UNIVERZITET U NIŠU

FILOZOFSKI FAKULTET

STUDIJSKA GRUPA ZA MATEMATIKU

DRAGAN S. ĐORĐEVIĆ

TEOREME WEYLOVOG TIPA I UOPŠTENI INVERZI

– DOKTORSKA DISERTACIJA –

NIŠ, 1998.

DRAGAN S. ĐORĐEVIĆ

TEOREME WEYLOVOG TIPA

I UOPŠTENI INVERZI

– *DOKTORSKA DISERTACIJA* –

NIŠ, 1998.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ova doktorska disertacija posvećena je izučavanju *Teorema Weylovog tipa i uopštenim inverzima*, a zasnovana je na originalnim rezultatima. Svi rezultati koji su dokazani u ovoj disertaciji, nalaze se u publikovanim radovima [25, 29, 33, 123], ili u radovima poslatim za publikovanje [26, 27, 30, 31]. Ona je nastavak istraživanja započetog na magistarskim studijama (Harteov doprinos Fredholmovoj teoriji, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, Filozofski fakultet, 1996.). Osnovna oblast kojoj ova disertacija pripada, je *Teorija operatora.* Fredholmova teorija operatora, koju sam izučavao na magistarskim studijama, implicirala je istraživanja i postizanje rezultata u ovoj oblasti. Ova napomena je neophodna za potpunije razumevanje predložene teme. Sa jedne strane Fredholmova teorija operatora inicirala je izučavanje klase operatora koji zadovoljavaju teoremu Weyla (videti dole), a pored toga poznavanje Fredholmove teorije operatora od velike je važnosti za izučavanje teorije Uopštenih inverza sa stanovišta Teorije operatora i Linearne algebre.

Objasnimo sada na koju se teoremu Weyla odnose istraživanja u ovoj disertaciji. Neka su nadalje T i S ograničeni linearni operatori na kompleksnom beskonačno-dimenzionalnom Banachovom prostoru X i označimo sa $\sigma(T)$ spektar od T. Za samokonjugovan operator na Hilbertovom prostoru postoji (verovatno) samo jedan rezonski način da se definiše esencijalni spektar σ_e, a to je skup σ_l svih tačaka spektra osim izolovanih sopstvenih vrednosti konačne višestrukosti. Klasična Weylova teorema [H. Weyl, Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), 373–392; Jbuch 40, 395] tvrdi da ako su T i S samokonjugovani operatori i S kompaktan operator, tada je $\sigma_l(T+S) = \sigma_l(T)$. Za samokonjugovane operatore lako se dokazuje da je $\sigma_l(\cdot)$ najveći podskup spektra sa ovom osobinom. To je motivacija za druge definicije esencijalnog spektra kao najvećeg podskupa spektra koji je invariantan u odnosu na proizvoljne kompaktne ili kompaktno komutirajuće perturbacije, u oznaci $\sigma_\omega(T) = \bigcap\{\sigma(T+S)\colon\ S \text{ kompaktan operator }\}$, ili $\sigma_b(T) = \bigcap\{\sigma(T+S) :\ TS =$

$ST,\ S$ kompaktan operator$\}$. Prva definicija daje poznati Weylov (Schechterov) esencijalni spektar, a druga je Browderov esencialni spektar.

Četvrti način za definiciju esencijalnog spektra proizvoljnog operatora T je da se uzme komplement skupa svih s za koje operator $s - T$ ima izvesna Fredholmova svojstva. Napomenimo da je operator T semi-Fredholmov ako je slika $\mathcal{R}(T)$ od T zatvoren podskup i, ako je još, ili $\alpha(T) < \infty$ ($\alpha(T) = \dim \mathcal{N}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ je jezgro od T) ili $\beta(T) < \infty$ ($\beta(T)$ je kodimenzija od $\mathcal{R}(T)$); kaže se da je T Fredholmov operator ako je $\alpha(T) < \infty$ i $\beta(T) < \infty$. Ako je T semi-Fredholmov operator, *indeks* od T, $i(T)$, definiše se sa $i(T) = \alpha(T) - \beta(T)$, i ima značajnu ulogu u Teoriji operatora. M. Schechter [Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 365–367; MR 30#5167] je dokazao da je $\sigma_\omega(T)$ komplement u $\sigma(T)$ od $\{s \in \mathbb{C}\colon\ s - T$ je Fredholmov operator indeksa nula$\}$. Imajući u vidu osobine samokonjugovanih operatora prirodno je navesti da neki operator T na Banachovom prostoru ispunjava (zadovoljava) Weylovu teoremu ako je $\sigma_\omega(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$, gde je $\pi_{00}(T)$ skup izolovanih tačaka skupa $\sigma(T)$ koje su sopstvene vrednosti konačne višestrukosti. Rezultati u ovom smeru su izuzetno brojni, videti na primer [K. Gustafson, Michigan Math. J. 19 (1972), 71–81], ili [V. Rakočević, Esencijalni spektar i Banachove algebre, Doktorska disetacija, Univerzitet u Beogradu, Prirodno–matematički fakultet, 1983]. Izmedju ostalog, rezultati ovih istraživanja primenjuju se u teorijskoj fizici i konturnim problemima za sisteme običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Operator T na Banachovom prostoru kaže se da ispunjava a-Weylovu teoremu (ovo se može nazvati teorema Weylovog tipa) ako je $\sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) \setminus \pi_{a0}(T)$, gde je $\sigma_a(T)$ aproksimativni tačkasti spektar operatora T, $\pi_{a0}(T)$ skup sopstvenih vrednosti operatora T konačne geometrijske višestrukošti, i te sopstvene vrednosti su izolovane tačke u $\sigma_a(T)$, a $\sigma_{ea}(T)$ je esencijalni aproksimativni tačkasti spektar operatora T (V. Rakočević, On one subset of M. Schechter's essential spectrum, Mat. Vesnik, 5(18)(33) (1981), no. 4, 389–391; V. Rakočević, On the essential approximate point spectrum. II. Mat. Vesnik, 36 (1984), no. 1, 89–97). Poznato je da ako operator zadovoljava a-Weylovu teoremu, onda on zadovoljava i Weylovu teoremu, a da obrnuto nije u opštem slučaju tačno (V. Rakočević, Operators obeying a-Weyl's theorem, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (1989), no. 10, 915–919.) Rezultati iz radova [25, 29, 33] odnose se na izučavanje klase operatora koji zadovoljavaju Weylovu i a–Weylovu teoremu. Razmatraju se kvazihiponormalni operatori, i pored ranije navedenih esencijalnih spektara i Browderov esencijalni aproksimativni spektar (V. Rakočević, Approximate point spectrum and commuting compact perturbations, Glasgow Math.J. 28 (1986), no. 2, 193–198). Rezultati se odnose na: teoreme o preslikavanju spektara ili delova spektara analitičkim funkcijama, perturbacije konačno dimenzionalnim ili nilpotentnim operatorima, uopštenu invertibilnost operatora, i primene ovih rezultata i metoda na posebne klase operatora. Delovi istraživanja iz radova [30, 31, 123, 124], u vezi su sa prethodnim istraživanjima, i sa drugim delom disertacije koji se odnosi na uopštenu invertibilnost. Ovde bi se izučavao pristup uopštenoj invertibilnosti zasnovan na klasičnim radovima radovima Moorea, Penrosea i Drazina a u vezi sa aktuelnim istraživanjima iz Teorije operatora, Linearne algebre, Teorije aproksimacija i Numeričke analize (videti na primer [S.R. Caradus, Generalized Inverse and Operator Theory, Kingston, Ontario, Queen's University, 1978] ili [C. W. Groetsch, Generalized Inverse of Linear Operators, Representation and Approximation, Marcell Dekker, Inc., New York and Basel, 1977]).

Neki rezultati odnose se na Fredholmovu teoriju i uopštene inverze, prema originalnim rezultatima iz radova [26, 27, 28], a istraživanje je inspirirsano najnovijim dostignućima iz oblasti *perturbacije spektara* [D. Hong-Ke, P. Jin, Proc. Amer. Math. Soc. 121, (1994); J. K. Han, H, Y. Lee, Proc. Amer. Math. Soc.]; *semi-Browderovih spektara kvazisličnih operatora* [Z. Yan, Kobe J. Math. 8 (1991); D. A. Herrero, Canad. J. Math. 40 (1988)]; *konzistentnih operatora* [W. Gong, D. Han, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994)]. U ovoj disertaciji uopšteni su mnogi rezultati iz pomenutih radova, a istraživanje obuhvata i neke nove pristupe u ovim oblastima.

Svi rezultati izloženi su u četiri glave.

U prvoj glavi, **Uvodu**, prikazani su neophodni pojmovi i stavovi koji se koriste.

Druga glava posvećena je **teoremama Weylovog tipa** i bliskim oblastima Fredholmove teorije operatora na Banachovim i Hilbertovim prostorima, koja je inicirana radovima profesora Rakočevića [100, 101, 102]. Do sada je objavljeno oko četrdeset radova iz ove oblasti u poznatim međunarodnim časopisima. U prvom odeljku izučavamo **a-Weylovu teoremu i preslikavanja spektara** regularnim funkcijama. Odeljak je urađen prema delovima rada [29], a pretstavlja uopštenja rezultata iz radova Oberaia [89, 90], uz neke originalne pristupe i metode. Glavni rezultati jesu Teorema 2.1, Teorema 2.3, Teorema 2.5 i Posledica 2.6. U ovom odeljku se generališu novim metodama neki rezultati Prasannae [97]. Teorema 2.7 i Posledica 2.8 ovog odeljka su deo rada [33]. Naredni odeljak povezuje **grupni inverz i a-Weylovu teoremu**. Pokazuje se da egzistencija grupnog inverza nekog operatora implicira niz tvrđenja relevantnih za Weylovu teoremu. Ovaj odeljak predstavlja generalizaciju rada [81]. Originalni rezultati Teorema 2.10 i Teorema 2.11 sadržani su u radu [25]. U ovoj glavi izložen je i odeljak posvećen **perturbacionim rezultatima**. Proučavane su perturbacije komutirajućim nilpotentnim i konačno dimenzionalnim operatorima. U ovom odeljku generalisani su radovi [90] i [82]. Originalni rezultati jesu Teorema 2.13, Teorema 2.15 iz rada [29], Teorema 2.16 i Teorema 2.17 iz rada [25]. Neke specijalne klase operatora igraju značajnu ulogu prilikom izučavanja teorema Weylovog tipa. Najvažniji razlog je taj što je u opštem slučaju teško odrediti da li određen operator zadovoljava neku od teorema Weylovog tipa. Stoga, proučavamo **kvazihiponormalne operatore** na Hilbertovom prostoru. Rezultati se odnose (sada i u ovom specijalnom slučaju) na teoreme o preslikavanjima spektara i delova spektara, kao i operatora (funkcionalnim računom). U ovoj sekciji generališemo rezultate iz radova [37], [90], [82], [118]. Originalni rezultati su Teorema 2.20, Teorema 2.21 iz rada [29], kao i Teorema 2.22 i Teorema 2.23 iz rada [25]. Posebno je interesantno problem prirodan za operatore na Banachovom ili Hilbertovom prostoru, posmatrati opštije, u Banachovim algebrama. U odeljku **Apstraktna razmatranja** obrađena je Weylova teorema u primitivnim Banachovim algebrama. Originalni rezultati Teorema 2.27 i Teorema 2.29 nalaze se u radu [25].

Treća glava **Generalisani inverzi**, posvećena je reprezentaciji, izračunavanju i karakterizaciji generalisanih inverza i raznih veličina vezanih za generalisane inverze. Obrađeni su refleksivni generalisani inverzi i Moore-Penroseov inverz operatora na Hilbertovim prostorima i Drazinov inverz operatora na Banachovim prostorima. Takođe izvesna pažnja posvećena je i Drazinovom inverzu u Banachovim algebrama. Deo rezultata se odnosi na **dekompoziciju potpunog ranga** uopšteno invertibilnih operatora u smislu Bouldina [14] i Caradusa [18]. Originalni rezultati su Teorema 3.4 i Teorema 3.5, gde su opisane razne potklase skupa svih refleksivnih generalisanih inverza, kao i težinski Moore-Penroseov inverz operatora na Hilbertovom prostoru. Originalni rezultati su preuzeti iz rada [30]. U odeljku **Teoreme Groetchovog tipa** pokazan je način za izračunavanje raznih skupova generalisanih inverza ograničenog operatora, uz korišćenje dekompozicije potpunog ranga i Groetchove reprezentacione teoreme [46]. Do sada nema sličnih pristupa u poznatoj lieraturi. Originalni rezultati ove sekcije jesu Teorema 3.7, Posledica 3.8, Propozicija 3.9, Teorema 3.10, koji predstavljaju deo rada [30]. Napominjemo da je u ovom odeljku uopšten rad [123]. U odeljku **Drazinov inverz i uopštenja** razmatrane su reprezentacije Drazinovog i generalisanog Drazinovog inverza elemenata u Banachovim algebrama, i operatora na Banachovim prostorima. Proučavana je karakterizacija Drazinovog indeksa elementa u Banachovoj algebri u termima egzistencije određenih graničnih procesa. Takođe, pokazan je odnos egzistencije Drazinovog inverza operatorske matrice u zavisnosti od egzistencije Drazinovog inverza ulaznih operatora te matrice. Odeljak je preuzet iz radova [31, 26]. Originalni rezultati su Teorema 3.15, Teorema 3.16, Teorema 3.19, Propozicija 3.20, Teorema 3.22, Teorema 3.26 i Teorema 3.27.

Poslednja, četvrta glava, odnosi se na **uopštene inverze i Fredholmovu teoriju**. U ovoj glavi su međusobno isprepletani razni rezultati, koji su prirodni nastavak istraživanja iz prethodne dve glave.

Obrađene su **perturbacije spektara specijalnih gornje trougaonih matrica**, čiji elementi jesu operatori na Banachovim ili Hilbertovim prostorima. Podsticajna tačka je rad [68]. U ovom odeljku proučavane su perturbacije mnogih delova spektra koji se javljaju u Fredholmovoj teoriji. Originalni rezultati Teorema 4.3, Teorema 4.4, Posledica 4.5, Teorema 4.6 i Teorema 4.7 odnose se na aproksimativni tačkasti spektar i defektni spektar operatora. Rezultati Teorema 4.9, Posledica 4.10, Posledica 4.11, Propozicija 4.12 i Propozicija 4.13 odnose se na esencijalni, levi i desni Fredholmov spektar operatora. Na Browderov spektar se odnose Teorema 4.14 i Teorema 4.15. Svi rezultati opisani do sada u ovom odeljku čine rad [26]. Esencijalni i Weylov spektar operatora na Banachovom prostoru opisani su u originalnim rezultatima Teorema 4.17, Posledica 4.18, Teorema 4.20 i Posledica 4.22. U drugom odeljku četvrte glava istražuju se **semi-Browderovi spektri kvazisličnih operatora**. Odeljak predstavlja uopštenje rada [131]. Poznato je da su spektri kvazisličnih operatora u opštem slučaju različiti, i stoga je prirodno posmatrati razne delove spektra, kao što je semi-Browderov spektar. Originalni rezultati ovog odeljka Teorema 4.25, Teorema 4.26, Posledica 4.27, Posledica 4.28, Posledica 4.30, Teorema 4.32, Posledica 4.32 i Teorema 4.34 nalaze su radu [27]. Poslednji odeljak četvrte glave posvećen je istraživanju **konzistentnih operatora**. Istraživanje je inicirano radom [44], ali po svojoj sadržini i obimu prevazilazi polazne ideje. Naime, u ovom odeljku je uvedena veoma opšta definicija operatora konzistentnih u nekom skupu. Razmatrani su operatori konzistentni u skupu: invertibilnih operatora, levo ili desno invertibilnih operatora, Fredholmovih operatora, levo ili desno Fredholmovih, Weylovih i Browderovih operatora. Originalni rezultati jesu Teorema 4.36, Teorema 4.39, Teorema 4.42, Teorema 4.43, Teorema 4.44, Teorema 4.45, Posledica 4.46, Posledica 4.47, Posledica 4.48, Teorema 4.49, Teorema 4.51, Teorema 4.52 i Teorema 4.53.

1. GLAVA

UVOD

U ovoj glavi pomenućemo osnovne pojmove i oznake iz funkcionalne analize i teorije operatora, koje kasnije koristimo. Izložena teorija je preuzeta iz dobro poznate i bogate literature [2, 4, 5, 7, 10, 11, 17, 18, 19, 34, 35, 36, 43, 47, 52, 57, 65, 78, 87, 88, 104, 109, 110, 111, 116, 122, 126, 127, 133].

Topološke oznake. U ovoj disertaciji zadržane su standardne oznake topoloških pojmova. Za podskup K topološkog prostora $\mathcal{T}$, $\operatorname{int} K$ označava unutrašnjost, $\operatorname{acc} K$ označava skup svih tačaka nagomilavanja, $\overline{K}$ označava zatvorenje, ∂K označava rub (granicu) skupa K, $\operatorname{iso} K$ označava skup izolovanih tačaka skupa K..

Dimenzija. Ako je V vektorski prostor, onda je $\dim(V)$ njegova dimenzija. U slučaju kada je V Banachov prostor, onda važi sledeća standardna konvencija: $\dim V = \infty$ prosto označava da je V beskonačno dimezionalan Banachov prostor, pri čemu se ne upuštamo u razmatranje kardinalnosti algebarske baze prostora V. Međutim, ako je V Hilbertov prostor, onda $\dim V$ *uvek* označava Hilbertovu dimenziju prostora V.

Operatori i spektri. Neka su X i Y kompleksni beskonačno dimenzionalni Banachovi prostori, $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachov prostor svih ograničenih operatora iz X u Y, a $\mathcal{L}(X)$ je Banachova algebra svih ograničenih operatora na X. Za $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ neka je $\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ jezgro, a $\mathcal{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ slika operatora T. Takođe, $\alpha(T) = \dim \mathcal{N}(T)$ i $\beta(T) = \dim X/\mathcal{R}(T)$.

Kažemo da je zatvoren potprostor M prostora X komplementaran u X, ako postoji zatvoren potprostor N od X, tako da važi

$$X = M \oplus N.$$

U tom slučaju postoji jedinstvena projekcija $P \in \mathcal{L}(X)$ sa X na M paralelno sa N, odnosno $P^2 = P$, $\mathcal{R}(P) = M$ i $\mathcal{N}(P) = N$.

$\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{G}_l(X)$ i $\mathcal{G}_r(X)$, redom, označava skup svih invertibilnih, levo invertibilnih i desno invertibilnih operatora na X. Dobro je poznato da $T \in \mathcal{G}_l(X)$ ako i samo ako je $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ a $\mathcal{R}(T)$ je zatvoren i komplementaran potprostor od X. Takođe, $T \in \mathcal{G}_r(X)$ ako i samo ako je $\mathcal{R}(T) = X$ i $\mathcal{N}(T)$ je komplementaran potprostor od X.

Sa $\mathcal{K}(X)$ označavamo (zatvoreni dvostrani) ideal svih kompaktnih operatora na X. Takođe, $\mathcal{F}(X)$ označava (dvostrani) ideal svih konačno dimenzionalnih operatora na X. Calkinova algebra na Banachovom prostoru X je količnička algebra $\mathcal{C}(X) = \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$, a $\pi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{C}(X)$ je prirodni algebarski epimorfizam.

Spektar operatora T je $\sigma(T)$, a rezolventni skup je $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$.

Tačkasti spektar operatora T je skup $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \dim \mathcal{N}(\lambda - T)\}$.

Sa $\sigma_a(T)$ označavamo aproksimativni tačkasti spektar operatora $T \in \mathcal{L}(X)$, definisanog na sledeći način:

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ nije 1–1 sa zatvorenom slikom}\}.$$

Očigledno važi $\sigma_p(T) \subset \sigma_a(T)$.

Defektni spektar operatora T definisan je kao

$$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ nije surjekcija }\}.$$

Dobro je poznato da važi $\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T) \cap \sigma_d(T)$.

Uspon i pad operatora. Za $T \in \mathcal{L}(X)$ sledeći lanci inkluzija su očigledni:

$$\{0\} \subset \mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2) \subset \cdots, \qquad X = \mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(T^2) \supset \cdots.$$

Najmanji broj $n \geq 0$ (ako postoji) za koji važi $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})$, naziva se *uspon (rast, engl. ascent)* operatora T i u tom slučaju pišemo $\operatorname{asc}(T) = n$. Ukoliko ni jedan takav n ne postoji, kažemo da je T beskonačnog rasta i pišemo $\operatorname{asc}(T) = \infty$. Analogno, najmanji broj $n \geq 0$, (ako postoji), za koji važi $\mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1})$, naziva se *pad (engl. descent)* operatora T i u tom slučaju pišemo $\operatorname{des}(T) = n$. Ukoliko ni jedan takav n ne postoji, kažemo da je T beskonačnog pada i pišemo $\operatorname{des}(T) = \infty$.

Ako je $\operatorname{asc}(T) < \infty$ i $\operatorname{des}(T) < \infty$, onda je $\operatorname{asc}(T) = \operatorname{des}(T) = p$. U tom slučjau je $X = \mathcal{R}(T^p) \oplus \mathcal{N}(T^p)$ i ova dekompozicija redukuje operator T. Takođe, $\operatorname{asc}(T) = \operatorname{des}(T) = p < \infty$ ako i samo ako je tačka $\lambda = 0$ pol reda p rezolvente $\lambda \to (\lambda - A)^{-1}$. Ova činjenica je posebno relevantna kada je u pitanju Drazinov inverz operatora T.

Semi-Fredholmovi operatori. Od posebnog interesa u teoriji operatora su semi-Fredholmovi i Fredholmovi operatori. Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je Fredholmov, ako je:

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T), \quad , \alpha(T) < \infty \quad \text{i} \quad \beta(T) < \infty.$$

Operator $\in \mathcal{L}(X, Y)$ je semi-Fredholmov, ako je $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$ i: $\alpha(T) < \infty$, ili $\beta(T) < \infty$. Specijalno, skup gornjih semi-Fredholmovih operatora označavamo sa $\Phi_+(X, Y)$ i definišemo kao

$$\Phi_+(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : \mathcal{R}(T) \text{ je zatvoren i } \alpha(T) < \infty\},$$

a skup donjih semi-Fredholmovih operatora označavamo sa $\Phi_-(X, Y)$ idefinišemo kao

$$\Phi_-(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : \mathcal{R}(T) \text{ je zatvoren i } \beta(T) < \infty\}.$$

Skupovi $\Phi_+(X, Y)$, $\Phi_-(X, Y)$ i $\Phi(X, Y)$ su otvoreni. Takođe, skupovi $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ i $\Phi(X)$ su multiplikativne semigrupe.

Za $T \in \mathcal{L}(X)$ Atkinsonova teorema tvrdi da je $T \in \Phi(X)$ ako i samo ako je $\pi(T)$ invertibilan elemenat u Calkinocoj algebri $\mathcal{C}(X)$.

Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je levo Fredholmov, ako je $T \in \Phi_+(X, Y)$ i $\mathcal{R}(T)$ je komplementaran poptprostor od Y. Sa $\Phi_l(X, Y)$ označavamo skup svih levo Fredholmovih operatora iz $\mathcal{L}(X, Y)$. Skup $\Phi_l(X, Y)$ je otvoren skup u $\mathcal{L}(X, Y)$. Ako je $T \in \mathcal{L}(X)$, onda je $T \in \Phi_l(X)$ ako i samo ako je $\pi(T)$ levo invertibilan u $\mathcal{C}(X)$. Skup $\Phi_l(X)$ je multiplikativna semigrupa u $\mathcal{L}(X)$.

Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je desno Fredholmov, ako je $T \in \Phi_-(X, Y)$ i $\mathcal{N}(T)$ je komplementaran potprostor od X. Sa $\Phi_r(X, Y)$ označavamo skup svih desno Fredholmovih operatora iz $\mathcal{L}(X, Y)$. Skup $\Phi_r(X, Y)$ je otvoren podskup od $\mathcal{L}(X, Y)$. Ako je $T \in \mathcal{L}(X)$, onda je $T \in \Phi_r(X)$ ako i samo ako je $\pi(T)$ desno invertibilan u $\mathcal{C}(X)$. Skup $\Phi_r(X)$ je mutliplikativna semigrupa u $\mathcal{L}(X)$.

Indeks operatora $T \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ definisan je sa $i(T) = \alpha(T) - \beta(T)$. Preslikavanje $T \to i(T)$ je neprekidna funkcija na $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$. Preciznije, $T \to i(T)$

je konstanta na svakoj povezanoj komponenti skupa semi-Fredholmovih operatora. Takođe, ako je $T, S, TS \in \Phi_+(X)$(ili$\Phi_-(X)$) onda je $i(TS)i(T) + i(S)$.

Od posebnog interesa su Fredholmovi operatori indeksa nula, ili Weylovi operatori: $\Phi_0(X) = \{T \in \Phi(X) : i(T) = 0\}$. Skup Weylovih operatora $\Phi_0(X)$ takođe čini muliplikativnu otvorenu semigrupu. Ekvivalentno, T je Weylov operator ako i samo ako je $T = A + K$, gde je A invertibilan operator, a $K \in \mathcal{K}(X)$.

Od posebnog interesa jesu i sledeći skupovi [100]:

$$\Phi_+^-(X) = \{T \in \Phi_+(X) : i(T) \leq 0\}, \quad \Phi_-^+(X) = \{T \in \Phi_-(X) : i(T) \geq 0\}.$$

Operator T je Browderov (Riesz-Schauderov), ako je $T \in \Phi(X)$ i $\mathrm{asc}(T) = \mathrm{des}(T) < \infty$. Jedan od ekvivalenata je da se T može napisati kao suma $T = A + K$, gde je A invertibilan operator, $K \in \mathcal{K}(X)$ i $K = KA$. Sa $\mathcal{B}(X)$ označavamo skup svih Browderovih operatora na X. Klase gornjih i donjih semi-Browderovih operatora definisane su, redom, na sledeći način [57, 105, 106]:

$$\mathcal{B}_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : \mathrm{asc}(T) < \infty\}, \quad \mathcal{B}(X) = \{T \in \Phi_-(X) : \mathrm{des}(T) < \infty\}.$$

Skupovi $\mathcal{B}_+(X)$ i $\mathcal{B}_-(X)$ su otvoreni podskupovi od $\mathcal{L}(X)$.

Esencijalni spektri. Skup

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi(X)\}.$$

naziva se Fredholmov esencijalni spektar (često samo esencijalni spektar). Na osnvou Atkinsonove teoreme je

$$\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T)).$$

Skupovi $\Phi_+(X)$ i $\Phi_-(X)$ definišu gornji i donji semi-Fredholmov spektar na sledeći način:

$$\sigma_{le}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_+(X)\} \text{ i } \sigma_{re}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

Primetimo da je $\sigma_e(T) = \sigma_{le}(T) \cup \sigma_{re}(T)$.

Katoov esencijalni spektar je skup

$$\sigma_k(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)\} = \sigma_{le}(T) \cap \sigma_{re}(T).$$

Često se koristi i oznaka $\sigma_k(T) = \sigma_{lre}(T)$. Weylov esencijalni spektar se definiše u odnosu na semigrupu Weylovih operatora:

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_0(X)\}.$$

Dobro je poznato da je Weylov spektar najveći podskup spektra, koji je invarijantan za perturbacije kompaktnim operatorima, odnosno važi

$$\sigma_w(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T + K).$$

Browderov esencijalni spektar je definisan kao:

$$\sigma_b(T) = \bigcap_{\substack{K \in \mathcal{K}(X) \\ TK = KT}} \sigma(T + K).$$

To je najveći podskup spektra $\sigma(T)$, koji je invarinantan za kompaktne komutativne perturbacije operatora T. Ekvivalentno,

$$\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \mathcal{B}(X)\}.$$

Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar operatora T definisan je kao najveći deo aproksimativnog tačkastog spektra, koji je invarijantan za perturbacije kompaktnim operatorima [100]. Drugim rečima:

$$\sigma_{ea}(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_a(T + K).$$

Dobro je poznato da važi

$$\sigma_{ea}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_+^-(X)\}.$$

Browderov esencijalni aproksimativni tačkasti spektar operatora T definisan je na sledeći način [101]:

$$\sigma_{ab}(T) = \bigcap_{\substack{K \in \mathcal{K}(X) \\ TK = KT}} \sigma_a(T + K).$$

To je najveći podskup aproksimativnog tačkastog spektra, koji je invarijantan za sve kompaktne komutativne perturbacije operatora T. Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar i esencijalni Browderov tačkasti spektar povezani su na sledeći način:

$$\sigma_{ab}(T) = \sigma_{ea}(T) \cup \operatorname{acc}\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \mathcal{B}_+(X)\}.$$

Spektar σ_{ab} nazivaćemo gornjim semi-Browderovim spektrom, po analogiji sa gornjim semi-Fredholmovim spektrom.

Dualno, donji semi-Browderov spektar, ili Browderov esencijalni defektni spektar operatora T je definisan kao:

$$\sigma_{db}(T) = \bigcap_{\substack{K \in \mathcal{K}(X) \\ TK=KT}} \sigma_d(T+K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \mathcal{B}_-(X)\}.$$

Svi navedeni spektri jesu neprazni i kompaktni podskupovi skupa $\sigma(T)$.

Generalisani inverzi. Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je g-invertibilan (ili relativno regularan) ako postoji operator $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, tako da je $TST = T$. U tom slučaju kažemo da je S g-inverz operatora T. Dobro je poznato da je T g-invertibilan, ako i samo ako je $\mathcal{R}(T)$ zatvoren i $\mathcal{N}(T)$ i $\mathcal{R}(T)$ su komplementarni potprostori od X i Y redom. Specijalno, ako su X i Y Hilbertovi prostori, onda je $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ g-invertibilan ako i samo ako je $\mathcal{R}(T)$ zatvoren potprosor od Y. Ako je S g-inverz operatora T, onda je TS projekcija na $\mathcal{R}(T)$, a $I - ST$ je projekcija na $\mathcal{N}(T)$. Kažemo da je S g_2-inverz operatora T, ako važi $TST = T$ i $STS = S$. Ako je S g-inverz od T, onda je STS g_2-inverz od T.

Kada se razmatraju operatroi na Hilbertovim prostorima X i Y, i ako je $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, od posebnog je značaja Moore-Penroseov inverz operatora T, označen sa $T^\dagger$, koji je definisan kao jedino rešenje jednačina

$$TT^\dagger T = T,\ T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger,\ (TT^\dagger)^* = TT^\dagger,\ (T^\dagger T)^* = T^\dagger T.$$

Poznato je da $T^\dagger \in \mathcal{L}(Y,X)$ postoji ako i samo ako je $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$.

Ako je $a \in \mathcal{A}$, onda je Drazinov inverz od a elemenat $b \in \mathcal{A}$ koji zadovoljava uslove:

$$bab = b, \quad ab = ba, \quad a^{k+1}b = a^k,$$

za neki nenegativan ceo broj k. Najmanji k u prethodnoj definiciji jeste Drazinov indeks elementa a, koji ćemo označavati sa s-ind(a). Dobro je poznato da ako Drazinov inverz od a postoji, onda je on jedinstven i označava se sa a^D. Dobro je poznato da a^D postoji ako i samo ako je $\lambda = 0$ pol rezolvente $\lambda \to (\lambda - a)^{-1}$ i tada je s-ind(a) red tog pola. Ako je s-ind$(a) = 0$, onda je a invertibilan i $a^D = a^{-1}$. Ako je s-ind$(a) = 1$, onda se a^D često naziva grupni inverz od a i označava $a^{\#}$.

Drazinov inverz za matrice uvek postoji. Međutim, ako je X beskonačno dimenzionalan Banachov prostor i $A \in \mathcal{L}(X)$, tada postoji Drazinov inverz od A ako i samo ako A ima konačoan uspon i pad, i tada je $p = \mathrm{asc}(A) = \mathrm{des}(A) = s\text{-ind}(A)$. U tom slučaju postoji dekompozicija prostora $X = \mathcal{N}(A^p) \oplus \mathcal{R}(A^p)$ i u odnosu na nju matrično predstavljanje operatora A je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je restrikcija $A_1 = A|_{\mathcal{N}(A^p)} : \mathcal{N}(A^p) \to \mathcal{N}(A^p)$ nilpotentan operator, a $A_2 = A|_{\mathcal{R}(A^p)} : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$ je invertibilan operator, i tada je

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Rieszovi operatori. Operator T je Rieszov, ako i samo ako $\lambda - T \in \Phi(X)$ za svako $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Svaki kompaktan operator je i Rieszov operator. Važi sledeća, opštija karakterizzacija: T je Rieszov operator, ako i samo ako je $\lambda - T \in \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Holmorfne funkcije i funkcionalni račun. Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$. Sa $\mathcal{H}(a)$ označavamo familiju svih kompleksnih funkcija, koje su definisane i holomorfne (regularne) u oklini spektra $\sigma(a)$ elementa a. Neka je $f \in \mathcal{H}(a)$ i γ proizvoljna pozitivno orijentisana kontura u domenu definisanosti funkcije f. Sa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - a)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

(takozvanim funkcionalni računom) definisan je elemenat $f(a) \in \mathcal{A}$. Preslikavanje $f \to f(a)$ je homomorfizam iz algebre $\mathcal{H}(a)$ u algebru $\mathcal{A}$. Dobro je poznato da se

$f(a)$ nalazi u dvostrukom komutantu elementa a. Drugim rečima, za svako $b \in \mathcal{A}$, iz $ab = ba$ sledi $f(a)b = bf(a)$.

Specijalno, neka je $\mathrm{Hol}(a)$ skup svih funkcija iz $\mathcal{H}(a)$, koje nisu konstantne na povezanim komponentama svog domena definisanosti. Funkcija $f \in \mathrm{Hol}(a)$ može imati samo konačno mnogo nula u kompaktnom skupu $\sigma(a)$, na primer $\mu_1, \dots, \mu_n$. Pri tome je svaka nula napisana onoliko puta kolika je njena višestrukost. Takođe, postoji neka funkcija $g \in \mathcal{H}(a)$, koja nema nula u okolini kompakta $\sigma(a)$ i za svako z u zajedničkom domenu funkcija f i g važi:

$$f(z) = (z - \mu_1) \cdots (z - \mu_n) g(z).$$

Na osnovu osobina funkcionalnog računa sledi da važi:

$$f(a) = (a - \mu_1) \cdots (a - \mu_n) g(a).$$

Elemenat $g(a)$ je invertibilan i svi elementi na desnoj strani prethodnog izraza međusobno komutiraju (preciznije, jesu u dvostrukom komutantu elementa a).

2. GLAVA

TEOREME WEYLOVOG TIPA

Daleke 1909. godine H. Weyl je proučavao esencijalni spektar samoadjungovanih operatora na Hilbertovom prostoru [128]. Izložićemo savremeni prikaz njegovih rezultata.

Neka je H Hilbertov prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovani operator, a $\sigma(T)$ spektar operatora T. Od posebnog interesa je posmatrati najveći deo spektra $\sigma(T)$ koji je invarijantan za kompaktne perturbacije operatora T, odsnosno skup

$$\sigma_w(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T+K).$$

Danas je $\sigma_w(T)$ poznat kao Weylov spektar operatora T. Sa $\pi_{00}(T)$ označavamo skup izolovanih sopstvenih vrednosti operatora T konačne geometrijske višestrukosti, odnosno

$$\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda - T) < \infty\}.$$

Weyl je pokazao da važi

$$\sigma_e(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T). \tag{1}$$

Od tada za svaki ograničen operator T na proizvoljnom Banachovom prostoru, kažemo da važi Weylova teorema ako važi jednakost (1).

Rakočević je u svojim radovima [100, 101, 102] (između ostalog) uveo koncept a-Weylove teoreme, koji ćemo ovde izložiti u narednih nekoliko rečenica.

Neka je $\sigma_a(T)$ aproksimativni tačkasti spektar, a $\sigma_{ea}(T)$ esencijalni aproksimativni tačkasti spektar operatora T. U vezi sa a-Weylovom teoremom, posmatramo skup $\pi_{a0}(T)$, koji je definisan na sledeći način:

$$\pi_{a0}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T) \text{ i } 0 < \alpha(\lambda - T) < \infty\}.$$

Za tačku $\lambda \in \pi_{a0}(T)$ kažemo da je izolovana sopstvena vrednost aproksimativnog tačkastog spektra, konačne *geometrijske višestrukosti.*

Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ zadovoljava a-Weylovu teoremu, ili a-Weylova teorema važi za operator T, ako je ispunjena jednakost:

$$\sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) \backslash \pi_{a0}(T).$$

Najvažnija veza između Weylove i a-Weylove teoreme je sledeća: ako ograničen operator T na Banachovom prostoru zadovoljava a-Weylovu teoremu, onda zadovoljava i Weylovu teoremu. Obratno tvrđenje u opštem slučaju ne važi.

Napomenimo da su Weylova, a-Weylova teorema i neposredno povezane oblasti izučavane u mnogim radovima [8, 9, 23, 25, 29, 32, 33, 37, 39, 40, 50, 51, 63, 79, 80, 81, 82, 89, 90, 97, 100, 101, 102, 107, 115, 118, 119, 128].

