi_{uv} = (\phi_u)_v$, za sve $u, v \in X^*$.*

Dokaz: (a) Kako je u levi odsečak od uv, to prema osobini (A1) automatovnih preslikavanja dobijamo da je $\phi(u)$ prefiks od $\phi(uv)$, tj. da je $\phi(uv) = \phi(u)w$, za neki $w \in Y^*$. Prema tome, jednačina (9.10) ima rešenje w u Y^*. Zbog kancelativnosti u Y^*, to rešenje je jedinstveno. Konačno, zbog toga što ϕ očuvava dužinu reči, imamo

$$|\phi(uv)| = |uv| = |u| + |v| \qquad \text{i} \qquad |\phi(u)w| = |\phi(u)| + |w| = |u| + |w|,$$

odakle sledi da je $|v| = |w|$. Prema tome,

$$w = r_{|v|}(\phi(uv)) = \phi_u(v).$$

(b) Uzmimo proizvoljno $u \in X^*$. Iz (9.9) se jasno vidi da ϕ_u očuvava dužinu reči. Neka su $v, v' \in X^*$ reči takve da je v' prefiks od v, tj. $v = v'v''$, za neki $v'' \in X^*$. Tada prema (a) imamo da je

$$\phi(uv) = \phi(uv'v'') = \phi(uv')\phi_{uv'}(v'') = \phi(u)\phi_u(v')\phi_{uv'}(v''),$$

odakle zbog jedinstvenosti rešenja jednačine (9.10) sledi

$$\phi_u(v) = \phi_u(v')\phi_{uv'}(v'').$$

Prema tome, $\phi_u(v')$ je prefiks od $\phi_u(v)$, što je i trebalo dokazati. Ovim smo dokazali da je ϕ_u automatovno preslikavanje.

Dalje, ako u (9.9) stavimo da je $u = e$, onda neposredno sledi da je $\phi_e = \phi$.

(c) Za proizvoljno $w \in X^*$ je

$$\phi(uvw) = \phi(u)\phi_u(vw) = \phi(u)\phi_u(v)(\phi_u)_v(w) = \phi(uv)(\phi_u)_v(w),$$

pa zbog (a) dobijamo da je

$$\phi_{uv}(w) = (\phi_u)_v(w).$$

Prema tome, važi (c). □

Preslikavanja ϕ_u, $u \in X^*$, definisana u prethodnoj teoremi, nazivamo *stanjima automatovnog preslikavanja* ϕ. Zašto smo izabrali takav naziv biće razjašnjeno kasnije, kada budemo konstruisali donji automat određen sa ϕ.

Glavna teorema ovog poglavlja je sledeća:

Teorema 9.4.2. *Preslikavanje ϕ iz slobodnog monoida X^* u slobodni monoid Y^* može biti indukovano inicijalnim Milijevim automatom ako i samo ako je automatovno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je preslikavanje ϕ indukovano inicijalnim Milijevim automatom $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$, tj. $\phi(u) = \lambda(a_0, u)$, za svako $u \in X^*$. Iz definicije proširenih funkcija prelaza i izlaza se jasno vidi da ϕ očuvava dužinu reči. Uzmimo proizvoljnu reč $u = x_1 x_2 \cdots x_n$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Prema definiciji proširenih funkcija prelaza i izlaza je

$$\begin{aligned} \delta(a_0, u) &= a_1 a_2 \cdots a_n, \\ \lambda(a_0, u) &= y_1 y_2 \cdots y_n, \end{aligned} \tag{9.11}$$

gde je

$$\begin{aligned} &a_1 = \delta(a_0, x_1),\ a_2 = \delta(a_1, x_2),\ \ldots,\ a_n = \delta(a_{n-1}, x_n), \\ &y_1 = \lambda(a_0, x_1),\ y_2 = \lambda(a_1, x_2)\ \ldots,\ y_n = \lambda(a_{n-1}, x_n), \end{aligned} \tag{9.12}$$

što znači da je $\phi(u) = y_1 y_2 \cdots y_n$. Sa druge strane, proizvoljan prefiks v reči u je oblika $v = x_1 \cdots x_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a iz (9.11) i (9.12) takođe sledi da je

$$\phi(v) = \lambda(a_0, v) = \lambda(a_0, x_1 \cdots x_i) = y_1 \cdots y_i,$$

pa je, prema tome, $\phi(v)$ prefiks reči $\phi(u)$. Time je dokazano da je ϕ automatovno preslikavanje.

Obratno, neka je ϕ automatovno preslikavanje. Definišimo inicijalni Mealyev automat A^ϕ na sledeći način: $\mathcal{A}^\phi = (X^*, e, X, Y, \delta^\phi, \lambda^\phi)$, pri čemu su funkcije δ^ϕ i λ^ϕ definisane sa:

$$\begin{aligned} \delta^\phi(u, x) &= ux \\ \lambda^\phi(u, x) &= x\phi_u \end{aligned} \qquad (u \in X^*, x \in X). \tag{9.13}$$

Da bi smo dokazali da je preslikavanje ϕ indukovano automatom A^ϕ, treba dokazati da za proizvoljnu reč $u \in X^*$ važi

$$\phi(u) = \lambda^\phi(e, u). \tag{9.14}$$

To ćemo dokazati indukcijom po dužini reči u. Jasno je da to važi za reči dužine 0 i 1. Uzmimo da (9.14) važi za sve reči dužine n i dokažimo da važi i za reči dužine $n+1$. Neka je $u \in X^*$ i $u = x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$, za neke $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in A$. Sa u' označimo reč $x_1 x_2 \cdots x_n$. Prema Teoremi 9.4.1., $\phi(u) = \phi(u')\phi_{u'}(x_{n+1})$.

Dalje, prema indukcijskoj hipotezi je $\phi(u') = \lambda^\phi(e,u')$, a prema (9.14) je $\phi_{u'}(x_{n+1}) = \lambda^\phi(u',x_{n+1})$. Prema tome, ostaje da se dokaže da je

$$\lambda^\phi(e,u')\lambda^\phi(u',x_{n+1}) = \lambda^\phi(e,u). \tag{9.15}$$

Zaista, prema definiciji proširenih funkcija prelaza i izlaza imamo da je

$$\begin{aligned}\delta^\phi(e,u) &= a_1a_2\cdots a_{n+1},\\ \lambda^\phi(e,u) &= y_1y_2\cdots y_{n+1},\end{aligned} \tag{9.16}$$

gde je

$$\begin{aligned}&a_1 = \delta^\phi(e,x_1),\ a_2 = \delta^\phi(a_1,x_2),\ \dots,\ a_n = \delta^\phi(a_{n-1},x_n),\ a_{n+1} = \delta^\phi(a_n,x_{n+1}),\\ &y_1 = \lambda^\phi(e,x_1),\ y_2 = \lambda^\phi(a_1,x_2)\ \dots,\ y_n = \lambda^\phi(a_{n-1},x_n),\ y_{n+1} = \lambda^\phi(a_n,x_{n+1}).\end{aligned}$$

Na isti način dobijamo da je

$$\begin{aligned}\delta^\phi(e,u') &= a_1a_2\cdots a_n,\\ \lambda^\phi(e,u') &= y_1y_2\cdots y_n.\end{aligned} \tag{9.17}$$

Sa druge strane, prema (9.13) imamo da je $a_1 = \delta^\phi(e,x_1) = ex_1 = x_1$, $a_2 = \delta^\phi(a_1,x_2) = x_1x_2$, itd., čime dobijamo da je $a_n = x_1x_2\cdots x_n = u'$. Sada imamo da je

$$y_{n+1} = \lambda^\phi(a_n,x_{n+1}) = \lambda^\phi(u',x_{n+1}),$$

pa koristeći (9.16) i (9.17) dobijamo (9.15). Ovim je teorema dokazana. □

Za automatovno preslikavanje ϕ, automat $\mathcal{A}^\phi$ konstruisan kao u prethodnoj teoremi nazivamo *gornjim automatom* određenim sa ϕ. Smisao ovog termina biće objašnjen kasnije.

Gornji automat, kao automat koji realizuje dato automatovno preslikavanje, ima jedan očigledan nedostatak – njegov skup stanja je X^* i dakle, uvek je beskonačan. Međutim, konstrukcija gornjeg automata nije jedini način da se iz zadatog automatovnog preslikavanja konstruiše automat. Jedna drugačija konstrukcija, koja kao rezultat može dati i konačan automat, prikazana je u sledećoj lemi:

Lema 9.4.3. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje i A_ϕ je skup njegovih različitih stanja. Tada su sa*

$$\begin{aligned}\delta_\phi(\phi_u,x) &= \phi_{ux}\\ \lambda_\phi(\phi_u,x) &= x\phi_u\end{aligned}, \qquad \text{za sve } u \in X^* \text{ i } x \in X, \tag{9.18}$$

definisane funkcije $\delta_\phi : A_\phi \times X \to A_\phi$ i $\lambda_\phi : A_\phi \times X \to Y$, i $\mathcal{A}_\phi = (A_\phi, X, Y, \delta_\phi, \lambda_\phi)$ je automat.

Osim toga, za sve $u \in X^*$ i $v = x_1x_2\cdots x_n$, $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$, važi:

$$\delta_\phi(\phi_u, v) = \phi_{ux_1}\phi_{ux_1x_2}\cdots\phi_{ux_1x_2\cdots x_n}; \tag{9.19}$$
$$(\phi_u)v = \phi_{uv}; \tag{9.20}$$
$$\lambda(\phi_u, v) = \phi_u(v). \tag{9.21}$$

Dokaz: Najpre treba dokazati da su funkcije δ_ϕ i λ_ϕ dobro definisana. Pre svega, treba dokazati da za $u, v \in X^*$ i proizvoljno $x \in X$ važi:

$$\phi_u = \phi_v \;\Rightarrow\; \phi_{ux} = \phi_{vx}; \tag{9.22}$$
$$\phi_u = \phi_v \;\Rightarrow\; x\phi_u = x\phi_v. \tag{9.23}$$

Zaista, implikacija (9.22) je neposredna posledica Teoreme 9.4.1. (c), jer $\phi_u = \phi_v$ povlači $\phi_{ux} = (\phi_u)_x = (\phi_v)_x = \phi_{vx}$, dok je implikacija (9.23) jasna. Prema tome, δ_ϕ i λ_ϕ su dobro definisane funkcije. Osim toga, λ_ϕ zaista slika $A_\phi \times X$ u Y. Naime, za proizvoljne $u \in X^*$, $x \in X$ imamo da je $|x\phi_u| = 1$, jer ϕ_u očuvava dužinu reči, pa je dakle $x\phi_u \in Y$. Ovim smo dokazali da je A_ϕ dobro definisan automat.

