UNIVERZITET U NIŠU
FILOZOFSKI FAKULTET

Studijska grupa za matematiku

Tatjana S. Petković

Varijeteti automata i polugrupa

Doktorska disertacija

Niš, 1998.

U n i v e r z i t e t u N i š u
Filozofski fakultet
Studijska grupa za matematiku

Tatjana S. Petković

Varijeteti automata i polugrupa

Doktorska disertacija

Niš, 1998.

Mentor:	**Dr Miroslav Ćirić** **vanredni profesor** **Filozofskog fakulteta u Nišu**
Članovi komisije:	**Dr Stojan Bogdanović** **redovni profesor** **Ekonomskog fakulteta u Nišu** **Dr Siniša Crvenković** **redovni profesor** **PMF Novi Sad**
Datum odbrane:	**04.12.1998.**

Uvod

Polazna pretpostavka istraživanja obavljenog u ovoj disertaciji jeste veza i međusobni uticaj teorije automata i teorije polugrupa, i, naravno, univerzalnih algebri kao svojevrsne baze ovih dveju teorija. Rezultati i metodi teorije polugrupa nalaze svoju primenu u teoriji automata. Od posebnog značaja su kompozicione i dekompozicione metode, kao što su: direktne sume, poddirektni proizvodi, paralelne kompozicije, razne vrste ekstenzija, itd. Sa druge strane, potrebe teorije automata inicirale su izučavanje raznih novih klasa polugrupa, a takođe se i metodi teorije automata mogu uspešno primenjivati u teoriji polugrupa.

O značaju veza između ovih teorija svedoči i ogroman broj radova iz ove oblasti i veći broj monografija koje se bave tim vezama, među kojima treba istaći sledeće: M. A. Arbib (ed) [6] iz 1968., M. A. Arbib [7] iz 1969., F. Gésceg i J. Peák [46] iz 1972., G. Lallement [74] iz 1979., J. E. Pin [91] iz 1986., V. N. Saliĭ[103] iz 1988., J. M. Howie [61] iz 1991.

Veze polugrupa sa automatima i formalnim jezicima ostvaruju se preko slobodnih polugrupa i slobodnih monoida. Ove polugrupe i monoidi igraju ulogu ulaznih i izlaznih polugrupa automata, dok se jezici formalno definišu upravo kao podskupovi slobodnih monoida.

Međutim, za ovaj rad je značajna veza između polugrupa i automata koja se ostvaruje preko polugrupa prelaza[1)] automata. Ovaj pojam uveo je V. M. Glushkov 1961. godine u [51], a sistematsko izučavanje veza između automata i njihovih polugrupa prelaza posebno je inicirao I. Peák u svojim radovima [82], [83] iz 1964. i 1965. godine. Poznavanje strukture polugrupe prelaza automata daje vrlo korisne informacije o strukturi samog automata. Najbolji primer koji to potvrđuje jeste niz čuvenih teorema Krohn–Rhodesa iz 1965. godine, kojima je data veza između kaskadnih razlaganja automata i poludirektnih razlaganja njihovih polugrupa.

Poznato je da automati, pod čime ovde podrazumevamo automate bez izlaza, mogu biti tretirani i kao unarne algebre. Naravno, važi i obrnuto, da se svaka univerzalna algebra čije su sve fundamentalne operacije unarne može smatrati automatom. Ova osobina automata daje mogućnost da se u izučavanju automata koriste, takođe, i rezultati i aparat univerzalne algebre. Pri tome su posebno značajna razmatranja u vezi sa varijetetima automata, pseudovarijetetima konačnih automata, kao i uopštenim vari-

[1)] nazivaju se i “karakteristične polugrupe automata” jetetima automata. Pomenimo da se neki varijeteti, pseudovarijeteti i uopšteni varijeteti automata izučavaju već dugi niz godina. Najpoznatiji od njih su sledeći uopšteni varijeteti i njima odgovarajući varijeteti i pseudovarijeteti automata: direktabilni automati, koje su uveli J. Černý 1964. u [25], i P. H. Starke 1969. u [110], definitni automati, uvedeni u radovima S. C. Kleenea [68] iz 1956., i M. Perlesa, M. O. Rabina i E. Shamira [84] iz 1963., reverzno definitni automati, koji se po prvi put javljaju u radovima J. A. Brzozowskog[23] iz 1963. i A. Ginzburga [49] iz 1966., kao i uopšteno definitni automati, uvedeni u istom radu A. Ginzburga, i nilpotentni automati koje je uveo L. N. Shevrin 1962. godine u radu [107].

U raznim algebarskim teorijama veoma važan predmet proučavanja predstavljaju algebre čije sve podalgebre određenog tipa pripadaju nekoj datoj klasi algebri. Pri tome se vrlo često radi sa monogenim ili konačno generisanim podalgebrama. Za takve algebre često kažemo da "lokalno pripadaju" datoj klasi algebri, odnosno da imaju zadato svojstvo kao "lokalno svojstvo". Autori koji se bave Algebarskom teorijom automata nisu se, međutim, mnogo bavili takvim problemima. Probleme takvog tipa srećemo jedino u radu M. Steinbya [115], koji je proučavao izvesne "lokalno zatvorene" klase automata. Zato ćemo se u ovom radu, između ostalog, baviti takvim problemima. Naime, bavićemo se izučavanjem veza koje postoje između izvesnih "lokalnih svojstava" i "globalnih svojstava" automata.

Još jedan važan algebarski problem kojim se ovde bavimo jesu poddirektna razlaganja algebri. Zahvaljujući jednom rezultatu G. Birkhoffa iz 1944. [18], problem poddirektnih razlaganja algebri predstavlja jedan od klasičnih problema algebre. Naime, tu je dokazan osnovni rezultat teorije poddirektnih razlaganja algebri – Birkhoffova teorema o reprezentaciji, po kojoj se svaka algebra može razložiti u poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih algebri. Tako problem opisivanja struktura poddirektno nerazloživih algebri postaje izuzetno značajan. Sve ovo iniciralo je intenzivno izučavanje poddirektno nerazloživih algebri raznih tipova, što će ovde biti učinjeno za automate.

U teoriji automata izučavani su uglavnom poddirektno nerazloživi automati koji pripadaju izvesnim specijalnim klasama automata. Tako je M. Yoeli u [122] izučavao poddirektno nerazložive povezane konačne autonomne automate, G. H. Wenzel je u [121] uopštio njegove rezultate opisavši sve poddirektno nerazložive autonomne automate, a dalja uopštenja tih rezultata dali su Z. Ésik i B. Imreh u [45], za komutativne automate, i I. Babcsányi u [11], za takozvane $(t; m, n)$-komutativne automate. Sa druge strane, B. Imreh je u [63] dao karakterizaciju i konstrukciju svih poddirektno nerazloživih nilpotentnih automata. U radu istog autora [64] to je učinjeno i za definitne automate, a u radu M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33] i za reverzno definitne i uopšteno definitne automate.

U najopštijem slučaju, poddirektno nerazložive automate izučavao je samo M. Setoyanagi u radu [106], a potom i S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković i M. Steinby u [21]. Ovde će biti dati rezultati iz tog rada, kao i neki drugi.

Centralni problem ove disertacije jeste uspostavljanje korespondencije između varijeteta automata i polugrupa. Razmatranje ovakvog problema ima svoje istorijsko opravdanje. Još pri samom začetku teorije automata i formalnih jezika, bilo je uočeno da se u njoj veoma uspešno mogu koristiti rezultati jedne druge, nešto starije algebarske teorije – teorije polugrupa. Tako je nastao trougao “polugrupe–automati–jezici” koji danas, tridesetak godina posle svog nastanka, čini jedan od glavnih stožera pomenute teorije.

Jedan od najpoznatijih rezultata koji uspostavlja vezu između jezika i monoida prestavlja čuvena “Eilenbergova teorema o korespondenciji”, dokazana 1976. u [41]. Korespondencija o kojoj je reč uspostavljena je, uz pomoć sintaksičkih monoida jezika, između pseudovarijeteta monoida i tzv. varijeteta jezika. Inače, prvi rezultat tog tipa dao je M. Schützenberger 1965. u [105], koji je uspostavio vezu između pseudovarijeteta aperiodičnih polugrupa i tzv. zvezda slobodnih jezika.

Eilenbergova teorema inicirala je niz istraživanja koja su imala za zadatak da uspostave vezu između raznih specijalnih varijeteta jezika i pseudovarijeteta monoida i polugrupa[2)], ali i istraživanja koja su se bavila opštim vezama između varijeteta jezika, pseudovarijeteta polugrupa i kongruencija na slobodnim polugrupama, kao i odgovarajućim univerzalno algebarskim uopštenjima. Takvi su, na primer, radovi J. Almeidae [3] iz 1990., D. Thériena [118] iz 1980., itd.

Sa druge strane, Eilenbergova teorema inicirala je i izučavanje sličnih veza između jezika i automata, koje je obavljeno u radu M. Steinbya [115], 1994. Prema tome, u gore pomenutom trouglu “polugrupe–jezici–automati”, preostalo je da se prouče veze koje postoje između izvesnih klasa automata i polugrupa, pri čemu se prirodno nameće korišćenje polugrupa prelaza automata. Upravo to je jedan od zadataka ovog rada.

Ova disertacija se sastoji iz pet glava.

Prva glava je uvodnog karaktera. Tu su uvedeni osnovni pojmovi univerzalnih algebri, teorije polugrupa i teorije automata. Takođe su dati i neki rezultati koji su korišćeni u nastavku.

Glava 2 je posvećena operatorima lokalnog zatvorenja na klasama automata i, specijalno, varijetetima automata. Naime, u Odeljku 2.1 uvodimo pojmove operatora $L : K \mapsto L(K)$ koji svakoj klasi K automata pridružuje klasu $L(K)$ svih automata čiji svi monogeni podautomati pripadaju klasi K, i operatora $CL : K \mapsto CL(K)$ koji svakoj klasi K automata pridružuje klasu $CL(K)$ svih automata čiji svi konačno generisani podautomati pripadaju klasi K. U Odeljku 2.2 se ovi operatori primenjuju na klasu povezanih automata i neke njene podklase. U Odeljcima 2.3, odnosno 2.4, operatore lokalnog zatvorenja primenjujemo na varijetete, odnosno na uopštene varijetete i pseudovarijetete automata.

Treća glava je posvećena izučavanju klase direktabilnih automata, nekih njenih uopštenja, kao i nekih njenih bitnih podklasa. Odeljak 3.1 je uvodnog karaktera. Tu se nalaze definicije klasa automata koje su u nastavku razmatrane. Osim već poznatih klasa automata biće razmatrane i neke nove klase automata uvedene nedavno, u radu T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića [86]. U Odeljku 3.2 su data neka važna svojstva jezika svih usmeravajućih, tzv. utrapljivih i jedno-utrapljivih, kao i nekih

[2)] Videti knjige J. M. Howiea [61], G. Lallementa [74], J. E. Pina [91] i druge.

drugih skupova reči. Treći odeljak ove glave je posvećen izučavanju međusobnih relacija između klasa uvedenih u Odeljku 3.1 i ispitivana su neka algebarska svojstva tih klasa. U Odeljcima 3.4 i 3.5 se razmatraju dva osnovna problema. Prvi problem je opisivanje strukturnih svojstava automata iz klasa svih tzv. uopšteno direktabilnih i uopšteno definitnih automata, kao i njihovih važnih podklasa. Drugi važan problem koji se ovde razmatra jeste povezanost strukture izučavanih automata i strukture njihovih polugrupa prelaza.

U Glavi 4 razmatrana su poddirektna razlaganja automata i, specijalno, poddirektno nerazloživi automati. Analogno pojmu Reesove kongruencije polugrupe određene idealom, u Odeljku 4.1 uvodimo najpre pojam Reesove kongruencije na automatu određene podautomatom, a zatim i pojmove ekstenzije i guste ekstenzije automata. U drugom odeljku ove glave, motivisani takođe idejama iz teorije polugrupa, posebno onim iz poznatog rada B. M. Scheina [104], uvodimo i bavimo se i nekim novim pojmovima, kao što su pojmovi jezgra i srži automata, disjunktivnog elementa automata itd. Sve ove nove koncepte koristimo u Odeljku 4.3 u dokazu opšte teoreme koja opisuje strukturu poddirektno nerazloživih automata. Potom, u Odeljku 4.4, ovu opštu teoremu primenjujemo na nilpotentne, definitne, reverzno definitne i uopšteno definitne automate. U poslednjem odeljku ove glave, Odeljku 4.5, uvodimo pojam poddirektnog proizvoda klasa automata i razmatramo uslove pod kojima važi relacija $\mathbf{D}\vee \boldsymbol{V} = \mathbf{D}\oplus \boldsymbol{V}$, gde je $\mathbf{D}$ varijetet svih diskretnih automata i $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata. Time je dat odgovor na pitanje koje je J. Płonka implicitno postavio u [95].

Poslednja, Glava 5, je posvećena korespondenciji između varijeteta polugrupa i automata. Pokazalo se da je za “varijetete” polugrupa koje razmatramo važno da ih čine polugrupe koje imaju generatorni skup čija kardinalnost ne prelazi kardinalnost ulaznog alfabeta varijeteta automata, što nas dovodi do jednog sasvim novog pojma, do pojma κ-varijeteta, koji uvodimo i izučavamo u Odeljku 5.2. Pri tome koristimo jedan drugi novi pojam, pojam slabo invarijantne kongruencije, koji uvodimo i njime se bavimo u prethodnom odeljku, Odeljku 5.1. U Odeljku 5.3 uvodimo i proučavamo i treći novi pojam, pojam σ-zatvorenog varijeteta, ili kraće σ-varijeteta automata. Konačno, u Odeljku 5.4, dokazujemo Teoremu o korespondenciji između σ-varijeteta automata i κ-varijeteta polugrupa. U Odeljku 5.5 je data nešto drugačija korespondencija između polugrupa i automata. Kako pri uspostavljanju korespondencije iz Odeljka 5.4 neregularni varijeteti automata ostaju van razmatranja, to za ovakve automate u Odeljku 5.6 uvodimo novu definiciju karakteristične polugrupe i ispitujemo odgovarajuće tzv. σ_C-varijetete.

Na kraju, koristim priliku da se zahvalim svojoj porodici i prijateljima na podršci prilikom izrade ove disertacije. Posebnu zahvalnost na nesebičnoj pomoći tokom čitavog mog usavršavanja, i, naravno, tokom izrade ovog rada, dugujem svojim profesorima Miroslavu Ćiriću i Stojanu Bogdanoviću.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi će biti uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati. Takođe će biti dokazana i neka osnovna svojstva uvedenih pojmova, koja će nadalje biti korišćena. Pojmovi kao što su kongruencije, homomorfizmi, direktni i poddirektni proizvodi, i drugi, će biti korišćeni i kod automata i kod polugrupa. Stoga će ovakvi pojmovi biti definisani u Odeljku 1.1 za proizvoljne univerzalne algebre, gde će biti date i neke opšte teoreme univerzalne algebre, koje će potom biti primenjivane i na polugrupe i na automate. U Odeljku 1.2 će biti navedeni neki pojmovi Teorije polugrupa koji su neophodni za dalji rad. Posebna pažnja je posvećena polugrupama sa levim, desnim i bi- nulama i dokazane su neke njihove osobine. Takođe su definisani i pojmovi slobodnih polugrupa i monoida, kao i polugrupovnih identiteta. U trećem odeljku je dat pojam automata i uvedene su neke osnovne, dobro poznate klase automata. Automatovni identiteti i varijeteti automata su, zbog značaja za dalji rad, posebno definisani u četvrtom odeljku. U poslednjem, petom odeljku, date su razne kompozicije i dekompozicije automata, kao i neka njihova svojstva.

Pojmovi i oznake su uvedeni u skladu sa sledećim knjigama: S. Burrisa i H. P. Sankappanavara [24] i A. I. Mal'ceva [77] iz oblasti univerzalnih algebri, S. Bogdanovića i M. Ćirića [19] i J. M. Howiea [60] iz oblasti teorije polugrupa, i iz oblasti teorije automata korišćene su knjige F. Gécsega i I. Peáka [46], J. M. Howiea [61] i R. Sz. Madarász i S. Crvenkovića [76]. Pojmovi teorije mreža nisu specijalno uvedeni, ali su korišćeni u skladu sa knjigom G. Grätzera [56] i G. Birkhoffa [17].

1.1. Elementi univerzalnih algebri

Neka je A neprazan skup i $\mathcal{F}$ familija operacija definisanih na skupu A, tada je uređeni par $(A, \mathcal{F})$ *univerzalna algebra*. Za skup A kažemo da je *nosač* algebre $(A, \mathcal{F})$. Bez opasnosti od zabune, univerzalnu algebru i njen nosač označavamo istim slovom A. U slučaju kada je $\mathcal{F}$ konačan skup obično pišemo $A = (A, f_1, f_2, \ldots, f_k)$, gde je $k \in \mathbb{N}$

i $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. Pri tome smo sa $\mathbb{N}$ označili skup pozitivnih celih brojeva, dok sa $\mathbb{N}^0$ označavamo skup nenegativnih celih brojeva. Operacija $f \in \mathcal{F}$ je *arnosti* n ako predstavlja preslikavanje $A^n \to A$, gde je $k \in \mathbb{N}^0$. Ovo preslikavanje obično označavamo sa f_A i kažemo da je *interpretacija simbola* f *u algebri* A. Ako se podrazumeva o kojoj je algebri reč, onda u oznaci f_A izostavljamo indeks. Algebre A i B su *istog tipa* ako im odgovaraju familije operacija iste arnosti.

Ako sa $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, označimo skup svih operacija iz $\mathcal{F}$ koje su arnosti n, tada se skup $\mathcal{F}$ može predstaviti u obliku $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Algebra A je *unarna algebra* ako je $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

Neka su algebre A i B istog tipa i neka je $B \subseteq A$. Algebra B je *podalgebra* algebre A ako za svaki operacijski simbol $f \in \mathcal{F}_n$, za neko $n \in \mathbb{N}$, i sve $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ važi

$$f_A(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f_B(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Za proizvoljan neprazan podskup $H \subseteq A$ algebre A postoji najmanja podalgebra koja sadrži H. Kažemo da je to *podalgebra algebre* A *generisana skupom* H, u oznaci $[H]$. Za podalgebru generisanu jednoelementnim skupom kažemo da je *monogena*. Podskup $H \subseteq A$ takav da je $[H] = A$ zovemo *generatorni skup* algebre A. Ako algebra A ima konačan generatorni skup, onda kažemo da je *konačno generisana*.

Za proizvoljnu algebru A algebri sa $S(A)$ označavamo klasu svih podalgebri algebre A. Takođe, za klasu algebri K istog tipa sa $S(K)$ označavamo klasu svih podalgebri algebri iz K.

Neka su A i B algebre istog tipa. Preslikavanje $\phi : A \to B$ je *homomorfizam* algebri A i B ako za svaku operacijski simbol $f \in \mathcal{F}_n$ važi

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\phi = f(a_1\phi, a_2\phi, \ldots, a_n\phi),$$

gde je uzeto da je $f \in \mathcal{F}_n$ i da su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ proizvoljni elementi. Ako je ϕ još i injektivno preslikavanje, onda kažemo da je *monomorfizam* (*potapanje*). Ako ϕ jeste surjektivno preslikavanje, kažemo da je *epimorfizam*, a za algebru B kažemo da je *homomorfna slika* algebre A. Ako je ϕ bijekcija tada kažemo da je *izomorfizam*. Činjenicu da postoji izomorfizam algebri A i B označavamo sa $A \cong B$. U slučaju kada je $A = B$ homomorfizam ϕ nazivamo *endomorfizam*, a ako je još i izomorfizam, onda kažemo da je *automorfizam* algebre A.

Za algebre A i B istog tipa, sa $Hom(A, B)$ označavamo skup svih homomorfizama iz algebre A u algebru B. Za proizvoljnu algebru A sa $H(A)$ je označena klasa svih homomorfnih slika algebre A, dok je za klasu algebri K istog tipa sa $H(K)$ označena klasa svih homomorfnih slika algebri iz K.

Neka je A algebra i θ binarna relacija na skupu A. Relacija θ je *kongruencija na algebri* A ako je ekvivalencija i saglasna je sa operacijama na A, tj. za proizvoljne elemente $a_i, b_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i proizvoljnu operaciju $f \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, iz $(a_i, b_i) \in \theta$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sledi $(f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \theta$. Sa Δ_A, odnosno ∇_A, označavamo identičku i univerzalnu kongruenciju na algebri A, redom, tj. $\Delta_A = \{(a,a) \,|\, a \in A\}$ i $\nabla_A = A \times A$. Ukoliko je jasno o kojoj se algebri radi, može se izostaviti indeks u zapisima ovih relacija. Skup svih kongruencija definisanih na algebri A predstavlja kompletnu mrežu koju označavamo sa $\mathrm{Con}\, A$. Neka su $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\, A$ takve da je $\theta_1 \subseteq \theta_2$. Tada uvodimo oznaku $[\theta_1, \theta_2] = \{\rho \,|\, \theta_1 \subseteq \rho \subseteq \theta_2\}$.

Kongruencija θ je *potpuno invarijantna* ako za proizvoljne elemente $a_1, a_2 \in A$ i proizvoljni endomorfizam ϕ algebre A, iz $(a_1, a_2) \in \theta$ sledi $(a_1\phi, a_2\phi) \in \theta$.

Jasno je da je presek proizvoljne familije kongruencija takođe kongruencija. Ako je ρ binarna relacija na algebri A, tada je presek svih kongruencija koje sadrže ρ najmanja kongruencija koja sadrži ρ i zovemo je *kongruencija generisana* relacijom ρ.

Neka je A algebra i θ kongruencija na A. Na skupu $A/\theta = \{a\theta \,|\, a \in A\}$ definišemo operaciju f, za $f \in \mathcal{F}_n$, sa

$$f_{A/\theta}(a_1\theta, a_2\theta, \ldots, a_n\theta) = f_A(a_1, a_2, \ldots, a_n)\theta.$$

Na taj način A/θ postaje algebra istog tipa $\mathcal{F}$ i nazivamo je *faktor* (*količnik*) *algebrom*.

Neka je A algebra i θ kongruencija algebre A. Preslikavanje $\phi : A \to A/\theta$ definisano sa $a\phi = a\theta$, za proizvoljno $a \in A$, je *prirodni epimorfizam*. Takođe, ako je $\psi : A \to B$ homomorfizam algebri A i B, tada relaciju $\ker \psi = \{(a_1, a_2) \in A^2 \,|\, a_1\psi = a_2\psi\}$ zovemo *jezgro homomorfizma* ψ.

Teorema 1.1.1 (Teorema o homomorfizmu). *Neka su A i B algebre i $\phi : A \to B$ epimorfizam. Tada je $\ker \phi$ kongruencija i algebra $A/\ker \phi$ je izomorfna algebri B.*

Koristeći ovu teoremu dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 1.1.2. *Neka je A proizvoljna algebra, θ proizvoljna kongruencija na algebri A i ρ proizvoljna kongruencija na algebri A/θ. Tada relacija θ/ρ definisana na algebri A sa:*

$$(a, b) \in \theta/\rho \Leftrightarrow (a\theta, b\theta) \in \rho$$

jeste kongruencija na algebri A takva da je $\theta \subseteq \theta/\rho$ i $(A/\theta)/\rho \cong A/(\theta/\rho)$.

Dokaz. Iz refleksivnosti relacije ρ sledi da je $\theta \subseteq \theta/\rho$. Koristeći činjenicu da je ρ kongruencija algebre A/θ lako se dokazuje da je i θ/ρ kongruencija. Definišimo preslikavanje $\phi : A/\theta \to A/(\theta/\rho)$ sa $(u\theta)\phi = u(\theta/\rho)$. Nije teško uočiti da je ϕ epimorfizam sa jezgrom $\ker \phi = \rho$, odakle, prema Teoremi o homomorfizmu, sledi da je $(A/\theta)/\rho \cong A/(\theta/\rho)$. $\square$

Takođe će često biti korišćena i sledeća teorema.

Teorema 1.1.3 (Teorema o korespondenciji). *Neka je A proizvoljna algebra i θ proizvoljna kongruencija na algebri A. Tada preslikavanje $\alpha : [\theta, \nabla] \to \mathrm{Con}(A/\theta)$ definisano sa $\phi\alpha = \phi/\theta$ jeste izomorfizam mreža.*

Pre nego što navedemo još jedan rezultat koji će biti korišćen u radu, uvedimo još neke oznake. Naime, ako je K proizvoljna klasa algebri istog tipa i A algebra tog tipa, tada sa $\mathrm{Con}_K(A)$ označavamo skup svih kongruencija definisanih na algebri A takvih da su odgovarajuće faktor algebre u klasi K.

Sledeća teorema predstavlja rezultat S. Bogdanovića i M. Ćirića [20].

Teorema 1.1.4. *Klasa algebri K je zatvorena za homomorfne slike ako i samo ako je $\mathrm{Con}_K(A)$ filter mreže $\mathrm{Con}\, A$, za svaku algebru A.*

Neka su A_i, $i \in I$, algebre istog tipa $\mathcal{F}$. Na Descartesovom proizvodu $A = \prod_{i\in I} A_i$ za $f \in \mathcal{F}_n$, za neko $n \in \mathbb{N}^{)}$, definišemo sa

$$f_A(p_1, p_2, \dots, p_n)(i) = f_{A_i}(p_1(i), p_2(i), \dots, p_n(i)),$$

gde su $p_1, p_2, \dots, p_n \in A$ proizvoljni elementi. Algebra $\prod_{i\in I} A_i$ je *direktan proizvod* algebri A_i, $i \in I$. Homomorfizam $\pi_i : A \to A_i$ definisan sa $p\pi_i = p(i)$, za proizvoljno $p \in A$, je *projekcioni epimorfizam*. Za proizvoljnu klasu K algebri istog tipa sa $P(K)$ označavamo klasu svih direktnih proizvoda algebri iz K.

Podalgebra B algebre $A = \prod_{i\in I} A_i$ za koju važi $B\pi_i = A_i$, za svako $i \in I$, je *poddirektan proizvod* algebri A_i, $i \in I$. Za proizvoljnu klasu K algebri istog tipa sa $P_s(K)$ označavamo klasu svih poddirektnih proizvoda algebri iz K. Algebra A je *poddirektno nerazloživa* ako za proizvoljnu familiju kongruencija θ_i, $i \in I$, algebre A iz $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$ sledi da postoji $i \in I$ tako da je $\theta_i = \Delta_A$.

Jedan od najpoznatijih rezultata u vezi sa poddirektnim razlaganjima algebri predstavlja Teorema Birkhoffa [18].

Teorema 1.1.5 (Teorema Birkhoffa o reprezentaciji). *Proizvoljna algebra A je izomorfna poddirektnom proizvodu poddirektno nerazloživih algebri, koje su homomorfne slike algebre A.*

Od vrlo velikog praktičnog značaja jeste sledeći rezultat, koji je dat u knjizi S. Burrisa i H. P. Sankappanavara [24] kao Teorema 8.4.

Teorema 1.1.6. *Algebra A je poddirektno nerazloživa ako i samo ako postoji minimalna kongruencija u $\mathrm{Con}\, A \setminus \{\Delta_A\}$. U tom slučaju je $\cap \mathrm{Con}\, A \setminus \{\Delta_A\}$ tražena minimalna kongruencija.*

Napomenimo još jednom da su pojmovi i oznake dati u ovom odeljku u skladu sa knjigom S. Burrisa i H. P. Sankappanavara [24], te da za pojmove i oznake koji nisu ovde definisani upućujemo na pomenutu knjigu.

1.2. Polugrupe. Polugrupovni identiteti

Neka je na nepraznom skupu S definisana binarna operacija $\cdot$, tako da je zadovoljen uslov asocijativnosti, tj. važi

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{za svako } a, b, c \in S,$$

tada je algebra $(S, \cdot)$ *polugrupa*. Uzimajući u obzir da redosled izvođenja operacija nije bitan, koristićemo konvenciju o brisanju zagrada.

Element a polugrupe S je *idempotent* ako je $a^2 = a$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$.

Ukoliko su svi elementi polugrupe S idempotentni, tj. $S = E(S)$ polugrupa S je *traka*.

Element z polugrupe S je *leva* (*desna, bi-*) *nula* ako važi

$$za = z \ \ (az = z, zaz = z), \quad \text{za svako } a \in S.$$

Element z je *nula* polugrupe S ako je leva i desna nula. Nije teško pokazati da polugrupa ima nulu ako i samo ako ima levu i desnu nulu, kao i da ukoliko polugrupa ima nulu tada je ta nula jedinstvena.

Polugrupa u kojoj je svaki element leva (desna) nula, tj. u kojoj važi $ab = a$ $(ab = b)$, za sve $a, b \in S$, je *levo* (*desno*) *nulta traka*.

Polugrupa S čiji proizvoljni elementi $a, b \in S$ zadovoljavaju relaciju $a = aba$ jeste *pravougaona traka*.

Element e polugrupe S je *leva* (*desna*) *jedinica* ako važi

$$ea = a \ \ (ae = a), \quad \text{za svako } a \in S.$$

Element e je *jedinica* polugrupe S ako je leva i desna jedinica. Polugrupa sa jedinicom je *monoid*. Takođe se može dokazati da polugrupa ima jedinicu ako i samo ako ima levu i desnu jedinicu, kao i da ukoliko ima jedinicu, tada je ona jedinstvena.

Podskup I polugrupe S je *levi* (*desni*) *ideal* polugrupe S ako važi $SI \subseteq I$ $(IS \subseteq I)$. Ako je I levi i desni ideal polugrupe S, tada je I *ideal* polugrupe S. Ideal I je *pravi* ako je $I \neq S$. Podskup I polugrupe S je *bi–ideal* ako važi $ISI \subseteq I$.

Neka je I ideal polugrupe S. Definišemo relaciju θ sa

$$a \, \theta \, b \Leftrightarrow a, b \in I \quad \text{ili} \quad a = b,$$

gde su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Lako se proverava da je θ kongruencija na S i zovemo je *Reesova kongruencija* određena idealom I. Faktor polugrupa S/θ je *Reesova faktor polugrupa* po idealu I, u oznaci S/I. Očigledno je S/I polugrupa sa nulom, a dobija se iz S sažimanjem ideala I u jedan element koji je nula u novodobijenoj polugrupi.

Polugrupa S je *idealska ekstenzija* polugrupe T pomoću polugrupe Q sa nulom ako je T izomorfna idealu T' polugrupe S i faktor polugrupa S/T' je izomorfna polugrupi Q.

Podpolugrupa T polugrupe S je *retrakt* ako postoji homomorfizam $\varphi : S \to T$ takav da je $a\varphi = a$, za svako $a \in T$. U tom slučaju, preslikavanje φ je *retrakcija*. Retrakcija φ je *idealska retrakcija* ako je $T = S\varphi$ ideal u S.

Za proizvoljan element a polugrupe S sa nulom 0 kažemo da je *nilpotentan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $a^n = 0$. Polugrupa S je *n-nilpotentna*, za $n \in \mathbb{N}$, ako je $S^n = 0$. Takođe, polugrupu S nazivamo *nilpotentnom polugrupom* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da S jeste n-nilpotentna.

Idealska ekstenzija S polugrupe T je *nilpotentna* (n-*nilpotentna*) *ekstenzija* ako je S/T nilpotentna (n-nilpotentna) polugrupa.

U nastavku ćemo dokazati nekoliko rezultata koji će biti korišćeni u daljem radu.

Lema 1.2.1. *Polugrupa S ima bi-nulu* (*resp. levu nulu, desnu nulu*) *ako i samo ako je idealska ekstenzija pravougaone* (*resp. levo nulte, desno nulte*) *trake.*

Ako su e i f bi-nule polugrupe S, tada je $esf = ef$, za svako $s \in S$.

Dokaz. Pretpostavimo da S ima bi-nulu. Označimo sa E skup svih bi-nula u S. Za proizvoljno $e \in E$ važi $e^3 = e$, odakle je $e^2 = e^6 = ee^4e = e$. Dakle, E je traka, koja je, jasno, pravougaona. Sa druge strane, za $e \in E$ i $s, t \in S$ imamo da je $(es)t(es) = e(st)es = es$ i $(se)t(se) = se(ts)e = se$. Prema tome, $es, se \in E$, pa je E ideal u S, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka je S idealska ekstenzija pravougaone trake E. uočimo proizvoljne elemente $e \in E$ i $s \in S$. Tada je $es \in E$, odakle dobijamo $ese = e(es)e = e$. Znači, e je bi-nula polugrupe S.

Slučajevi sa levim i desnim nulama se razmatraju slično.

Uočimo, sada, proizvoljne elemente $e, f \in E$ i $s \in S$. Tada je $sf \in E$ i $f = fef$, odakle je $esf = es(fef) = e(sf)ef = ef$. Ovim je lema dokazana. □

Koristeći prethodnu lemu, dokazujemo sledeće:

Lema 1.2.2. *Neka polugrupa S ima levu* (*resp. desnu*) *nulu. Tada se skup svih levih* (*resp. desnih*) *nula polugrupe S poklapa sa skupom svih bi-nula polugrupe S.*

Ako S ima nulu, tada je ona jedinstvena i polugrupa S nema drugih levih, desnih ili bi-nula.

Dokaz. Označimo sa L i B skupove svih levih i bi-nula polugrupe S, tim redom. Očigledno, $L \subseteq B$. Uočimo proizvoljno $f \in B$. Tada je $f = fef$. Međutim, prema Lemi 1.2.1, L je ideal polugrupe S, odakle sledi da je $f \in SLS \subseteq L$. Prema tome, $L = B$.

Ostale relacije se dokazuju na sličan način. □

Na kraju, na osnovu prethodnih lema, neposredno sledi:

Teorema 1.2.1. *Ako polugrupa ima levu (desnu) nulu, onda je ona idealska ekstenzija levo (desno) nulte trake.*

Neka je X neprazan skup koji ćemo zvati *alfabet*, a njegove elemente *slovima*. Konačan niz $x_1x_2\cdots x_n$ elemenata alfabeta X zovemo *reč* nad tim alfabetom. Dve reči $x_1x_2\cdots x_n$ i $y_1y_2\cdots y_m$ su jednake ako je $n = m$ i $x_i = y_i$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. ako su jednake kao nizovi.

Sa X^+ označavamo skup svih reči nad alfabetom X. Na skupu X^+ definišemo operaciju *dopisivanja* (*konkatenacije*) na sledeći način

$$(x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_m) = x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m.$$

Sa ovako definisanom operacijom X^+ je polugrupa, koju nazivamo *slobodna polugrupa nad alfabetom* X. Skup $X^* = X^+ \cup \{e\}$ sa množenjem definisanim sa

$$uv = \begin{cases} uv, & u, v \in X^+; \\ u, & u \in X^+,\ v = e; \\ v, & u = e,\ v \in X^+; \end{cases}$$

jeste monoid koji označavamo sa X^* i zovemo *slobodni monoid nad alfabetom* X. Jedinični element, u oznaci e, zovemo *prazna reč*. Pod *jezikom* nad alfabetom X podrazumevamo proizvoljan podskup slobodnog monoida X^*.

Za reč u alfabeta X sa $|u|$ označavamo *dužinu reči* u, tj. broj slova alfabeta X u zapisu reči u. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, sa X^k označavamo skup svih reči iz X^* dužine k, dok sa $X^{\geq k}$, odnosno $X^{\leq k}$, označavamo skup svih reči ulaznog alfabeta dužine najmanje, odnosno najviše, k.

Sledeća teorema je dobro poznat rezultat Teorije polugrupa.

Teorema 1.2.2. *Neka je X neprazan skup, S polugrupa i $\varphi : X \to S$ proizvoljno preslikavanje. Tada postoji jedinstven homomorfizam $\widehat{\varphi} : X^+ \to S$ takav da je $x\widehat{\varphi} = x\varphi$, za svako $x \in X$. Pri tome,*

(a) *Homomorfizam $\widehat{\varphi}$ je surjektivan ako i samo ako $X\varphi$ generiše S;*

(b) *Homomorfizam $\widehat{\varphi}$ je injektivan ako i samo ako je φ injekcija.*

Za homomorfizam $\widehat{\varphi}$ kažemo da je *određen* preslikavanjem φ. Prema tome, svaki homomorfizam polugrupe X^+ jednoznačno je određen svojim vrednostima na skupu X. Zato često homomorfizam slobodne polugrupe X^+ u polugrupu S zadajemo njegovim vrednostima na skupu X.

Neposredno iz prethodne teoreme dobija se sledeći važan rezultat:

Posledica 1.2.1. *Svaka polugrupa je izomorfna nekoj faktor polugrupi neke slobodne polugrupe.*

Iz Posledice 1.2.1 sledi da je svaka polugrupa određena, do na izomorfizam, nekim generatornim skupom X i kongruencijom θ slobodne polugrupe X^+.