Osnovni cilj istraživanja u ovoj glavi jeste a-Weylova teorema, a izloženi rezultati su sadržani u radovima [25, 29, 33].

a-WEYLOVA TEOREMA I PRESLIKAVANJA SPEKTARA

Sledeći rezulti pokazani su u članku [29] i oni se odnose na a-Weylovu teoremu i generalizaciju tvrđenja Oberaija. Podsetimo se da $\mathcal{H}(T)$ označava skup svih kompleksnih funkcija koje su definisane i regularne u nekoj okolini spektra $\sigma(T)$, dok $\mathrm{Hol}(T)$ je ograničen na skup funkcija iz $\mathcal{H}(T)$, koje nisu konstantne na povezanim komponentama svog domena.

Teorema 2.1. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ i $f \in Hol(T)$. Tada*

$$\sigma_a(f(T)) \backslash \pi_{a0}(f(T)) \subset f(\sigma_a(T) \backslash \pi_{a0}(T)).$$

Dokaz. Dobro je poznato da aproksimativni tačkasti spektar zadovoljava teoremu o spektralnom preslikavanju (videti na primer [57])

$$f(\sigma_a((T)) = \sigma_a(f(T)).$$

Pretpostavimo da $\lambda \in \sigma_a(f(T))\backslash\pi_{a0}(f(T)) \subset f(\sigma_a(T))$. Razmotrićemo tri slučaja:

Slučaj I. Neka λ nije izolovana tačka skupa $f(\sigma_a(T))$. Na osnovu kompaktnosti skupa $\sigma_a(T)$ postoji konvergentan niz različitih tačaka (μ_n) u skupu $\sigma_a(T)$, tako da je $\lim_{n\to\infty} f(\mu_n) = \lambda$ i $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$. Sada je $\lambda = f(\mu_0) \in f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T))$.

Slučaj II. Pretpostavimo da je λ izolovana tačka skupa $f(\sigma_a(T))$, ali λ nije sopstvena vrednost operatora $f(T)$. Dobro je poznato da regularna funkcija, koja nije konstanta na povezanim komponentama svoga domena, može imati samo konačno mnogo nula na kompaktnom skupu. Stoga postoji funkcija $g \in \mathcal{H}(T)$, koja nema nula u nekoj okolini skupa $\sigma(T)$, i postoje brojevi $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \sigma(T)$, tako da za svako z u nekoj okolini od $\sigma(T)$ važi:

$$f(z) - \lambda = (z - \mu_1) \cdots (z - \mu_n) g(z).$$

Na osnovu pretpostavke $\lambda \in f(\sigma_a(T))$ sledi da bar jedna od tačaka μ_j pripada skupu $\sigma_a(T)$. Recimo da je $\mu_1 \in \sigma_a(T)$. Sada, na osnovu dobro poznatih osobina funkcionalnog računa, sledi da je $g(T)$ invertibilan operator i možemo pisati

$$f(T) - \lambda = (T - \mu_1) \cdots (T - \mu_n) g(T). \tag{2}$$

Takođe je dobro poznato da operatori na desnoj strani izraza (2) uzajamno komutiraju. Kako λ nije sopstvena vrednost operatora $f(T)$, sledi da ni jedna od tačaka $\mu_1, \ldots, \mu_n$ nije sopstvena vrednost operatora T. Prema tome, zaključujemo sledeće:

$$\lambda = f(\mu_1) \in f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)).$$

Slučaj III. U ovom polsednjem slučaju, kao jedina mogućnost preostaje pretpostavka da λ jeste sopstvena vrednost operatora $f(T)$, ali je njena geometrijska višestrukost beskonačna, odnosno $\alpha(\lambda - f(T)) = \infty$. Vratimo se opet reprezentaciji

$$f(T) - \lambda = (T - \mu_1) \cdots (T - \mu_n) g(T).$$

Kako je λ sopstvena vrednost od $f(T)$ beskonačne višestrukosti i svi operatori $T - \mu_j$ komutiraju sa $g(T)$, sledi da postoji neki μ_i, tako da je μ_i sopstvena vrednost od T beskonačne višestrukosti. Sada je $\mu_i \in \sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)$ i $\lambda = f(\mu_i) \in f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T))$. Ovim je tvrđenje teoreme pokazano. $\square$

Oberai je uveo pojam *izoloidnog operatora* na sledeći način:

Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je izoloidan, ako su sve izolovane tačke spektra $\sigma(T)$ sopstvene vrednosti operatora T, odnosno ako je $\operatorname{iso}\sigma(T) \subset \sigma_p(T)$.

Analogno ovoj definiciji, uvodimo pojam a-izoloidnog operatora.

Definicija. Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je a-izoloidan, ako sve izolovane tačke skupa $\sigma_a(T)$ jesu sopstvene vrednosti operatora T, odnosno ako je $\operatorname{iso}\sigma_a(T) \subset \sigma_p(T)$.

Poznato je da važi inkluzija $\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$ [104]. Prema tome, sve izolovane tačke skupa $\sigma(T)$ jesu takođe izolovane tačke skupa $\sigma_a(T)$. Sada je lako zaključiti da *svaki a-izoloidan operator takođe jeste i izoloidan.*

Inkluzija u prethodnoj Teoremi 2.1 postaje jednakost, ako se pretpostavi da je operator T a-izoloidan.

Teorema 2.2. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ a-izoloidan operator i neka $f \in Hol(T)$ nije konstanta na povezanim komponentama svoga domena. Tada važi*

$$f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)) = \sigma_a(f(T))\backslash\pi_{a0}(f(T)).$$

Dokaz. Imajući u vidu Teoremu 2.1, dovoljno je pokazati inkluziju $\subset$. Neka je

$$\lambda \in f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)) \subset \sigma_a(f(T)).$$

Pretpostavimo da je moguće $\lambda \in \pi_{a0}(f(T))$. Tada je λ izolovana tačka u $\sigma_a(f(T))$ i važi (već dobro poznata) reprezentacija

$$f(T) - \lambda = (T - \mu_1)\cdots(T - \mu_n)g(T)$$

za neke $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \sigma(T)$. Pretpostavimo da je $\mu_i \in \sigma_a(T)$. Kako f nije konstanta na povezanim komponentama svoga domena, odnosno f nije konstanta u okolini tačke μ_i, zaključujemo da μ_i *mora biti izolovana tačka* skupa $\sigma_a(T)$.

Ovaj zaključak sledi na osnovu sledeće opservacije: ako je μ_i tačka nagomilavanja skupa $\sigma_a(T)$, onda postoji niz različitih tačaka $z_k \in \sigma_a(T)$, tako da je $\lim_{k\to\infty} z_k = \mu_i$; iz činjenice da f nije konstanta u okolini tačke μ_i zaključujemo da je $f(z_k)$ niz različitih tačaka skupa $\sigma_a(f(T))$ i $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lambda$; odavde sledi da je λ tačka nagomilavanja skupa $\sigma_a(f(T))$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\lambda \in \pi_{a0}(f(T))$.)

Znači, $\mu_i \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$. Kako je T a-izoloidan, zaključujemo da je μ_i sopstvena vrednost operatora T. Međutim, λ je sopstvena vrednost konačne višestrukosti operatora $f(T)$, odakle sledi da je μ_i sopstvena vrednost konačne višestrukosti operatora T.

Ovim je pokazano sledeće: za svaki $\mu_i \in \sigma_a(T)$ za koji je $f(\mu_i) = \lambda$, sledi da je $\mu_i \in \pi_{a0}(T)$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom

$$\lambda \in f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)). \quad \square$$

Ako je $T \in \mathcal{L}(X)$ i $f \in \mathrm{Hol}(T)$, poznata je da sledeća inkluzija [100]:

$$\sigma_{ea}(f(T)) \subset f(\sigma_{ea}(T)). \tag{3}$$

Takođe je poznato da ova inkluzija može biti prava!

Interesantno je odgovoriti na pitanje: ako za T važi a-Weylova teorema i ako je $f \in \mathrm{Hol}(T)$, pod kojim uslovima a-Weylova teorema važi za $f(T)$? Operatore sa ovom osobinom opisao je Schmoeger u radu [118].

U sledećoj teoremi dajemo neke dovoljne uslove pod kojima: važi jednakost u (3) ako i samo ako $f(T)$ zadovoljava a-Weylovu teoremu.

Teorema 2.3. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ a-izoloidan, T zadovoljava a-Weylovu teoremu i neka $f \in Hol(T)$ nije konstanta na povezanim komponentama svoga domena. Tada $f(T)$ zadovoljava a-Weylovu teoremu ako i samo ako važi*

$$f(\sigma_{ea}(T)) = \sigma_{ea}(f(T)).$$

Dokaz. Uz navedene pretpostavke, na osnovu Teorema 2.1 i 2.2, važi

$$f(\sigma_{ea}(T)) = f(\sigma_a(T)\backslash\pi_{a0}(T)) = \sigma_a(f(T))\backslash\pi_{a0}(f(T)).$$

Skup na desnoj strani jednak je $\sigma_{ea}(f(T))$ ako i samo ako važi

$$f(\sigma_{ea}(T)) = \sigma_{ea}(f(T)). \quad \square$$

Neka je λ izolovana tačka spektra $\sigma(T)$, i neka $E(\lambda, T)$ označava spektralnu projekciju od T koja odgovara tački λ. Kažemo da je tačka λ konačne algebarske višestrukosti, ako je $E(\lambda, T) \in \mathcal{F}(X)$ (konačno dimenzionalni operator). Dobro je poznato da u tom slučaju $\lambda \in \sigma_p(T)$. Označimo sa $\pi_0(T)$ skup izolovanih sopstvenih vrednosti operatora T konačne algebarske višestrukosti, odnosno

$$\pi_0(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) \text{ i } E(\lambda, T) \in \mathcal{F}(X)\}.$$

Primetimo sada da je $\pi_0(T) \subset \pi_{a0}(T)$!

U daljem radu koristićemo sledeći Erovenkov result [39, Теорема 1]:

Propozicija 2.4. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ i $f \in \mathcal{H}(T)$. Ako je $\lambda_0 \in \sigma(T)$ i $f(\lambda_0) = \mu \in \pi_0(f(T))$, tada je $\lambda_0 \in \pi_0(T)$.*

Nastavljamo sa originalnim rezultatima.

Teorema 2.5. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$, $f \in \mathrm{Hol}(T)$ i $\pi_{a0}(f(T)) = \pi_0(f(T))$. Tada je*

$$f(\sigma_a(T) \setminus \pi_{a0}(T)) = \sigma_a(f(T)) \setminus \pi_{a0}(f(T)).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.1, dovoljno je pokazati inkluziju $\subset$. U tu svrhu, neka je

$$\lambda \in f(\sigma_a(T) \setminus \pi_{a0}(T)) \subset \sigma_a(f(T)).$$

Pretpostavimo da $\lambda \in \pi_{a0}(f(T)) = \pi_0(f(T))$. Ako je $\mu \in \sigma(T)$ i $f(\mu) = \lambda$, prema Propoziciji 2.4 sledi $\mu \in \pi_0(T) \subset \pi_{a0}(T)$. Prema tome, za svaki $\mu \in \sigma(T)$, ako je $f(\mu) = \lambda$, onda je $\mu \in \pi_{a0}(T) \subset \sigma_a(T)$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $\lambda \in f(\sigma_a(T) \setminus \pi_{a0}(T))$. $\square$

Sledeći rezultat je neposredna posledica prethodnog razmatranja.

Posledica 2.6. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$, $f \in \mathrm{Hol}(T)$ nije konstanta na povezanim komponentama svoga domena, $\pi_{a0}(f(T)) = \pi_0(f(T))$ i a-Weylova teorema važi za T. Tada a-Weylova teorema važi za $f(T)$ ako i samo ako*

$$f(\sigma_{ea}(T)) = \sigma_{ea}(f(T)).$$

DOKAZ. Ovaj dokaz je isti kao dokaz Teoreme 2.3. □

Generalizovaćemo jedan rezultat Prasannae, koji se odnosi na Weylovu teoremu [97]. Takođe je zanimljivo videti članak Gustafsona [8], koji sadrži slične rezultate.

Uvedimo oznake koje su relevante za ovaj odeljak. Neka je

$$\Delta_+^-(T) = \{\lambda \in \sigma_a(T) : T - \lambda \in \Phi_+^-(X)\}.$$

Sledeći rezultat sadrži dovoljne uslove za operator T, tako da a-Weylova teorema važi za T.

Teorema 2.7. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ operator za koji važi $\pi_{a0}(T) = \pi_0(T)$ i $\Delta_+^-(T) \subset \partial\sigma_a(T)$. Tada a-Weylova teorema važi za T.*

DOKAZ. Preptostavimo da $\lambda \in \pi_{a0}(T) = \pi_0(T)$. Tada je tačka λ konačne algebarske višestrukosti. Dobro je poznato da u tom slučaju važi $X = \mathcal{N}((T-\lambda)^p) \oplus \mathcal{R}((T-\lambda)^p)$ za neki nenegativan ceo broj p [19]. Na osnovu $0 < \dim \mathcal{N}(T - \lambda) < \infty$, sledi $\dim \mathcal{N}((T - \lambda)^p) < \infty$. Odavde sledi $i((T - \lambda)^p) = 0$, odnosno $(T - \lambda)^p \in \Phi_0(X)$. Kako je $\mathcal{R}((T - \lambda)^p) \subset \mathcal{R}(T - \lambda)$, na osnovu dobro poznatih osobina Fredholmovih operatora, zaključujemo da je $T - \lambda \in \Phi(X)$ i $i(T - \lambda) = \frac{1}{p}\, i((T - \lambda)^p) = 0$. Prema tome, $\lambda \in \sigma_a(T)\backslash\sigma_{ea}(T)$.

Sa ciljem da pokažemo suprotnu inkluziju, pretpostavimo sledeće: $\lambda \in \sigma_a(T)\backslash \sigma_{ea}(T)$. Tada je $T - \lambda \in \Phi_+^-(X)$ i $0 < \alpha(T - \lambda) < \infty$. Postoji neki $\epsilon > 0$, tako da za svaki μ za koji je $0 < |\mu - \lambda| < \epsilon$, važi: $\alpha(T - \mu)$ je konstanta ne veća od $\alpha(T - \lambda)$ i, takođe, $T - \mu \in \Phi_+^-(X)$. Na osnovu činjenice $\Delta_+^-(T) \subset \partial\sigma_a(T)$, zaključujemo da otvorena kugla $B(\lambda, \epsilon)$ sa centrom u λ i poluprečnika ϵ, seče skup $\mathbb{C}\backslash\sigma_a(T)$. Sledi da važi $\alpha(T - \mu) = 0$ za sve takve μ. Sada je očigledno da λ mora biti izolovana tačka skupa $\sigma_a(T)$, odakle sledi $\lambda \in \pi_{a0}(T)$. □

Primetimo da ako je skup $\sigma_a(T)$ nigde gust (kao u pretpostavci Prasannae), onda važi inkluzija $\Delta_+^-(T) \subset \partial\sigma_a(T)$ u Teoremi 2.7.

Posledica 2.8. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$. Ako je $\pi_{a0}(T) = \pi_0(T)$ i $\sigma_a(T)$ je nigde gust u $\mathbb{C}$, onda a-Weylova teorema važi za T. Ako je $\pi_{00}(T) = \pi_0(T)$ i $\sigma(T)$ je nigde gust u $\mathbb{C}$, tada Weylova teorema važi za T.*

Dokaz. Dokazaćemo samo drugi deo tvrđenja, koji predstavlja direktnu generalizaciju rezultata Prasannae. Kako je $\sigma(T)$ nigde gust, zaključujemo da važi $\sigma(T) = \partial\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Prema tome, uslovi Teoreme 2.7 su ispunjeni. Sledi da a-Weylova teorema važi za T, prema tome i Weylova teorema važi za T [100]. $\square$

GRUPNI INVERZ I TEOREME WEYLOVOG TIPA

U ovom odeljku razmatraćemo teoreme Weylovog tipa za operatore za koje postoji grupni inverz. Podsetimo da za operator $T \in \mathcal{L}(X)$ postoji grupni inverz, ako je Drazinov indeks operatora T jedna 1, odnosno $\mathcal{R}(T)$ je zatvoren i

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T).$$

Grupni inverz operatora T je komutirajući g_2-inverz operatora T. U nekim radovima [55, 57], za ovakav operator T kaže se da je prosto polaran.

Ovaj odeljak počinjemo korisnim tvrđenjima. Naredno tvrđenje daje dovoljne uslove da neki kompleksan broj λ pripada skupu $\sigma_a(T)\backslash\sigma_{ea}(T)$.

Lema 2.9. *Ako je $\lambda \in \pi_{a0}(T)$ i $\mathcal{R}(T-\lambda)$ je zatvoren, tada*

$$\lambda \in \sigma_a(T)\backslash\sigma_{ea}(T).$$

Dokaz. Ako je $\lambda \in \pi_{a0}(T)$, tada je $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$ i $0 < \alpha(T-\lambda I) < \infty$. Kako je $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ zatvoren, sledi $T-\lambda \in \Phi_+(X)$. Takođe, postoji neki broj $\epsilon > 0$, tako da za sve $\mu \in \mathbb{C}$ važi sledeće: ako je $0 < |\lambda-\mu| < \epsilon$, onda $\alpha(T-\mu I) = 0$ i $\mathcal{R}(T-\mu I)$ je zatvoren. Prema tome, za tako odabrane μ važi $T-\mu I \in \Phi_+^-(X)$. Zbog neprekidnosti indeksa zaključujemo da $T-\lambda I \in \Phi_+^-(X)$ i $\lambda \in \sigma_a(T)\backslash\sigma_{ea}(T)$. $\square$

Iskoristićemo uslov egzistencije grupnog inverza operatora T u narednoj teoremi.

Teorema 2.10. *Ako za operator T postoji grupni inverz, tada za svaki $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ važi: $\lambda \in \sigma_a(T)$ ako i samo ako $\lambda \in \sigma_a(T_1)$, gde je T_1 restrikcija operatora T na invarijantan potprostor $\mathcal{R}(T)$.*

DOKAZ. Pošto je T Drazinovog indeksa 1, važi

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T) \tag{4}$$

i $\mathcal{R}(T)$ je zatvoren potprostor. Označimo sa I_0 i I_1 identičke operatore na potprostorima $\mathcal{N}(T)$ i $\mathcal{R}(T)$ redom. Sada važi $T - \lambda I = (-\lambda I_0) \oplus (T_1 - \lambda I_1)$ u odnosu na dekompoziciju (4). Kako je $\lambda \neq 0$, lako je utvrditi jednakost $\mathcal{N}(T-\lambda I) = \mathcal{N}(T_1-\lambda I_1)$. Prema tome, $T - \lambda I$ je injektivan ako i samo ako je operator $T_1 - \lambda I_1$ injektivan. Takođe, $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)$. Pokazaćemo da je $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ zatvoren ako i samo ako je $\mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)$ zatvoren.

U tu svrhu, pretpostavimo da je $\mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)$ zatvoren i $x \in \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)}$. Tada postoji niz (x_n), $x_n \in X$, tako da važi $\lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n = x$. Neka je $x = u + v$, $x_n = u_n + v_n$, gde su $u, u_n \in \mathcal{N}(T)$ i $v, v_n \in \mathcal{R}(T)$. Neka je P ograničena projekcija sa X na $\mathcal{N}(T)$, tako da je $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(T)$ (projekcija na $\mathcal{N}(T)$ paralelno sa $\mathcal{R}(T)$). Važi

$$u = Px = P \lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n = -\lambda \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Takođe je

$$v = x - u = \lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n - \lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)v_n = \lim_{n\to\infty}(T_1 - \lambda I_1)v_n.$$

Međutim, potprostor $\mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)$ je zatvoren, te postoji vektor $z \in \mathcal{R}(T)$, za koji važi $(T - \lambda I)z = (T_1 - \lambda I_1)z = v$. Sada je

$$(T - \lambda I)\left(-\frac{1}{\lambda}u \oplus z\right) = x.$$

Ovim je pokazano da je $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ zatvoren potprostor.

Sada pretpostavimo da je $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ zatvoren i $x \in \overline{\mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)} \subset \mathcal{R}(T - \lambda I)$. Postoji niz (x_n) u $\mathcal{R}(T)$, tako da je $\lim_{n\to\infty}(T_1 - \lambda I_1)x_n = x$. Takođe je $\lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n = x$. Prema tome, postoji vektor $z \in X$, za koji je $(T - \lambda I)z = x = 0 \oplus x$. Možemo naći $u \in \mathcal{N}(T)$ i $v \in \mathcal{R}(T)$ tako da $z = u + v$. Sada je $0 \oplus x = (T - \lambda I)z = -\lambda u \oplus (T_1 - \lambda I_1)v$. Prema tome, $0 = -\lambda u$ i $(T_1 - \lambda I_1)v = x$.

Prethodna razmatranja pokazuju da je $\lambda \in \sigma_a(T)$ ako i samo ako je $\lambda \in \sigma_a(T_1)$. $\square$

Došli smo do glavnog rezultata u ovom odeljku.

Teorema 2.11. *Pretpostavimo da $T \in \mathcal{L}(X)$ ima Drazinov indeks 1 i pretpostavimo da za svaki konačno dimenzionalan T-invarijantan potprostor M od $\mathcal{R}(T)$ postoji zatvoren T-invarijantan potprostor N od $\mathcal{R}(T)$, tako da je $M \oplus N = \mathcal{R}(T)$. Tada je*

$$\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ea}(T) \subset \pi_{a0}(T).$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ea}(T)$. Razmatramo tri slučaja:

Slučaj I. Ako je $\lambda = 0$, tada je $T \in \Phi_+^-(X)$ i $0 < \alpha(T) < \infty$. Treba još pokazati da je 0 izolovana tačka skupa $\sigma_a(T)$. Na osnovu osobine

$$\sigma_{ab}(T) = \sigma_{ea}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma_a(T) \qquad [101],$$

dovoljno je pokazati $0 \notin \sigma_{ab}(T)$!

Neka je P neprekidna projekcija sa X na $\mathcal{N}(T)$, tako da je $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(T)$. Kako je $\mathcal{N}(T)$ konačno dimenzionalan, zaključujemo da je $P \in \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{K}(X)$. Pokazaćemo da je $TP = PT$ i $0 \notin \sigma_a(T + P)$.

Neka je $x = u + v$, gde su $u \in \mathcal{N}(T)$ i $v \in \mathcal{R}(T)$. Tada je $TPx = TPu = 0 = PTx$, prema tome P i T komutiraju.

Sa druge strane, ako je $(T + P)x = 0$, tada je $u = Pu = -Tv$, gde je $u \in \mathcal{N}(T)$ i $-Tv \in \mathcal{R}(T)$. Prema tome, $u = 0$, $v = 0$ i $T + P$ je injekcija. Kako je $T \in \Phi_+^-(X)$, sledi $T + P \in \Phi_+^-(X)$ i $\mathcal{R}(T + P)$ je zatvoren. Prema tome, $0 \notin \sigma_a(T + P)$. Ovim je pokazano $0 \in \operatorname{iso} \sigma_a(T)$ i $0 \in \pi_{a0}(T)$.

Slučaj II. Sada pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Važi $T = 0 \oplus T_1$ u odnosu na dekompoziciju $X = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T)$, gde je T_1 restrikcija operatora T na invarijantan potprostor $\mathcal{R}(T)$. Kako je $\lambda \in \sigma_a(T) \backslash \sigma_{ea}(T)$, sledi $T - \lambda I \in \Phi_+^-(X)$. Dalje, $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ je zatvoren i $0 < \alpha(T - \lambda I) < \infty$. Prema Lemi 2.9 i njenom dokazu, sledi da $\lambda \in \sigma_a(T_1)$, $\mathcal{R}(T_1 - \lambda I_1)$ je zatvoren, $0 < \alpha(T_1 - \lambda I_1) < \infty$ i $i(T_1 - \lambda I_1) = i(T - \lambda I) \leq 0$. Zaključujemo da $T_1 - \lambda I_1 \in \Phi_+^-(\mathcal{R}(T))$.

Postoji okolina $U(\lambda)$ tačke λ, tako da $0 \notin U(\lambda)$. Za svako $\mu \in U(\lambda)$, koristeći Lemu 2.9, važi $\mu \in \sigma_a(T)$ ako i samo ako $\mu \in \sigma_a(T_1)$. Prema tome, $\lambda \in \operatorname{acc} \sigma_a(T)$ ako i samo ako $\lambda \in \operatorname{acc} \sigma_a(T_1)$.

Da bi pokazali $\lambda \in \pi_{a0}(T)$, dovoljno je pokazati $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T)$, ili $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T_1)$. Da bi pokazali $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T_1)$, dovoljno je pokazati $\lambda \notin \sigma_{ab}(T_1)$!

Koristićemo sličan metod kao u Slučaju I. Kako je $\mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$ konačno dimenzionalan invarijantan potprostor od T_1, postoji zatvoren T_1-invarijantan potprostor

M, tako da je $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1) \oplus M$. Neka je Q neprekidna projekcija sa $\mathcal{R}(T)$ na $\mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$, tako da je $\mathcal{N}(Q) = M$. Očigledno je $Q \in \mathcal{K}(\mathcal{R}(T))$.

Treba pokazati $QT_1 = T_1Q$ i $\lambda \notin \sigma_a(T_1 + Q)$.

Neka je $x = u + v$, gde je $u \in \mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$ i $v \in M$. Tada je

$$QT_1x = QT_1u + QT_1v = QT_1u = -\lambda u = T_1Qu + T_1Qv = T_1Qx.$$

Druga jednakost sledi iz $T_1v \in M = \mathcal{N}(Q)$, a četvrta jednakost sledi iz $v \in M = \mathcal{N}(Q)$. Ovim je pokazano $QT_1 = T_1Q$.

Kako je $T_1 - \lambda I_1 \in \Phi_+^-(\mathcal{R}(T))$, dobro je poznato da $T_1 + Q - \lambda I_1 \in \Phi_+^-(\mathcal{R}(T))$. Prema tome, $\mathcal{R}(T_1 + Q - \lambda I_1)$ mora biti zatvoren u $\mathcal{R}(T)$. Jedino još treba proveriti da je $T_1 - \lambda I_1 + Q$ injekcija. Pretpostavimo da je $x = u + v$, $u \in \mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$, $v \in M$ i $(T_1 - \lambda I_1 + Q)x = 0$. Kako važi $(T_1 - \lambda I_1)u = 0$, $Qu = u$ i $Qv = 0$, sledi $u = -(T_1 - \lambda I_1)v$. Na osnovu $u \in \mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$ i $-(T_1 - \lambda I_1)v \in M$, proizilazi $u = 0$, te je $v \in M \cap \mathcal{N}(T_1 - \lambda I_1)$, $v = 0$ i $x = 0$. Znači, $\lambda \notin \sigma_a(T_1 + Q)$, odakle sledi $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T_1) = \operatorname{iso}\sigma_a(T)$ i $\lambda \in \pi_{a0}(T)$. $\square$

Uvodimo oznaku [81]:

$$\Omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(T - \lambda I) \text{ je zatvoren}\}.$$

Sledeće tvrđenje je posledica prethodnih razmatranja.

Posledica 2.12. *Pretpostavimo da operator T ispunjava sve uslove Teoreme 2.11. Tada*

$$(\sigma_a(T) \backslash \sigma_{ea}(T)) \cap \Omega(T) = \pi_{a0}(T) \cap \Omega(T).$$

Posledica 2.12 je uopštenje rezultata iz [81],

PERTURBACIONE TEOREME

Sada dolazimo do porturbacionih teorema. Naime, ako za operator T važi a-Weylova teorema, pod kojim uslovima za operator N, a-Weylova teorema važi za $T + N$? Pokazaćemo da je dovoljno pretpostaviti sledeće: N je nilpotentan i komutira sa T.

Lema 2.13. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$ i neka je N kvazinilpotentan operator koji komutira sa T. Tada je $\sigma_{ea}(T) = \sigma_{ea}(T+N)$.*

Dokaz. Koristićemo sledeće tvrđenje Schechtera i Whitlya [117, 30. Theorem]:

Ako je $T \in \Phi_+(X)$, K je Rieszov operator i $KT = TK$, tada $T + \lambda K \in \Phi_+(X)$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sada je dovoljno pokazati sledeću implikaciju: ako $0 \notin \sigma_{ea}(T)$, onda $0 \notin \sigma_{ea}(T + N)$. Pretpostavimo da $0 \notin \sigma_{ea}(T)$. Tada $T \in \Phi_+^-(X)$ i $T + \lambda N \in \Phi_+(X)$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ (svi nilpotentni i kvazinilpotentni operatori jesu Rieszovi). Očigledno je da T i $T + N$ jesu u istoj komponenti od $\Phi_+(X)$. Prema tome, $i(T + N) = i(T) \leq 0$ i $T + N \in \Phi_+^-(X)$. Kao posledica, sledi tvrđenje $0 \notin \sigma_{ea}(T + N)$. □

Glavni rezultat sledi.

Teorema 2.14. *Neka je $T, N \in \mathcal{L}(X)$ i N je nilpotentan operator koji komutira sa T. Ako a-Weylova teorema važi za T onda a-Weylova teorema važi i za $T + N$.*

Dokaz. Prvo pokazujemo skupovnu jednakost $\pi_{a0}(T + N) = \pi_{a0}(T)$. Dovoljno je pokazati da ako $0 \in \pi_{a0}(T)$, onda $0 \in \pi_{a0}(T + N)$. U tu svrhu pretpostavimo da je $0 \in \pi_{a0}(T)$, prema tome $0 < \dim \mathcal{N}(T) < \infty$.

Pokazaćemo da važi $\dim \mathcal{N}(T + N) < \infty$. Ako je $(T + N)x = 0$ za neki $x \neq 0$, tada je $Tx = -Nx$. Kako N komutira sa T, sledi da za svaki pozitivan ceo broj m važi: $T^m x = (-1)^m N x$. Neka je n najmanji pozitivan broj za koji je $N^n = 0$. Zaključujemo da postoji pozitivan ceo broj r, $r \leq n$, tako da $T^r x = 0$. Prema tome, $\mathcal{N}(T + N) \subset \mathcal{N}(T^r)$. Međutim, potprostor $\mathcal{N}(T)$ je konačno dimenzionalan, odakle sledi da i $\mathcal{N}(T^r)$ mora biti konačno dimenzionalan. Iz svega ovoga zaključujemo da je i $\mathcal{N}(T + N)$ konačno dimenzionalan.

Pokazaćemo $\dim \mathcal{N}(T + N) > 0$. Postoji neki $x \neq 0$ tako da je $Tx = 0$. Tada je i $(T + N)^n x = 0$, odakle sledi $0 \in \sigma_p(T + N) \subset \sigma_a(T + N)$ i $\dim \mathcal{N}(T + N) > 0$. Kako je N je nilpotentan i $TN = NT$, sledi $\sigma_a(T) = \sigma_a(T + N)$. Odavde sledi $0 \in \pi_{a0}(T + N)$.

Koristeći Lemu 2.13 izvodimo konačan zaključak:

$$\sigma_{ea}(T + N) = \sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) \setminus \pi_{a0}(T) = \sigma_a(T + N) \setminus \pi_{a0}(T + N).$$

Ovim je pokazano da a-Weylova teorema važi za $T + N$. □

Ako za $T \in \mathcal{L}(X)$ važi a-Weylova teorema, $F \in \mathcal{F}(X)$ i $TF = FT$, pokazaćemo da a-Weylova teorema za operator $T + F$.

Analogan probelm za Weylovu teoremu postavljen je u radu Oberaia [90]. Afirmativno rešenje ovog problema za Weylovu teoremu, i izoloidni operator T pokazano je u radu [82].

Pokazaćemo sledeća pomoćna trđenja:

Lema 2.15. *Ako je $\alpha(T) = n < \infty$ i $\dim \mathcal{R}(F) = m < \infty$, tada je*

$$\alpha(T + F) \leq n + m.$$

Dokaz. Važi $X = \mathcal{N}(T) \oplus M$ za neki zatvoren potprostor M od X. Primetimo da je restrikcija $T|_M : M \to X$ injekcija. Neka je $W = \{v \in M : Tx \in \mathcal{R}(F)\}$. Kako je $T|_M$ injekcija, sledi da je $\dim W \leq m$ i, na osnovu toga, $\dim(\mathcal{N}(T) \oplus W) \leq n + m$. Sada, pretpostavimo da $x \in \mathcal{N}(T + F)$. Tada je $x = u + v$, gde su $u \in \mathcal{N}(T)$, $v \in M$ i

$$0 = (T + F)(u + v) = Tv + Fx.$$

Zaključujemo da važi $Tv = -Fx \in \mathcal{R}(F)$ i $v \in W$. Prema tome, ako je $x \in \mathcal{N}(T+F)$, onda je $x \in \mathcal{N}(T) \oplus W$. Naravno, zaključak je $\alpha(T + F) \leq n + m$. $\square$

Meže se reći da se dokaz glavnog tvrđenja bazira na sledećem važnom rezultatu.

Teorema 2.16. *Ako je F proizvoljan konačno dimenzionalni oeprator na X, tako da $FT = TF$, tada za sve $\mu \in \mathbb{C}$ važi:*

$$\mu \in \operatorname{acc} \sigma_a(T) \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mu \in \operatorname{acc} \sigma_a(T + F).$$

Dokaz. Na požetku pokazujemo da ako je T injekcija i $TF = FT$, onda je $\mathcal{R}(F) \subset \mathcal{R}(T)$. Kako je F konačno dimenzionalni operator, postoje dva sistema: sistem linearno nezavisnih vektora $(y_i)_{i=1}^n$, i sistem nenula ograničenih linearnih funkcionala $(g_i)_{i=1}^n$ na X, tako da za svako $x \in X$ važi:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_i.$$

Sada zaključujemo da važi $TFx = \sum_{i=1}^n g_i(x)Ty_i$ i $FTx = \sum_{i=1}^n g_i(Tx)y_i$. Kako je T injektivan, zaključujemo da su Ty_1, … ,Ty_n linearno nezavisni vektori. Prema tome, važi

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)Ty_i : x \in X\right\} = span\{y_1, \dots, y_n\} = span\{Ty_1, \dots, Ty_n\},$$

i $\mathcal{R}(F) \subset \mathcal{R}(T)$. Slično, ako je $T - \lambda I$ injektivan za neko $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je $\mathcal{R}(F) \subset \mathcal{R}(T - \lambda I)$.

Vratimo se dokazu glavnog tvrđenja. Neka je $\mu \notin \operatorname{acc} \sigma_a(T)$. Tada postoji broj $\epsilon > 0$, tako da za svako $\lambda \in \mathbb{C}$, ako je $0 < |\lambda - \mu| < \epsilon$, onda $\alpha(T - \lambda I) = 0$ i $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ je zatvoren. Takođe, postoji ograničen operator $T_1 : \mathcal{R}(T - \lambda I) \to X$, tako da $TT_1 = I_{\mathcal{R}(T-\lambda I)}$ i $T_1T = I_X$. Primetimo da je $\mathcal{R}(F)$ konačno dimenzionalan potprostor Banachovog prostora $\mathcal{R}(T - \lambda I)$, na osnovu čega možemo naći zatvoren potprostor M, tako da je $\mathcal{R}(F) \oplus M = \mathcal{R}(T - \lambda I)$.

Neka je $\lambda \in \sigma_a(T + F)$. Tada postoji niz jediničnih vektora $(x_n)_n$, tako da $\lim_{n\to\infty}(T + F - \lambda I)x_n = 0$. Možemo pretpostaviti da je $\lim_{n\to\infty} Fx_n = x \in \mathcal{R}(F)$. Važi

$$0 = \lim T_1(T + F - \lambda I)x_n = \lim(x_n + T_1Fx_n).$$

Kako granična vrednost $\lim_{n\to\infty} T_1Fx_n = T_1x$ postoji, zaključujemo da važi $\lim_{n\to\infty} x_n = -T_1x$. Iz činjenice $\|x_n\| = 1$ sledi $x \neq 0$. Proveravamo da važi $x = \lim Fx_n = -FT_1x \in \mathcal{R}(F)$. Takođe,

$$(T - \lambda I)x = -(T - \lambda I)FT_1x = -Fx$$

i $(T + F - \lambda I)x = 0$. Znači, ako je $\lambda \in \sigma_a(T + F)$, onda je λ sopstvena vrednost operatora $T + F$. Dobro je poznato da sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima operatora $T + F$ moraju biti linearno nezavisni. Ali, svi ti vektori moraju takođe biti sadržani u konačno dimenzionalnom potprostoru $\mathcal{R}(F)$. Prema tome, skup $\sigma_a(T + F)$ može sadržati najviše konačno mnogo tačaka λ, tako da je $0 < |\lambda - \mu| < \epsilon$. Odavde sledi da $\mu \notin \operatorname{acc} \sigma_a(T + F)$.

Suprotna implikacija je analogna. $\square$

Podsetimo se sada ranije definicije a-izoloidnog operatora: T je a-izoloidan, ako svaka izolovana tačka skupa $\sigma_a(T)$ jeste sopstvena vrednost operatora T.