Dalje, za proizvoljne $u \in X^*$ i $v = x_1x_2\cdots x_n$, za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, imamo da je

$$\delta_\phi(\phi_u, v) = a_1a_2\cdots a_n, \tag{9.24}$$

gde je

$$a_1 = \delta_\phi(\phi_u, x_1),\ a_2 = \delta_\phi(a_1, x_2), \ldots,\ a_n = \delta_\phi(a_{n-1}, x_n).$$

Međutim, prema (9.18) je

$$\begin{aligned}
a_1 &= \delta_\phi(\phi_u, x_1) = \phi_{ux_1},\\
a_2 &= \delta_\phi(a_1, x_2) = \delta_\phi(\phi_{ux_1}, x_2) = \phi_{ux_1x_2},\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
a_n &= \delta_\phi(a_{n-1}, x_n) = \delta_\phi(\phi_{ux_1x_2\cdots x_{n-1}}, x_n) = \phi_{ux_1x_2\cdots x_n},
\end{aligned}$$

pa, s obzirom na (9.24), dobijamo (9.19). Jednakost (9.20) sledi neposredno iz (9.19). Konačno, jednakost (9.21) ćemo dokazati indukcijom po dužini reči v. Jasno je da (9.21) važi za sve reči dužine 1. Prema tome, ostaje da se dokaže da iz indukcijske pretpostavke da (9.21) važi za sve reči dužine $k \leqslant n-1$ sledi da (9.21) važi i za v. Zaista, prema indukcijskoj pretpostavci, za $v' = x_1x_2\cdots x_{n-1}$ imamo da je

$$\lambda_\phi(\phi_u, v') = \phi_u(v'), \tag{9.25}$$

i dalje

$$\begin{aligned}
\lambda_\phi(\phi_u,v) &= \lambda_\phi(\phi_u,v'x_n) \\
&= \lambda_\phi(\phi_u,v')\lambda_\phi((\phi_u)v',x_n) \\
&= \lambda_\phi(\phi_u,v')\lambda_\phi(\phi_{uv'},x_n) && \text{(prema (9.20))} \\
&= \phi_u(v')\phi_{uv'}(x_n) && \text{(prema (9.25) i (9.18))} \\
&= \phi_u(v')(\phi_u)_{v'}(x_n) && \text{(prema Teoremi 9.4.1. (c))} \\
&= \phi_u(v'x_n) = \phi_u(v),
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, (9.21) važi za sve reči $u,v \in X^*$. Ovim je dokaz leme upotpunjen. □

Automat $\mathcal{A}_\phi$ konstruisan u Lemi 9.4.3. nazivamo *donjim automatom* određenim sa ϕ. I za ovakav automat se može dokazati da indukuje preslikavanje ϕ. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 9.4.4. *Svako automatovno preslikavanje je indukovano donjim automatom određenim njime.*

Dokaz: Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Prema Teoremi 9.4.1. (b), $\phi = \phi_e$, pa iz (9.19) dobijamo da za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$\lambda_\phi(\phi_e,u) = \phi_e(u) = \phi(u).$$

Dakle, ϕ je indukovano automatom A_ϕ. □

Dalje dokazujemo još jednu lemu.

Lema 9.4.5. *Neka je $\mathcal{A} = (A,a_0,X,Y,\delta,\lambda)$ proizvoljan automat koji indukuje automatovno preslikavanje $\phi : X^* \to Y^*$. Tada za proizvoljno $u \in X^*$ je $\phi_u = \phi_{a_0u}$, tj. za svaki $v \in X^*$ važi*

$$\phi_u(v) = \lambda(\delta(a_0,u),v).$$

Dokaz: Uzmimo proizvoljne $u,v \in X^*$. Tada je

$$\begin{aligned}
\phi_u(v) &= r_{|v|}(\phi(uv)) && \text{(prema (9.9))} \\
&= r_{|v|}(\lambda(a_0,uv)) && \text{(prema (9.8))} \\
&= r_{|v|}(\lambda(a_0,u)\lambda(a_0u,v)) && \text{(prema Lemi 9.1.1.)} \\
&= \lambda(a_0u,v) && \text{(jer je } |\lambda(a_0u,v)| = |v|\text{)}
\end{aligned}$$

čime je lema dokazana. □

Veza gornjeg i donjeg automata određenog automatovnim preslikavanjem i drugih automata koji ga indukuju data je sledećom teoremom. Ta teorema u izvesnom smislu opravdava upotrebu naziva "gornji" i "donji" automat.

Teorema 9.4.6. *Neka je ϕ automatovno preslikavanje, $\mathcal{A}$ je proizvoljan inicijalni automat koji indukuje ϕ i $\mathcal{A}'$ je stablo automata $\mathcal{A}$. Tada*

(a) $|\mathcal{A}'| \leqslant |\mathcal{A}^\phi|$;

(b) $|\mathcal{A}_\phi| \leqslant |\mathcal{A}'|$.

Dokaz: Neka $\phi : X^* \to Y^*$, $\mathcal{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ automat koji indukuje ϕ i neka je A' skup dostižnih stanja od A.

(a) Definišimo preslikavanje $\varphi : X^* \to A'$ sa

$$\varphi(u) = a_0 u, \qquad \text{za svaki } u \in X^*.$$

Jasno, preslikavanje φ je dobro definisano i slika X^* na A', odnosno φ slika $\mathcal{A}^\phi$ na $\mathcal{A}'$.

(b) Definišimo preslikavanje $\psi : A' \to A_\phi$ sa

$$\psi(a) = \phi_u \;\Leftrightarrow\; a = a_0 u, \quad \text{za svaki } a \in A'.$$

Najpre ćemo dokazati da je ψ dobro definisano. Jasno, za svaki $a \in A'$ postoji $u \in X^*$ tako da je $a = a_0 u$. Neka su $u, v \in X^*$ reči za koje je $a = a_0 u = a_0 v$. Tada prema Lemi 9.4.5. imamo da je

$$\phi_u = \phi_{a_0 u} = \phi_{a_0 v} = \phi_v.$$

Na ovaj način smo dokazali da je preslikavanje ψ dobro definisano.

Jasno, za proizvoljno $\phi_u \in A_\phi$ je $\phi_u = (a_0 u)\psi$, pa ψ slika A' na A_ϕ. Time je dokazano da važi (b).

□

Na kraju ovog odeljka dajemo jedan primer automatovnog preslikavanja i njegovog minimalnog automata.

Primer 9.4.7. Neka je $X = Y = \{0, 1\}$ i preslikavanje $\phi : X^* \to Y^*$ je definisano na sledeći način:

(i) Ako 0101 nije podreč od u, tada stavljamo $\phi(u) = u$.

(ii) Ukoliko je 0101 podreč od u, tada preslikavanje ϕ sva slova koja se u reči u javljaju posle prvog pojavljivanja podreči 0101 preinačuje u 0. Drugim rečima, ako u predstavimo u obliku $u = p0101q$, gde su $p, q \in X^*$ i 0101 nije podreč od $p010$, tada je $\phi(u) = \phi(p0101q) = p01010^{|q|}$.

Nije teško videti da je ϕ automatovno preslikavanje. Da bi smo našli donji automat tog preslikavanja, odredićemo njegova stanja. Naime, za proizvoljnu reč $u \in X^*$ odredićemo stanje ϕ_u preslikavanja ϕ. Razlikujemo nekoliko slučajeva:

(1) Neka je 0101 podreč od u. Tada je $u\phi = p01010^{|q|}$, gde je $u = p0101q$ i $p, q \in X^*$ tako da 0101 nije podreč od $p010$, i za proizvoljnu reč $v \in X^*$ imamo da je

$$\phi_u(v) = r_{|v|}(\phi(uv)) = r_{|v|}(p01010^{|q|+|v|}) = 0^{|v|}.$$

(2) Neka 0101 nije podreč od u. Tada je bitan sufiks reči u dužine tri, tj. poslednja tri slova te reči. Imamo sledeće podslučejeve:

(2.1) Jedna od reči 111 i 011 je sufiks od u. Tada, za proizvoljnu reč $v \in X^*$, 0101 je podreč od uv ako i samo ako je podreč od v, pa je

$$\phi_u(v) = r_{|v|}(\phi(uv)) = r_{|v|}(u(\phi(v))) = \phi(v),$$

što znači da je $\phi_u = \phi$.
(2.2) Jedna od reči 000, 100 i 110 je sufiks od u. Neka je $v \in X^*$ proizvoljna reč. Ako je 101 prefiks od v, tada je

$$\phi_u(v) = r_{|v|}(\phi(uv)) = r_{|v|}(u1010^{|v|-3}) = 1010^{|v|-3}.$$

Sa druge strane, ako 101 nije prefiks od v, tada je 0101 podreč od uv ako i samo ako je podreč od v, pa kao u slučaju (2.1) dobijamo da je $\phi_u(v) = \phi(v)$.

Prema tome, za proizvoljan $v \in X^*$ je

$$\phi_u(v) = \begin{cases} 1010^{|v|-3}, & \text{ako je 101 prefiks od } v, \\ \phi(v), & \text{ako 101 nije prefiks od } v. \end{cases}$$

(2.3) Jedna od reči 001 i 101 je sufiks od u. Tada za proizvoljnu reč $v \in X^*$, kao u prethodnom slučaju dobijamo

$$\phi_u(v) = \begin{cases} 010^{|v|-2}, & \text{ako je 01 prefiks od } v, \\ \phi(v), & \text{ako 01 nije prefiks od } v. \end{cases}$$

(2.4) Reč 010 je sufiks od u. Tada za proizvoljnu reč $v \in X^*$, kao u prethodnim slučajevima dobijamo

$$\phi_u(v) = \begin{cases} 10^{|v|-1}, & \text{ako je 1 prvo slovo u } v, \\ \phi(v), & \text{ako je 0 prvo slovo u } v. \end{cases}$$

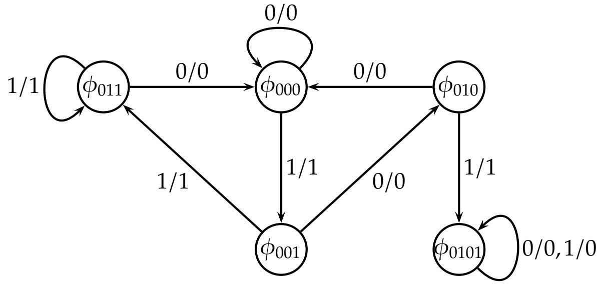
Prema tome, svako stanje automatovnog preslikavanja ϕ jednako je jednom od preslikavanja iz (1), (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4). Ne umanjujući opštost, možemo uzeti da sva stanja preslikavanja ϕ jesu sledeća preslikavanja

$$\phi_{0101},\ \phi_{011},\ \phi_{000},\ \phi_{001} \text{ i } \phi_{010}.$$

Pri tome je $\phi = \phi_{011}$. Dakle, prema definiciji donjeg automata A_ϕ automatovnog preslikavanja ϕ imamo da je to automat predstavljen tablicom

$\mathcal{A}_\phi$	ϕ_{0101}	ϕ_{000}	ϕ_{001}	ϕ_{010}	ϕ_{011}
0	$\phi_{0101}/0$	$\phi_{000}/0$	$\phi_{010}/0$	$\phi_{000}/0$	$\phi_{000}/0$
1	$\phi_{0101}/0$	$\phi_{001}/1$	$\phi_{011}/1$	$\phi_{0101}/1$	$\phi_{011}/1$

ili grafom



Tako smo dobili minimalni automat koji realizuje dato automatovno preslikavanje ϕ.