Polugrupovni identitet nad alfabetom X je par $(u, v) \in X^+ \times X^+$ koji obično zapisujemo kao $u = v$. Kada je jasno da mislimo na polugrupovni identitet obično kažemo samo *identitet*. Identitet oblika $u = u$ je *trivijalan*, a ostali su *netrivijalni*. Ako reči u i v sadrže ista slova, identitet $u = v$ je *regularan*, a u suprotnom je *neregularan*.

Neka je $u = v$ identitet nad alfabetom X. Polugrupa S *zadovoljava identitet* $u = v$ ako je $u\phi = v\phi$, za svaki homomorfizam $\phi : X^+ \to S$. Prema tome, identitet $u = v$ je zadovoljen na polugrupi S ako i samo ako je

$$(u, v) \in \bigcap \big\{ \ker \phi \,\big|\, \phi \in Hom(X^+ \to S) \big\}.$$

Drugim rečima, S zadovoljava identitet $u = v$ ako posle svake zamene slova u rečima u i v proizvoljnim elementima iz S i zamenom konkatenacije u X^+ množenjem u S, na levoj i desnoj strani jednakosti uvek dobijamo isti element polugrupe S.

Neka je Σ skup identiteta nad alfabetom X. Polugrupa S *zadovoljava skup identiteta* Σ ako zadovoljava svaki od identiteta iz Σ ponaosob. Sa $[\Sigma]$ označavamo klasu svih polugrupa koje zadovoljavaju dati skup identiteta Σ nad alfabetom X. Ako je posmatrani skup identiteta konačan, tj. $\Sigma = \{u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_m = v_m\}$, često umesto $[\Sigma]$ pišemo $[u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_m = v_m]$.

Teorema 1.2.3. *Za nepraznu klasu* $\boldsymbol{V}$ *polugrupa sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *klasa* $\boldsymbol{V}$ *je zatvorena za formiranje podpolugrupa, homomorfnih slika i direktnih proizvoda;*

(ii) *klasa* $\boldsymbol{V}$ *je zatvorena za formiranje homomorfnih slika i poddirektnih proizvoda;*

(iii) *postoji skup identiteta* Σ *tako da je* $\boldsymbol{V} = [\Sigma]$.

Klasa polugrupa $\boldsymbol{V}$ koja zadovoljava bilo koji od ekvivalenata prethodne teoreme predstavlja *varijetet polugrupa*. Inače, uobičajeno je da se ekvivalent (i) uzima za definiciju varijeteta polugrupa. Ekvivalenciju (i)⇔(ii) je dokazao S. R. Kogalovskĭ u [72], dok ekvivalencija (i)⇔(iii) predstavlja čuvenu Teoremu Birkhoffa o varijetetima [16].

Za pojmove i oznake koje nisu eksplicitno uvedeni upućujemo na knjige S. Bogdanovića i M. Ćirića [19] i J. M. Howiea [60].

1.3. Automati. Poznate klase automata

Automati koji će ovde biti razmatrani su automati bez izlaza, u smislu definicije date u knjizi F. Gécsega i I. Peáka [46]. Naime, pod *automatom* podrazumevamo trojku $A = (A, X, \delta)$, gde je A skup stanja, X je ulazni alfabet i $\delta : A \times X \to A$ jeste funkcija Međutim, ovde će biti korišćena nešto drugačija notacija. Pisaćemo da pod dejstvom ulazne reči $u \in X^*$, automat A prelazi iz stanja a u stanje označeno sa au_A. Ukoliko je jasno o kom je automatu reč, umesto au_A pišemo samo au.

Inače, jednostavnosti radi, automat sa skupom stanja A označavamo istim slovom A. Pri tome, ako automat A ima za ulazni alfabet skup X, onda za A kažemo da je X-*automat*. Međutim, ako je poznato o kom se ulaznom alfabetu X radi, ili ako nije neophodno istaći ulazni alfabet posmatranog automata, pišemo samo automat umesto X-automat.

Poznato je da X-automati mogu biti tretirani kao unarne algebre čiji je skup operacijskih simbola indeksiran skupom X, tj. kao unarne algebre tipa X. Tada pojmovi kao što su: *kongruencija*, *homomorfizam*, *faktor automat*, *podautomat*, *generatorni skup*, *monogeni podautomat*, itd., imaju svoje uobičajeno algebarsko značenje.

Napomenimo samo da ćemo sa $S(H) = \{au \mid a \in H,\ u \in X^*\}$ označavati podautomat automata A generisan podskupom $H \subseteq A$. U slučaju kada je skup H oblika $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ podautomat generisan sa H označavamo i sa $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Neka je A proizvoljan X-automat i $u \in X^*$ proizvoljna reč. Preslikavanje $\eta_u : A \to A$ definisano sa $a\eta_u = au$ zovemo *funkcija prelaza* automata A. Polugrupu $S(A)$ koju čine sve funkcije prelaza zovemo *polugrupom prelaza* automata A. Znači,

$$S(A) = \{\eta_u \mid u \in X^*\}.$$

Polugrupa $S(A)$ jeste podpolugrupa pune polugrupe transformacija na skupu A koja je generisana skupom $\{\eta_x \mid x \in X\}$.

Polugrupu prelaza možemo definisati na još jedan način. Naime, definišimo *Myhillovu kongruenciju* automata A, u oznaci μ_A, na polugrupi X^+ sa:

$$(u, v) \in \mu_A \Leftrightarrow au = av, \text{ za svako } a \in A.$$

Tada je $S(A) = X^+/\mu_A$.

Neka su dati alfabet X, slobodna polugrupa X^+ i slobodni monoid X^* nad X. Sa $X^*_@$ ćemo označavati automat sa skupom stanja X^*, ulaznim alfabetom X i funkcijama prelaza definisanim sa

$$(u, x) \mapsto ux,$$

gde je $u \in X^*$, $x \in X$ i ux označava proizvod u X^*. Podautomat od $X^*_@$ sa skupom stanja X^+ biće označen sa $X^+_@$. Drugim rečima, kada tretiramo monoid X^* i polugrupu X^+ kao automate, to ističemo pišući $X^*_@$ i $X^+_@$ umesto X^* i X^+, tim redom.

Neka je θ desna kongruencija na X^+, tj. kongruencija na $X^+_@$. Tada $\theta^* = \theta \cup \{(e,e)\}$, gde je e prazna reč, jeste desna kongruencija na X^*, odnosno, kongruencija na $X^*_@$. Sa $A(\theta)$ će biti označavan faktor automat $X^*_@/\theta^*$ automata $X^*_@$ u odnosu na kongruenciju θ^*. Automat $A(\theta)$ nazivaćemo *Nerodovim automatom* desne kongruencije θ. U slučaju kada je θ kongruencija na X^+, tada taj automat nazivamo *Myhillovim automatom* kongruencije θ.

Očigledno je da važi:

Lema 1.3.1. *Neka je X proizvoljan alfabet i θ proizvoljna kongruencija na X^+. Tada je $S(A(\theta)) = X^+/\theta$.*

Takođe se jednostavno dokazuje i sledeći rezultat:

Lema 1.3.2. *Neka je X proizvoljan alfabet. Mreža svih kongruencija automata $X^*_@$ izomorfna je mreži svih desnih kongruencija na polugrupi X^+.*

Dokaz. Neposredno sledi na osnovu činjenice da je relacija θ polugrupe X^+ desna kongruencija na X^+ ako i samo ako je $\theta \cup \{(e,e)\}$ kongruencija na automatu $X^*_@$. $\square$

Neka je A automat. Myhillov automat kongruencije μ_A označavamo sa $M(A)$, tj. $M(A) = A(\mu_A)$.

Pomenimo ovde da za jezik L alfabeta X kažemo da je *raspoznatljiv* monogenim automatom A, sa generatorom a, pomoću skupa $T \subseteq A$ ako važi

$$u \in L \Leftrightarrow au \in T.$$

U nastavku dajemo definicije nekih značajnih klasa automata.

Stanje a_0 automata A nazivamo *trapom* automata A ako za svako $x \in X$ važi $a_0x = a_0$. Skup svih trapova automata A označavamo sa $\mathrm{Tr}(A)$.

Automat nazivamo *trivijalnim* ako ima samo jedno stanje. Klasu svih trivijalnih automata označavamo sa $\mathbf{O}$. U suprotnom, automat je *netrivijalan*.

Automat A je *diskretan* ako za svako stanje $a \in A$ i svaki ulazni simbol $x \in X$ važi $ax = a$, tj. ako je svako njegovo stanje trap. Klasu svih diskretnih automata označavamo sa $\mathbf{D}$, dok dvoelementan diskretan automat označavamo sa D_2.

Automat čiji je ulazni alfabet jednoelementan je poznat kao *autonoman* automat.

Pod *k-nilpotentnim* automatom, gde je $k \in \mathbb{N}$, podrazumevamo automat A koji ima jedinstveni trap a_0 i za svaku reč $u \in X^{\geq k}$ i svako stanje $a \in A$ važi $au = a_0$. Drugim rečima, važi $auv = bu$, za sve $a, b \in A$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Automat A je *nilpotentan* ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da automat A jeste k-nilpotentan. Klasu svih k-nilpotentnih automata označavamo sa $\mathbf{Nilp}_k$, dok klasu svih nilpotentnih automata označavamo sa $\mathbf{Nilp}$.

Automat A je *k-definitan*, za $k \in \mathbb{N}$, ako važi $au = bu$, za sve $a, b \in A$ i $u \in X^{\geq k}$. Pod *definitnim automatom* podrazumevamo automat koji je k-definitan, za neko $k \in \mathbb{N}$. Klase svih k-definitnih i definitnih automata označavamo sa $\mathbf{Def}_k$ i $\mathbf{Def}$, redom.

Za automat A kažemo da je *reset automat* ako je definitan automat sa stepenom definitnosti jednakim 1, odnosno ako važi $ax = bx$, za sve $a, b \in A$ i $x \in X$.

Još jednu poznatu podklasu klase definitnih automata čine tzv. šift registri. To su automati sa skupom stanja X^k, za neko $k \in \mathbb{N}$, i funkcijama prelaza datim sa $(x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k})x = x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} x$, gde je $x - \alpha_1 x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_k} \in X^k$ proizvoljna reč.

Automat A je *reverzno k-definitan* , za $k \in \mathbb{N}$, ako važi $auv = au$, za sve $a \in A$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Automat je *reverzno definitan* ako je reverzno k-definitan za neko $k \in \mathbb{N}$. Klase svih reverzno k-definitnih i reverzno definitnih automata označavamo sa $\mathbf{RDef}_k$ i $\mathbf{RDef}$, redom.

Konačno, automat A je *uopšteno definitan* ako postoje $k, m \in \mathbb{N}$ takvi da važi $aupv = auqv$, za sve $a \in A$, $p, q \in X^*$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^{\geq m}$. Klasu svih uopšteno definitnih automata označavamo sa $\mathbf{GDef}$.

Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč. Za automat A kažemo da je *u-direktabilan* ako važi $au = bu$, za sve $a, b \in A$. Reč u tada zovemo *usmeravajuća reč*. Automat je *direktabilan* ako je u-direktabilan za neku reč $u \in X^*$. Svi direktabilni automati sa usmeravajućom reči u predstavljaju klasu automata koju označavamo sa $\mathbf{Dir}_u$, dok klasu svih direktabilnih automata označavamo sa $\mathbf{Dir}$.

Inače, za direktabilne automate i usmeravajuće reči u literaturi postoji više različitih sinonima. Oni se nazivaju još i *sinhronizabilnim* automatima, a odgovarajuće reči su *sinhronizujuće*. U radu M. Ito-a i J. Duskea [66] za direktabilne automate je korišćen naziv *kofinalni* automati. I. C. Rystsov u svojim radovima [97], [99], [100], [101], itd., koristi nazive *reset* automat i *reset* reč, mada ćemo ovde, kao što je već učinjeno, pod ovim nazivom podrazumevati drugačiji tip automata.

Pojam direktabilnih automata je uveo J. Černý [25]. On je, takođe, postavio hipotezu o dužini najkraće usmeravajuće reči. Naime, hipoteza je da direktabilan automat sa n stanja ima usmeravajuću reč čija dužina ne prelazi $(n-1)^2$. Do sada hipoteza nije ni dokazana ni opovrgnuta. U opštem slučaju su nađene gornje granice reda veličine $\mathcal{O}(n^3)$, dok je J. E. Pin [90] za neke specijalne slučajeve odredio i bolje granice od Černýeve. I. C. Rystsov je u [102] dokazao da za komutativan direktabilan automat gornja granica dužine najkraće usmeravajuće reči iznosi $n-1$. Ovom problemu posvećeni su i radovi J. Černýa, A. Piricka i B. Rosenauerová [26], pomenuti niz radova I. C. Rystsova [97], [99], [100], [101], [69], [98].

Osim toga, u radu B. Imreha i M. Steibya [65] je dat algoritam za testiranje direktabilnosti konačnog automata i konstruisana je minimalna tzv. usmeravajuća kongruencija, tj. kongruencija čiji je faktor automat direktabilan. Tu su, takođe, date inkluzivne relacije između pomenutih klasa. Direktabilni automati su razmatrani i u radovima gde se izučavaju tzv. korektabilni automati, dok se definitni razmatraju u radovima posvećenim samo-korektabilnim automatima, [70], [71], [2].

Neka je A direktabilan automat. Označimo sa $DW(A)$ skup svih usmeravajućih reči automata A. Uočimo proizvoljnu reč $u \in DW(A)$. Tada postoji jedinstveno stanje $d_u \in A$ tako da je $au = d_u$, za svako $a \in A$. Stanje d_u nazivamo *u-vrat* automata A. Kažemo da je stanje $a \in A$ *vrat* automata A ako važi $a = d_u$, za neku reč $u \in DW(A)$.

Recimo, na kraju, još da je automat A *povezan* ako za proizvoljne $a, b \in A$ postoje $u, v \in X^*$ tako da je $au = bv$. Klasu svih povezanih automata označavamo sa **Conn**. Takođe, automat A je *jako povezan* ako sem A nema drugih podautomata, odnosno ako za sve $a, b \in A$ postoje $u, v \in X^*$ takvi da je $au = b$ i $bv = a$.

Treba pomenuti da se u novije vreme aktivno izučavaju tzv. 'tree'-automati koji predstavljaju uopštenja automata kao unarnih algebri. Za ove automate se definišu koncepti koji se i inače izučavaju u teoriji automata, kao što su: raspoznavanje jezika, sintaksički monoidi, razne kompozicije, kao i uopštenja nekih ranije definisanih tipova automata. U tom smislu su posebno značajni radovi M. Steinbya [112], [113], [114], kao i knjiga F. Gécsega i M. Steinbya [47]. U radovima U. Heutera [57], [58], M. Nivata i A. Podelskog [81] su izučavani tzv. definitni i uopšteno definitni 'tree'-automati.

1.4. Automatovni identiteti.Varijeteti

S obzirom da automate posmatramo kao unarne algebre tipa X, za neki alfabet X, možemo posmatrati i term automate, tj. term algebre unarnog tipa X. Drugim rečima, *term automat* $T(G, X)$ tipa X nad skupom promenljivih G je automat čija su stanja reči oblika gu, gde su $g \in G$ i $u \in X^*$, sa funkcijama prelaza datim sa $(gu)v = g(uv)$, za $g \in G$ i $u, v \in X^*$ (vidi §1.6 u [46]). Elemente algebre $T(G, X)$ nazivamo *termima* tipa X nad G.

Uređeni par (s, t) terma, koji obično pišemo kao $s = t$, zovemo *automatovni identitet*, ili prosto *identitet*, tipa X nad G, ili nad $T(G, X)$.

Kažemo da automat A *zadovoljava identitet* $s = t$, u oznaci $A \models s = t$, ako s i t postaju isti element u A za svaku moguću zamenu promenljivih u identitetu $s = t$ elementima iz A. Kako se u proizvoljnom automatovnom identitetu pojavljuje najviše dve promenljive, to je sa aspekta zadovoljenja identiteta dovoljno posmatrati samo identitete nad dvoelementnim skupom promenljivih. Dakle, uzećemo da je $G = \{g, h\}$.

Automatovni identitet $s = t$ je *regularan* ako je oblika $gu = gv$ gde je g promenljiva i $u, v \in X^*$. Takođe, identitet $s = t$ je *neregularan* ako je oblika $gu = hv$, gde su g i h različite promenljive i $u, v \in X^*$.

Skup svih identiteta u term automatu T označavamo sa Id_T. Skup svih identiteta zadovoljenih na automatu A, odnosno klasi K automata, označavamo sa $\mathrm{Id}\,(A)$, tj. $\mathrm{Id}\,(K)$, dok skupove svih regularnih i neregularnih identiteta iz $\mathrm{Id}\,(A)$ i $\mathrm{Id}\,(K)$ označavamo sa $\mathrm{Id}_R\,(A)$, $\mathrm{Id}_N\,(A)$, $\mathrm{Id}_R\,(K)$ i $\mathrm{Id}_N\,(K)$, tim redom. Za skup Σ automatovnih identiteta, Σ_R i Σ_N označavaju, tim redom, skupove svih regularnih i neregularnih identiteta iz Σ.

Ako je Σ skup identiteta, tada, kao i kod svih ostalih algebri, klasa svih automata koje zadovoljavaju sve identitete iz Σ, u oznaci $[\Sigma]$, predstavlja *varijetet* određen sa Σ. Kao što je poznato, klasa automata jeste varijetet ako i samo ako jeste zatvorena za podalgebre, homomorfne slike i direktne proizvode, ili, što je ekvivalentno, ako je zatvorena za homomorfne slike i poddirektne proizvode. I za varijetete automata, kao i za varijetete proizvoljnih algebri, važi teorema analogna Teoremi 1.2.3.

Varijetet određen samo regularnim identitetima nazivamo *regularan varijetet*, dok za varijetet na kome važi i neki neregularan identitet kažemo da je *neregularan varijetet*.

Teorema 1.4.1. *Automat A zadovoljava neregularan identitet $gu = hv$ ako i samo ako su $u, v \in DW(A)$ i $d_u = d_v$ u A.*

Dokaz. Pretpostavimo da $A \models gu = hv$. Tada je zadovoljeno i $A \models hu = hv$ i $A \models gu = gv$, odakle je $A \models gu = hu$ i $A \models gv = hv$. Prema tome, $u, v \in DW(A)$. Sa druge strane, $A \models gu = hv$ daje $au = bv$, za sve $a, b \in A$, tj. $d_u = d_v$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, neka je $u, v \in DW(A)$ i $d_u = d_v$. Kako je $au = d_u$ i $bv = d_v$, za proizvoljne $a, b \in A$, to je $au = bv$, što daje $A \models gu = hv$. $\square$

Sledeći rezultat, dokazan prvi put u radu J. Płonke [92] predstavlja neposrednu posledicu prethodne teoreme.

Posledica 1.4.1. *Neka je $\boldsymbol{V}$ proizvoljan varijetet automata. Tada je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet ako i samo ako je $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}_u$, za neku reč $u \in X^*$.*

J. Płonka je dokazao u [92] da za svaki neregularan varijetet unarnih algebri $\boldsymbol{V}$ postoji najmanji regularan varijetet koji sadrži varijetet $\boldsymbol{V}$. Ovaj varijetet se označava sa $R(\boldsymbol{V})$ i naziva *regularizacija* varijeteta $\boldsymbol{V}$. Varijetet $R(\boldsymbol{V})$ je, zapravo, varijetet definisan skupom identiteta $\mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$.

Uvedimo ovde još neke pojmove koji se tiču relacija na skupu. Naime, binarna relacija definisana na skupu I jeste *kvazi-uređenje* ako je refleksivna i tranzitivna relacija. Ukoliko je na skupu I definisana relacija koja je kvazi-uređenje, tada za skup I kažemo da je *kvazi-uređen*. Takođe, skup I je *usmeren kvazi-uređen skup* ako je na njemu definisano kvazi-uređenje $\preccurlyeq$ tako da za svaka dva elementa $i, j \in I$ postoji $k \in I$ tako da je $i \preccurlyeq k$ i $j \preccurlyeq k$.

Za podskup J kvazi-uređenog skupa I sa kvazi-uređenjem $\preccurlyeq$ kažemo da je *kofinalan* u I ako za svako $i \in I$ postoji $j \in J$ tako da je $i \preccurlyeq j$.

Neka je T term automat tipa X nad skupom promenljivih $G = \{g, h\}$ i neka je $\Sigma \subseteq T \times T$ skup identiteta u T. Ako se Σ može prikazati u obliku $\Sigma = \{s_i = t_i\}_{i \in I}$, gde je $(I, \preccurlyeq)$ usmeren kvazi uređen skup, tada kažemo da je Σ *usmeren skup identiteta*. Takođe, tada kažemo da X-automat A *ultimativno zadovoljava* Σ ako postoji $k \in I$ tako da $A \models s_i = t_i$, za svako $i \succcurlyeq k$, i pišemo $A \models_u \Sigma$. Klasa svih X-automata koji ultimativno zadovoljavaju Σ je označena sa $[\Sigma]_u$ ili $[s_i = t_i \,|\, i \in I]_u$. Kažemo da je klasa K automata *ultimativno definisana* usmerenim skupom identiteta Σ ako važi $K = [\Sigma]_u$.

Ako je $\Sigma = \{s_i = t_i\}_{i \in I}$ usmeren skup automatovnih identiteta, tada za podskup $\Sigma' = \{s_j = t_j\}_{j \in J} \subseteq \Sigma$ kažemo da je *kofinalan* u Σ ako je indeksni skup J kofinalan u I.

Sledećom lemom, dat je jedan koristan rezultat.

Lema 1.4.1. *Neka je $\{s_i = t_i\}_{i \in I}$ usmeren skup identiteta. Tada*

$$[s_i = t_i \,|\, i \in I]_u = [s_i = t_i \,|\, i \in F]_u$$

za svaki filter F kvazi-uređenog skupa I.

U slučaju kada je $I = \mathbb{N}$ sa uobičajenim uređenjem na prirodnim brojevima, tj. $\Sigma = \{s_n = t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je niz identiteta, pišemo $[s_n = t_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$ ili samo $[s_n = t_n]_u$, i za klasu $K = [s_n = t_n]_u$ kažemo da je *ultimativno definisana* nizom identiteta $\{s_n = t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Klasa $\mathbf{K}$ konačnih automata je *pseudovarijetet* ako je zatvorena za formiranje podautomata, homomorfnih slika i konačnih direktnih proizvoda. Prema poznatom rezultatu S. Eilenberga i M. P. Schutzenbergera iz [42] (videti takođe i [105], [41], [74], [91], [61]), klasa K automata je pseudovarijetet ako i samo ako je ultimativno definisana nekim nizom identiteta iz Id_T.

Za klasu $\mathbf{K}$ automata kažemo da je *uopšteni varijetet* ako je zatvorena za formiranje podautomata, homomorfnih slika i direktnih stepena. Prema poznatom rezultatu C. J. Asha iz [8], klasa K automata je uopšteni varijetet ako i samo ako je ultimativno definisana nekim usmerenim skupom identiteta iz Id_T, ili, ekvivalentno, ako se može prikazati u obliku usmerene unije varijeteta.

Sledeća teorema predstavlja pomenuti rezultat C. J. Asha iz [8]. Međutim, ovde je data formulacija ovog rezultata na način kako je to učinjeno i u knjizi M. Ćirića, S. Bogdanovića i B. Imreha [29].

Teorema 1.4.2. *Za klasu automata* $\mathbf{K}$ *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $\mathbf{K}$ *je uopšteni varijetet;*

(ii) $\mathbf{K}$ *je unija neke usmerene familije varijeteta;*

(iii) $\mathbf{K}$ *je ultimativno definisana nekim usmerenim skupom* Σ *automatovnih identiteta.*

Takođe, od vrlo velikog praktičnog značaja je i rezultat C. J. Asha iz [8] kojim je data veza između uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta.

Teorema 1.4.3 (Ash [8]). *Klasa* $\mathbf{K}$ *automata je pseudovarijetet ako i samo ako predstavlja skup svih konačnih automata iz nekog uopštenog varijeteta.*

Za uopšteni varijetet $\mathbf{K}$, odgovarajući pseudovarijetet, koga čine svi konačni automati iz $\mathbf{K}$, označavamo sa $\underline{\mathbf{K}}$.

Napomenimo da se isto ovako definišu i varijeteti, pseudovarijeteti, uopšteni varijeteti proizvoljnih algebri, kao i da su rezultati C. J. Asha [8] dokazani u slučaju proizvoljnih algebri. Ovde su, međutim, radi jednostavnosti, ovi pojmovi uvedeni samo za automate.

1.5. Dekompozicije i kompozicije automata

Osim direktnih i poddirektnih proizvoda automata, koji se definišu kao i za sve univerzalne algebre, u radu će biti razmatrane i neke druge kompozicije automata.

Pod *paralelnom kompozicijom* automata A i B podrazumevamo automat koji je izomorfan nekom podautomatu direktnog proizvoda automata A i B.

Analogno pojmu Reesove kongruencije kod polugrupa može se uvesti i pojam Reesove kongruencije kod automata. Primetimo da je kod polugrupa Reesova kongruencija određena idealom polugrupe, dok kod automata takvu kongruenciju određuje podautomat. U teoriji automata ovaj pojam se po prvi put javlja u radovima G. Thierrina [120] i I. Babcsányia [9]. Neka je A proizvoljan automat i neka je B njegov podautomat. Na automatu A definišemo relaciju ϱ_B sa:

$$(a,b) \in \varrho_B \Leftrightarrow a = b \text{ ili } a, b \in B.$$

Relacija ϱ_B je kongruencija koju nazivamo *Reesova kongruencija* automata A određena podautomatom B. Faktor automat A/ϱ_B obično označavamo sa A/B. Kažemo da je automat A *ekstenzija* automata B pomoću automata C ako je B podautomat od A i $A/B \cong C$. Očigledno, C obavezno ima trap koji je slika automata B u odnosu na prirodni epimorfizam iz A na C. Drugim rečima, možemo smatrati da je automat C dobijen od automata A kontrakcijom podautomata B u jedno stanje koje je trap u C.

Za ekstenziju A automata B kažemo da je *nilpotentna ekstenzija* automata B ako je faktor automat A/B nilpotentan. Jasno, automat A jeste nilpotentna ekstenzija automata B ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $au \in B$ za svako $a \in A$ i svako $u \in X^{\geq k}$.

Neka je automat A ekstenzija automata B. Pod *retrakcijom* automata A na automat B podrazumevamo idempotentan homomorfizam iz A na B, odnosno homomorfizam ϕ iz A na B koji zadovoljava uslov $a\phi = a$, za svako $a \in B$. Ako postoji retrakcija iz A na B, kažemo da je A *retraktivna ekstenzija* automata B i da je B *retrakt* automata A.

Automat A je *direktna suma* svojih podautomata $A_\alpha,\ \alpha \in Y$, ako je

$$A = \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha \text{ i } A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing \text{ za sve } \alpha, \beta \in Y \text{ takve da je } \alpha \neq \beta.$$

Relacija ekvivalencije koja odgovara ovakvoj particiji automata A jeste kongruencija koju nazivamo *direktno sumska kongruencija*, ili, kraće, *d.s. kongruencija* automata A. Inače, za svaki od automata A_α, $\alpha \in Y$, kažemo da je *sumand* automata A. Automat A je *d.s. nerazloživ* ako je ∇_A jedina d.s. kongruencija ovog automata.

Ovaj pojam se po prvi put sreće u radu S. Huzina [62], gde su izučavane direktne sume jako povezanih automata. Više informacija o razlaganjima automata u direktnu sumu može se naći u radu M. Ćirića i S. Bogdanovića [28], ili u preglednom radu M.

Ćirića, S. Bogdanovića i T. Petković [32], odakle su uzeti ovde navedeni rezultati. Radi se o rezultatima koji će nam biti najpotrebniji u daljim razmatranjima.

U narednoj lemi su opisane d.s. kongruencije.

Lema 1.5.1 (Ćirić, Bogdanović, [28]). *Za ekvivalenciju θ automata A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *θ je d.s. kongruencija na A;*

(ii) *za svako stanje $a \in A$ i svaku reč $u \in X^*$ je $(a, au) \in \theta$;*

(iii) *θ je kongruencija na A i A/θ je diskretan automat.*

Uvedimo još jedan pojam za koji, takođe, postoji analogan pojam u teoriji polugrupa. Podskup D automata A nazivamo *dualni podautomat* automata A ako za svako stanje $a \in A$ i svaku reč $u \in X^*$ iz $au \in D$ sledi $a \in D$ ([28, 32]). Za neprazan podskup H automata A, $D(H) = \{a \in A \,|\, (\exists u \in X^*)\, au \in H\}$ je najmanji dualni podautomat od A koji sadrži H. Podskup F automata A je *filter* ako je istovremeno i podautomat i dualni podautomat automata A. Sa $F(A)$ označavamo skup svih filtera automata A. Napomenimo da $F(A)$ predstavlja potpunu atomičnu Booleovu algebru.

Teorema 1.5.1 (Ćirić, Bogdanović, [28]). *Neka je A proizvoljan automat i σ tranzitivno zatvorenje relacije $-$ automata A definisane sa*

$$a - b \Leftrightarrow S(a) \cap S(b) \neq \varnothing.$$

Tada skup svih d.s. kongruencija automata A jeste glavni dualni ideal mreže svih relacija ekvivalencije automata A generisan relacijom ekvivalencije σ.

Neposredno iz teoreme sledi da je svaki povezan automat d.s. nerazloživ. Takođe je svaki neregularan automat d.s. nerazloživ. Ovo sledi jer je svaki neregularan automat direktabilan, a onda i povezan.

Teorema 1.5.2 (Ćirić, Bogdanović, [28]). *Svaki automat A je direktna suma d.s. nerazloživih automata. To je najveće d.s. razlaganje automata A i njegovi sumandi su atomi atomične Booleove algebre $F(A)$.*

Uvedimo sada još neke oznake. Neka su K_1 i K_2 klase X-automata. Tada je njihov *Mal'cevljev proizvod*, [77], $K_1 \circ K_2$ definisan kao klasa svih X-automata A na kojima postoji kongruencija ϱ takva da je A/ϱ automat iz klase K_1 i svaka ϱ-klasa koja je podautomat automata A pripada klasi K_2. Na primer, $\mathbf{D} \circ K$ predstavlja klasu svih automata koji su direktne sume automata iz K.

Za pojmove i oznake koji ovde nisu eksplicitno uvedeni upućujemo na knjige S. Burrisa i H. P. Sankappanavara [24], F. Gécsega i I. Peáka [46], R. Sz. Madarász i S. Crvenkovića [76] i J. M. Howiea [61].

Glava 2

Operatori na varijetetima automata

U raznim algebarskim teorijama, veoma važan predmet proučavanja predstavljaju algebre čije sve podalgebre određenog tipa pripadaju nekoj datoj klasi algebri. Pri tome se vrlo često radi sa monogenim ili konačno generisanim podalgebrama. Drugim rečima, izučavaju se algebre čije monogene ili konačno generisane podalgebre pripadaju nekoj datoj klasi algebri, odnosno imaju neko zadato svojstvo. Za takve algebre često kažemo da "lokalno pripadaju" datoj klasi algebri, odnosno da imaju zadato svojstvo kao "lokalno svojstvo".

Autori koji se bave Algebarskom teorijom automata nisu se, međutim, mnogo bavili takvim problemima. Probleme takvog tipa srećemo jedino u radu M. Steinbya [115], koji je proučavao izvesne "lokalno zatvorene" klase automata. Zato ćemo se mi u ovoj glavi dublje pozabaviti takvim problemima. Naime, bavićemo se izučavanjem veza koje postoje između izvesnih "lokalnih svojstava" i "globalnih svojstava" automata. Još preciznije, tema ove glave je proučavanje ponašanja na raznim klasama automata dvaju operatora na klasama. Prvi od njih je operator $L : K \mapsto L(K)$ koji svakoj klasi K automata pridružuje klasu $L(K)$ svih automata čiji svi monogeni podautomati pripadaju klasi K, a drugi je operator $CL : K \mapsto CL(K)$ koji svakoj klasi K automata pridružuje klasu $CL(K)$ svih automata čiji svi konačno generisani podautomati pripadaju klasi K. Kao što će se videti, te operatore je posebno interesantno izučavati na mrežama varijeteta, uopštenih varijeteta i pseudovarijeteta automata, gde oba ova operatora predstavljaju operatore zatvorenja.

Na mreži varijeteta automata, operator L ima jednu posebno zanimljivu osobinu. Naime, kao što će biti dokazano, on se na varijetetima automata poklapa sa takozvanim operatorom regularizacije varijeteta, čije se ponašanje na varijetetima algebri raznih tipova intenzivno izučava već više od trideset godina. Početak izučavanja operatora regularizacije, i sa njime povezanih regularnih i neregularnih varijeteta algebri, predstavlja rad J. Płonkae [92] u kome je on pokazao da je varijetet zatvoren za takozvane Płonkaine sume algebri ako i samo ako je regularan, odnosno zatvoren za operator regularizacije, a od ranih rezultata iz ove oblasti značajni su i oni iz rada B. Jonssona i E.

Nelson [67]. U Teoriji unarnih algebri, što znači i u Teoriji automata bez izlaza (gde se Płonkaine sume svode na direktne sume), operator regularizacije proučavan je takođe i u radovima J. Płonkae [93], [94], [95] i E. Graczyńskae [55]. Rezultati iz tih radova, kao što ćemo videti, takođe su povezani sa rezultatima koje ćemo dobiti u izučavanju operatora lokalnog zatvorenja varijeteta automata.

Dakle, u Odeljku 2.1 izučavaju se osnovna svojstva operatora L i CL, u Odeljku 2.2 se ovi operatori primenjuju na klasu povezanih automata i neke njene podklase, dok se u Odeljcima 2.3, odnosno 2.4, oni primenjuju na varijetete, odnosno na uopštene varijetete i pseudovarijetete automata. Posebno će biti istaknute veoma zanimljive razlike u ponašanju operatora L i CL na varijetetima, na uopštenim varijetetima i na pseudovarijetetima.

Svi rezultati koji su prikazani u ovoj glavi su novi i originalni.

2.1. Operatori lokalnog zatvorenja

U ovom odeljku će biti definisani operatori lokalnog zatvorenja na proizvoljnim klasama automata i biće data neka njihova opšta svojstva.

Podsetimo se najpre nekih oznaka uvedenih u Glavi 1. Neka je A automat i neka su $a_1, \ldots, a_n \in A$ proizvoljna stanja. Tada sa $S(a_1, \ldots, a_n)$ označavamo podautomat automata A generisan skupom $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Specijalno, $S(a)$ označava inicijalni podautomat automata A generisan elementom $a \in A$. Kao što je poznato, $S(a) = \{au \,|\, u \in X^*\}$ i

$$S(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{i=1}^{n} S(a_i).$$

Neka je K klasa automata. Kažemo da automat A *lokalno pripada klasi* K, odnosno da je *lokalno* K*-automat*, ako se svaki njegov monogeni podautomat nalazi u klasi K. Klasu svih automata koji se lokalno nalaze u klasi K označavamo sa $L(K)$.

Takođe, za automat A kažemo da *potpuno lokalno pripada klasi* K ako se svaki njegov konačno generisani podautomat nalazi u klasi K. Za ovakav automat A kažemo još i da je *potpuno lokalno* K*-automat*. Klasu svih automata koji se potpuno lokalno nalaze u klasi K označavamo sa $CL(K)$. Jasno je da važi $CL(K) \subseteq L(K)$.

Prema tome, ovim smo definisali dva operatora

$$L : K \mapsto L(K) \qquad \text{i} \qquad CL : K \mapsto CL(K)$$

na klasama automata. U narednoj lemi opisana su neka svojstva tih operatora.

Lema 2.1.1. *Neka su K, K_1, K_2 i K_i, $i \in I$, proizvoljne klase automata i neka O označava proizvoljni operator L ili CL, tj. $O \in \{L, CL\}$. Tada:*

(1) *klasa $O(K)$ je zatvorena za podautomate;*

(2) $K_1 \subseteq K_2 \;\Rightarrow\; O(K_1) \subseteq O(K_2)$;

(3) $O^3(K) = O^2(K) \subseteq O(K)$;

(4) $O\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) = \bigcap_{i\in I} O(K_i)$;

(5) *ako je klasa K zatvorena za podautomate, tada je $K \subseteq O(K)$ i $O^2(K) = O(K)$;*

(6) *ako je klasa K zatvorena za homomorfne slike, tada je klasa $O(K)$ zatvorena za homomorfne slike;*

(7) *ako je klasa K zatvorena za podautomate i (konačne) direktne proizvode, tada je klasa $O(K)$ zatvorena za (konačne) direktne proizvode;*

(8) *važi $K \subseteq L(K)$ ($K \subseteq CL(K)$) ako i samo ako je klasa K zatvorena za monogene (konačno generisane) podautomate.*

Dokaz. (1) Neka je $A \in O(K)$ proizvoljan automat i B njegov podautomat. Označimo sa C proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat automata B. Jasno da je tada C i podautomat automata A, pa kako je $A \in O(K)$, to je $C \in K$. Odatle neposredno sledi da je $B \in O(K)$, tj. $O(K)$ je zatvorena za podautomate.