Sledeća teorema daje dovoljne uslove da za operator $T+F$ iz prethodne Teoreme 2.16 važi a-Weylova teorema.

Teorema 2.17. *Neka je F proizvoljan konačno dimenzionalan operator i $TF = FT$. Ako je T a-izoloidan i a-Weylova teorema važi za T, onda a-Weylova teorema važi sa $T+F$.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati $0 \in \sigma_a(T+F)\backslash\sigma_{ea}(T+F)$ ako i samo ako $0 \in \pi_{a0}(T+F)$.

Pokazaćemo prvo inkluziju $\subset$. Ako $0 \in \sigma_a(T+F)\backslash\sigma_{ea}(T+F)$, onda $T+F \in \Phi_+^-(X)$ i $0 < \alpha(T+F) < \infty$. Potrebno je još pokazati da $0 \in \operatorname{iso}\sigma_a(T+F)$. Prema Lemi 2.15, sledi $T \in \Phi_+^-(X)$, odakle $0 \notin \sigma_{ea}(T)$.

Moguće je da $0 \notin \sigma_a(T)$. U ovom slučju sledi $0 \notin \operatorname{acc}\sigma_a(T)$ i prema Teoremi 2.16: $0 \notin \operatorname{acc}\sigma_a(T+F)$, stoga i $0 \in \pi_{a0}(T+F)$. Druga mogućnost je $0 \in \sigma_a(T)$. Kako a-Welova teorema važi za T, zaključujemo $0 \notin \operatorname{acc}\sigma_a(T)$ i opet $0 \in \pi_{a0}(T+F)$.

Da bi pokazali suprotnu inkluziju, pretpostavimo $0 \in \pi_{a0}(T+F)$. Tada $0 \in \operatorname{iso}\sigma_a(T+F)$ i $0 < \alpha(T+F) < \infty$. Prema Teoremi 2.16 zaključujemo da važi $0 \notin \operatorname{acc}\sigma_a(T)$. Iz Leme 2.15 sledi $0 \leq \alpha(T) < \infty$.

Ponovo možemo razlikovati dva slučaja. Prvo, ako $0 \notin \sigma_a(T)$, onda $T \in \Phi_+^-(X)$ i $T+F \in \Phi_+^-(X)$. Prema tome, $0 \in \sigma_a(T+F)\backslash\sigma_{ea}(T+F)$. Sa druge strane, ako $0 \in \sigma_a(T)$, onda $0 \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$. Kako je T a-izoloidan, zaključujemo da je $0 < \alpha(T) < \infty$ i $0 \notin \sigma_{ea}(T)$. Sada zaključujemo da važi $T \in \Phi_+^-(X)$, $T+F \in \Phi_+^-(X)$ i $0 \in \sigma_a(T+F)\backslash\sigma_{ea}(T+F)$. $\square$

KVAZIHIPONORMALNI OPERATORI

Sledeću korisnu teoremu pokazao je Heuser u svojoj doktorskoj disertaciji, kao što je navedeno u [19]. Videti takođe rad Taylora [126].

Teorema 2.18. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$.*

(a) *Ako je $\alpha(T) < \infty$ ili $\beta(T) < \infty$, tada:* $\operatorname{asc}(T) < \infty$ *povlači* $\alpha(T) \leq \beta(T)$, *a* $\operatorname{des}(T) < \infty$ *povlači* $\beta(T) \leq \alpha(T)$.

(b) *Ako je* $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$, *tada je* $\operatorname{asc}(T) < \infty$ *ako i samo ako je* $\operatorname{des}(T) < \infty$.

Neka je H kompleksan, beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{L}(H)$. Operator T je normalan, ako je $TT^* = T^*T$. Operator T je hiponormalan, ako za svako $x \in H$ važi $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$, odnosno ako je $TT^* \leq T^*T$. Operator T je kvazihiponormalan, ako je $\|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|$ za svako $x \in H$. Drugim rečima, T je kvazihiponormalan ako je $(T^*T)^2 \leq (T^*)^2T^2$. Svaki normalan operator jeste i hiponormalan, a svaki hiponormalan operator jeste i kvazihiponormalan. Ako je H konačno dimenzionalan Hilbertov prostor, onda se ove klase operatora poklapaju, dok u slučaju beskonačno dimenzionalnog Hilbertovog prostora H, inkluzije u opštem slučaju jesu prave.

Ranije je napomenuto da Weylova teorema važi za samo-konjugovane operatore na Hilbertovom prostoru. Važno je skrenuti pažnju da je Weylova teorema pokazana i za opštije klase operatora na Hilbertovom prostoru: normalne, hiponormalne, kvazihiponormalne, k-kvazihiponormalne, paranormalne, k-paranormalne. Posebnu ulogu imaju kvazihiponormalni operatori, jer je moguće proceniti indeks operatora $T - \lambda$.

Sledeće tvrđenje pokazao je Erovenko [37].

Lema 2.19. *Neka je T kvazihiponormalan operator na H. Akoje $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, onda je $\alpha(T-\lambda) \leq \alpha(T-\lambda)^*$. Ako je $\alpha(T) < \infty$, ili $\beta(T) < \infty$, onda je $\alpha(T) \leq \alpha(T^*)$.*

U ovom odeljku uopštavamo rezultat Erovenka o preslikavanju spektra kvazihiponormalnog operatora [37].

Teorema 2.20. *Neka je $T \in \mathcal{L}(H)$ kvazihiponormalan operator i $f \in \mathrm{Hol}(T)$. Tada je*

$$\sigma_{ea}(f(T)) = f(\sigma_{ea}(T)) \quad i \quad \sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T)).$$

Dokaz. Pokazujemo samo prvo tvrđenje. Primetimo da je dovoljno pokazati inkluziju $\supset$. Petpostavimo da $\lambda \notin \sigma_{ea}(f(T))$. Tada $f(T) - \lambda \in \Phi_+^-(H)$ i

$$f(T) - \lambda = (T - \mu_1) \cdots (T - \mu_n) g(T), \tag{5}$$

gde je $g(T)$ invertibilan operator i operatori na desnoj strani od (5) uzajamno komutiraju. Sada zaključujemo da $T - \mu_i \in \Phi_+(H)$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Prema Lemi 2.19 sledi $i(T) = \alpha(T) - \alpha(T^*) \leq 0$, i stoga $T - \mu_i \in \Phi_+^-(H)$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, $\lambda \notin f(\sigma_{ea}(T))$. Dokaz drugog tvrđenja je analogan i predstavlja direktnu generalizaciju Erovenkovog rezultata. $\square$

Ako je T^* hiponormalan operator, Rakočević je pokazao da a-Weylova teorema važi za T [100]. Generališemo taj rezultat, pretpostavljajući da je T^* kvazihiponormalan.

Teorema 2.21. *Neka je $T \in \mathcal{L}(H)$ i T^* je kvazihiponormalan. Tada a-Weylova teorema važi za T.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda \in \sigma_a(T)\backslash\sigma_{ea}(T)$. Tada $T - \lambda \in \Phi_+^-(H)$ i $0 < \alpha(T - \lambda) < \infty$. Ako je $\lambda \neq 0$, pošto je T^* kvazihiponormalan, prema Lemi 2.19 zaključujemo da je $\alpha((T - \lambda)^*) \leq \alpha(T - \lambda) < \infty$. Ako je $\lambda = 0$, tada je $T \in \Phi_+^-(H)$ i $T^* \in \Phi_-^+(H)$, odakle sledi $\alpha(T^*) \leq \alpha(T) = \beta(T^*) < \infty$. Na svaki način, važi $\alpha((T - \lambda)^*) \leq \alpha(T - \lambda) < \infty$. Očigledno je $i(T - \lambda) = \alpha(T - \lambda) - \alpha((T - \lambda)^*) \geq 0$. Kako je $T - \lambda \in \Phi_+^-(H)$, važi $0 = i(T - \lambda) = i((T - \lambda)^*)$, odakle sledi $\overline{\lambda} \notin \sigma_w(T^*)$. Dobro je poznato da za kvazihiponormalne operatore važi Weylova teorema [38, 97], tako da zaključujemo $\overline{\lambda} \in \pi_{00}(T^*)$. Na osnovu ovoga sledi da je λ izolovana tačka skupa $\sigma(T)$. Sada sledi da je λ izolovana tačka skupa $\sigma_a(T)$ i $\lambda \in \pi_{a0}(T)$.

Da bi pokazali suprotnu inkluziju, pretpostavimo da $\lambda_0 \in \pi_{a0}(T)$. Tada $0 < \alpha(T - \lambda_0) < \infty$ i postoji neki $\epsilon > 0$, tako da za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ važi sledeće: ako $0 < |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, onda $\lambda \notin \sigma_a(T)$. Za sve takve λ, koristeći Lemu 2.19, zaključujemo da važi $\alpha((T-\lambda)^*) \leq \alpha(T-\lambda) = 0$. Važi $i(T-\lambda) = 0$ i λ_0 mora biti izolovana tačka skupa $\sigma(T)$. Prema tome, 0 mora biti izolovana tačka skupa $\sigma((T - \lambda_0)^*)$. Uočavamo da je $\beta((T - \lambda_0)^*) = \alpha(T - \lambda_0) < \infty$, prema tome $(T - \lambda_0)^* \in \Phi(H)$. Kako je 0 izolovana tačka skupa $\sigma((T - \lambda_0)^*)$, sledi da je $i((T - \lambda)^*) = 0$ i $\lambda_0 \notin \sigma_w(T) \supset \sigma_{ea}(T)$. $\square$

Ako je T^* kvazihiponormalan operator, pokazaćemo da a-Weylova teorema važi za $f(T)$, ako je $f \in \mathrm{Hol}(T)$.

Ovaj problem za Weylovu teoremu i hiponormalne operatore je parcijalno postavljen u [90] i rešen u [82]. Opšte rešenje za Weylovu teoremu i hiponormalne operatore videti u radu Schomoegera [118].

Imajući u vidu sve rezultate oko a-izoloidnosti, sledeće tvrđenje je očekivano.

Teorema 2.22. *Ako je T^* kvazihiponormalan, onda je T a-izoloidan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$. Tada postoji neki broj $\epsilon > 0$, tako da za sve $\mu \in \mathbb{C}$, ako je $0 < |\lambda - \mu| < \epsilon$, onda je $\alpha(T - \mu I) = 0$ i $\mathcal{R}(T - \mu I)$ je zatvoren. Prema Erovenkovom rezultatu (Lema 2.19), sledi da je $\alpha(T - \mu I)^* = 0$, prema tome operatori $T - \mu I$ i $(T - \mu I)^*$ su invertibilni. Dalje, $\overline{\lambda}$ je izolovana tačka skupa $\sigma(T^*)$. Dobro je poznato da je kvazihiponormalni operator T^* izoloidan, odnosno sve izolovane tačke operatora T^* jesu sopstvene vrednosti opoeratora T^* (videti komentar u članku [37,Теорема 5]). Sledi da važi $0 < \alpha(T - \lambda I)^* \leq \alpha(T - \lambda I)$. Dakle, λ je sopstvena vrednost operatora T. □

Došli smo do jednog veoma opšteg tvrđenja (videti hronološki [90],[82],[118]).

Teorema 2.23. *Ako je T^* kvazihiponormalan operator i $f \in \mathrm{Hol}(T)$, onda a-Weylova teorema važi za $f(T)$.*

Dokaz. Sledi iz prethodnih rezultata: Teoreme 2.20 – 2.22. □

APSTRAKTNA RAZMATRANJA

Razamtraćemo teoreme o preslikavanjima delova spektra elemenata u Banachovim algebrama, koji su relevantni za Weylovu teoremu.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra sa jedinicom i X vektorski prostor (nad istim poljem skalara). Neka je $L(X)$ algebra svih linearnih operatora na X. Reprezentacija algebre $\mathcal{A}$ na X je svaki algebarski homomorfizam iz algebre $\mathcal{A}$ u algebru $L(X)$. Reprezentacija $\phi : \mathcal{A} \to L(X)$ je (strogo ili algebarski) ireducibilna, ako je $\phi \neq 0$ i ako su $\{0\}$ i X jedini invarijantni potprostori operatora $\phi(a)$, za svaki $a \in \mathcal{A}$. Reprezentacija $\phi : \mathcal{A} \to L(X)$ je verna, ako je jezgro ove reprezentacije $\{0\}$.

Neki ideal P od $\mathcal{A}$ je primitivan, ako je jezgro neke ireducibilne reprezentacije algebre $\mathcal{A}$. Algebra $\mathcal{A}$ je primitivna, ako je $\{0\}$ primitivni ideal. Drugim rečima, postoji verna ireducibilna reprezentacija algebre $\mathcal{A}$.

Desni ideal R algebre $\mathcal{A}$ je minimalan, ako je $R \neq \{0\}$ i ako za svaki desni ideal R_1 od $\mathcal{A}$, za koji je $R_1 \subset R$, važi: $R_1 = \{0\}$ ili $R_1 = R$. Idempotent $e \in \mathcal{A}$ je minimalni, ako i samo ako je $e\mathcal{A}$ minimalni desni ideal u $\mathcal{A}$. Skup svih minimalnih idempotenata od $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathrm{Min}(\mathcal{A})$.

Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna primitivna Bancahova algebra sa jedinicom, tako da je $\mathrm{Min}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Ako je $x \in \mathcal{A}$ i $e \in \mathrm{Min}(\mathcal{A})$, sa $x \to x^\wedge$ označavamo levu regularnu reprezentaciju primitivne Banachove algebre $\mathcal{A}$ na Banachov prostor $\mathcal{A}e$. Drugim rečima, $x^\wedge \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e)$ je definisan kao:

$$ae \in \mathcal{A}e \implies x^\wedge(ae) = xae.$$

Reprezentacija $x \to x^\wedge$ je neprekidna i verna, odnosno jezgro ove reprezentacije je $\{0\}$. Takođe, ova reprezentacija je ireducibilna. Dobro je poznato da dimenzija slike, kodimenzija slike i dimenzija jezgra operatora $x^\wedge \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e)$ ne zavise od izbora elementa $e \in \mathrm{Min}(\mathcal{A})$ [5]. Primetimo da važi $(ts)^\wedge = t^\wedge s^\wedge$ i $(t-\lambda)^\wedge = t^\wedge - \lambda I$, gde I označava identički operator na prostoru $\mathcal{A}e$.

Ako je $\mathcal{A}$ Banachova algebra svih operatora na nekom Banachovom prostoru, onda se $\mathrm{Min}(\mathcal{A})$ sastoji od svih jednodimenzionalnih operatora na tom prostoru. Takođe, ako je $x \in \mathcal{A}$, onda dimenzija slike, kodimenzija slike i dimenzija jezgra operatora $x^\wedge$ se poklapaju redom sa odgovarajućim veličinama polaznog operatora x. [5].

Pretpostavljamo da je uvek $\mathcal{A}$ kompleksna primitivna Banachova algebra sa jedinicom 1, i neka je $\mathrm{Min}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ skup svih minimalnih idempotenata algebre $\mathcal{A}$. Neka je $\mathcal{A}^{-1}$ skup svih invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$.

Formulisaćemo poznati rezultat koji nam omogućava da definišemo tačkasti spektar nekog elementa u primitivnoj Banachovoj algebri $\mathcal{A}$.

Lema 2.24 ([5, Example F.2.2])**.** *Neka je X Banachov prostor i $T \in \mathcal{L}(X)$. Tada*

$$\sigma_p(T) = \sigma_p(T^\wedge).$$

Definicija. Ako je $t \in \mathcal{A}$ i $e \in \mathrm{Min}(\mathcal{A})$, tada je tačkasti spektar elementa t definisan kao

$$\sigma_p(t) = \sigma_p(t^\wedge) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(\lambda - t^\wedge) > 0\},$$

gde je $t^\wedge \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e)$.

Prema [5], upravo uvedena definicija ne zavisi od izbora idempotenta $e \in \mathcal{A}$, a prema Lemi 2.24 poklapa se sa uobičajenom definicijom tačkastog spektra ograničenog operatora na Banachovom prostoru. Kažemo da se skup $\sigma_p(t)$ sastoji od sopstvenih vrednosti elementa t.

Neka je $R \neq \emptyset$ regularnost u algebri $\mathcal{A}$ (videti [74]), odnosno R zadovoljava sledeće uslove:

(a) ako je $a \in \mathcal{A}$ i $n \in \mathbb{N}$, tada $a \in R$ ako i samo ako $a^n \in R$;

(b) ako su a, b, c, d međusobno komutativni elementi algebre $\mathcal{A}$ i $ac + bd = 1$, tada $ab \in R$ ako i samo ako $a \in R$ i $b \in R$.

Takozvani R-spektar elementa $t \in \mathcal{A}$ definisan je na sledeći način:

$$\sigma_R(t) = \{\lambda \in \mathbb{C} : t - \lambda \notin R\}.$$

Dobro je poznato da ako $a \in \mathcal{A}^{-1}$ i $ab = ba$, onda $ab \in R$ ako i samo ako $b \in R$, te stoga važi $\mathcal{A}^{-1} \subset R$. Takođe, važi teorema o spektralnom preslikavanju $f(\sigma_R(t)) = \sigma_R(f(t))$ za svako $t \in \mathcal{A}$ i sve $f \in \mathrm{Hol}(t)$. Pretpostavljaćemo uvek da je R otvorena regularnost u $\mathcal{A}$, odakle sledi da je $\sigma_R(t)$ moduće prazan, ali uvek kompaktan podskup spektr $\sigma(t)$ [74].

Razmotrimo skup

$$\pi_R(t) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \operatorname{iso} \sigma_R(t) \text{ i } 0 < \alpha(t - \lambda) < \infty\}.$$

Skup $\pi_R(t)$ sastoji se od svih izolovanih tačaka skupa $\sigma_R(t)$ koji su sopstvene vrednosti od t konačne geometrijske višestrukosti. Uvodimo sledeću opštu definiciju, inspirisanu ranijom definicijom izoloidnosti.

Definicija. Kažemo da je elemenat $t \in \mathcal{A}$ R-izoloidan, ako je ispunjeno $\operatorname{iso} \sigma_R(t) \subset \sigma_p(t)$, odnosno sve izolovane tačke spektra $\sigma_R(t)$ jesu sopstvene vrednosti elementa t.

Pokazaćemo teoremu o spektralnom preslikavanju skupa $\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t)$. Ako je T ograničen operator na Banachovom prostoru, analogni problem za skup $\sigma(T) \backslash \pi_{00}(T)$ i polinome posmatran je u radu Oberaia [90]. Skup $\sigma_a(T) \backslash \pi_{a0}(T)$ i analitičke funkcije koje nisu konstantne na povezanim komponentama posmatrani su u prvom odeljku ove glave.

Teorema 2.25. *Neka je R otvorena regularnost od $\mathcal{A}$, tako da $\sigma_R(t) \neq \emptyset$ za sve $t \in \mathcal{A}$. Ako je $t \in \mathcal{A}$ R-izoloidan i $f \in \mathrm{Hol}(t)$ proizvoljna, tada važi*

$$\sigma_R(f(t)) \backslash \pi_R(f(t)) = f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t)).$$

Dokaz. Da bi pokazali inkluziju $\subset$, neka je $\lambda \in \sigma_R(f(t)) \backslash \pi_R(f(t)) \subset f(\sigma_R(t))$ i razlikujemo tri slučaja.

Slučaj I. Ako je λ tačka nagomilavanja skupa $\sigma_R(f(t))$, tada je λ takođe tačka nagomilavanja skupa $f(\sigma_R(t))$, i stoga postoji niz (μ_n) u $\sigma_R(t)$, tako da $f(\mu_n) \to \lambda$. Sada, skup $\sigma_R(t)$ je kompaktan, i stoga možemo uzeti $\mu_n \to \mu \in \sigma_R(t)$. Zaključujemo da je $\lambda = f(\mu) \in f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t))$.

Slučaj II. Sada, neka λ nije izolovana tačka skupa $\sigma(t)$, ali je $\alpha(t-\lambda) = 0$. Sledi da važi

$$f(t) - \lambda = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n) g(t), \tag{6}$$

gde su $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \sigma(t)$, elementi na desnoj strani izraza (6) uzajamno komutiraju i $g(t)$ je invertibilan. Kako je $\lambda \in f(\sigma_R(t))$, znamo da neki μ_{i_0} pripada skupu $\sigma_R(t)$. Kako λ nije sopstvena vrednost elementa $f(t)^\wedge$, sledi da ni jedna od tačaka $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ne može biti sopstvena vrednost elementa $t^\wedge$. Prema tome, $\lambda = f(\mu_{i_0}) \in f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t))$.

Slučaj III. Neka je λ izolovana sopstvena vrednost elementa $f(t)$ beskonačne geometrijske višestrukosti. Primetimo da (6) još uvek važi. Kako je λ sopstvena vrednost od $f(t)^\wedge$ beskonačne višestruksoti, postoji neki μ_{i_0}, tako da je μ_{i_0} sopstvena vrednost od $t^\wedge$ beskonačne višestrukosti. Zaključujemo da važi $\lambda = f(\mu_{i_0}) \in f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t))$.

Da bi pokazali inkluziju $\supset$, neka je $\lambda \in f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t)) \subset \sigma_R(f(t))$. Pretpostavimo da važi $\lambda \in \pi_R(f(t))$. Tada je λ izolovana u $\sigma_R(f(t))$ i (6) važi. Ako neki μ_i pripada skupu $\sigma_R(t)$, tada je μ_i izolovan u skupu $\sigma_R(t)$ i mora biti sopstvena vrednost od t, kako je t R-izoloidan. Sada, λ je sopstvena vrednost od $f(t)$ konačne višestrukosti, i stoga su svi $\mu_i \in \sigma_R(t)$ sopstvene vrednosti od t konačne višestrukosti. Sledi da svi $\mu_i \in \sigma_R(t)$ takođe pripadaju skupu $\pi_R(t)$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $\lambda \in f(\sigma_R(t) \backslash \pi_R(t))$. $\square$

Primedba 2.26. *Primetimo da možemo pokazati inkluziju $\subset$ u Teoremi 2.25 pretpostavljajući da je R otvoren podskup od $\mathcal{A}$, za koji važi sledeće:*

(c) $\mathcal{A}^{-1} \subset R$;

(d) *ako su* $a, b \in R$ *i* $ab = ba$, *tada* $ab \in R$.

Naime, ako R zadovoljava (c) i (d), tada inkluzija $\sigma_R(f(t)) \subset f(\sigma_R(t))$ važi za sve $t \in \mathcal{A}$ i sve $f \in \mathrm{Hol}(t)$. U ovom specijalnom slučaju t ne mora biti R-izoloidan.

U preostalom delu ovog odeljka razmatraćemo generalizaciju Browderovog spektra. Do kraja ovog odeljka pretpostavljaćemo da je $\mathcal{A}$ proizvoljna kompleksna Banachova algebra sa jedinicom 1.

Neka je J proizvoljan zatvoreni dvostrani ideal od $\mathcal{A}$. Ako je $t \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(t)$, neka je $p = p(\lambda, t)$ spectralni idempotent od t, koji odgovara tački λ. Definišimo skup svih izolovanih tačaka konačne algebraske višestruksti (u odnosu na J) na sledeći način:

$$\pi_0(t) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(t) \text{ i } p(\lambda, t) \in J\}.$$

Pokazaćemo teoremu o preslikavanju spektra za skup $\sigma(t) \setminus \pi_0(t)$.

Ako je T ograničen operator na Banachovom prostoru X, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$ je Banachova algebra svih ograničenih operatora na X, a $J = \mathcal{F}(X)$ je ideal svih konačno dimenzionalnih operatora na X, tada je $\sigma(T) \setminus \pi_0(T)$ Browderov spektar od T. Zato skup $\sigma(t) \setminus \pi_0(t)$ možemo zvati Browderovim spektrom elementa t u Banachovoj algebri $\mathcal{A}$.

Druge generalizacije Browderovog spektra nalaze se u [5, 55, 74, 97].

Potreban nam je sledeći rezultat iz knjige Dunforda i Schwartza [36, Theorem 19, p. 574] (interpretiran za elemente proizvoljne Banachove algebre).

Teorema 2.27. *Neka je $t \in \mathcal{A}$, f je kompleksna regularna funkcija u okolini skupa $\sigma(t)$, i neka je κ spektralni podskup od $\sigma(f(t))$. Tada je $\sigma(t) \cap f^{-1}(\kappa)$ spektralni podskup od $\sigma(t)$ i važi*

$$p(\kappa, f(t)) = p(f^{-1}(\kappa), t).$$

Takođe, koristićemo sledeće tvrđenje.

Lema 2.28. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra i J neka je dvostrani ideal od $\mathcal{A}$. Ako su a, b idempotenti u $\mathcal{A}$, tako da $a + b \in J$ i $ab = ba$, tada $a, b \in J$.*

Dokaz. Kako je $ab = ba$, sledi $(a + b)^2 = a + 2ab + b \in J$ i $ab \in J$. Sada je $a(a + b) = a + ab \in J$ i $a \in J$. $\square$

Pokazujemo teoremu o preslikavanju Browderovog spektra.

Teorema 2.29. *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $f \in \mathrm{Hol}(a)$, tada*

$$\sigma(f(a))\backslash\pi_0(f(a)) = f(\sigma(a)\backslash\pi_0(a)).$$

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(f(a))\backslash\pi_0(f(a)) \subset f(\sigma(a))$. Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj I. Neka λ nije izolovana tasčka skupa $\sigma(f(a))$. Tada postoji niz (μ_n), $\mu_n \in \sigma(a)$, tako da $f(\mu_n) \to \lambda$ i $\mu_n \to \mu_0$. Lako je videti da $\lambda = f(\mu_0) \in f(\sigma(a)\backslash\pi_0(a))$.

Slučaj II. Pretpostavimo da je λ izolovana tačka skupa $\sigma(a)$, ali $p(\lambda, f(a)) \notin J$. Važi

$$f(a) - \lambda = (a - \mu_1) \cdots (a - \mu_n)g(a), \tag{7}$$

gde je $g(a)$ invertibilan i sve tačke μ_i jesu izolovane tačke skupa $\sigma(a)$. Prema Teoremi 2.27, sledi da važi

$$p(\lambda, f(a)) = p(\{\mu_1, \dots, \mu_n\}, a) = p(\mu_1, a) + \cdots + p(\mu_n, a). \tag{8}$$

Ako μ nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(a)$, tada je dobro poznato da važi $p(\mu, a) = 0$ ako i samo ako $\mu \notin \sigma(a)$. Ako su svi idempotenti na desnoj strani izraza (8) u idealu J, tada $p(\lambda, f(a)) \in J$ takođe. Prema tome, postoji neki $\mu_i \in \sigma(a)$, tako da $p(\mu_i, a) \notin J$ i $\lambda = f(\mu_i) \in f(\sigma(a)\backslash\pi_0(a))$.

Pokazujemo suprotnu inkluziju. Neka $\lambda \in f(\sigma(a)\backslash\pi_0(a)) \subset \sigma(f(a))$. Pretpostavimo da je $\lambda \in \pi_0(f(a))$. Tada je λ izolovana tačka skupa $\sigma(f(a))$ i opet važi (7) i (8). Dobro je poznato da su idempotenti na desnoj strani izraza (8) uzajamno ortogonalni. Kako je $p(\lambda, f(a)) \in J$, prema Lemi 2.28 sledi $p(\mu_i, a) \in J$ za sve i. Prema tome, ako je $\lambda = f(\mu)$ i $\mu \in \sigma(a)$, tada $\mu \in \pi_0(a)$. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom $\lambda \in f(\sigma(a)\backslash\pi_0(a))$. $\square$

Primedba 2.30. *Primetimo da teorema o preslikavanju Browderovog spektra važi za ograničene operatore na Banachovom prostoru. Generalizacije u* [5, 55, 74, 97] *takođe impliciraju teoremu o preslikavanju Browderovog spektra.*

3. GLAVA

GENERALISANI INVERZI

U ovoj glavi razmatraćemo neka pitanja vezana za generalisene inverze. Proučavanje generalisanih inverza operatora, bilo na konačno dimenzionalnim prostorima (matrice), bilo na beskonačno dimenzionalnim Banachovim i Hilbertovim prostorima, pa čak i u Banachovim i C^*-algebrama je veoma aktuelno. Invertibilnost ograničenog operatora rešava mnoge probleme u Teoriji operatora i Linearnoj algebri. Međutim, dešava se da posmatrani operator ima samo pojedina svojstva invertibilnosti, kao što su Penroseove [91] ili Drazinove [18] jednačine. U takvim slučajevima ulogu pravog inverza operatora preuzimaju *uopšteni inverzi*, koji mogu rešiti postavljeni problem.

Izučavanje teorema Weylovog tipa i uopštenih inverza vodi do toga, da se posmatraju i osobine uopštenih inverza, koje nisu u neposrednoj vezi sa Weylovom teoremom. Te osobine biće istraživane u ovoj glavi.

Stoga, u ovoj glavi proučavamo pre svega neke reprezentacije i načine izračunavanja generalisanih inverza ograničenih operatora na Banachovom i Hilbertovom prostoru. Takođe, izvesnu pažnju posvetićemo odnosu običnog i generalisanog Drazinovog inverza u Banachovim algebrama. Neke od pokazanih teorema su već poznate za matrice, a nisu poznate za operatore na beskonačno dimenzionalnim prostorima. Takođe postoji i znatan broj rezultata u kojima je sadržan originalan pristup čak i kada su u pitanju kompleksne matrice.

Ova glava je urađeno je prema originalnim rezultatima iz radova [30, 31, 123].

DEKOMPOZICIJA POTPUNOG RANGA NA HILBERTOVOM PROSTORU

Dekompozicija potpunog ranga, ili ful-rank dekompozicija matrica, jedan je od osnovnih načina za proučavanje generalisanih inverza matrica. U ovom odeljku iskoristićemo dekompoziciju potpunog ranga ograničenog operatora, uvedenu u knjizi

Caradusa [18] i radu Bouldina [14]. Pokazaćemo, pre svega reprezentacione teoreme za refleksivne generalisane inverze i Moore-Penroseov inverz na Hilbertovom prostoru. Svi rezultati u ovom odeljku su već poznati za matrice, ali neki nisu poznati za operatore na proizvoljnom Hilbertovom prostoru. Napominjemo da i dokazi u ovoj disertaciji nisu slični odgovrajućim poznatim dokazima za matrice.

Da bi izbegli ponavljanje, osnovne pojmove o dekompoziciji potpunog ranga iskazaćemo u Banachovi prostorima, a onda ćemo svu pažnju usmeriti na proučavanje operatora na Hilbertovim prostorima.

Ako je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ operator između dva Banachova prostora X i Y, kažemo da je operator $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ generalisani inverz operatora A, ako važi neka od jednačina:

$$(1) \quad ABA = A, \qquad (2) \quad BAB = B.$$

Ako važi samo jednačina (1), onda za B kažemo jednostavno da je generalisani inverz, unutrašnji inverz, ili kraće g-inverz operatora A. Za operator A u tom slučaju kažemo da je g-invertibilan, ili relativno regularan. Ako važi samo jednačina (2), onda je B takozvani $\{2\}$-inverz, ili spoljašnji inverz operatora A. Ako važe i (1) i (2), onda je B refleksivni ili g_2-inverz operatora A.

Dobro je poznato da je operator A g-invertibilan ako i samo ako je $\mathcal{N}(A)$ komplementaran potprostor od X, a $\mathcal{R}(A)$ je zatvoren i komplementaran potprostor od Y. Naravno, ako su X i Y Hilbertovi prostori, onda je A g-invertibilan ako i samo ako je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren. Ako je B g-inverz operatora A, tada je AB projekcija sa prostora Y na potprostor $\mathcal{R}(A)$, a $I - BA$ je projekcija sa prostora X na potprostor $\mathcal{N}(A)$. Ako je B g-inverz od A, onda je lako proveriti (i dobro je poznato) da je BAB g_2-inverz operatora A. Naravno, ako je B g_2-inverz operatora A, onda je AB projekcija sa Y an $\mathcal{R}(A)$ paralelno sa $\mathcal{N}(B)$, a BA je projekcija sa X na $\mathcal{R}(B)$ paralelno sa $\mathcal{N}(A)$.

Zbog važnosti, izdvojićemo u jednu celinu definiciju dekompozicije potpunog ranga [14, 18]. Takođe, zanimljivo je videti i rad [3].

Definicija. Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ako postoje: Banachov prostor Z i operatori $Q \in \mathcal{L}(X,Z)$ i $P \in \mathcal{L}(Z,Y)$, tako da je P levo invertibilan, Q je desno invertibilan i

$$\text{(FR)} \qquad A = PQ,$$

kažemo da (FR) označava dekompoziciju potpunog ranga operatora A.

Dobro je poznato da u definiciji (FR) možemo pretpostaviti da je P g-invertibilan i injekcija, a Q je g-invertibilan i surjekcija. Za operatore na Hilbertovom prostoru može se pretpostaviti i manje: P je injekcija sa zatvorenom slikom, a Q je surjekcija.

Važno je sledeće tvrđenje Caradusa o jedinstvenosti dekompozicije potpunog ranga [18].

Teorema 3.1. *Za operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ postoji dekompozicija potpunog rnga, ako i samo ako je A g-invertibilan operator. U tom slučaju je Banachov prostor Z izomorfan sa $\mathcal{R}(A)$, i $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(P)$.*

Neka su u ovom odeljku nadalje X i Y Hilbertovi prostori. Među refleksivnim generalisanim inverzima izdvajaju se i neki inverzi sa dodatnim svojstvima. Oni se najčešće opisuju kao skup svih operatora B, koji zadovoljava neke od jednačina

$$(3)\quad (AB)^* = AB, \qquad (4)\quad (BA)^* = BA.$$

Pri tome je T^* Hilbert adjungovani operator operatora T. Uobičajeno je još i sledeće: za podskup $\mathcal{S}$ skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, skup operatora koji zadovoljavaju jednačine opisane uslovima u skupu $\mathcal{S}$ označen je sa $A\{\mathcal{S}\}$. Operator $B \in A\{\mathcal{S}\}$ nazivamo $\mathcal{S}$-inverzom od A i često označavamo sa $A^{(\mathcal{S})}$. Ako je A g-invertibilan, odnosno $\mathcal{R}(A)$ zatvoren, skup $A\{1, 2, 3, 4\}$ se sastoji od jednog elementa, Moore-Penroseovog inverza od A, kojeg označavamo sa $A^\dagger$.

Ako su M i N pozitivni i invertibilni operatori, zanimljivo je zajedno sa uslovima (1) i (2) posmatrati i uslove

$$(3M)\qquad (MAB)^* = MAB \qquad\qquad (4N)\qquad (NBA)^* = NBA.$$

Dobro je poznato da postoji jedinstven oeprator B koji zadovoljava uslove (1), (2), (3M) i (4N). Takav operator B zovemo težinskim inverzom operatora A u odnosu na težine M i N, i označavamo ga sa $A^\dagger_{M,N}$. U ovom odeljku biće pokazana jedna reprezentacija operatora $A^\dagger_{M,N}$ uz korišénje dekompozicije potpunog ranga.

Započninjemo izučavanjem opštih reprezentacija refleksivnih g-inverza, $\{1,2,3\}$ i $\{1,2,4\}$-inverza, Moore-Penroseovog, težinskog Moore-Penroseovog inverza i grupnog inversa ograničenih operatora koji deluju na proizvoljnim Hilbertovim prostorima. Ove reprezentacije, kao što je ranije napomenuto, izražene su u termima operatora koji čine dekompoziciju potpunog ranga (FR), kao i određenih početnih uslova, koje namećemo u zavisnosti od toga koju klasu generalisanih inverza želimo da dobijemo. Istražujemo potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju takvih opštih reprezentacija.

Naredno tvrđenje često koristimo.

Propozicija 3.2. *Ako je $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjekcija, tada je SS^* invertibilan i $S^\dagger$ je desni inverz operatora S. Analogno, ako je $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ injekcija sa zatvorenom slikom, onda je T^*T invertibilan i $T^\dagger$ je levi inverz operatora T.*

Formulišimo dobro poznati rezultat [110, p. 20, 28].

Lema 3.3. *Ako je $A = PQ$ dekompozicija potpunog ranga operatora $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ prema (FR), onda:*

(a) *Operator Q_r^{-1} je desni inverz operatora Q ako i samo ako postoji operator $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$ takav da je QW_1 invertibilan, i u tom slučaju važi: $Q_r^{-1} = W_1(QW_1)^{-1}$.*

(b) *Operator P_l^{-1} je levi inverz operatora P ako i samo ako postoji operator $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tako da je W_2P invertibilan i u tom slučaju važi: $P_l^{-1} = (W_2P)^{-1}W_2$.*

(c) *Operator B je refleksivni g-inverz operatrora A ako i samo ako je $B = Q_r^{-1}P_l^{-1}$ za neki desni inverz Q_r^{-1} od Q i neki levi inverz P_l^{-1} od P.*

U literaturi su poznate brojne reprezentacije različitih klasa generalisanih inverza kompleksnih matrica. Opšta reprezentacija $\{1,2\}$-inverza matrica razmatrana je u [99] i [110, p. 20, 28]. Opšte reprezentacije $\{1,2,3\}$- i $\{1,2,4\}$- inverza matrica razmatrane su u [99]. U [22] je pokazana opšta reprezentacija i dati su uslovi egzistencije grupnog inverza kompleksne matrice. Opšta reprezentacija Moore-Penroseovog inverza data je u [14], i važi za ograničene operatrore na proizvoljnim Hilbertovim prostorima.