9.5. Ekvivalentni automati. Redukovani automati

Za Milijev automat $\mathcal{A}$ sa $\Phi_{\mathcal{A}}$ ćemo označavati skup svih automatovnih preslikavanja indukovanih stanjima tog automata.

Neka su $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ dva Milijeva automati. Za $a \in A$ i $b \in B$ kažemo da su *ekvivalentna stanja* ako a i b indukuju isto automatovno preslikavanje, odnosno ako je $\phi_a = \phi_b$. Slično, za $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su *ekvivalentni automati* ako je $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}}$, odnosno ako je svako stanje automata $\mathcal{A}$ ekvivalentno nekom stanju automata $\mathcal{B}$ i obratno. Jasno, ovako uvedena relacija među automatima je relacija ekvivalencije na skupu svih automata, što opravdava njen naziv. Dalje, ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ inicijalni automati, onda kažemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ *ekvivalentni inicijalni automati* ako su ekvivalentna njihova inicijalna stanja, tj. ako $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ indukuju isto automatovno preslikavanje.

Teorema 9.5.1. *Svaka homomorfna slika automata $\mathcal{A}$ je ekvivalentna sa tim automatom.*

Dokaz: Razmotrimo automate $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$, $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ i homomorfizam φ iz $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Tada prema Lemi 9.3.1., za proizvoljno $a \in A$ je

$$\phi_a(u) = \lambda^A(a, u) = \lambda^B(\varphi(a), u) = \phi_{\varphi(a)}(u),$$

za svako $u \in X^*$. Prema tome, $\phi_a = \phi_{\varphi(a)}$, za svako $a \in A$, pa kako φ slika A na B, to je $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}}$, čime smo dokazali da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ekvivalentni automati. $\square$

Setimo se da se kongruencija na automatu $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ definiše kao relacija ekvivalencije ϱ na A koja zadovoljava uslov da za proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi da je $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \varrho$ i $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$. Sledeća teorema pokazuje da svaki automat sa izlazom ima najveću kongruenciju, koja se konstruiše na sledeći način.

Teorema 9.5.2. *Za proizvoljan automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$, relacija $\varrho_{\mathcal{A}}$ na $\mathcal{A}$ definisana sa*

$$(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (\forall u \in X^*)\ \lambda(a,u) = \lambda(b,u), \qquad \textit{za sve } a,b \in A,$$

je najveća kongruencija na $\mathcal{A}$.

Dokaz: Lako se proverava da je $\varrho_{\mathcal{A}}$ relacija ekvivalencije na A. Da bi smo dokazali njenu saglasnost, razmotrimo $a,b \in A$ takve da je $(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$ i razmotrimo proizvoljno $x \in X$. Tada za proizvoljno $u \in X^*$ važi

$$\begin{aligned} \lambda(\delta(a,x),u) &= \lambda(ax,u) \\ &= r_{|u|}(\lambda(a,xu)) && \text{(prema Lemi 9.1.1. (b), jer je } |\lambda(ax,u)| = |u|\text{)} \\ &= r_{|u|}(\lambda(b,xu)) && \text{(jer je } (a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}}\text{)} \\ &= \lambda(bx,u) \\ &= \lambda(\delta(b,x),u), \end{aligned}$$

pa je $(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \varrho_{\mathcal{A}}$. Sa druge strane, iz $(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$ sledi $\lambda(a,x) = \lambda(b,x)$. Prema tome, $\varrho_{\mathcal{A}}$ je kongruencija na A.

Da bi smo dokazali da je $\varrho_{\mathcal{A}}$ najveća kongruencija na A, razmotrimo proizvoljnu kongruenciju ϱ na A i $a,b \in A$ takve da je $(a,b) \in \varrho$. Prema Lemi 9.3.2., za proizvoljno $u \in X^*$ je $\lambda(a,u) = \lambda(b,u)$, odakle sledi da je $(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$. Prema tome, $\varrho \subseteq \varrho_{\mathcal{A}}$. Ovim je teorema dokazana. □

Napomena 9.5.3. Primetimo da relacija $\varrho_{\mathcal{A}}$ može biti definisana i sa:

$$(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \phi_a = \phi_b, \qquad \text{za sve } a,b \in A.$$

Ako za automat $\mathcal{A}$ važi da je $\varrho_{\mathcal{A}}$ identička relacija na $\mathcal{A}$, tj. ako je identička relacija jedina kongruencija na $\mathcal{A}$, tada za $\mathcal{A}$ kažemo da je *redukovan* ili *prost* automat. Nije teško proveriti da za proizvoljan automat $\mathcal{A}$, faktor-automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ je redukovan, pa ga nazivamo *redukovanim automatom automata* $\mathcal{A}$. Ako je, osim toga, $\mathcal{A}$ inicijalni automat sa inicijalnim stanjem a_0, tada i njegov redukovani automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ tretiramo kao inicijalni automat sa inicijalnim stanjem ϱ_{a_0}, gde je $\varrho = \varrho_{\mathcal{A}}$.

Teorema 9.5.4. *Svaki automat je ekvivalentan sa svojim redukovanim automatom.*

Dokaz: Sledi neposredno iz Teoreme 9.5.1. □

Teorema 9.5.5. *Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje, $\mathcal{A}$ je proizvoljan automat koji indukuje ϕ i $\mathcal{A}'$ je stablo od $\mathcal{A}$. Tada je redukovani automat od $\mathcal{A}'$ izomorfan donjem automatu $\mathcal{A}_\phi$ preslikavanja ϕ.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A,a_0,X,Y,\delta,\lambda)$ i A' je skup stanja od $\mathcal{A}'$. Posmatrajmo homomorfizam ψ iz $\mathcal{A}'$ na $\mathcal{A}_\phi$ definisan kao u dokazu Teoreme 9.4.6., tj.

$$\psi(a) = \phi_u \Leftrightarrow a = a_0u, \quad \text{za svaki } a \in A'.$$

Za sve $a,b \in A'$ je $a = a_0u$, $b = a_0v$, za neke $u,v \in X^*$, i $\psi(a) = \phi_u$, $\psi(b) = \phi_v$, prema definiciji preslikavanja ψ, pa na osnovu Leme 9.4.5., $\phi_a = \phi_{a_0u} = \phi_u$ i $\phi_b = \phi_{a_0v} = \phi_v$. Prema tome

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}'} &\Leftrightarrow \phi_a = \phi_b && \text{(prema (A1))} \\
&\Leftrightarrow \phi_u = \phi_v && \text{(jer je } \phi_a = \phi_u \text{ i } \phi_b = \phi_v\text{)} \\
&\Leftrightarrow \psi(a) = \psi(b) && \text{(prema definiciji preslikavanja } \psi\text{)} \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \ker \psi ,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\varrho_{\mathcal{A}'} = \ker \psi$. Sada prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da je automat $\mathcal{A}'/\varrho_{\mathcal{A}'}$ izomorfan automatu $\mathcal{A}_\phi$. □

Teorema 9.5.6. *Automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su ekvivalentni ako i samo ako su redukovani automati $A/\varrho_{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$ izomorfni.*

Dokaz: Neka su $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ i $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ ekvivalentni automati. Tada za proizvoljno $a \in A$ postoji bar jedan $b \in B$ takav da je $\phi_a = \phi_b$, pa ako izaberemo bilo koji element iz B za koji to važi i označimo ga sa $\varphi(a)$, tada smo sa $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ definisali preslikavanje iz A u B. Najpre ćemo dokazati da za proizvoljne $a \in A$, $x \in X$ važi

$$\phi_{ax} = \phi_{(\varphi(a))x}. \tag{9.26}$$

Zaista, prema Lemi 9.1.1. imamo da za proizvoljan $u \in X^*$ važi

$$\phi_a(xu) = \phi_a(x)\phi_{ax}(u) \quad \text{i} \quad \phi_{\varphi(a)}(xu) = \phi_{\varphi(a)}(x)\phi_{(\varphi(a))x}(u). \tag{9.27}$$

Sa druge strane, zbog $\phi_a = \phi_{\varphi(a)}$ imamo da je

$$\phi_a(xu) = \phi_{\varphi(a)}(xu) \quad \text{i} \quad \phi_a(x) = \phi_{\varphi(a)}(x),$$

pa prema Teoremi 9.4.1. (a) dobijamo da je $\phi_{ax}(u) = \phi_{(\varphi(a))x}(u)$, čime smo dokazali da važi (9.26).

Jasno, iz (9.26) sledi da za proizvoljne $a \in A$, $x \in X$ važi

$$\phi_{\varphi(ax)} = \phi_{(\varphi(a))x},$$

što znači da $(\varphi(ax), (\varphi(a))x) \in \varrho_{\mathcal{B}}$, odnosno

$$(\varphi(\delta^A(a,x)), \delta^B(\varphi(a),x)) \in \varrho_{\mathcal{B}}, \tag{9.28}$$

za sve $a \in A$, $x \in X$.

Definišimo sada preslikavanje $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$ sa

$$\psi(a) = \varrho_{\mathcal{B}}^\natural(\varphi(a)), \qquad \text{za svaki } a \in A. \tag{9.29}$$

Nameravamo da dokažemo da je ψ homomorfizam iz $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$. Zaista, za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
\psi(\delta(a,x)) &= \varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(\varphi(\delta^{A}(a,x))) && \text{(prema (9.29))}\\
&= \varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(\delta^{B}(\varphi(a),x)) && \text{(prema (9.28))}\\
&= \delta^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}(\varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(\varphi(a)),x) && \text{(prema definiciji za } \delta^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}\text{)}\\
&= \delta^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}(\psi(a),x) && \text{(prema (9.29))}
\end{aligned}
$$

i, sa druge strane,

$$
\begin{aligned}
\lambda(a,x) &= \phi_a(x) && \text{(prema definiciji preslikavanja } \phi_a\text{)}\\
&= \phi_{a\varphi}(x) && \text{(jer je } \phi_a = \phi_{a\varphi}\text{)}\\
&= \lambda^{B}(\varphi(a),x) && \text{(prema definiciji za } \phi_{a\varphi}\text{)}\\
&= \lambda^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}(\varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(\varphi(a)),x) && \text{(prema definiciji za } \lambda^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}\text{)}\\
&= \lambda^{B/\varrho_{\mathcal{B}}}(\psi(a),x) && \text{(prema (9.29)),}
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali da je ψ homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$. Dalje, proizvoljan element iz $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$ je oblika $\varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(b)$, za neki $b \in B$, pa kako je $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}}$, to je $\phi_b = \phi_a$, za neki $a \in A$. Odavde dobijamo da je

$$
\phi_b = \phi_a = \phi_{\varphi(a)},
$$

što znači da $(b,\varphi(a)) \in \varrho_{\mathcal{B}}$, pa je, prema tome,

$$
\varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(b) = \varrho_{\mathcal{B}}^{\natural}(\varphi(a)) = \psi(a).
$$

Time smo dokazali da ψ slika $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$, pa je ψ zaista homomorfizam iz $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$.