(2) Uočimo proizvoljan automat $A \in O(K_1)$. Tada za proizvoljni monogeni (konačno generisani) podautomat B automata A važi $B \in K_1 \subseteq K_2$. Međutim, onda je i $A \in O(K_2)$, što je i trebalo dokazati.

(3) Dokazaćemo, najpre, da je $O^2(K) \subseteq O(K)$. Naime, neka je $A \in O^2(K)$. Tada za proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat B automata A važi $B \in O(K)$. Neka je C proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat automata B. Tada iz $B \in O(K)$ sledi da je $C \in K$. Međutim, kako je B i sam inicijalan (konačno generisan), to je $B \in K$, a onda je i $A \in O(K)$.

Koristeći upravo dokazanu inkluziju i rezultat (2), dobijamo $O^3(K) \subseteq O^2(K)$. Obratno, neka je $A \in O^2(K)$. Tada za svaki monogeni (konačno generisan) podautomat B automata A važi $B \in O(K)$. Odatle sledi da za proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat C automata B važi $C \in K$. Međutim, prema (1), $O(K)$ je zatvoren za podautomate, pa je $C \in O(K)$. Odatle je $B \in O^2(K)$, odnosno, $A \in O^3(K)$. Dokazali smo, dakle, $O^2(K) \subseteq O^3(K)$, a onda je i $O^2(K) = O^3(K)$.

(4) Dokazaćemo, najpre, relaciju $O\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} O(K_i)$. Kako je $\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq K_i$, za svako $i \in I$, koristeći rezultat (2) dobijamo $O\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) \subseteq O(K_i)$, za svako $i \in I$, a onda je i $O\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} O(K_i)$.

Obratno, neka je $A \in \bigcap_{i\in I} O(K_i)$. Tada je $A \in O(K_i)$, za svako $i \in I$. Znači, za proizvoljan monogeni (konačno generisani) podautomat B automata A je $B \in K_i$ za svako $i \in I$. Međutim, onda je $B \in \bigcap_{i\in I} K_i$, pa je $A \in O\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)$, što je i trebalo dokazati.

(5) Pretpostavimo da je klasa K zatvorena za podautomate (monogene, konačno generisane) i uočimo proizvoljan automat $A \in K$. Neka je B proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat automata A. Kako je klasa K zatvorena za podautomate, to je $B \in K$, a onda je $A \in O(K)$. Dakle, važi $K \subseteq O(K)$, a onda je, prema (2), $O(K) = O^2(K)$.

(6) Pretpostavimo da je klasa K zatvorena za homomorfne slike. Uočimo proizvoljan automat $A \in O(K)$. Neka je $\phi : A \to B$ epimorfizam automata. Treba dokazati da je $B \in O(K)$. Neka je C proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat automata B. Tada je $C\phi^{-1}$ monogeni (konačno generisan) podautomat automata A, pa je $C\phi^{-1} \in K$. Kako je K zatvorena za homomorfne slike, to je $C = C\phi^{-1}\phi \in K$, a odatle je $B \in O(K)$.

(7) Neka je klasa K zatvorena za podautomate i (konačne) direktne proizvode. Uočimo automate $A_i \in O(K)$, $i \in I$, i stavimo $A = \prod_{i\in I} A_i$. Neka je B proizvoljan monogeni (konačno generisan) podautomat od A. Tada su i $B\pi_i$, $i \in I$, monogeni (konačno generisani) podautomati automata A_i, $i \in I$, redom. Kako je $A_i \in O(K)$, to je $B\pi_i \in K$, a onda je, zbog zatvorenosti K za direktne proizvode, i $\prod_{i\in I} B\pi_i \in K$. Kako je klasa K zatvorena za podautomate i B podautomat automata $\prod_{i\in I} B\pi_i \in K$, to je $B \in K$. Dakle, $A \in O(K)$, što je i trebalo dokazati. U slučaju konačnog proizvoda, tj. kada ja skup I konačan, dokaz je sličan.

(8) Prvi deo tvrđenja je dokazan u (5). Obratno, pretpostavimo da važi $K \subseteq L(K)$. Dokazaćemo da je klasa K zatvorena za monogene podautomate. Neka je $A \in K$ i B monogeni podautomat automata A. Tada je $A \in L(K)$, a odatle je $B \in K$. Slično se iz $K \subseteq CL(K)$ može dokazati da je klasa K zatvorena za konačno generisane podautomate. $\square$

2.2. Lokalno povezani automati

U Odeljku 2.1 smo definisali operatore L i CL. Ovde ih primenjujemo na razne klase povezanih automata. Na taj način dobijamo neke nove klase automata, kao što su: lokalno povezani, lokalno trap-povezani, itd. U ovom odeljku dajemo karakterizacije tih klasa.

Podsetimo se da za dati automat A kažemo da je *povezan* ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ postoje reči $u, v \in X^*$ takve da važi $au = bv$, tj. ako je $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$. U skladu sa konceptom lokalne pripadnosti automata posmatranoj klasi, uvedenim u prethodnom odeljku, za automat A kažemo da je *lokalno povezan* ako je svaki njegov monogeni podautomat povezan.

U narednoj teoremi data je karakterizacija lokalno povezanih automata.

Teorema 2.2.1 *Sledeći uslovi su ekvivalentni za automat A:*

(i) *A je lokalno povezan;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall p, q \in X^*)(\exists u, v \in X^*)$ $apu = aqv$;

(iii) *A je direktna suma povezanih automata;*

(iv) *$D(H)$ je podautomat od A, za svaki podautomat H od A.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je A lokalno povezan automat i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada je $S(a)$ povezan, pa za proizvoljne $p, q \in X^*$ postoje $u, v \in X^*$ tako da je $apu = aqv$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Neka važi (ii) i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada, prema (ii), za proizvoljna stanja $ap, aq \in S(a)$, $p, q \in X^*$, postoje $u, v \in X^*$ tako da je $apu = aqv$, tj. $S(a)$ je povezan, odakle sledi da je A lokalno povezan.

(i)$\Rightarrow$(iii). Neka je A lokalno povezan automat. Definišimo relaciju ϱ na A na sledeći način:

$$a \,\varrho\, b \;\Leftrightarrow\; S(a) \cap S(b) \neq \varnothing.$$

Očigledno je da je ϱ refleksivna i simetrična. Prema Teoremi 1.5.1, tranzitivno zatvorenje relacije ϱ se poklapa sa najmanjom d.s. kongruencijom σ automata A.

Dokazaćemo da je ϱ tranzitivna relacija. Uočimo stanja $a, b, c \in A$ takva da važi $a \,\varrho\, b$ i $b \,\varrho\, c$, tj. $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$ i $S(b) \cap S(c) \neq \varnothing$. Dakle, postoje reči $u_1, v_1, u_2, v_2 \in X^*$ takve da je $au_1 = bv_1$ i $bu_2 = cv_2$. Kako je $bv_1, bu_2 \in S(b)$ i $S(b)$ je povezan automat, po pretpostavci, imamo da postoje $u, v \in X^*$ tako da važi $bv_1u = bu_2v$. Međutim, onda je

$$au_1u = bv_1u = bu_2v = cv_2v,$$

što daje $S(a) \cap S(c) \neq \varnothing$. Dakle, ϱ je tranzitivna, odnosno, $\varrho = \sigma$. Prema tome, ϱ je d.s. kongruencija na A.

Treba još dokazati da je svaka ϱ-klasa povezan automat. Neka je B proizvoljna ϱ-klasa i neka su $a, b \in B$ proizvoljni elementi. Tada iz $a\varrho b$ sledi $S(a) \cap S(b) \neq \varnothing$, pa za proizvoljno $c \in S(a) \cap S(b)$ važi $au = c = bv$, za neke $u, v \in X^*$. Prema tome, B je povezan automat, što je i trebalo dokazati.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka je A direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada je $a \in A_\alpha$, za neko $\alpha \in Y$, pa je i $S(a) \subseteq A_\alpha$. Kako je A_α povezan i kako je klasa svih povezanih automata zatvorena za podautomate, dobijamo da je i $S(a)$ povezan, odakle sledi da je A lokalno povezan.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Neka je H podautomat automata A i neka je $a \in D(H)$ proizvoljno stanje i $q \in X^*$ proizvoljna reč. Tada je $ap \in H$, za neko $p \in X^*$, pa, prema (ii), važi $apu = aqv$, za neke $u, v \in X^*$. Međutim, iz $ap \in H$ sledi $apu \in H$, tj. $aqv \in H$, pa je $aq \in D(H)$. Prema tome, $D(H)$ je podautomat od A.

(iv)$\Rightarrow$(iii). Prema Teoremi 1.5.2, A se može razložiti u direktnu sumu d.s. nerazloživih automata A_α, $\alpha \in Y$. Uočimo proizvoljne $\alpha \in Y$ i $a \in A_\alpha$. Prema Teoremi

1.5.2 važi $A_\alpha = F(a)$, gde je $F(a)$ najmanji filter od A koji sadrži a. Međutim, $D(S(a))$ je podautomat, pa je filter od A koji sadrži a. Znači, $A_\alpha = F(a) = D(S(a))$. Dakle, za proizvoljne $a, b \in A_\alpha$ imamo da je $b \in D(S(a))$, pa je $bv \in S(a)$, tj. $bv = au$, za neke $u, v \in X^*$. Prema tome, A_α je povezan automat, što je i trebalo dokazati. $\square$

Primetimo da povezan automat može imati najviše jedan trap. Zaista, ako bi automat A imao trapove a i b, tada za proizvoljne reči $u, v \in X^*$ važi $au = a \neq b = bv$, odakle sledi da A nije povezan automat.

Automat A nazivamo *trap-povezanim* ako je povezan i ima trap. Drugim rečima, A je trap-povezan automat ako i samo ako ima trap a_0 i za svako stanje $a \in A$ postoji reč $u \in X^*$ tako da je $au = a_0$. Svakako, ukoliko je svaki monogeni podautomat automata A trap-povezan, A nazivamo *lokalno trap-povezanim automatom*. U narednoj teoremi opisana je struktura trap-povezanih automata preko nekih njihovih razlaganja, a data je i karakterizacija preko nekih svojstava elemenata ovakvih automata.

Teorema 2.2.2. *Sledeći uslovi su ekvivalentni za automat A:*

(i) *A je lokalno trap-povezan;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall p, q \in X^*)(\exists u, v \in X^*)(\forall w \in X^*)\ apu = aqvw;$

(iii) *A je direktna suma trap-povezanih automata;*

(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog i trap-povezanog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog i trap-povezanog automata.*

Dokaz. (i)⇒(ii). Neka je A lokalno trap-povezan automat i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada je $S(a)$ sa jedinstvenim trapom a_0. Uočimo proizvoljne reči $p, q \in X^*$. Tada postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $apu = aqv = a_0$, i kako je a_0 trap, to je $aqv = aqvw$, za svako $w \in X^*$. Prema tome, važi (ii).

(ii)⇒(i). Pretpostavimo da važi (ii). Prema Teoremi 2.2.1, A je lokalno povezan. Uočimo proizvoljan element $a \in A$. Tada je $S(a)$ povezan. Da bismo dokazali da je i trap-povezan, treba još dokazati da ima trap. Zaista, imamo da postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $au = avw$, za svaku reč $w \in X^*$. Onda je $auw = avw^2 = au$, za proizvoljnu reč $w \in X^*$. Dakle, au je trap automata $S(a)$.

(i)⇒(iii). Prema Teoremi 2.2.1, A je direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Za proizvoljne $\alpha \in Y$ i $a \in A_\alpha$ je $S(a) \subseteq A_\alpha$ i $S(a)$ ima trap, pa i A_α ima trap. Dakle, A_α je trap-povezan.

(iii)⇒(iv). Neka je A direktna suma trap-povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Neka je $\alpha \in Y$ proizvoljan element i neka je a_α trap automata A_α. Neka je, dalje, $B = \{a_\alpha \mid \alpha \in Y\}$, i označimo sa σ najmanju d.s. kongruenciju na A, tj. kongruenciju čije su klase A_α, $\alpha \in Y$. Tada je B podautomat od A i $\varrho_B \cap \sigma = \Delta_A$, pa je A poddirektan proizvod automata A/B i A/σ. Nije teško uočiti da je A/σ diskretan automat koji je izomorfan automatu B. Sa druge strane, s obzirom da je B skup svih trapova u A, A/B ima tačno jedan trap, i kako su A_α trap-povezani automati za svako $\alpha \in Y$, to je i A/B trap-povezan. Dakle, važi (iv).

(iv)⇒(v). Ova implikacija važi prema definiciji poddirektnog proizvoda i paralelne kompozicije.

(v)⇒(i). Pretpostavimo da je automat $A \subseteq B \times C$ paralelna kompozicija diskretnog automata B i trap-povezanog automata C. Za proizvoljan element $(b, c) \in A$, monogeni podautomat od A generisan stanjem (b, c) je dat sa $S((b, c)) = \{b\} \times S(c)$, pa je izomorfan inicijalnom podautomatu $S(c)$ automata C. Međutim, $S(c)$ je trap-povezan kao podautomat trap-povezanog automata C. Dakle, $S((b, c))$ je trap-povezan, što je i trebalo dokazati. Prema tome, važi (i). □

Na kraju, zbog uske povezanosti sa tematikom ovog odeljka, navodimo poznat rezultat koji razmatra lokalno jako povezane automate. Automat A je *jako povezan* (prema definiciji koju je dao E. F. Moore u [78], ili *tranzitivan* prema F. Gécsegu i G. Thierrinu [48], kao i prema J. Lallementu [74] ili *prost* prema V. M. Glushkovu [50]) ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = b$, odnosno, ako je $S(a) = A$, za svako $a \in A$. Takođe, ako je svaki monogeni podautomat automata A jako povezan kažemo da je A *lokalno jako povezan* (ili *lokalno tranzitivan* prema F. Gécsegu i G. Thierrinu [48] ili *invertibilan* prema definiciji koju je dao V. M. Glushkov u [50]).

Teorema 2.2.3. (G. Thierrin [120]) *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *A je lokalno jako povezan;*

(ii) $(\forall a \in A)(\forall u \in X^*)(\exists v \in X^*)\ auv = a$;

(iii) *A je direktna suma jako povezanih automata.*

Razne druge karakterizacije lokalno jako povezanih automata dali su F. Gécseg i G. Thierrin [48], M. Ćirić i S. Bogdanović [28], kao i M. Ćirić, S. Bogdanović i T. Petković [32].

2.3. Lokalna zatvorenja varijeteta

U Odeljku 2.1 smo dokazali neke osnovne osobine operatora L i CL na klasama automata. Ovde izučavamo neka njihova posebna svojstva koja imaju kada se primene na varijetete automata. Tako dokazujemo da je CL identički operator na mreži varijeteta automata, dok je L operator zatvorenja koji se poklapa sa operatorom regularizacije na mreži varijeteta automata. Za varijetet automata $\boldsymbol{V}$ dokazujemo da se $L(\boldsymbol{V})$ sastoji od svih direktnih suma automata iz $\boldsymbol{V}$ i da je to najmanji varijetet koji sadrži varijetet

$\boldsymbol{V}$ i varijetet svih diskretnih automata $\mathbf{D}$. Takođe, kada je $\boldsymbol{V}$ zadat skupom identiteta, nalazimo skup identiteta koji definiše $L(\boldsymbol{V})$.

Sledeća teorema predstavlja osnovni rezultat ovog odeljka.

Teorema 2.3.1. *Operatori L i CL su operatori zatvorenja na mreži varijeteta automata.*

Štaviše, $CL(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$, za svaki varijetet automata $\boldsymbol{V}$.

Dokaz. Prvi deo tvrđenja sledi neposredno na osnovu tvrđenja (2), (4) i (5) iz Leme 2.1.1. Drugi deo tvrđenja je posledica činjenice da je neki identitet zadovoljen na datom automatu ako i samo ako je zadovoljen na svakom njegovom podautomatu generisanom sa dva stanja. □

Kažemo da automat A *lokalno zadovoljava* automatovni identitet $s = t$, u oznaci $A \models_L s = t$, ako $S(a) \models s = t$, za svako $a \in A$.

Neka je A automat i neka su $u, v \in X^*$. Tada definišemo relaciju $\varrho_{u,v}$ na A sa:

$$(a, b) \in \varrho_{u,v} \;\Leftrightarrow\; au = bv.$$

Relaciju $\varrho_{u,v}$ ćemo označavati sa $\varrho^A_{u,v}$, u slučaju kada je potrebno naznačiti da je definisana na A. Kao i obično, sa σ_A, ili prosto σ, označavamo najmanju d.s. kongruenciju na A.

U nastavku su data neka svojstva relacije $\varrho_{u,v}$.

Teorema 2.3.2. *Neka je A automat i neka su $u, v \in X^*$. Tada*

(a) *$A \models gu = gv$ ako i samo ako je $\varrho_{u,v}$ refleksivna relacija. U tom slučaju $\varrho_{u,v}$ jeste relacija ekvivalencije na A.*

(b) *$A \models_L gu = gv$ ako i samo ako $A \models gu = gv$.*

(c) *$A \models gu = hv$ ako i samo ako $\varrho_{u,v} = \nabla_A$.*

(d) *$A \models_L gu = hv$ ako i samo ako je $\varrho_{u,v}$ refleksivna i pozitivna. U tom slučaju je $\varrho_{u,v} = \sigma_A$.*

Dokaz. Prvi deo tvrđenja (a) je očigledan. Preostaje da dokažemo drugi deo, tj. da je $\varrho_{u,v}$ simetrična i tranzitivna relacija.

Neka je $(a, b) \in \varrho_{u,v}$, tj. $au = bv$. S obzirom da je zadovoljeno $A \models gu = gv$, imamo da je $au = av$ i $bu = bv$, pa je $bu = av$, odakle sledi $(b, a) \in \varrho_{u,v}$. Dakle, $\varrho_{u,v}$ je simetrična. Neka je $(a, b) \in \varrho_{u,v}$ i $(b, c) \in \varrho_{u,v}$, tj. važi $au = bv$ i $bu = cv$. Tada $A \models gu = gv$ daje $bu = bv$, odakle je $au = cv$, što implicira $(a, c) \in \varrho_{u,v}$. Prema tome, $\varrho_{u,v}$ je tranzitivna relacija, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenja (b) i (c) su jasna.

Preostaje da se dokaže (d). Pretpostavimo da važi $A \models gu = hv$. Tada $A \models gu = gv$, i prema (a) imamo da je $\varrho_{u,v}$ refleksivna. Nije teško uočiti da je $\varrho_{u,v}$ pozitivna. Obratno, pretpostavimo da je $\varrho_{u,v}$ refleksivna i pozitivna. Prema (a) imamo da je $\varrho_{u,v}$ relacija ekvivalencije na A, i prema Lemi 1.5.1, $\varrho_{u,v}$ je d.s. kongruencija na A. Međutim, iz $\varrho_{u,v} \subseteq \sigma_A$ i činjenice da je σ_A najmanja d.s. kongruencija na A, prema Teoremi 1.5.1, zaključujemo da je $\varrho_{u,v} = \sigma_A$. Da bismo dokazali da $A \models_L gu = hv$, uočimo proizvoljne $a \in A$ i $b, c \in S(a)$. Tada $b = au'$ i $c = av'$, za neke $u', v' \in X^*$, i kako je $\varrho_{u,v}$ d.s. kongruencija, to $(b, a) \in \varrho_{u,v}$ i $(a, c) \in \varrho_{u,v}$ daje $(b, c) \in \varrho_{u,v}$, tj. $bu = cv$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, $A \models_L gu = hv$. □

U Teoremi 2.3.1 videli smo da su L i CL operatori zatvorenja na mreži varijeteta automata, pri čemu su svi varijeteti automata CL-zatvoreni. Sledećom teoremom dajemo karakterizaciju svih L-zatvorenih varijeteta automata.

Teorema 2.3.3. *Za varijetet automata* $\boldsymbol{V}$ *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{V}$ *je regularan varijetet;*

(ii) $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$*;*

(iii) $\mathbf{D} \subseteq \boldsymbol{V}$*;*

(iv) $D_2 \in \boldsymbol{V}$.

Dokaz. (i)⇒(ii). Pretpostavimo da je $\boldsymbol{V}$ regularan varijetet. Prema delu (b) Teoreme 2.3.2, za proizvoljan automat A važi $A \models_L \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$ ako i samo ako $A \models \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, i kako je $\mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V}) = \mathrm{Id}(\boldsymbol{V})$, to sledi $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$.

(ii)⇒(iii). Za svaki diskretan automat D i svaki varijetet $\boldsymbol{V}$ važi $D \in L(\mathbf{O}) \subseteq L(\boldsymbol{V})$, pa (ii) daje $D \in \boldsymbol{V}$, što dokazuje (iii).

(iii)⇒(iv). Ova implikacija je trivijalna.

(iv)⇒(i). Ako je neki neregularan identitet zadovoljen na automatima iz $\boldsymbol{V}$, tada $D_2 \notin \boldsymbol{V}$, što je u suprotnosti sa (iv). Znači, samo regularni identiteti mogu važiti na $\boldsymbol{V}$, tj. $\boldsymbol{V}$ je regularan varijetet. □

Napomenimo da se ekvivalencija uslova (i) i (iv) nalazi u radu B. Jónssona i E. Nelsona [67] kao Posledica 2.8.

Kao posledicu Teoreme 2.3.3 dobijamo sledeći rezultat koji se odnosi na neregularne varijetete automata.

Posledica 2.3.1. *Za varijetet automata $\boldsymbol{V}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$\boldsymbol{V}$ je neregularan varijetet;*

(ii) *$\mathbf{D} \nsubseteq \boldsymbol{V}$;*

(iii) *$D_2 \notin \boldsymbol{V}$;*

(iv) *$\mathbf{D} \cap \boldsymbol{V} = \mathbf{O}$;*

(v) *$\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}$.*

Dokaz. Ekvivalencija uslova (i), (ii) i (iii) je neposredna posledica Teoreme 2.3.3, dok je ekvivalencija uslova (iii) i (iv) očigledna.

Implikacija (i)⇒(v) je rezultat dat u Posledici 1.4.1, a nije teško uočiti da važi i obratna implikacija. □

Koristeći svojstva relacije $\varrho_{u,v}$ data u Teoremi 2.3.2, u narednoj teoremi pokazujemo kako se polazeći od skupa identiteta koji određuje neregularni varijetet automata $\boldsymbol{V}$ može dobiti skup identiteta koji definiše varijetet $L(\boldsymbol{V})$.

Teorema 2.3.4. *Neka je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata determinisan skupom identiteta Σ i označimo sa Σ' skup identiteta kog čine:*

1° *svi identiteti iz Σ_R;*

2° *fiksirani identitet $gu = gv \in \Sigma_N$ i svi identiteti oblika $gxu = gv$ za $x \in X$;*

3° *svi identiteti oblika $gu' = guu'$, $guu' = gvv'$ i $gv' = gvv'$ koji su pridruženi identitetima $gu' = hv' \in \Sigma_N \setminus \{gu = hv\}$.*

Tada je $L(\boldsymbol{V})$ varijetet automata određen skupom identiteta Σ'.

Dokaz. Treba dokazati da za proizvoljan automat A važi $A \models_L \Sigma$ ako i samo ako $A \models \Sigma'$.

Pretpostavimo $A \models_L \Sigma$. Tada $A \models \Sigma_R$, prema delu (b) Teoreme 2.3.2. Fiksiramo proizvoljan identitet $gu = hv \in \Sigma_N$. Jasno je da je onda $A \models gu = gv$ i $gxu = gv$, za svako $x \in X$. Uočimo proizvoljan identitet $gu' = hv' \in \Sigma_N$ različit od $gu = hv$. Ako je B automat takav da $B \models gu' = hv'$, lako se proverava da $B \models gu' = hu'$ i $B \models gv' = hv'$. Prema tome, $A \models_L gu' = hv'$ daje $A \models_L gu' = hu'$ i $A \models_L gv' = hv'$. Međutim, odavde je $A \models gu' = guu'$ i $A \models gv' = gvv'$. Štaviše, iz $A \models_L gu' = hv'$ sledi $A \models guu' = gvv'$. Dakle, dokazali smo $A \models \Sigma'$.

Obratno, pretpostavimo da $A \models \Sigma'$. Tada $A \models \Sigma_R$, što neposredno daje $A \models_L \Sigma_R$, pa preostaje da se dokaže $A \models \Sigma_N$. Iz $A \models gu = gv$ i tvrđenja (a) Teoreme 2.3.2 imamo da je $\varrho_{u,v}$ kongruencija na A, i $A \models gxu = gv$, za svako $x \in X$, što dalje daje da je $\varrho_{u,v}$ d.s. kongruencija na A. Prema tvrđenju (d) Teoreme 2.3.2 dobijamo $A \models_L gu = hv$.

Uočimo proizvoljno $gu' = hv' \in \Sigma_N$ različit od $gu = hv$, i proizvoljne $a \in A$, $b, c \in S(a)$. Kao što smo dokazali, $A \models_L gu = hv$, pa $bu = cv$, i iz $A \models gu' = guu'$, $A \models guu' = gvv'$ i $A \models gv' = gvv'$ sledi $bu' = buu' = cvv' = cv'$. Prema tome, $A \models_L gu' = hv'$. Dakle, $A \models_L \Sigma$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 2.3.2. *Neka je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata određen skupom identiteta Σ i neka je Σ'' skup identiteta kog čine:*

1° *svi identiteti iz Σ_R;*

2° *svi identiteti oblika $gxw = gw$, gde je $x \in X$ i w je fiksirana usmeravajuća reč za $\boldsymbol{V}$;*

3° *svi identiteti oblika $gu = gwu$, $gu = gv$ i $gv = gwv$ pridruženi identitetima $gu = hv \in \Sigma_N$.*

Tada je $L(\boldsymbol{V})$ varijetet automata određen skupom identiteta Σ''.

Primetimo da, u opštem slučaju, metod prikazan u Teoremi 2.3.4 daje skup identiteta sa manjim brojem elemenata od metoda prikazanog u Posledici 2.3.2.

Inače, rezultat dobijen u Posledici 2.3.2 je u terminima unarnih algebri dokazao J. Płonka u [93], dok je drugi dokaz dala E. Graczyńska u [52]. Preciznije, oni su taj rezultat dokazali ne za varijetet $L(\boldsymbol{V})$, već za varijetet $R(\boldsymbol{V})$, gde je R operator regularizacije neregularnog varijeteta. Međutim, to je isto, jer narednom teoremom dokazujemo da se operatori lokalnog zatvorenja i regularizacije na mreži varijeteta automata poklapaju.

Pre nego što formulišemo i dokažemo pomenutu teoremu, napomenimo da je za varijetete $\boldsymbol{V}_1$ i $\boldsymbol{V}_2$ sa $\boldsymbol{V}_1 \vee \boldsymbol{V}_2$ označen supremum ta dva varijeteta u mreži varijeteta automata.

Teorema 2.3.5. *Neka je $\boldsymbol{V}$ varijetet automata. Tada je*

$$L(\boldsymbol{V}) = R(\boldsymbol{V}) = \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V} = \mathbf{D} \vee \boldsymbol{V}.$$

Dokaz. Dokazi jednakosti $R(\boldsymbol{V}) = \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V} = \mathbf{D} \vee \boldsymbol{V}$ se mogu naći u radovima J. Płonke [93, 94], ali će zbog potpunosti ovde biti dati novi dokazi.

Ako je $\boldsymbol{V}$ regularan varijetet tada je $\mathbf{D} \subseteq \boldsymbol{V}$, prema Teoremi 2.3.3, pa je

$$\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = L(\boldsymbol{V}) = R(\boldsymbol{V}).$$

Nije teško uočiti da važi $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$. Naravno, svaki automat iz $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$ zadovoljava svaki regularan identitet zadovoljen na $\boldsymbol{V}$, pa je $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{V}$, jer je $\boldsymbol{V}$ regularan. Dakle, $\boldsymbol{V} = \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$.

Pretpostavimo sada da je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet. Prema Teoremi 1.5.2, A je direktna suma d.s. nerazloživih automata A_α, $\alpha \in Y$. Odgovarajuća d.s. kongruencija na A je najmanja d.s. kongruencija A označena sa σ, i prema uslovu (d) iz Teoreme 2.3.2, $\sigma = \varrho_{u,v}$, za svaki par $(u,v) \in X^* \times X^*$ takav da je $gu = hv \in \mathrm{Id}_N(\boldsymbol{V})$. Odavde sledi da $A_\alpha \models \mathrm{Id}_N(\boldsymbol{V})$, za svako $\alpha \in Y$. Sa druge strane, prema (b) Teoreme 2.3.2, $A_\alpha \models \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, za svako $\alpha \in Y$. Prema tome, važi $A_\alpha \models \mathrm{Id}(\boldsymbol{V})$, tj. $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, za svako $\alpha \in Y$, što znači da $A \in \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$. Dakle, dokazali smo da je $L(\boldsymbol{V}) \subseteq \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$.

Uočimo, sada, proizvoljan automat $A \in \mathbf{D} \circ \boldsymbol{V}$. Tada je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, gde je $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, za svako $\alpha \in Y$. Kako je svaki monogeni podautomat od A takođe i podautomat od A_α, za neko $\alpha \in Y$, i $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, to se i on nalazi u $\boldsymbol{V}$, što znači da je $A \in L(\boldsymbol{K})$. Dakle, $\mathbf{D} \circ \boldsymbol{V} \subseteq L(\boldsymbol{V})$.

Ako je $A \in L(\boldsymbol{V})$, tada $A \models_L \mathrm{Id}(\boldsymbol{V})$, pa $A \models_L \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, i prema uslovu (b) iz Teoreme 2.3.2, $A \models \mathrm{Id}_R(\boldsymbol{V})$, odnosno $A \in R(\boldsymbol{V})$. Dakle, $L(\boldsymbol{V}) \subseteq R(\boldsymbol{V})$.

Sa druge strane, prema Teoremi 2.3.4, $L(\boldsymbol{V})$ je regularan varijetet koji sadrži $\boldsymbol{V}$, pa je $R(\boldsymbol{V}) \subseteq L(\boldsymbol{V})$.

Dalje, $\boldsymbol{V} \subseteq R(\boldsymbol{V})$ i $\mathbf{D} \subseteq R(\boldsymbol{V})$, prema Teoremi 2.3.3, pa je $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V} \subseteq R(\boldsymbol{V})$. Obratno, $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V}$ je regularan varijetet, prema Teoremi 2.3.3, koji sadrži $\boldsymbol{V}$, pa je $R(\boldsymbol{V}) \subseteq \mathbf{D} \vee \boldsymbol{V}$. Ovim je dokaz završen. $\square$

2.4. Lokalna zatvorenja uopštenih varijeteta

U prethodnom odeljku smo razmatrali operatore L i CL primenjene na varijetete automata. U ovom odeljku izučavamo njihove osobine kada se primene na uopštene varijetete automata. Kao što ćemo videti postoje bitne razlike u ponašanju tih operatora na mreži varijeteta automata i mreži uopštenih varijeteta automata. Na primer, operator CL nije identički operator na mreži uopštenih varijeteta, dok to jeste na mreži varijeteta, kao i na mreži pseudovarijeteta automata. Takođe, dokazali smo da su regularni varijeteti automata L-zatvoreni. Sa druge strane, regularni uopšteni varijeteti nisu L-zatvoreni. Međutim, pokazuje se da su regularni pseudovarijeteti zatvoreni za oba operatora.

U narednoj teoremi dato je jedno od osnovnih tvrđenja ovog odeljka.

Teorema 2.4.1. *Operatori L i CL su operatori zatvorenja na mreži uopštenih varijeteta automata.*

Dokaz. Sledi neposredno prema (5), (6) i (7) iz Leme 2.1.1. $\square$

Sledeća teorema razmatra neke specijalne uopštene varijetete automata.

Teorema 2.4.2. *Neka je $\boldsymbol{K}$ uopšteni varijetet automata. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbf{Dir}$;

(ii) $\mathbf{D} \cap \boldsymbol{K} = \boldsymbol{O}$;

(iii) $\mathbf{D} \nsubseteq \boldsymbol{K}$;

(iv) $D_2 \notin K$.

Ako je $\boldsymbol{K}$ ultimativno definisan usmerenim skupom identiteta $\Sigma = \{s_i = t_i\}_{i \in I}$, tada je svaki od gornjih uslova ekvivalentan uslovu:

(v) *skup neregularnih identiteta iz Σ je kofinalan u Σ.*

Dokaz. Implikacije (i)$\Rightarrow$(ii) i (ii)$\Rightarrow$(iii) su očigledne.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Svaki diskretan automat može biti prikazan kao poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih automata koji su, s obzirom da su homomorfne slike diskretnog automata, takođe diskretni automati. Međutim, jedini netrivijalan poddirektno nerazloživ diskretan automat je dvoelementni diskretan automat D_2. Prema tome, svaki diskretan automat jeste poddirektan stepen automata D_2. Ako bi bilo $D_2 \in \boldsymbol{K}$, tada $\mathbf{D} \subseteq \boldsymbol{K}$, pošto je klasa $\boldsymbol{K}$ zatvorena za direktne stepene i podautomate. Prema tome, $D_2 \notin \boldsymbol{K}$, tj. važi (iv).

(iv)$\Rightarrow$(v). Pretpostavimo da (v) ne važi. Tada postoji $k \in I$ tako da je za svako $i \succcurlyeq k$ identitet $s_i = t_i$ regularan. Međutim, onda $D_2 \models s_i = t_i$ za svako $i \succcurlyeq k$, pa $D_2 \models_u \Sigma$, tj. $D_2 \in \boldsymbol{K}$, što je u suprotnosti sa (iv). dakle, (v) važi.

(v)$\Rightarrow$(i). Uočimo proizvoljan automat $A \in \boldsymbol{K}$. Tada $A \models_u \Sigma$, pa postoji $k \in I$ tako da $A \models s_i = t_i$, za svako $i \succcurlyeq k$. Prema (v) imamo da postoji $i \succcurlyeq k$ tako da je $s_i = t_i$ neregularan identitet. Tada prema Posledici 1.4.1 sledi da je A direktabilan automat. $\square$

Uopšteni varijetet automata $\boldsymbol{K}$ nazivamo *neregularnim uopštenim varijetetom* ako zadovoljava bilo koji od uslova Teoreme 2.4.2. U suprotnom, $\boldsymbol{K}$ nazivamo *regularnim uopštenim varijetetom*. Imajući u vidu Lemu 1.4.1 i Teoremu 2.4.2, $\boldsymbol{K}$ je regularan uopšteni varijetet ako i samo ako može biti ultimativno definisan usmerenim skupom regularnih identiteta.

Iz definicije direktabilnog automata neposredno sledi da je klasa $\mathbf{Dir}$ svih direktabilnih automata uopšteni varijetet, kao usmerena unija varijeteta $\mathbf{Dir}_u$, $u \in X^*$. S obzirom na Posledicu 1.4.1 imamo da ne postoji najveći neregularan varijetet automata. Sa druge strane, iz prethodne teoreme dobijamo još jednu značajnu osobinu uopštenog varijeteta $\mathbf{Dir}$.