Pokazaćemo sada opštu reprezentaciju $\{1,2\}$-, $\{1,2,3\}$- i $\{1,2,4\}$-inverza ograničenih operatora na proizvoljnim Hilbertovim prostorima. Kao posledicu, dobićemo dobro poznatu reprezentaciju Moore-Penroseovog inverza iz [14].

Teorema 3.4. *Neka je $A = PQ$ dekompozicija potpunog ranga operatora $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ prema (FR). Tada:*

(a) $B \in A\{1,2\}$ *ako i samo ako postoje operatori* $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$ *i* $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, *tako da su* QW_1 *i* W_2P *invertibilni u* $\mathcal{L}(Z)$. *U tom slučaju* B *ima sledeću opštu reprezentaciju*

$$B = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2$$

(b) $B \in A\{1,2,3\}$ *ako i samo ako postoji operator* $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$, *takav da je* QW_1 *invertibilan u* $\mathcal{L}(Z)$. *U tom slučaju opšta reprezentacija operatora* B *jeste:*

$$B = W_1(QW_1)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*.$$

(c) $B \in A\{1,2,4\}$ *ako i samo ako postoji operator* $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, *takav da je* W_2P *invertibilan u* $\mathcal{L}(Z)$. *U tom slučaju važi*

$$B = Q^*(QQ^*)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2.$$

(d) $A^\dagger = Q^\dagger P^\dagger = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* = Q^*(P^*AQ^*)^{-1}P^*.$

Dokaz. (a) Sledi na osnovu Leme 3.3.

(b) Ako B ima navedenu formu, tada nije teško proveriti $B \in A\{1,2,3\}$.

Treba pokazati da forma (b) važi za sve $\{1,2,3\}$ inverze operatora A. Pretpostavimo da je $B \in A\{1,2,3\}$. Prema delu (a) zaključujemo da postoje operatori $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$ i $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, tako da su QW_1 i W_2P invertibilni u $\mathcal{L}(Z)$. Takođe važi

$$B = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2.$$

Iz činjenice da B zadovoljava jednačinu (3), proizilazi

$$(PQW_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2)^* = PQW_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2,$$

odnosno

$$W_2^*((W_2P)^*)^{-1}P^* = P(W_2P)^{-1}W_2.$$

Množenje s leva operatorom W_2 proizvodi

$$W_2 = (W_2W_2^*)((W_2P)^*)^{-1}P^*.$$

Kako je W_2P invertibilan, sledi da je W_2 desno invertibilan, a $W_2W_2^*$ je invertibilan. Koristeći dobijenu formu za W_2, zaključujemo:

$$\begin{aligned} B &= W_1(QW_1)^{-1}[(W_2W_2^*)((W_2P)^*)^{-1}(P^*P)]^{-1}(W_2W_2^*)((W_2P)^*)^{-1}P^* \\ &= W_1(QW_1)^{-1}(P^*P)^{-1}(W_2P)^*(W_2W_2^*)^{-1}(W_2W_2^*)((W_2P)^*)^{-1}P^* \\ &= W_1(QW_1)^{-1}(P^*P)^{-1}P^*. \end{aligned}$$

Tvrđenje (c) sledi na isti način kao i (b). Tvrđenje (d) je sada neposredna posledica tvrđenja (b) i (c). $\square$

Sada ćemo razmtarati težinski Moore-Penroseov inverz. Težinski Moore-Penroseov invers je izučavan u [7, 95, 110] za kompleksne matrice i matrice nad integralnim domenom. Takođe, posmatran je i težinski Moore-Penroseov inverz pod slabijim uslovima, kada su matrice M i N invertibilne, ne obavezno pozitivne [7, 95, 96, 110].

Podsetimo se da je T na Hilbertovom prostoru je pozitivan, ako važi $(Tx, x) > 0$ za svaki $x \neq 0$. Ako je T pozitivan i invertibilan, onda važi $\inf_{\|x\|=1}(Tx, x) > 0$.

Teorema 3.5. *Neka je $A = PQ$ dekompozicija potpunog ranga operatora A prema (FR). Ako su $M \in \mathcal{L}(Y)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni i invertibilni operatori tada je $A^\dagger_{M,N}$ jedinstven i važi:*

$$\begin{aligned} A^\dagger_{M,N} &= (QN^{-1})^*(Q(QN^{-1})^*)^{-1}((MP)^*P)^{-1}(MP)^* \\ &= N^{-1}Q^*(QN^{-1}Q^*)^{-1}(P^*MP)^{-1}P^*M. \end{aligned}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da su $Q(QN^{-1})^*$ i $(MP)^*P$ pozitivni i invertibilni operatori u $\mathcal{L}(Z)$. Ako je $x \in Z$ i $\|x\| = 1$, tada

$$(Q(QN^{-1})^*x, x) = (N^{-1}Q^*x, Q^*x) > 0.$$

Pretpostavimo da važi $\inf\limits_{\|x\|=1}(Q(QN^{-1})^*x, x) = 0$. Tada postoji niz jediničnih vektora $(x_n)_n$ u Z, tako da važi $\lim\limits_n (N^{-1}Q^*x_n, Q^*x_n) = 0$. Kako je N^{-1} pozitivan i invertibilan, sledi da postoji podniz $(x_{n_k})_k$ niza $(x_n)_n$, tako da važi $\lim\limits_k Q^*x_{n_k} = 0$. Sada zaključujemo da Q^* nije injekcija sa zatvorenom slikom, i stoga Q nije surjekcija. Ovo je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom o dekompoziciji potpunog ranga. Zaključujemo da je $Q(QN^{-1})^*$ pozitivan i invertibilan u $\mathcal{L}(Z)$. Analogno, možemo pokazati da je $(MP)^*P$ pozitivan i invertibilan u $\mathcal{L}(Z)$.

Koristeći upravo dobijene činjenice, lako je proveriti da forma u teoremi daje težinski Moore-Penroseov inverz operatora A.

Da bi pokazali jedinstvenot težinskog Moore-Penroseovog inverza, pretpostavimo da neki operator $B \in A\{1,2\}$ zadovoljava jednačine (3M) i (4N). Prema Teoremi 3.4 (a) sledi da postoje podesno izabrani operatori W_1 i W_2, tako da važi

$$X = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2.$$

Kako X zadovoljava (3M), sledi da važi

$$[MP(QW_1)(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2]^* = MP(QW_1)(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}W_2,$$

ili, ekvivalentno

$$W_2^*((W_2P)^*)^{-1}P^*M = MP(W_2P)^{-1}W_2.$$

Množenjem prethodne jednakosti operatorom W_2M^{-1} sa leve strane, proizilazi

$$W_2 = W_2M^{-1}W_2^*((W_2P)^*)^{-1}P^*M.$$

Sada je

$$W_2P = W_2M^{-1}W_2^*((W_2P)^*)^{-1}P^*MP.$$

Iz prvog dela dokaza sledi da je $P^*MP = (MP)^*P$ invertibilan. Kako su $((W_2P)^*)^{-1}$ i W_2P invertibilni, zaključujemo da je $W_2M^{-1}W_2^*$ invertibilan i

$$(W_2P)^{-1} = ((MP)^*P)^{-1}(W_2P)^*(W_2M^{-1}W_2^*)^{-1}.$$

Slično, kako X zadovoljava (4N), dobijamo

$$[W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}(W_2P)QN]^* = W_1(QW_1)^{-1}(W_2P)^{-1}(W_2P)QN,$$

i

$$NQ^*((QW_1)^*)^{-1}W_1^* = W_1(QW_1)^{-1}QN.$$

Sukcesivnim množenjem prethodne jednakosti operatorom $N^{-1}W_1$ s desna, i operatorom Q s leva, zaključujemo da važi

$$QW_1 = QNQ^*((QW_1)^*)^{-1}W_1^*N^{-1}W_1.$$

Iz prvog dela dokaza sledi da je $QNQ^* = Q(QN)^*$ invertibilan. Kako su $((QW_1)^*)^{-1}$ i QW_1 invertibilni, sledi da je $W_1^*N^{-1}W_1$ invertibilan i

$$(QW_1)^{-1} = (W_1^*N^{-1}W_1)^{-1}(QW_1)^*(Q(QN)^*)^{-1}.$$

Koristimo dobijene forme za W_1, $(QW_1)^{-1}$, W_2 i $(W_2P)^{-1}$, da bi dobili

$$B = (QN)^*(Q(QN)^*)^{-1}((MP)^*P)^{-1}(MP)^*. \quad \Box$$

TEOREME GROETCHOVOG TIPA

U ovom odeljku koristićemo fundamentalni rezultat Groetcha o opštoj reprezentaciji Moore-Penroseovog inverza ograničenog operatora [18, 46, 47], za izračunavanje nekih klasa generalisanih inverza opratora na Hilbertovom prostoru. Groetchova teorema sledi.

Teorema 3.6. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ operator sa zatvorenom slikom. Tada* [47, p. 45]

$$T^\dagger = \tilde{T}^{-1}T^*, \quad \text{gde je} \ \ \tilde{T} = T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)}. \tag{5}$$

Ako je Ω otovoren skup sa svojstvom $\sigma(\tilde{T}) \subset \Omega \subset (0,\infty)$, i $\{S_\beta(x)\}_\beta$ je familija neprekidnih realnih funkcija na Ω, sa svojstvom $\lim\limits_{\beta} S_\beta(x) = \frac{1}{x}$ uniformno na $\sigma(\tilde{T})$, tada [18, p. 42], [46], [47, p. 57]

$$T^\dagger = \lim_{\beta} S_\beta(\tilde{T})T^*, \tag{6}$$

gde je konvergencija po normi prostora $\mathcal{L}(Y, X)$. *Štaviše,*

$$\|S_\beta(\tilde{T})T^* - T^\dagger\| \leq \sup_{x \in \sigma(\tilde{T})} |xS_\beta(x) - 1| \cdot \|T^\dagger\|.$$

Ovde se podrazumeva da je granični proces uzet po β, gde je β elemenat nekog usmerenog skupa $\mathcal{B}$ (videti, na primer, [104]).

Uvešćemo dve generalizacije Groetchove reprezentacije (5) i (6) Moore-Penroseovog inverza. Ovakav pristup je nov čak i kada se radi o matricama. Dobijena generalizacija sadrži i reprezentaciju koja je zasnovana na iterativnom metodu povećanog stepena (hyper-power) za izračunavanje generalisanih inverza matrica u [123].

Sledeći rezultat proširuje Teoremu 3.6 na izračunavanje klase svih refleksivnih generalisanih inverza.

Teorema 3.7. *Neka je* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *operator sa zatvorenom slikom,* $A = PQ$ *je dekompozicija potpunog ranga operatora* A *i* $W_1 \in \mathcal{L}(Z, X)$, $W_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Pretpostavimo da je* QW_1 *desno invertibilan,* W_2P *je levo invertibilan,* $W = W_2AW_1$ *i* $\tilde{W} = W^*W|_{\mathcal{R}(W^*)}$. *Ako je* Ω *otvoren podskup i* $\sigma(\tilde{W}) \subset \Omega \subset (0, \infty)$, *a* $\{S_\beta(x)\}_\beta$ *je familija neprekidnih realnih funkcija na* Ω, *tako da* $\lim_\beta S_\beta(x) = \frac{1}{x}$ *uniformno na* $\sigma(\tilde{W})$, *tada:*

$$B = \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 \in A\{1, 2\},$$

gde važi konvergencija po normi prostora $\mathcal{L}(Y, X)$.

Štaviše,

$$\|W_1S_\beta(\tilde{W})W^*W_2 - B\| \leq \|W_1\| \sup_{x \in \sigma(\tilde{T})} |xS_\beta(x) - 1| \cdot \|W^\dagger\|\|W_2\|.$$

Dokaz. Kako je $W = (W_2P)(QW_1)$, QW_1 je surjekcija, W_2P je injekcija i $\mathcal{R}(W_2P)$ je zatvoren, sledi da je $\mathcal{R}(W) = \mathcal{R}(W_2P)$, te možemo primeniti Teoremu 3.8 na operator W umesto operatora T. Zaključujemo da je

$$B = \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 = W_1(W_2AW_1)^\dagger W_2 = W_1((W_2P)(QW_1))^\dagger W_2.$$

Operatori W_2P i QW_1 čine dekompoziciju potpunog ranga operatora W, što znači $(W_2P)(QW_1))^\dagger = (QW_1)^\dagger(W_2P)^\dagger$ (videti rad Bouldina [14], kao i razmatranje u prethodnom odeljku). Kako je $(QW_1)^\dagger$ desni inverz operaotra QW_1, a $(W_2P)^\dagger$ je levi inverz operatora W_2P, lako zaključujemo da važi

$$B = W_1(QW_1)^\dagger(W_2P)^\dagger W_2 \in A\{1,2\}. \quad \square$$

Slični rezultati mogu biti formulisani za potklase svih refleksivnih generalisanih inverza. Na primer, ako je $W_1 = Q^*$ tada je $B \in A\{1,2,3\}$. Takođe, ako je $W_2 = P^*$ tada je $X \in A\{1,2,4\}$. Formulišemo sledeći pojednostavljeni rezultat.

Posledica 3.8. *Neka operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ima zatvorenu sliku i $A = PQ$ je dekompozicija potpunog ranga od A prema (FR). Neka je $\{S_\beta(x)\}_\beta$ familija neprekidnih realnih funkcija na $(0,+\infty)$, tako da $\lim_\beta S_\beta(x) = \frac{1}{x}$ uniformno na svim kompaktnim podskupovima od $(0,+\infty)$. Tada:*

(a) *$B \in A\{1,2\}$ ako i samo ako postoje operatori $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$, $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $W = W_2AW_1$, tako da su QW_1 i W_2P invertibilni i*

$$B = \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^* W_2.$$

(b) *$B \in A\{1,2,3\}$ ako i samo ako postoji $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tako da je W_2P invertibilan i*

$$B = \lim_\beta Q^* \left[S_\beta(\widetilde{W_2AQ^*})\right] (W_2AQ^*)^* W_2.$$

(c) *$B \in A\{1,2,4\}$ ako i samo ako postoji $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$ tako da je QW_1 levo invertibilan i*

$$B = \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\widetilde{P^*AW_1})\right] (P^*AW_1)^* P^*.$$

(d) *$A^\dagger = \lim_\beta Q^* \left[S_\beta(\widetilde{P^*AQ^*})\right] (P^*AQ^*)^* P^*$;*

(e) *Ako su $M \in \mathcal{L}(Y)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni i invertibilni operatori, tada*

$$A^\dagger_{M,N} = \lim_\beta (QN^{-1})^* \left[S_\beta(\tilde{D})\right] D^*(MP)^*,$$

gde je $D = (MP)^* A (QN^{-1})^*$, *ili* $D = P^* MAN^{-1} Q^*$;

(f) *Ako je* $l \geq k = s\text{-ind}\, A$ *i* $Q_{A^l} A P_{A^l}$ *je invertibilan, tada je*

$$A^D = \lim_{\beta} P_{A^l} \left[S_\beta(\widetilde{Q_{A^l} A P_{A^l}}) \right] (Q_{A^l} A P_{A^l})^* Q;$$

(g) *Ako je* QP *invertibilan, tada*

$$A^\# = \lim_{\beta} P \left[S_\beta^W(\widetilde{QAP}) \right] (QAP)^* Q = \lim_{\beta} P \left[S_\beta^W(\widetilde{(QP)^2}) \right] [(QP)^2]^* Q;$$

Konvergencija je po normi prostora $\mathcal{L}(Y, X)$.

Dokaz. (a), (b) i (c) slede iz Teoreme 3.4 kao specijalni slučajevi za $W_1 = Q^*$ ili $W_2 = P^*$.

(d) Sledi na osnovu Teoreme 3.4 i (a), za $W_1 = Q^*$ i $W_2 = P^*$.

(e) sledi na osnovu Teoreme 3.5.

(f) i (g) slede iz Teoreme 3.4. $\square$

Potreban je sledeći rezultat.

Propozicija 3.9. *Neka je* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *operator sa zatvorenom slikom, neka je* Ω *otovoren skup za koji važi* $\sigma(T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)}) \cup \sigma(TT^*|_{\mathcal{R}(T)}) \subset \Omega \subset (0, \infty)$, *i neka je* $\{S_\beta(x)\}_\beta$ *familija neprekidnih realnih funkcija na* Ω, *sa svojstvom* $\lim_{\beta} S_\beta(x) = \frac{1}{x}$ *uniformno na* $\sigma(T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)}) \cup \sigma(TT^*|_{\mathcal{R}(T)})$. *Tada važi*

$$\lim_{\beta} T^* \left[S_\beta(TT^*|_{\mathcal{R}(T)}) \right] = \lim_{\beta} \left[S_\beta(T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)}) \right] T^* = T^\dagger.$$

Dokaz. Koristeći Weierstrassovu teoremu o aproksimaciji neprekidnih funkcija polinomom, zaključujemo da je operator $S_\beta(T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)})$ samoadjungovan na potprostoru $\mathcal{R}(T^*)$ i $S_\beta(TT^*|_{\mathcal{R}(T)})$ je samoadjungovan na potprostoru $\mathcal{R}(T)$. Prema Teoremi 3.6 zaključujemo da vredi

$$\begin{aligned} \lim_{\beta} T^* \left[S_\beta(TT^*|_{\mathcal{R}(T)}) \right] &= \lim_{\beta} \left(\left[S_\beta(TT^*|_{\mathcal{R}(T)}) \right] T \right)^* = \left((T^*)^\dagger \right)^* = T^\dagger \\ &= \lim_{\beta} \left[S_\beta(T^*T|_{\mathcal{R}(T^*)}) \right] T^*. \quad \square \end{aligned}$$

Sledeći rezultat je najvažniji u ovom odeljku.

Teorema 3.10. *Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ operator sa zatvorenom slikom, $A = PQ$ je dekompozicija potpunog ranga operatora A, $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$, $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $W = W_2AW_1 \in \mathcal{L}(Z)$.*

(a) *Ako važi: W_2 je unitaran, QW_1 je desno invertibilan i S_β je famlija koja ima svojstva iz Teoreme 3.6 za $T = AW_1$, tada*

$$\lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 = W_1(AW_1)^\dagger \in A\{1,2,3\}.$$

(b) *Ako važi: W_1 je unitaran, W_2P je levo invertibilan i S_β je familija koja zadovoljava uslove iz Teoreme 3.6 za $T = A^*W_2^*$, tada*

$$\lim_\beta W_1W^* \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W_2 = (W_2A)^\dagger W_2 \in A\{1,2,4\}.$$

(c) *Ako su W_1 i W_2 unitarni, i ako S_β ima svojstva iz (a) i (b), tada*

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 = W_1(AW_1)^\dagger \\ &= \lim_\beta W_1W^* \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W_2 = (W_2A)^\dagger W_2. \end{aligned}$$

(d) *Ako (a) važi i $W_1 = Q^*$, tada*

$$\lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 = Q^*(AQ^*)^\dagger = A^\dagger.$$

(e) *Ako (b) važi i $W_2 = P^*$, tada*

$$\lim_\beta W_1W^* \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W_2 = (P^*A)^\dagger P^* = A^\dagger.$$

Proof. (a) Operator W_2 je unitaran, što povlači

$$W^*W = (AW_1)^*AW_1, \quad W^*W_2 = (AW_1)^*.$$

Kako je $W^* = (AW_1)^*W_2^*$ i W_2 je invertibilan, sledi da je $\mathcal{R}(W^*) = \mathcal{R}((AW_1)^*)$. Koristeći Teoremu 3.6 zaključujemo

$$B = \lim_\beta W_1 \left[S_\beta(\tilde{W})\right] W^*W_2 = W_1(AW_1)^\dagger \in A\{2,3\}.$$

Treba pokazati $W_1(AW_1)^\dagger \in A\{1\}$. Primetimo da je $B = W_1[P(QW_1)]^\dagger$. Sada, P je levo invertibilan, QW_1 je desno invertibilan, i stoga $P(QW_1)$ je dat kao dekompozicija potpunog ranga. Koristeći rezultat iz Teoreme 3.4 (d), sledi $B = W_1(QW_1)^\dagger P^\dagger$. Sada je jednostavno proveriti jednačinu (1) .

(b) Koristićemo dokaz (a) sa sledećim izmenama: A^* umesto A, W_2^* umesto W_1, i W_1^* umesto W_2. Primetimo daje W_1^* unitaran i $(W_2P)^* = P^*W_2^*$ je desno invertibilan. U ovom slučaju važi $W_1W^* = A^*W_2^*$, $WW^* = W_2A(W_2A)^*$, $\mathcal{R}(W_2A) = \mathcal{R}(W)$ i $\widetilde{W^*} = (\widetilde{W_2A})^*$. Koristeći Weierstrassovu aproksimacionu teoremu zaključujemo da je operator $S_\beta(W_2A(W_2A)^*|_{\mathcal{R}(W_2A)})$ samoadjungovan, i stoga je

$$\begin{aligned}&\lim_\beta (A^*W_2^*)\left[S_\beta(W_2A(W_2A)^*|_{\mathcal{R}(W_2A)})\right]W_2 = \\ &= \lim_\beta \left\{W_2^*\left[S_\beta((A^*W_2^*)^*A^*W_2^*|_{\mathcal{R}[(A^*W_2^*)^*]})\right](A^*W_2^*)^*\right\}^* = (W_2^*(A^*W_2^*)^\dagger)^*.\end{aligned}$$

Prema delu (a) znamo da važi $W_2^*(A^*W_2^*)^\dagger \in A^*\{1,2,3\}$, i, prema tome,

$$(W_2^*(A^*W_2^*)^\dagger)^* = (W_2A)^\dagger W_2 \in A\{1,2,4\}.$$

(c) Dovoljno je pokazati da procesi iz (a) i (b) konvergiraju ka istom operatoru. Ako je W_2 unitaran, iz dokaza tvrđenja (a) sledi $\tilde{W} = \widetilde{AW_1}$. Ako je W_1 unitaran, iz dokaza tvrđenja (b) zaključujemo $\widetilde{W^*} = (\widetilde{W_2A})^*$. Sada, prema Propoziciji 3.9, (a) i (b) sledi:

$$\begin{aligned}W_1(AW_1)^\dagger &= \lim_\beta W_1\left[S_\beta((AW_1)^*AW_1|_{\mathcal{R}[(AW_1)^*]})\right](AW_1)^*W_2^*W_2 \\ &= \lim_\beta W_1\left[S_\beta(W^*W|_{\mathcal{R}(W^*)})\right]W^*W_2 = W_1W^\dagger W_2 \\ &= \lim_\beta W_1W^*\left[S_\beta(WW^*|_{\mathcal{R}(W)})\right]W_2 = \lim_\beta A^*W_2^*\left[S_\beta(WW^*|_{\mathcal{R}(W)})\right]W_2 \\ &= \lim_\beta A^*W_2^*S_\beta(W_2A(W_2A)^*|_{\mathcal{R}(W_2A)})W_2 = (W_2A)^\dagger W_2. \quad \square\end{aligned}$$

Koristeći različite familije S_β kao u [18, 47, 48], možemo dobiti reprezentacije $\{1,2\}$-inverza. Očigledno, analogni rezultati mogu biti formulisani i za $\{1,2,3\}$-inverze, $\{1,2,4\}$-inverze, Moore-Penroseov inverz, težinski Moore-Penroseov inverz, Drazinov i grupni inverz.

Posledica 3.11. *Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ operator sa zatvorenom slikom, $A = PQ$ je dekompozicija potpunog ranga operatora A i neka su $W_1 \in \mathcal{L}(Z,X)$, $W_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$ takvi operatori, da važi: QW_1 je desno invertibilan, a W_2P je levo invertibilan. Neka je $W = W_2AW_1$ i $\tilde{W} = W^*W|_{\mathcal{R}(W^*)}$. Tada važe sledeće reprezentacije refleksivnih g-inverza, koje konvergiraju po normi u prostoru $\mathcal{L}(Y,X)$:*

(a) $A^{(1,2)} = W_1 \left[\int\limits_0^\infty e^{-W^*Wu} W^* du \right] W_2$;

(b) $A^{(1,2)} = \alpha W_1 \sum\limits_{k=0}^\infty (I - \alpha W^*W)^k W^*W_2$, *gde je* $0 < \alpha < 2\|W\|^{-2}$;

(c) $A^{(1,2)} = W_1 \lim\limits_{t \to 0_+} (tI + W^*W)^{-1} W^*W_2$;

(d) $A^{(1,2)} = W_1 \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{1}{k+1} \left(\prod\limits_{j=0}^{k-1} \left(I - \dfrac{1}{j+1} W^*W \right) \right) W^*W_2$;

(e) $A^{(1,2)} = W_1 \lim\limits_{t \to 0_+} \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{1}{\Gamma(1+tk)} [I - W^*W]^k W^*W_2$;

(f) $A^{(1,2)} = W_1 \left(W^* + \lim\limits_{t \to 0_+} \sum\limits_{k=1}^\infty e^{-tk\log k} [I - W^*W]^k W^* \right) W_2$;

(g) $A^{(1,2)} = W_1 \lim\limits_{t \to 0_+} \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{\Gamma(1+(1-t)k)}{\Gamma(1+k)} [I - W^*W] W^*W_2$.

(h) *Sledeća dva iterativna procesa generišu klasu svih refleksivnih generalisanih inverza operatora A (videti rad* [123]*):*

$$Y_0 = Y_0' = \alpha(W_2AW_1)^*, \qquad 0 < \alpha \le 2\|W\|^{-2},$$

$$\begin{cases} T_k = I_X - Y_kW, \\ Y_{k+1} = (I_X + T_k + \cdots + T_k^{q-1})Y_k, \\ X_{k+1} = W_1Y_{k+1}W_2 \end{cases} \begin{cases} T_k' = I_Y - WY_k', \\ Y_{k+1}' = Y_k'(I_Y + T_k' + \cdots + T_k'^{q-1}), \\ X_{k+1}' = W_1Y_{k+1}'W_2 \quad k = 0,1,\ldots \end{cases}$$

Primedba 3.12. *Iterativni procesi u (h) predstavljaju generalizaciju generalizaciju rada* [123].

Za proces definisan u prethodnoj teoremi (h), mogu se dati sledeće procene grešaka [123] (videti knjigu Milovanovića [86] za slične procene kod obične inverzije operatora, kao i za opis reda konvergencije iterativnog metoda):

Teorema 3.13. *Neka važi (h) iz prethodne teroeme. Tada važi:*

(a) $\|X - X_k\| \leq \dfrac{\|Y_k T_k\|}{1 - \|T_k\|} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(b) $\|X - X_k\| \leq \|T_{k-1}\|^{q-1} \dfrac{\|Y_{k-1} T_{k-1}\|}{1 - \|T_{k-1}\|} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(c) $\|X - X_k\| \leq \|T_0\|^{q^k} \dfrac{\|Y_0\|}{1 - \|T_0\|} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(d) $\|X - X_k\| \leq \dfrac{\|Y'_k\| \cdot \|T'_k\|}{1 - \|T'_k\|} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(e) $\|X - X_k\| \leq \dfrac{\|Y'_k\| \cdot \|T'_{k-1}\|^q}{1 - \|T'_{k-1}\|^q} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(f) $\|X - X_k\| \leq \dfrac{\|Y'_k\| \cdot \|T'_{k-1}\| \|(T'_{k-1})^{q-1}\|}{1 - \|T'_{k-1}\|} \|W_1\| \cdot \|W_2\|$,

(f) *Red konvergencije definisanog procesa je q, odnosno.*

$$\|X - X_{k+1}\| = O\left(\|X - X_k\|^q\right), \quad k \to \infty.$$

Ako se radi o matricama, onda $\|T\|$ označava spektralnu normu matrica, koja prirodno odgovara normi operatora T na konačno dimenzionalnim Hilbertovim prostorima [86].

Primedba 3.14. *U radu* [77] *je takođe uvedena alternativna modifikacija iterativnog metoda povećanog stepena, koja generiše klasu svih $\{1\}$-inverza operatora na Banachovom prostoru. Možemo primetiti da je teže proveriti početne uslove u radu* [77]*, nego u radu* [123]*. Osim toga, u radu* [77] *nije jasno kada se dobijaju neke specijalne klase generalisanih inverza.*

DRAZINOV INVERZ I UOPŠTENJA

U ovom odeljku uvešćemo opštu reprezentaciju Drazinovog inverza operatora A, zasnovanu na dekompoziciji potpunog ranga operatora A^l, $l \geq k = \operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A)$. Koristićemo i core-nilpotentnu dekompoziciju operatora $A \in \mathcal{L}(X)$. Pretpostavljamo da je X proizvoljan Banachov prostor. Naime, A^D postoji ako i samo ako je $\operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A) = k < \infty$. U tom slučaju je $X_1 = \mathcal{N}(A^k)$, $X_2 = \mathcal{R}(A^k)$,

$$X = X_1 \oplus X_2 \tag{7}$$

i ova dekompozicija redukuje operator A. Restrikcija operatora A na potprostor X_1 je nilpotentan operator, a restrikcija na potprostor X_2 je invertibilan operator. Naravno, prethodne napomene vrede pod dodatnom pretpostavkom da A nije nilpotentan operator, odnosno $A^D \neq 0$. Tada u odnosu na prethodno opisanu dekompoziciju možemo pisati

$$A = A_1 \oplus A_2 \qquad \text{i} \qquad A^D = 0 \oplus A_2^{-1}, \tag{8}$$

gde je $A_i = A|_{X_i}$, $i = 1, 2$.

Sledeća teorema je prirodna generalizacija Clineovog rezultata iz [22] i nije poznata za matrice.

Teorema 3.15. *Neka je X Banachov prostor. Ako je $A \in \mathcal{L}(X)$, $l \geq k = \operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A) < \infty$ i $A^l = P_{A^l} Q_{A^l}$ dekompozicija potpunog ranga operatora A^l, tada*

$$A^D = P_{A^l}(Q_{A^l} A P_{A^l})^{-1} Q_{A^l}.$$

Dokaz. Podsetimo se dekompozicija (7) i (8). Kako su $\mathcal{N}(A^l)$ i $\mathcal{R}(A^l)$ zatvoreni i komplementarni potprostori od X, sledi da je A^l is g-invertibilan. Prema tome, postoji dekompozicija potpunog ranga $A^l = P_{A^l} Q_{A^l}$, gde je $P_{A^l} \in \mathcal{L}(Z, X)$ levo invertibilan, a $Q_{A^l} \in \mathcal{L}(X, Z)$ desno invertibilan, za neki Banachov prostor Z. Prema teoremi o izomorfizmu [18], možemo uzeti $Z = X_2$. Koristeći neprekidne projekcije sa X na X_1 i X_2, zaključujemo da P_{A^l} i Q_{A^l} imaju sledeće forme i udnosu na (7):

$$P_{A^l} = \begin{bmatrix} M \\ \tilde{P} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad Q_{A^l} = \begin{bmatrix} N & \tilde{Q} \end{bmatrix},$$

gde su $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathcal{L}(X_2)$, $M \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$, $N \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Operator P_{A^l} je levo invertibilan, a Q_{A^l} je desno invertibilan. Odavde sledi da su P_{A^l} i Q_{A^l} g-invertibilni operatori, $\mathcal{N}(P_{A^l}) = \{0\}$ i $\mathcal{R}(Q_{A^l}) = X_2$. Zaključujemo da važi $\mathcal{R}(P_{A^l}) = \mathcal{R}(A^l) = X_2$ i $\mathcal{N}(Q_{A^l}) = \mathcal{N}(A^l) = X_1$, stoga $M = 0$, $N = 0$,

$$P_{A^l} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{P} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad Q_{A^l} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix}.$$

Lako je proveriti da je $\tilde{P}$ levo invertibilan, a $\tilde{Q}$ je desno invertibilan u $\mathcal{L}(X_2)$. Međutim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^l \end{bmatrix} = A^l = P_{A^l} Q_{A^l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}\tilde{Q} \end{bmatrix},$$

te je $A_2^l = \tilde{P}\tilde{Q}$. Kako je A_2^l invertibilan, sledi da su $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$ invertibilni u $\mathcal{L}(X_2)$.

Sada, $Q_{A^l} A P_{A^l} = \tilde{Q} A_2 \tilde{P}$ je invertibilan u $\mathcal{L}(X_2)$, te je

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}(\tilde{Q} A_2 \tilde{P})^{-1} \tilde{Q} \end{bmatrix} = P_{A^l} (Q_{A^l} A P_{A^l})^{-1} Q. \qquad \square$$

Kao posledicu, možemo pokazati sledeće tvrđneje.

Posledica 3.16. *Ako je X Banachov prostor, $A \in \mathcal{L}(X)$ i $\operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A) = k < \infty$ i $A^l = P_{A^l} Q_{A^l}$ je proizvoljna dekompozicija potpunog ranga operatora A^l, $l \geq k$, tada*

(a) $(A^D)^l = P_{A^l} (Q_{A^l} A^l P_{A^l})^{-1} Q_{A^l} = P_{A^l} (Q_{A^l} P_{A^l})^{-2} P_{A^l}$;

(b) $AA^D = P_{A^l} (Q_{A^l} P_{A^l})^{-1} Q_{A^l}$;

(c) *Ako je X Hilbertov prostor, tada* $(A^D)^\dagger = (Q_{A^l})^\dagger Q_{A^l} A P_{A^l} (P_{A^l})^\dagger$.

Dokaz. (a) Sledi iz $(A^D)^l = (A^l)^\#$ i Teoreme 3.15.

(b) Prema Teoremi 3.15 sledi $Q_{A^l} P_{A^l} = \tilde{Q}\tilde{P}$. Jednostavan račun pokazuje da važi

$$P_{A^l} (Q_{A^l} P_{A^l})^{-1} Q_{A^l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = AA^D.$$

(c) Sledeći "zakon o obrnutom redosledu za Moore-Penroseov inverz" je dobro poznat: ako su X, Y, Z Hilbertovi prostori, $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ je desno invertibilan, $U \in \mathcal{L}(Y, Z)$ je levo invertibilan, tada $(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger$. Sada jednostavno treba primeniti zakon o obrnutom redosledu za Moore-Penroseov inverz na izraz u Teoremi 3.15. $\square$

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra sa jedinicom 1. Koncept Drazinovog inverza u algebri $\mathcal{A}$ je dobro poznat. Naime, ako je $a \in \mathcal{A}$, onda je Drazinov inverz od a, ako postoji, takav elemenat $b \in \mathcal{A}$, za koji važi:

$$a^{k+1} b = a^k, \quad bab = b, \quad ab = ba,$$

za neki nenegativan ceo broj k. Ako postoji, Drazinov inverz nekog elementa je jedinstven i označava se sa a^D. Pri tome najmanji nenegativni ceo broj k u prethodnoj definiciji jeste Drazinov indeks elementa a i oznčava se sa $s\text{-ind}(a)$.

Dobro je poznato da za elemenat a postoji Drazinov inverz, ako i samo ako je tačka $\lambda = 0$ pol rezolvente $\lambda \to (\lambda - a)^{-1}$. Pri tome je red pola jednak Drazinovom indeksu $s\text{-ind}(a)$.

Koliha je u svom radu [72] posmatrao opštiji slučaj. Naime, pretpostavimo da je 0 izolovana tačka spektra $\sigma(a)$. Tada tačka $\lambda = 0$ može biti i esencijalni singularitet rezolvente $\lambda \to (\lambda - a)^{-1}$, i u tom slučaju kažemo da je $s\text{-ind}(a) = \infty$. U ovom slučaju ima smisla posmatrati takozvani generalisani Drazinov inverz od a, u oznaci a^d.

Izložićemo konstrukciju Kolihe u narednom paragrafu. Neka je $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$ i $p = p(a, 0)$ je spektralni idempotent elementa a koji odgovara tački 0. Jedinica Banachove algebre $p\mathcal{A}p$ jeste p, a jedinica Banachove algebre $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ jeste $1-p$. Pretpostavimo da a nije kvazinilpotentan operator. Tada je $ap = pap$ kvazinilpotentan u algebri $p\mathcal{A}p$, a $a(1-p) = (1-p)a(1-p)$ je invertibilan u algebri $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$. Označimo sa $[a(1-p)]^{-1}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}$ običan inverz elementa $a(1-p)$ u algebri $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$. Tada je generalisani Drazinov inverz elementa a definisan kao

$$a^d = [a(1-p)]^{-1}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}.$$

Ako je a kvazinilpotentan, odnosno $(1-p)\mathcal{A}(1-p) = \{0\}$, onda je $a^d = 0$.