Dalje, za $a,b \in A$ važi

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}} &\Leftrightarrow \phi_a = \phi_b && \text{(prema Napomeni 9.5.3.)}\\
&\Leftrightarrow \phi_{\varphi(a)} = \phi_{\varphi(b)} && \text{(jer je } \phi_a = \phi_{\varphi(a)} \text{ i } \phi_b = \phi_{\varphi(b)}\text{)}\\
&\Leftrightarrow (\varphi(a),\varphi(b)) \in \varrho_{\mathcal{B}} && \text{(prema Napomeni 9.5.3.)}\\
&\Leftrightarrow \psi(a) = \psi(b) && \text{(prema (9.29))}\\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \ker\psi\ .
\end{aligned}
$$

To znači da je $\varrho_{\mathcal{A}} = \ker\psi$, pa prema Teoremi o homomorfizmu dobijamo da je automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ izomorfan automatu $\mathcal{B}/\varrho_{\mathcal{B}}$.

Obrat sledi prema Teoremama 9.5.4. i 9.5.5. □

Prethodne teoreme mogu sada biti sažete u sledeću teoremu:

Teorema 9.5.7. *Neka je $\mathcal{A}$ automat i $\mathfrak{E}_A$ je skup svih automata ekvivalentnih sa $\mathcal{A}$. Tada su svi redukovani automati iz $\mathfrak{E}_A$ međusobno izomorfni i svaki od tih redukovanih automata je homomorfna slika svakog automata iz $\mathfrak{E}_A$.*

9.6. Minimizacija automata sa izlazom

U prethodnom poglavlju videli smo da redukovani automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ automata $\mathcal{A}$ jeste automat sa minimalnim brojem stanja među automatima ekvivalentnim sa $\mathcal{A}$, tj. među automatima koji realizuju isti skup automatovnih preslikavanja. U ovom poglavlju govorimo o procesu *minimizacije automata* $\mathcal{A}$, pod čime podrazumevamo svaki efektivni postupak kojim nalazimo njegov redukovani automat, odnosno kojim određujemo kongruenciju ϱ_A. Takav postupak nazivamo *algoritmom minimizacije*. Jedan takav algoritam biće dat u daljem tekstu.

Najpre dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 9.6.1. *Neka je dat automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ i neka je $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz relacija na $\mathcal{A}$ definisan induktivno sa:*

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \{(a,b) \in A\times A \mid (\forall x \in X)\ \lambda(a,x) = \lambda(b,x)\} \\ \varrho_{k+1} &= \{(a,b) \in \varrho_k \mid (\forall x \in X)\,(ax,bx) \in \varrho_k\}. \end{aligned} \tag{9.30}$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\varrho_1 \supseteq \varrho_2 \supseteq \cdots \supseteq \varrho_k \supseteq \varrho_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq \varrho_{\mathcal{A}}. \tag{9.31}$$

(b) *Ako je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ako je $\mathcal{A}$ konačan automat, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\varrho_k = \varrho_{\mathcal{A}}$.*

Dokaz: Neposredno se proverava da je svaki ϱ_k relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$ i da je $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući niz sa donjom granicom $\varrho_{\mathcal{A}}$, tj. da važi (a).

(b) Neka je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Indukcijom po m dokazaćemo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci, to važi za $m = 1$. Dalje, uzmimo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Prema (9.31) imamo da je $\varrho_{k+m+1} \subseteq \varrho_{k+m}$. Da bi dokazali obratnu inkluziju, razmotrimo proizvoljan par $(a,b) \in \varrho_{k+m}$. Kako je, prema indukcijskoj pretpostavci, $\varrho_{k+m} = \varrho_{k+m-1} = \varrho_k$, to iz $(a,b) \in \varrho_{k+m}$ sledi da je $(a,b) \in \varrho_{k+m-1}$ i $(ax,bx) \in \varrho_{k+m-1}$, za svaki $x \in X$. Međutim, iz $\varrho_{k+m} = \varrho_{k+m-1}$ sledi da je $(ax,bx) \in \varrho_{k+m}$, za svaki $x \in X$, pa prema (9.30) sledi da je $(a,b) \in \varrho_{k+m+1}$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, dokazali smo da je $\varrho_{k+m+1} = \varrho_{k+m} = \varrho_k$, pa indukcijom po m zaključujemo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.

(c) Kako za svaki konačan skup postoji konačno mnogo relacija na njemu, to je niz $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan, što znači da postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $\varrho_k = \varrho_{k+l}$. Tada prema (9.31) imamo da je

$$\varrho_{k+1} \subseteq \varrho_k = \varrho_{k+l} \subseteq \varrho_{k+1},$$

što znači da je $\varrho_{k+1} = \varrho_k$. Odavde i iz (b) dobijamo da je $\varrho_k = \varrho_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Prema Teoremi 9.5.2. i (9.31), da bi smo dokazali da je $\varrho_k = \varrho_{\mathcal{A}}$, dovoljno je dokazati da je ϱ_k kongruencija na $\mathcal{A}$. Zaista, neka je $(a,b) \in \varrho_k$ i $x \in X$. Kako je $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, to je $(a,b) \in \varrho_{k+1}$, pa prema (9.30) imamo da je $(ax,bx) \in \varrho_k$. Sa druge strane, iz $(a,b) \in \varrho_k \subseteq \varrho_1$ sledi da je $\lambda(a,x) = \lambda(b,x)$. Ovim smo dokazali da je ϱ_k zaista kongruencija na A, tj. da je $\varrho_k = \varrho_{\mathcal{A}}$. □

Koristeći prethodnu teoremu, možemo dati sledeći algoritam za minimizaciju Milijevih automata.

Algoritam 9.6.2. (*Minimizacija Milijevog automata*) Ulaz ovog algoritma je Milijev automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$, a izlaz je redukovani automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$, tj. minimalni Milijev automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji opadajućeg niza $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$, a članovi niza su predstavljeni listom P parova stanja automata $\mathcal{A}$. Ovu listu grafički predstavljamo tablicom, a zbog refleksivnosti i simetričnosti relacija koje konstruišemo, dovoljno je razmatrati samo parove koji leže ispod glavne dijagonale te tablice.

(A1) U prvom koraku najpre formiramo listu P svih parova stanja automata $\mathcal{A}$, a potom formiramo relaciju ϱ_1 brišući sa liste P sve parove (a,b) za koje postoji $x \in X$ tako da je $\lambda(a,x) \neq \lambda(b,x)$.

(A2) Posle $k$tog koraka neka je konstruisana relacija ϱ_k, odnosno neka je formirana lista kojom je predstavljena ta relacija.

(A3) U narednom koraku gradimo relaciju ϱ_{k+1} na taj način što razmatramo sve parove (a,b) koji su na početku tog koraka bili na listi P, i ukoliko proverom ustanovimo da postoji $x \in X$ tako da par (ax,bx) na početku tog koraka nije bio na listi, onda sa liste brišemo parove (a,b) i (b,a).

(A4) Algoritam se završava prvim korakom u kome nije bilo brisanja sa liste. Svi parovi koji su u tom trenutku na listi P čine relaciju $\varrho_{\mathcal{A}}$, i dalje formiramo odgovarajući faktor skup i na njemu definišemo funkcije prelaza i izlaza pomoću formule (9.7), i na taj način dobijamo minimalni Milijev automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$.

Princip rada ovog algoritma ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 9.6.3. Neka je automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ zadat tablicom

$\mathcal{A}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	a_2/y_1	a_1/y_1	a_3/y_1	a_4/y_1	a_2/y_1
x_2	a_1/y_2	a_3/y_1	a_4/y_2	a_4/y_2	a_2/y_1

Kao što smo rekli, najpre formiramo listu P svih parova automata $\mathcal{A}$. Zatim radimo sledeće:

1. korak: U ovom koraku formiramo relaciju ϱ_1. Iz tablice se vidi da ta relacija ima dve klase:

$$\{a_1,a_3,a_4\},\ \{a_2,a_5\}.$$

To znači da sa liste u ovom koraku brišemo sve parove iz skupa

$$\{a_1,a_3,a_4\}\times\{a_2,a_5\}\cup\{a_2,a_5\}\times\{a_1,a_3,a_4\}.$$

2. korak: Proveravamo parove ispod glavne dijagonale liste P koji su na njoj ostali posle prvog koraka:

$(a_3x_1,a_1x_1)=(a_3,a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_3,a_1) i (a_1,a_3) brišu;
$(a_4x_1,a_1x_1)=(a_4,a_2)$ – nije na listi, pa se parovi (a_4,a_1) i (a_1,a_4) brišu;
$(a_4x_1,a_3x_1)=(a_4,a_3)$ – na listi je;
$(a_4x_2,a_3x_2)=(a_4,a_4)$ – na listi je;
$(a_5x_1,a_2x_1)=(a_2,a_1)$ – nije na listi, pa se parovi (a_5,a_2) i (a_2,a_5) brišu.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		X			X
a_2	X		X	X	
a_3		X			X
a_4		X			X
a_5	X		X	X	

posle 1. koraka
pelacija ϱ_1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		X	X	X	X
a_2	X		X	X	X
a_3	X	X			X
a_4	X	X			X
a_5	X	X	X	X	

posle 2. i 3. koraka
relacije $\varrho_2=\varrho_3=\varrho_{\mathcal{A}}$

3. korak: U ovom koraku proverava se samo par (a_4,a_3) koji je jedini ostao ispod glavne dijagonale na listi posle 2. koraka.
Kako je $(a_4x_1,a_3x_1)=(a_4,a_3)$ i $(a_4x_2,a_3x_2)=(a_4,a_4)$, i ova dva para se nalaze na listi, to se u ovom koraku ništa ne briše, pa je algoritam završen.

Dakle, $\varrho_{\mathcal{A}}=\varrho_2=\varrho_3$ i $\varrho_{\mathcal{A}}$ ima sledeće klase

$$\{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3,a_4\},\ \{a_5\}.$$

Prema tome, automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ je dat tablicom

$\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_5$
x_1	$\overline{a}_2/y_1$	$\overline{a}_1/y_1$	$\overline{a}_3/y_1$	$\overline{a}_2/y_1$
x_2	$\overline{a}_1/y_2$	$\overline{a}_3/y_1$	$\overline{a}_3/y_2$	$\overline{a}_2/y_1$

gde je sa $\overline{q}$ označena $\varrho_{\mathcal{A}}$-klasa stanja $q\in A$.