Posledica 2.4.1. *Uopšteni varijetet* $\mathbf{Dir}$ *direktabilnih automata je najveći neregularan uopšteni varijetet automata.*

Ponašanje operatora L i CL na regularnim i neregularnim uopštenim varijetetima automata prikazano je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.4.3. *Neka je $\boldsymbol{K}$ uopšteni varijetet automata.*

(a) *Ako je $\boldsymbol{K}$ neregularan, tada je $CL(\boldsymbol{K}) = L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn}$.*

(b) *Ako je $\boldsymbol{K}$ regularan, tada je $L(\boldsymbol{K}) = CL(\boldsymbol{K})$.*

Dokaz. (a) Kao što je ranije rečeno, $CL(\boldsymbol{K}) \subseteq L(\boldsymbol{K})$. Štaviše, ako je $A \in CL(\boldsymbol{K})$, tada za proizvoljne $a, b \in A$ imamo da je $S(a, b) \in \boldsymbol{K} \subseteq \mathbf{Dir} \subseteq \mathbf{Conn}$, odakle sledi $A \in \mathbf{Conn}$. Prema tome,

$$CL(\boldsymbol{K}) \subseteq L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn}.$$

Obratno, pretpostavimo da je $A \in L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn}$. Uočimo proizvoljan konačno generisani podautomat B automata A. Tada

$$B = S(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{m=1}^{n} S(a_m),$$

za neko $n \in \mathbb{N}$ i neke $a_1, \ldots, a_n \in B$. Neka je $\boldsymbol{K}$ ultimativno definisan usmerenim skupom identiteta $\{s_i = t_i\}_{i \in I}$. Za svako $m \in [1, n]$ imamo da je $S(a_m) \in \boldsymbol{K}$, jer $A \in L(\boldsymbol{K})$, pa postoji $k_m \in I$ tako da $S(a_m) \models s_i = t_i$, za svako $i \succcurlyeq k_m$. Kako je I usmeren kvazi-uređen skup, to postoji $k \in I$ tako da je $k \succcurlyeq k_m$, za svako $m \in [1, n]$. Uočimo proizvoljno $i \succcurlyeq k$. Tada $i \succcurlyeq k_m$, pa $S(a_m) \models s_i = t_i$, za svako $m \in [1, n]$. Ako je $s_i = t_i$ regularan identititet, tada jasno $B \models s_i = t_i$. Pretpostavimo da je $s_i = t_i$ neregularan identitet, tj. oblika je $gu_i = hv_i$, za neke $u_i, v_i \in X^*$. Kako $S(a_m) \models gu_i = hv_i$, to je, prema Teoremi 1.4.1, $u_i, v_i \in DW(S(a_m))$, za svako $m \in [1, n]$. Neka su, sada, $b, c \in B$ proizvoljni elementi. Tada $b = a_l p$ i $c = a_m q$, za neke $l, m \in [1, n]$ i $p, q \in X^*$. Sa druge strane, $A \in \mathbf{Conn}$, pa $a_l u = a_m v$, za neke $u, v \in X^*$. Imajući u vidu da je $u_i \in DW(S(a_l))$ i $v_i \in DW(S(a_m))$ sledi da je $a_l p u_i = a_l u u_i$ i $a_m q v_i = a_m v v_i$, odakle je $a_l u = a_m v \in S(a_l) \cap S(a_m)$ i $S(a_l), S(a_m) \models gu_i = hv_i$ što daje $a_l u u_i = a_m v v_i$. Znači,

$$bu_i = a_l p u_i = a_l u u_i = a_m v v_i = a_m q v_i = c v_i.$$

Prema tome, $B \models gu_i = hv_i$, pa smo dokazali da $B \models s_i = t_i$, za svako $i \succcurlyeq k$, tj. $B \in \boldsymbol{K}$. Konačno, to znači da $A \in CL(\boldsymbol{K})$ i, kako smo već dokazali da $L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn} \subseteq CL(\boldsymbol{K})$, to je $L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn} = CL(\boldsymbol{K})$, što je i trebalo dokazati.

(b) Jasno da je $CL(K) \subseteq L(K)$. Dokaz obratne inkluzije je sadržan u dokazu dela (a) koji razmatra slučaj kada su svi identiteti $s_i = t_i$ regularni. $\square$

Takođe, operator L primenjen na neregularne uopštene varijetete automata ima veoma zanimljivo svojstvo dato u narednoj teoremi.

Teorema 2.4.4. *Neka je $\boldsymbol{K}$ neregularan uopšteni varijetet automata. Tada je*

$$L(\boldsymbol{K}) = \mathbf{D} \circ CL(\boldsymbol{K}) = CL(\mathbf{D} \circ \boldsymbol{K}).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in L(\boldsymbol{K})$. Tada je A lokalno povezan, pa je, prema Teoremi 2.2.1, A direktna suma povezanih automata A_α, $\alpha \in Y$. Za svako $\alpha \in Y$, svaki monogeni podautomat od A_α je monogeni podautomat od A, pa $A \in L(\boldsymbol{K})$ daje $A_\alpha \in L(\boldsymbol{K})$. Dakle, $A_\alpha \in L(\boldsymbol{K}) \cap \mathbf{Conn} = CL(\boldsymbol{K})$, prema Teoremi 2.4.3. Dakle, dokazali smo da $A \in \mathbf{D} \circ CL(\boldsymbol{K})$. Prema tome,

$$L(\boldsymbol{K}) \subseteq \mathbf{D} \circ CL(\boldsymbol{K}).$$

Uočimo proizvoljan automat $A \in \mathbf{D} \circ CL(\boldsymbol{K})$. Tada je A direktna suma automata A_α, $\alpha \in Y$, i $A_\alpha \in CL(\boldsymbol{K})$, za svako $\alpha \in Y$. Neka je B proizvoljan konačno generisani podautomat od A. Označimo $Z = \{\alpha \in Y \mid B \cap A_\alpha \neq \varnothing\}$, i za $\alpha \in Z$ stavimo $B_\alpha = B \cap A_\alpha$. Tada je B direktna suma automata B_α, $\alpha \in Z$, i za svako $\alpha \in Z$, B_α je konačno generisan podautomat od A_α. Imajući u vidu da je $A_\alpha \in CL(\boldsymbol{K})$, dobijamo $B_\alpha \in \boldsymbol{K}$, za svako $\alpha \in Z$. Prema tome, $B \in \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{K}$, odakle je $A \in CL(\mathbf{D} \circ \boldsymbol{K})$, što znači da je

$$\mathbf{D} \circ CL(\boldsymbol{K}) \subseteq CL(\mathbf{D} \circ \boldsymbol{K}).$$

Konačno, uočimo proizvoljan automat $A \in CL(\mathbf{D} \circ \boldsymbol{K})$ i stanje $a \in A$. Tada $S(a) \in \mathbf{D} \circ \boldsymbol{K}$, i kako je svaki monogeni automat nerazloživ u direktnu sumu, to je $S(a) \in \boldsymbol{K}$. Dakle, $A \in L(\boldsymbol{K})$, pa je

$$CL(\mathbf{D} \circ \boldsymbol{K}) \subseteq L(\boldsymbol{K}),$$

čime je dokaz završen. $\square$

Navedimo sada neke razlike u ponašanju operatora lokalnog zatvorenja kada se on primenjuje na varijetete, odnosno na uopštene varijetete, automata.

Napomena 2.4.1. S obzirom na rezultate Teorema 2.3.3 i 2.3.5, tj. da za regularan varijetet automata $\boldsymbol{V}$ važi $L(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$, moglo bi se očekivati da isto važi i za regularan uopšteni varijetet $\boldsymbol{K}$. Međutim, uzimajući za primer uopšteni varijetet svih reverzno definitnih automata i automat A koji je direktna suma automata A_n, $n \in \mathbb{N}$, pri čemu A_n jeste reverzno n-definitan automat, dobijamo da je $A \in L(\boldsymbol{K}) \setminus \boldsymbol{K}$. Ovim je, takođe, dokazano da ako se uopšteni varijetet $\boldsymbol{K}$ može prikazati kao usmerena unija varijeteta $\boldsymbol{V}_i$, $i \in I$, tj. iz $\boldsymbol{K} = \bigcup_{i\in I} \boldsymbol{V}_i$ tada ne sledi da je $L(\boldsymbol{K}) = \bigcup_{i\in I} L(\boldsymbol{V}_i)$.

Međutim, za pseudovarijetete se može dokazati sledeći rezultat.

Teorema 2.4.5. *Neka je $\boldsymbol{P}$ regularan pseudovarijetet automata. Tada je $\boldsymbol{P} = L(\boldsymbol{P}) = CL(\boldsymbol{P})$.*

Dokaz. Jasno je da je $\boldsymbol{P} \subseteq CL(\boldsymbol{P}) \subseteq L(\boldsymbol{P})$. Treba još dokazati inkluziju $L(\boldsymbol{P}) \subseteq \boldsymbol{P}$. Pretpostavimo da se pseudovarijetet $\boldsymbol{P}$ može ultimativno definisati nizom identiteta $[s_i = t_i]_{i\in\mathbb{N}}$. Kako je $\boldsymbol{P}$ regularan, to su ovi identiteti oblika $gu_i = gv_i$, za svako $i \in \mathbb{N}$. Neka je $A \in L(\boldsymbol{P})$ proizvoljan automat. Tada za svako $a \in A$ automat $S(a)$ ultimativno zadovoljava niz identiteta $[gu_i = gv_i]_{i\in\mathbb{N}}$, tj. postoji $k_a \in \mathbb{N}$ tako da za svako $i \geq k_a$ važi $auu_i = auv_i$, za svako $u \in X^*$. Kako je A konačan automat, to postoji $k \geq k_a$, za svako $a \in A$, tako da je za svako $i \in \mathbb{N}$ takvo da je $i \geq k$ važi $au_i = av_i$, tj. $A \models gu_i = gv_i$. Odatle neposredno sledi da je $A \in \boldsymbol{P}$. $\square$

Glava 3

Direktabilni automati i njihove polugrupe prelaza

U ovoj glavi govorimo o nekim konkretnim klasama automata koje su sa velikim interesovanjem izučavane od strane mnogih poznatih autora u oblasti Teorije automata. Jednu od klasa koja će zauzimati centralno mesto u našim razmatranjima čine direktabilni automati, koji se po prvi put sreću u radu J. Černýa [25] i knjizi P. H. Starkea [110], a potom su izučavani u radovima mnogih drugih autora. Kao što smo videli u prethodnoj glavi, klasa svih direktabilnih automata je, pored ostalog, značajna i kao najveći neregularni uopšteni varijetet automata.

Pored klase direktabilnih automata, govorimo i o raznim njenim podklasama. Tako će biti reči o definitnim automatima, koje su, nezavisno jedni od drugih, uveli S. C. Kleene u [68] i M. Perles, M. O. Rabin i E. Shamir u [84], a potom i o nilpotentnim automatima, uvedenim u radu L. N. Shevrina [107], a potom detaljno izučavanih u poznatoj knjizi F. Gécsega i I. Peáka [46].

Sa druge strane, biće reči i o automatima koji su, u nekom smislu, antipodni direktabilnim automatima. To su takozvani utrapljivi automati, koji su uvedeni nedavno, u radu T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića [86]. Automati koji su istovremeno i direktabilni i utrapljivi, nazvani jedno-utrapljivim automatima, takođe su uvedeni u tom radu. Drugi specijalan slučaj utrapljivih automata, o kome će ovde takođe biti dosta reči, je klasa svih reverzno definitnih automata, koji se, kako im i samo ime kaže, mogu shvatiti kao izvesni antipodi definitnih automata. Te automate prvi put izučavaju J. A. Brzozowski u radu [23] i A. Ginzburg u knjizi [49]. Kao što je poznato, presek klase definitnih i klase reverzno definitnih automata je klasa nilpotentnih automata.

Osim ovih specijalizacija direktabilnih automata i njima antipodnih automata, biće reči i o raznim njihovim uopštenjima. Jedna vrsta tih uopštenja su ona dobijena korišćenjem operatora lokalnog zatvorenja. Tako, na primer, njihovom primenom na u-direktabilne i direktabilne automate dobijamo takozvane lokalno u-direktabilne, uniformno lokalno direktabilne i lokalno direktabilne automate, a slične klase automata dobijamo primenom tog operatora na jedno-utrapljive, definitne i nilpotentne automate. Drugačijim uopštenjem pojma direktabilnog automata dobijamo klasu uopšteno direktabilnih automata koja, kao što ćemo videti, većinu ostalih klasa sadrži kao svoje podklase. Ti automati igraće ključnu ulogu u našim razmatranjima, jer i oni i njihove polugrupe prelaza imaju veoma zanimljiva strukturna svojstva. Uopšteno direktabilni automati uvedeni su takođe u napred pomenutom radu T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića. Biće reči i o još jednom važnom specijalnom slučaju tih automata, o uopšteno definitnim automatima, uvedenim od strane A. Ginzburga u [49]. Kao što ćemo videti, klasa uopšteno direktabilnih automata je najšira među razmatranim klasama, tj. sadrži sve ostale pomenute klase.

Sve ove navedene klase automata izučavane su takođe i u radovima J. Černýa, A. Piricke i B. Rosenauerové, [26], M. Itoa i J. Duskea, [66], J. E. Pina, [89], [90], kao i u radu M. Steinbya, [111]. U novije vreme, ove klase razmatraju u svojim radovima B. Imreh i M. Steinby, [65], T. Petković, M. Ćirić i S. Bogdanović, [86], M. Ćirić, B. Imreh i M. Steinby, [33], S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković i M. Steinby, [21], [22].

U ovoj glavi postavljaju se dva glavna zadatka. Prvi od njih je da se opišu strukturna svojstva automata iz napred pomenutih klasa. To će biti činjeno korišćenjem raznih metoda dekompozicije i kompozicije automata kao što su direktne sume automata, ekstenzije automata, poddirektni proizvodi, paralelne kompozicije itd. Sa druge strane, postavlja se i pitanje povezanosti strukture izučavanih automata i strukture njihovih polugrupa prelaza. I na to pitanje će ovde biti dat potpun odgovor. Naime, biće data potpuna karakterizacija polugrupa prelaza za automate iz svih napred pomenutih klasa automata.

Glava se sastoji iz pet odeljaka. Odeljak 3.1 je uvodnog karaktera. Tu se nalaze definicije klasa automata koje su u nastavku razmatrane. U odeljku 3.2 su data neka važna svojstva jezika svih usmeravajućih, utrapljivih, jedno-utrapljivih, i nekih drugih skupova reči. Treći odeljak je posvećen izučavanju algebarskih svojstava klasa uvedenih u prvom odeljku. Pokazaće se da su neke od njih varijeteti automata, dok su neke uopšteni varijeteti automata. Takođe su razmatrane i međusobne relacije između ovih klasa. U odeljcima 3.4 i 3.5 su opisivane polugrupe prelaza automata koje se nalaze u klasama uopšteno direktabilnih, uopšteno definitnih automata ili u nekim njihovim važnim podklasama. Takođe su automati iz tih klasa prikazani kao kompozicije automata iz nekih drugih klasa.

Svi rezultati prikazani u ovoj glavi su novi i originalni.

3.1. Direktabilni automati: Uopštenja i specijalizacije

Neke od klasa automata sa kojima će se raditi u ovoj glavi, one najpoznatije, definisane su u prvoj glavi. Ovde dajemo definicije i oznake za neke druge, njima bliske klase automata, a zbog potpunosti i lakšeg praćenja teksta ponavljamo i jedan deo definicija i oznaka iz prve glave. Kao što smo već pomenuli, klase sa kojima radimo su klasa direktabilnih automata, izvesne njene podklase, njima antipodni automati i razna uopštenja, među kojima je, kao što ćemo videti, najznačajnija klasa uopšteno direktabilnih automata.

Neka je $u \in X^*$ proizvoljna reč. Tada uvodimo sledeće definicije: Za automat A kažemo da je

- *u-direktabilan*, ako je $au = bu$, za sve $a, b \in A$, i u tom slučaju za reč u kažemo da je *usmeravajuća reč* automata A;
- *u-utrapljiv*, ako je $au \in \mathrm{Tr}(A)$, za svako $a \in A$, i u tom slučaju za reč u kažemo da je *utrapljujuća reč* automata A;
- *jedno-u-utrapljiv*, ako je u-utrapljiv i ima tačno jedan trap, pri čemu tada za reč u kažemo da je *jedno-utrapljujuća reč* automata A;
- *uopšteno u-direktabilan*, ako je $auvu = au$, za sve $a \in A$ i $v \in X^*$, pri čemu tada za reč u kažemo da je *uopšteno usmeravajuća reč* automata A;
- *lokalno u-direktabilan*, ako svaki monogeni podautomat jeste u-direktabilan, i tada za reč u kažemo da je *lokalno usmeravajuća reč* automata A;
- *lokalno jedno-u-utrapljiv*, ako svaki monogeni podautomat jeste jedno-u-utrapljiv, i tada za reč u kažemo da je *lokalno jedno-utrapljujuća reč* automata A.

Sa druge strane, ako je $k \in \mathbb{N}^0$, tada za automat A kažemo da je

- *k-definitan*, ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste usmeravajuća reč automata A;
- *reverzno k-definitan*, ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste utrapljujuća reč automata A;
- *k-nilpotentan*, ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste jedno-utrapljujuća reč automata A;
- *uopšteno k-definitan*, ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste uopšteno usmeravajuća reč automata A;
- *lokalno k-definitan*, ako je svaka reč iz $X^{\geq k}$ lokalno usmeravajuća reč automata A;
- *lokalno k-nilpotentan*, ako svaka reč iz $X^{\geq k}$ jeste lokalno jedno-utrapljijuća reč automata A.

Oznake koje ćemo koristiti za označavanje ovako definisanih klasa automata uvešćemo uz pomoć Tabele 3.1.1.

oznaka	klasa svih automata koji su
$\mathbf{Dir}_u$	u-direktabilni
$\mathbf{Trap}_u$	u-utrapljivi
$\mathbf{OTrap}_u$	jedno-u-utrapljivi
$\mathbf{GDir}_u$	uopšteno u-direktabilni
$\mathbf{LDir}_u$	lokalno u-direktabilni
$\mathbf{LOTrap}_u$	lokalno jedno-u-utrapljivi
$\mathbf{Def}_k$	k-definitni
$\mathbf{RDef}_k$	reverzno k-definitni
$\mathbf{Nilp}_k$	k-nilpotentni
$\mathbf{GDef}_k$	uopšteno k-definitni
$\mathbf{LDef}_k$	lokalno k-definitni
$\mathbf{LNilp}_k$	lokalno k-nilpotentni

Tabela 3.1.1

Primetimo da se, u skladu sa njihovom definicijom, kao i definicijom operatora lokalnog zatvorenja L, klase $\mathbf{LDir}_u$, $\mathbf{LOTrap}_u$, $\mathbf{LDef}_k$ i $\mathbf{LNilp}_k$ mogu predstaviti i u sledećem obliku:

$$\mathbf{LDir}_u = L(\mathbf{Dir}_u), \quad \mathbf{LOTrap}_u = L(\mathbf{OTrap}_u),$$
$$\mathbf{LDef}_k = L(\mathbf{Def}_k), \quad \text{i} \quad \mathbf{LNilp}_u = L(\mathbf{Nilp}_u).$$

Sa druge strane, Tabelom 3.1.2 dajemo i oznake za skupove reči (jezike) pridružene automatu A u skladu sa prethodnim definicijama.

oznaka	skup svih reči iz X^* koje za automat A jesu
$DW(A)$	usmeravajuće reči
$LDW(A)$	lokalno usmeravajuće reči
$GDW(A)$	uopšteno usmeravajuće reči
$OTW(A)$	jedno-utrapljujuće reči
$LOTW(A)$	lokalno jedno-utrapljujuće reči
$TW(A)$	utrapljujuće reči

Tabela 3.1.2

Takođe, dajemo još jednu listu definicija. Naime, za automat A kažemo da je

- *direktabilan*, ako je u-direktabilan, za neku reč $u \in X^*$;
- *utrapljiv*, ako je u-utrapljiv, za neku reč $u \in X^*$;
- *jedno-utrapljiv*, ako je jedno-u-utrapljiv, za neku reč $u \in X^*$;
- *uopšteno direktabilan*, ako je uopšteno u-direktabilan, za neku reč $u \in X^*$;
- *uniformno lokalno direktabilan*, ako je lokalno u-direktabilan, za neku reč $u \in X^*$;
- *uniformno lokalno jedno-utrapljiv*, ako je lokalno jedno-u-utrapljiv automat, za neku reč $u \in X^*$;
- *lokalno direktabilan*, ako svaki monogeni podautomat od A jeste direktabilan;
- *lokalno jedno-utrapljiv*, ako svaki monogeni podautomat automata A jeste jedno-utrapljiv automat;
- *definitan*, ako je k-definitan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *reverzno definitan*, ako je reverzno k-definitan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *nilpotentan*, ako je k-nilpotentan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *uopšteno definitan*, ako je uopšteno k-definitan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *uniformno lokalno definitan*, ako je lokalno k-definitan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *uniformno lokalno nilpotentan*, ako je lokalno k-nilpotentan, za neko $k \in \mathbb{N}^0$;
- *lokalno definitan*, ako svaki monogeni podautomat od A jeste definitan;
- *lokalno nilpotentan*, ako svaki monogeni podautomat od A jeste nilpotentan.

Za označavanje ovako definisanih klasa automata koristićemo oznake uvedene uz pomoć Tabele 3.1.3. Pri tome, u trećoj koloni Tabele 3.1.3 dajemo alternativne, simboličke zapise definicija tih klasa.

oznaka	klasa svih automata koji su	alternativni zapis
Dir	direktabilni	$\mathbf{Dir} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{Dir}_u$
Trap	utrapljivi	$\mathbf{Trap} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{Trap}_u$
OTrap	jedno-utrapljivi	$\mathbf{OTrap} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{OTrap}_u$
GDir	uopšteno direktabilni	$\mathbf{GDir} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{GDir}_u$
ULDir	uniformno lokalno direktabilni	$\mathbf{ULDir} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{LDir}_u$
ULOTrap	uniformno lokalno jedno-utrapljivi	$\mathbf{ULOTrap} = \bigcup_{u\in X^*} \mathbf{LOTrap}_u$
LDir	lokalno direktabilni	$\mathbf{LDir} = L(\mathbf{Dir})$
LOTrap	lokalno jedno-utrapljivi	$\mathbf{LOTrap} = L(\mathbf{OTrap})$
Def	definitni	$\mathbf{Def} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{Def}_k$
RDef	reverzno definitni	$\mathbf{RDef} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{RDef}_k$
Nilp	nilpotentni	$\mathbf{Nilp} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{Nilp}_k$
GDef	uopšteno definitni	$\mathbf{GDef} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{GDef}_k$
ULDef	uniformno lokalno definitni	$\mathbf{ULDef} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{LDef}_k$
ULNilp	uniformno lokalno nilpotentni	$\mathbf{ULNilp} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} \mathbf{LNilp}_k$
LDef	lokalno definitni	$\mathbf{LDef} = L(\mathbf{Def})$
LNilp	lokalno nilpotentni	$\mathbf{LNilp} = L(\mathbf{Nilp})$

Tabela 3.1.3

3.2. Usmeravajuće reči i uopštenja

Zadatak ovog odeljka je da se opišu osnovne osobine jezika iz liste date u Tabeli 3.1.2. Naime, opisaćemo međsobne odnose tih jezika, dokazati da su oni upravo ideali slobodnih monoida, a napravićemo i vezu tih jezika sa izvesnim idealima polugrupa prelaza automata kojima su pridruženi.

Najpre dokazujemo sledeću teoremu, koja govori o međusobnom odnosu između razmatranih jezika pridruženih automatu.

Teorema 3.2.1. *Za proizvoljan automat A važe sledeći uslovi:*

(1) $TW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $TW(A) = GDW(A)$*;*

(2) $LDW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $LDW(A) = GDW(A)$*;*

(3) $LOTW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$LOTW(A) = LDW(A) = TW(A) = GDW(A);$$

(4) $DW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$DW(A) = LDW(A) = GDW(A);$$

(5) $OTW(A) \neq \varnothing$ *povlači*

$$OTW(A) = LOTW(A) = TW(A) = DW(A) = LDW(A) = GDW(A);$$

(6) $TW(A) \neq \varnothing$ *i* $LDW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $LOTW(A) \neq \varnothing$*;*

(7) $TW(A) \neq \varnothing$ *i* $DW(A) \neq \varnothing$ *povlači* $OTW(A) \neq \varnothing$*.*

Dokaz. (1) Ako je $u \in TW(A)$, tada za proizvoljne $a \in A$ i $v \in X^*$ imamo da je $auvu = (au)vu = au$, jer je $au \in \mathrm{Tr}(A)$. Prema tome, $u \in GDW(A)$, čime smo dokazali da je $TW(A) \subseteq GDW(A)$.

Obratno, neka je $u \in GDW(A)$. Takođe, neka je $v \in TW(A)$ proizvoljna reč i $a \in A$ je proizvoljno stanje. Tada imamo da je $auvu = au$, jer je $u \in GDW(A)$ i, sa druge strane, $auv \in \mathrm{Tr}(A)$, jer je $v \in TW(A)$, pa imamo da je

$$au = auvu = (auv)u = auv \in \mathrm{Tr}(A).$$

Prema tome, $au \in \mathrm{Tr}(A)$, što znači da je $u \in TW(A)$, čime smo dokazali da je $GDW(A) = TW(A)$.

(2) Ovo tvrđenje se dokazuje slično kao tvrđenje (1).

(3) Jasno je da važi

$$LOTW(A) \subseteq LDW(A) \cap TW(A),$$

pa u slučaju da je $LOTW(A) \neq \varnothing$, prema (1) i (2) dobijamo da je

$$LDW(A) = TW(A) = GDW(A).$$

Ostaje, dakle, da se dokaže da je $LOTW(A) = TW(A)$, tj. da je $TW(A) \subseteq LOTW(A)$. Zaista, neka je $u \in TW(A)$. Uzmimo proizvoljno $a \in A$. Tada je $au \in \mathrm{Tr}(A) \cap S(a) = \mathrm{Tr}(S(a))$, što znači da $S(a)$ jeste u-utrapljiv automat. Sa druge strane, iz $TW(A) = LDW(A)$ sledi da je $u \in LDW(A)$, što znači da $S(a)$ jeste u-direktabilan automat, što sve zajedno povlači da je $S(a)$ jedno-u-utrapljiv automat, tj. $u \in LOTW(A)$, što je i trebalo dokazati.

(4) i (5) Ova dva tvrđenja se dokazuju slično kao (3).

(6) Ako je $u \in TW(A)$ i $v \in LDW(A)$, tada je $uv \in LOTW(A)$. Zaista, za proizvoljno stanje $a \in A$ imamo da je $auv = au \in \mathrm{Tr}(A)$, što znači da monogeni podautomat $S(a)$ jeste uv-utrapljiv. Sa druge strane, podautomat $S(a)$ je v-direktabilan, pa može imati samo jedan trap. Dakle, $S(a)$ je jedno uv-utrapljiv automat, pa $uv \in LOTW(A)$, što smo i trebali dokazati.

(7) Tvrđenje (7) se dokazuje na sličan način kao (6). $\square$

Narednom teoremom dokazujemo da razmatrani jezici nisu ništa drugo do ideali slobodnog monoida X^*.

Teorema 3.2.2. *Neka je $L \subseteq X^*$ neprazan jezik. Tada postoji X-automat A tako da je jezik L jednak jednom od jezika*

$$OTW(A),\ LOTW(A),\ TW(A),\ DW(A),\ LDW(A)\ \text{ i }\ GDW(A)$$

ako i samo ako L jeste ideal od X^*.

Dokaz. Uzmimo najpre da je $L = GDW(A)$, za neki X-automat A. Uzmimo proizvoljne $u \in GDW(A)$ i $v, w \in X^*$. Tada je

$$a\big(uw)v(uw\big) = \big(au(wv)u\big)w = (au)w = a(uw),$$

i, sa druge strane,

$$a\big(wu)v(wu\big) = (aw)\big(u(vw)u\big) = (aw)u = a(wu),$$

čime smo dokazali da $uw, wu \in GDW(A)$, što znači da je $GDW(A)$ ideal od X^*. Ako je pak jezik L jednak jednom od ostalih jezika sa spiska, pridruženom nekom automatu A, tada je, prema Teoremi 3.2.1, taj jezik jednak jeziku $GDW(A)$, tj. $L = GDW(A)$, pa prema prethodno dokazanom, i u tom slučaju dobijamo da je L ideal od X^*.

Obratno, neka je L ideal slobodnog monoida X^*. Označimo sa ϱ Reesovu kongruenciju na X^* određenu sa L. Razmotrimo automat $A = A^*(\varrho)$. Neka je $\varphi : A^*_{@} \to A$ prirodni homomorfizam koji odgovara kongruenciji ϱ.

Kako L jeste ϱ-klasa od $X^*_{@}$, to je $L\varphi = \{a_0\}$, za neko stanje a_0 automata A. Za proizvoljne $x \in X$ i $u \in L$ imamo da je $ux \in L$, odakle je

$$a_0 x = (u\varphi)x = (ux)\varphi = a_0,$$

jer je $ux \in L$, budući da je L ideal od X^*. To znači da a_0 jeste trap u A. Pretpostavimo da automat A ima još neki trap a_1. Tada je $a_1 = w\varphi$, za neko $w \in X^*$. Sa druge strane, za proizvoljno $u \in L$ imamo da je $a_1 u = a_1$, jer je a_1 trap u A, odakle sledi da je

$$a_1 = a_1 u = (w\varphi)u = (wu)\varphi = a_0,$$

jer je $wu \in L$, budući da je L ideal od X^*. Prema tome, A ima jedinstveni trap a_0.

Nadalje će biti dokazano da je A jedno-utrapljiv automat i da je $OTW(A) = L$. Zaista, uzmimo proizvoljne $a \in A$ i $u \in L$. Tada je $a = w\varphi$, za neko $w \in X^*$, odakle imamo da je

$$au = (w\varphi)u = (wu)\varphi = a_0,$$

jer je $wu \in L$. Prema tome, A je jedno-utrapljiv automat i $L \subseteq OTW(A)$. Sa druge strane, uzmimo proizvoljnu reč $u \in OTW(A)$. Tada za stanje $e\varphi$ automata A, gde je e prazna reč u X^*, imamo da važi

$$a_0 = (e\varphi)u = (eu)\varphi = u\varphi.$$

Međutim, to znači da je $u \in L$, čime smo dokazali da je $OTW(A) \subseteq L$. Dakle, dokazali smo da je $L = OTW(A)$. Na kraju, prema Teoremi 3.2.1, tačka (5), sledi da je

$$L = OTW(A) = LOTW(A) = TW(A) = DW(A) = LDW(A) = GDW(A).$$

Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Naredna teorema predstavlja vrlo koristan rezultat koji opisuje elemente koji su bi-, leve, desne nule ili nule u polugrupi prelaza datog automata.

Teorema 3.2.3. *Za proizvoljan automat A važi sledeće:*

(1) $GDW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je bi-nula u* $S(A)\}$;

(2) $TW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je leva nula u* $S(A)\}$;

(3) $LDW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je desna nula u* $S(A)\}$;

(4) $LOTW(A) = \{u \in X^* \mid \eta_u$ *je nula u* $S(A)\}$.

Dokaz. (1) Neka je A proizvoljan automat i neka je $u \in GDW(A)$ proizvoljna reč. Uočimo proizvoljnu reč $v \in X^*$. Tada iz $auvu = au$, za svako $a \in A$, sledi da je $\eta_u\eta_v\eta_u = \eta_u$, tj. η_u je bi-nula u $S(A)$.

Obratno, pretpostavimo da je η_u bi-nula u $S(A)$. To znači da je za svako $\eta_v \in S(A)$ zadovoljeno $\eta_u\eta_v\eta_u = \eta_u$, a odatle za svako $a \in A$ važi $auvu = au$, pa je $u \in GDW(A)$, što je i trebalo dokazati.

(2), (3), (4) Ove relacije se dokazuju na sličan način. □

Napomena 3.2.1. U slučaju kada je alfabet X konačan i A konačan X-automat jezik $DW(A)$ je, prema Napomeni 3.3 [65], raspoznatljiv. Zaista, on se može raspoznati monogenim automatom B, gde je $B = \{Au \,|\, u \in X^*\}$ i funkcije prelaza su određene sa $(Au)v = A(uv)$, pomoću skupa $T = \{Au \,|\, |Au| = 1\}$. Sa druge strane, ako je A utrapljiv automat, nije teško uočiti da važi $TW(A) = DW(A/\mathrm{Tr}(A))$. Kako je $DW(A/\mathrm{Tr}(A)$ raspoznatljiv, to je i $TW(A)$ raspoznatljiv jezik. Sada, na osnovu relacija datih u Teoremi 3.2.1, sledi da su i jezici $OTW(A)$, $LOTW(A)$ takođe raspoznatljivi za proizvoljan konačan automat A. Kako važi $LDW(A) = \bigcap_{a\in A} DW(S(a))$, to je i jezik $LDW(A)$ raspoznatljiv kao konačan presek raspoznatljivih jezika. Pitanje raspoznatljivosti jezika $GDW(A)$ će biti kasnije razmatrano.

3.3. Algebarska svojstva klasa direktabilnih automata

U prvom odeljku ove glave je uveden pojam klase uopšteno direktabilnih automata, kao i neke njene važne podklase. Ovde ćemo razmatrati algebarska svojstva tih klasa. Naime, za klase date u Tabeli 3.1.1 je dokazano da predstavljaju varijetete automata, dok su klase prikazane Tabelom 3.1.3 uopšteni varijeteti automata. Takođe su date i međusobne relacije između ovih klasa.

Teorema 3.3.1. *Za proizvoljnu reč $u \in X^*$ i proizvoljno $k \in \mathbb{N}^0$, sve klase date u Tabeli* 3.1.1 *jesu varijeteti automata koji imaju sledeće reprezentacije:*

$\mathbf{Dir}_u = \big[gu = hu\big]$;

$\mathbf{OTrap}_u = \big[gux = hu \;\big|\; x \in X\big]$;

$\mathbf{Trap}_u = \big[gux = gu \;\big|\; x \in X\big]$;

$\mathbf{GDir}_u = \big[guwu = gu \;\big|\; w \in X^*\big]$;

$\mathbf{LDir}_u = \big[gwu = gu \;\big|\; w \in X^*\big]$;

$\mathbf{LOTrap}_u = \big[gwux = gu \;\big|\; w \in X^*,\, x \in X\big]$;

$\mathbf{Def}_k = \big[gu = hu \;\big|\; u \in X^{\geq k}\big]$;

$\mathbf{RDef}_k = \big[gux = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$;
$\mathbf{Nilp}_k = \big[gux = hu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$;
$\mathbf{GDef}_k = \big[guwu = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, w \in X^*\big]$;
$\mathbf{LDef}_k = \big[gxu = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$;
$\mathbf{LNilp}_k = \big[gxu = gu,\, gux = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$.

Dokaz. Da bismo dokazali da su navedene klase varijeteti, prema Teoremi 1.2.3 za automate, dovoljno je dokazati da im odgovaraju navedene reprezentacije preko identiteta.

Jasno je da se klase $\mathbf{Dir}_u$, $\mathbf{Trap}_u$, $\mathbf{GDir}_u$, $\mathbf{LDir}_u$, $\mathbf{Def}_k$, $\mathbf{RDef}_k$, $\mathbf{Nilp}_k$, $\mathbf{GDef}_k$ imaju gornje reprezentacije. Treba dokazati da su jednakosti zadovoljene i za klase $\mathbf{OTrap}_u$, $\mathbf{LOTrap}_u$.

Uočimo proizvoljan automat $A \in \mathbf{OTrap}_u$. Tada je au trap, za svako $a \in A$. Kako A ima jedinstven trap, to je $au = bu$, za sve $a, b \in A$. Takođe, iz činjenice da je au trap, sledi $aux = au$, za svako $x \in X$. Dakle, važi $aux = au = bu$, za sve $a, b \in A$ i svako $x \in X$. Znači, $\mathbf{OTrap}_u \subseteq \mathbf{OTrap}_u = \big[gux = hu \;\big|\; x \in X\big]$. Obratno, pretpostavimo da automat A zadovoljava sve identitete oblika $gux = hu$, za svako $x \in X$. Dakle, za proizvoljne $a, b \in A$ i $x \in X$ važi $aux = bu$. Uzimajući $a = b$ dobijamo $aux = au$, pa A ima trap au. Taj trap je jedinstven jer uzimajući da je b takođe trap dobijamo $au = aux = bu = b$. Znači, automat A ima jedinstven trap i za svako $a \in A$ stanje au jeste trap, pa je $A \in \mathbf{OTrap}_u$, što je i trebalo dokazati.

Dokazaćemo i da klasa $\mathbf{LOTrap}_u$ ima gore datu reprezentaciju. Neka je $A \in \mathbf{LOTrap}_u$ proizvoljan automat. Tada je $S(a) \in \mathbf{OTrap}_u$ za svako $a \in A$, pa su na $S(a)$ zadovoljeni svi identiteti oblika $gux = hu$, za svako $x \in X$. Stavljajući $g = aw$ i $h = a$ dobijamo $awux = au$, za svako $w \in X^*$. Dakle, automat A zadovoljava identitete $gwux = gu$, gde je $w \in X^*$ i $x \in X$. Obratno, ako je A automat koji zdovoljava sve identitete oblika $gwux = gu$, za svako $w \in X^*$ i svako $x \in X$, tada za svako $a \in A$ važi $awux = au$. Zamenom $g = aw_1$ i uzimajući $w = e$ identitet $gwux = gu$ postaje $aw_1u = aw_1wux = aw_1ux$, za proizvoljno $w_1 \in X^*$. Uzimajući, dalje, da je $w = w_1$ identitet postaje $aw_1ux = au$. Slično, za proizvoljno $w_2 \in X^*$ važi $aw_2ux = au$. Dakle, za $aw_1, aw_2 \in S(a)$ važi $aw_1u = aw_1ux = au = aw_2ux$, tj. na $S(a)$ je zadovoljen identitet $gux = hu$, odnosno, $S(a) \in \mathbf{OTrap}_u$, što je i trebalo dokazati.

Analogno se dokazuju i preostale relacije $\mathbf{LDef}_k = \big[gxu = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$ i $\mathbf{LNilp}_k = \big[gxu = gu,\, gux = gu \;\big|\; u \in X^{\geq k},\, x \in X\big]$. $\square$

Napomena 3.3.1. Kao što se vidi iz same reprezentacije varijeteta nevedenih u Teoremi 3.3.1, varijeteti

$$\mathbf{Dir}_u,\ \mathbf{OTrap}_u,\ \mathbf{Def}_k \ \text{ i } \ \mathbf{Nilp}_k$$

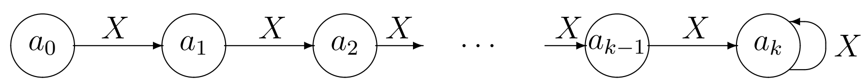
su neregularni, dok svi ostali varijeteti jesu regularni.