Takođe, jedna ekvivalentna reprezentacija generalisanog Drazinovog inverza elementa $a \in \mathcal{A}$ je sledeća. Neka $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$. Definišimo kompleksnu funkciju f, tako da je $f(z) = 0$ u okolini tačke 0, a $f(z) = 1/z$ u okolini skupa $\sigma(a) \setminus \{0\}$. Tada domen funkcije f možemo tako odabrati, da f bude regularna u okolini $\sigma(a)$. Znači, generalisani Drazinov inverz elementa a dobijen je funkcionalnim računom. Ova činjenica povlači da se elemenat a^d nalazi u dvostukom komutantu elementa a. Drugim rečima, ako je $b \in \mathcal{A}$ takav da važi $ab = ba$, onda mora važiti i $ba^d = a^d b$.

Tačka $\lambda = 0$ je pol rezolvente $\lambda \to (\lambda - a)^{1-}$ ako i samo ako je ap nilpotentan elemenat. Znači, u slučaju kada Drazinov inverz elementa $a \in \mathcal{A}$ postoji, onda je on jednak generalisanom Drazinovom inverzu.

U slučaju kada posmatramo generalisani Drazinov inverz od a, pretpostavljaćemo da a nije kvazinilpotentan. Kada posmatramo Drazinov inverz, pretposavljaćemo da

a nije nilpotentan. Drugim rečima, algebra $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ je uvek netrivijalna. Tada je reprezentacija u opštem slučaju

$$a = ap + a(1-p)$$

core-kvazinilpotentna dekompozicija elementa a. U slučaju kada za elemenat a postoji Drazinov inverz, ova dekompozicija, naravno, postaje dobro poznata core-nilpotentna dekompozicija.

Počećemo izlaganje sledećom jednostavnom lemom.

Lema 3.17. *Ako su $a, b, p \in \mathcal{A}$ uzajamno komutativni elementi, tako da je $p^2 = p$, a a, b su invertibilni, tada je*

$$[ap + b(1-p)]^{-1} = a^{-1}p + b^{-1}(1-p) \quad i \quad [ap]^{-1}_{p\mathcal{A}p} = a^{-1}p.$$

Pri tome je $[ap]^{-1}_{p\mathcal{A}p}$ inverz elementa ap u algebri $p\mathcal{A}p$.

Sledeći rezultat je pokazao Koliha [62] i to je generalizacija ranijeg rezultata Caradusa [18].

Lema 3.18. *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$, tada u nekoj probušenoj okolini $\{\lambda : 0 < |\lambda| < r\}$ važi*

$$(\lambda - a)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} a^{n-1}(1 - aa^d) - \sum_{n=1}^{\infty} (a^d)^{n+1}.$$

Navešćemo tvrđenje u kome se generalisani Drazinov inverz izračunava kao jedan specijalni slučaj predefinisanog $\{2\}$-inverza [49].

Teorema 3.19. *Ako $a \in \mathcal{A}$, $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$ i $p = p(a, 0)$, tada*

$$a^d = \lim_{\lambda \to 0} (ga - \lambda)^{-1} g = \lim_{\lambda \to 0} g(ag - \lambda)^{-1},$$

gde je uzeto $g = 1 - p$.

Dokaz. Za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{C}$ primetimo da važi

$$(ga - \lambda) = (a(1-p) - \lambda)p + (a(1-p) - \lambda)(1-p) = -\lambda p + (a - \lambda)(1-p).$$

Postoji neki $\epsilon > 0$, tako da za svako λ, ako je $0 < |\lambda| < \epsilon$, tada postoji $(a-\lambda)^{-1}$ i sledi

$$\begin{aligned}(ga-\lambda)^{-1}g &= \left[-\frac{1}{\lambda}p + (a-\lambda)^{-1}(1-p)\right](1-p) \\ &= (a-\lambda)^{-1}(1-p) = [(a-\lambda)(1-p)]^{-1}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}.\end{aligned}$$

Kako je $a(1-p)$ invertibilan u $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$, sledi da je

$$\lim_{\lambda\to 0}(ga-\lambda)g = a^D. \quad \square$$

Sledeći rezultat je generalizacija široke klase poznatih rezultata za matrice i neke specijalne operatore na Banachovom prostoru [83].

Propozicija 3.20. *Neka je $a \in \mathcal{A}$, $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$ i neka su s, l, t pozitivni celi brojevi. Tada*

$$\lim_{\lambda\to 0}(\lambda + a^s)^{-l}(a^d)^t = (a^d)^{sl+t}.$$

Dokaz. Neka je $p = p(a, 0)$. Koristeći prethodne oznake i rezultate, zaključujemo da važi:

$$\begin{aligned}&(\lambda + a^s)^{-l}(a^d)^t = \\ &= ((\lambda + a^s)^{-l}p + (\lambda + a^s)^{-l}(1-p))(a^d)^t(1-p) \\ &= [(\lambda + a^s)(1-p)]^{-l}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}[a(1-p)]^{-t}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}.\end{aligned}$$

Kako granična vrednost $\lim_{\lambda\to 0}[a^s(1-p)]^{-l}_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}$ postoji i jednaka je $(a^d)^{ls}$, sledi da važi

$$\lim_{\lambda\to 0}(\lambda + a^s)^{-l}(a^d)^t = (a^d)^{sl+t}. \quad \square$$

U prethodnoj teoremi dozvoljeno je koristiti granične procese tipa

$$\lim_{\lambda\to 0}(\lambda + a^s)^{-l}(a^d)^t a^r, \quad r \geq 0.$$

Da bi dobili rezultate koji su potrebni za matrice (i u tom slučaju je $a^D = a^d$), potrebno je više puta iskoristiti činjenicu $a^D a a^D = a^D$ [83].

Naredni kombinatroni rezultat je takođe koristan.

Lema 3.21. *Broj elemenata skupa*

$$\{(i_1,\dots,i_l) : i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,n\}, i_1+\cdots+i_l = n\}$$

jednak je $\binom{n-1}{l-1}$*, gde su* $n,l \geq 1$ *proizvoljni celi brojevi.*

Nadalji rezultati nepoznati su čak i kada se radi o kompleksnim kvadratnim matricama. Kao posledice, mogu biti izvedeni rezultati koji su već poznati za matrice i za uzanu klasu ograničenih operatora na Banachovom prostoru (videti [6, 69, 83, 85, 112, 113]).

Došli smo do najvažnijeg rezultata u ovom odeljku. Sledeća teorema nije do sada formulisana za matrice. Međutim, u ovoj teoremi su sadržani svi poznati rezultati koji karakterišu Drazinov indeks proizvoljne matrice u smislu egzistencije određenih graničnih procesa.

Teorema 3.22. *Neka je* $a \in \mathcal{A}$*,* $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a)$ *i razmotrimo granični proces*

$$A = \lim_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^m(\lambda - a^s)^{-l}a^k, \quad m,k \geq 0,\ s,l > 0.$$

Ako je $m < l$*, tada* A *postoji ako i samo ako je* $s\text{-ind}(a) \leq k$*. Ako je* $m \geq l$*, tada* A *postoji ako i samo ako* $s\text{-ind}(a) \leq s(m-l)+k+s$*. U slučaju kada* A *postoji, određen je na sledeći način:*

$$\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 < m < l \ \textit{i}\ s\text{-ind}(a) \leq k, \\ & \textit{ili}\ m \geq l \ \textit{i}\ s(m-l)+k \geq s\text{-ind}(a); \\ (a^D)^{sl}a^k, & m = 0 \ \textit{i}\ s\text{-ind}(a) \leq k; \\ \binom{m-1}{l-1}a^{s\text{-ind}(a)-1}(1-aa^D), & m \geq l \ \textit{i}\ s(m-l)+k = s\text{-ind}(a). \end{cases}$$

Dokaz. Očigledno, $0 \notin \operatorname{acc}\sigma(a^s)$ za proizvoljan ceo broj $s \geq 1$. U tačkastoj okolini od 0, prema Lemi 3.18 sledi da važi sledeće:

$$(\lambda - a^s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}(a^s)^{n-1}(1 - a^s(a^s)^d) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n[(a^s)^d]^{n+1}.$$

Prema Lemi sledi da važi $(a^s)^{n-1}(1-a^s(a^s)^d)[(a^s)^d]^{j+1} = 0$ za sve $n \geq 1$ i $j \geq 0$. Neka $v(n,l)$ označava broj elemenata skupa

$$\{(i_1,\dots,i_l) : i_1+\cdots+i_l = n, i_1,\dots,i_l \in \{0,1,\dots,n\}\}.$$

Primetimo da je $v(0,l)=1$. Sada, za proizvoljan ceo broj $l \geq 1$, koristeí Lemu 3.21 zaključujemo da važi

$$(\lambda - a^s)^{-l} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \binom{n-1}{l-1} (a^s)^{n-l}(1 - a^s(a^s)^d) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n [(a^s)^d]^{n+l} v(n,l).$$

Sada, za proizvoljne cele brojeve $m \geq 0$ i $k \geq 0$ sledi da važi

$$\begin{aligned} A(\lambda) = &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m-n} \binom{n-1}{l-1} (a^s)^{n-1} a^k (1 - a^s(a^s)^d)) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{m+n} [(a^s)^d]^{n+l} a^k v(n,l). \end{aligned} \tag{9}$$

Razmotrimo sada nekoliko slučajeva.

Slučaj I. Neka je $m=0$. Tada (9) postaje

$$\begin{aligned} A(\lambda) = &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m-n} \binom{n-1}{l-1} (a^s)^{n-1} a^k (1 - a^s(a^s)^d)) - [(a^s)^d]^l \\ &- \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-1} [(a^s)^d]^{n+l} a^k v(n,l). \end{aligned} \tag{10}$$

Očigledno, granična vrednost $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)$ postoji ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda (10) iščezava. Dovoljno je pretpostaviti da je prvi koeficijent jednak 0, odnosno $a^k(1 - a^s(a^s)^d)) = 0$. Postoje otvoreni skupovi U i V od $\mathbb{C}$, tako da $0 \in U$, $(\sigma(a) \cup \sigma(a^s)) \setminus \{0\} \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$. Definišimo funkciju $z \to f(z)$ da bude jednaka 0 u U, i jednaka $1/z$ u V. Tada

$$(a^s)^d = f(a^s) = f(a)^s = (a^d)^s,$$

te zaključujemo da važi:

$$0 = a^k(1 - a^s(a^s)^d) = a^k(1 - (aa^d)^s) = a^k(1 - aa^d).$$

Sledi da je s-ind$(a) \leq k$. Na isti način možemo zaključiti da s-ind$(a) \leq k$ implicira

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = [(a^s)^d]^l a^k = (a^D)^{sl} a^k.$$

Slučaj II. Neka je $0 < m < l$. Tada je očigledno da $m - n < 0$ za sve $n \geq l$. Sledi da $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)$ postoji ako i samo ako glavni deo Laurentovog reda (9) iščezava, odnosno $(1 - aa^d)a^k = 0$, te sledi $s\text{-ind}(a) \leq k$. Kako je regularni deo istog reda forme $\lambda B(\lambda)$, gde je $\lambda \to B(\lambda)$ regularna funkcija u okolini od 0, lako zaključujemo da je $A = 0$.

Slučja III. Neka je $m \geq l$. Sledi da (9) ima sledeću formu

$$\begin{aligned} A(\lambda) = & \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda^{m-n} \binom{n-1}{l-1} a^{s(n-l)+k}(1 - aa^d) \\ & + \binom{m-1}{l-1} a^{s(m-l)+k} \lambda C(\lambda), \end{aligned} \tag{11}$$

gde je $\lambda \to C(\lambda)$ regularna funkcija u okolini tačke 0. Granična vrednost $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)$ postoji ako i samo ako glavni deo reda (11) iščezava, odnosno $s\text{-ind}(a) \leq s(m - l) + k + s$. Sada je lako proveriti da je $A = 0$ ako je $s(m - l) + k \geq s\text{-ind}(a)$, i $A = \binom{m-1}{l-1} a^{s\text{-ind}(a)-1}(1 - aa^d)$ ako je $s(m - l) + k = s\text{-ind}(a)$. $\square$

Kao posledice, napomenućemo neke najvažnije rezultate koji su dobro poznati za matrice i usku klasu ograničenih operatora na Banachovom prostoru.

Posledica 3.23. *Ako je $a \in \mathcal{A}$, tada je $s\text{-ind}(a) \leq k$ ako i samo ako granična vrednost*

$$A = \lim_{\lambda\to 0} (\lambda + a)^{-(k+1)} a^k$$

postoji. U tom slučaju je $A = a^D$.

Posledica 3.24. *Neka je $a \in \mathcal{A}$ i neka su m, s nenegativni celi brojevi. Tada je $s\text{-ind}(a) = k < \infty$ i $m + s \geq k$ ako i samo ako granična vrednost*

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^m (\lambda + a)^{-1} a^s$$

postoji. U tom slučaju je

$$A = \begin{cases} 0, & m > 0,\ m + s > k \\ (-1)^{m-1}(1 - aa^d)a^{k-1} & m > 0,\ m + s = k \\ a^s a^D, & m = 0,\ s \geq k \end{cases}$$

Posledica 3.25. *Neka je $a \in \mathcal{A}$. Tada je $s\text{-ind}(a) \le k < \infty$ ako i samo ako granična vrednost*

$$A = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda + a^{k+1})^{-1} a^k$$

postoji. U tom slučaju je $A = a^D$.

Pretpostavimo sada da su X, Y i $X \oplus Y$ Banachovi prostori. Za operatore $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ i $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ posmatramo operator $M_C \in \mathcal{L}(X \oplus Y)$, definisan sa

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Interesuje nas sledeće. Ako za A i B postoje Drazinovi inverzi, da li za M_C postoji Drazinov inverz? Pod kojim uslovima važi obrnuto?

Afirmativni odgovori na ova pitanja su od posebnog interesa i koriste se u poslednjoj, četvrtoj glavi ove disertacije.

Teorema 3.26. *Ako je $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$, $C \in \mathcal{L}(K, H)$ i za A i B postoje Drazinovi inverzi, tada je Drazinov inverz operatora M_C dat na sledeći način*

$$G = \begin{bmatrix} A^D & S \\ 0 & B^D \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} S = {} & (A^D)^2 \left[\sum_{i=0}^{l-1} (A^D)^i C B^i \right] (I - BB^D) \\ & + (I - AA^D) \left[\sum_{i=0}^{k-1} A^i C (B^D)^i \right] (B^D)^2 - A^D C B^D, \end{aligned}$$

i $k = \operatorname{asc}(A)$, $l = \operatorname{asc}(B)$. Tvrđenje ove teoreme je tačno i u slučaju kada su H i K Banachovi prostori, a $H \oplus K$ njihova direktna suma!

Dokaz. Ovaj rezultat je poznat za matrice, ali njegov dokaz suštinski zavisi od činjenice da su H i K konačno dimenzionalni prostori [85]. Potrebno je proveriti da pod navedenim uslovima G zaista jeste Drazinov inverz operatora M_C.

Prvo, proveravamo $M_C^{k+l+1} G = M_C^{k+l}$. Primetimo da

$$M_C^n = \begin{bmatrix} A^n & Q_n \\ 0 & B^n, \end{bmatrix},$$

gde je $Q_n = A^{n-1}C + A^{n-2}CB + \cdots + CB^{n-1}$ za sve pozitivne cele brojeve n. Dovoljno je pokazati da važi $A^{k+l+1}S + Q_{k+l+1}B^D = Q_{k+l}$. Sada, koristeći osobine iz definicije Drazinovog inverza, za $l \geq 1$ sledi:

$$\begin{aligned}
&A^{k+l+1}S + Q_{k+l+1}B^D - Q_{k+l} = \\
&= A^{k+l-1}(C + A^DCB + (A^D)^2CB^2 + \cdots + (A^D)^{l-1}CB^{l-1}) \\
&- A^{k+l-1}(C + A^DCB + (A^D)^2CB^2 + \cdots + (A^D)^{l-1}CB^{l-1})BB^D \\
&+ (A^{k+l-1}CB + A^{k+l-2}CB^2 + \cdots + A^kCB^l)B^D \\
&+ (A^{k-1}CB^l + A^{k-2}CB^{l+1} + \cdots + CB^{k+l-1}) \\
&- A^{k+l-1}C - (A^{k+l-2}CB + A^{k+l-3}CB^2 + \cdots + A^kCB^{l-1}) \\
&- (A^{k-1}CB^l + A^{k-2}CB^{l+1} + \cdots + ACB^{k+l-2} + CB^{k+l-1}) \\
&= A^{k+l-1}(A^DCB + (A^D)^2CB^2 + \cdots + (A^D)^{l-1}CB^{l-1}) \\
&- A^{k+l-1}(C + A^DCB + (A^D)^2CB^2 + \cdots + (A^D)^{l-1}CB^{l-1})BB^D \\
&+ (A^{k+l-1}CB + A^{k+l-1}A^DCB^2 + \cdots A^{k+l-1}(A^D)^{l-1}CB^l)B^D \\
&- (A^{k+l-1}A^DCB + A^{k+l-1}(A^D)^2CB^2 + \cdots + A^{k+l-1}(A^D)^{l-1}CB^{l-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Slučaj $l = 0$ je još jednostavniji i nećemo ga ovde dokazati.

Lako je proveriti da važi $A^DAS + A^DCB^D + SBB^D = S$, odakle sledi $GM_CG = G$.

Na kraju , potrebno je pokazati $M_CG = GM_C$. Dovoljno je pokazati $AS + CB^D = A^DC + SB$. Koristeći $A(A^D)^2 = A^D$ i $B(B^D)^2 = B^D$, imamo

$$\begin{aligned}
&AS + CB^D - A^DC - SB = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{l-1}(A^D)^{i+1}CB^i\right)(I - BB^D) + (I - AA^D)\left(\sum_{i=0}^{k-1}A^{i+1}C(B^D)^{i+2}\right) \\
&- AA^DCB^D + CB^D - A^DC + A^DCB^DB \\
&- \left(\sum_{i=0}^{l-1}(A^D)^{i+2}CB^{i+1}\right)(I - BB^D) - (I - AA^D)\left(\sum_{i=0}^{k-1}A^iC(B^D)^{i+1}\right) \\
&= \left(A^DC - (A^D)^{l+1}CB^l\right)(I - BB^D) + (I - AA^D)\left(A^kC(B^D)^{k+1} - CB^D\right) \\
&- AA^DCB^D + CB^D - A^DC + A^DCB^DB \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Ako za M_C postoji Drazinov inverz, pretpostavljajući neke dodatne uslove, pokazaćemo da za A i B takođe postoje Drazinovi inverzi.

Teorema 3.27. *Neka su dati $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$ i $C \in \mathcal{L}(K,H)$, tako da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$. Ako za M_C postoji Drazinov inverz, tada za A i B takođe postoje Drazinovi inverzi.*

Dokaz. Neka je $z \to f(z)$ kompleksno vrednosna funkcija, definisana i regularna u nekoj okolini od $\sigma(A) \cup \sigma(B)$. Tada je

$$f(M_C) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \begin{bmatrix} (z-A)^{-1} & -(z-A)^{-1}C(z-B)^{-1} \\ 0 & (z-B)^{-1} \end{bmatrix} dz,$$

za povoljno izabranu konturu Γ. Kako je preslikavanje $z \to f(z)(z-A)^{-1}C(z-B)^{-1}$ regularna funkcija u okolini skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$, postoji integral

$$-(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(z)(z-A)^{-1}C(z-B)^{-1} dz = L \in \mathcal{L}(K,H).$$

Sledi

$$f(M) = \begin{bmatrix} f(A) & L \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Sada pretpostavimo da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ i neka za M_C postoji Drazinov inverz. Tada je Laurentov red za funkciju $z \to (z - M_C)^{-1}$ u probušenoj okolini tačke 0 dat sa:

$$(z - M_C)^{-1} = \sum_{k=-p}^{\infty} N_k z^k,$$

gde je $N_k = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma z^{-k-1}(z - M_C)^{-1} dz$ za pogodno izabranu konturu Γ. Pošto postoji Laurentov red za funkciju $z \to (z-B)^{-1}$ u probušenoj okolini tačke 0, iz (12) sledi da glavni deo ovog Laurentovog reda ima konačno mnogo nenula koeficijenata. Zaključak je da za B postoji Drazinov inverz. Analogno, zaključujemo da za A postoji Drazinov inverz. $\square$

4. GLAVA

UOPŠTENI INVERZI I FREDHOLMOVA TEORIJA

Napomenimo da je operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ Fredholmov, ako važi: $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$, $\alpha(T) < \infty$ i $\beta(T) < \infty$. Primetimo da je svaki Fredholmov operator istovremeno i g-invertibilan. Stoga je od posebnog interesa izučavati ovu specijalnu klasu uopšteno invertibilnih operatora.

U ovoj glavi izučava se Fredholmova teorija i uopšteni inverzi. U prvom odeljku su originalni rezultati iz rada [26] i odnose se na perturbacije delova spektra 2×2 gornje trougaonih operatorskih matrica. U drugom odeljku izučavaju se semi-Browderovi spektri kvazisličnih operatora, prema originalnom radu [27]. Na kraju, u trećem odeljku, motivisani rezultatima rada [44], uveli smo i izučavali pojam konzistentnosti operatora [28]. Posebno smo izučili operatore konzistentne u odnosu na skup (levo ili desno) invertiblnih operatora, kao i u odnosu na skup (levo ili desno) Fredholomovih operatora.

PERTURBACIJE SPEKTARA OPERATORSKIH MATRICA

Neka su H i K Hilbertovi prostori, $T \in \mathcal{L}(H)$, a $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_a(T)$ i $\sigma_d(T)$, redom, spektar, tačkasti spektar, aproksimativni tačkasti spektar i defektni spektar operatora T. $\sigma_e(T)$, $\sigma_{le}(T)$, $\sigma_{re}(T)$ i $\sigma_b(T)$ označavaju redom esencijalni (Fredholmov) spektar, levi Fredholmov spektar, desni Fredholmov spektar i Browderov spektar operatora T.

Kako su H i K Hilbertovi prostori $\dim H$ (ili $\dim K$) označava ortogonalnu dimenziju od H (ili K). Takođe, $\dim H = \infty$ označava činjenicu da je H beskonačno dimenzionalni Hilbertov prostor, a $U \oplus V$ će označavati ortogonalnu sumu (ne obavezno zatvorenih) potprostora U i V Hilbertovog prostora H. Ako je $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, posmatraćemo operatorsku matricu

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

za $C \in \mathcal{L}(K, H)$. Primetimo da je M_C ograničen operator na ortogonalnoj sumi $H \oplus K$.

Odredićemo skupove

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_a(M_C), \qquad \bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_e(M_C), \qquad \bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_{le}(M_C) \quad \text{i} \quad \bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_{re}(M_C))$$

u termima operatora A i B. Daćemo dovoljne uslove kada skup

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_b(M_C)$$

može biti prikazan u termima od A i B. Pokazani su i neki bliski rezultati. Između ostalog, posledica rezultata ovog odeljka jesu glavni rezultati rada [68].

Skup $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma(M_C)$ je određen u [68]. U ovom odeljku, za dato A and B, odredićemo skupove

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_a(M_C) \qquad \text{i} \qquad \bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_e(M_C)$$

u termima od A i B. Takođe, pokazani su slični rezultati za gornji i donji semi-Fredholmov spektar operatora M_C.

Koristićemo sledeće poznato tvrđenje.

Lema 4.1. *Ako su U i V uzajamno ortogonalni (ne obavezno zatvoreni) potprostori Hilbertovog prostora H, tada je $U \oplus V$ zatvoren ako i samo ako su U i V zatvoreni.*

Nastavljamo sledećim korisnim tvrđenjem.

Lema 4.2. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$ i $C \in \mathcal{L}(K,H)$, važi sledeća inkluzija:*

$$\sigma_a(M_C) \subset \sigma_a(A) \cup \sigma_a(B).$$

Dokaz. Neka je $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Kako je $\mathcal{N}(M-\lambda) = \mathcal{N}(A-\lambda) \oplus \mathcal{N}(B-\lambda)$ i $\mathcal{R}(M-\lambda) = \mathcal{R}(A-\lambda) \oplus \mathcal{R}(B-\lambda)$, prema Lemi 4.1 sledi da važi $\sigma_a(M) = \sigma_a(A) \cup \sigma_a(B)$. Primetimo da je

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & nI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{n}C \\ 0 & B \end{bmatrix} \to M \text{ kada } n \to \infty,$$

Dobro je poznato da slični operatori imaju isti aproksimativni tačkasti spektar. Prema tome, $\sigma_a(M_C) = \sigma_a\left(\begin{bmatrix} A & \frac{1}{n}C \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)$. Sada dokaz sledi na osnovu poluneprekidnosti odozgo aproksimativnog tačkastog spektra. $\square$

Došli smo do važnog rezultata ovog odeljka. Za date operatore A i B, odredićemo skup $\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_a(M_C)$.

Teorema 4.3. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$ važi:*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_a(M_C) = \sigma_a(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \beta(A-\lambda) < \alpha(B-\lambda)\} \cup$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(B-\lambda) \text{ nije zatvoren}\}.$$

Dokaz. Prvo pokazujemo inkluziju $\supset$.

Pretpostavimo da je $\lambda \in \sigma_a(A)$. Tada postoji niz jediničnih vektora (x_n) u H, tako da $(A-\lambda)x_n \to 0$ kada $n \to \infty$. Sledi da važi $(M_C - \lambda)x_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i $\lambda \in \sigma_a(M_C)$.

Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\mathcal{R}(B-\lambda)$ nije zatvoren. Tada je

$$\mathcal{R}(M_C - \lambda) = (\mathcal{R}(A-\lambda) + \mathcal{R}(C)) \oplus \mathcal{R}(B-\lambda),$$

i prema Lema 4.1 sledi da $\mathcal{R}(M_C - \lambda)$ nije zatvoren, odnosno $\lambda \in \sigma_a(M_C)$.

Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{C}$, $\beta(A-\lambda) < \alpha(B-\lambda)$ i $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Razlikovaćemo dva slučaja.

Pretpostavimo da važi $\mathcal{N}(C)\cap\mathcal{N}(B-\lambda)\neq\{0\}$. Tada za sve nenula vektore $z\in\mathcal{N}(C)\cap\mathcal{N}(B-\lambda)$ je ispunjeno $(M_C-\lambda)z=0$. Prema tome, $\lambda\in\sigma_p(M_C)\subset\sigma_a(M_C)$.

Sada pretpostavimo da važi $\mathcal{N}(C)\cap\mathcal{N}(B-\lambda)=\{0\}$. Prema [52, Problem 42] važi

$$\dim\overline{C(\mathcal{N}(B-\lambda))}=\alpha(B-\lambda)>\beta(A-\lambda).$$

Kako je $\mathcal{R}(A-\lambda)$ zatvoren, sledi $\mathcal{R}(A-\lambda)\cap\overline{C(\mathcal{N}(B-\lambda))}\neq\{0\}$. Neka je y_1 proizvoljan nenula vektor, $y_1\in\mathcal{R}(A-\lambda)\cap\overline{C(\mathcal{N}(B-\lambda))}$. Postoji $y_2\in H$ i niz (z_n) u $\mathcal{N}(B-\lambda)$, tako da $(A-\lambda)y_2=y_1=\lim Cz_n$. Očigledno je $\lim z_n\neq 0$, i stoga možemo pretpostaviti da postoji neki broj $\epsilon>0$, tako da za svaki n važi: $\|z_n\|\geq\epsilon$. Primetimo da je $\|y_2-z_n\|\geq\sqrt{\|y_2\|^2+\epsilon^2}$. Takođe važi

$$\lim(M_C-\lambda)\frac{y_2-z_n}{\|y_2-z_n\|}\leq\frac{1}{\sqrt{\|y_2\|^2+\epsilon^2}}\lim[(A-\lambda)y_2-Cz_n-(B-\lambda)z_n]=0.$$

Odavde sledi $\lambda\in\sigma_a(M_C)$.

Pokazaćemo suprotnu inkluziju $\subset$. Neka je $\lambda\notin\sigma_a(A)$, $\mathcal{R}(B-\lambda)$ je zatvoren i $\alpha(B-\lambda)\leq\beta(A-\lambda)$. Postoji operator $P\in\mathcal{L}(\mathcal{N}(B-\lambda),\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp)$, tako da je P 1–1 i $\mathcal{R}(P)$ je zatvoren u H (ustvari, P je izometrija). Definišimo C iz prostora $K=\mathcal{N}(B-\lambda)\oplus\mathcal{N}(B-\lambda)^\perp$ u prostor $H=\mathcal{R}(A-\lambda)\oplus\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp$ na sledeći način:

$$Cx=\begin{cases}Px, & x\in\mathcal{N}(B-\lambda)\\ 0, & x\in\mathcal{N}(B-\lambda)^\perp\end{cases}.$$

Važi $\mathcal{R}(C)\subset\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp$. Pokazaćemo da je $\lambda\notin\sigma_a(M_C)$.

Kako je $\mathcal{R}(M_C-\lambda)=((\mathcal{R}(A-\lambda)\oplus\mathcal{R}(C))\oplus\mathcal{R}(B-\lambda)$, prema Lemi 4.1 sledi da je $R(M_C-\lambda)$ zatvoren. Pretpostavimo da je $x=u+v\in H\oplus K$ i $(M_C-\lambda)x=0$. Zaključujemo da je $(A-\lambda)u+Cv=-(B-\lambda)v$, odakle sledi $v\in\mathcal{N}(B-\lambda)$, $v\in\mathcal{N}(C)$ i $u\in\mathcal{N}(A-\lambda)$. Znači, $u=0$ i $v=0$, odakle sledi $M_C-\lambda$ je 1–1, odnosno $\lambda\notin\sigma_a(M_C)$. $\square$

Dualno, možemo pokazati sledeće tvrđenje.

Teorema 4.4. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, važi*

$$\begin{aligned}\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_d(M_C) = \sigma_d(B) &\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) < \beta(A-\lambda)\} \\ &\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(A-\lambda) \text{ nije zatvoren}\}.\end{aligned}$$

Kao posledica, proizilazi glavni rezultat rada [68, Theorem 2].

Posledica 4.5. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, važi*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma(M_C) = \sigma_a(A) \cup \sigma_d(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\}.$$

Dokaz. Ovaj dokaz sledi na osnovu Teorema 4.3, 4.4 i činjenice $\sigma(M_C) = \sigma_a(M_C) \cup \sigma_d(M_C)$. $\square$

Za kvazihiponomalne operatore Lema 4.2, Teorema 4.3 i Posledica 4.5 postaju preciznije.

Teorema 4.6. *Akoje A^* kvazihiponormalan operator na H, tada za svaki $C \in \mathcal{L}(K,H)$ važi*

$$\sigma_a(M_C) = \sigma_a(A) \cup \sigma_a(B).$$

Štaviše, ako je B kvazihiponormalan operator na K, tada je

$$\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B).$$

Dokaz. Kako je $\sigma_a(A) \subset \sigma_a(M_C)$, prema Lemi 4.2 dovoljno je pokazati $\sigma_a(B) \subset \sigma_a(M_C)$. Pretpostavimo da je $\lambda \in \sigma_a(B)\backslash\sigma_a(M_C)$. Prema Teoremi 4.3 sledi: $\alpha(A-\lambda) = 0$, $\mathcal{R}(A-\lambda)$ i $\mathcal{R}(B-\lambda)$ su zatvoreni i $\alpha(B-\lambda) \leq \alpha(A-\lambda)^*$. Kako je A^* kvazihiponormalan, prema Lemi 2.19 sledi $\alpha(A-\lambda)^* \leq \alpha(A-\lambda) = 0$, odakle proizilazi $\alpha(B-\lambda) = 0$. Zaključujemo da je $\lambda \notin \sigma_a(B)$, što je u kontradikciji sa izborom tačke λ.

Da bi pokazali drugu jednakost, primetimo da važi $\sigma(M_C) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)$ [68] (ili ponoviti dokaz Leme 4.2 za obični spektar umesto aproksimativnog tačkastog spektra). Neka je $\lambda \in (\sigma(A) \cup \sigma(B)) \backslash \sigma(M_C)$. Na osnovu Posledice 4.5 sledi $\alpha(B-\lambda)^* = 0$, $\mathcal{R}(B-\lambda) = K$, $\mathcal{R}(A^* - \overline{\lambda}) = H$ i $\alpha(A-\lambda) = 0$. Kako su A^* i B kvazihiponormalni operatori na H i K redom, prema Lemi 2.19 sledi $\alpha(B-\lambda) = 0$ i $\alpha(A-\lambda)^* = 0$, odnosno $\lambda \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Dobijenom kontradikcijom završavamo dokaz. $\square$

Na kraju ovog odeljka, razmatramo operatorske matrice sa četiri bloka. Za date $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$ i $C \in \mathcal{L}(K, H)$, neka je $W \in \mathcal{L}(H, K)$ i

$$G_W = \begin{bmatrix} A & C \\ W & B \end{bmatrix}.$$

U sledećoj teoremi I_Z označava identički operator na Hilbertovom prostoru Z.

Teorema 4.7. *Neka je $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$ i $C \in \mathcal{L}(K, H)$ i neka je data tačka $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_a(A)$.*

(a) *Ako je $\mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(B-\lambda) \neq \{0\}$, tada $\lambda \in \sigma_p(G_W)$ za svako $W \in \mathcal{L}(H, K)$.*

(b) *Ako je $\mathcal{R}(A-\lambda) \cap \mathcal{R}(C) \neq \{0\}$, tada postoji jednodimenzionalni operator $W \in \mathcal{L}(H, K)$, tako da je $\lambda \in \sigma_p(G_W)$.*

(c) *Ako ni* (a) *ni* (b) *ne važi, tada $\lambda \notin \sigma_p(G_W)$ za svaki $W \in \mathcal{L}(H, K)$.*

Dokaz. Da bi pokazali (a), pretpostavimo da je $\mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(B-\lambda) \neq \{0\}$. Postoji nenula vektor $v \in \mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(B-\lambda)$, tako da važi $(G_W - \lambda)v = 0$ za svaki $W \in \mathcal{L}(H, K)$, i $\lambda \in \sigma_p(G_W)$.

Da bi pokazali (b), pretpostavimo da važi $\mathcal{R}(A-\lambda) \cap \mathcal{R}(C) \neq \{0\}$. Neka je z proizvoljan nenula vektor, $z \in \mathcal{R}(A-\lambda) \cap \mathcal{R}(C)$. Postoji operator $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(A-\lambda), H)$, tako da je $A_1(A-\lambda) = I_H$ i $(A-\lambda)A_1 = I_{\mathcal{R}(A-\lambda)}$. Postoje vektori: $x_1 = A_1 z \in H$, i $x_2 \in K$, tako da je $Cx_2 = z$. Definišimo jednodimenzionalni operator $W \in \mathcal{L}(H, K)$, tako da za svaki $x \in H$:

$$W(x) = \frac{1}{\|x_1\|^2}(x, x_1)(B-\lambda)x_2.$$

Uzimajući $x = -x_1 + x_2$, zaključujemo $(G_W - \lambda)x = 0$, odnosno $\lambda \in \sigma_p(G_W)$.

Pokazaćemo tvrđenje (c). Pretpostavimo da ni (a) ni (b) ne važe. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_a(A)$ i $0 \neq x \in \mathcal{N}(G_W - \lambda)$. Tada $x = u + v$, $u \in H$, $v \in K$ i

$$(A-\lambda)u + Cv = 0 = Xu + (B-\lambda)v.$$

Kako je $\mathcal{R}(A-\lambda) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$, zaključujemo da $(A-\lambda)u = Cv = 0$. Takođe, $u = 0$, $v \in \mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(B-\lambda)$ i $v = 0$. Dobijena tvrđenja su u kontradikciji sa pretpostavkama. $\square$

Razmotrićemo analogne probleme za esencijalni spektar 2×2 operatorskih matrica. H i K su beskonačno dimenzionalni kompleksni Hilbertovi potprostori. Sledeće tvrđnje je korisno.

Lema 4.8. *Za dato $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(K)$ i $C \in \mathcal{L}(K,H)$, sledeće inkluzije važe:*

$$\sigma_e(M_C) \subset \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B).$$

Dokaz. Poznato je sledeće: $\sigma_e\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$, slični operatori imaju isti esencijalni spektar i esencijalni spektar je odozgo poluneprekidan. Sada je dokaz ovog tvrđenja analogan dokazu Leme 4.2. $\square$

Jedan od glavnih rezultata ovog odeljka je određivanje skupova

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_e(M_C), \qquad \bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_{le}(M_C), \qquad \bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_{re}(M_C),$$

za date operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$.

Teorema 4.9. *Za date operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$ važi:*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_e(M_C) = \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\}.$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati inkluziju $\supset$. Da bi pokazali $\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \subset \sigma_e(M_C)$ za sve operatore $C \in \mathcal{L}(K,H)$, pretpostavimo da važi $M_C \in \Phi(H \oplus K)$. Tada je $\mathcal{R}(M_C) = [\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C)] \oplus \mathcal{R}(B)$ zatvoren, te je $\mathcal{R}(B)$ zatvoren i $\beta(B) \leq \beta(M_C) < \infty$. Sledi $B \in \Phi_-(K)$. Analogno, $M_C^* \in \Phi(H \oplus K)$, i prema tome $\mathcal{R}(M_C^*) = \mathcal{R}(A^*) \oplus [\mathcal{R}(C^*) + \mathcal{R}(B^*)]$ je zatvoren, $\mathcal{R}(A^*)$ je zatvoren i $\beta(A^*) \leq \beta(M_C^*) < \infty$. Zaključujemo da je $A \in \Phi_+(H)$.