Algoritam koji smo ovde prikazali dali su Aufenkamp i Hohn [5]. On je dosta jednostavan, ali u pojedinim situacijama njegova realizacija može trajati znatno duže od, na primer, algoritma koji je dao Letičevskiĭ [71]. Više informacija o tome može se naći u knjizi Gécseg and Peák [42].

9.7. Murovi automati

U ovom odeljku govorićemo o automatima Murovog tipa, o njihovim specifičnostima i razlikama u odnosu na automate Milijevog tipa.

Najpre dokazujemo sledeću zanimljivu teoremu:

Teorema 9.7.1. *Svaki automat $\mathcal{A}$ Milijevog tipa ekvivalentan je nekom automatu $\mathcal{B}$ Murovog tipa.*

Pri tome, ako je $|\mathcal{A}| = n$ i $|X| = m$, gde je X ulazni alfabet, tada se Murov automat $\mathcal{B}$ može izabrati tako da bude $|\mathcal{B}| = n(m+1)$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \lambda^A)$ automat Milijevog tipa. Stavimo da bude $B = A \cup A \times X$ i definišimo preslikavanja $\delta^B : B \times X \to B$ i $\lambda^B : B \times X \to Y$ sa:

$$
\begin{aligned}
\delta^B(b,x) &= \begin{cases} (a,x) & \text{ako je } b = a \in A, \\ (\delta^A(a,x'),x) & \text{ako je } b = (a,x') \in A \times X, \end{cases} \\
\lambda^B(b,x) &= \begin{cases} \lambda^A(a,x) & \text{ako je } b = a \in A, \\ \lambda^A(\delta^A(a,x'),x) & \text{ako je } b = (a,x') \in A \times X, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$

gde su $b \in B$ i $x \in X$. Tada je $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ automat za koji ćemo dokazati da je ekvivalentan sa $\mathcal{A}$ i da je Murovog tipa.

Prvo ćemo dokazati da svako stanje $a \in A$ indukuje isto automatovno preslikavanje i u automatu $\mathcal{A}$ i u automatu $\mathcal{B}$, odnosno da važi

$$\lambda^A(a,u) = \lambda^B(a,u),$$

za svaku reč $u \in X^*$. Uzmimo da je $u = x_1x_2\dots x_k$, za neke $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$. Tada je

$$\delta^A(a,u) = a_1a_2\dots a_k \quad \text{i} \quad \lambda^A(a,u) = y_1y_2\dots y_k,$$

za $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ i $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ određene sa

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \delta^A(a,x_1),\ a_2 = \delta^A(a_1,x_2),\ \dots,\ a_k = \delta^A(a_{k-1},x_k), \\
&y_1 = \lambda^A(a,x_1),\ y_2 = \lambda^A(a_1,x_2),\ \dots,\ y_k = \lambda^A(a_{k-1},x_k).
\end{aligned}
$$

Prema (9.32) imamo da je

$$
\begin{aligned}
&\delta^B(a,x_1) = (a,x_1), \\
&\delta^B((a,x_1),x_2) = (\delta^A(a,x_1),x_2) = (a_1,x_2), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\delta^B((a_{k-2},x_{k-1}),x_k) = (\delta^A(a_{k-2},x_{k-1}),x_k) = (a_{k-1},x_k),
\end{aligned}
$$

što znači da je

$$\delta^B(a,u) = b_1b_2\dots b_k,$$

gde je

$$b_1 = (a, x_1),\ b_2 = (a_1, x_2),\ \dots,\ b_k = (a_{k-1}, x_k).$$

Odavde dalje dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\lambda^B(a, x_1) = \lambda^A(a, x_1) = y_1,\\
&\lambda^B(b_1, x_2) = \lambda^A(\delta^A(a, x_1), x_2) = \lambda^A(a_1, x_2) = y_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda^B(b_{k-1}, x_k) = \lambda^A(\delta^A(a_{k-2}, x_{k-1}), x_k) = \lambda^A(a_{k-1}, x_k) = y_k,
\end{aligned}$$

pa je

$$\lambda^B(a, u) = y_1 y_2 \dots y_k = \lambda^A(a, u),$$

što je i trebalo dokazati.

Na potpuno isti način se dokazuje da je svako stanje $(a, x) \in A \times X$ automata $\mathcal{B}$ ekvivalentno stanju $\delta^A(a, x)$ automata $\mathcal{A}$. Prema tome, automati $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su zaista ekvivalentni.

Da bi smo dokazali da je $\mathcal{B}$ automat Murovog tipa, razmotrimo $b, b' \in B$ i $x, x' \in X$ takve da je $\delta'(b, x) = \delta'(b', x')$. Moguća su četiri slučaja:

(1) $b = a \in A,\ b' = a' \in A,$
(2) $b = a \in A,\ b' = (a', x_1') \in A \times X,$
(3) $b = (a, x_1) \in A \times X,\ b' = a' \in A,$
(4) $b = (a, x_1) \in A \times X,\ b' = (a', x_1') \in A \times X.$

U svakom od tih slučajeva, koristeći činjenicu da je $\delta^B(b, x) = \delta^B(b', x')$ i (9.32), dobijamo da je $\lambda^B(b, x) = \lambda^B(b', x')$. Time je dokazano da je $\mathcal{B}$ automat Murovog tipa.

Konačno, jasno je da iz $|\mathcal{A}| = n$ i $|X| = m$ sledi da je $|\mathcal{B}| = n + mn = n(m+1)$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Kao što smo videli u prethodnoj teoremi, za realizaciju automatovnih preslikavanja automatima dovoljni su nam samo automati Murovog tipa. Međutim, problem je u tome što će automati Murovog tipa koji realizuju izvesno automatovno preslikavanje u opštem slučaju imati veći broj stanja od automata Milijevog tipa koji realizuju ta ista preslikavanja. To se vidi iz prethodne teoreme, a biće još jasnije posle narednog primera:

Primer 9.7.2. Razmotrimo automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ sa sledećom prelazno-izlaznom tablicom:

A	a	b	c	d
x_1	a/y_1	c/y_2	a/y_1	b/y_1
x_2	b/y_1	c/y_2	b/y_1	b/y_1

Iz tablice se jasno vidi da se radi o Murovom automatu koji se može predstaviti tablicom:

A	y_1	y_1	y_2	y_2
	a	b	c	d
x_1	a	c	a	b
x_2	b	c	b	b

Primenimo algoritam za minimizaciju automata $\mathcal{A}$ kao Milijevog automata. Dakle, kreirajmo listu svih parova P i krenimo dalje sa algoritmom.

1. korak: Formirajmo relaciju ϱ_1. Ona ima dve klase:

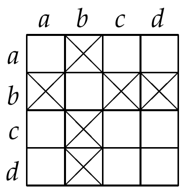
$$\{a,c,d\},\ \{b\}.$$

Prema tome, sa liste brišemo sve parove iz skupa

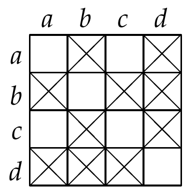
$$\{a,c,d\} \times \{b\} \cup \{b\} \times \{a,c,d\}.$$

2. korak: Proveravamo parove koji leže ispod glavne dijagonale u P posle 1. koraka:

$(cx_1,ax_1) = (a,a)$ – na listi je;
$(cx_2,ax_2) = (b,b)$ – na listi je;
$(dx_1,ax_1) = (b,a)$ – nije na listi, pa se parovi (d,a) i (a,d) brišu;
$(dx_1,cx_1) = (b,a)$ – nije na listi, pa se parovi (d,c) i (c,d) brišu.



posle 1. koraka
pelacija ϱ_1



posle 2. i 3. koraka
relacije $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_{\mathcal{A}}$

3. korak: U ovom koraku ostaje da se proveri samo par (c,a). Kako je $(cx_1,ax_1) = (a,a)$ i $(cx_2,ax_2) = (b,b)$, i oba ova para su na listi, to se u ovom koraku ništa ne brise, što znači da se algoritm zaustavlja.

Dakle, dobili smo da je $\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_{\mathcal{A}}$ i $\varrho_{\mathcal{A}}$-klase su

$$\{a,c\},\ \{b\},\ \{d\},$$

pa je automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ zadat tablicom

$\mathcal{A}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$
x_1	$\overline{a}/y_1$	$\overline{a}/y_2$	$\overline{b}/y_1$
x_2	$\overline{b}/y_1$	$\overline{a}/y_2$	$\overline{b}/y_1$

gde je sa $\overline{q}$ označena $\varrho_{\mathcal{A}}$-klasa stanja $q \in A$.

Primetimo da automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ iz prethodnog primera nije Murovog tipa jer, na primer, važi

$$\delta^{\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}}(\overline{a},x_1) = \overline{a} = \delta^{\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}}(\overline{b},x_1), \;\; \lambda^{\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}}(\overline{a},x_1) = y_1 \neq y_2 = \lambda^{\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}}(\overline{b},x_1).$$

Imajući u vidu da je $\mathcal{A}$ automat Murovog tipa, možemo izvući dva zaključka. Prvo, homomorfna slika Murovog automata ne mora biti Murov automat. Drugo, minimizacijom Murovog automata, korišćenjem algoritma za automate Milijevog tipa, ne dobijamo uvek Murov automat. To nas dalje navodi na zaključak da, kada radimo sa Murovim automatima, treba drugačije definisati pojmove homomorfizma i kongruencije i naći drugačiji algoritam za minimizaciju, koji bi kao rezultat dao Murov automat. To činimo u daljem tekstu.

Neka su $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta^A,\mu^A)$ i $\mathcal{B} = (B,X,Y,\delta^B\mu^B)$ dva Murova automata istog tipa. Preslikavanje $\varphi : A \to B$ takvo da za svaki $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$\varphi(\delta^A(a,x)) = \delta^B(\varphi(a),x) \qquad \text{i} \qquad \mu^A(a) = \mu^B(\varphi(a)),$$

nazivamo *homomorfizmom Murovog automata* $\mathcal{A}$ u Murov automat $\mathcal{B}$, ili *homomorfizmom Murovog tipa*. Sa druge strane, relaciju ekvivalencije τ na Murovom automatu $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta^A,\mu^A)$ nazivamo *kongruencijom na Murovom automatu*, ili *kongruencijom Murovog tipa* na $\mathcal{A}$, ako za sve $a,b \in A$ iz $(a,b) \in \tau$ sledi

(1) $\mu^A(a) = \mu^A(b)$;
(2) $(ax,bx) \in \tau$, za svaki $x \in X$.