U narednim primerima dati su automati koji će biti često korišćeni kod dokazivanja nekih inkluzivnih relacija između pojedinih klasa automata.

Primer 3.3.1. Neka je A automat sa skupom stanja $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, gde je $k \in \mathbb{N}$, i funkcijama prelaza određenim sa:

$$\begin{aligned} a_i x &= a_{i+1}, \quad \text{za } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \\ a_k x &= a_k, \end{aligned}$$

za svako $x \in X$. Tada A jeste k-nilpotentan automat koji nije $k-1$-nilpotentan.

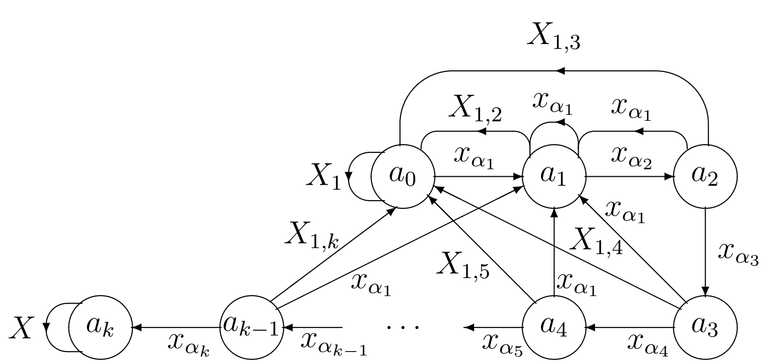


Primer 3.3.2. Neka je $u = x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_k} \in X^*$ proizvoljna reč. Označimo $L = X^* u X^*$. Neka je A minimalan automat ovog jezika(vidi [61], [29], [76]). Nije teško proveriti da je $A = \{a_0, a_1 \ldots, a_k\}$ i

$$a_k x = a_k, \quad \text{za svako } x \in X,$$

$$a_i x = \begin{cases} a_1, & x = x_{\alpha_1}; \\ a_{i+1}, & x = x_{\alpha_{i+1}}; \\ a_0, & x \notin \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_{i+1}}\}, \end{cases} \qquad \text{za } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Automat A je prikazan na sledećoj slici. Pri tome su sa X_i, odnosno $X_{i,j}$, na slici su označeni skupovi $X_i = X \setminus \{x_{\alpha_i}\}$, tj. $X_{i,j} = X \setminus \{x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}\}$.



Ovaj automat jeste jedno-u-utrapljiv, a takođe i u-direktabilan. Primetimo da je $A_u \in \mathbf{Dir}_u \setminus \mathbf{Dir}_v$, za svaku reč $v \in X^{\leq |u|}$.

Naredne dve teoreme daju neke inkluzivne relacije unutar samih klasa prikazanih u Tabeli 3.1.3.

Teorema 3.3.2. *Neka su $u, v \in X^*$ proizvoljne reči i neka je $\mathbf{E}$ proizvoljan element sledećeg skupa*

$$\big\{\mathbf{Dir}, \mathbf{Trap}, \mathbf{OTrap}, \mathbf{GDir}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LOTrap}\big\}.$$

Tada važi sledeće:

(a) $\mathbf{E}_u \subseteq \mathbf{E}_v$ *ako i samo ako u jeste podreč od v;*

(b) $\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_v$ *ako i samo ako je $u = v$;*

(c) $\mathbf{E}_u \cup \mathbf{E}_v \subseteq \mathbf{E}_{uv}$*;*

Osim toga, za praznu reč e važi:

$$\mathbf{E}_e = \begin{cases} \mathbf{O}, & \textit{za} \;\; \mathbf{E} \in \big\{\mathbf{Dir}, \mathbf{OTrap}\big\} \\ \mathbf{D}, & \textit{za} \;\; \mathbf{E} \in \big\{\mathbf{Trap}, \mathbf{GDir}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LOTrap}\big\} \end{cases}$$

Dokaz. (a) Uzmimo da je $\mathbf{E} = \mathbf{Dir}$. Neka A jeste u-direktabilan automat i neka je reč v oblika $v = u'uu''$, za neke $u', u'' \in X^*$. Tada je za proizvoljne $a, b \in A$ zadovoljeno $av = au'uu'' = auu'' = buu'' = bu'uu'' = bv$, pa je A i v-direktabilan.

Dokažimo obratnu implikaciju. Pretpostavimo da važi $\mathbf{Dir}_u \subseteq \mathbf{Dir}_v$. Automat A dat u Primeru 3.3.2 jeste u-direktabilan, pa je, prema pretpostavci, i v-direktabilan. Tada je $a_0v = a_kv = a_k$, a kako je to minimalni automat koji raspoznaje jezik $L = X^*uX^*$ pomoću skupa $\{a_k\}$, tj. važi

$$a_0w = a_k \Leftrightarrow w \in X^*uX^*,$$

to je $v \in X^*uX^*$. Dakle, važi $u \,|\, v$.

Slično se razmatraju i slučajevi $\mathbf{E} \in \{\mathbf{Trap}, \mathbf{OTrap}, \mathbf{LDir}, \mathbf{LOTrap}\}$.

Neka je, sada, $\mathbf{E} = \mathbf{GDir}$. Pretpostavimo da je v reč oblika $v = u'uu''$, za neke $u', u'' \in X^*$. Neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Tada je za proizvoljan automat $A \in \mathbf{GDir}_u$ i svako stanje $a \in A$ zadovoljeno $avwv = au'uu''wu'uu'' = au'uu'' = av$, tj. $A \in \mathbf{GDir}_v$. Obratno, neka je $\mathbf{GDir}_u \subseteq \mathbf{GDir}_v$ i neka je A automat iz Primera 3.3.2. Jasno je da je $A \in \mathbf{GDir}_u$, pa je i $A \in \mathbf{GDir}_v$. Dakle, za proizvoljne $a \in A$ i $w \in X^*$ je $avwv = av$. Uzimajući $a = a_0$ i $w = u$ dobijamo $a_0vuv = a_0v$. Sa druge strane je $a_0vuv = a_kv = a_k$. Dakle, $a_0v = a_k$, pa je $v \in X^*uX^*$. Odatle sledi da $u \,|\, v$.

(b) i (c) Sledi neposredno na osnovu tvrđenja (a). □

Teorema 3.3.3. *Neka je $\mathbf{E}$ proizvoljan element sledećeg skupa*

$$\big\{\mathbf{Def}, \mathbf{RDef}, \mathbf{Nilp}, \mathbf{GDef}, \mathbf{LDef}, \mathbf{LNilp}\big\}.$$

Tada je

$$\mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{E}_k \subset \mathbf{E}_{k+1} \subset \ldots \mathbf{E}.$$

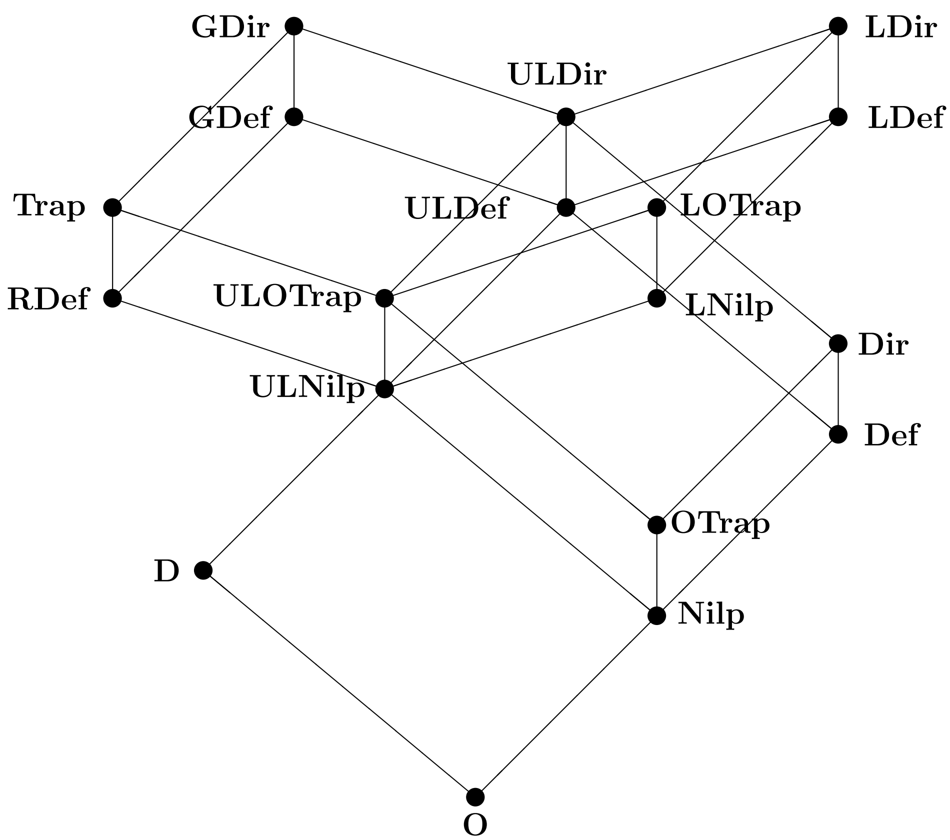
Osim toga,

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} \mathbf{O}, & \textit{za} \;\; \mathbf{E} \in \big\{\mathbf{Def}, \mathbf{Nilp}\big\} \\ \mathbf{D}, & \textit{za} \;\; \mathbf{E} \in \big\{\mathbf{RDef}, \mathbf{GDef}, \mathbf{LDef}, \mathbf{LNilp}\big\} \end{cases}$$

Dokaz. Inkluzione relacije važe na osnovu definicija navedenih klasa kao i osobine operatora L date u delu (2) Leme 2.1.1. Treba još dokazati da su navedene inkluzije prave. Međutim, za $k \in \mathbb{N}$ automat A dat u Primeru 3.3.1 jeste element klasa $\mathbf{Def}_k \setminus \mathbf{Def}_{k-1}$, $\mathbf{RDef}_k \setminus \mathbf{RDef}_{k-1}$, $\mathbf{Nilp}_k \setminus \mathbf{Nilp}_{k-1}$, $\mathbf{GDef}_k \setminus \mathbf{GDef}_{k-1}$, $\mathbf{LDef}_k \setminus \mathbf{LDef}_{k-1}$, $\mathbf{LNilp}_k \setminus \mathbf{LNilp}_{k-1}$. □

U sledećoj teoremi su data algebarska svojstva klasa iz Tabele 3.1.3, kao i njihove međusobne inkluzivne relacije.

Teorema 3.3.4. *Klase prikazane na Slici* 3.3.1 *su po parovima disjunktni uopšteni varijeteti automata i Slika* 3.3.1 *predstavlja njihov inkluzivni dijagram. Štaviše, prikazane klase čine polumrežu u odnosu na presek.*



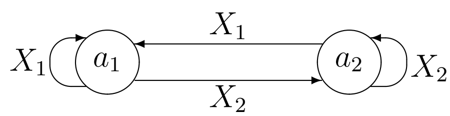
Slika 3.3.1

Dokaz. Jasno, **D** i **O** su varijeteti. Imajući u vidu simboličke zapise posmatranih klasa koji se nalaze u trećoj koloni Tabele 3.1.3, kao i Teoreme 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, dobijamo da posmatrane klase predstavljaju usmerene unije varijeteta. Odatle, prema Teoremi 1.4.2, sledi da su posmatrane klase uopšteni varijeteti automata.

Nije teško proveriti da se na slici nalazi inkluzivni dijagram za posmatrane klase.

Kako bismo dokazali da su inkluzije prave daćemo neke primere.

Predstavimo ulazni alfabet X u obliku $X = X_1 \cup X_2$, gde je $X_1 \neq \varnothing$, $X_2 \neq \varnothing$ i $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Ovo je moguće pod pretpostavkom da ne razmatramo autonomne automate. Posmatrajmo automat dat na sledećoj slici:



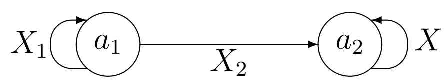
Slika 3.3.2

Automat dat na Slici 3.3.2 jeste dvoelementni reset automat i on pripada klasi **Def** $\setminus$ **Trap** jer nema trapova, što dalje daje inkluzije

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{Def}, \qquad \mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{ULDef}, \qquad \mathbf{RDef} \subset \mathbf{GDef}$$

$$\mathbf{OTrap} \subset \mathbf{Dir}, \qquad \mathbf{ULOTrap} \subset \mathbf{ULDir}, \qquad \mathbf{Trap} \subset \mathbf{GDir}.$$

Automat sa Slike 3.3.2 je, takođe, u klasi **Def** $\setminus$ **LOTrap** jer nema trapova, pa je i u klasi **LDir** $\setminus$ **LOTrap**. Pomenuti automat se nalazi i u klasi **LDef** $\setminus$ **LNilp**.



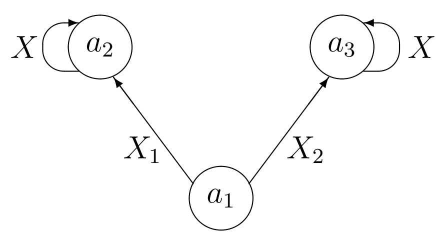
Slika 3.3.3

Automat prikazan na Slici 3.3.3 pripada klasi **OTrap** $\setminus$ **GDef**, odakle sledi

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{OTrap}, \qquad \mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{ULOTrap}, \qquad \mathbf{RDef} \subset \mathbf{Trap}$$

$$\mathbf{Def} \subset \mathbf{Dir}, \qquad \mathbf{ULDef} \subset \mathbf{ULDir}, \qquad \mathbf{GDef} \subset \mathbf{GDir}.$$

Sa druge strane, automat sa Slike 3.3.3 je u klasi **OTrap** $\setminus$ **LDef** jer monogeni podautomat generisan sa a_1 nije definitan, odakle sledi i da je u **LDir** $\setminus$ **LDef**. Ovaj automat je i primer automata koji pripada klasi **LOTrap** $\setminus$ **LNilp**.



Slika 3.3.4

Treći automat, prikazan na Slici 3.3.4, je monogen sa dva trapa, pa se nalazi u klasi **RDef** $\setminus$ **ULDir**, odakle sledi da važi

$$\mathbf{ULNilp} \subset \mathbf{RDef}, \quad \mathbf{ULOTrap} \subset \mathbf{Trap}, \quad \mathbf{ULDef} \subset \mathbf{GDef}, \quad \mathbf{ULDir} \subset \mathbf{GDir}.$$

Uočimo proizvoljan $B \in \mathbf{Nilp}$. Neka je A direktna suma najmanje dve izomorfne kopije automata B. Tada A pripada klasi $\mathbf{ULNilp} \setminus \mathbf{Dir}$, što daje inkluzije

$$\mathbf{Nilp} \subset \mathbf{ULNilp}, \quad \mathbf{OTrap} \subset \mathbf{ULOTrap}, \quad \mathbf{Def} \subset \mathbf{ULDef}, \quad \mathbf{Dir} \subset \mathbf{ULDir}.$$

Posmatrajmo sada automat

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k,$$

gde je automat $A_k \in \mathbf{Nilp}_k \setminus \mathbf{Nilp}_{k-1}$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Podsetimo se da su ovakvi automati A_k opisani u Primeru 3.3.1. Tada važe relacije $A \in \mathbf{LNilp} \setminus \mathbf{ULNilp}$ i $A \in \mathbf{LDef} \setminus \mathbf{ULDef}$.

Označimo sa A_u, gde je $u \in X^*$, automat opisan u Primeru 3.3.2. Tada je $A_u \in \mathbf{Dir}_u \setminus \mathbf{Dir}_v$, za svako $v \in X^{\leq |u|}$. Tada se automat

$$A = \sum_{u \in X^*} A_u,$$

nalazi u klasama $\mathbf{LOTrap} \setminus \mathbf{ULNilp}$ i $\mathbf{LDir} \setminus \mathbf{ULDir}$.

Inkluzije $\mathbf{O} \subset \mathbf{Nilp}$, $\mathbf{O} \subset \mathbf{D}$ i $\mathbf{D} \subset \mathbf{ULNilp}$ su očigledene. Time smo dokazali da su prikazane inkluzije prave.

Dalje, uočimo $A \in \mathbf{Trap} \cap \mathbf{Dir}$. Kako je A direktabilan, to A ima najviše jedan trap, pa je $A \in \mathbf{OTrap}$. Dakle, $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{Dir} = \mathbf{OTrap}$. Odavde takođe sledi da je $\mathbf{K} \cap \mathbf{Dir} = \mathbf{OTrap}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa dijagrama takvu da je $\mathbf{OTrap} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Trap}$.

Neka je $A \in \mathbf{Trap} \cap \mathbf{Def}$. Tada takođe imamo $A \in \mathbf{OTrap}$ i $LOTW(A) = LDW(A) \neq \varnothing$. Sa druge strane, $A \in \mathbf{Def}$ daje $X^{\geq k} \subseteq LDW(A)$, za neke $k \in \mathbb{N}$, i sada $X^{\geq k} \subseteq LOTW(A)$, odakle je $A \in \mathbf{Nilp}$. Dakle, dokazali smo $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{Dir} = \mathbf{Nilp}$, što implicira da je $\mathbf{K} \cap \mathbf{Def} = \mathbf{Nilp}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike takvu da je $\mathbf{Nilp} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Trap}$.

Slično dokazujemo da je $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{ULDir} = \mathbf{ULOTrap}$ i $\mathbf{Trap} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULNilp}$, što daje $\mathbf{K} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULNilp}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike za koju važi $\mathbf{ULNilp} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Trap}$. Konačno, jasno da je $\mathbf{D} \cap \mathbf{K} = \mathbf{O}$, za svaku klasu $\mathbf{K}$ sa slike takvu da je $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Dir}$.

Neka je, sada, $A \in \mathbf{LOTrap} \cap \mathbf{ULDef}$. Tada je svaki monogeni podautomat $S(a)$ automata A u klasama $\mathbf{OTrap}$ i $\mathbf{Def}_k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Kako, prema dokazu Teoreme 3.3.4, važi $\mathbf{Nilp}_k = \mathbf{OTrap} \cap \mathbf{Def}_k$, to je $A \in \mathbf{ULNilp}$. Dakle, važi $\mathbf{LOTrap} \cap \mathbf{ULDef} \subseteq \mathbf{ULNilp}$. Obratna inkluzija svakako važi, pa je $\mathbf{ULNilp} = \mathbf{LOTrap} \cap \mathbf{ULDef}$. Odavde sledi da su važe i relacije $\mathbf{LNilp} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULOTrap} \cap \mathbf{ULDef} = \mathbf{ULNilp}$.

Sličnim razmatranjem zaključujemo da važe i relacije $\mathbf{ULOTrap} = \mathbf{LOTrap} \cap \mathbf{ULDir}$, $\mathbf{ULDef} = \mathbf{ULDir} \cap \mathbf{LDef}$ i $\mathbf{LNilp} = \mathbf{LOTrap} \cap \mathbf{LDef}$.

Preostaje da se dokažu relacije:

$$\mathbf{GDir} \cap \mathbf{LDir} = \mathbf{ULDir};$$

$$\mathbf{Trap} \cap \mathbf{LOTrap} = \mathbf{ULOTrap};$$

$$\mathbf{GDef} \cap \mathbf{LDef} = \mathbf{ULDef};$$

$$\mathbf{RDef} \cap \mathbf{Nilp} = \mathbf{ULNilp}.$$

Uočimo proizvoljan automat $A \in \mathbf{GDir} \cap \mathbf{LDir}$. Tada je $A \in \mathbf{GDir}_u$, za neko $u \in X^*$. Takođe, za svako $a \in A$ postoji $u_a \in X^*$ tako da je $S(a) \in \mathbf{Dir}_{u_a}$. Dokazaćemo da je $S(a) \in \mathbf{Dir}_u$. Uočimo proizvoljan element $ap \in S(a)$, gde je $p \in X^*$. Tada, zbog činjenice da je $A \in \mathbf{GDir}_u$, sledi da je $apu = apuu_a u$. Dalje, zbog činjenice da je u_a usmeravajuća reč automata $S(a)$, dobijamo $apuu_a u = auu_a u$, što, zbog uopštene direktabilnosti automata A, daje $auu_a u = au$. Dakle, za proizvoljno stanje $ap \in S(a)$ je $apu = au$. Prema tome, $S(a) \in \mathbf{Dir}_u$, a onda je $A \in \mathbf{LDir}_u \subseteq \mathbf{ULDir}$.

Analogno se dokazuje da važi relacija $\mathbf{GDef} \cap \mathbf{LDef} = \mathbf{ULDef}$.

Neka je, sada, $A \in \mathbf{TrapLOTrap}$ proizvoljan automat. Dakle, postoji reč $u \in X^*$ tako da je $A \in \mathbf{Trap}_u$. Takođe, za svako $a \in A$ postoji reč u_a tako da je $S(a) \in \mathbf{OTrap}_{u_a}$. Znači, automat $S(a)$ je u-utrapljiv i ima jedan trap, pa je $S(a) \in \mathbf{OTrap}_u$. Odatle je $A \in \mathbf{LOTrap}_u \subseteq \mathbf{ULOTrap}$, što je i trebalo dokazati.

Slično zaključujemo i da važi $\mathbf{RDef} \cap \mathbf{LNilp} = \mathbf{ULNilp}$.

Dokazaćemo i da su klase sa leve i desne strane slike neuporedive. U tom smislu, dovoljno je dokazati

$$\mathbf{RDef} \setminus \mathbf{LDir} \neq \varnothing \qquad \text{i} \qquad \mathbf{LNilp} \setminus \mathbf{GDir} \neq \varnothing.$$

Zaista, automat sa Slike 3.3.4 je monogeni automat sa dva trapa koji se nalazi u $\mathbf{RDef} \setminus \mathbf{LDir}$. Takođe, automat A koji je direktna suma automata A_k, gde je $A_k \in \mathbf{Nilp}_k \setminus \mathbf{Nilp}_{k-1}$, za svako $k \in \mathbb{N}$, se nalazi u $\mathbf{LNilp} \setminus \mathbf{GDir}$.

Prema tome, dijagram predstavlja polumrežu u odnosu na presek. $\square$

Napomena 3.3.2. Prethodno smo pomenuli da su autonomni automati, tj. automati sa jednoelementnim ulaznim alfabetom nisu uključeni u razmatranje. Primetimo da su tada samo klase **O**, **D**, **Nilp**, **LNilp** i **ULNilp** različite.

Problem 3.3.1. U Teoremi 3.3.4 smo dokazali da klase automata prikazane na Slici 3.3.1 čine polumrežu u odnosu na presek. Prirodno se nameće sledeće pitanje: Da li skup klasa prikazanih na Slici 3.3.1 čini i podmrežu mreže svih varijeteta automata? Drugim rečima, pitanje je: da li je ovaj skup zatvoren za supremume u mreži varijeteta?

Za razliku od činjenice da uopšteni varijeteti **GDir**, **Trap**, **GDef** i **RDef** sa jedne strane, i, **LDir**, **LOTrap**, **LDef** i **LNilp**, sa druge, nisu uporedivi, videćemo da to za njima odgovarajuće pseudovarijetete ne važi. Naime, to neposredno sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 3.3.5. *U klasama*

$$\mathbf{LDir} \setminus \mathbf{ULDir},\ \mathbf{LOTrap} \setminus \mathbf{ULOTrap},\ \mathbf{LDef} \setminus \mathbf{ULDef},\ \mathbf{LNilp} \setminus \mathbf{ULNilp}$$

nema konačnih elemenata, tj. važi

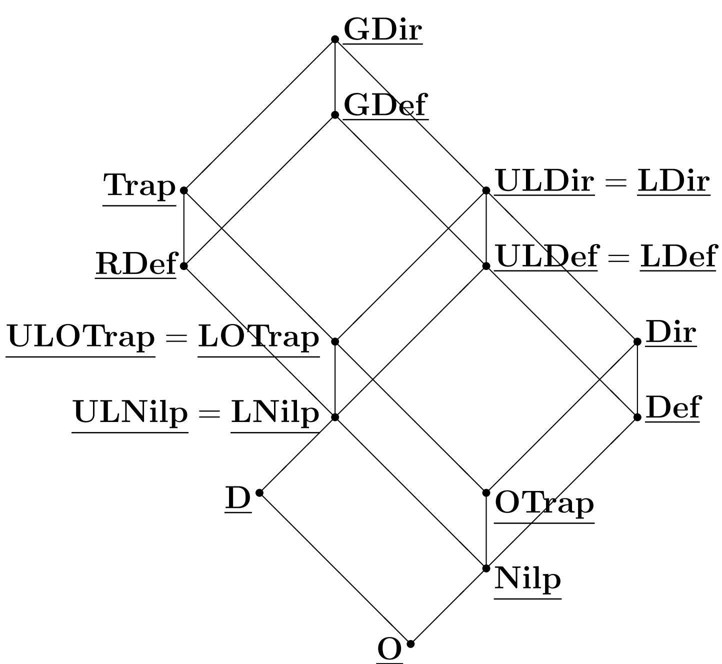
$$\underline{\mathbf{LDir}} = \underline{\mathbf{ULDir}},\ \underline{\mathbf{LOTrap}} = \underline{\mathbf{ULOTrap}},\ \underline{\mathbf{LDef}} = \underline{\mathbf{ULDef}},\ \underline{\mathbf{LNilp}} = \underline{\mathbf{ULNilp}}.$$

Dokaz. Dokazaćemo teoremu samo za klase **LDir** i **ULDir**. Ostale relacije se dokazuju slično.

Jasno je da važi $\underline{\mathbf{ULNilp}} \subseteq \underline{\mathbf{LNilp}}$. Dokazaćemo i suprotnu inkluziju. Uočimo konačan automat $A \in \mathbf{LDir}$. Tada za svako $a \in A$ postoji reč $u_a \in X^*$ tako da je $S(a) \in \mathbf{Dir}_{u_a}$. Neka je $u = \prod_{a \in A} u_a$. Kako su, prema Teoremi 3.2.2, jezici $DW(S(a))$ ideali u X^*, to je $u \in DW(S(a))$, za svako $a \in A$. Odatle je $S(a) \in \mathbf{Dir}_u$ za svako $a \in A$, pa je $A \in \mathbf{LDir}_u \subseteq \mathbf{ULDir}$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Neposredna posledica Teorema 3.3.4 i 3.3.5 je sledeći rezultat koji se odnosi na odgovarajuće pseudovarijetete.

Posledica 3.3.1. *Klase prikazane na sledećoj slici jesu po parovima različiti pseudovarijeteti i dijagram na slici jeste inkluzivni.*



3.4. Polugrupe prelaza uopšteno direktabilnih automata

U ovom odeljku je razmatrana klasa uopšteno direktabilnih automata i neke njene bitne podklase, kao što su: uniformno lokalno direktabilni automati, utrapljivi automati i uniformno lokalno jedno-utrapljivi automati. Opisane su polugrupe prelaza automata koji pripadaju ovim klasama. Ispostavilo se da su to upravo klase automata čije polugrupe prelaza imaju levu, desnu, bi- nulu ili nulu. Takođe su pronađene i razne dekompozicije ovih klasa na automate koji pripadaju nekim drugim poznatim klasama.

Sledeća teorema predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata ove glave.

Teorema 3.4.1. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima bi-nulu;*

(ii) *A je ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata pomoću jedno-utrapljivog automata;*

(iii) *A je uopšteno direktabilan automat.*

Dokaz. (i)⇔(iii). Sledi prema Teoremi 3.2.3.

(iii)⇒(ii). Neka je $B = \{au \,|\, a \in A,\, u \in GDW(A)\}$. Kako je $GDW(A)$ ideal u X^*, B je podautomat od A. Neka je a_0 trap automata A/B koji je slika automata B prirodnim epimorfizmom iz A na A/B. Za proizvoljno $a \in A \setminus B$ i proizvoljnu reč $u \in GDW(A)$ imamo da je $au \in B$ u A, tj. $au = a_0$ u A/B, pa je A/B jedno-utrapljiv automat.

Uočimo proizvoljne $b \in B$, $v \in X^+$ i $w \in GDW(A)$. Tada je $b = au$, za neke $a \in A$ i $u \in GDW(A)$, pa je $(bv)w = auvw = auw = bw$, prema Lemi 1.2.1. Ovim je dokazana implikacija (iii)⇒(ii).

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je A ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata B pomoću jedno-utrapljivog automata A/B. Uočimo reči $v \in LDW(B)$ i $u \in TW(A/B)$. Neka su $a \in A$ i $w \in X^*$ proizvoljni. Tada $au \in B$, i kako je podautomat $S(au)$ automata B generisan sa au direktabilan, gde je v jedna od njegovih usmeravajućih reči, i $au, auvwu \in S(au)$, to je $auv = auvwuv$. Prema tome, $uv \in GDW(A)$ i A je uopšteno direktabilan automat. □

Napomena 3.4.1. Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo relaciju

$$GDW(A) = \bigcup \big\{OTW(A/B) \cap LDW(B) \,\big|\, B \text{ je podautomat od } A\big\}.$$

Odavde dobijamo da je za konačan automat A jezik $GDW(A)$ raspoznatljiv kao konačna unija raspoznatljivih jezika.

Uniformno lokalno direktabilni automati, koji se javljaju u prethodnoj teoremi, detaljnije su opisani u narednoj teoremi.

Teorema 3.4.2. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima desnu nulu;*

(ii) *A je direktna suma direktabilnih automata sa istom usmeravajućom reči;*

(iii) *A je uniformno lokalno direktabilan automat.*

Ako je A konačan automat, tada uslov (ii) *može biti zamenjen uslovom:*

(ii') *A je direktna suma direktabilnih automata.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(iii). Sledi prema Teoremi 3.2.3.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Uočimo proizvoljnu reč $u \in LDW(A)$ i definišimo relaciju ϱ na A sa: $(a,b) \in \varrho \;\Leftrightarrow\; au = bu$. Očigledno, ϱ jeste relacija ekvivalencije na A i $(av,a) \in \varrho$, za svako $a \in A$ i svako $v \in X^*$. Odatle, prema Lemi 1.5.1 sledi da je ϱ d.s. kongruencija na A.

Neka je B proizvoljna ϱ-klasa na A. Uočimo proizvoljne $a, b \in B$. Tada $au = bu$, pa je B direktabilan automat, sa usmeravajućom reči u. Ovim je implikacija (iii)$\Rightarrow$(ii) dokazana.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je automat A direktna suma direktabilnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka postoji reč $u \in X^*$ koja je usmeravajuća reč za sve A_α, $\alpha \in Y$. Uočimo proizvoljno $a \in A$ i $v \in X^*$. Tada $a, av \in A_\alpha$, za neko $\alpha \in Y$, i kako je A_α direktabilan i $u \in DW(A_\alpha)$, to je $avu = au$, što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo da je A konačan automat i da važi (ii'). Tada je A direktna suma konačnog broja direktabilnih automata $A_1, \dots, A_k$, i ako uočimo proizvoljne reči $u_i \in DW(A_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, tada je $u = u_1 \cdots u_k \in DW(A_i)$, jer je $DW(A_i)$ ideal u X^*, za svako $i \in \{1, \dots, k\}$, prema Teoremi 3.2.2. $\square$

Napomena 3.4.2. Ekvivalencija (ii)$\Leftrightarrow$(iii) sledi i iz činjenice da je klasa $\mathbf{Dir}_u$ varijetet za svaku reč $u \in X^*$, a onda prema Teoremi 2.3.5 važi $\mathbf{D} \circ \mathbf{Dir}_u = L(\mathbf{Dir}_u)$, ali je ovde dat drugi dokaz zbog kompletnosti dokaza.

Kako smo već dali karakterizacije automata čije polugrupe prelaza imaju desnu nulu, sada ćemo to učiniti i za automate čije polugrupe prelaza imaju levu nulu.

Teorema 3.4.3. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima levu nulu;*

(ii) *A je ekstenzija diskretnog automata pomoću jedno-utrapljivog automata;*

(iii) *A je utrapljiv automat.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(iii). Sledi prema Teoremi 3.2.3.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Iz (i)$\Leftrightarrow$(iii) i Teoreme 3.2.1, svaki utrapljiv automat A je uopšteno direktabilan automat i $TW(A) = GDW(A)$. Kao što je dokazano u delu (iii)$\Rightarrow$(ii) dokaza Teoreme 3.4.1, A je ekstenzija automata $B = \{au \,|\, a \in A, u \in GDW(A)\}$ pomoću jedno-utrapljivog automata, i kako je $GDW(A) = TW(A)$, to je B diskretan automat.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je automat A ekstenzija diskretnog automata B pomoću jedno-utrapljivog automata A/B i neka je $u \in \mathrm{Tr}(A/B)$ proizvoljna reč. Tada za svako $a \in A$ imamo $au \in B = \mathrm{Tr}(A)$, pa smo dokazali da je A utrapljiv. $\square$

Na kraju ovog odeljka opisujemo strukturu automata čije polugrupe prelaza imaju nulu.

Teorema 3.4.4. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ ima nulu;*

(ii) *A je retraktivna ekstenzija diskretnog automata pomoću jedno-utrapljivog automata;*

(iii) *A je direktna suma jedno-utrapljivih automata sa istom utrapljujućom reči;*

(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog automata i jedno-utrapljivog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog automata i jedno-utrapljivog automata;*

(vi) *A je uniformno lokalno jedno-utrapljiv automat;*

Ako je A konačan automat, tada uslov (iii) *može biti zamenjen uslovom:*

(iii') *A je direktna suma jedno-utrapljivih automata.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(vi). Sledi neposredno na osnovu Teoreme 3.2.3.

(vi)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da je A uniformno lokalno jedno-utrapljiv automat. Uočimo proizvoljnu reč $u \in LOTW(A)$. Tada je A utrapljiv, i prema Teoremi 3.4.3, A je ekstenzija diskretnog automata $B = \mathrm{Tr}(A)$ pomoću jedno-utrapljivog automata A/B. Definišimo preslikavanje φ iz A u B sa: za $a \in A$, $a\varphi = au$. Kako je $au \in \mathrm{Tr}(A)$ i A je uniformno lokalno jedno-utrapljiv, sledi da za svako $v \in X^*$ važi $(av)\varphi = avu = au = auv = (a\varphi)v$, pa je φ homomorfizam. Sa druge strane, ako je $a \in B$, onda je a trap i $a\varphi = au = a$. Prema tome, φ jeste retrakcija A na B, što je i trebalo dokazati.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pretpostavimo da je automat A retraktivna ekstenzija diskretnog automata B pomoću jedno-utrapljivog automata A/B. Neka je φ retrakcija A na B i neka je u proizvoljna utrapljujuća reč automata A/B. Za $b \in B$, neka je $A_b = b\varphi^{-1}$. Kako je inverzna homomorfna slika podautomata takođe podautomat, to su A_b, $b \in B$, podautomati automata A i A je direktna suma ovih automata. Jasno, b je jedinstven trap automata A_b i u je utrapljujuća reč za A_b. Time smo dokazali (iii).

(iii)⇒(iv). Pretpostavimo da je automat A direktna suma jedno-utrapljivih automata A_α, $\alpha \in Y$, koji imaju istu utrapljujuću reč u. Označimo sa σ odgovarajuću d.s. kongruenciju na A. Kao što znamo, A/σ je diskretan automat. Sa druge strane, $B = \mathrm{Tr}(A)$ jeste podautomat od A. Neka je ϱ Reesova kongruencija na A određena sa B. Jasno, A/ϱ je jedno-utrapljiv automat sa utrapljujućom reči u. Konačno, $\sigma \cap \varrho = \Delta$, pošto svaka σ-klasa sadrži tačno jedan trap iz A. Ovde Δ označava relaciju jednakosti na A. Prema tome, A je poddirektan proizvod automata A/σ i A/ϱ, čime je (iv) dokazano.

(iv)⇒(v). Ova implikacija je očigledna.

(v)⇒(vi). Neka je A paralelna kompozicija diskretnog automata B i jedno-utrapljivog automata C. Neka je ϕ potapanje automata A u $B \times C$, i neka je u proizvoljna utrapljujuća reč automata C. Uočimo proizvoljno $a \in A$ i $p, q \in X^*$. Tada $a\phi = (b, c)$ za neke $b \in B$ i $c \in C$, pa je

$$\begin{aligned}(apuq)\phi &= (a\phi)puq = (bpuq, cpuq)\\ &= (b, cu) = (bu, cu)\\ &= (a\phi)u = (au)\phi,\end{aligned}$$

odakle je $apuq = au$, što je i trebalo dokazati.

Ako je A konačan i ako važi (iii'), tada je A direktna suma konačnog broja jedno-utrapljivih automata $A_1, \dots, A_k$, i ako uočimo proizvoljne $u_i \in TW(A_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, tada je $u = u_1 \cdots u_k \in TW(A_i)$, za sve $i \in \{1, \dots, k\}$, prema Teoremi 3.2.2 Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Napomena 3.4.3. Ekvivalencija (iii)⇔(vi), slično kao kod dokaza Teoreme 3.5.1, sledi i iz činjenice da je klasa $\mathbf{OTrap}_u$ varijetet za svaku reč $u \in X^*$, a onda prema Teoremi 2.3.5 važi $\mathbf{D} \circ \mathbf{OTrap}_u = L(\mathbf{OTrap}_u)$.