Pokazaćemo da važi $\{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\} \subset \sigma_e(M_C)$ za sve operatore $C \in \mathcal{L}(K,H)$. Možemo pretpostaviti $\lambda = 0$ i razlikovaćemo dva slučaja.

Slučaj I. Ako je $\alpha(B) < \beta(A)$ i $0 \in [\sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)] \setminus [\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B)]$, tada je $A \in \Phi_+(H)$ i $B \in \Phi_-(K)$. Ako je $\beta(A) < \infty$, onda $\alpha(B) < \infty$, i prema tome $A \in \Phi(H)$ i $B \in \Phi(K)$. Ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom, odakle sledi $\beta(A) = \infty$. Kako je $\dim \overline{C(\mathcal{N}(B))} \leq \alpha(B) < \beta(A)$, $\beta(A) = \infty$ i $\mathcal{R}(A)$ je zatvoren, zaključujemo da važi: potprostor $\dfrac{H}{\mathcal{R}(A) + C(\mathcal{N}(B))}$ je beskonačno dimenzionalan vektorski prostor. Neka su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisni vektori u prostoru $\dfrac{H}{\mathcal{R}(A) + C(\mathcal{N}(B))}$. Pokazaćemo da su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisni vektori u prostoru $(H \oplus K)/\mathcal{R}(M_C)$ za proizvoljan operator $C \in \mathcal{L}(H, K)$. Pretpostavimo da postoje kompleksni brojevi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, tako da je $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = y \in \mathcal{R}(M_C)$. Tada postoji vektor $x \in H \oplus K$, za koji je $M_C x = y$. Možemo naći neke $u \in H$ i $v \in K$, tako da važi $x = u \oplus v$. Kako je $y = (Au + Cv) \oplus Bv \in H$ i $Bv \in K$, zaključujemo $Bv = 0$ i $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = y \in \mathcal{R}(A) + C(\mathcal{N}(B))$. Ovo je u kontradikciji sa izborom vektora $y_1, \ldots, y_n$, te su vektori $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisni u prostoru $(H \oplus K)/\mathcal{R}(M_C)$. Sledi da je $(H \oplus K)/\mathcal{R}(M_C)$ beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, odnosno $0 \in \sigma_e(M_C)$.

Slučaj II. Ako važi $\beta(A) < \alpha(B)$, $0 \in [\sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)] \setminus [\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B)]$, tada je $\mathcal{R}(B)$ zatvoren i $\beta(B^*) = \alpha(B) = \infty$. Kao u Slučaju I, zaključujemo da je $\dfrac{K}{C^*(\mathcal{N}(A^*)) + \mathcal{R}(B^*)}$ beskonačno dimenzionalan vektroski prostor, $(H \oplus K)/\mathcal{R}(M_C^*)$ je beskonačno dimenzionalan vektorski prostor i $0 \in \sigma_e(M_C)$.

Da bi pokazali suprotnu inkluziju $\subset$, pretpostavimo da važi $\alpha(B) = \beta(A)$, $A \in \Phi_+(H)$ i $B \in \Phi_-(K)$. Neka je Q izomorfizam iz Hilbertovog prostora $\mathcal{N}(B)$ na Hilbertov prostor $\mathcal{R}(A)^\perp$. Definišimo operator $C_0 \in \mathcal{L}(K, H)$ na sledeći način:

$$C_0 x = \begin{cases} Qx, & x \in \mathcal{N}(B) \\ 0, & x \in \mathcal{N}(B)^\perp. \end{cases}$$

Primetimo da je $\mathcal{R}(C_0) = \mathcal{R}(A)^\perp$ zatvoren. Pokazaćemo da važi $M_{C_0} \in \Phi(H \oplus K)$. Važi $\mathcal{R}(M_{C_0}) = [\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C_0)] \oplus \mathcal{R}(B) = [\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(A)^\perp] \oplus \mathcal{R}(B)$. Odavde sledi da je $\mathcal{R}(M_{C_0})$ zatvoren i $\beta(M_{C_0}) = \beta(B) < \infty$. Slično, $\mathcal{R}(M_{C_0}^*) = \mathcal{R}(A^*) \oplus [\mathcal{R}(C_0^*) + \mathcal{R}(B^*)] = \mathcal{R}(A^*) \oplus [\mathcal{N}(B) + \mathcal{N}(B)^\perp]$. Zaključujemo $\alpha(M_{C_0}) = \beta(M_{C_0}^*) = \beta(A^*) = \alpha(A) < \infty$, odakle sledi $M_{C_0} \in \Phi(H \oplus K)$ i $0 \notin \bigcap\limits_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_e(M_C)$. Ovim je završen dokaz teoreme. $\square$

Iz prethodne Teoreme 4.9 sledi

Posledica 4.10. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, važi:*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_{le}(M_C) = \sigma_{le}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \beta(A-\lambda) < \alpha(B-\lambda)\},$$

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_{re}(M_C) = \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) < \beta(A-\lambda)\}.$$

Napomenimo da je $T \in \mathcal{L}(Z)$ Weylov operator, ako je $T \in \Phi(Z)$ i $\alpha(T) = \beta(T)$. Weylov spektar operatora T je $\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda \text{ nije Weylov operator }\}$. Očigledno je $\sigma_e(T) \subset \sigma_w(T)$. Koristeći Teoremu 4.9, dolazimo do sledećeg tvrđenja.

Posledica 4.11. *Za date $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, važi*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(K,H)} \sigma_w(M_C) \subset \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\}$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(A-\lambda) \neq \beta(B-\lambda)\}.$$

Dokaz. Neka je $A \in \Phi_+(H)$, $B \in \Phi_-(K)$, $\alpha(B) = \beta(A)$ i $\alpha(A) = \beta(B)$. U Teoremi 4.9 je konstruisan operator $C_0 \in \mathcal{L}(K,H)$, tako da $\alpha(M_{C_0}) = \alpha(A)$ i $\beta(M_{C_0}) = \beta(B)$. Sledi da je M_{C_0} Weylov operator. □

Sada znamo koji delovi skupa $\sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$ mogu biti izbačeni perturbacijom podesnog operatora $C \in \mathcal{L}(K,H)$.

Propozicija 4.12. *Neka postoji operator $C \in \mathcal{L}(K,H)$, tako da je inkluzija*

$$\sigma_e(M_C) \subset \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$$

prava. Tada za svako $\lambda \in [\sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)] \backslash \sigma_e(M_C)$ važi $\lambda \in \sigma_e(A) \cap \sigma_e(B)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $0 \in [\sigma_e(A) \backslash \sigma_e(B)] \backslash \sigma_e(M_C)$. Tada $A \notin \Phi(H)$ i $B \in \Phi(K)$. Prema Teoremi 4.9 sledi da $A \in \Phi_+(H)$ i $\beta(A) = \alpha(B) < \infty$. Zaključujemo da je $0 \notin \sigma_e(A)$, što je u kontradikciji sa izborom tačke 0. □

Za kvazihiponormalne operatore Lema 4.8 i Teorema 4.9 postaju preciznije.

Propozicija 4.13. *Ako je A^* kvazihiponormalan na H, ili je B kvazihiponormalan na K, tada za svaki operator $C \in \mathcal{L}(K,H)$ važi*

$$\sigma_e(M_C) = \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B).$$

DOKAZ. Prema Lemi 4.8 dovoljno je pokazati inkluziju $\supset$. Pretpostavimo da važi

$$\mu \in \big[\sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)]\backslash[\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\}\big].$$

Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mu = 0$. Ako je A^* kvazihiponormalan na H, prema Lemi 2.19 zaključujemo $\alpha(A^*) \leq \alpha(A) < \infty$. Sada je $\alpha(B) = \alpha(A^*) < \infty$. Sledi da $0 \notin \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$. Ovo je u kontradikciji sa tvrđnjem Teoreme 4.9. Ako je B kvazihiponormalan na K, po Lemi 2.19 zaključujemo $\alpha(B) \leq \alpha(B^*) < \infty$. Sada je $\beta(A) = \alpha(B) < \infty$, odakle sledi ponovo $0 \notin \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$. $\square$

Razmatraćemo analogne rezultate za Browderov spektar.

U sledećoj teoremi procenjujemo preturbacije Browderovog spektra.

Teorema 4.14. *Za $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$ važi:*

$$\begin{aligned}\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_b(M_C) \subset\ & \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\} \\ & \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{asc}(A-\lambda) = \infty,\ \mathit{ili}\ \operatorname{des}(A-\lambda) = \infty\} \\ & \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{asc}(B-\lambda) = \infty,\ \mathit{ili}\ \operatorname{des}(B-\lambda) = \infty\}\end{aligned}.$$

DOKAZ. Dovoljno je pokazati ovu inkluziju za $\lambda = 0$. Pretpostavimo da je $A \in \Phi_+(H)$, $B \in \Phi_-(A)$, $\alpha(B) = \beta(A)$, $\operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A) < \infty$ i $\operatorname{asc}(B) = \operatorname{des}(B) < \infty$. Iz dokaza Teoreme 4.9 sledi da postoji operator $C_0 \in \mathcal{L}(K,H)$, za koji je $M_{C_0} \in \Phi(H \oplus K)$. Kako za operatore A i B postoje Drazinovi inverzi, prema Teoremi 3.29 sledi da za operator M_{C_0} takođe postoji Drazinov inverz, odakle je $0 \notin \bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_b(M_C)$. $\square$

Sledeći rezultat je specijalan slučaj kada važi jednakost u Teoremi 4.15.

Teorema 4.15. *Neka su dati $A \in \mathcal{L}(H)$ i $B \in \mathcal{L}(K)$, tako da $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ ne sadrži ni jednu unutrašnju tačku. Tada je*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_b(M_C) = \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(B-\lambda) \neq \beta(A-\lambda)\}$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{asc}(A-\lambda) = \infty, \ \textit{ili} \ \operatorname{des}(A-\lambda) = \infty\} \cdot$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{asc}(B-\lambda) = \infty, \ \textit{ili} \ \operatorname{des}(B-\lambda) = \infty\}.$$

Dokaz. Prema Teoremi 4.15, dovoljno je pokazati inkluziju $\supset$. Pretpostavimo da $0 \notin \bigcap_{C \in \mathcal{L}(K,H)} \sigma_b(M_C)$. Kako je $\sigma_e(M_C) \subset \sigma_b(M_C)$, prema Teoremi 4.9 sledi $A \in \Phi_+(H)$, $B \in \Phi_-(K)$ i $\alpha(B) = \beta(A)$. Postoji operator C, tako da je M_C Browderov operator na $H \oplus K$. Tada je $\operatorname{asc}(M_C) = \operatorname{des}(M_C) = p < \infty$, 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(M_C)$ i postoji broj $\epsilon > 0$, za koji važi sledeće: ako je $0 < |z| < \epsilon$, tada je $z \notin \sigma(M_C)$. Za sve takve z, operator $M_C - z$ je invertibilan, te je $A - z$ levo invertibilan, a $B - z$ je desno invertibilan. Sledi da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma_a(A)$ i 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma_d(B)$.

Pokazaćemo da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$. Kako 0 ne može biti unutrašnja tačka skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$, sledi da 0 mora biti granična tačka skupa $\sigma(A) \cup \sigma(B)$. Ako je 0 tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A)$, tada postoji niz (x_n), $x_n \in \partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$, tako da $x_n \to 0$. Sledi da je 0 tačka nagomilavanja skupa $\sigma_a(A)$, a ovo je u kontradikciji sa prthodnim razmatranjima. Zaključujemo da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A)$. Slično, kao je $\partial\sigma(B) \subset \sigma_d(B)$, zaključujemo da 0 nije tačka nagomilavanja skupa $\sigma(B)$.

Prema Teoremi 3.30 sledi da za operatore A i B postoje Drazinovi inverzi, te je $\operatorname{asc}(A) = \operatorname{des}(A) < \infty$ i $\operatorname{asc}(B) = \operatorname{des}(B) < \infty$. $\square$

Povezaćemo upravo opisane rezultate sa rezultatima Woo Young Leea [53, 79, 80]. Naime, Lee je razmatrao probleme vezane za spektar i Weylov spektar operatora M_C na proizvodu Banachovih prostora, koristeći Harteovu teoremu "o duhu indeksa relativno regularnih operatora" [58]. Tehnika Leea može biti iskorišćena da se poprave rezultati za Fredholmov i Weylov esencijalni spektar na Banachovom prostoru, ali nije jasno kako bi to moglo biti primenjeno za aprkosimativni (ili defektni) spektar, levi (ili desni spektar), gornji (ili donji) semi-Fredholmov spektar. Stoga rezultati iz pomenutih radova Leea ne impliciraju prethodna razmatranja.

Dobro je poznato da proizvod dva relativno regularna operatora ne mora biti relativeno regularan operator [12, 18]. Sa druge strane, ako su operatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ relativno regularni, važi sledeća Harteova teorema o duhu indeksa:

$$\mathcal{N}(T) \times \mathcal{N}(S) \times Z/\mathcal{R}(ST) \cong \mathcal{N}(ST) \times Y/\mathcal{R}(T) \times Z/\mathcal{R}(S).$$

Reći ćemo da su dva Banachova prostora U i V izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor, ako se oni razlikuju za konačno dimenzionalan potprostor, odnosno ako važi jedno od sledećih tvrđenja:

(a) postoji odozdo ograničen operator $J_1 : U \to V$, tako da važi $\dim V/J_1(U) < \infty$, ili
(b) postoji odozdo ograničen operator $J_2 : V \to U$, tako da važi $\dim U/J_2(V) < \infty$.

Pokazaćemo jedno pomoćno tvrđenje, koje koristimo u dokazu glavnih teorema.

Propozicija 4.16. *Neka su X i Y Banachovi prostori, a M i N konačno dimenzionalni prostori. Ako je $M \oplus X \cong N \oplus Y$, tada su X i Y izomorfni do na konačno dimenzionalni potprostor. Specijalno, ako je* $\dim M = \dim N$, *onda su X i Y izomorfni.*

Dokaz. Neka je $\dim M = m$, $\dim N = n$ i $J : M \oplus X \to N \oplus Y$ izomorfizam Banachovih prostora. Neka su $x_1, \dots, x_k \in X$ svi linearno nezavisni vektori u X, tako da su $Jx_1, \dots, Jx_k$ linearno nezavisni po modulu Y. Važi $0 \leq k \leq n$. Postoji tačno $n-k$ vektora $z_1, \dots, z_{n-k}$ u $N \oplus Y$, koji su linerano nezavisni po modulu $span\{Jx_1, \dots, Jx_k\} \oplus Y$. Važi $0 \leq n-k \leq n$. Neka je $y_i = J^{-1}z_i$ za $i = 1, \dots, n-k$. Svi vektori $y_1, \dots, y_{n-k}$ moraju biti linearno nezavisni po modulu X. Mora važiti (u najopštijem slučaju) $0 \leq n-k \leq m$. Postoji tačno $l = m-(n-k)$ linearno nezavisnih vektora $u_1, \dots u_l$, koji su linearno nezavisni po modulu $span\{y_1, \dots, y_{n-k}\} \oplus X$. Postoji Banachov prostor X_1, tako da važi:

$$M \oplus X = span\{y_1, \dots, y_{n-k}\} \oplus span\{u_1, \dots, u_l\} \oplus span\{x_1, \dots, x_k\} \oplus X_1.$$

Nije teško utvrditi da je

$$span\{x_1, \dots, x_k\} \oplus X_1 \cong X.$$

Neka je $v_i = Ju_i$, $i = 1, \dots, l$. Jasno je da su vektori $v_1, \dots, v_l$ linerano nezavisni po modulu

$$span\{Jx_1, \dots, Jx_k\} \oplus span\{z_1, \dots, z_{n-k}\}.$$

Postoji Banachov prostor Y_1 tako da je

$$N \oplus Y = span\{Jx_1, \dots, Jx_k\} \oplus span\{z_1, \dots, z_{n-k}\} \oplus span\{v_1, \dots, v_l\} \oplus Y_1.$$

Lako je utvrditi da je

$$span\{v_1, \dots, v_l\} \oplus Y_1 \cong Y.$$

Takođe je očigledno da je X_1 izomorfno sa Y_1. Prostor X_1 treba dopuniti k-dimenzionalnim potprostorom do prostora izomorfnog sa X, a prostor Y_1 treba dopuniti l-dimenzionalnim potprostorom do prostora izomorfnog sa Y_1. Zaključak je da su X i Y izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor.

Specijalno, ako je $m = n$, onda je $k = l$, te su potprostori X i Y izomorfni. Primetimo da je ceo dokaz trivijalan u slučaju Hilbertovih prostora. $\square$

Neka su Xi Y Banachovi prostori i $X \oplus Y$ takođe Banachov prostor. Za operatore $A \in \mathcal{L}(X)$, $\in \mathcal{L}(Y)$ i $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ posmatramo operator

$$M_C \in \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Formulisaćemo sada osnovnu teoremu o esencijalnoj invertibilnosti operatora M_C,

Teorema 4.17. *Neka su $A \in \mathcal{L}(X)$ i $B \in \mathcal{L}(Y)$ dati operatori. Tada je operator M_C Fredholmov za neki $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, ako i samo ako važi:*

(a) $A \in \Phi_l(X)$;

(a) $B \in \Phi_r(Y)$;

(c) $\mathcal{N}(B)$ *i* $X/\mathcal{R}(A)$ *su izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor.*

Dokaz. Neka je $M_C \in \Phi(X \oplus Y)$. Uvedimo oznake $B_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Očigledno, C_1 je invertibilan u $\mathcal{L}(X \oplus Y)$. Iz

$$M_C = B_1 C_1 A_1 \in \Phi(X \oplus Y)$$

sledi $B_1, B_1C_1 \in \Phi_r(X\oplus Y)$ i $A_1, C_1A_1 \in \Phi_l(X\oplus Y)$ (dokaz sledi kada se posmatraju kanonske projekcije u ovih operatora u Calkinovoj algebri). Kako je A_1 relativno regularan, neka je $\begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$ proizvoljan g-inverz od A_1. Sledi $AMA = A$, te je A relativno regularan. Iz $\mathcal{N}(A_1) = \mathcal{N}(A)$ zaključujemo da važi $A \in \Phi_l(X)$. Analogno, možemo pokazati $B \in \Phi_r(Y)$. Primenom Harteove teoreme o duhu indeksa na proizvod $M_C = (B_1C_1)A_1$ sledi

$$\mathcal{N}(A) \times \mathcal{N}(B_1C_1) \times (X\oplus Y)/\mathcal{R}(M_C) \overset{\sim}{=} \mathcal{N}(M_C) \times X/\mathcal{R}(A) \times Y/\mathcal{R}(B).$$

Ponovo primenom Harteove teoreme B_1C_1 proizilazi

$$\mathcal{N}(B) \overset{\sim}{=} \mathcal{N}(B_1C_1).$$

Na kraju sledi

$$(1)\qquad \mathcal{N}(A) \times \mathcal{N}(B) \times (X\oplus Y)/\mathcal{R}(M_C) \overset{\sim}{=} \mathcal{N}(M_C) \times X/\mathcal{R}(A) \times Y/\mathcal{R}(B).$$

Kako su prostori $\mathcal{N}(A)$, $(X\oplus Y)/\mathcal{R}(M_C)$, $\mathcal{N}(M_C)$ i $Y/\mathcal{R}(B)$ konačno dimenzionalni, prema Propoziciji 4.16 sledi da su $\mathcal{N}(B)$ i $Y/\mathcal{R}(A)$ izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor.

Sa druge strane, neka je $A \in \Phi_l(X)$, $B \in \Phi_r(Y)$ i neka su prostori $\mathcal{N}(B)$ i $Y/\mathcal{R}(A)$ izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor. Postoje zatvoreni potprostori U od X i V od Y, tako da važi $\mathcal{R}(A)\oplus U = X$ i $\mathcal{N}(B)\oplus V = Y$. Razmotrimo dva slučaja:

Slučaj I. Pretpostavimo da postoji odozdo ograničen operator $J : \mathcal{N}(B) \to U$, tako da je $\dim U/J(\mathcal{N}(B)) < \infty$. Postoji konačno dimenzionalan potprostor W od X, tako da $J(\mathcal{N}(B))\oplus W = U$. Definišimo $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ na sledeći način:

$$C = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} J(N(B)) \\ W \\ U \end{bmatrix}.$$

Očigledno, $\mathcal{R}(C) = J(\mathcal{N}(B))$. Sada proveravamo da važi $R(M_C) = [\mathcal{R}(A)\oplus J(\mathcal{N}(B))]\oplus \mathcal{R}(B)$ i $\dim(X\oplus Y)/\mathcal{R}(M_C) = \dim U + \beta(B) < \infty$. Takođe sledi da je $\mathcal{R}(M_C)$ zatvoren. Sa druge strane, ako je $M_C\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$, onda sledi $y \in \mathcal{N}(B)$ i $Ax = -Cy$, što povlači $x \in \mathcal{N}(A)$ i $y = 0$. Sledi da važi $\mathcal{N}(M_C) = \mathcal{N}(A)$, te je $M_C \in \Phi(X\oplus Y)$.

Slučaj II. Neka postoji odozdo ograničen operator $J : U \to \mathcal{N}(B)$, tako da je $\dim \mathcal{N}(B)/J(U) < \infty$. Postoji konačno dimenzionalan potprostor Z od $\mathcal{N}(B)$, tako da važi $\mathcal{N}(B) = J(U) \oplus Z$. Neka J_1 označava inverz restrikcije $J : U \to J(U)$ i definišimo $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ kao

$$C = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J(U) \\ Z \\ V \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} U \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix}.$$

Očigledno $\mathcal{R}(C) = U$. Zaključujemo da važi $\mathcal{R}(M_C) = X \oplus \mathcal{R}(B)$, te je $\dim(X \oplus Y)/\mathcal{R}(M_C) = \beta(B) < \infty$ i $\mathcal{R}(M_C)$ je zatvoren. Takođe, $\mathcal{N}(M_C) = \mathcal{N}(A) \oplus Z$, te sledi da je $M_C \in \Phi(X \oplus Y)$. $\square$

Odmah proizilazi sledeća

Posledica 4.18. *Neka je $A \in \mathcal{L}(X)$ i $B \in \mathcal{L}(Y)$. Tada je*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(Y,X)} \sigma_e(M_C) = \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \mathcal{W}(A, B),$$

gde je $\lambda \in \mathcal{W}(A, B)$ ako i samo ako $\mathcal{N}(B - \lambda)$ i $X/\mathcal{R}(A - \lambda)$ nisu izomorfni do na konačno dimenzionalan potprostor.

Primedba 4.19. Ako je $A \in \Phi(X)$ i $B \in \Phi(Y)$, prema Teoremi 4.17 sledi da je $M_C \in \Phi(X \oplus Y)$ i $\sigma_e(M_C) \subset \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B)$. Prema tome, ako $\lambda \in \bigcap_{C \in \mathcal{L}(Y,X)} \sigma_e(M_C) \setminus (\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B))$, tada $\alpha(B - \lambda) = \infty$, ili $\beta(A - \lambda) = \infty$. U Hilbertovim prostorima za isto λ prosto znači da važi $\alpha(B - \lambda) \neq \beta(A - \lambda)$, uzimajući u obzir ortogonalne dimenzije zatvorenih potprostra.

Sada izučavamo Weylov spektar operatora M_C.

Teorema 4.20. *M_C je Weylov operator za neke $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, ako i samo ako važi:*

(a) *$A \in \Phi_l(X)$;*
(b) *$B \in \Phi_r(Y)$;*
(c) *$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) \cong X/\mathcal{R}(A) \oplus Y/\mathcal{R}(B)$.*

Dokaz. Implikacija $\Longrightarrow$ je pokazana u radu [79] (ona u stvari sledi iz (1)).

Da bi pokazali suprotnu implikaciju $\Longleftarrow$, neka je $A \in \Phi_l(X)$, $B \in \Phi_r(Y)$ i

$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) \cong X/\mathcal{R}(A) \oplus Y/\mathcal{R}(B). \tag{2}$$

Postoje zatvoreni potprostori U, Z, V i W, tako da $X = \mathcal{N}(A) \oplus U = \mathcal{R}(A) \oplus Z$, $Y = \mathcal{N}(B) \oplus V = \mathcal{R}(B) \oplus W$ i $\dim W = \beta(B) < \infty$. Kako je $\alpha(A) < \infty$ razmatramo tri slučaja.

Slučaj I. Neka je $\alpha(A) = \beta(B)$. Prema Propoziciji 4.16 sledi $\mathcal{N}(B) \cong X/\mathcal{R}(A)$ i neka je $J : \mathcal{N}(B) \to Z$ neki izomorfizam. Definišimo $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ sa

$$C = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} Z \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix}.$$

Sledi $\mathcal{R}(M_C) = X \oplus \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{N}(M_C) = \mathcal{N}(A)$ i M_C je Weylov operator.

Slučaj II. Neka je $\alpha(A) < \beta(B)$. Iz (2) i Propozicije 4.16 sledi da postoji odozdo ograničen operator $J : Z \to \mathcal{N}(B)$, tako da je $\dim \mathcal{N}(B)/J(Z)) = \beta(B) - \alpha(A)$. Restrikcija $J : Z \to J(Z)$ je invertibilan operator, i neka je $J_1 : J(Z) \to Z$ inverz ovog operatora. Tada postoji konačno dimenzionalan potprostor Z_1, tako da važi $J(Z) \oplus Z_1 = \mathcal{N}(B)$. Definišimo $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ sa

$$C = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J(Z) \\ Z_1 \\ V \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} Z \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Sledi $\mathcal{R}(M_C) = X \oplus \mathcal{R}(B)$ i $\mathcal{N}(M_C) = \mathcal{N}(A) \oplus Z_1$, te je M_C Weylov operator.

Slučaj III. Neka je $\beta(B) < \alpha(A)$. Iz (2) i Propozicije 4.16 sledi postoji odozdo ograničen operator $J : \mathcal{N}(B) \to Z$, tako da je $\dim Z/J(\mathcal{N}(B)) = \alpha(A) - \beta(B)$. Postoji konačno dimenzionalan potprostor Z_2 tako da je $J(\mathcal{N}(B)) \oplus Z_2 = Z$. Definišimo $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ sa

$$C = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} J(\mathcal{N}(B)) \\ Z_2 \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix}.$$

Sledi $\mathcal{R}(M_C) = [\mathcal{R}(A) \oplus J(\mathcal{N}(B))] \oplus \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{N}(M_C) = \mathcal{N}(A)$, i zaključujemo da je M_C Weylov operator. $\square$

Kao posledicu, navodimo sledeći rezultat.

Posledica 4.21. *Za date $A \in \mathcal{L}(X)$ i $B \in \mathcal{L}(Y)$ važi*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(Y,X)} \sigma_w(M_C) = \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(B) \cup \mathcal{W}_0(A,B),$$

gde $\lambda \in \mathcal{W}_0(A,B)$ ako i samo ako $\mathcal{N}(A-\lambda) \oplus \mathcal{N}(B-\lambda)$ nije izomorfan sa $X/\mathcal{R}(A-\lambda) \oplus Y/\mathcal{R}(B-\lambda)$.

SEMI-BROWDEROVI SPEKTRI KVAZISLIČNIH OPERATORA

Jedan od najvažnijih rezultata linearne algebre jeste da je svaka kompleksna matrica slična nekoj Jordanovoj matrici. Pojam sličnosti se može direktno preneti i na ograničene operatore na Banachovom prostoru, ali je klasa operatora, koja je slična nekom operatoru u Jordanovoj formi, veoma uzana. Generalizacija pojma sličnosti operatora jeste pojam kvazisličnosti, koji su uveli Nady i Foias (videti [66]). Pa i tada se ne može reći da je svaki operator kvazisličan nekom Jordanovom operatoru, ali klasa operatora koji imaju to svojstvo znatno je šira od klase u kojoj se zahteva sličnost.

Podsetimo se da su operatori $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični, ako postoje kvaziafiniteti $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ i $B \in \mathcal{L}(Y,X)$, tako da važi $AT = SA$ i $TB = BS$. Podsetimo sa da je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ kvaziafinitet, ako je A injekcija i $\mathcal{R}(A)$ gust potprostor u Y.

Sa X' označavamo dualan prostor prostora X. Ako je $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, onda je $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$ dualni operator operatora T. Sledeće tvrđenje često koristimo [66].

Lema 4.22. *Ako su T i S kvazislični operatori, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ važi:*

$$\alpha(\lambda - T) = \alpha(\lambda - S) \quad i \quad \alpha(\lambda - T)' = \alpha(\lambda - S)'.$$

Dobro je poznato da kvazislični operatori imaju različite spektre i različite esencijalne spektre. Stoga je prirodno upoređivati razne delove spektra [41, 66, 131].

Takođe, zanimljivo je upoređivati spektre i delove spektra nekih specijalnih klasa operatora, kao što su kvazinormalni i hiponormalni operatori [129, 130]. Najdublji razultat o spektrima kvazisličnih operatora jeste sledeća teorema Herrera [66].

Teorema 4.23. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični operatori, onda svaka komponenta skupa $\sigma_e(T)$ seče skup $\sigma_e(S)$, i obratno.*

Rezlutat ovog tipa već poznat za običan spektar operatora.

U ovom odeljku proučavamo semi-Browderove spektre kvazisličnih operatora, prema originalnom radu [27]. Napomenimo da je gornji semi-Browderov spektar $\sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \mathcal{B}_+(X)\}$, gde je $\mathcal{B}_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : \mathrm{asc}(T) < \infty\}$, a donji semi-Browderov spektar je $\sigma_{db}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \mathcal{B}_-(X)\}$, gde je $\mathcal{B}_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : \mathrm{des}(T) < \infty\}$.

Koristićemo sledeće važno tvrđenje o semi-Browderovim operatorima.

Lemma 4.24. (a) *$\mathcal{B}_+(X)$ i $\mathcal{B}_-(X)$ su otvoreni podskupovi od $\mathcal{L}(X)$* [76, Satz 4].

(b) $\partial\sigma_b(T) \subset \partial\sigma_{ab}(T)$ [101, Corollary 2.5 (ii)], *i dualno $\partial\sigma_b(T) \subset \partial\sigma_{db}(T)$.*

(c) *$\sigma_{ab}(T)$ i $\sigma_{db}(T)$ su neprazni kompaktni podskupovi od $\mathbb{C}$ (sledi iz* (a) *i* (b)*).*

Podsetimo se i ovde rezultata Heusera-Taylora (vidi i Teoremu 2.18).

Teorema 4.25. (a) *Ako je bar jedna od veličina $\alpha(T)$, $\alpha(T')$ konačna, onda* $\mathrm{asc}(T) < \infty$ *povlači $\alpha(T) \le \alpha(T')$, a sa druge strane* $\mathrm{des}(T) < \infty$ *povlači $\alpha(T') \le \alpha(T)$.*

(b) *Ako je $\alpha(T) = \alpha(T') < \infty$, tada je* $\mathrm{asc}(T)$ *konačan ako i samo ako je* $\mathrm{des}(T)$ *konačan.*

Napomenimo da Goldbergov spektar operatora $T \in \mathcal{L}(X)$, u oznaci $\sigma_g(T)$, jeste skup [43,114]:

$$\sigma_g(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(\lambda - T) \text{ nije zatvoren}\}.$$

$\sigma_g(T)$ može biti prazan skup, a u opštem slučaju nije ni zatvoren ni otvoren podskup od $\mathbb{C}$.

Počećemo rezultatom koji povezuje semi-Browderove spektre i Golbergov spektar.

Teorema 4.26. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični operatori, onda važi:*

(a) $\sigma_{ab}(T) \backslash \sigma_g(T) \subset \sigma_{ab}(S)$ *i* $\sigma_{ab}(S) \backslash \sigma_g(S) \subset \sigma_{ab}(T)$;

(b) $\sigma_{db}(T) \backslash \sigma_g(T) \subset \sigma_{db}(S)$ *i* $\sigma_{db}(S) \backslash \sigma_g(S) \subset \sigma_{db}(T)$.

Dokaz. Da bi pokazali (a), neka $\lambda \in \sigma_{ab}(T) \backslash \sigma_g(T)$ i $\lambda \notin \sigma_{ab}(S)$. Postoje kvaziafiniteti $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ i $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, tako da važi $AT = SA$ i $TB = BS$. Sledi $A(\lambda - T)^n = (\lambda - S)^n A$ za svaki prirodan broj n. Kako je $\operatorname{asc}(\lambda - S) = p < \infty$, sledi

$$A\mathcal{N}^\infty(\lambda - T) \subset \mathcal{N}^\infty(\lambda - S) = \mathcal{N}(\lambda - S)^p$$

(ovde je $\mathcal{N}^\infty(T) = \bigcup_n \mathcal{N}(T^n)$). Kako je $\alpha(\lambda - S)^p < \infty$, i A je injektivno preslikavanje, sledi da važi $\dim \mathcal{N}^\infty(\lambda - T) < \infty$, odakle zaključujemo $\alpha(\lambda - T) < \infty$ i $\operatorname{asc}(\lambda - T) < \infty$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $\lambda \in \sigma_{ab}(T) \setminus \sigma_g(T)$.

Preostala tvrđenja pokazuju se na sličan način. □

U sledećoj jednostavnoj posledici koristimo Teoremu 4.23.

Posledica 4.27. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični, onda važi*

$$\sigma_b(T) \setminus \sigma_g(T) \subset \sigma_b(S),$$

i svaka komponenta skupa $\sigma_b(T)$ ima neprazan presek sa $\sigma_b(S)$.

Takođe možemo pokazati sledeću teoremu koja se odnosi na Weylov spektar.

Posledica 4.28. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični, tada je*

$$\sigma_w(T) \setminus \sigma_g(T) \subset \sigma_w(S),$$

i svaka komponenta skupa $\sigma_w(T)$ ima neprazan presek sa $\sigma_w(S)$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\lambda \in \sigma_w(T) \setminus \sigma_g(T)$. Sledi $\mathcal{R}(\lambda - T)$ je zatvoren skup i važi jedna od sledećih pretpostavki: ili je $\alpha(\lambda - T) \neq \alpha(\lambda - T)'$, ili je $\alpha(\lambda - T) = \infty$ i $\alpha(\lambda - T)' = \infty$. Prema tome $\lambda \in \sigma_w(S)$. □

Koristićemo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} H_{\infty\infty}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(\lambda - T) = \infty, \alpha(\lambda - T)' = \infty\}, \\ H_{\alpha<\beta}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(\lambda - T) < \alpha(\lambda - T)'\}, \\ H_{\beta<\alpha}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha(\lambda - T)' < \alpha(\lambda - T)\}, \\ K_{\infty\infty}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{asc}(\lambda - T) = \infty,\ \mathrm{asc}(\lambda - T)' = \infty\}, \\ A_{\infty}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{asc}(\lambda - T) = \infty\} \\ D_{\infty}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{asc}(\lambda - T)' = \infty\}. \end{aligned}$$

Neka je $\sigma_E(T) = \sigma_{ab}(T) \setminus [H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T)]^\circ$. Ovde D° označava unutrašnjost skupa D.

Potreban je i sledeći pomoćni rezultat.

Lema 4.29. *Ako je $T \in \mathcal{L}(X)$ i $\alpha(T) < \infty$, tada važi $\alpha(T^n) \leq n \cdot \alpha(T) < \infty$ za svaki pozitivan ceo broj n.*

Opisaćemo preciznije semi-Browderove esencijalne spektre kvazisličnih operatora. Glavni rezultat sledi.

Teorema 4.30. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični, tada svaki zatvoreno-otvoreni podskup od $\sigma_{db}(T)$ imaneprazan presek sa $\sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)$.*

Dokaz. Neka je τ proizvoljan zatvoreno-otvoren podskup od $\sigma_{db}(T)$. Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj I. Pretpostavimo da τ nije otvoren podskup skupa $\sigma_b(T)$. Sledi postoje: $t \in \tau$ i niz $(t_n)_n \subset \sigma_b(T) \setminus \sigma_{db}(T)$, tako da važi $\lim t_n = t$, te je $t \in \partial(\sigma_b(T) \setminus \sigma_{db}(T))$.

Za $\lambda \in \sigma_b(T) \setminus \sigma_{db}(T)$ znamo da je $\mathcal{R}(\lambda - T)$ je zatvoren, $\alpha(\lambda - T)' < \infty$ i $\mathrm{des}(\lambda - T) < \infty$. Kako je $\mathcal{R}(\lambda - T)^n$ zatvoren za svako n, sledi $\mathrm{asc}(\lambda - T)' < \infty$. Prema tome $\lambda \notin H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T)$. Takođe, $\alpha(\lambda - T) = \infty$, ili $\mathrm{asc}(\lambda - T) = \infty$, odakle sledi $\lambda \in \sigma_{ab}(T) \setminus [H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T)]^\circ$.