Nije teško proveriti da homomorfna slika Murovog automata, u odnosu na homomorfizam Murovog tipa, takođe jeste Murov automat, i da jezgro homomorfizma Murovog tipa jeste kongruencija Murovog tipa. Obratno, ako je τ kongruencija Murovog tipa na Murovom automatu $\mathcal{A}$, tada je faktorskup $\mathcal{A}/\tau$ i sam Murov automat sa funkcijama prelaza i znaka

$$\delta^{A/\tau} : (A/\tau)\times X \to A/\tau \qquad \text{i} \qquad \mu^{A/\tau} : A/\tau \to Y$$

definisanim sa:

$$\delta^{A/\tau}(\tau_a,x) = \tau_{\delta^A(a,x)} \qquad \text{i} \qquad \mu^{A/\tau}(\tau_a) = \mu(a),$$

za $a \in A$, $x \in X$. Lako se proverava da se i za homomorfizme i kongruencije Murovog tipa može formulisati i dokazati Teorema o homomorfizmu.

Odnos kongruencija Milijevog i Murovog tipa prikazuje sledeća lema:

Lema 9.7.3. *Ako je ϱ kongruencija Murovog automata $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\mu)$, onda je ϱ takođe i kongruencija Milijevog automata $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$, gde je*

$$\lambda(a,x) = \mu(\delta(a,x)), \qquad \textit{za sve } a \in A \textit{ i } x \in X.$$

Dokaz: Neka su $a,b \in A$ takvi da je $(a,b) \in \varrho$ i $x \in X$. Tada je $(\delta(a,x),\delta(b,x)) \in \varrho$, i odakle sledi da je $\mu(\delta(a,x)) = \mu(\delta(b,x))$, odnosno $\lambda(a,x) = \lambda(b,x)$. Time smo dokazali da je ϱ kongruencija Milijevog automata. □

Slično kao kod automata Milijevog tipa dokazujemo sledeće:

Teorema 9.7.4. *Za proizvoljan Murov automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\mu)$, relacija $\tau_{\mathcal{A}}$ na $\mathcal{A}$ definisana sa*

$$(a,b) \in \tau_{\mathcal{A}} \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in \varrho_{\mathcal{A}} \;\; i \;\; \mu(a) = \mu(b),$$

je najveća kongruencija Murovog tipa na $\mathcal{A}$.
Definišimo niz $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija na $\mathcal{A}$ sa

$$\tau_1 = \{(a,b) \in A \times A \,|\, \mu(a) = \mu(b)\}$$

$$\tau_{k+1} = \{(a,b) \in \tau_k \,|\, (\forall x \in X)\,(ax,bx) \in \tau_k\}.$$

Tada važi sledeće:

(a) *Svaki član niza $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je relacija ekvivalencije na A i važi*

$$\tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \cdots \supseteq \tau_k \supseteq \tau_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq \tau_{\mathcal{A}}.$$

(b) *Ako je $\tau_k = \tau_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\tau_k = \tau_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.*

(c) *Ako je $\mathcal{A}$ konačan automat, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\tau_k = \tau_{\mathcal{A}}$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 9.6.1., pa će biti izostavljen. □

Murov automat $\mathcal{A}$ takav da je $\tau_{\mathcal{A}} = \Delta_A$ nazivamo *Murovski redukovanim automatom* .

Algoritam za minimizaciju automata Murovog tipa, tj. za određivanje kongruencije $\tau_{\mathcal{A}}$, zasnovan na prethodnoj teoremi, analogan je algoritmu za minimizaciju automata Milijevog tipa koji je dat u prethodnom poglavlju.

Algoritam 9.7.5. (*Minimizacija Murovog automata*) Ulaz ovog algoritma je Murov automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\mu)$, a izlaz je redukovani automat $\mathcal{A}/\tau_{\mathcal{A}}$, tj. minimalni Murov automat ekvivalentan sa $\mathcal{A}$.

Postupak se sastoji u konstrukciji opadajućeg niza $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$, čiji su članovi niza predstavljeni listom P parova stanja.

(A1) U prvom koraku najpre formiramo listu P svih parova stanja automata $\mathcal{A}$, a potom formiramo relaciju τ_1 brišući sa liste P sve parove (a,b) za koje je $\mu(a) \neq \mu(b)$.

(A2) Posle $k$tog koraka neka je konstruisana relacija τ_k, odnosno neka je formirana lista kojom je predstavljena ta relacija.

(A3) U narednom koraku gradimo relaciju τ_{k+1} na taj način što razmatramo sve parove (a,b) koji su na početku tog koraka bili na listi P, i ukoliko proverom ustanovimo da postoji $x \in X$ tako da par (ax,bx) na početku tog koraka nije bio na listi, onda sa liste brišemo parove (a,b) i (b,a).

(A4) Algoritam se završava prvim korakom u kome nije bilo brisanja sa liste. Svi parovi koji su u tom trenutku na listi P čine relaciju $\tau_{\mathcal{A}}$, i dalje formiramo odgovarajući faktor skup i na njemu definišemo funkcije prelaza i izlaza pomoću formule (9.7), i na taj način dobijamo minimalni Murov automat $\mathcal{A}/\tau_{\mathcal{A}}$.

Primenu ovog algoritma ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 9.7.6. Razmotrimo ponovo Murov automat $\tau_{\mathcal{A}}$ iz Primera 9.7.2. Potsetimo se da je on zadat tablicom

$\mathcal{A}$	y_1	y_1	y_2	y_2
	a	b	c	d
x_1	a	c	a	b
x_2	b	c	b	b

Formirajmo najpre listu P svih parova stanja automata $\mathcal{A}$, a potom krenimo sa formiranjem relacija τ_k.

1. korak: Formirajmo relaciju τ_1. Iz tablice se vidi da ona ima dve klase:

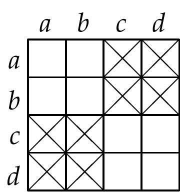
$$\{a,b\},\ \{c,d\}.$$

Prema tome, sa liste brišemo sve parove iz skupa

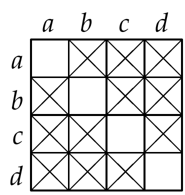
$$\{a,b\} \times \{c,d\} \cup \{c,d\} \times \{a,b\}.$$

2. korak: Proveravamo parove koji su posle 1. koraka ostali na listi P ispod njene glavne dijagonale:

$(bx_1,ax_1) = (c,a)$ – nije na listi, pa se brišu parovi (b,a) i (a,b);
$(dx_1,cx_1) = (b,a)$ – nije na listi, pa se brišu parovi (d,c) i (c,d).



posle 1. koraka
relacija τ_1



posle 2. koraka
relacija $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_2 = \Delta_A$

Ovim su obrisani svi parovi, osim onih na glavnoj dijagonali, što znači da se algoritam zaustavio i da je $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_2 = \Delta_A$, odnosno da je automat $\mathcal{A}$ redukovan kao Murov automat. Međutim, kao što smo videli u Primeru 9.7.2., ovaj automat nije redukovan kao automat Milijevog tipa, što znači da se minimizacijom Murovog automata algoritmom za automate Milijevog tipa ne dobija automat Murovog tipa, ali se dobija ekvivalentan automat sa manjim brojem stanja od onog koji bi se dobio korišćenjem algoritma za minimizaciju automata Murovog tipa.

Na kraju ovog poglavlja dokazujemo još jednu zanimljivu teoremu koja kaže pod kojim uslovima za Murovski redukovani automat postoji ekvivalentan Milijev automat sa manjim brojem stanja.

Teorema 9.7.7. *Neka je $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta^A, \mu^A)$ Murovski redukovan konačan automat. Tada postoji njemu ekvivalentan automat Milijevog tipa sa manjim brojem stanja ako i samo ako postoje dva različita stanja $a, b \in A$ tako da je $\delta^A(a, x) = \delta^A(b, x)$, za svako $x \in X$.*

Dokaz: Neka postoji Milijev automat $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta^B, \lambda^B)$ ekvivalentan sa $\mathcal{A}$ takav da je $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$. Odatle zaključujemo da $\mathcal{A}$ nije redukovan kao automat Milijevog tipa, tj. da je $\varrho_{\mathcal{A}} \neq \Delta_A$. Međutim, to znači da postoje bar dva različita stanja $a, b \in A$ takva da je $(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$, što dalje povlači da je

$$(\delta^A(a, x), \delta^A(b, x)) \in \varrho_{\mathcal{A}} \quad \text{i} \quad \mu^A(\delta^A(a, x)) = \mu^A(\delta^A(b, x)),$$

za svaki $x \in X$. Sa druge strane, prema definiciji kongruencije $\tau_{\mathcal{A}}$ dobijamo da je $(\delta^A(a, x), \delta^A(b, x)) \in \tau_{\mathcal{A}}$, i kako je, prema pretpostavci, $\tau_{\mathcal{A}} = \Delta_A$, to imamo da je $\delta^A(a, x) = \delta^A(b, x)$, za svaki $x \in X$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka postoje dva različita stanja $a, b \in A$ tako da za svaki $x \in X$ važi $\delta^A(a, x) = \delta^A(b, x)$. To znači da je $(a, b) \in \varrho_{\mathcal{A}}$, pa je, prema tome, $\Delta_A = \tau_{\mathcal{A}} \subset \varrho_{\mathcal{A}}$, što znači da je $|\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}| < |\mathcal{A}|$. □

Iz prethodne teoreme sledi da je pre minimizacije Murovog automata neophodno proveriti da li je ispunjen uslov prethodne teoreme. Ako je ispunjen, tada je preporučljivo izvršiti minimizaciju tog automata kao automata Milijevog tipa, jer će minimalni Milijev automat $\mathcal{A}/\varrho_{\mathcal{A}}$ imati manji broj stanja od minimalnog Murovog automata $\mathcal{A}/\tau_{\mathcal{A}}$.

9.8. Kompozicija automata

Jedan od glavnih metoda koji se primenjuju u izučavanju matematičkih struktura je *metod kompozicije* (*slaganja*), koji se sastoji u tome da se od datih jednostavnijih struktura izgradi neka složenija struktura koja će te date strukture imati kao svoje komponente. Taj metod je veoma aktuelan i u teoriji automata. Ovde ćemo prikazati nekoliko najvažnijih metoda za kompoziciju automata. Više informacija o drugim kompozicionim metodima u teoriji automata, kao i o odgovarajućim dekompozicionim metodima, može se naći u literaturi navedenoj na kraju ovog odeljka.