3.5. Polugrupe prelaza uopšteno definitnih automata

U ovom odeljku će biti izučavana klasa uopšteno definitnih automata i neke njene značajne podklase sa aspekta odgovarajućih polugrupa prelaza.

Najpre dokazujemo teoremu u kojoj je data struktura polugrupe prelaza uopšteno definitnog automata. U ovoj teoremi je dokazano i da je definicija uopšteno definitnog automata koju mi koristimo ekvivalentna definiciji koju je dao A Ginzburg [49].

Teorema 3.5.1. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija pravougaone trake;*

(ii) *A je nilpotentna ekstenzija uniformno lokalno definitnog automata;*

(iii) $(\exists m,n \in \mathbb{N})(\forall u \in X^{\geq m}, \forall v \in X^{\geq n})(\forall a \in A)(\forall p,q \in X^*)$ $aupv = auqv$*;*

(iv) *A je uopšteno definitan automat.*

Dokaz. (i)⇒(iii). Pretpostavimo da je polugrupa $S(A)$ nilpotentna ekstenzija pravougaone trake E, tj. $S(A)^k = E$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Uočimo proizvoljne $u, v \in X^{\geq k}$, $p, q \in X^*$ i $a \in A$. Tada $\eta_u, \eta_v \in E$, odakle je

$$\begin{aligned}\eta_{upv} &= \eta_u\eta_p\eta_v = \eta_u\eta_v \\ &= \eta_u\eta_q\eta_v = \eta_{uqv},\end{aligned}$$

odnosno $aupv = auqv$, što je i trebalo dokazati.

(iii)⇒(iv). Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $aupv = auqv$, za sve $a \in A$, $p, q \in X^*$, gde je $u \in X^{\geq m}$ i $v \in X^{\geq n}$. Stavimo $k = m + n$, $w \in X^{\geq k}$, $a \in A$ i $p \in X^*$. Tada je $w = uv$, za neke $u \in X^{\geq m}$ i $v \in X^{\geq n}$, odakle je $awpw = au(vpu)v = auv = aw$. Prema tome, važi (iv).

(iv)⇒(i). Jasno da je A uopšteno direktabilan automat. Tada je $S(A)$ idealska ekstenzija pravougaone trake E koju čine sve bi-nule iz $S(A)$. Štaviše, uslov (iv) daje $X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$, za neko $k \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo sledeće: ako je $s \in S(A)^k$, tada je $s = \eta_u$, gde u može biti izabran tako da pripada $X^{\geq k}$, tj. da pripada $GDW(A)$. Sada prema Lemi 1.2.1 i Teoremama 3.2.3 i 3.2.1, imamo da je $s = \eta_u \in E$. Prema tome, $S(A)^k = E$, što je i trebalo dokazati.

(iv)⇒(ii). Kako je A uopšteno direktabilan automat, to prema Teoremi 3.4.1, A jeste ekstenzija uniformno lokalno direktabilnog automata $B = \{au \,|\, a \in A, u \in GDW(A)\}$ pomoću jedno-utrapljivog automata A/B. Međutim, prema (iv) imamo da je $X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$, za neko $k \in \mathbb{N}$, pa je $au \in B$, za svako $a \in A$ i svaku reč $u \in X^{\geq k}$. Dakle, A/B je nilpotentan automat. Uočimo proizvoljno $b \in B$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Tada $b = aw$, za neko $w \in X^{\geq k}$, pa na osnovu Leme 1.2.1 i Teoreme 3.2.1 sledi da je $bvu = awvu = awu = bu$, jer $u, w \in X^{\geq k} \subseteq GDW(A)$. Dakle, B je uniformno lokalno definitan.

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je automat A nilpotentna ekstenzija uniformno lokalno definitnog automata B. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $au \in B$, za svako $a \in A$ i svaku reč $u \in X^{\geq k}$, i postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $bwv = bv$, za sve $b \in B$, $w \in X^*$ i $v \in X^{\geq m}$. Uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $v \in X^{\geq m}$, $a \in A$ i $p, q \in X^*$. Tada $au \in B$ daje $aupv = (au)pv = (au)v = (au)qv = auqv$. Prema tome, važi (iii). □

Sada ćemo dati malo podrobnije strukturu uniformno lokalno definitnih automata, koje smo koristili u prethodnoj teoremi.

Teorema 3.5.2. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija desno nulte trake;*

(ii) *A je direktna suma definitnih automata sa ograničenim stepenom definitnosti;*

(iii) *A je uniformno lokalno definitan automat.*

Ako je A konačan automat, tada uslov (ii) *može biti zamenjen uslovom:*

(ii') *A je direktna suma definitnih automata.*

Dokaz. (i)⇒(iii). Pretpostavimo da je $S(A)$ nilpotentna ekstenzija desno nulte trake E. Neka je $k \in \mathbb{N}$ tako da je $S(A)^k = E$. S obzirom na Lemu 1.2.1 i Teoreme 3.2.1, $S^k = E$ povlači $X^{\geq k} \subseteq LDW(A)$, što je očigledno ekvivalentno uslovu (iii).

(iii)⇒(i). Jasno, A je uopšteno definitan, pa prema Teoremi 3.5.1 sledi da je $S(A)$ nilpotentna ekstenzija pravougaone trake E koju čine sve bi-nule iz $S(A)$. Sa druge strane, A je uniformno lokalno direktabilan, pa prema Teoremi 3.4.2 i Lemama 1.2.1 i 1.2.2 dobijamo da je E takođe skup svih desnih nula iz $S(A)$, tj. E je desno nulta traka.

(iii)⇒(ii). Neka je $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $avu = au$, za sve $a \in A$, $u \in X^{\geq k}$ i $v \in X^*$. Definišimo relaciju ϱ na A na sledeći način: $(a, b) \in \varrho \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in X^{\geq k})\; au = bu$. Nije teško uočiti da je ϱ relacija ekvivalencije na A. Sa druge strane, iz definicije uniformne lokalne definitnosti sledi da je ϱ d.s. kongruencija na A. Neka je B proizvoljna ϱ-klasa na A i $a, b \in B$ proizvoljni elementi. Tada je $au = bu$, za svako $u \in X^{\geq k}$, pa je B definitan automat čiji stepen definitnosti ne prelazi k. Dakle, važi (ii).

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je A direktna suma definitnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je k granica stepena definitnosti ovih automata. Uočimo proizvoljne $a \in A$, $v \in X^*$ i $u \in X^{\geq k}$. Tada $a, av \in A_\alpha$, za neko $\alpha \in Y$, pa je $avu = au$, jer je $u \in DW(A_\alpha)$. Time je dokazano (iii).

Kao u dokazu Teoreme 3.4.2 dokazujemo da je (ii) ekvivalentno sa (ii') u slučaju kada je A konačan automat. □

U skladu sa definicijom operatora lokalnog zatvorenja, ako svaki monogeni podautomat datog automata A jeste reset automat, onda kažemo da je A *lokalno reset automat*. Drugim rečima, A je lokalno reset automat ako i samo ako je $aux = ax$, za sve $a \in A$, $x \in X$ i $u \in X^*$. Neposredna posledica prethodne teoreme je sledeći rezultat:

Posledica 3.5.1. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je desno nulta traka;*

(ii) *A je direktna suma reset automata;*

(iii) *A je lokalno reset automat.*

U nastavku posmatramo automate čije su polugrupe prelaza nilpotentne ekstenzije levo nultih traka.

Teorema 3.5.3. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna ekstenzija levo nulte trake;*

(ii) *A je nilpotentna ekstenzija diskretnog automata;*

(iii) *A je reverzno definitan automat.*

Dokaz. (i)⇔(iii). Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $S(A)^k = E$ levo nulta traka. Tada je $s \in E$ ako i samo ako je $s = \eta_u$, za neko $u \in X^{\geq k}$, i, sa druge strane, $\eta_u \in E$ ako i samo ako je $u \in TW(A)$. Prema tome, $S(A)^k$ je levo nulta traka, za neko $k \in \mathbb{N}$, ako i samo ako je A reverzno definitan.

(iii)⇒(ii). Prema Teoremi 3.5.2, A je ekstenzija diskretnog automata B pomoću jedno-utrapljivog automata A/B, i tada je $B = \mathrm{Tr}(A)$. Sa druge strane, prema (iii) sledi da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $au \in B$, za svako $u \in X^{\geq k}$. Dakle, A/B je nilpotentan automat, što je i trebalo dokazati.

(ii)⇒(iii). Pretpostavimo da je automat A nilpotentna ekstenzija diskretnog automata B. Jasno, $B = \mathrm{Tr}(A)$. Neka je k stepen nilpotentnosti automata A/B, i uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $\in A$ i $v \in X^*$. Tada $au \in B$, odakle je $auv = au$. Prema tome, A je reverzno definitan. $\square$

Na kraju, koristeći prethodne rezultate karakterišemo klasu uniformno lokalno nilpotentnih automata. Naravno, jedan od ekvivalenata u toj karakterizaciji razmatra polugrupe prelaza ovakvih automata.

Teorema 3.5.4. *Za automat A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$S(A)$ je nilpotentna polugrupa;*

(ii) *A je retraktivna nilpotentna ekstenzija diskretnog automata;*

(iii) *A je direktna suma nilpotentnih automata sa ograničenim stepenom nilpotentnosti;*

(iv) *A je poddirektan proizvod diskretnog automata i nilpotentnog automata;*

(v) *A je paralelna kompozicija diskretnog automata i nilpotentnog automata;*

(vi) *A je uniformno lokalno nilpotentan automat;*

Ako je A konačan automat, tada uslov (iii) *može biti zamenjen uslovom:*

(iii') *A je direktna suma nilpotentnih automata.*

Dokaz. Primetimo da je ekvivalencija uslova data po prvi put u radu L. N. Shevrina [107], a jedan dokaz ovog rezultata se može naći i u knjizi F. Gécsega i I. Peáka [46]. Međutim, ovde će biti dat novi dokaz ove ekvivalencije.

(i)⇔(vi). Jasno je da je A uniformno lokalno nilpotentan ako i samo ako $X^{\geq k} \subseteq LOTW(A)$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Međutim, ovo važi ako i samo ako $S(A)$ ima nulu 0 i $S(A)^k = \{0\}$, za neko $k \in \mathbb{N}$, prema Teoremi 3.2.1.

(vi)⇒(ii). Prema Teoremi 3.4.4, A je retraktivna ekstenzija diskretnog automata B pomoću jedno-utrapljivog automata. Sa druge strane, prema Teoremi 3.5.3, A je nilpotentna ekstenzija diskretnog automata C. Jasno da je $B = C$, pa smo dokazali (ii).

(ii)⇒(iii). Ovaj deo se dokazuje slično odgovarajućem delu dokaza Teoreme 3.4.4.

(iii)⇒(iv). Pretpostavimo da je automat A direktna suma nilpotentnih automata A_α, $\alpha \in Y$, i neka je k gornja granica stepena nilpotentnosti automata A_α, $\alpha \in Y$. Prema dokazu Teoreme 3.4.4, A je poddirektan proizvod diskretnog automata A/σ i jedno-utrapljivog automata A/ϱ, gde su σ i ϱ kongruencije na A definisane u dokazu Teoreme 3.4.4. Nije teško proveriti da je A/ϱ nilpotentan automat sa stepenom nilpotentnosti koji ne prelazi k.

(iv)⇒(v). Ova implikacija važi očigledno.

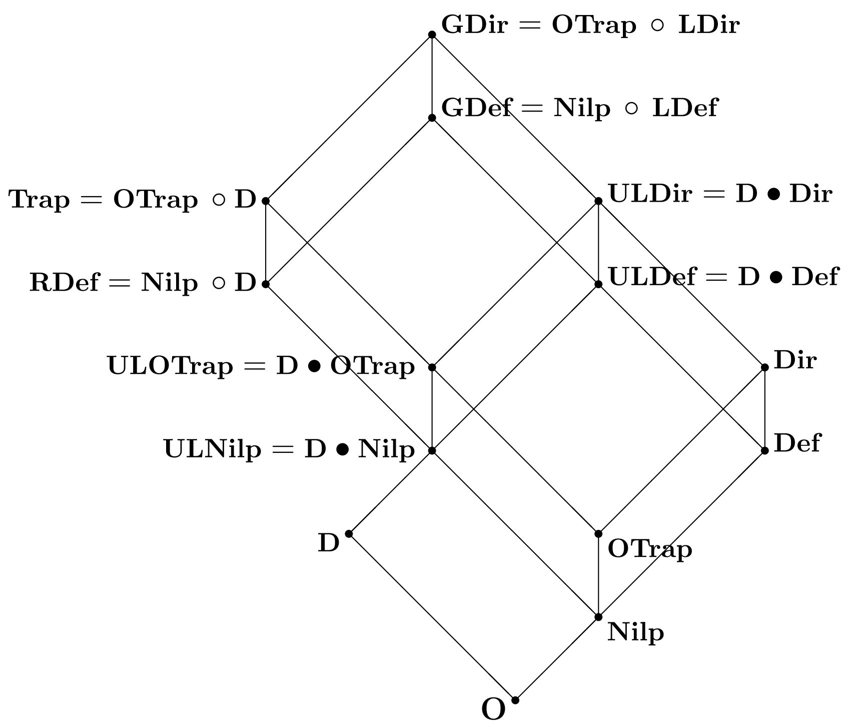
(v)⇒(vi). Pretpostavimo da je A paralelna kompozicija diskretnog automata B i nilpotentnog automata C. Tada je $X^{\geq k} \subseteq LOTW(C)$, za neko $k \in \mathbb{N}$, i ako uočimo proizvoljne $u \in X^{\geq k}$, $a \in A$ i $p, q \in X^*$, kao u dokazu Teoreme 3.4.4 dobijamo da je $apuq = au$, što je i trebalo dokazati.

Ostatak dokaza može biti izveden slično odgovarajućim delovima dokaza Teorema 3.4.4 i 3.5.2. □

Napomenimo na kraju još jednom da je ekvivalencija uslova (iii) i (vi) Teoreme 3.5.4, kao i ekvivalencija uslova (ii) i (iii) Teoreme 3.5.2, neposredna posledica Teoreme 2.3.5 i činjenice da nilpotentni automati sa ograničenim stepenom nilpotentnosti, kao i definitni sa ograničenim stepenom definitnosti, predstavljaju varijetete.

Na kraju navodimo posledicu rezultata dobijenih u Teoremama 3.4.1–3.4.4 i 3.5.1–3.5.4. Pri tome ćemo osim Małcevljevog proizvoda klasa automata, označenog sa $\circ$, za prikazivanje relacija između klasa automata koristiti i proizvod označen sa $\bullet$. Naime, sa $\mathbf{D} \bullet \mathbf{Dir}$ označavamo direktne sume direktabilnih automata sa istom usmeravajućom reči, $\mathbf{D} \bullet \mathbf{Def}$ označava direktne sume definitnih automata sa ograničenim stepenom definitnosti, $\mathbf{D} \bullet \mathbf{OTrap}$ označava sve direktne sume jedno-utrapljivih automata sa istom utrapljujućom reči, a sa $\mathbf{D} \bullet \mathbf{Nilp}$ označavamo direktne sume nilpotentnih automata sa ograničenim stepenom nilpotentnosti.

Posledica 3.5.2. *Za uopštene varijetete automata prikazane na Slici* 3.3.1 *važe sledeće relacije:*



Glava 4

Poddirektna razlaganja automata

Poddirektna razlaganja dospela su u sam centar pažnje algebrista 1944. godine, kada je G. Birkhoff u čuvenom radu [18] dokazao dve veoma važne opšte teoreme o tim razlaganjima. Prvom od njih, Birkhoff je pokazao da se sva poddirektna razlaganja proizvoljne algebre mogu realizovati preko familija kongruencija koje odvajaju elemente te algebre. Korišćenjem ovog rezultata dokazao je i drugu važnu teoremu tog rada, slavnu Birkhoffovu teoremu o reprezentaciji, kojom je dokazao da se svaka algebra može razložiti u poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih algebri.

Ovom drugom teoremom, Birkhoff je, u nekom smislu, sveo problem opisivanja strukture algebri na problem opisivanja strukture njihovih poddirektno nerazloživih komponenti. Tako se, na primer, svaka algebra iz nekog varijeteta algebri može dobiti polazeći od poddirektno nerazloživih algebri iz tog varijeteta. Sve ovo iniciralo je intenzivno izučavanje poddirektno nerazloživih algebri raznih tipova, što će u ovoj glavi biti učinjeno za automate.

U teoriji automata izučavani su uglavnom poddirektno nerazloživi automati koji pripadaju izvesnim specijalnim klasama automata. Tako je M. Yoeli u [122] izučavao poddirektno nerazložive povezane autonomne automate, G. H. Wenzel je u [121] uopštio njegove rezultate opisavši sve poddirektno nerazložive autonomne automate, a dalja uopštenja tih rezultata dali su Z. Ésik i B. Imreh u [45], za komutativne automate, i I. Babcsányi u [11], za takozvane $(t; m, n)$-komutativne automate. Sa druge strane, B. Imreh je u [63] dao karakterizaciju i konstrukciju svih poddirektno nerazloživih nilpotentnih automata, u radu istog autora [64] to je učinjeno i za definitne automate, a u radu M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33] i za reverzno definitne i uopšteno definitne automate.

U najopštijem slučaju, poddirektno nerazložive automate izučavao je samo M. Setoyanagi u radu [106], a potom i S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković i M. Steinby u [21]. U ovom drugom radu će biti publikovan i jedan deo opštih rezultata o poddirektno nerazloživim automatima koji će biti prikazani u ovoj glavi. Drugi deo čine neki rezultati koji još uvek nisu publikovani.

Metodologija koja će biti korišćena pri opisivanju strukture poddirektno nerazloživih automata ima svoje korene u teoriji polugrupa. Naime, podautomati automata imaju izvesne osobine koje ih čine veoma bliskim idealima polugrupa, pa se razni pojmovi teorije polugrupa, koji se tamo vezuju za pojam ideala, mogu definisati i uspešno koristiti i u teoriji automata, vezavši ih za podautomate automata. Takav je, na primer, pojam Reesove kongruencije na automatu, o kome će biti reči u Odeljku 4.1. Korišćenjem Reesovih kongruencija, u istom odeljku definišemo i izučavamo pojmove ekstenzije automata i guste ekstenzije automata, koji takođe imaju svoje analogone u teoriji polugrupa, o čemu se više informacija može dobiti u knjizi M. Petricha [87]. U drugom odeljku ove glave, motivisani takođe idejama iz teorije polugrupa, posebno onim iz poznatog rada B. M. Scheina [104], uvodimo i bavimo se i nekim druge novim pojmovima, kao što su pojmovi jezgra i srži automata, disjunktivnog elementa automata itd. Sve ove nove koncepte koristimo u Odeljku 4.3 u dokazu opšte teoreme koja opisuje strukturu poddirektno nerazloživih automata. Potom, u Odeljku 4.4, ovu opštu teoremu primenjujemo na nilpotentne, definitne, reverzno definitne i uopšteno definitne automate.

U poslednjem odeljku ove glave, Odeljku 4.5, bavimo se jednim pitanjem koje je, u implicitnoj formi, postavio J. Płonka u [95]. Naime, kao što smo videli u prethodnoj glavi, regularizacija neregularnog varijeteta automata $\boldsymbol{V}$ poklapa se sa supremumom $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V}$ varijeteta $\mathbf{D}$ diskretnih automata i varijeteta $\boldsymbol{V}$, u mreži varijeteta automata. To je rezultat koji je J. Płonka dokazao za unarne algebre u pomenutom radu. U tom radu je takođe napomenuo da bi se moglo očekivati da je $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V} = \mathbf{D} \oplus \boldsymbol{V}$, gde $\mathbf{D} \oplus \boldsymbol{V}$ označava klasu koja se sastoji od svih poddirektnih proizvoda automata iz $\mathbf{D}$ i automata iz $\boldsymbol{V}$, ali je dokazao da to ipak ne važi, pri čemu je dao primer za to. Glavnom teoremom Odeljka 4.5 biće dokazano da neregularni varijetet automata $\boldsymbol{V}$ ima osobinu da je $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V} = \mathbf{D} \oplus \boldsymbol{V}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{V}$ sadržan u uopštenom varijetetu **OTrap** jedno-utrapljivih automata.

4.1. Reesove kongruencije i ekstenzije automata

Pojam Reesove kongruencije automata po podautomatu, koji je analogan pojmu Reesove kongruencije polugrupe po nekom njegovom idealu, je već uveden u Odeljku 1.3. Ovde definišemo jedno uopštenje tog pojma. Naime, uvodimo pojam Reesove ekstenzije kongruencije koja je definisana na podautomatu posmatranog automata. Takođe, razmatramo neka svojstva tako uvedenog operatora Reesove ekstenzije. Pomoću ovog pojma uvodimo još jedan tip ekstenzija automata, tzv. guste ekstenzije, koji, takođe, ima svoj analog u teoriji polugrupa. Koristeći guste ekstenzije automata opisujemo i neka moguća poddirektna razlaganja posmatranog automata.

Neka je B podautomat automata A i θ binarna relacija na B. Definišemo relaciju $R(\theta)$ na A sa: $R(\theta) = \theta \cup \Delta_A$. Ako je θ relacija kongruencije na B, tada je $R(\theta)$ relacija kongruencije na A i zovemo je *Reesova ekstenzija relacije* θ na automat A. Specijalno, relacija kongruencije $R(\nabla_B)$ se označava sa ϱ_B i to je dobro poznata *Reesova* *kongruencija* na automatu A određena podautomatom B. Takođe je jasno da je $\varrho_\varnothing = \Delta_A$.

Za automat A kažemo da je *trap-ekstenzija* automata B ako je A dobijen tako što je automatu B dodat trap, odnosno ako je A direktna suma automata B i trivijalnog automata, ili, što je takođe ekvivalentno, ako je A ekstenzija automata B pomoću dvoelementnog diskretnog automata D_2.

U narednoj teoremi je dato jedno vrlo značajno svojstvo operatora Reesove ekstenzije. Naime, ovaj operator uspostavlja korespondenciju između kongruencija na podautomatu i kongruencija na celom automatu koje su sadržane u Reesovoj kongruenciji posmatranog podautomata.

Teorema 4.1.1. *Neka je B podautomat automata A. Tada preslikavanje $R : \theta \mapsto R(\theta)$ jeste kompletni izomorfizam mreže* $\mathrm{Con}(B)$ *na ideal* $[\Delta_A, \varrho_B]$ *mreže* $\mathrm{Con}(A)$.

Dokaz. Uočimo $\vartheta \in \mathrm{Con}(A)$ tako da je $\Delta_A \subseteq \vartheta \subseteq \varrho_B$. Tada je $\vartheta \cap \nabla_B \in \mathrm{Con}(B)$ i

$$R(\vartheta \cap \nabla_B) = (\vartheta \cap \nabla_B) \cup \Delta_A = (\vartheta \cup \Delta_A) \cap (\nabla_B \cup \Delta_A) = \vartheta \cap \varrho_B = \vartheta.$$

Prema tome, R preslikava $\mathrm{Con}(B)$ na ideal $[\Delta_A, \varrho_B]$ mreže $\mathrm{Con}(A)$. Uočimo sada proizvoljne $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(B)$. Ako je $\theta_1 \subseteq \theta_2$, tada je jasno da je $R(\theta_1) \subseteq R(\theta_2)$. Obratno, ako je $R(\theta_1) \subseteq R(\theta_2)$, odnosno ako je $\theta_1 \cup (\Delta_A \setminus \Delta_B) = \theta_2 \cup (\Delta_A \setminus \Delta_B)$, tada je lako uočiti da važi $\theta_1 \subseteq \theta_2$. Prema tome, dokazali smo da je R bijekcija i da R i njegov inverz očuvavaju uređenje, pa je R izomorfizam uređenih skupova. Kao što je poznato, svaki izomorfizam uređenih skupova koji su kompletne mreže jeste kompletni izomorfizam mreža. $\square$

Lako se proverava da važi i sledeći rezultat.

Lema 4.1.1. *Neka su B i C_i, $i \in I$, podautomati automata A. Tada*

(1) $\bigcap_{i\in I} \varrho_{C_i} = \varrho_C$, *gde je* $C = \bigcap_{i\in I} C_i$;

(2) $\varrho_B = \Delta_A \ \Leftrightarrow\ |B| \leq 1$.

Dokaz. (1) Uočimo proizvoljna stanja $a, b \in A$ takva da je $a \neq b$, jer je slučaj $a = b$ trivijalan. Tada $(a, b) \in \bigcap_{i\in I} \varrho_{C_i}$ ako i samo ako je $(a, b) \in \varrho_{C_i}$, za svako $i \in I$, a to važi ako i samo ako je $a, b \in C_i$, za svako $i \in I$, odnosno, ako je $a, b \in \cap_{i\in I} C_i = C$, tj. ako i samo ako je $(a, b) \in \varrho_C$.

(2) Ova ekvivalencija je očigledna. $\square$

Neka je automat A ekstenzija automata B. Relaciju kongruencije θ na A nazivamo *B-kongruencijom* ako se restrikcija relacije θ na B poklapa sa identičkom relacijom na B, tj. važi $\theta \cap \nabla_B = \Delta_B$. Kažemo da je automat A *gusta ekstenzija* automata B ako je identička relacija Δ_A jedina B-kongruencija na A.

U narednoj lemi su opisani uslovi pod kojima je trap ekstenzija nekog automata njegova gusta ekstenzija.

Lema 4.1.2. *Neka je automat A trap-ekstenzija automata B. Tada je automat A gusta ekstenzija automata B ako i samo ako automat B nema trap.*

Dokaz. Uzmimo da je $A = B \cup \{a\}$, gde je a trap automata A.

Pretpostavimo da je automat A gusta ekstenzija automata B. Ako B ima trap b, stavimo $C = \{a, b\}$. Tada je $\varrho_C \cap \nabla_B \subseteq \varrho_C \cap \varrho_B = \Delta_A$, prema Lemi 4.1.1. Odatle sledi da ϱ_C jeste B-kongruencija na A, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom. Prema tome, automat B nema trap.

Obratno, pretpostavimo da automat B nema trap. Uočimo proizvoljnu B-kongruenciju θ na A i proizvoljan par $(b, c) \in \theta$. Ako je $b, c \in B$, tada je $(b, c) \in \theta \cap \nabla_B = \Delta_B$, odakle je $b = c$. Sa druge strane, ako je $b, c \in A \setminus B$, tada je $b = c = a$. Preostaje još slučaj $b \in B$ i $c = a \in A \setminus B$, kao i njemu dualan, čije je razmatranje analogno. Dakle, uočimo $x \in X$ proizvoljno. Tada iz $(a, b) \in \theta$ sledi $(ax, bx) \in \theta$, tj. $(a, bx) \in \theta$, odakle, s obzirom da je $(a, b) \in \theta$, sledi da je $(b, bx) \in \theta$. Kako je $b, bx \in B$, to je $b = bx$, pa je b trap automata B, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, slučajevi $b \in B$ i $c \in A \setminus B$, kao i $b \in A \setminus B$ i $c \in B$, nisu mogući. Ovim je dokazano da je $\theta = \Delta_A$, tj. da je A gusta ekstenzija od B. $\square$

Sledeća teorema daje jedno poddirektno razlaganje automata koji ima netrivijalni podautomat. Naime, takav automat može biti predstavljen u obliku poddirektnog proizvoda odgovarajućeg faktor automata i neke guste ekstenzije posmatranog podautomata.

Teorema 4.1.2. *Neka su A, B i C automati takvi da je A ekstenzija automata B pomoću C. Tada je A poddirekan proizvod automata C i neke guste ekstenzije D automata B.*

Dokaz. Dokazaćemo najpre da je unija proizvoljnog lanca B-kongruencija na A takođe B-kongruencija. Neka je θ_i, $i \in I$, lanac B-kongruencija na A. Uvedimo oznaku $\theta = \bigcup_{i \in I} \theta_i$. Tada je $\theta \cap \nabla_B = (\bigcup_{i \in I} \theta_i) \cap \nabla_B = \bigcup_{i \in I} (\theta_i \cap \nabla_B) = \bigcup_{i \in I} \Delta_B = \Delta_B$, što je i trebalo dokazati. Odavde, prema Zornovoj lemi, sledi da parcijalno uređen skup svih B-kongruencija na A ima maksimalan element μ.

Stavimo $D = A/\mu$. Imajući u vidu da μ jeste B-kongruencija, sledi da je B izomorfan podautomatu B' automata D datim sa $B' = \{a\mu \,|\, a \in B\}$, pa D može biti posmatran kao ekstenzija automata B. Dokazaćemo da je D gusta ekstenzija automata B.

Prema Teoremi o korespondenciji (Teorema 1.1.3), preslikavanje $\theta \mapsto \theta/\mu$, gde je $\theta/\mu = \{(a\mu, b\mu) \in D \times D \,|\, (a, b) \in \theta\}$, jeste izomorfizam intervala $[\mu, \nabla_A]$ mreže $\mathrm{Con}(A)$ na mrežu $\mathrm{Con}(D)$. Uočimo $\theta \in [\mu, \nabla_A]$ tako da θ/μ jeste B'-kongruencija na D. Da bismo dokazali da θ jeste B-kongruencija na A, uočimo proizvoljne $a, b \in B$ takve da je $(a, b) \in \theta$. Tada je $a\mu, b\mu \in B'$ i $(a\mu, b\mu) \in \theta/\mu$, odakle sledi da je $a\mu = b\mu$, tj. važi $(a, b) \in \mu$. Međutim, μ je B-kongruencija, pa je $a = b$, što je i trebalo dokazati. Prema tome, θ je B-kongruencija na A takva da je $\mu \subseteq \theta$, i zbog maksimalnosti kongruencije

μ zaključujemo da je $\theta = \mu$, pa je $\theta/\mu = \Delta_D$. Dakle, dokazali smo da je D gusta ekstenzija automata B.

Konačno, $\mu \cap \varrho_B = \Delta_A$, s obzirom da μ jeste B-kongruencija, pa je A poddirektan proizvod automata $A/\mu = D$ i $A/B = C$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Napomena 4.1.1. Primetimo da je poddirektno razlaganje dobijeno u Teoremi 4.1.2 netrivijalno ako je $|B| > 1$ i na automatu A postoje bar dve B-kongruencije. Zaista, ako je $|B| = 1$, tada je $\varrho_B = \Delta_A$, pa je A poddirektan proizvod automata A i A/μ. Sa druge strane, ako A ima samo jednu B-kongruenciju, tada je $\mu = \Delta_A$, pa je A gusta ekstenzija automata B. Odatle je A poddirektan proizvod automata A/ϱ_B i A.

Jedan specijalan slučaj Teoreme 4.1.2 razmatran je u sledećoj lemi.

Lema 4.1.3. *Neka su A, B i C automati takvi da je A retraktivna ekstenzija automata B pomoću automata C. Tada je automat A poddirektan proizvod automata B i C.*

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna retrakcija iz A na B. Tada $\ker\phi$ jeste B-kongruencija na A, pa je $\varrho_B \cap \ker\phi = \Delta_A$. Dakle, A je poddirektan proizvod automata $A/B = C$ i $A\phi = B$. $\square$

Napomena 4.1.2. Primetimo, takođe, da je ovaj rezultat neposredna posledica Teoreme 4.1.2, jer je $\ker\phi$ maksimalna B-kongruencija na A. Zaista, ako θ jeste B-kongruencija na A takva da je $\ker\phi \subseteq \theta$, tada za proizvoljne $a, b \in A$ takve da je $(a, b) \in \theta$ imamo da je $(a, a\phi), (b, b\phi) \in \ker\phi \subseteq \theta$, odakle, zbog tranzitivnosti relacije θ, sledi da je $(a\phi, b\phi) \in \theta$. Međutim, kako je $a\phi, b\phi \in B$ i θ je B-kongruencija, to je $a\phi = b\phi$, pa je $(a, b) \in \ker\phi$. Dakle, $\ker\phi = \theta$.

4.2. Jezgro, srž i disjunktivni elementi automata

Analogno sa odgovarajućim pojmovima u teoriji plugrupa, uvodimo sledeće pojmove: najmanji podautomat automata A, ako postoji, nazivamo *jezgrom automata A*, a najmanji netrivijalan podautomat automata A, ako postoji, zovemo *srž automata A*.

Lema 4.2.1. *Važi sledeće:*

(a) *Automat koji ima jezgro može imati najviše jedan trap.*

(b) *Automat koji ima srž može imati najviše dva trapa.*

Dokaz. Pretpostavimo da automat A ima jezgro K. Tada je K sadržan u svakom podautomatu od A, i ako A ima trap a_0, tada je $K \subseteq \{a_0\}$, odakle sledi da je $K = \{a_0\}$ i A ne može imati neki drugi trap.

Pretpostavimo, sada, da automat A ima srž C. Pretpostavimo da A ima tri različita trapa a_1, a_2 i a_3. Tada su $D = \{a_1, a_2\}$ i $E = \{a_2, a_3\}$ podautomati od A i važi $C \subseteq D \cap E$, jer je C srž automata A. Međutim, $D \cap C$ je jednoelementan skup, odakle sledi da je C trivijalan, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, A može imati najviše dva trapa. $\square$

Analogno pojmu trap-povezanog automata uvedenom u Glavi 2, može se uvesti i pojam jako trap-povezanog automata. Naime, automat A sa trapom a_0 je *jako trap-povezan* ako su njegovi jedini podautomati A i $\{a_0\}$.

Moguće strukture jezgra i srži automata opisane su u narednoj teoremi.

Teorema 4.2.1. *Za automat A važi sledeće:*

(a) *Jezgro automata A, ako postoji, je jako povezan automat.*

(b) *Srž automata A, ako postoji, je ili jako povezan, ili jako trap-povezan, ili je dvoelementan diskretan automat.*

Dokaz. (a) Pretpostavimo da A ima jezgro K. Tada za svako $a \in K$ imamo da je $K \subseteq S(a) \subseteq K$, odakle je $K = S(a)$. Znači, K je jako povezan.

(b) Pretpostavimo da A ima srž C. Razlikovaćemo tri slučaja u zavisnosti od broja trapova u A. Prema Lemi 4.2.1 sledi da drugih slučajeva nema.

Ako A nema trapova, tada je C jezgro automata A, pa je, prema delu (a), jako povezan automat.

Ako A ima tačno jedan trap a_0, tada za svako $a \in C \setminus \{a_0\}$ imamo da je $S(a)$ netrivijalan podautomat od A sadržan u C, pa je $C = S(a)$. Prema tome, u ovom slučaju je C jako trap-povezan ukoliko je $a_0 \in C$, ili jako povezan, ukoliko $a_0 \notin C$.

Pretpostavimo, sada, da A ima dva različita trapa a_1 i a_2. Tada je $\{a_1, a_2\}$ netrivijalan podautomat od A, sadržan u C, pa je dakle $C \subseteq \{a_1, a_2\}$, odnosno $C = \{a_1, a_2\}$, čime smo dokazali da je C dvoelementan diskretan automat. $\square$

Pojmovi disjunktivnog podskupa i disjunktivnog elementa su dobro poznati u teoriji polugrupa. O njihovom značaju u teoriji polugrupa može se više toga naći u knjizi G. Lallementa [74]. Ovde su uvedeni analogni pojmovi za automate.

Neka je H podskup automata A i neka je θ relacija ekvivalencije na A. Ako je H unija familije θ-klasa, tada kažemo da je H *zasićen sa* θ, ili da θ *zasićuje* H. Ako je H podskup automata A, tada je relacija π_H na A definisana sa

$$(a, b) \in \pi_H \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in X^*)(au \in H \Leftrightarrow bu \in H)$$

kongruencija. Analogno odgovarajućem pojmu u teoriji polugrupa, ovu relaciju nazivamo *glavna kongruencija* određena sa H. Ovakav naziv opravdava činjenica da je π_H najveća relacija kongruencije na A koja zasićuje H. Podskup H automata A je *disjunktivan* (u A) ako je $\pi_H = \Delta_A$. Ako je $H = \{a\}$, tada pišemo π_a umesto $\pi_{\{a\}}$, i ako je $\{a\}$ disjunktivan podskup, tada a nazivamo *disjunktivnim elementom*.

Sledeći rezultat je analogan poznatom rezultatu teorije polugrupa koji je dao B. M. Schein u [104], ali je, zbog potpunosti, ovde ipak dokazan u terminima teorije automata.