Sa druge strane, iz $\lambda \in \sigma_b(T) \setminus \sigma_{db}(T)$ sledi $\alpha(\lambda - S)' = \alpha(\lambda - T)' < \infty$, te je $\lambda \notin H_{\infty\infty}(S)$. Postoje kvaziafiniteti $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ i $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tako da važi $AT = SA$ i $TB = BS$, odakle sledi $A'[(\lambda - S)']^n = [(\lambda - T)']^n A'$ za svako n.

Koristeći ideju iz Teoreme 4.26, sledi $A'\mathcal{N}[(\lambda - S)']^n \subset \mathcal{N}[(\lambda - T)']^n$ za svako n, a odatle

$$A'\mathcal{N}^\infty(\lambda - S)' \subset \mathcal{N}^\infty(\lambda - T)' = \mathcal{N}[(\lambda - T)']^p,$$

gde je $p = \operatorname{asc}(\lambda - T)' < \infty$. Kako je $(\lambda - T)'$ semi-Fredholmov i A' je injektivan, sledi

$$\alpha(\lambda - S)' \leq \dim \mathcal{N}^\infty(\lambda - S)' \leq \alpha[(\lambda - T)']^p < \infty.$$

Zaključujemo da važi $\operatorname{asc}(\lambda - S)' < \infty$, te je $\lambda \notin K_{\infty\infty}(S)$. Treba pokazati da $\lambda \in \sigma_{ab}(S)$. Pretpostavimo $\lambda \notin \sigma_{ab}(S)$. Sledi $\mathcal{R}(\lambda - S)$ je zatvoren, $\alpha(\lambda - S) = \alpha(\lambda - T) < \infty$ i $\operatorname{asc}(\lambda - S) < \infty$. Koristeći prethodnu metodu znamo da ove pretpostavke vode do činjenice $\operatorname{asc}(\lambda - T) < \infty$, koja je u kontradikciji sa $\lambda \in \sigma_{ab}(T)$. Upravo smo pokazali da je $\lambda \in \sigma_{ab}(S) \setminus [H_{\infty\infty}(S) \cup K_{\infty\infty}(S)]^\circ$.

Sledi $\sigma_b(T) \setminus \sigma_{db}(T) \subset \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)$. Kako je $\sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)$ zatvoren, sledi $t \in \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)$.

Slučaj II. Neka je τ otvoren podskup skupa $\sigma_b(T)$. Kako su $\sigma_b(T)$ i $\sigma_{db}(T)$ zatvoreni potskupovi od $\mathbb{C}$ i τ je zatovreno-otvoren podskup od $\sigma_{db}(T)$, sledi da je τ zatvoreno-otvoreni podskup od $\sigma_b(T)$. Prema Posledici 4.27 sledi $\tau \cap \sigma_b(S) \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da je $\tau \cap \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S) = \emptyset$. Lako je pokazati sledeće:

$$\begin{aligned} \tau \cap \sigma_b(S) &\subset (\sigma_{db}(T) \cap \sigma_b(S)) \setminus (\sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)) \\ &\subset (\sigma_{db}(T) \setminus \sigma_E(T)) \cup (\sigma_b(S) \setminus \sigma_E(S)). \end{aligned}$$

Primetimo da je

$$\sigma_{db}(T) \setminus \sigma_E(T) = (\sigma_{db}(T) \setminus \sigma_{ab}(T)) \cup (\sigma_{db}(T) \cap [H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T)]^\circ).$$

Pokazaćemo sledeće: $\sigma_{db}(T) \setminus \sigma_E(T) \subset D(T)$, gde je

$$D(T) = [H_{\alpha<\beta}(T) \cap D_\infty(T)]^\circ \cup [H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T)]^\circ.$$

Neka je $\lambda \in \sigma_{db}(T) \setminus \sigma_{ab}(T)$. Sledi da je $\mathcal{R}(\lambda - T)$ zatvoren, $\alpha(\lambda - T) < \infty$ i $\operatorname{asc}(\lambda - T) < \infty$. Prema Teoremi 4.25 sledi $\alpha(\lambda - T) \leq \beta(\lambda - T)$. Iz $\alpha(\lambda - T) = \beta(\lambda - T) < \infty$ sledi $\operatorname{des}(\lambda - T) = \operatorname{asc}(\lambda - T) < \infty$ (Teorema 4.25), te je $\lambda - T$ Browderov operator, što je u suprotnosti sa činjenicom $\lambda \in \sigma_{db}(T)$. Zaključujemo da $\lambda \in H_{\alpha<\beta}(T)$. Kako je $\lambda - T \in \mathcal{B}_+(X) \subset \Phi_+(X)$, proizilazi $\lambda \in H_{\alpha<\beta}(T)^\circ$, i stoga je

$$\varepsilon_1 = \operatorname{dist}\{\lambda;\ \mathbb{C} \setminus H_{\alpha<\beta}(T)\} > 0.$$

Neka je $\varphi_0(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu - T \in \Phi_0(X)\}$. Dobro je poznato da je $\varphi_0(T)$ otvoren podskup od $\mathbb{C}$. Kako je $\lambda \in \Phi_+(X) \setminus \Phi_0(X)$, sledi

$$\varepsilon_2 = \mathrm{dist}\{\lambda;\ \varphi_0(T)\} > 0.$$

Primetimo da je

$$\varepsilon_3 = \mathrm{dist}\{\lambda;\ \sigma_{ab}(T)\} > 0.$$

Neka je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}(> 0)$. Tvrdimo da ako je $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, onda $\mathrm{des}(\mu - T) = \mathrm{asc}(\mu - T)' = \infty$. Pretpostavimo suprotno: $\mathrm{des}(\mu - T) < \infty$. Kako je $\mu - T \in \mathcal{B}_+(X)$, sledi da je $\beta(\mu - T) = \alpha(\mu - T)$, što je u suprotnosti sa činjenicom $\mu \in H_{\alpha<\beta}(T)$. Upravo smo pokazali da je

$$\lambda \in [H_{\alpha<\beta}(T) \cap D_\infty(T)]^\circ.$$

Sada je očigledno

$$\sigma_{db}(T) \setminus \sigma_E(T) \subset D(T).$$

Na isti način možemo pokazati $\sigma_b(S) \setminus \sigma_E(S) \subset D(S)$, te je

$$\tau \cap \sigma_b(S) \subset D(T) \cap D(S).$$

Dokažimo sada $D(T) = D(S)$. Prvo ćemo pokazati

$$[H_{\alpha<\beta}(T) \cap D_\infty(T)]^\circ = [H_{\alpha<\beta}(S) \cap D_\infty(S)]^\circ.$$

Neka je $\lambda \in [H_{\alpha<\beta}(T) \cap D_\infty(T)]^\circ$. Postoji $\varepsilon > 0$, tako da za svako $\mu \in \mathbb{C}$, ako je $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, onda $\alpha(\mu - T) < \alpha(\mu - T)'$ i $\mathrm{asc}(\mu - T)' = \infty$. Sledi da je $\alpha(\mu - S) < \alpha(\mu - S)'$. Primetimo da $\mathrm{asc}(\mu - S)' < \infty$ implicira $\alpha(\mu - S)' \le \beta(\mu - S)' = \alpha(\mu - S)$ (Teorema 4.25), te zaključujemo $\mathrm{asc}(\mu - S)' = \infty$ za svako μ, $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, i $\lambda \in [H_{\alpha<\beta}(S) \cap D_\infty(S)]^\circ$.

Sada pokazujemo $H_{\infty\infty}(T) \cup K_{\infty\infty}(T) = H_{\infty\infty}(S) \cup K_{\infty\infty}(S)$. Kako je $H_{\infty\infty}(T) = H_{\infty\infty}(S)$, dovoljno je pokazati

$$K_{\infty\infty}(T) \setminus H_{\infty\infty}(T) = K_{\infty\infty}(S) \setminus H_{\infty\infty}(S).$$

Da bi pokazali poslednju jednakost, neka je $\lambda \in K_{\infty\infty}(T) \setminus H_{\infty\infty}(T)$. Tada je $\mathrm{asc}(\lambda - T) = \infty$ i $\mathrm{asc}(\lambda - T)' = \infty$. Pretpostavimo da je $\infty > \alpha(\lambda - T) = \alpha(\lambda - S)$.

Neka je $\mathrm{asc}(\lambda - S) = p < \infty$. Kako je $AT = SA$ zaključujemo da važi

$$A\mathcal{N}^\infty(\lambda - T) \subset \mathcal{N}^\infty(\lambda - S) = \mathcal{N}(\lambda - S)^p.$$

Takođe, A je kvaziafinitet, te je

$$\alpha(\lambda - T) \leq \dim \mathcal{N}^\infty(\lambda - T) \leq \alpha(\lambda - S)^p \leq p \cdot \alpha(\lambda - S) < \infty \text{ (Lema 4.29.}$$

Sledi $\mathrm{asc}(\lambda - T) < \infty$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $\lambda \in K_{\infty\infty}(T) \setminus H_{\infty\infty}(T)$. Zaključujemo da je $\mathrm{asc}(\lambda - S) = \infty$.

Pretpostavimo da je $\mathrm{asc}(\lambda - S)' < \infty$. Prema Teoremi 4.25 sledi $\alpha(\lambda - S)' \leq \beta(\lambda - S)' = \alpha(\lambda - S) < \infty$ i poznatim metodom zaključujemo da je $\mathrm{asc}(\lambda - T)' < \infty$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $\mathrm{asc}(\lambda - T)' = \infty$. Sledi $\mathrm{asc}(\lambda - S)' = \infty$.

Upravo smo pokazali $D(T) = D(S) = D$.

Primetimo da je D otvoren podskup od $\mathbb{C}$. Takođe, $D \subset \sigma_{db}(T)^\circ$ i $D \subset \sigma_b(S)^\circ$. Možemo pokazati da je $\tau \cap D$ zatvoreno-otvoren podskup od $\mathbb{C}$, što je u kontradikciji sa činjenicom $\emptyset \neq D \neq \mathbb{C}$. Kako je D otvoren podskup od $\mathbb{C}$ i τ je zatvoreno-otvoreni podskup od $\sigma_{db}(T)$, sledi da je $\tau \cap D$ otovren u $\mathbb{C}$. Kako je $\sigma_b(S) \setminus D \subset \sigma_E(S)$, zaključujemo da je $\partial D \subset \sigma_E(S)$. Na isti način možemo pokazati $\partial D \subset \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)$. Na kraju, pretpostavimo da je $(t_n)_n \subset \tau \cap D$ i $\lim t_n = t \in \tau$. Proizilazi da je

$$t \in \tau \cap (D \cap \partial D) \subset (\tau \cap D) \cup (\tau \cap \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S)) = \tau \cap D,$$

te je $\tau \cap D$ zatvoren u $\mathbb{C}$.

Znači, pokazali smo da je $\tau \cap \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S) \neq \emptyset$. $\square$

Sada je jednostavno pokazati sledeći rezultat.

Posledica 4.31. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični i Ω je podskup od $\mathbb{C}$ tako da važi*

$$\sigma_{db}(T) \cap \Omega \neq \emptyset \quad i \quad \sigma_{db}(T) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

tada je

$$\Omega \cap \sigma_E(T) \cap \sigma_E(S) \neq \emptyset.$$

U sledećoj teoremi pokazaćemo rezultat koji se tiče Browderovog esencijalnog spektra. Koristimo oznaku $\sigma_{adb}(T) = \sigma_{ab}(T) \cap \sigma_{db}(T)$.

Teorema 4.32. *Ako su $T \in \mathcal{L}(X)$ i $S \in \mathcal{L}(Y)$ kvazislični i Ω je podskup od $\mathbb{C}$ tako da je*

$$\sigma_b(T) \cap \Omega \neq \emptyset \quad i \quad \sigma_b(T) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

tada je $\Omega \cap \sigma_G(T) \cap \sigma_G(S) \neq \emptyset$. Ovde je $\sigma_G(T) = \sigma_{adb}(T) \setminus G(T)$ i

$$G(T) = [H_{\alpha<\beta}(T) \cap D_\infty(T)]^\circ \cup [H_{\beta<\alpha}(T) \cap A_\infty(T)]^\circ.$$

Dokaz. Lako je zaključiti $\partial\sigma_b(T) \cap \Omega \neq \emptyset$. Prema Lemi 4.24 sledi da važi $\partial\sigma_b(T) \subset \partial\sigma_{ab}(T)$ i $\partial\sigma_b(T) \subset \partial\sigma_{db}(T)$. Prema tome, ako $\lambda \in \partial\sigma_b(T) \cap \Omega$, onda $\lambda \in \sigma_{adb}(T)$. Primetimo da je $G(T) \subset \sigma_b(T)^\circ$, te je $\lambda \in \sigma_{adb}(T) \setminus G(T) = \sigma_G(T)$. Sada λ pripada ili ne pripada skupu $\sigma_b(S)$, i stoga razlikujemo dva slučaja.

Slučaj I. Neka je $\lambda \in \sigma_b(S)$ i $\lambda \notin \sigma_G(T) \cap \sigma_G(S)$. Tada je

$$\lambda \in \sigma_b(S) \setminus \sigma_G(S) = [\sigma_b(S) \setminus \sigma_{adb}(S)] \cup [\sigma_b(S) \cap G(S)].$$

Primetimo da važi $\sigma_b(S) \cap G(S) = G(S)$. Iz $\lambda \in \sigma_b(S) \setminus \sigma_{adb}(S)$ sledi $\lambda - S \in \mathcal{B}_+(Y) \cup \mathcal{B}_-(Y)$, i $\mathcal{R}(\lambda - S)$ je ztavoren. Ako bi bilo $\lambda - S \in \mathcal{B}_+(Y)$, tada bi važilo $\alpha(\lambda - S) < \infty$ i $\operatorname{asc}(\lambda - S) < \infty$. Odavde proizilazi $\alpha(\lambda - S) \leq \alpha(\lambda - S)'$. Ako pretpostavimo $\alpha(\lambda - S) = \alpha(\lambda - S)'$, onda sledi $\operatorname{asc}(\lambda - S) = \operatorname{asc}(\lambda - S)' < \infty$ i $\lambda \notin \sigma_b(S)$, što protivreči činjenici $\lambda \in \sigma_b(S)$. Zaključujemo da $\lambda - S \in \mathcal{B}_+(Y)$ implicira $\lambda \in [H_{\alpha<\beta}(S) \cap D_\infty(S)]^\circ$ (podsetimo se odgovarajućeg dela dokaza Teoreme 4.30). Takođe, $\lambda - S \in \mathcal{B}_-(Y)$ implicira $\lambda \in [H_{\beta<\alpha}(S) \cap A_\infty(S)]^\circ$. U svakom slučaju, proizilazi da važi $\sigma_b(S) \setminus \sigma_{adb}(S) \subset G(S)$ i

$$\sigma_b(S) \setminus \sigma_G(S) = G(S).$$

Koristeći odgovarajući deo dokaza Teoreme 4.30, zaključujemo da važi $G(S) = G(T)$, te je $\lambda \in \sigma_b(T)^\circ$. Dobijeno tvrđenje je u kontradikciji sa $\lambda \in \partial\sigma_b(T)$, i sledi $\lambda \in \Omega \cap \sigma_G(T) \cap \sigma_G(S)$.

Slučaj II. Pretpostavimo da $\lambda \notin \sigma_b(S)$. U ovom slučaju neka τ označava komponentu skupa $\sigma_b(T)$ koja sadrči tačku λ. Prema Posledici 4.27 sledi postoji $\mu \in \tau \cap \sigma_b(S)$, te je $\tau \cap \partial\sigma_b(S) \neq \emptyset$. Neka je $\nu \in \tau \cap \partial\sigma_b(S)$. Kao i u Slučaju I zaključujemo $\nu \in \sigma_{adb}(S) \setminus G(S) = \sigma_G(S)$. Ako $\nu \notin \sigma_G(S) \cap \sigma_G(T)$, onda

$$\nu \in \sigma_b(T) \setminus \sigma_G(T) = G(T) = G(S) \subset \sigma_b(S)^\circ,$$

(pri čemu koristimo odgovarajući deo dokaza u Slučaju I), što protivreči izboru $\nu \in \partial\sigma_b(S)$. Iz svega ovoga sledi $\nu \in \sigma_G(T) \cap \sigma_G(S)$. Na kraju, pretpostavimo da je $\nu \notin \Omega$. Kako je $\lambda \in \tau \cap \Omega$, sledi $\tau \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, što je u suprotnosti sa $\sigma_b(T) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Ponovo, sledi da je $\nu \in \Omega \cap \sigma_G(T) \cap \sigma_G(S)$. $\square$

Koristeći Teoremu 4.32 nije teško pokazati sledeći rezultat.

Posledica 4.33. *Ako su uslovi Teoreme 4.32 ispunjeni, tada* $\Omega \cap \partial(\sigma_G(T) \cap \sigma_G(S)) \neq \emptyset$.

Sada, koristeći iste metode kao u Teoremi 4.32 i Posledici 4.33, možemo pokazati još jedan rezultat koji se odnosi na Weylov esencijalni spektar. Koristimo oznaku $\sigma_{lre}(T) = \sigma_{le}(T) \cap \sigma_{re}(T)$.

Teorema 4.34. *Ako su* $T \in \mathcal{L}(X)$ *i* $S \in \mathcal{L}(Y)$ *kvazislični operatori i* Ω *je podskup od* $\mathbb{C}$ *takav da važi*

$$\sigma_w(T) \cap \Omega \neq \emptyset \quad i \quad \sigma_w(T) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

tada $\Omega \cap \partial(\sigma_F(T) \cap \sigma_F(S)) \neq \emptyset$, *gde je* $\sigma_F(T) = \sigma_{lre}(T) \setminus F(T)$ *i*

$$F(T) = [H_{\alpha<\beta}(T) \cup H_{\beta<\alpha}(T) \cup H_{\infty\infty}(T)]^\circ.$$

Primedba 4.35. Analogni resultati za donji i gornji semi-Fredholmov spektar dokazani su u radu [131].

KONZISTENTNOST OPERATORA

Motivacija za ovaj odeljak nastala je iz rada [44], gde je razmatran sledeći probelm. Ako je H Hilbertov prostor i $B \in \mathcal{L}(X)$, kažemo da je B konzistentan u invertibilnosti, ako za svaki operator $A \in \mathcal{L}(X)$ važi:

$$AB \text{ je invertibilan ako i samo ako je } BA \text{ invertibilan.}$$

Pri tome su svi operatori na tom prostoru svrstani u nekoliko disjunktnih klasa i za svaku klasu dat je precizan odgovor da li su operatori te klase konzistentni u invertibilnosti. Ovo je kasnije iskorišéno za opisivanje zatvorenja skupa invertibilnih operatora na separabilnom Hilbertovom prostoru. Takođe je opisano i zatvoerenje skupa Fredholmvoh operatora na istom prostoru. Primećujemo da nije specijalno razmatrano pitanje konzistentnosti u skupu Fredholmovih operatora. Nama je cilj da umseto skupa invertibilnih operatora posmatramo i neke druge skupove operatora, čiji elementi zadržavaju neka svojstva uopštene invertibilnosti. Takođe, naša razamtranja se prvenstveno odnose na operatore na Banachovim prostorima, ali formulišemo i tvrđenja za operatore na Hilbertovom prostoru. Kao posledice dobijamo tvrđenja iz rada [44], neka sličnim metodama, a neka potpuno različitim. Takođe ćemo pokazati i zanimljive rezultate za neke klase operatora koje u već pomenutom radu nisu razmatrane.

Ovaj odeljak urađen je prema radu [28].

Neka je $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{L}(X)$.

Definicija. Operator $B \in \mathcal{L}(X)$ je konzistentan u $\mathcal{S}(X)$, ili kraće $\mathcal{S}$-konzistentan, ako za svaki operator $A \in \mathcal{L}(X)$ važi:

$$AB \in \mathcal{S}(X) \quad \text{ako i samo ako} \quad BA \in \mathcal{S}(X).$$

Neka su $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{G}_l(X)$ i $\mathcal{G}_r(X)$, redom, skupovi svih invertibilnih, levo invertibilnih i desno invertibilnih operatora na Banachovom prostoru X. Takođe, $\Phi(X)$, $\Phi_l(X)$ i $\Phi_r(X)$ neka označavaju, redom, skup Fredholmovih, levo Fredholmovih i desno Fredholmovih operatora na X. $\Phi_0(X)$ je skup svih Weylovih, a $\mathcal{B}(X)$ skup svih Browderovih operatora na X.

$\mathcal{F}(X)$ je skup svih konačno dimenzionalnih operatora na X, a $\mathcal{K}(X)$ skup (zatvoreni ideal) svih kompaktnih operatora na X. Takođe, $\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X) = \mathcal{C}(X)$ označava prirodni epimorfizam iz algebre $\mathcal{L}(X)$ na Calkinovu algebru $\mathcal{C}(X)$.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{S}(X) = \mathcal{G}(X)$ skup svih invertibilnih operatora na Banachovom prostoru X. Razvrstavamo sve operatore na prostoru X u nekoliko klasa, i za operatore svake klase dajemo odgovor na pitanje da li su konzistenti u invertibilnosti.

Teorema 4.36. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$. Tada je B $\mathcal{G}$-konzistentan ako i samo ako B ima jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:*

(1) *B je invertibilan;*

(2) *$\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren;*

(3) *$\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$ i $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)} \neq X$;*

(4) *$\mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$ i $\mathcal{R}(B)$ nije komplementaran potprostor od X;*

(5) *$\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, $\mathcal{R}(B) = X$ i $\mathcal{N}(B)$ nije komplementaran potprostor od X.*

Takođe, B nije $\mathcal{G}$-konzistentan ako i samo B ima jednu od sledećih uzajamno disjunktnin osobina:

(6) *$\mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$ i $\mathcal{R}(B)$ je pravi komplementaran potprostor od X;*

(7) *$\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, $\mathcal{R}(B) = X$ i $\mathcal{N}(B)$ je komplementaran potprostor od X.*

Dokaz. Ako je B invertibilan, tada $AB = B^{-1}(BA)B$, te (1) sledi. Da bi pokazali (2), pretpostavimo da $\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren. Tada $\mathcal{R}(BA) \neq X$ i BA nije invertibilan za svako $A \in \mathcal{L}(X)$. Pretpostavimo da postoji $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da je AB invertibilan. Tada je B levo invertibilan i B je relativno regularan. Sledi da je $\mathcal{R}(B)$ zatvoren, što je u suprotnosti sa našim prethodnim pretpostavkama. Sada, AB nije invertibilan i (2) sledi. Da bi pokazali (3), pretpostavimo $\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$ i $\mathcal{R}(B) \neq X$. Očigledno, $\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(AB)$, te AB nije invertibilan za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Takođe, $\mathcal{R}(BA) \subset \mathcal{R}(B) \neq X$, te BA nije invertibilan za svako $A \in \mathcal{L}(X)$ i (3) sledi.

Da bi pokazali (4), pretpostavimo da je $\mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren i $\mathcal{R}(B)$ nije komplementaran potprostor od X. Proizilazi da BA nije invertibilan za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Pretpostavimo da postoji neki $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da je AB invertibilan. Tada je B levo invertibilan, stoga je B relativno regularan i $\mathcal{R}(B)$ komplementaran. Dobijenom kontradikcijom završavamo dokaz tvrđenja (4).

Pokazujemo (5). Neka je $\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, $\mathcal{R}(B) = X$ i $\mathcal{N}(B)$ nije komplementaran potprostor od X. Očigledno, AB nije invertibilan za svako $A \in \mathcal{L}(X)$. Pretpostavimo da postoji $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da je BA invertibilan. Sledi da je B desno invertibilan, te je B relativno regularan i $\mathcal{N}(B)$ je komplementaran potprostor od X.

Da bi pokazali (6), pretpostavimo da je $\mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren pravi komplementaran potprostor od X. Sledi da BA nije invertibilan za svaki $A \in \mathcal{L}(X)$. Međutim, B je levo invertibilan, i postoji operator S, tako da je $SB = I$. Zaključujemo da B nije $\mathcal{G}$-konzistentan.

Dokaz tvrđenja (7) je sličan dokazu tvrđenja (6), pošto u tom slučaju B je desno invertibilan i AB nije invertibilan za sve $A \in L(X)$. $\square$

Primedba 4.37. *Ako je X Hilbertov prostor, slučajevi (4) i (5) Teoreme 4.36 nisu mogući. U slučaju kada je X Hilbertov prostor, Teorema 4.36 svodi se na* [44, Theorem 1.1].

U radu [44] rezultati ovog tipa iskorišéni su za određivanje zatvorenja skupa invertibilnih operatora na separabilnim Hilbertovim prostorima. Za operatore na Banachovim prostorima ne treba očekivati rezultate iste težine, iz razloga što zatvorenje skupa invertibilnih operatora u tom slučaju nije najpreciznije opisano. Pokazaćemo ipak nekoliko vrednih rezultata u tom smislu.

Sledeće oznake i terminologija uzeti su iz [55, 56, 57].

Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je dekompoziciono regularan, ako postoji invertibilni operator $S \in \mathcal{L}(X)$, tako da važi $TST = T$. Dobro je poznato da je T dekompoziciono regularan ako i samo ako je T relativno regularan i $\mathcal{N}(T)$ je izomorfan prostoru $X/\mathcal{R}(T)$ [56]. Koristićemo i sledeći rezultat[55].

Lema 4.38. *Ako je T relativno regularan, tada $T \in cl\mathcal{G}(X)$ ako i samo ako je T dekompoziciono regularan.*

Napomenimo da tvrđenje Leme 4.38 važi i u opštem slučaju, u proizvoljnoj Banachovoj algebri sa jedinicom. Ovaj rezultat je proširen na zatvorenje Fredholmovih operatora u Banachovom prostoru [103]. Analogni rezultat je pokazao autor za Fredholmove elemente Banachove algebre, koji su definisani u odnosu na homomorfizam Banachovih algebri [24]. Kompletnije razmatranje zatvorenja Fredholmovih operatora biće razmatrano kasnije.

Neka je S podskup Banachove algebre $\mathcal{A}$. Perturbaciona klasa skupa S označava se sa $\mathcal{P}(S)$, a definiše sa

$$\mathcal{P}(S) = \{a \in \mathcal{A} : a + s \in S \text{ za svako } s \in S\}.$$

Ako je skup S otvoren, onda je $\mathcal{P}(S)$ zatvoren skup. Ako je $\lambda S \subset S$ za svako $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, onda je $\mathcal{P}(S)$ dvostrani ideal.

Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je strogo singularan, ako T nije odozdo ograničen (1–1 sa zatvorenom slikom) ni na jednom zatvorenom beskonačno dimenzionalnom potprostoru od X. Ako je $\Phi_+(X)$ skup gornjih semi-Fredholmovih operatora, onda zatvoreni ideal $\mathcal{P}(\Phi_+(X))$ sadrži skup svih strogo singularnih operatora. Skup svih strogo singularnih operatora na X je takođe zatvoreni dvostrani ideal u $\mathcal{L}(X)$.

Operator T je strogo kosingularan, ako za svaki beskonačno kodimenzionalan zatvoren potprostor V od X operator $Q_V T : X \to X/V$ nije surjekcija. Ovde je $Q_V : X \to X/V$ kanonski epimorfizam ($Q_V(x) = x + V$ za sve $x \in X$). Ako je $\Phi_-(X)$ skup donjih semi-Fredholmovih operatora, onda ideal $\mathcal{P}(\Phi_-(X))$ sadrži skup svih strogo kosingularnih operatora. Skup svih strogo kosingularnih operatora je zatvoreni dvostrani ideal u $\mathcal{L}(X)$.

Svaki kompaktan operator je strogo singularan i strogo kosingularan. Svaki strogo singularan ili strogo kosingularan operator je Rieszov operator. Sve inkluzije u opštem slučaju jesu prave.

Ako je H beskonačno dimenzionalni Hilbertov prostor, a α neki beskonačni kardinal, moguće je uopštiti pojam stroge singularnosti i stroge kosingularnosti operatora.

Kažemo da je $T \in \mathcal{L}(H)$ α-strogo singularan, ako za svaki zatvoreni potprostor V od H važi implikacija:

ako je $T : V \to T(V)$ invertibilan, onda je $\dim V < \alpha$.

Analogno, operator $T \in \mathcal{L}(H)$ je α-strogo kosingularan, ako za svaki zatvoren potprostor V od H važi implikacija:

ako je $Q_V T : H \to H/V$ surjekcija, onda je $\dim V^\perp < \alpha$;

Pri tome je $Q_V : H \to H/V$ prirodni epimorfizam, a $V^\perp$ je ortogonalni komplement potprostora V u Hilbertovom prostoru H. Naravno, $\dim V$ i $\dim V^\perp$ označava ortogonalne dimenzija Hilbertovih prostora V i $V^\perp$ redom.

Skup svih α-strogo (ko)singulanih operatora čini zatvoreni dvostrani ideal u $\mathcal{L}(H)$.

Ako je H separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, onda se svi ovi ideali operatora poklapaju, odnosno $\mathcal{K}(H)$ je jedini pravi zatvoreni ideal u $\mathcal{L}(H)$.

U narednim teoremama opisaćemo deo zatvorenja skupa $cl\mathcal{G}(X)$.

Teorema 4.39. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *$\alpha(B) = \beta(B)$, ili $\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren ili nije komplementaran potprostor od X;*

(2) *$B+F$ je $\mathcal{G}$-konzistantan za svako $F \in \mathcal{F}(X)$;*

(3) *$B+K$ je $\mathcal{G}$-konzistentan za svako $K \in \mathcal{P}(\Phi_+(X)) \cap \mathcal{P}(\Phi_-(X))$.*

Dokaz. (2) $\Longrightarrow$ (1). Neka je $\mathcal{R}(B)$ zatvoren i komplementaran potprostor od X. Pretpostavimo da je $\alpha(B) < \beta(B)$. Tada je $n = \dim \mathcal{N}(B)$ i neka su $y_1, \ldots, y_n$ vektori u X koji su linearno nezavisni po modulu $\mathcal{R}(B)$. Neka je $F_1 : \mathcal{N}(B) \to span\{y_1, \ldots, y_n\} = Y$ proizvoljan izomorfizam konačno dimenzionalnh prostora. Postoji zatvoreni potprostor M od X, tako da važi $X = \mathcal{N}(B) \oplus M$. Definišimo $F \in \mathcal{L}(X)$ na sledeći način:

$$Fx = \begin{cases} F_1 x, & x \in \mathcal{N}(B), \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Lako je proveriti da važi $\alpha(B+F) = 0$. Kako je $\mathcal{R}(B+F) = \mathcal{R}(B) \oplus Y$, sledi da je $\mathcal{R}(B+F)$ pravi zatvoren i komplementaran potprostor od X. Prema Teoremi 4.36 (6) sledi da $B+F$ nije $\mathcal{G}$-konzistentan.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Neka je $K \in \mathcal{P}(\Phi_+(X)) \cap \mathcal{P}(\Phi_-(X))$ proizvoljan. Ako $\mathcal{R}(B+K)$ nije zatovren, tada je $B+K$ $\mathcal{G}$-konzistentan (Teorema 4.36 (2)). Pretpostavimo da je $\mathcal{R}(B+K)$ zatvoren. Ako je $\alpha(B+K) = \infty$ i $\beta(B+K) = \infty$, tada je $B+K$ $\mathcal{G}$-konzistentan (Teorema 4.36 (3)). Pretpostavimo da je $\alpha(B+K) < \infty$. Tada je $B+K \in \Phi_+(X)$, te sledi $B \in \Phi_+(X)$ i $i(B+K) = i(B) = 0$. Ako je $\alpha(B+K) = 0$, tada je $B+K$ invertibilan i $\mathcal{G}$-konzistentan (Teorema 4.36 (1)). Ako je $\alpha(B+K) > 0$, prema Teoremi 4.36 (3) sledi da je $B+K$ is $\mathcal{G}$-konzistentan. $\square$

Sada, koristeći Lemu 4.38 i Teoremu 4.39 dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 4.40. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$ relativno regularan. Ako je $B \in cl\mathcal{G}(X)$, tada je $B+K$ $\mathcal{G}$-konzistentan za sve $K \in \mathcal{P}(\Phi_+(X)) \cap \Phi_-(X))$.*

Sada ćemo razmatrati $\mathcal{G}_l$-konzistentne operatore, gde $\mathcal{G}_l(X)$ označava skup svih levo invertibilnih operatora na X. Napomenimo da je T strogo singularan ako i samo ako T nije ograničen odozdo na svakom zatvorenom beskonačno dimenzionalnom potprostoru od X. U slučaju kada je H Hilbertov prostor, često se koristi sledeća generalisana definicija. Podsetimo se da $\dim H$ označava kardinalnost ortonormirane baze Hilbertovog prostora H.

Neka je $\dim H = \alpha$, gde je α neki beskonačni kardinal. Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ je α-strogo singularan, ako važi sledeće: ako je M zatvoren potprostor od H i restrikcija $T|_M : M \to T(M)$ je invertibilna, onda je $\dim M < \alpha$.

Poznato je da je klasa svih α-strogo singularnih operatora zatvoren dvostrani ideal u $\mathcal{L}(H)$.

Uvodimo pojam strogo levo singularnih operatora na Banachovom prostoru.

Definicija. Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je strogo levo singularan, ako za svako $S \in \mathcal{G}_l(X)$ važi $TS \notin \mathcal{G}_l(X)$.

Upoređujemo novouvedenu klasu operatora sa nekim već postojećim i dobro poznatim klasama. Nije teško proveriti tvrđenja u sledećoj primedbi.

Primedba 4.41. (1) *Ako je $T \in \mathcal{L}(X)$ strogo singularan onda je T strogo levo singularan.*

(2) *Ako je X Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$, tada je T strogo levo singularan ako i samo ako je T α-strogo singularan.*

(3) *Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, tada je T strogo levo singularan ako i samo ako je T kompaktan (ovo sledi iz činjenice da sada postoji jedinstven zatvreni ideal od $L(X)$).*

Pokazaćemo sada tvrđenje kojim su potpuno opisani $\mathcal{G}_l$-konzistentni operatori.

Teorema 4.42. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$. Tada je B $\mathcal{G}_l$-konzistentan ako i samo ako B ima jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:*

(1) *$B \in \mathcal{G}(X)$;*

(2) *$B \notin \mathcal{G}_l(X)$ i B je strogo levo singularan.*

Takođe, B nije $\mathcal{G}_l$-konzistentan ako i samo ako B ima jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:

(3) *$B \in \mathcal{G}_l(X) \setminus \mathcal{G}(X)$;*

(4) *$B \notin \mathcal{G}_l(X)$ i B nije strogo levo singularan.*

U slučaju kada je X beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$*, tada "strogo levo singularan" treba zameniti sa "*α*-strogo singularan". Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, tada "strogo levo singularan" treba zameniti sa "kompaktan".*

Dokaz. Da bi pokazali (1), pretpostavimo da je $B \in \mathcal{G}(X)$. Ako je $BA \in \mathcal{G}_l(X)$, tada $A \in \mathcal{G}_l(X)$ i $AB \in \mathcal{G}_l(X)$. Sa druge strane, ako je $AB = S \in \mathcal{G}_l(X)$, tada $A = SB^{-1} \in \mathcal{G}_l(X)$ i $BA \in \mathcal{G}_l(X)$, te je B $\mathcal{G}_l$-konzistentan.

(2) Neka je $B \notin \mathcal{G}_l(X)$ i B je strogo levo singularan. Tada je $AB \notin \mathcal{G}_l(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Pretpostavimo da postoji operator $A_0 \in \mathcal{L}(X)$, tako da $BA_0 \in \mathcal{G}_l(X)$. Zaključujemo $A_0 \in \mathcal{G}_l(X)$, što je u suprotnosti sa pretpostavokom da je B strogo levo singularan. Sledi B je $\mathcal{G}_l$-konzistentan.

(3) Ako je $B \in \mathcal{G}_l(X) \setminus \mathcal{G}(X)$, neka je B_1 proizvoljan levi inverz od B. Očigledno, $B_1 B = I \in \mathcal{G}_l(X)$. Sa druge strane, B_1 je g_2-inverz od B, te je BB_1 projekcija od X na $\mathcal{R}(B)$ koja ima netrivijalno jezgro, odakle sledi $BB_1 \notin \mathcal{G}_l(X)$. Ovim je pokazano da operator B nije $\mathcal{G}_l$-konzistentan.

(4) Na kraju, neka je $B \notin \mathcal{G}_l(X)$ i B nije strogo levo singularan. Tada postoji neki operator $A_0 \in \mathcal{G}_l(X)$ tako da je $BA_0 \in \mathcal{G}_l(X)$. Takođe, $AB \notin \mathcal{G}_l(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$, odakle sledi da B nije $\mathcal{G}_l$-konzistentan.

Preostali deo tvrđenja sledi na osnovu Primedbe 4.41 □

Napomenimo da je operator $T \in \mathcal{L}(X)$ strogo kosingularan ako za svaki zatvoren beskonačno kodimenzionalan potprostor V od X, operator $Q_V T$ nije surjektivan. Ovde $Q_V : X \to X/V$ označava prirodni epimorfizam. Opštije, neka je H Hilbertov prostor i $\dim H = \alpha$ neka je beskonačni kardinal. Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ je α-strogo kosingularan, ako za proizvoljan zatvoren potprostor V od H važi: ako je $Q_V T$ surjekcija iz H na H/V, tada je $\operatorname{codim} V < \alpha$.