Neka su dati automati

$$\mathcal{A}_1 = (A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1) \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}_2 = (A_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$$

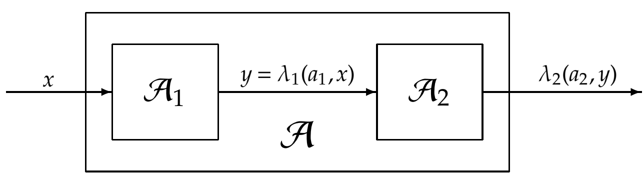
takvi da je $Y_1 \subseteq X_2$. Stavimo da je

$$A = A_1 \times A_2,\ X = X_1,\ Y = Y_2,$$

i definišimo funkcije $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\delta((a_1, a_2), x) = (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)))$$
$$\lambda((a_1, a_2), x) = \lambda_2\big(a_2, \lambda_1(a_1, x))$$

gde je $(a_1, a_2) \in A$ i $x \in X$. Tada automat $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ nazivamo *superpozicijom* (*nadovezivanjem*) *automata* $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Sličnu definiciju možemo dati i za proizvoljan konačan skup automata $\mathcal{A}_i = (A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ koji zadovoljava uslov: $Y_i \subseteq X_{i+1}$, za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Inače, superpozicija automata je algebarska interpretacija za takozvanu *serijsku vezu* realnih automata. Naime, ulazni signal prilikom ulaska u automat $\mathcal{A}$ biva najpre prihvaćen automatom $\mathcal{A}_1$, koji se nalazi u stanju a_1, posle čega automat $\mathcal{A}_1$ prelazi u stanje $\delta_1(a_1, x)$, a na izlaz tog automata se šalje izlazni signal $y = \lambda_1(a_1, x)$. Taj signal je istovremeno ulazni signal automata $\mathcal{A}_2$, jer je $Y_1 \subseteq X_2$, pa automat $\mathcal{A}_2$ prelazi iz stanja a_2 u stanje $\delta_2(a_2, y)$, a na njegov izlaz se šalje signal $\lambda_2(a_2, y)$, koji je istovremeno i izlazni signal automata $\mathcal{A}$. To je prikazano na Slici 9.8.1.



Slika 9.8.1

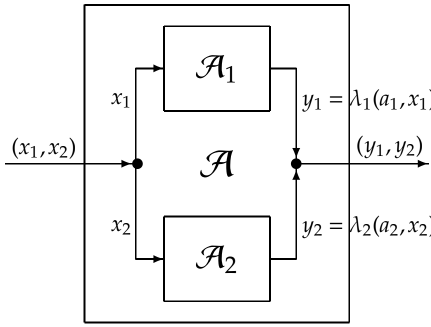
Polazeći od datih automata $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$, osim njihove superpozicije, možemo konstruisati i neke druge automate. Naime, stavimo da je

$$A = A_1 \times A_2,\ X = X_1 \times X_2,\ Y = Y_1 \times Y_2,$$

i definišimo preslikavanja $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\delta((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = (\delta_1(a_1, x_1), \delta_2(a_2, x_2))$$
$$\lambda((a_1, a_2), (x_1, x_2)) = (\lambda_1(a_1, x_1), \lambda_2(a_2, x_2)),$$

gde su $(a_1,a_2) \in A$ i $(x_1,x_2) \in X$. Tada automat $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ nazivamo *direktnim proizvodom automata* $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Slično definišemo direktan proizvod proizvoljne familije automata. Primetimo da direktan proizvod automata jeste matematička interpretacija *paralelne veze* realnih automata. Princip rada ovakvog automata prikazan je na Slici 9.8.2.



Slika 9.8.2

Kao što se vidi sa slike, ulazni signal automata $\mathcal{A}$ se cepa u dva signala x_1 i x_2, od kojih prvi ide kao ulazni signal u automat $\mathcal{A}_1$, a drugi u $\mathcal{A}_2$. Usled toga, automat $\mathcal{A}_1$ prelazi iz stanja a_1 u stanje $\delta_1(a_1,x_1)$, pri čemu se emituje izlazni signal $y_1 = \lambda_1(a_1,x_1)$, dok automat $\mathcal{A}_2$ iz stanja a_2 prelazi u stanje $\delta_2(a_2,x_2)$ i emituje se izlazni signal $y_2 = \lambda_2(a_2,x_2)$. Na kraju, izlazni signali y_1 i y_2 se spajaju i formira se izlazni signal (y_1,y_2) automata $\mathcal{A}$.

Na kraju, dajemo još jedan metod za kompoziciju automata. Neka je data familija $\mathcal{A}_i = (A_i,X,Y,\delta_i,\lambda_i)$, $i \in I$, automata istog tipa. Ne umanjujući opštost konstrukcije koju ćemo dati, možemo uzeti da su skupovi stanja A_i po parovima disjunktni, tj. da je $A_i \cap A_j = \emptyset$, kadgod je $i \neq j$. Naime, u suprotnom umesto sa skupovima A_i, $i \in I$, možemo raditi sa skupovima $A'_i, i \in I$, gde je za svaki $i \in I$ skup A'_i dat sa $A'_i = A_i \times \{i\}$. Dalje, stavimo da je

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

i definišimo preslikavanja $\delta : A \times X \to A$ i $\lambda : A \times X \to Y$ sa:

$$\delta(a,x) = \delta_i(a,x)$$
$$\lambda(a,x) = \lambda_i(a,x)$$

ako je $a \in A_i$, za $i \in I$. Tada je $\mathcal{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ automat i za svaki $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ je podautomat od $\mathcal{A}$. Automat $\mathcal{A}$ nazivamo *direktnom sumom* automata $\mathcal{A}_i$, $i \in I$.

9.9. Zadaci

9.9.1. Konstruisati Murov automat koji određuje ostatak prilikom deljenja sa 3 broja datog u binarnom zapisu.

9.9.2. Konstruisati Milijev automat koji za binarni broj x sa n cifara izračunava binarni broj $2^n - x$.

9.9.3. Konstruisati Milijev (Murov) automat koji sabira dva binarna broja.

9.9.4. Konstruisati Milijev automat čiji je ulazni i izlazni alfabet skup $\{x, y\}$ i koji na izlazu daje ulazni signal koji je učitan dva koraka ranije.

9.9.5. Konstruisati Milijev automat sa ulaznim alfabetom $\{x, y\}$ i izlaznim $\{a, b, c\}$. Funkcija prelaza određena je na sledeći način: ako se ulazna reč završava sa xx izlaz je a, ako se ulazna reč završava sa yyy izlaz je b, u svim ostalim slučajevima izlaz je c.

9.9.6. Da li je funkcija $\phi : X^* \to X^*$, gde je $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$, koja dekadnom zapisu broja a dodeljuje dekadni zapis broja a^2, automatovno preslikavanje?

9.9.7. Da li je funkcija $\phi : X^* \to X^*$, gde je $X = \{x, y\}$, data sa

$$\phi(x_1x_2\cdots x_{2k}) = x_1x_1x_2x_2\cdots x_kx_k,$$
$$\phi(x_1x_2\cdots x_{2k+1}) = x_1x_1x_2x_2\cdots x_kx_kx_{k+1}$$

automatovno preslikavanje?

9.9.8. Neka je $\phi : X^* \to Y^*$ automatovno preslikavanje. Dokazati da je relacija θ definisana na X^* sa

$$(u, v) \in \theta \Leftrightarrow \phi_u = \phi_v$$

kongruencija.

9.9.9. Neka su X i Y konačni skupovi. Ako je $|X| \geqslant 2$ tada postoji konačan automat $\mathcal{A} = (A, a_0, X, \delta)$ takav da za svako preslikavanje $\lambda : A \times X \to Y$ Milijev automat $(A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ nije redukovan.

9.9.10. Dokazati da za proizvoljan skup Φ automatovnih preslikavanja iz X^* u Y^*, gde su X i Y proizvoljni alfabeti, postoji automat $\mathcal{A}$ takav da je $\Phi \subseteq \Phi_{\mathcal{A}}$.

9.9.11. Pod *težinom* automatovnog preslikavanja ϕ, u oznaci $w(\phi)$, podrazumevamo kardinalni broj skupa stanja donjeg automata $\mathcal{A}_\phi$. Ukoliko je $w(\phi)$ konačan, za preslikavanje ϕ kažemo da je *konačne težine*.

Ako su ϕ' i ϕ'' automatovna preslikavanja konačnih težina, tada je i $\phi'\phi''$ automatovno preslikavanje konačne težine i važi $w(\phi'\phi'') \leqslant w(\phi')w(\phi'')$.

9.9.12. Dati su skupovi $V = \{x, y\}$, $W = \{0, 1\}$ i preslikavanje $f : V^* \to W$ na sledeći način

$$f(u) = \begin{cases} 1, & |u|_x = |u|_y \\ 0, & |u|_x \neq |u|_y \end{cases}, \qquad \text{za } u \in V^*.$$

Definišemo preslikavanje $\alpha : V^* \to W^*$ sa $\alpha(a_1 a_2 \cdots a_n) = f_1 f_2 \cdots f_n$, gde je $f_i = f(a_1 a_2 \cdots a_i)$, $a_i \in V$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

(a) Da li je α automatovno preslikavanje?

(b) Da li se α može realizovati konačnim Milijevim automatom?

9.9.13. Konstruisati minimalni automat koji realizuje automatovno preslikavanje $\alpha : \{x, y\}^* \to \{x, y\}^*$ definisano sa

$$\alpha(x_1 x_2 \ldots x_n) = \begin{cases} x_1 x_2 \ldots x_n, & \text{ako je } x_1 = x; \\ x_1^c x_2^c \ldots x_n^c, & \text{ako je } x_1 = y, \end{cases}$$

gde je

$$x_i^c = \begin{cases} x, & x_i = y; \\ y, & x_i = x. \end{cases}$$

Literatura

1. J. A. Anderson, Diskretna matematika sa kombinatorikom, Računarski fakultet, Beograd, i CET, Beograd, 2005.
2. J. A. Anderson, Automata Theory with Modern Applications, Cambridge University Press, New York, 2006.
3. M. A. Arbib, Algebraic Theories of Abstract Automata, Prentice Hall, 1969.
4. M. A. Arbib (ed.), Algebraic Theory of Machines, Languages, and Semigroups, Academic Press, New York - London, 1968.
5. D. D. Aufenkamp, F. E. Hohn, Analysis of sequential machines, IRE Trans. Electronic Comput. 6 (1957) 276–285.
6. G. Birkhoff, Lattice Theory, third ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.
7. S. Bogdanović, M. Ćirić, Polugrupe, Prosveta, Niš, 1993.
8. A. Š. Bloh, On problems solvable by sequential machines, Probl. kibernetiki 3 (1960) 81–88 (in Russian).
9. S. Burris, H. P. Sankappanavar, A course in universal algebra, Springer-Verlag, New York, 1981.
10. C. S. Calude, E. Calude, B. Khoussainov, Finite nondeterministic automata: Simulation and minimality, Theoretical Computer Science 242 (2000) 219–235.
11. C. Câmpeanu, N. Sântean, S. Yu, Mergible states in large NFA, Theoretical Computer Science 330 (2005) 23–34.
12. J. Carroll, D. Long, Theory of Finite Automata with an Introduction to Formal Languages, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
13. C. G. Cassandras, S. Lafortune, Introduction to Discrete Event Systems, Springer, 2008.
14. J.-M. Champarnaud, F. Coulon, NFA reduction algorithms by means of regular inequalities, Theoretical Computer Science 327 (2004) 241–253.
15. I. Chiswell, A Course in Formal Languages, Automata and Groups, Springer-Verlag, London, 2009.
16. N. Chomsky, Three models for the description of languages, IRE Trans. on Information Theory 2 (1956) 113–124.
17. N. Chomsky, On certain formal properties of grammars, Information and Control 2 (1959) 137–167.
18. N. Chomsky, Context-free grammars and pushdown storage, Quaterly Prog. Rept. 65, MIT Res. Lab. Elect. Cambridge Mass (1962) 187–194.