Lema 4.2.2. *Netrivijalan poddirektno nerazloživ automat ima najmanje dva različita disjunktivna elementa.*

Dokaz. Neka je A netrivijalan poddirektno nerazloživ automat. Tada je $\bigcap_{a\in A} \pi_a = \Delta_A$, pa iz poddirektne nerazloživosti automata A sledi $\pi_a = \Delta_A$, za neko $a \in A$. Dalje, važi $\bigcap_{b\in A\setminus\{a\}} \pi_b = \Delta_A$, što opet daje $\pi_b = \Delta_A$, za neko $b \in A \setminus \{a\}$. Prema tome, a i b su različiti disjunktivni elementi u A. $\square$

U nastavku je dat vrlo koristan rezultat u kome su dokazana neka svojstva automata koji imaju bar dva različita disjunktivna elementa.

Teorema 4.2.2. *Neka je A automat sa najmanje dva različita disjunktivna elementa. Tada*

(a) *A ima srž C;*

(b) *svaki disjunktivni element iz A se nalazi u C.*

Dokaz. Neka je a proizvoljan disjunktivan element u A. Uočimo takođe proizvoljan netrivijalan podautomat B automata A. Ako $a \notin B$, tada je $\{a\}$ zasićen sa ϱ_B, što je nemoguće, jer je $\{a\}$ zasićen jedino sa Δ_A. Prema tome, $a \in B$. Ovo, dalje, znači da je svaki disjunktivan element iz A sadržan u preseku C svih netrivijalnih podautomata od A, i kako A ima najmanje dva različita disjunktivna elementa, to je C netrivijalan podautomat od A, a onda i srž od A. Time smo dokazali i (a) i (b). $\square$

4.3. Poddirektno nerazloživi automati

Kao što je već konstatovano, uopšte u algebri, poddirektno nerazložive algebre imaju posebno veliki značaj. U ovom odeljku razmatramo jedan od klasičnih problema u algebri: opisati strukturu poddirektno nerazloživih automata. Poddirektni automati iz pojedinih klasa automata, razmatranih u Glavi 3, su već izučavani u literaturi. Ovde je opisana struktura poddirektno nerazloživih automata u opštem slučaju.

Sledeći rezultat je već poznat, ali ovde dajemo njegov dokaz zbog potpunosti, kao i zbog toga što se koriste nove metode. Naime, on se dobija kao neposredna posledica Teoreme 4.1.1.

Lema 4.3.1. *Automat A je poddirekno nerazloživ ako i samo ako je svaki njegov podautomat poddirektno nerazloživ.*

Dokaz. Jasno je da ako je svaki podautomat automata A poddirektno nerazloživ, tada je i sam automat A, kao svoj podautomat, poddirektno nerazloživ.

Obratno, pretpostavimo da je automat A poddirektno nerazloživ i da je B njegov poddirektno razloživ podautomat. Tada postoje netrivijalne kongruencije ϱ i θ na automatu B takve da je $\varrho \cap \theta = \Delta_B$. Međutim, onda je i

$$
\begin{aligned}
&R(\varrho) \cap R(\theta) = (\varrho \cup \Delta_A) \cap (\theta \cup \Delta_A) = \\
&(\varrho \cap \theta) \cup \Delta_A = \Delta_B \cup \Delta_A = \Delta_A.
\end{aligned}
$$

Takođe, iz $\varrho, \theta \neq \Delta_B$ sledi da su i $R(\varrho), R(\theta) \neq \Delta_A$. Dakle, automat A je poddirektan proizvod netrivijalnih automata $A/R(\varrho)$ i $A/R(\theta)$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, svaki podautomat poddirektno nerazloživog automata A je poddirektno nerazloživ. $\square$

U nastavku je dokazan vrlo koristan rezultat kojim je data jedna karakterizacija strukture poddirektno nerazloživog automata.

Teorema 4.3.1. *Neka je automat A ekstenzija netrivijalnog automata B. Tada je A poddirektno nerazloživ ako i samo ako je B poddirektno nerazloživ i A je gusta ekstenzija automata B.*

Dokaz. Pretpostavimo da je automat A poddirektno nerazloživ. Prema Lemi 4.3.1, B je takođe poddirektno nerazloživ. Sa druge strane, prema Teoremi 4.1.2, A je poddirektan proizvod automata A/B i guste ekstenzije $D = A/\mu$ automata B. Međutim, zbog poddirektne nerazloživosti automata A sledi da je ili $\varrho_B = \Delta_A$ ili je $\mu = \Delta_A$. U prvom slučaju je $|B| = 1$, što je nemoguće, s obzirom na pretpostavku o netrivijalnosti automata B. U drugom slučaju je $A = D$, pa je A gusta ekstenzija automata B.

Obratno, pretpostavimo da je B poddirektno nerazloživ i da je A gusta ekstenzija automata B. Iz poddirektne nerazloživosti automata B sledi da mreža kongruencija $\mathrm{Con}(B)$ ima jedinstveni atom μ, prema Teoremi 1.1.6. Dokazaćemo da je $R(\mu)$ jedinstveni atom mreže $\mathrm{Con}(A)$. Pretpostavimo najpre da je $\Delta_A \subseteq \vartheta \subset R(\mu)$, za neko $\vartheta \in \mathrm{Con}(A)$. Prema Teoremi 4.1.1, postoji $\theta \in \mathrm{Con}(B)$ tako da je $\vartheta = R(\theta)$, i kako preslikavanje R i njegov inverz očuvavaju uređenja, to je $\Delta_B \subseteq \theta \subset \mu$. Međutim, kako je μ atom u $\mathrm{Con}(B)$, to je $\theta = \Delta_B$, odakle je $\vartheta = R(\Delta_B) = \Delta_A$. Znači, dokazali smo da je $R(\mu)$ atom u $\mathrm{Con}(A)$. Neka je, dalje, ϑ atom u $\mathrm{Con}(A)$ različit od $R(\mu)$. Tada je $\vartheta \cap R(\mu) = \Delta_A$, odakle je

$$
\Delta_A = \vartheta \cap (\mu \cup \Delta_A) = (\vartheta \cap \mu) \cup (\vartheta \cap \Delta_A) = (\vartheta \cap \mu) \cup \Delta_A,
$$

pa zaključujemo da je $\vartheta \cap \mu \subseteq \Delta_A$, što znači da je $\vartheta \cap \mu = \Delta_B$. Sa druge strane, ako je θ restrikcija relacije ϑ na B, tada je $\theta = \vartheta \cap \nabla_B$, pa je $\theta \in \mathrm{Con}(B)$ i

$$
\mu \cap \theta = \mu \cap \vartheta \cap \nabla_B = \mu \cap \vartheta = \Delta_B,
$$

odakle je $\theta = \Delta_B$, jer je μ jedinstveni atom u mreži Con(B). Prema tome, dokazali smo da ϑ jeste B-kongruencija na automatu A, pa zaključujemo da je $\vartheta = \Delta_A$, pošto je A gusta ekstenzija automata B. Međutim, ovaj zaključak je u suprotnosti sa pretpostavkom da je ϑ atom u Con(A). Dakle, $R(\mu)$ je jedinstveni atom u Con(A), pa je prema Teoremi 1.1.6, automat A poddirektno nerazloživ. □

Sada navodimo rezultat koji daje jednu važnu osobinu poddirektno nerazloživih automata. Naime dokazujemo da takvi automati mogu imati najviše dva trapa.

Lema 4.3.2. *Svaki netrivijalan poddirektno nerazloživ automat ima srž i najviše dva trapa.*

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Leme 4.2.2, Teoreme 4.2.2 i Leme 4.2.1. □

Sledeća teorema predstavlja glavni rezultat ove glave. Njom je u potpunosti je opisana struktura poddirektno nerazloživih automata u zavisnosti od broja trapova automata.

Teorema 4.3.2. *Netrivijalan automat A je poddirektno nerazloživ ako i samo ako je gusta ekstenzija automata B pomoću trap-povezanog automata, pri čemu automat B zadovoljava jedan od sledećih uslova:*

(A_0) *B je poddirektno nerazloživ i jako povezan;*

(A_1) *B je poddirektno nerazloživ i zadovoljava jedan od sledećih uslova:*

- (A_{11}) *B je jako trap-povezan automat;*
- (A_{12}) *B je trap-ekstenzija jako povezanog automata;*

(A_2) *B je dvoelementni diskretan automat.*

Štaviše, za proizvoljno $k \in \{0, 1, 2\}$, uslov (A_k) je zadovoljen ako i samo ako A ima k trapova.

Dokaz. Pretpostavimo da je A poddirektno nerazloživ automat. Prema Lemi 4.3.2, A ima srž C i najviše dva trapa. Na osnovu Teoreme 4.2.2, C je poddirektno nerazloživ i A je gusta ekstenzija od C. Nadalje razlikujemo tri slučaja:

Slučaj 1: Ako A nema trap, tada je C jezgro automata A i ono zadovoljava uslov (A_0), na osnovu Teoreme 4.2.1. Takođe, $C \subseteq S(a)$, za svako $a \in A$, pa je A/C trap-povezan automat.

Slučaj 2: Pretpostavimo da A ima tačno jedan trap a_0. Ako je $a_0 \in C$, tada je C jako trap-povezan, prema dokazu Teoreme 4.2.1, pa je zadovoljen uslov (A_{11}). U suprotnom, ako $a_0 \notin C$, tada je C jako povezan, i $B = C \cup \{a_0\}$ jeste trap-ekstenzija jako povezanog automata C. Dakle, B zadovoljava (A_{12}). Prema Teoremi 4.2.2, A je gusta ekstenzija automata B. Takođe imamo da je $a_0 \in C$, u prvom podslučaju, ili $a_0 \in B$, u drugom podslučaju, i ako je $a \in A \setminus \{a_0\}$, onda je $S(a)$ netrivijalan podautomat od A, pa je $C \subseteq S(a)$. Ovo znači da su A/C, u prvom podslučaju, i A/B, u drugom podslučaju, trap-povezani automati.

Slučaj 3: Pretpostavimo da A ima dva trapa a_1 i a_2. Tada je $\{a_1, a_2\}$ podautomat od A, odakle je $C \subseteq \{a_1, a_2\}$, pa zaključujemo da je $C = \{a_1, a_2\}$, tj. da C zadovoljava uslov (A_2). Štaviše, za svako $a \in A \setminus C$, $S(a)$ je netrivijalan podautomat od A, pa je $C \subseteq S(a)$, što znači da je A/C trap-povezan automat.

Obratno, pretpostavimo da je automat A gusta ekstenzija podautomata B pomoću trap-povezanog automata A/B, gde B zadovoljava jedan od uslova (A_0), (A_1) i (A_2). Tada je B poddirektno nerazloživ i, prema Teoremi 4.3.1, sledi da je A takođe poddirektno nerazloživ. Štaviše, kako je A/B trap-povezan automat, to se trapovi iz A, ako postoje, nalaze u B. Prema tome, ako B zadovoljava uslov (A_k), za neko $k \in \{0, 1, 2\}$, onda B i A imaju k trapova. $\square$

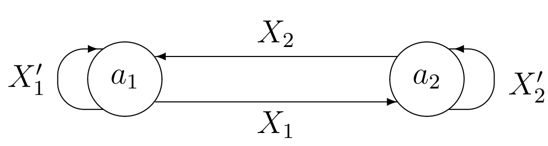
Primer 4.3.1 Kao što smo videli, u Teoremi 4.3.2 važnu ulogu igraju četiri vrste poddirektno nerazloživih automata – jako povezani automati, jako trap-povezani automati, trap-ekstenzije jako povezanih automata i dvoelementni diskretni automat. Zato ćemo dati primere takvih automata. Ako je dat jako povezan automat, onda se njegova trap-ekstenzija konstruiše veoma jednostavno. Stoga ćemo dati primere samo poddirektno nerazloživih diskretnih, jako povezanih i jako trap-povezanih automata. Pri tome ćemo konstruisati najjednostavnije moguće primere – biće to automati sa samo dva stanja.

Primetimo da dvoelementni automati mogu imati samo dve relacije ekvivalencije – identičku i univerzalnu, pa time i samo dve kongruencije. Odatle sledi da su svi dvoelementni automati poddirektno nerazloživi.

Predstavimo ulazni alfabet X u obliku

$$X = X_1 \cup X_1' = X_2 \cup X_2', \quad \text{gde je } X_1 \cap X_1' = X_2 \cap X_2' = \varnothing,$$

pri čemu neki od skupova X_1, X_1', X_2 i X_2' mogu biti i prazni. Tada je svaki dvoelementni automat izomorfan automatu prikazanom na Slici 4.3.1.



Slika 4.3.1

Ukoliko je $X_1 = X_2 = \varnothing$, tj. $X_1' = X_2' = X$, tada se radi o dvoelementnom diskretnom automatu.

Sa druge strane, ako je $X_1 \neq \varnothing$ i $X_2 \neq \varnothing$, tada dobijamo dvoelementan jako povezan automat. U slučaju kada je $|X| \geq 2$, $X_1' = X_2$ i $X_2' = X_1$, tada dobijamo dvoelementni reset automat, koji smo već razmatrali u prethodnoj glavi. To je takođe automat koji realizuje lift koji opslužuje dva sprata. Drugi zanimljiv podslučaj je kada je $X_1' = X_2' = \varnothing$, tj. $X_1 = X_2 = X$. U ovom slučaju dobijamo automat koji realizuje rad najjednostavnijeg prekidača ili semafora.

Treći mogući slučaj je da je tačno jedan od skupova X_1 i X_2 prazan. Neka je, recimo, $X_2 = \varnothing$ i $X_1 \neq \varnothing$. U tom slučaju dobijamo jako trap-povezan automat sa trapom a_2. Ovaj automat je takođe jedno-utrapljiv, a nilpotentan je ako i samo ako je $X_1' = \varnothing$, u kom slučaju je to 1-nilpotentan automat. Naime, svaki nilpotentan dvoelementan automat jeste 1-nilpotentan.

Koristeći do sada dobijene rezultate, u narednoj teoremi su opisani poddirektno nerazloživi automati koji imaju dva trapa.

Teorema 4.3.3. *Neka je A automat sa dva trapa. Tada je A poddirektno nerazloživ ako i samo ako su njegovi trapovi disjunktivni.*

Dokaz. Označimo sa a_1 i a_2 trapove automata A.

Ako je A poddirektno nerazloživ, tada na osnovu Teoreme 4.3.2 imamo da je $T = \{a_1, a_2\}$ srž automata A. Takođe, prema Lemi 4.2.2 sledi da A ima najmanje dva disjunktivna elementa. Konačno, prema Teoremi 4.2.2, disjunktivni elementi iz A se nalaze u T, pa su onda a_1 i a_2 disjunktivni elementi.

Obratno, neka su a_1 i a_2 disjunktivni elementi. Tada prema Teoremi 4.2.2 imamo da automat A ima srž C, i jasno $C = \{a_1, a_2\}$. Kako je C poddirektno nerazloživ, to na osnovu iste teoreme zaključujemo da je A poddirektno nerazloživ. $\square$

4.4. Poddirektno nerazloživi uopšteno definitni automati

Ovde ćemo koristeći Teoremu 4.3.2 dati karakterizaciju poddirektno nerazloživih automata koji pripadaju nekim važnim klasama automata.

Naime, najpre opisujemo strukturu poddirektno nerazloživih nilpotentnih automata. Pomenimo da se karakterizacije ovakvih automata može naći i u radovima B. Imreha [63] i M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33].

Teorema 4.4.1. *Neka A jeste n-nilpotentan automat sa trapom a_0, gde je $n \in \mathbb{N}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *A je poddirektno nerazloživ;*

(ii) *A zadovoljava sledeće uslove:*

 (a) *u parcijalno uređenom skupu $(A \setminus \{a_0\}, |\,)$ postoji najveći element a_1;*

 (b) *za proizvoljne $a, b \in A \setminus \{a_0, a_1\}$ postoji $u \in X^+$ tako da je $au \neq bu$;*

(iii) *A ima dvoelementnu srž K i a_0 je disjunktivan element;*

(iv) *A ima disjunktivan element različit od a_0;*

(v) *A je gusta ekstenzija nilpotentnog poddirektno nerazloživog automata stepena nilpotentnosti $n - k$, za svako $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$;*

(vi) *A je gusta ekstenzija dvoelementnog 1-nilpotentnog automata $B = \{a_0, a_1\}$.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Ovo je dokazano u [63] za slučaj konačnih automata. Imajući u vidu da je svaki lanac u $(A \setminus \{a_0\}, |\,)$ najviše dužine $n - 1$, gde je uzeto da A jeste n-nilpotentan automat, dokaz se ne menja bitno i u slučaju beskonačnih automata.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kako je a_1 najveći element u $(A \setminus \{a_0\}, |\,)$, to za svako $a \in A \setminus \{a_0\}$ postoji $u \in X^*$ tako da je $au = a_1$, pa je $a_1 \in S(a)$, tj. $\{a_0, a_1\} \subseteq S(a)$ za svako $a \in A$, pa A ima srž. Jasno da je $S(a_1) = \{a_0, a_1\}$, pa je srž $K = \{a_0, a_1\}$.

Treba pokazati da je a_0 disjunktivan. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje različiti elementi $a, b \in A$ tako da za sve $u \in X^*$ važi $au = a_0$ ako i samo ako je $bu = a_0$. S obzirom da je $a_0 e = a_0$, to nijedan od elemenata a i b nije jednak a_0. Takođe, ako bi bilo, recimo $a = a_1$, tada zbog osobine (a) ovog elementa, postoji reč $v \in X^+$ takva da je $bv = a_1$. Onda zbog $a_1 v \neq a_0$ i $S(a_1) = \{a_0, a_1\}$ važi $a_1 v = a_1$, što je nemoguće jer je $a_1 x = a_0$, za svako $x \in X$, zbog nilpotentnosti automata A. Dakle, važi da je $a, b \in A \setminus K$. Tada, prema uslovu (b) iz (ii), postoji $u \in X^+$ tako da je $au \neq bu$. Jasno da je $|u| < n$, gde je n stepen nilpotentnosti automata A. Neka je p reč maksimalne dužine koja zadovoljava uslov (b). Ukoliko je $ap = a_0$, tada je i $bp = a_0$, i obratno, zbog izbora elemenata a, b, što je u suprotnosti sa izborom reči p. Dalje, ako je $ap = a_1$ i $bp \neq a_1$, to postoji $v \in X^+$ tako da je $bpv = a_1$, a onda je $apv = a_1 v = a_0$, pa $(a, b) \notin \pi_{a_0}$, što je suprotno izboru elemenata a, b. Na kraju, ako $ap, bp \notin \{a_0, a_1\}$, tada, prema (b), postoji $q \in X^+$ tako da je $apq \neq bpq$ i $|pq| > |p|$, što je opet nemoguće jer je uzeto da je p reč maksimalne dužine koja zadovoljava uslov (b). Dakle, ne postoje različiti elementi a, b takvi da je $(a, b) \in \pi_{a_0}$, odnosno, a_0 je disjunktivan element.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Neka A jeste n-nilpotentan automat sa disjunktivnim trapom a_0 i $K = \{a_0, a_1\}$ je srž ovog automata. Neka je $a \in A \setminus \{a_0\}$ proizvoljan element. Kako je $K \subseteq S(a)$, to postoji $u \in X^*$ tako da je $a_1 = au$, tj. $a \,|\, a_1$. Štaviše, ako postoji

$b \in A \setminus \{a_0\}$ tako da $a_1 \,|\, b$, tada $b \in S(a_1) \subseteq K$, pa je $b = a_1$. Znači, a_1 je najveći element u parcijalno uređenom skupu $(A \setminus \{a_0\}, \,|\,)$, pa je zadovoljen uslov (a).

Neka su sada $a, b \in A \setminus \{a_0, a_1\}$ proizvoljni elementi. Kako je a_0 disjunktivan, to postoji $u \in X^+$ tako da je $au = a_0$ i $bu \neq a_0$, ili obratno, što u svakom slučaju znači da je zadovoljen uslov (b).

(i)⇒(iv). S obzirom da, prema Lemi 4.2.2, svaki poddirektno nerazloživ automat ima bar dva disjunktivna elementa, i A kao nilpotentan ima jedan trap, to je bar jedan disjunktivan element različit od trapa.

(iv)⇒(ii). Neka A jeste n-nilpotentan automat sa trapom a_0 i disjunktivnim elementom $a_1 \neq a_0$. Uočimo proizvoljan element $a \in A$. Kako je a_1 disjunktivan element, to za elemente a i a_0 postoji $u \in X^+$ tako da je $au = a_1$ jer je, svakako, $a_0 u = a_0 \neq a_1$. Dakle, $a \,|\, a_1$. Pretpostavimo da postoji $b \neq \{a_0, a_1\}$ takav da $a_1 \,|\, b$. Tada, prema prethodnom, i $b \,|\, a_1$, pa postoje reči $u, v \in X^+$ takve da je $a_1 u = b$ i $bv = a_1$. Međutim, onda je $(uv)^n$ reč dužine veće od n takva da je $a_1(uv)^n = a_1 \neq a_0$, što je u suprotnosti sa činjenicom da automat A jeste n-nilpotentan. Dakle, a_1 je najveći element u $(A \setminus \{a_0\}, \,|\,)$. Takođe, jasno da je $K = \{a_0, a_1\}$.

Za proizvoljne $a, b \in A \setminus K$, zbog disjunktivnosti elementa a_1, sledi da postoji $u \in X^+$ tako da je $au = a_1$ i $bu \neq a_1$, ili obratno, što daje (b).

(iii)⇒(v). Neka A jeste n-nilpotentan automat i neka je $K = \{a_0, a\}$ srž ovog automata, pri čemu je a_0 disjunktivan element. Uvedimo oznaku $A_k = \{au \,|\, a \in A,\ u \in X^{\geq k}\} = AX^{\geq k}$. Jasno je da je A_k podautomat od A. Tada je $K \subseteq A_k$. Prema Lemi 4.3.1, A_k je poddirektno nerazloživ. Dokazaćemo da je A gusta ekstenzija podautomata A_k. Neka je θ proizvoljna A_k-kongruencija na A, tj. $\theta \cap \varrho_{A_k} = \Delta_{A_k}$. Kako je $a_0 \in A_k$ to postoje dve mogućnosti: θ zasićuje $\{a_0\}$ ili postoji $b \in A \setminus A_k$ tako da je $(a_0, b) \in \theta$. U prvom slučaju iz disjunktivnosti elementa a_0 sledi da je $\theta = \Delta_A$. Razmotrimo drugi slučaj. Kako je $a \in K \subseteq S(b)$, to postoji $u \in X^*$ tako da je $a = bu$. Iz $(a_0, b) \in \theta$ sledi da je $(a_0 u, bu) \in \theta$, tj. $(a_0, a) \in \theta$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da θ jeste A_k-kongruencija. Dakle, drugi slučaj je nemoguć. Prema tome, važi $\theta = \Delta_A$, tj. A je gusta ekstenzija automata A_k. Kako za svaku reč $u \in X^{\geq k}$ i svako $a \in A_k$ važi $au \in A_k$, to A/A_k jeste k-nilpotentan. Takođe, za $b \in A_k$ je $b = au$ za neke $a \in A$ i $u \in X^{\geq k}$, pa je za $v \in X^{n-k}$ zadovoljeno $bv = auv \in X^{\geq n} = \{a_0\}$, tj. A_k je $(n-k)$-nilpotentan automat.

(v)⇒(vi). Neposredno sledi iz (v) za slučaj $k = n - 1$.

(vi)⇒(i). Kako je A gusta ekstenzija poddirektno nerazloživog automata B, to je prema Teoremi 4.3.1, A poddirektno nerazloživ automat. □

Napomenimo ovde da se u radu B. Imreha [63] nalazi algoritam za konstrukciju nilpotentnih poddirektno nerazloživih automata.

Napomena 4.4.1. Neka je γ relacija na automatu A definisana sa

$$a \gamma b \;\Leftrightarrow\; S(a) = S(b),$$

ili, ekvivalentno, sa

$$a \gamma b \;\Leftrightarrow\; D(a) = D(b),$$

i neka je sa G_a označena γ-klasa elementa a iz A. Tada je $G_a = S(a) \cap D(a)$, pri čemu je G_a najveći jako povezan podskup od A koji sadrži a, za proizvoljno $a \in A$. Drugim rečima, za proizvoljan automat A, njegove γ-klase jesu maksimalni jako povezani podskupovi od A.

Nije teško videti da relacija deljenja $|$, koja je u opštem slučaju samo kvazi-uređenje, jeste parcijalno uređenje na automatu A ako i samo ako su sve γ-klase od A jednoelementne, tj. $\gamma = \Delta$ na A, ili, drugim rečima, ako svi maksimalni jako povezani podskupovi od A jesu trivijalni. Takvu osobinu imaju nilpotentni automati, pa zbog toga, kako je naznačeno u Teoremi 4.4.1, relacija deljenja na nilpotentnim automatima jeste parcijalno uređenje.

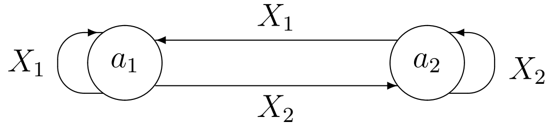
Istu osobinu imaju i neki automati veoma bliski nilpotentnim automatima – lokalno nilpotentni automati. Naime, ako je A lokalno nilpotentan automat i elementi a i b su u relaciji γ u A, tj. a i b generišu isti monogeni podautomat B od A, tada B jeste i monogeni podautomat od B generisan sa a, odnosno b, pa su, dakle, a i b u relaciji γ i u B. Međutim, automat B, po pretpostavci, jeste nilpotentan, pa su njegove γ-klase jednoelementne, što znači da je $a = b$. Ovim smo dokazali da su sve γ-klase od A jednoelementne, odakle dobijamo da relacija deljenja na A jeste parcijalno uređenje.

Sa druge strane, druga dva veoma bliska uopštenja nilpotentnih automata, definitni i jedno-utrapljivi automati, nemaju takvu osobinu, tj. relacija deljenja na njima ne mora biti parcijalno uređenje. Daćemo i primere za to.

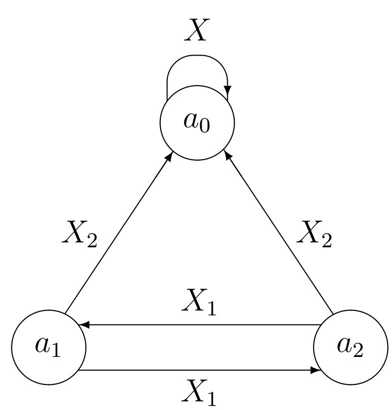
Primeri koje ćemo dati važe za automate sa ulaznim alfabetom X takvim da je $|X| \geq 2$. U tom slučaju možemo alfabet X predstaviti u obliku

$$X = X_1 \cup X_2, \quad \text{gde je } X_1 \neq \varnothing,\; X_2 \neq \varnothing \text{ i } X_1 \cap X_2 = \varnothing.$$

Uočimo sada automate zadate sledećim slikama.



Slika 4.4.1



Slika 4.4.2

Automat zadat Slikom 4.4.1 je, kao što smo već ranije videli, dvoelementan reset automat, pa je definitan, a takođe je i jako povezan, što se lako vidi sa slike. To znači da taj automat ima samo jednu γ-klasu, pa relacija deljenja na njemu nije parcijalno uređenje.

Drugi automat, zadat Slikom 4.4.2, je jedno-utrapljiv automat sa trapom a_0, a vidimo i da je jako trap-povezan, što znači da njegove γ-klase jesu $\{a_0\}$ i $\{a_1, a_2\}$. Prema tome, one nisu sve jednoelementne, pa relacija deljenja nije parcijalno uređenje ni na ovom automatu.

Takođe, koristeći Teoremu 4.3.2 dobijamo karakterizaciju definitnih i reverzno definitnih poddirektno nerazloživih automata. Karakterizacija poddirektno nerazloživih definitnih automata se može naći i u radovima B. Imreha [64] i M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33], dok je struktura poddirektno nerazloživih reverzno definitnih automata, takođe, data u radu M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33].

Naredne dve teoreme se mogu dokazati bez velikih teškoća, primenjujući Teoremu 4.3.2, pa će njihovi dokazi biti izostavljeni.

Teorema 4.4.2. *Definitan automat A je poddirektno nerazloživ ako i samo ako zadovoljava jedan od sledeća dva uslova:*

(1) *A je poddirektno nerazloživ nilpotentan automat;*

(2) *A je gusta nilpotentna ekstenzija poddirektno nerazloživog jako povezanog automata.*

Teorema 4.4.3. *Reverzno definitan automat A je poddirektno nerazloživ ako i samo ako zadovoljava jedan od sledeća dva uslova:*

(1) *A je poddirektno nerazloživ nilpotentan automat;*

(2) *A je gusta nilpotentna ekstenzija dvoelementnog diskretnog automata.*

Poddirektno nerazloživi uopšteno definitni automati su, takođe, okarakterisani u radu M. Ćirića, B. Imreha i M. Steinbya [33]. Ovde je data još jedna njihova karakterizacija.

Teorema 4.4.4. *Uopšteno definitan automat A je poddirektno nerazloživ ako i samo ako zadovoljava jedan od sledeća četiri uslova:*

(1) *A je poddirektno nerazloživ nilpotentan automat;*

(2) *A je gusta nilpotentna ekstenzija poddirektno nerazloživog jako povezanog automata;*

(3) *A je gusta nilpotentna ekstenzija dvoelementnog diskretnog automata;*

(4) *A je gusta nilpotentna ekstenzija trap-ekstenzije poddirektno nerazloživog jako povezanog automata.*

Dokaz. Primetimo najpre da ako automat A zadovoljava neki od uslova (1)–(4), tada, na osnovu Teoreme 4.3.2, sledi da je A poddirektno nerazloživ. Dokazaćemo i obratnu implikaciju.

Kako je automat A uopšteno definitan, to je on, prema Teoremi 3.5.1, nilpotentna ekstenzija automata D koji je uniformno lokalno definitan. Dalje, prema Teoremi 3.5.2, automat D je direktna suma definitnih automata sa ograničenim stepenom definitnosti. Ukoliko je automat D trivijalan, tada je A nilpotentan automat, pa važi (1). Ako je D netrivijalan, iz činjenice da je automat A poddirektno nerazloživ i Teoreme 4.3.1 sledi da je automat D poddirektno nerazloživ i da je automat A gusta ekstenzija automata D. S obzirom da je automat D poddirektno nerazloživ i direktna suma definitnih automata, to postoje dve mogućnosti: D je definitan ili je D trap-ekstenzija definitnog automata. Dalje, ako je D definitan, iz njegove poddirektne nerazloživosti i Teoreme 4.4.2 sledi da je D ili nilpotentan, pa onda važi (1), ili je D gusta nilpotentna ekstenzija poddirektno nerazloživog jako povezanog automata B. U slučaju kada je D trap-ekstenzija definitnog automata, tada iz njegove poddirektne nerazloživosti, Teorema 4.3.2 i 4.4.2 sledi da je D gusta nilpotentna ekstenzija B koji je ili trap-ekstenzija poddirektno nerazloživog jako povezanog automata ili dvoelementan diskretan automat.

Dokazaćemo sada da je u svakom slučaju automat A takođe gusta nilpotentna ekstenzija automata B. Naime, kako je A nilpotentna ekstenzija automata D i automat D nilpotentna ekstenzija automata B, to je i automat A nilpotentna ekstenzija automata B. Dokazaćemo i da je gusta. Neka je θ proizvoljna B-kongruencija na A. Tada je restrikcija kongruencije θ na automat D takođe B-kongruencija na D, pa je θ identička relacija na D. Znači, θ je D-kongruencija. Međutim, kako je A gusta ekstenzija automata D to je $\theta = \Delta_A$, što je i trebalo dokazati.

Znači, automat A je ili nilpotentan, ili je gusta nilpotentna ekstenzija automata B koji može biti: jako povezan poddirtektno nerazloživ, trap-ekstenzija poddirektno nerazloživog jako povezanog automata ili dvoelementan diskretan automat, što redom daje da automat A zadovoljava uslove (2), (4) ili (3). □

4.5. Poddirektan proizvod nekih varijeteta automata

U ovom odeljku definišemo pojam poddirektnog proizvoda dveju klasa automata. Zatim razmatramo poddirektne proizvode varijeteta svih diskretnih automata i proizvoljnog neregularnog varijeteta i opisujemo varijetete za koje je ovaj proizvod jednak supremumu posmatranog varijeteta i varijeteta diskretnih automata.

U sledećoj teoremi su razmatrani neregularni varijeteti koji ne sadrže netrivijalan poddirektno nerazloživ jako povezan automat.

Teorema 4.5.1. *Neka je* $\boldsymbol{V}$ *neregularan varijetet automata. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{OTrap}$;

(ii) $\boldsymbol{V}$ *ne sadrži netrivijalan jako povezan automat;*

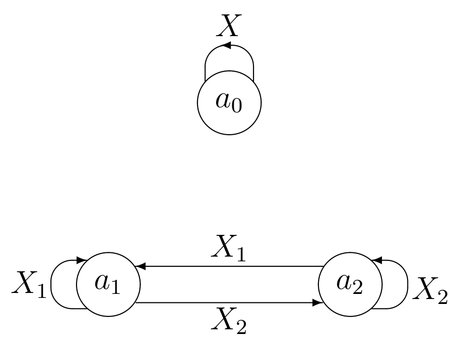
(iii) $\boldsymbol{V}$ *ne sadrži netrivijalan poddirektno nerazloživ jako povezan automat.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii) i (ii)$\Rightarrow$(iii). Ove implikacije su očigledne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da važi (iii). Neka je $A \in \boldsymbol{V}$ proizvoljan netrivijalan poddirektno nerazloživ automat. Prema Teoremi 4.3.2, A ima podautomat B koji zadovoljava jedan od uslova (A_0), (A_1) i (A_2) pomenute teoreme. S obzirom da je A direktabilan, to A ne može imati dva različita trapa, pa možemo odmah isključiti slučaj (A_2). Sa druge strane, $B \in \boldsymbol{V}$, pa slučaj (A_0) takođe nije moguć zbog polazne pretpostavke da važi (iii). Prema tome, B zadovoljava (A_1), pa zaključujemo da A ima trap. Međutim, $A \in \boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}$, pa egzistencija trapa daje $A \in \mathbf{OTrap}$. Dakle, dokazali smo da se svaki poddirektno nerazloživ automat iz $\boldsymbol{V}$ nalazi u $\mathbf{OTrap}$.

Uočimo, sada, proizvoljan automat $A \in \boldsymbol{V}$. Tada je A poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih automata A_i, $i \in I$, i jasno, $A_i \in \boldsymbol{V}$, pa je prema prethodnom delu dokaza $A_i \in \mathbf{OTrap}$, za svako $i \in I$. Označimo sa P direktan proizvod automata A_i, $i \in I$. Kako svaki A_i ima tačno jedan trap, to i P ima tačno jedan trap. Sa druge strane, $P \in \boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{Dir}$, odakle sledi da je $P \in \mathbf{OTrap}$, pa je i $A \in \mathbf{OTrap}$, kao podautomat od P. Prema tome, dokazali smo da važi (i), čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Neka su K_1 i K_2 dve klase automata. Tada $K_1 \oplus K_2$ označava klasu svih automata koji su poddirektni proizvodi jednog automata iz K_1 i jednog automata iz K_2. Klasu $K_1 \oplus K_2$ zovemo *poddirektan proizvod klasa* K_1 i K_2.



Slika 4.5.1

J. Płonka je u svom radu [95] konstatovao da je moguć pogrešan zaključak da je za svaki neregularan varijetet $\boldsymbol{V}$ zadovoljena relacija $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V} = \boldsymbol{D} \oplus \boldsymbol{V}$. On je dao i kontraprimer za ovakvo tvrđenje. Naime, posmatrao je varijetet reset automata, tj. varijetet $\mathbf{Def}_1$. Tada je A automat sa Slike 4.5.1 direktna suma dva automata iz $\mathbf{Def}_1$, pa prema Teoremi 2.3.5 važi $A \in \mathbf{D} \circ \mathbf{Def}_1 = L(\mathbf{Def}_1) = \mathbf{D} \vee \mathbf{Def}_1$. Međutim, automat A ima samo jednu netrivijalnu kongruenciju, pa je, prema Teoremi 1.1.6, poddirektno nerazloživ, a kako sam nije ni u jednoj od klasa $\mathbf{Def}_1$ i $\mathbf{D}$, to se ne može predstaviti u obliku poddirektnog proizvoda automata iz $\mathbf{D}$ i $\mathbf{Def}_1$.

U Teoremi 4.5.2 su, međutim, precizirani uslovi pod kojima je zadovoljena navedena relacija. Naime, dokazano je da ovakva relacija važi samo za varijetete koji su opisani u Teoremi 4.5.1.

Teorema 4.5.2. *Neka je $\boldsymbol{V}$ neregularan varijetet automata. Tada*

$$\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V} = \boldsymbol{D} \bigoplus \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{OTrap}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V} = \boldsymbol{D} \bigoplus \boldsymbol{V}$ i da $\boldsymbol{V} \nsubseteq \mathbf{OTrap}$. Tada prema Teoremi 4.5.1, postoji netrivijalan poddirektno nerazloživ jako povezan automat A takav da je $A \in \boldsymbol{V} \setminus \mathbf{OTrap}$. Neka je A' trap-ekstenzija automata A. Prema Lemi 4.1.2, A' je gusta ekstenzija od A, i prema Teoremi 4.3.1, A' je poddirektno nerazloživ. Sa druge strane, $A' \in \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V}$, $A' \notin \boldsymbol{D}$ i $A' \notin \boldsymbol{V}$. Međutim, ovo znači da $A \notin \boldsymbol{D} \bigoplus \mathbf{OTrap}$, što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Prema tome, važi $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{OTrap}$.