Uvodimo pojam stroge desne singularnosati za operatore na Banachovom prostoru.

Definicija. Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je strogo desno singularan, ako i samo ako za svako $S \in \mathcal{G}_r(X)$ važi $ST \notin \mathcal{G}_r(X)$.

Povezaćemo u sledećoj teoremi različite aspekte singularnosti.

Teorema 4.43. (1) *Ako je T strogo kosingularan, tada je T strogo desno singularan.*

(2) *Ako je X kompleksan beskonačno dimenzionalan Hibertov prostor i* $\dim X = \alpha$, *tada je T α-strogo kosingularan ako i samo ako je T strogo desno singularan.*

(3) *Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, tada je T strogo desno sinularan ako i samo ako je T kompaktan.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je T strogo kosingularan i $S \in \mathcal{G}_r(X)$. Sledi da postoji zatvoren potprostor M od X, tako da $\mathcal{N}(S) \oplus M = X$ i restrikcija $S|_M : M \to X$ je invertibilan operator. Sledi $\dim M = \operatorname{codim} \mathcal{N}(S) = \infty$. Razmotrimo prirodni homomorfizam $Q_{\mathcal{N}(S)} : X \to X/\mathcal{N}(S)$. Važi

$$X/\mathcal{N}(S) \neq \mathcal{R}(Q_{\mathcal{N}(S)}T) = \{Tx + \mathcal{N}(S) : x \in X\}.$$

Postoji $y \in X$, tako da $y + \mathcal{N}(S) \neq Tx + \mathcal{N}(S)$ za sve $x \in X$. Zaključujemo da važi $y_1 = Sy \neq STx$ za sve $x \in X$. Sada je $\mathcal{R}(ST) \neq X$ i $ST \notin \mathcal{G}_r(X)$, i stoga je T strogo desno singularan.

(2) Implikacija $\Longrightarrow$ sledi na isti način kao u (1). Jedino treba razmatrati ortogonalne dimenzije zatvorenih potprostora.

Da bi pokazali suprotnu implikaciju $\Longleftarrow$, pretpostavimo da je $T \in \mathcal{L}(X)$ strogo desno singularan. Neka je V proizvoljan zatvoren potprostor od X takav da $\dim V^\perp = \alpha$. Neka je $S \in \mathcal{L}(X)$ definisan tako da važi $S|_V = 0$, a $S|_{V^\perp} : V^\perp \to X$ je izomorfizam Hilbertovih prostora. Zaključujemo $S \in \mathcal{G}_r(X)$ i $ST \notin \mathcal{G}_r(X)$. Kako je $\mathcal{N}(ST)$ uvek komplementaran potprostor od X, proizilazi da mora važiti $\mathcal{R}(ST) \neq X$. Postoji $y_0 \in X$ takav da $y_0 \neq STx$ za sve $x \in X$. Pretpostavimo da za sve $y \in X$ postoji neki $x \in X$ tako da je $y + V = Tx + V$. Proizilazi da $y - Tx \in V = \mathcal{N}(S)$ i $Sy = STx$. Sada je

$$X = \{Sy : y \in X\} = \{STx : x \in X\} = \mathcal{R}(ST) \neq X.$$

Znači, $\mathcal{R}(Q_V T) \neq X/V$ i T je α-strogo singularan. $\square$

U sledećoj teoremi dajemo kompletan opis $\mathcal{G}_r$-konzistentnih operatora na Banachovim prostorima.

Teorema 4.44. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$. Tada B je $\mathcal{G}_r$-konzistentan ako i samo ako za B važi jedna od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:*

(1) $B \in \mathcal{G}(X)$;

(2) $B \notin \mathcal{G}_r(X)$ *i B je strogo desno singularan.*

Takođe, B nije $\mathcal{G}_r$-konzistentan ako i samo ako B ispinjava jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:

(3) $B \in \mathcal{G}_r(X) \setminus \mathcal{G}(X)$;

(4) $B \notin \mathcal{G}_r(X)$ *i B nije strogo desno singularan.*

U slučaju kada je X beskonačno dimenzionalni Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$, tada "strogo desno singularan" treba zameniti sa "α-strogo kosingularan". Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor tada "strogo desno singularan " treba zameniti sa "kompaktan".

Sada ćemo razmatrati konzistentnost u vezi sa Fredholmovom teorijom. operatore. Dajemo kompletan

Teorema 4.45. *Neka je $B \in \mathcal{L}(X)$. Tada je B Φ-konzistentan ako i samo ako za B važi jedna od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:*

(1) $B \in \Phi(X)$;

(2) $\alpha(B) = \infty$ *i* $\beta(B) = \infty$;

(3) $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ *i $\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren ili nije komplementaran potprostor od X;*

(4) $\alpha(B) = \infty$, $\beta(B) < \infty$ *i $\mathcal{N}(B)$ nije komplementaran potprostor od X;*

Osim toga, B nije Φ-konzistentan ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(5) $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ *i $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren i kompelementaran potprostor od X;*

(6) $\alpha(B) = \infty$, $\beta(B) < \infty$ *i $\mathcal{N}(B)$ je komplementaran potprostor od X.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da $B \in \Phi(X)$. Tada je $\pi(B)$ invertibilan u $\mathcal{C}(X)$ i dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.36 (1).

(2) Neka je $\alpha(B) = \infty$ i $\beta(B) = \infty$. Tada za sve $A \in \mathcal{L}(X)$ važi $\beta(BA) \geq \beta(B)$, te je $BA \notin \Phi(X)$. Takođe, $\alpha(AB) \geq \alpha(B)$ i $AB \notin \Phi(X)$. Sledi da je B Φ-konzistentan.

(3) Neka je $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ i $\mathcal{R}(B)$ nije zatovren ili nije komplementaran potprostor od X. Očigledno, za sve $A \in \mathcal{L}(X)$ važi $BA \notin \Phi(X)$. Pretpostavimo da postoji neki $A \in \mathcal{L}(X)$, tako da važi $AB \in \Phi(X)$. Tada je $\pi(B)$ levo invertibilan u $\mathcal{C}(X)$ i $B \in \Phi_l(X)$. Sledi da je B relativno regularan i $\mathcal{R}(B)$ mora biti zatvoren i komplementaran potprostor od X.

(4) Neka je $\alpha(B) = \infty$, $\beta(B) < \infty$ i $\mathcal{N}(B)$ nije komplementaran potprostor od X. Za sve $A \in \mathcal{L}(X)$ važi $AB \notin \Phi(X)$. Pretpostavimo da postoji neki $A \in \mathcal{L}(X)$, tako da $BA \in \Phi(X)$. Sledi da je $\pi(B)$ desno invertibilan u $\mathcal{C}(X)$, $B \in \Phi_r(X)$ i B je relativno regularan. Stoga $\mathcal{N}(B)$ mora biti komplementaran potprostor od X.

(5) Neka je $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ i $\mathcal{R}(B)$ zatvoren i komplementaran potprostor od X. Sledi da $BA \notin \Phi(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Kako je B relativno regularan, postoji g_2-inverz S operatora B. Sada, SB je projekcija na $\mathcal{R}(S)$ paralelno sa $\mathcal{N}(B)$, te je $\beta(S) < \infty$. Kako je $X = \mathcal{N}(S) \oplus \mathcal{R}(B)$, sledi da je $\mathcal{R}(SB) = \mathcal{R}(S)$ zatvoren, $\alpha(SB) = \alpha(B) < \infty$ i $\beta(SB) = \beta(S) < \infty$, odakle sledi $SB \in \Phi(X)$. Zaključujemo da B nije Φ-konzistentan.

(6) Neka je $\alpha(B) = \infty$, $\beta(B) < \infty$ i $\mathcal{N}(B)$ je komplementaran potprostor od X. Očigledno, $AB \notin \Phi(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Kako je B relativno regularan, postoji g_2-inverz S operatora B. Ponovo, zaključujemo da važi $\mathcal{R}(BS) = \mathcal{R}(B)$, $\beta(BS) = \beta(B) < \infty$, $\alpha(BS) = \alpha(S) = \beta(B) < \infty$. Odavde sledi da B nije Φ-konzistentan. $\square$

Kao posledice razmatramo Φ_0- i $\mathcal{B}$-konzistentne operatore, odnosno $\mathcal{S}(X) = \Phi_0(X)$ (skup Weylovih operatora), ili $\mathcal{S}(X) = \mathcal{B}(X)$ (skup Browderovih operatora) na X.

Posledica 4.46. *Operator $B \in \mathcal{L}(X)$ je Φ_0-konzistentan ako i samo ako je Φ-konzistentan.*

Dokaz. Neka je B Φ-konzistantan i neka je $B \in \Phi(X)$. Pretpostavimo da postoji $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da $AB \in \Phi_0(X)$. Sledi da je $BA \in \Phi(X)$ i $A \in \Phi(X)$. Sada je $i(BA) = i(B) + i(A) = i(AB) = 0$, te je $BA \in \Phi_0(X)$ i B je Φ_0-konzistentan. Slučajevi (2), (3) i (4) Teoreme 4.45 su potpuno analogni. Ako je S opisan u Teoremi 4.45 (5) (ili (6)), sledi da je $i(SB) = 0$ (ili $i(BS) = 0$), te B nije Φ_0-konzistentan. $\square$

Posledica 4.47. *Operator $B \in \mathcal{L}(X)$ je $\mathcal{B}$-konzistentan ako i samo ako je B Φ-konzistentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je B Φ-konzistentan i neka je $AB \in \mathcal{B}(X)$ za neki $A \in \mathcal{L}(X)$. Sledi da je $AB \in \Phi(X)$ i $0 \notin \operatorname{acc} \sigma(AB)$. Kako je $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$ i B je Φ-konzistentan, zaključujemo da je $0 \notin \operatorname{acc} \sigma(BA)$ i $BA \in \Phi(X)$. Sledi da $BA \in \mathcal{B}(X)$, te je B $\mathcal{B}$-konzistentan.

Pretpostavimo da B nije Φ-konzistentan. Sledi da mora važiti neki od slučajeva (5) ili (6) Teoreme 4.45. Neka, recimo, važi (5), odnosno $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ i $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren i komplementaran potprostor od X. Kako je $BA \notin \Phi(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$, sledi da $BA \notin \mathcal{B}(X)$ za sve $A \in \mathcal{L}(X)$. Sa druge stane, ako je S proizvoljan g_2-inverz operatora B, tada znamo da je BS Fredholmov. Takođe, BS je projekcija, te je $\operatorname{asc}(BS) = \operatorname{des}(BS) = 1$ i $BS \in \mathcal{B}(X)$. Sledi da B nije $\mathcal{B}$-konzistentan. Dokaz je sličan ako pretpostavimo da važi (6) iz Teoreme 4.45. $\square$

Ako je H proizvoljan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, iz Teoreme 4.45 sledi

Posledica 4.48. *Neka je H Hilbertov prostor. Ako je $B \in \mathcal{L}(H)$, tada je B Φ-konzistentan ako i samo ako B ima jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:*

(1) $B \in \Phi(H)$;

(2) $\alpha(B) = \infty$ *i* $\beta(B) = \infty$;

(3) $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ *i* $\mathcal{R}(B) \neq \overline{\mathcal{R}(B)}$;

Takođe, B nije Φ-konzistentan ako i samo ako važi jedn od uslova:

(4) $\alpha(B) < \infty$, $\beta(B) = \infty$ *i* $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$;

(5) $\alpha(B) = \infty$ *i* $\beta(B) < \infty$.

Ako je H separabilan Hilbertov prostor, koristeći [13, Theorem 4, Remark 5], [44, Theorem 3.1], ili [103, Theorem 5], [15, Proposition 4], znamo da važi:

$$
\begin{aligned}
cl\Phi(H) &= \Phi(H) \cup cl\mathcal{G}(H) \\
&= \Phi(H) \cup \{B \in \mathcal{L}(H) : \alpha(B) = \alpha(B^*), \text{ ili } \mathcal{R}(B) \neq \overline{\mathcal{R}(B)}\}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Ovde B^* označava Hilbert adjungovani operator operatora B. Koristeći Posledicu 4.48 i (4), lako možemo pokazati sledeći glavni rezultat rada [44, Theorem 3.7].

Teorema 4.49. *Ako je H separabilan kompleksan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $B \in \mathcal{L}(H)$, tada:*

$$B \in cl\Phi(H) \quad \textit{ako i samo ako} \quad B \textit{ je } \Phi\textit{-konzistantan.}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $B \in cl\Phi(H)$. Koristeći (3) zaključujemo da su mogući sledeći slučajevi:

(i) $B \in \Phi(H)$ implicira B je Φ-konzistentan (Posledica 4.48 (1)).

(ii) $\alpha(B) = \alpha(B^*) = \infty$ implicira $\beta(B) = \infty$, te je B Φ-konzistentan (Posledica 4.48 (2)).

(iii) $\alpha(B) = \alpha(B^*) < \infty$ i $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$ implicira $B \in \Phi(H)$ i B je Φ-konzistentan kao u slučaju (i).

(iv) $\alpha(B) = \alpha(B^*) < \infty$ i $\mathcal{R}(B) \neq \overline{\mathcal{R}(B)}$ implicira $\beta(B) = \infty$, te je B Φ-konzistentan (Posledica 4.48 (3)).

Sada pretpostavimo da je B Φ-konzistentan. Tada su mogući sledeći slučajevi:

(i) $\mathcal{R}(B) \neq \overline{\mathcal{R}(B)}$ implicira $B \in cl\Phi(H)$;

(ii) Ako je $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$, obzirom da je B Φ-konzistentan, prema Posledici 4.48 sledi da ili je $B \in \Phi(H)$, ili je $\alpha(B) = \beta(B) = \infty$. U svakom slučaju, prema (3) sledi da je $B \in cl\Phi(H)$. $\square$

Primedba 4.50. *Teorema 4.49 je pokazana u radu* [44] *korišćenjem Gelfand-Naimarkove teoreme o reprezentaciji C^*-algebri, što naravno ne umanjuje značaj dobijenih rezultata i pokazane tehnike tom radu.*

Sada ćemo razmatrati Φ_l-konzistentne operatore. Kao u prethodnom delu, uvodimo pojam esencijalno strogo levo ili desno singularnih operatora na Banachovim prostorima.

Definicija. Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je esencijalno strogo levo singularan, ako važi $TS \notin \Phi_l(X)$ za sve $S \in \Phi_l(X)$.

$T \in \mathcal{L}(X)$ je esencijalno strogo desno singularan, ako važi $ST \notin \Phi_r(X)$ za sve $S \in \Phi_r(X)$.

Odnosi između uvedenih i poznatih pojmova opisani su u sledećoj teoremi.

Teorema 4.51. (1) *Ako je T strogo singularan, onda je T esencijalno strogo levo singularan. Ako je T strogo kosingularan, tada je T esencijalno strogo desno singularan.*

(2) *Ako je X beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$, tada je T esencijalno strogo levo singularan ako i samo ako je T α-strogo singularan. Takođe, T je esencijalno strogo desno singularan ako i samo ako je T α-strogo kosingularan.*

(3) *Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, tada je T esencijalno strogo levo (ili desno) singularan ako i samo ako je T kompaktan.*

Dokaz. (1) Neka je T strogo singularan i $S \in \Phi_l(X)$. Pretpostavimo da je $TS \in \Phi_l(X)$. Sada, $\mathcal{R}(S)$ je beskonačno dimenzionalan zatvoren potprostor od X i $\mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(S)}) \subset \mathcal{N}(TS)$, stoga je $\alpha(T|_{\mathcal{R}(S)}) < \infty$ i postoji zatvoren beskonačno dimenzionalan potprostor M od $\mathcal{R}(S)$, tako da $\mathcal{R}(S) = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(S)}) \oplus M$. Zaključujemo da je $T|_M : M \to T(M) = \mathcal{R}(TS)$ izomorfizam, pa operator T ne može biti strogo singularan.

Sada pretpostavimo da je T strogo kosingularan i postoji $S \in \Phi_r(X)$ tako da $ST \in \Phi_r(X)$. Možemo naći zatvoren konačno dimenzionalan potprostor M, tako da $X = \mathcal{R}(ST) \oplus M$. Primetimo da je $\operatorname{codim} M = \infty$. Neka je $Q_M : X \to X/M$ prirodni epimorfizam. Pokazaćemo da je $Q_M T : X \to X/M$ surjektivno preslikavanje. Pretpostavimo da postoji neki $y \in X$, tako da $y + M \neq Tx + M$ za sve $x \in X$. Tada sledi $Sy \notin \mathcal{R}(ST) \oplus M$, što je nemoguće na osnovu $X = \mathcal{R}(ST) \oplus M$. Zaključujemo da je $Q_M T$ surjekcija, i stoga T ne može biti strogo kosingularan.

(2) Neka je X Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$ neka je beskonačni kardinal. Ako je T α-strogo singularan, prema (1) lako je zaključiti da je T esencijalno strogo levo singularan. Sa druge strane, ako je T esencijalno strogo levo singularan, na osnovu $\mathcal{G}_l(X) \subset \Phi_l(X)$ sledi da je T strogo levo singularan. Prema Primdebi 4.41 sledi da je T α-strogo singularan.

Ako je T α-strogo kosingularan, na isti način kao u (1) možemo pokazati da je T esencijalno strogo desno singularan. Jedino treba posmatrati ortogonalne dimenzije zatvorenih potprostora. Sa druge strane, ako je T esencijalno strogo desno singularan, tada je T strogo desno singularan. Prema Teoremi 4.43 sledi da je T α-strogo cosingularan. □

U sledećoj teoremi opisujemo skup svih Φ_l-konzistentnih operatora.

Teorema 4.52. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$. Tada je B Φ_l-konzistentan ako i samo ako B ispunjava jednu od sledećih disjunktnih osobina:*

(1) $B \in \Phi(X)$;

(2) $B \notin \Phi_l(X)$ *i* B *je esencijalno strogo levo singularan.*

Takođe, B nije Φ_l-konzistentan ako i samo ako B ispunajava jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:

(3) $B \in \Phi_l(X) \setminus \Phi(X)$;

(4) $B \notin \Phi_l(X)$ *i* B *nije esencijalno strogo levo singularan.*

U slučaju kada je X beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$, tada "esencijalno strogo levo singularan" treba zameniti sa "α-strogo singularan". Ako je X separabilan beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, tada "esencijalno strogo levo singularan" treba zameniti sa "kompaktan".

Dokaz. (1) Neka je $B \in \Phi(X)$ i $BA \in \Phi_l(X)$. Kako je $\pi(B)\pi(A)$ levo invertibilan u $\mathcal{C}(X)$, sledi da je $A \in \Phi_l(X)$ i $AB \in \Phi_l(X)$. Sa druge strane, ako je $S = AB \in \Phi_l(X)$, tada je $\pi(A) = \pi(S)\pi(B)^{-1}$ levo invertibilan u $\mathcal{C}(X)$, te je $BA \in \Phi_l(X)$. Zaključujemo da je B Φ_l-konzistentan.

(3) Neka je $B \in \Phi_l(X) \setminus \Phi(X)$. Tada postoje beskonačno dimenzionalani zatvoreni potprostori M i N od X, tako da je $X = \mathcal{N}(B) \oplus M = \mathcal{R}(B) \oplus N$. Kako je restrikcija $B|_M : M \to \mathcal{R}(B)$ invertibilan operator, označimo sa $\tilde{B} : \mathcal{R}(B) \to M$ njegov inverz. Neka je P projekcija od X na M paralelno sa $\mathcal{N}(B)$, a Q neka je projekcija od X na $\mathcal{R}(B)$ paralelno sa N. Proveravamo da je $B_1B = P \in \Phi_l(X)$ i $BB_1 = Q \notin \Phi_l(X)$, i stoga B nije Φ_l-konzistentan.

Dokazi tvrđenja (2) i (4) su analogni dokazima Teoreme 4.42 (2) i (4). $\square$

Dualno, možemo pokazati i sledeću teoremu o Φ_r-konzistentnim operatorima.

Teorema 4.53. *Neka je $T \in \mathcal{L}(X)$. Tada je B Φ_r-konzistentan ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:*

(1) $B \in \Phi(X)$;

(2) $B \notin \Phi_r(X)$ *i* B *je esencijalno strogo desno singularan.*

Takođe, B nije Φ_r-konzistentan ako i samo ako B ispunjava jednu od sledećih uzajamno disjunktnih osobina:

(3) $B \in \Phi_r(X) \setminus \Phi(X)$;

(4) $B \notin \Phi_r(X)$ *i* B *nije esencijalno strogo desno singularan.*

U slučaju kada je X beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $\dim X = \alpha$, tada "esencijalno strogo desno singularan" treba zameniti sa "α-strogo kosingularan". Ako je X separabilan beskonačno dimensionalan Hilbertov prostor, tada "esencijalno strogo singularan" treba zameniti sa "kompaktan".

LITERATURA

[1] M. Altman, *An optimum cubically convergent iterative method of inverting a linear bounded operator in Hilbert space*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1107–113.

[2] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero and D. Voiculescu, *Aproximation of Hilbert space operators, Vol. II*, Research Notes in Mathematics 102, Pitman, Boston, 1984.

[3] E. Arghiriade, *Remarques sur l'inverse generalise d'un produit de matrices*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. **XLII** (1967), 621–625.

[4] G. Bachmam and L. Narici, *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[5] B. A. Barnes, G. J. Murphy, M. R. F. Smyth and T. T. West, *Riesz and Fredholm theory in Banach algebras*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1982.

[6] A. Ben-Israel, *On matrices of index zero or one*, SIAM J. Appl. Math. **17, 6** (1969), 1118–1121.

[7] A. Ben-Israel and T. N. E. Grevile, *Generalized inverses: Theory and applications*, Wiley-Interscience, New York, 1974.

[8] S. K. Berberian, *An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal operators*, Mitchigan Math. J. **16** (1969), 273–279.

[9] S. K. Berberian, *The Weyl spectrum of an operator*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970), 529–544.

[10] S. K. Berberian, *Lectures in functional analysis and operator theory*, Springer Verlag, New York, Heidleberg, Berlin, 1974.

[11] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer Verlag, Berlin, Heidleberg, New York, 1973.

[12] R. H. Bouldin, *The pseudoinverse of a product*, SIAM J. Appl. Math. **24 No 4** (1973), 489–495.

[13] R. H. Bouldin, *The essential minimum modulus*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 513–517.

[14] R. H. Bouldin, *Generalized inverses and factorizations*, Recent applications of generalized inverses, Pitman Ser. Res. Notes in Math., vol. 66, 1982, pp. 233–248.

[15] R. H. Bouldin, *Closure of invertible operators on a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 721–726.

[16] J. J. Buoni, *An essential spectra mapping theorem*, J. Math. Anal. Appl. **56** (1976), 55–60.

[17] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized inverses of Linear Transformations*, Pitman, New York, 1979.

[18] S. R. Caradus, *Generalized inverses and operator theory*, Queen's paper in pure and applied mathematics, Quenn's University, Kingston, Ontario, 1978.

[19] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces*, Marcel Dekker, New York, 1974.

[20] Y. Chen, *Finite algorithms for the* (2)*-generalized inverse* $A^{(2)}_{T,S}$, Linear Multilinear Algebra **40** (1995), 61–68.

[21] Y. Chen, *Iterative method for computing the generalized inverses* $A^{(2)}_{T,S}$, Appl. Math. Comput. **75** (1996), 207–222.

[22] R. E. Cline, *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. **5,** 1 (1968), 182–197.

[23] L. A. Coburn, *Weyl's theorem for nonnormal operators*, Michigan Math. J. **13** (1966), 285–288.

[24] D. S. Djordjević, *Regular and T-Fredholm elements in Banach algebras*, Publ. Math. Inst. (Belgrade) **56 (70)** (1994), 90–94.

[25] D. S. Djordjević, *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Publ. Math. Debrecen (u štampi).

[26] D. S. Djordjević, *Perturbations of spectrums of* 2×2 *operator matrices*, (preprint).

[27] D. S. Djordjević, *Semi-Browder essential spectra of quasisimilar operators*, (preprint).

[28] D. S. Djordjević, *Operators consistent in regularity*, (preprint).

[29] D. S. Djordjević and S. V. Djordjević, *On a-Weyl's theorem*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. (1999), (u štampi).

[30] D. S. Djordjević and P. S. Stanimirović, *Representations of generalized inverses*, (preprint).

[31] D. S. Djordjević and P. S. Stanimirović, *Ordinary and generalized Drazin inverze in Banach algebras*, (preprint).

[32] S. V. Djordjević, *On the continuity of the Browder essential approximate point spectrum*, Comment. Math. **26** (1996), 69–73.

[33] S. V. Djordjević and D. S. Djordjević, *Weyl's theorems: continuity of the spectrum and quasihyponormal operators*, Acta Sci. Math (1998), (u štampi).

[34] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in the operator theory*, Academic Press, New York,, 1972.

[35] H. R. Dowson, *Spectral theory of linear operators*, Academic Press, London, New York,, 1978.

[36] N. Dunford and J. Scwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience, New York, 1958.

[37] В. А. Еровенко, *К вопросу Обераи о существенном спектре*, Доклади Академии навук БССР **28, 12** (1984), 1068–1071.

[38] В. А. Еровенко, *Теорема Вейля о существенном спектре для k-паранормалнвих операторов*, Весцi Академии навук БССР, Сер. Физ – Мат. **5** (1986), 30–35.

[39] В. А. Еровенко, *О существенном спектре функций от линейньих операторов в Банаховом пространстве*, Вестник Белорусского Государственного Университета **2, 1** (1987), 50–54.

[40] В. А. Еровенко, *О некаторых свойствах существенного спектра Браудера ограниченных операторов*, Доклади Академии навук Белоруси **39, 4** (1995), 27–30.

[41] L. A. Fialkow, *A note on the operator $X \to AX - XB$*, Trans. Amer. Math. Soc. **243** (1978), 147–168.

[42] J. Garnett, A. Ben-Israel and S. S. Yau, *A hyperpower iterative method for computing matrix products involving the generalized inverse*, SIAM J. Numer. Anal. **8** (1971), 104–109.

[43] S. Goldberg, *Unbounded linear operators with applications*, Mc-Graw-Hill, New

York, 1966.

[44] W. Gong and D. Han, *Spectrum of the products of operators and compact perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc. **120 (3)** (1994), 755–760.

[45] S. Grabiner, *Ascent, descent and compact perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc. **71** (1978), 79–80.

[46] C. W. Groetch, *Representation of the generalized inverse*, Journal Math. Anal. Appl. **49** (1975), 154–157.

[47] C. W. Groetch, *Generalized inverses of linear operators*, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1977..

[48] W. Guorong, *An imbedding method for computing the generalized inverse*, J. Comput. Math. **8 (4)** (1990), 353–362.

[49] W. Guorong and W. Yimin, *Limiting expression for generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and its corresponding projectors*, Numerical Mathematics (A Journal of Chinese Universities) **4 (1)** (1995), 25–30.

[50] K. Gustafson, *Weyl's theorems*, in Linear Operators and Approximation, Ed. P. L. Butzer, J. -P. Kahane and B. Sz. -Nagy, Proceedings of the Conference in Oberwolfach, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1971.

[51] K. Gustafson, *Necessary and sufficient conditions for Weyl's theorem*, Michigan Math. J. **19** (1972), 71–81.

[52] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, van Nostrand–Reinhold, Princeton, New Yersey, 1967.

[53] J. K. Han, H. Y. Lee and W. Y. Lee, *Invertible completions of* 2×2 *upper triangular operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. (u štampi).

[54] R. E. Harte, *Spectral projections*, Irish Math. Soc. Newsletter **11** (1984), 10–15.

[55] R. E. Harte, *Fredholm, Weyl and Browder theory*, Proc. R. Ir. Acad. **85A, 2** (1985), 151–176.

[56] R. E. Harte, *Regular boundary elements*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 328–330.

[57] R. E. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, New York, Marcel Dekker, 1988.

[58] R. E. Harte, *The ghost of an index theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 1031–1034..

[59] R. E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, PanAm. Math. J. **1** (1991), 10–16..

[60] R. E. Harte, *Polar decomposition and the Moore-Penrose inverse*, PanAm. Math. J. **2** (1992), 71–76.

[61] R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in C^*-algebras*, Studia Math. **103** (1992), 71–77.

[62] R. E. Harte and M. Mbekhta, *Generalized inverses in C^*-algebras II*, Studia Math. **106** (1993), 129–138.

[63] R. E. Harte and W. Y. Lee, *Another note on Weyl's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2115–2124..

[64] R. E. Harte, W. Y. Lee and L. L. Littlejohn, *On generalized Riesz points*, (preprint).

[65] H. G. Heuser, *Functional analysis*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1982.

[66] D. A. Herrero, *On the essential spectra of quasisimilar operators*, Canad. J. Math. **40** (1988), 1436-1457.

[67] J. Herzberger, *Using error-bounds hyperpower methods to calculate inclusions for the inverse of a matrix*, BIT **30** (1990), 508–515.

[68] D. Hong-Ke and P. Jin, *Perturbation of spectrums of* 2×2 *operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **121, 3** (1994), 761–766.

[69] J. Ji, *An alternative limit expression of Drazin inverse and its application*, Appl. Math. Comput. **61, 2-3** (1994), 151–156.

[70] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[71] J. J. Koliha, *Isolated spectral points*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 3417–3434.

[72] J. J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 367–381.

[73] J. J. Koliha and V. Rakočević, *On the continuity of the generalized Drazin inverse*, Studia Math. (u štampi).

[74] V. Kordula and V. Müler, *On the axiomatic theory of spectrum*, Studia Math. **119 (2)** (1996), 109–128.

[75] V. Kordula, V. Müller and V. Rakočević, *On the semi-Browder spectrum*, Studia Math. **123** (1997), 1–13.

[76] H. Kroh and P. Volkmann, *Störungssätze für Semifredholmoperatoren*, Math. Z. **148** (1976), 295–297.

[77] J. Kuang, *Approximate methods for generalized inverses of operators in Banach spaces*, J. Comput. Math. **11** (1993), 323–328.

[78] D. C. Lay, *Spectral analysis using ascent, descent nullity and defect*, Math. Ann. **184** (1970), 197–214.

[79] W. Y. Lee, *Weyl's theorem for operator matrices*, Integ. Equat. Operator Theory (u štampi).

[80] W. Y. Lee, *Weyl spectra of operator matrices*, (preprint).

[81] W. Y. Lee and H. Y. Lee, *On Weyl's theorem*, Math. Japonica **39, 3** (1994), 545–548.

[82] W. Y. Lee and H. Y. Lee, *On Weyl's theorem II*, Math. Japonica **43, 3** (1996), 549–553.

[83] I. Marek and K. Žitný, *Matrix analysis for applied sciences*, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 84, Leipzig, 1986.

[84] C. D. Meyer, *Limits and the index of a square matrix*, SIAM J. Appl. Math. **26, 3** (1974), 469–478.

[85] C. D. Meyer, Jr. and N. J. Rose, *The index and the Drazin inverse of block triangular matrices*, SIAM J. App. Math. **33, 1** (1977), 1–7.

[86] G. V. Milovanović, *Numerical analysis, part I*, Naučna knjiga, Beograd, 1985 (na srpskom).

[87] M. Z. Nashed, ed., *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New York, 1976.

[88] M. Z. Nashed., *Inner, outer and generalized inverse in Banach and Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **9** (1987), 261–325.

[89] K. Oberai, *On the Weyl spectrum*, Illinois J. Math. **18** (1974), 208–212.

[90] K. Oberai, *On the Weyl spectrum II*, Illinois J. Math. **21** (1977), 84–90.

[91] R. Penrose, *A generalized inverses for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406–413.

[92] R. Penrose, *On best approximate solutions of linear matrix equations*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 17–19.

[93] W. V. Petryshyn, *On the inversion of matrices and linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 893–901.

[94] W. V. Petryshyn, *On generalized inverses and on the uniform convergence of* $(I - \beta K)^n$ *with application to iterative methods*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 417–439.

[95] K. M. Prasad and Bapat, *A note of the Khatri inverse*, Sankhya: Indian J. Stat. **54** (1992), 291–295.

[96] K. M. Prasad and R. B. Bapat, *The generalized Moore-Penrose inverse*, Linear Algebra Appl. **169** (1992), 59–69.

[97] S. Prasanna, *Weyl's theorem and thin spectra*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **91, 1** (1982), 59–63.

[98] L. D. Pyle, *The weighted generalized inverse in nonlinear programming-active set selection using a variable-metric generalization of the simplex algorithm*, International simposium on extremal methods and systems analysis, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems: Vol. 174, 1977, pp. 197–231.

[99] M. Radić, *Some contributions to the inversions of rectangular matrices*, Glasnik Matematički **1 (21),** 1 (1966), 23–37.

[100] V. Rakočević, *On the essential approximate point spectrum II*, Mat. Vesnik **36** (1984), 89–97.

[101] V. Rakočević, *Approximate point spectrum and commuting compact perturbations*, Glasgow Math. J. **28** (1986), 193–198.

[102] V. Rakočević, *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **34, 10** (1989), 915–919.

[103] V. Rakočević, *A note on regular elements in Calkin algebras*, Collect. Math. **43 (1)** (1992), 37–42.

[104] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[105] V. Rakočević, *Semi-Fredholm operators with finite ascent or descent and perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3823–3825.

[106] V. Rakočević, *Semi-Browder operators and perturbations*, Studia Math. **122 (2)** (1997), 131–137.

[107] V. Rakočević, *Apostol spectrum and generalizations:a brief survey*, Facta Universitatis (Niš) (1998), (u štampi).

[108] V. Rakočević, *On the continuity of the Drazin inverse*, J. Operator Theory (u štampi).

[109] V. Rakočević and S. Živković-Zlatanović, *Mere nekompaktnosti i teorija operatora*, (u pripremi).

[110] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

[111] C. E. Ricart, *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

[112] U. G. Rothblum, *A representation of the Drazin inverse and characterizations of the index*, SIAM J. Appl. Math. **31, 4** (1976), 646–648.

[113] U. G. Rothblum, *Resolvent expansion of matrices and applications*, Linear Algebra Appl. **38** (1981), 33–49.

[114] M. Schechter, *On perturbations of essential spectra*, J. London Math. Soc. **1 (2)** (1969), 343–347.

[115] M. Schechter, *Operators obeying Weyl's theorem*, Scripta Math. **29** (1973), 67–75.

[116] M. Schechter, *Principles of functional analysis*, Academic Press, New York, 1973.

[117] M. Schechter and R. Whitley, *Best Fredholm perturbation theorems*, Studia Math. **90** (1988), 175–190.

[118] C. Schmoeger, *On operators T such that Weyl's theorem holds for $f(T)$*, Extracta Math. (u štampi).

[119] C. Schmoeger, *The spectral mapping theorem for the essential approximate point spectrum*, Colloq. Math. **74 (2)** (1997), 167–176.

[120] G. Schulz, *Iterative Berechnung der reziproken Matrix*, Zeitsch. Angew. Math. Mech. **13** (1933), 57–59.

[121] T. Söderström and G. W. Stewart, *On the numerical properties of an iterative method for computing the Moore-Penrose generalized inverse*, SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 61–74.

[122] P. S. Stanimirović, *Programski paketi za izračunavanje generalisanih inverza*, Doktorska disertacija, Niš, 1996.

[123] P. S. Stanimirović and D. S. Đorđević, *Universal iterative methods for computing generalized inverses*, Acta Math. Hungar. **79(3)** (1998), 267–283.

[124] P. S. Stanimirović and D. S. Đorđević, *Representation and computation of the Drazin inverse*, (preprint).

[125] K. Tanabe, *Neumann-type expansion of reflexive generalized inverses of a matrix and the hyperpower iterative method*, Linear Algebra Appl. **10** (1975), 163–175.

[126] A. E. Taylor, *Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators*, Math. Ann. **163** (1966), 18–49.

[127] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1967.

[128] H. Weyl, *Über beschränkte quadratische formen, deren Differenz vollsteig ist*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 373–392.

[129] L. R. Williams, *Equality of essential spectra of certain quasisimilar seminormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc **78** (1980), 203–209.

[130] L. R. Williams, *Equality of essential spectra of quasisimilar quasinormal operators*, J. Operator Theory **3** (1980), 57–69.

[131] Z. Yan, *On the right essential spectra of quasisimilar operators*, Kobe J. Math. **8** (1991), 101–105.

[132] W. Yimin, *Characterization and representation of Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17** (1996), 744–747.

[133] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[134] G. Zielke, *Iterative refinement of generalized matrix inverses now practicable*, SIGNUM Newsletter **13.4** (1978), 9–10.

[135] G. Zielke, *A survey of generalized matrix inverses*, Computational Mathematics, Banach center Publications **13** (1984), 499–526.

[136] S. Zlobec, *On computing the generalized inverse of a linear operator*, Glasnik Matematički **2(22) No 2** (1967), 265–271.