19. N. Chomsky, M. P. Schützenberger, The algebraic theory of context-free languages, in: Computer Programming and Formal Systems (Braffort, P. and D. Hirchberg, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1963, pp. 118–161.
20. A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semi groups, vol. 1, Amer. Math. Soc., 1961.
21. A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semi groups, vol. 2, Amer. Math. Soc., 1967.
22. M. Ćirić, M. Droste, J. Ignjatović, H. Vogler, Determinization of weighted finite automata over strong bimonoids, Information Sciences 180 (2010) 3497–3520.
23. M. Ćirić, J. Ignjatović, M. Bašić, I. Jančić, Nondeterministic automata: equivalence, bisimulations, and uniform relations, Information Sciences 261 (2014) 185–218.
24. M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Uniform fuzzy relations and fuzzy functions, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1054–1081.
25. M. Ćirić, J. Ignjatović, N. Damljanović, and M. Bašić, Bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 186 (2012) 100-139.
26. M. Ćirić, J. Ignjatović, I. Jančić, N. Damljanović, Computation of the greatest simulations and bisimulations between fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 208 (2012) 22–42.
27. M. Ćirić, T. Petković, S. Bogdanović, Jezici i automati, Prosveta, Niš, 2000.
28. M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Factorization of fuzzy automata, In: Csuhaj-Varju, E., Ésik, Z. (eds.), FCT 2007, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4639 (2007) 213–225.
29. M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata, Journal of Computer and System Sciences 76 (2010) 609–633.
30. J. H. Conway, Regular Algebra and Finite Machines, Chapman & Hall, London, 1971.
31. D. Cvetković, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
32. D. Cvetković, S. Simić, Diskretna matematika - matematika za kompjuterske nauke, Drugo izdanje, Prosveta, Niš, 1996.
33. N. Cutland, Computability - An Introduction to Recursive Function Theory, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
34. N. Damljanović, M. Ćirić, J. Ignjatović, Bisimulations for weighted automata over an additively idempotent semiring, Theoretical Computer Science 534 (2014) 86–100.
35. I. Dolinka, Kratak uvod u analizu algoritama, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2008.
36. A. Dovier, C. Piazza, A. Policriti, An efficient algorithm for computing bisimulation equivalence, Theoretical Computer Science 311 (2004) 221–256.
37. S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Volume A, Academic Press, New York - London, 1974.
38. S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Volume B, Academic Press, New York - London, 1976.
39. S. S. Epp, Discrete Mathematics with Applications, Thomson - Brooks/Cole, 2004.
40. R. J. Evey, The theory and application of pushdown store machines, in: Mathematical Linguistics and Automatic Translation, NSF-IO, Harvard University, 1963, 217–255.
41. F. Gécseg, Products of automata, EATCS Monographs in Theor. Comput. Sci. Vol. 7, Springer-Verlag, Berlin-Haidelberg, 1986.

42. F. Gécseg, I. Peák, Algebraic Theory of Automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
43. A. Gill, Comparison of finite-state models, IRE Trans. Circuit Theory 7 (2) (1960) 178–179.
44. A. Gill, Introduction to the theory of finite-state machines, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
45. A. Ginzburg, Algebraic theory of automata, Academic Press, New York, 1968.
46. S. Ginsburg, An introduction to mathematical machine theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
47. S. Ginsburg, The mathematical theory of context-tree languages, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
48. S. Ginsburg, Algebraic and Automata - Theoretic Properties of Formal Languages, North-Holland, Amsterdam, 1975.
49. S. Ginsburg, H. G. Rice, Two families of languages related to ALGOL, J. Assoc. Comp. Machinery 9 (1962) 350–371.
50. V. M. Glushkov, The Abstract Theory of Automata, Russian Mathematical Surveys 16(1961) 1–53.
51. W. L. M. Holcombe, Algebraic Automata Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
52. J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison-Wesley, Reading, 2001.
53. J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Addison-Wesley, Reading, 1979.
54. J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices, Information Sciences 178 (2008) 164–180.
55. J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, Fuzzy homomorphisms of algebras, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 2345–2365.
56. J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, T. Petković, Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1288-1324.
57. L. Ilie, S. Yu, Algorithms for computing small NFAs, in: K. Diks et al. (eds): MFCS 2002, Lecture Notes in Computer Science 2420 (2002) 328–340.
58. L. Ilie, S. Yu, Reducing NFAs by invariant equivalences, Theoretical Computer Science 306 (2003) 373–390.
59. L. Ilie, G. Navarro, S. Yu, On NFA reductions, in: J. Karhumäki et al. (eds): Theory is Forever, Lecture Notes in Computer Science 3113 (2004) 112–124.
60. L. Ilie, R. Solis-Oba, S. Yu, Reducing the size of NFAs by using equivalences and preorders, in: A. Apostolico, M. Crochemore, and K. Park (Eds): CPM 2005, Lecture Notes in Computer Science 3537 (2005) 310–321.
61. M. Ito, Algebraic Theory of Automata and Languages, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2004.
62. Z. Jančić, M. Ćirić, Brzozowski type determinization for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 249 (2014) 73–82.
63. Z. Jančić, J. Ignjatović, M. Ćirić, An improved algorithm for determinization of weighted and fuzzy automata, Information Sciences 181 (2011) 1358–1368.
64. Z. Jančić, I. Micić, J. Ignjatović, M. Ćirić, Further improvements of determinization methods for fuzzy finite automata, Fuzzy Sets and Systems (2016), DOI: 10.1016/j.fss.2015.11.019.

65. B. Khoussainov, A. Nerode, Automata Theory and Its Applications, Birkhauser, Boston, 2001.
66. D. C. Kozen, Automata and Computability, Springer, 1997.
67. S. Y. Kuroda, Classes of Languages and Linear Bounded Automata, Information and Control 7 (2) (1964) 207–223.
68. G. Lallement, Semigroups and Combinatorial Applications, Willey Interscience, New York, 1979.
69. P. S. Landweber, Three Theorems on Phrase Structure Grammars of Type 1, Information and Control 6 (2) (1963) 131–136.
70. M. V. Lawson, Finite Automata, Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2004.
71. A. A. Letičevskiĭ, Automaton partitions by mappings of free semigroups, Zhurn. Vychisl. Matem. Mat. Fiz. 2 (1962), 467–474 (in Russian).
72. A. A. Letičevskiĭ, Alphabet mappings and finite automata, Teor. konechnyh i veroyatnostnyh avtomatov (Moskva, 1965), 250–252 (in Russian).
73. A. A. Letičevskiĭ, On mininization of finite automata, Kibernetika (1965), no. 1, 20–23 (in Russian).
74. W. J. M. Levelt, An Introduction to the Theory of Formal Languages and Automata, John Benjamins Publishing Company, Amsterdam / Philadelphia, 2008.
75. P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publisher, Sudbury, MA, 2001.
76. S. Lombardy, On the construction of reversible automata for reversible languages, In: P. Widmayer et al. (eds.), ICALP 2002, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 2380 (2002) 170–182.
77. S. Lombardy, J. Sakarovitch, Derivatives of rational expressions with multiplicity, Theoretical Computer Science 332 (2005) 141–177.
78. R. Sz. Madarász, S. Crvenković, Uvod u teoriju automata i formalnih jezika, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1995.
79. I. Micić, Z. Jančić, J. Ignjatović, M. Ćirić, Determinization of fuzzy automata by means of the degrees of language inclusion, IEEE Transactions on Fuzzy Systems (2015), doi:10.1109/TFUZZ.2015.2404348.
80. J. Myhill, Finite automata and the representation of events, Wright Air Development Command Technical Report 57–624 (1957) 112–137.
81. J. Myhill, Linear-bounded Automata, Wright Air Develop. Div. Tech. Note (1960) 60–165.
82. G. H. Mealy, A method for synthesizing sequential circuits, Bell. System. Techn. J. 34 (1955) 1045–1049.
83. R. Milner, A calculus of communicating systems, Lecture Notes in Computer Science, vol. 92, Springer, Berlin, 1980.
84. E. F. Moore, Gedanken-experiments on sequential machines, in: Automata studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds), Princeton, 1956, pp. 129–153.
85. R. Paige, R. E. Tarjan, Three partition refinement algorithms, SIAM Journal on Computing 16 (6) (1987) 973–989.
86. D. Park, Concurrency and automata on infinite sequences, in: P. Deussen (ed.), Proc. 5th GI Conf., Karlsruhe, Germany, Lecture Notes in Computer Science 104 (1981) 167–183.
87. D. Perrin, J.-E. Pin, Infinite Words, Elsevier, 2004.
88. G. N. Raney, Sequential functions, J. Assoc. Comp. Machinery 5 (1958), 177–180.

89. K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Mc Graw Hill, 2003.
90. G. Rozenberg, A. Salomaa (eds), Handbook of Formal Languages, Vol 1,2,3, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
91. J. Sakarovitch, Elements of Automata Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
92. V. N. Saliĭ, Universal algebra and automata, Izd. Saratovskogo Univ., Saratov, 1988 (in Russian).
93. A. Salomaa, Theory of automata, Pergamon Press, Oxford, 1969.
94. A. Salomaa, Formal Languages, Academic Press, New York-London, 1973.
95. A. Salomaa, Computation and Automata, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
96. D. Sangiorgi, On the origins of bisimulation and coinduction, ACM Transactions on Programming Languages and Systems 31 (4) (2009) 111–151.
97. D. Sangiorgi, Introduction to Bisimulation and Coinduction, Cambridge University Press, 2011.
98. D. Sangiorgi, J. Rutten (eds.), Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction, Cambridge University Press, 2011.
99. M. P. Schützenberger, On context-free languages and pushdown automata, Inform. and Control 6 (1963) 217–255.
100. B. Šešelja, Matematika informatike, Institut za Matematiku, Novi Sad, 1990.
101. B. Šešelja, A. Tepavčević, Algebra I, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2000.
102. S. S. Skiena, The Algorithm Design Manual, Springer, London, 2008.
103. A. Stamenković, M. Ćirić, J. Ignjatović, Reduction of fuzzy automata by means of fuzzy quasi-orders, Information Sciences 275 (2014) 168–198.
104. D. Stevanović, S. Simić, M. Ćirić, V. Baltić, Diskretna matematika - Osnove kombinatorike i teorije grafova, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2007.
105. J. Shallit, A Second Course in Formal Languages and Automata Theory, Cambridge University Press, 2009.
106. A. M. Turing, On computible numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., Ser 2, 42 (1936) 230–265, (correction 43 (1936) 544–546).

Indeks oznaka i pojmova