Obratno, neka je $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{OTrap}$. Kako je svaki automat iz $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V}$ poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih automata iz $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V}$, dovoljno je dokazati da se svaki poddirektno nerazloživ automat iz $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V}$ nalazi u $\boldsymbol{D}$ ili u $\boldsymbol{V}$.

Uočimo proizvoljan poddirektno nerazloživ automat $A \in \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V}$. Kako je $\boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{V} = \boldsymbol{D} \circ \boldsymbol{V}$, to je A direktna suma automata $A_\alpha \in \boldsymbol{V}$, $\alpha \in Y$. S obzirom da je $\boldsymbol{V} \subseteq \mathbf{OTrap}$, sledi da svaki A_α ima trap, pa je prema Posledici 4.3.2, $|Y| \leq 2$. Ako je $|Y| = 2$, tada A ima tačno dva trapa a_1 i a_2, i $C = \{a_1, a_2\}$ jeste srž automata A, prema Teoremi 4.3.2. Ako je $C \neq A$, tada je A povezan i nerazloživ u direktnu sumu, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $|Y| = 2$. Tako zaključujemo da A mora biti dvoelementan diskretan automat, tj. $A \in \boldsymbol{D}$. Sa druge strane, ako je $|Y| = 1$, tada je jasno da je $A \in \boldsymbol{V}$. $\square$

Glava 5

Korespondencija između varijeteta automata i polugrupa

Još pri samom začetku teorije automata i formalnih jezika, bilo je uočeno da se u njoj veoma uspešno mogu koristiti rezultati jedne druge, nešto starije algebarske teorije – teorije polugrupa. Tako je nastao trougao "polugrupe–automati–jezici" koji danas, tridesetak godina posle svog nastanka, čini jedan od glavnih stožera pomenute teorije.

Veza između automata i jezika je jasna – glavna uloga automata, onih bez izlaza, jeste upravo raspoznavanje jezika koje se njima vrši. Sa druge strane, veza između polugrupa i jezika ostvaruje se preko slobodnih polugrupa i monoida, kao čiji podskupovi se jezici i definišu, i preko izvesnih njihovih faktora koje nazivamo sintaksičkim polugrupama jezika. I na kraju, automati i polugrupe su vezani takođe preko slobodnih polugrupa i monoida koji predstavljaju ulaze tih automata, kao i preko izvesnih njihovih faktora, koje u ovom slučaju zovemo polugrupama prelaza automata.

Prve plodne rezultate ove veze su dale u radu M. Schützenbergera [105], koji je, koristeći se takozvanim aperiodičkim polugrupama, rešio važan problem generisanja takozvanih "zvezda slobodnih" jezika, tj. jezika koji se mogu dobiti iz elementarnih jezika upotrebom, konačan broj puta, samo operacija unije i množenja jezika, a bez upotrebe "Kleenejeve zvezda operacije"[1] Istu ideju, veoma uspešno je iskoristio i S. Eilenberg u knjizi [41], koji je dokazao čuvenu teoremu koja je danas poznata pod nazivom "Eilenbergova teorema o korespondenciji". Korespondencija o kojoj je reč uspostavljena je, uz pomoć sintaksičkih monoida jezika, između klasa monoida koje u današnjoj terminologiji nazivamo pseudovarijetetima monida i izvesnih sistema jezika, koje ćemo, sledeći terminologiju iz knjige J. M. Howiea [61], nazivati VRL-preslikavanjima[2] – preslikavanje koje svakom konačnom alfabetu pridružuje klasu racionalnih (raspoznatljivih) jezika zatvorenu za uniju i komplementaciju (a time i presek) i leve i desne razlomke, a familija klasa jezika, indeksirana konačnim alfabetima, koja odgovara tom preslikavanju, je zatvorena i za inverzne slike pri homomorfizmima

[1] Ova operacija se još naziva i "iteracija".

[2] VRL je skraćenica od "varietal rational language".

slobodnih monoida nad tim alfabetima.

Eilenbergova teorema inicirala je niz istraživanja koja su imala za zadatak da uspostave vezu između raznih specijalnih VRL preslikavanja i pseudovarijeteta monoida i polugrupa[3)], ali i istraživanja koja su se bavila opštim vezama između VRL preslikavanja, pseudovarijeteta polugrupa i kongruencija na slobodnim polugrupama, kao i odgovarajućim univerzalno algebarskim uopštenjima. Takvi su, na primer, radovi J. Almeidae [3], D. Thériena [118] i [119], itd. Sa druge strane, Eilenbergova teorema inicirala je i izučavanje sličnih veza između jezika i automata, koje je obavljeno u radu M. Steinbya [115]. Prema tome, u gore pomenutom trouglu "polugrupe–jezici–automati", preostalo je da se prouče veze koje postoje između izvesnih klasa automata i polugrupa, pri čemu se prirodno nameće korišćenje polugrupa prelaza automata. Upravo to je glavni zadatak istraživanja čiji će rezultati biti prikazani u ovoj glavi.

Izučavanje ovih veza između klasa automata i polugrupa posebno zanimljivim čini činjenica da, nasuprot jezicima, i automati i polugrupe jesu algebre – prve su unarnog a druge mono-binarnog tipa. To stvara mogućnost proučavanja njihovih veza sa potpuno algebarskog aspekta, tako da, na primer, možemo proučavati veze između varijeteta, uopštenih varijeteta, pseudovarijeteta i drugih algebarskih klasa automata i polugrupa. To će ovde biti učinjeno za varijetete automata i polugrupa.

Kada automate razmatramo kao algebre unarnog tipa, što ćemo, naravno, i ovde činiti, onda smo obavezni da pri takvim razmatranjima tip takvih algebri, odnosno ulazni alfabet tih automata, držimo fiksiranim. Kada takvo ograničenje primenimo na polugrupe prelaza tih automata, dobijamo polugrupe koje moraju imati generatorni skup čija kardinalnost ne prelazi kardinalnost ulaznog alfabeta automata. To nas dovodi do jednog sasvim novog pojma, do pojma κ-varijeteta polugrupa, gde je κ dati kardinalni broj. Pojam κ-varijeteta uvodimo i izučavamo u Odeljku 5.2, pri čemu koristimo jedan drugi novi pojam, pojam slabo invarijantne kongruencije, koji uvodimo i njime se bavimo u prethodnom odeljku, Odeljku 5.1. U Odeljku 5.3 uvodimo i proučavamo i treći novi pojam, pojam σ-zatvorenog varijeteta, ili kraće σ-varijeteta automata. Konačno, u Odeljku 5.4, dokazujemo teoremu o korespondenciji između σ-varijeteta automata i κ-varijeteta polugrupa.

U Odeljku 5.5 ostavljamo po strani ograničenje o kardinalnosti generatornih skupova razmatranih polugrupa, čime dolazimo do druge teoreme o korespondenciji koja je bliža Eilenbergovoj teoremi. To je korespondencija između varijeteta polugrupa i takozvanih $\sigma\varepsilon$-varijetalnih preslikavanja, koja definišemo kao preslikavanja koja proizvoljnom alfabetu X pridružuju σ-varijetet X-automata, pri čemu su komponente tog preslikavanja određene različitim alfabetima vezane još jednim dodatnim uslovom koji, u nekom smislu, liči na uslov zatvorenosti VRL-preslikavanja za inverzne homomorfne slike.

Pri uspostavljanju pomenutih korespondencija koriste se, kao što smo već nagovestili, polugrupe prelaza, odnosno Myhillove kongruencije automata. Međutim, te kongruencije vezane su za regularne identitete zadovoljene na automatu, zbog čega σ-varijetete možemo naći samo među regularnim varijetetima automata. Prirodno

[3)] Videti knjige J. M. Howiea [61], G. Lallementa [74], J. E. Pina [91] i druge.

se nameće pitanje: Šta je sa neregularnim varijetetima automata? Da li se i za njih može uspostaviti korespondencija sa κ-varijetetima polugrupa? Da bi smo dali odgovor na ovo pitanje, u Odeljku 5.6 uvodimo još jedan novi pojam, pojam karakteristične polugrupe neregularnog, odnosno direktabilnog automata, i zamenjujući tom polugrupom polugrupu prelaza automata, dolazimo pojma σ_C-varijeteta automata čijim se izučavanjem bavimo u ovom odeljku.

Svi rezultati prikazani u ovoj glavi takođe su potpuno novi i originalni.

5.1. Slabo invarijantne kongruencije

U izučavanju identiteta zadovoljenih na algebrama i varijeteta algebri, ključnu ulogu igraju takozvane potpuno invarijantne kongruencije na term algebrama. U ovom odeljku uvodimo pojam slabo invarijantne kongruencije na slobodnoj polugrupi. Dokazujemo da svaka potpuno invarijantna kongruencija na slobodnoj polugrupi jeste slabo invarijantna. Za sada nije pronađen primer slabo invarijantne kongruencije koja nije potpuno invarijantna. Dokazujemo i neke osobine slabo invarijantnih kongruencija slične osobinama potpuno invarijantnih kongruencija. Za skup svih slabo invarijantnih kongruencija na slobodnoj polugrupi se dokazuje da je kompletna mreža.

Najpre dajemo definiciju slabo invarijantne kongruencije.

Neka je X proizvoljan alfabet. Za kongruenciju θ polugrupe X^+ kažemo da je *slabo invarijantna kongruencija* ako zadovoljava uslov

- za sve kongruencije ρ_1 i ρ_2 polugrupe X^+ takve da važi $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$, iz $\theta \subseteq \rho_1$ sledi da je $\theta \subseteq \rho_2$.

Dokazaćemo sada da je klasa svih potpuno invarijantnih kongruencija definisanih na polugrupi X^+ podklasa klase slabo invarijantnih kongruencija.

Teorema 5.1.1. *Neka je X proizvoljan alfabet. Tada svaka potpuno invarijantna kongruencija na polugrupi X^+ jeste slabo invarijantna.*

Dokaz. Neka je θ potpuno invarijantna kongruencija na X^+ i neka su ρ_1 i ρ_2 kongruencije na X^+ takve da je $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$ i $\theta \subseteq \rho_1$. Dokazaćemo da je tada i $\theta \subseteq \rho_2$.

Za $i \in \{1, 2\}$ neka $\psi_i : X^+ \to X^+/\rho_i$ jeste prirodni epimorfizam kongruencije ρ_i i neka je $\phi : X^+/\rho_2 \to X^+/\rho_1$ izomorfizam. Tada je $\psi_2\phi : X^+/ \to X^+/\rho_1$ epimorfizam, pa za proizvoljno $x \in X$ postoji $p_x \in X^+$ tako da je

$$x\psi_2\phi = p_x\rho_1 = p_x\psi_1.$$

Definišimo sada preslikavanje $\varphi : X^+ \to X^+$ sa

$$x\varphi = p_x, \quad \text{za } x \in X.$$

Tada je φ endomorfizam slobodne polugrupe X^+ i za svako $x \in X$ važi

$$x\varphi\psi_1 = p_x\psi_1 = x\psi_2\phi.$$

Kako je $\varphi\psi_1 : X^+ \to X^+/\rho_1$ takođe homomorfizam, to je $\varphi\psi_1 = \psi_2\phi$.

Uzmimo sada proizvoljan par $(u, v) \in \theta$. Tada je $(u\varphi, v\varphi) \in \theta$, jer je θ potpuno invarijantna kongruencija na X^+, i kako je, po pretpostavci, $\theta \subseteq \rho_1$, to $(u\varphi, v\varphi) \in \rho_1$, tj. $(u\varphi)\rho_1 = (v\varphi)\rho_1$. Prema tome, važi

$$u\psi_2\phi = u\varphi\psi_1 = v\varphi\psi_1 = v\psi_2\phi,$$

tj. $u\psi_2\phi = v\psi_2\phi$, pa kako je ϕ izomorfizam, to je $u\psi_2 = v\psi_2$. Dakle, $(u, v) \in \rho_2$, čime smo dokazali da je $\theta \subseteq \rho_2$. $\square$

Prethodna teorema nam sugeriše sledeći problem.

Problem 5.1.1. Da li postoji primer slabo invarijantne kongruencije koja nije potpuno invarijantna?

Potpuno invarijantne kongruencije na algebri, prema svojoj definiciji, jesu kongruencije zatvorene za endomorfizme te algebre. Narednom teoremom sličnu osobinu dokazujemo i za slabo invarijantne kongruencije, s tom razlikom što se ovde dokazuje da su one zatvorene za epimorfizme slobodne polugrupe na sebe.

Teorema 5.1.2. *Neka je X proizvoljan alfabet i θ slabo invarijantna kongruencija na X^+. Tada za proizvoljni epimorfizam $\phi : X^+ \to X^+$ i proizvoljne $u, v \in X^+$ važi:*

$$(u, v) \in \theta \;\Rightarrow\; (u\phi, v\phi) \in \theta.$$

Dokaz. Neka je $\pi : X^+ \to X^+/\theta$ prirodni epimorfizam kongruencije θ i neka je $\phi : X^+ \to X^+$ proizvoljni epimorfizam. Tada je $\phi\pi : X^+ \to X^+/\theta$ takođe epimorfizam, pa prema Teoremi o homomorfizmu (Teorema 1.1.1) imamo da je

$$X^+/\ker(\phi\pi) \cong X^+/\theta.$$

Sa druge strane, imamo da je i $\theta \subseteq \theta$, pa kako je θ slabo invarijantna kongruencija, to je $\theta \subseteq \ker(\phi\pi)$. Prema tome, ako je $(u, v) \in \theta$, tada je $(u, v) \in \ker(\phi\pi)$, tj. $u\phi\pi = v\phi\pi$, ili, drugim rečima, $(u\phi, v\phi) \in \theta$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sledećom teoremom je opisana mreža slabo invarijantnih kongruencija definisanih nad slobodnom polugrupom X^+, gde je X proizvoljan alfabet.

Teorema 5.1.3. *Slabo invarijantne kongruencije na polugrupi X^+, gde je X proizvoljan alfabet, predstavljaju kompletnu mrežu.*

Dokaz. Neka je θ_i, $i \in I$, proizvoljna familija slabo invarijantnih kongruencija. Dokazaćemo da je $\theta = \bigvee_{i\in I} \theta_i$ takođe slabo invarijantna kongruencija. Neka su ρ_1 i ρ_2 kongruencije na X^+ takve da je $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$ i $\theta \subseteq \rho_1$. Tada je i $\theta_i \subseteq \rho_1$, za svako $i \in I$, a kako su θ_i slabo invarijantne kongruencije, sledi da je $\theta_i \subseteq \rho_2$, za svako $i \in I$. S obzirom da je θ najmanja kongruencija koja sadrži relacije θ_i, $i \in I$, sledi $\theta \subseteq \rho_2$, što je i trebalo dokazati. Takođe, nije teško primetiti da je Δ_{X^+} slabo invarijantna kongruencija. Odavde, sledi da skup slabo invarijantnih kongruencija predstavlja kompletnu mrežu. $\square$

5.2. O κ-varijetetima polugrupa

Veoma je dobro poznata teorema koja kaže da svaka polugrupa jeste izomorfna polugrupi prelaza nekog automata. Međutim, ako se ograničimo samo na automate sa fiksiranim ulaznim alfabetom X, što je neophodno činiti u slučaju kada te automate tretiramo kao algebre unarnog tipa X, onda se polugrupe prelaza tih automata mogu tražiti samo među polugrupama koje su faktori slobodne polugrupe X^+, ili, što je ekvivalentno, među polugrupama koje imaju skup generatora čija kardinalnost ne prelazi kardinalnost κ alfabeta X. Klasa svih takvih polugrupa, koju ovde nazivamo klasom κ-generisanih polugrupa, zatvorena je za homomorfne slike, ali nije za poddirektne proizvode i podpolugrupe, što stvara probleme u slučaju kada želimo da radimo sa varijetetima polugrupa. Zato u ovom odeljku uvodimo pojam κ-poddirektnog proizvoda kao κ-generisanog poddirektnog proizvoda, a potom i pojam κ-varijeteta, kao klase κ-generisanih polugrupa zatvorene za homomorfne slike i κ-poddirektne proizvode. Glavni zadatak ovog odeljka je da se prikažu glavne osobine κ-varijeteta polugrupa, a posebno veze koje oni imaju sa slabo invarijantnim kongruencijama na slobodnoj polugrupi X^+, kojima smo se bavili u prethodnom odeljku.

Uočimo proizvoljan kardinal κ i klasu K polugrupa koje imaju κ generatora. Pod *κ-poddirektnim proizvodom* polugrupa $S_i \in K$, $i \in I$, podrazumevamo κ-generisan poddirektan proizvod κ-generisanih polugrupa S_i, $i \in I$. Klasu svih κ-poddirektnih proizvoda polugrupa iz klase K označavamo sa $P_\kappa(K)$.

Štaviše, pod *κ-varijetetom* polugrupa podrazumevamo klasu κ-generisanih polugrupa koja je zatvorena za formiranje homomorfnih slika i κ-poddirektnih proizvoda. Najmanji κ-varijetet koji sadrži datu klasu K, tj. presek svih κ-varijeteta koji sadrže K, označavamo sa $V_\kappa(K)$.

Označimo sa $\mathcal{S}_\kappa$ klasu svih κ-generisanih polugrupa. Tada važi:

Lema 5.2.1. *Klasa $\mathcal{S}_\kappa$ jeste κ-varijetet polugrupa, za proizvoljan kardinal κ.*

Dokaz. Po definiciji je κ-poddirektan proizvod κ-generisanih polugrupa takođe κ-generisan, pa je klasa $\mathcal{S}_\kappa$ zatvorena za κ-poddirektne proizvode. Takođe, homomorfna slika κ-generisane polugrupe ima ne više od κ generatora, pa je klasa $\mathcal{S}_\kappa$ zatvorena i za homomorfne slike. Dakle, $\mathcal{S}_\kappa$ jeste κ-varijetet polugrupa. $\square$

U nastavku je dat rezultat kojim je okarakterisan κ-varijetet.

Teorema 5.2.1. *Neka su κ proizvoljan kardinal, X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ i K klasa κ-generisanih polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *K je κ-varijetet polugrupa;*

(ii) $\mathrm{Con}_K(S)$ *je glavni filter mreže* $\mathrm{Con}(S)$ *za svaku κ-generisanu polugrupu S;*

(iii) $\mathrm{Con}_K(X^+)$ *je glavni filter mreže* $\mathrm{Con}(X^+)$*;*

(iv) *postoji slabo invarijantna kongruencija θ na slobodnoj polugrupi X^+ tako da je $K = H(X^+/\theta)$.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je S proizvoljna κ-generisana polugrupa. Iz činjenice da je K zatvorena za homomorfne slike, prema Teoremi 1.1.4, sledi da je $\mathrm{Con}_K(S)$ filter od $\mathrm{Con}(S)$. Sa druge strane, ako je $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familija kongruencija iz $\mathrm{Con}_K(S)$ za $\theta = \cap_{i\in I}\theta_i$ je $S/\theta \in K$ kao κ-poddirektan proizvod polugrupa $S/\theta_i \in K$, $i \in I$. Prema tome, $\theta \in \mathrm{Con}_K(S)$, čime smo dokazali da je filter $\mathrm{Con}_K(S)$ mreže $\mathrm{Con}(S)$ zatvoren za proizvoljne preseke, pa ima i najmanji element, pa je, dakle, glavni filter od $\mathrm{Con}(S)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ova implikacija je očigledna.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Neka je $\mathrm{Con}_K(X^+)$ glavni filter od $\mathrm{Con}(X^+)$ generisan nekom relacijom θ. Dokazaćemo da je θ tražena relacija.

Dokažimo najpre da je relacija θ slabo invarijantna. Neka su ρ_1 i ρ_2 kongruencije na X^+ takve da je $\theta \subseteq \rho_1$ i $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$. Tada je

$$\rho_1 \in [\theta, \nabla_{X^+}] = \mathrm{Con}_K(X^+),$$

odakle sledi da je $X^+/\rho_1 \in K$, a onda je i $X^+/\rho_2 \in K$, što znači da je

$$\rho_2 \in \mathrm{Con}_K(X^+) = [\theta, \nabla_{X^+}].$$

Prema tome, $\theta \subseteq \rho_2$.

Neka je, sada, $S \in K$ proizvoljna polugrupa. Kako S jeste κ-generisana, to postoji kongruencija ρ na X^+ takva da je $S \cong X^+/\rho$. Dakle, $X^+/\rho \in K$, pa je

$$\rho \in \mathrm{Con}_K(X^+) = [\theta, \nabla_{X^+}],$$

odakle je $\theta \subseteq \rho$. Sada neposredno sledi da je $S \in H(X^+/\theta)$, pa je $K \subseteq H(X^+/\theta)$.

Obratno, neka je $S \in H(X^+/\theta)$, tj. neka postoji epimorfizam $\psi : X^+/\theta \to S$. Neka je, takođe, $\pi : X^+ \to X^+/\theta$ prirodni epimorfizam kongruencije θ. Tada je i $\pi\psi : X^+ \to S$ epimorfizam, pa je, dakle, $X^=/\rho \cong S$, gde je $\rho = \ker(\pi\psi)$. Sa druge strane, za $u, v \in X^+$, iz $(u, v) \in \theta$ sledi $u\pi = v\pi$, pa je i $u\pi\psi = v\pi\psi$, tj. $u\rho = v\rho$.

Prema tome, $\rho \in [\theta, \nabla_{X^+}] = \mathrm{Con}_K(X^+)$, pa iz $X^+/\rho \cong S$ sledi da je $S \in K$. Dakle, $H(X^+/\theta) \subseteq K$, što je i trebalo dokazati.

(iv)$\Rightarrow$(i). Stavimo da je $K = H(S)$, gde je $S = X^+/\theta$ i θ je slabo invarijantna kongruencija na X^+. Dokažimo da K jeste κ-varijetet polugrupa. Zatvorenost za homomorfne slike je očigledna. Neka polugrupa T jeste κ-poddirektan proizvod polugrupa $S_i \in H(S)$, $i \in I$. Tada postoje kongruencije ξ_i na X^+ i ρ_i na T, za svako $i \in I$, takve da je

$$X^+/\xi_i \cong S_i,\ T/\rho_i \cong S_i \text{ i } \bigcap_{i\in I} \rho_i = \Delta_T.$$

Takođe, postoji kongruencija ξ na X^+ takva da je $X^+/\xi \cong T$. Definišimo relacije ξ/ρ_i na X^+ sa:

$$(u, v) \in \xi/\rho_i \text{ ako i samo ako } (u\xi, v\xi) \in \rho_i,$$

za proizvoljne $u, v \in X^+$. Dokazaćemo da je

$$\bigcap_{i\in I} \xi/\rho_i = \xi.$$

Zaista, uočimo proizvoljne $u, v \in X^+$. Tada je

$$(u, v) \in \bigcap_{i\in I} \xi/\rho_i$$

ako i samo ako je

$$(u, v) \in \xi/\rho_i,$$

za svako $i \in I$, a to važi ako i samo ako je $(u\xi, v\xi) \in \rho_i$, za svako $i \in I$, odnosno,

$$(u\xi, v\xi) \in \bigcap_{i\in I} \rho_i = \Delta_T,$$

tj. $u\xi = v\xi$, odnosno $(u, v) \in \xi$. Takođe je

$$X^+/(\xi/\rho_i) \cong (X^+/\xi)/\rho_i \cong T/\rho_i \cong S_i \cong X^+/\xi_i,$$

za svako $i \in I$. Inače,

$$X^+/(\xi/\rho_i) \cong (X^+/\xi)/\rho_i$$

važi prema Teoremi 1.1.2.

Dalje, s obzirom da je $S_i \in H(X^+/\theta)$, za svako $i \in I$, sledi da postoje epimorfizmi

$$\phi_i : X^+/\theta \to X^+/\xi_i,$$

za svako $i \in I$. Odatle je

$$X^+/(\theta/\ker\phi_i) \cong X^+/\xi_i,$$

za svako $i \in I$, gde je sa $\theta/\ker\phi_i$ označena relacija na X^+ definisana sa:

$$(u, v) \in \theta/\ker\phi_i \text{ ako i samo ako } (u\theta, v\theta) \in \ker\phi_i.$$

Jasno je da je $\theta \subseteq \theta \ker \phi_i$, za svako $i \in I$. Kako je θ slabo invarijantna kongruencija, to sledi da je $\theta \subseteq \xi_i$, za svako $i \in I$, pa dalje sledi da je i $\theta \subseteq \xi\rho_i$, za svako $i \in I$. Odatle je

$$\theta \subseteq \bigcap_{i \in I} \xi\rho_i = \xi.$$

Odavde neposredno sledi da je

$$T \cong X^+/\xi \in H(X^+/\theta) = K,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Koristeći Teoremu 5.2.1 može se uspostaviti veza između mreže svih slabo invarijantnih kongruencija i mreže svih κ-varijeteta polugrupa.

Teorema 5.2.2. *Neka je κ proizvoljan kardinal i X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ. Tada κ-varijeteti polugrupa čine kompletnu mrežu i ona je dualno izomorfna kompletnoj mreži slabo invarijantnih kongruencija na X^+.*

Dokaz. Za proizvoljan κ-varijetet polugrupa K, prema Teoremi 5.2.1, postoji slabo invarijantna kongruencija θ_K takva da je $K = H(X^+/\theta_K)$. Pri tome je θ_K određena kao najmanji element mreže $\mathrm{Con}_K(X^+)$, koja je glavni filter mreže $\mathrm{Con}(X^+)$. Na taj način je definisano preslikavanje

$$K \mapsto \theta_K,$$

iz parcijalno uređenog skupa κ-varijeteta polugrupe u mrežu svih slabo invarijantnih kongruencija na X^+.

Neka relacija θ jeste proizvoljna slabo invarijantna kongruencija na X^+ i neka je $K = H(X^+/\theta)$. Tada K jeste κ-varijetet polugrupa, prema Teoremi 5.2.1, pa preostaje da se dokaže da je $\theta = \theta_K$, tj. da je θ najmanji element u $\mathrm{Con}_K(X^+)$. Uočimo stoga proizvoljan element $\rho \in \mathrm{Con}_K(X^+)$. To znači da je

$$X^+/\rho \in K = H(X^+/\theta),$$

pa postoji epimorfizam $\psi : X^+/\theta \to X^+/\rho$. Neka su $\phi : X^+ \to X^+/\theta$ i $\varphi : X^+ \to X^+/\rho$ prirodni epimorfizmi kongruencija θ i ρ, tim redom. Tada je $\phi\psi : X^+ \to X^+/\rho$ takođe epimorfizam i

$$X^+/\ker(\phi\psi) \cong X^+/\rho.$$

Kako je $\theta = \ker \phi \subseteq \ker(\phi\psi)$ i θ je slabo invarijantna kongruencija, to je $\theta \subseteq \rho$. Ovim smo dokazali da je θ najmanji element u $\mathrm{Con}_K(X^+)$, tj. $\theta = \theta_K$, što nam je i bila namera. Prema tome, dokazali smo da je preslikavanje $K \mapsto \theta_K$ surjektivno.

Neka su K_1 i K_2 proizvoljni κ-varijeteti polugrupa. Ako je $K_1 \subseteq K_2$ tada je

$$\mathrm{Con}_{K_1}(X^+) \subseteq \mathrm{Con}_{K_2}(X^+),$$

tj. $[\theta_{K_1}, \nabla_{X^+}] \subseteq [\theta_{K_2}, \nabla_{X^+}]$, odakle je $\theta_{K_1} \in [\theta_{K_2}, \nabla_{X^+}]$, odnosno $\theta_{K_2} \subseteq \theta_{K_1}$. Obratno, ako je $\theta_{K_2} \subseteq \theta_{K_1}$, tada je $X^+/\theta_{K_1} \in H(X^+/\theta_{K_2})$, odakle je

$$K_1 = H(X^+/\theta_{K_1}) \subseteq H(X^+/\theta_{K_2}) = K_2.$$

Prema tome, preslikavanje $K \mapsto \theta_K$ je dualni izomorfizam parcijalno uređenih skupova, a kako parcijalno uređeni skup slabo invarijantnih kongruencija predstavlja kompletnu mrežu, to i κ-varijeteti polugrupa čine kompletnu mrežu koja je dualno izomorfna mreži slabo invarijantnih kongruencija na X^+. $\square$

Napomenimo na kraju da se na sličan način može uvesti i pojam κ-poddirektnog proizvoda i κ-varijeteta proizvoljnih algebri istog tipa. Pri tome se mogu dokazati i rezultati analogni rezultatima datim u ovom odeljku.

5.3. O σ-varijetetima automata

Jedan od naših glavnih zadataka u ovoj glavi jeste da se odrede osobine klase svih X-automata čije polugrupe prelaza leže u datom κ-varijetetu polugrupa, gde je κ kardinalni broj alfabeta X. Već na samom početku je jasno da ta klasa, zajedno sa svakim automatom koji joj pripada, mora sadržati i sve automate koji imaju istu, odnosno izomorfnu, polugrupu prelaza. Takve klase automata nazivaćemo σ-zatvorenim, a glavni zadatak ovog odeljka je da budu date razne karakterizacije σ-zatvorenih varijeteta automata, koje nazivamo σ-varijetetima. Kao što ćemo videti, ključnu ulogu i ovde igraju slabo invarijantne kongruencije na slobodnoj polugrupi X^+

Na skupu svih X-automata, gde je X proizvoljan alfabet, definišemo relaciju σ na sledeći način:

$$(A, B) \in \sigma \Leftrightarrow S(A) \cong S(B).$$

Nije teško uočiti da je σ relacija ekvivalencije. Za klasu K automata kažemo da je *σ-zatvorena* ako je zasićena relacijom σ, odnosno ako

$$A \in K \qquad \text{i} \qquad (A, B) \in \sigma \Rightarrow B \in K,$$

ili, ekvivalentno,

$$S(A) \cong S(B) \Rightarrow (A \in K \Leftrightarrow B \in K).$$

Jasno, σ-zatvoren varijetet automata zovemo *σ-varijetet*.

Lako se uočava da σ-zatvoren varijetet mora biti zatvoren i za direktne sume, odnosno, prema Teoremama 2.3.5 i 2.3.3, kao i prema rezultatu J. Płonke iz [95], mora biti regularan. Zaista, pretpostavimo da je V neregularan varijetet. Tada je $V \subseteq \mathbf{Dir}$. Neka je $A \in V$ proizvoljan automat i neka je automat B direktna suma dva automata koji su izomorfni automatu A, tada je $S(A) \cong S(B)$. Međutim, $B \notin V$

jer kao nepovezan nije ni direktabilan. Dakle, neregularan varijetet nije σ-zatvoren. Prema tome, klasa σ-varijeteta je podklasa klase regularnih varijeteta.

Neka je V proizvoljan varijetet automata. Kongruenciju

$$\mu_V = \bigcap_{A \in V} \mu_A$$

nazivamo *Myhillova kongruencija varijeteta V.*

U sledećoj teoremi su date neke karakterizacije σ-varijeteta automata.

Teorema 5.3.1. *Neka je X proizvoljan alfabet i neka V jeste proizvoljna klasa X-automata. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *V je σ-varijetet automata;*

(ii) *postoji slabo invarijantna kongruencija μ na X^+ takva da je V skup svih X-automata σ-ekvivalentnih automatima iz $H(A(\mu))$;*

(iii) *postoji slabo invarijantna kongruencija μ na X^+ takva da je*

$$V = \{A \,|\, A \text{ je } X\text{−automat i } \mu \subseteq \mu_A\}.$$

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Dokazaćemo da je Myhillova kongruencija μ_V varijeteta V tražena kongruencija. Uočimo proizvoljan automat $B \in V$. Tada je $\mu_V \subseteq \mu_B$. Odatle je $M(B)$ homomorfna slika automata $A(\mu_V)$, a automat B je σ-ekvivalentan automatu $M(B)$.

Obratno, neka automat B jeste σ-ekvivalentan automatu $C \in H(A(\mu_V))$. Kako iz

$$\mu_V = \cap_{A \in V} \mu_A$$

sledi da je $A(\mu_V) \in V$ kao poddirektan proizvod automata $M(A)$, koji su u V zbog σ-ekvivalentnosti ovog varijeteta. Tada je i $C \in V$, kao homomorfna slika automata iz V, a onda je, opet zbog σ-zatvorenosti, i $B \in V$.

Treba još dokazati da je μ_V slabo invarijantna kongruencija. Neka su θ i ρ kongruencije na X^+ takve da je

$$X^+/\theta \cong X^+/\rho \text{ i } \mu_V \subseteq \theta.$$

Tada je $A(\theta) \in H(A(\mu_V))$, pa je, prema već dokazanom, $A(\theta) \in V$. Međutim, onda je $A(\rho) \in V$, jer je $A(\rho)$ σ-ekvivalentan sa $A(\theta)$. Odatle je $\mu_V \subseteq \mu_{A(\rho)} = \rho$, što je i trebalo dokazati.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Uočimo automat $B \in V$. Tada je B automat σ-ekvivalentan nekom automatu C koji je homomorfna slika automata $A(\mu)$. Odatle sledi da je

$$\mu = \mu_{A(\mu)} \subseteq \mu_C.$$

Kako je

$$X^+/\mu_B \cong X^+/\mu_C$$

i po pretpostavci je μ slabo invarijantna kongruencija, to je $\mu \subseteq \mu_B$.

Obratno, neka je B automat takav da je $\mu \subseteq \mu_B$. Tada je $M(B) \in H(A(\mu)) \subseteq V$, a onda je i $B \in V$, jer je σ-ekvivalentan automatu $M(B)$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka je $A \in V$ proizvoljan automat i B je homomorfna slika automata A. Tada je $\mu_A \subseteq \mu_B$, pa iz $\mu \subseteq \mu_A$ sledi da je $\mu \subseteq \mu_B$, odakle je i $B \in V$. Slično se dokazuje da je $B \in V$ i u slučaju kada je B podautomat automata $A \in V$.

Neka je, sada, automat A poddirektan proizvod automata $A_i \in V$, $i \in I$. Tada je $\mu \subseteq \mu_i$, za svako $i \in I$, gde smo sa μ_i označili Myhillovu kongruenciju automata A_i. Dokazaćemo da je

$$\bigcap_{i \in I} \mu_i \subseteq \mu_A.$$

Neka je

$$(u, v) \in \bigcap_{i \in I} \mu_i$$

proizvoljan par. Tada je $(u, v) \in \mu_i$, za svako $i \in I$. Neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada je $a = (a_i)_{i \in I}$ i

$$au = (a_i)_{i \in I} u = (a_i u)_{i \in I} = (a_i v)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} v = av.$$

Dakle, $(u, v) \in \mu_A$. Prema tome,

$$\mu \subseteq \bigcap_{i \in I} \mu_i \subseteq \mu_A,$$

pa je $A \in V$. Ovim smo dokazali da je V varijetet automata.

Treba još dokazati da varijetet V jeste σ-zatvoren. Neka je $A \in V$ i neka B jeste X-automat takav da je $S(A) \cong S(B)$, odnosno

$$X^+/\mu_A \cong X^+/\mu_B.$$

Iz $A \in V$ je $\mu \subseteq \mu_A$, pa na osnovu pretpostavke da je kongruencija μ slabo invarijantna, sledi da je $\mu \subseteq \mu_B$, a onda je $B \in V$. $\square$

Sada ćemo dati uslove pod kojima je posmatrani varijetet σ-zatvoren.

Teorema 5.3.2. *Neka je X proizvoljan alfabet i V proizvoljan varijetet X-automata. Tada V jeste σ-zatvoren ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(1) *μ_V je slabo invarijantna kongruencija na X^+;*

(2) *za proizvoljni X-automat A važi*

$$A \in V \Leftrightarrow M(A) \in V.$$

Dokaz. Neka V jeste σ-zatvoren varijetet X-automata. Prema Teoremi 5.3.1, kongruencija μ_V je slabo invarijantna, dok za proizvoljan X-automat A, iz

$$S(A) \cong S(M(A))$$

i σ-zatvorenosti varijeteta V sledi da

$$A \in V \Leftrightarrow M(A) \in V.$$

Prema tome, važi (2).

Obratno, neka je V varijetet koji zadovoljava uslove (1) i (2). Neka A i B jesu X-automati za koje važi

$$S(A) \cong S(B) \qquad \text{i} \qquad A \in V.$$

To znači da je

$$X^+/\mu_A \cong X^+/\mu_B \qquad \text{i} \qquad \mu_V \subseteq \mu_A,$$

pa iz slabe invarijantnosti μ_V na X^+ dobijamo $\mu_V \subseteq \mu_B$ odakle sledi da automat $A(\mu_B) = M(B) = X^*_@/\mu_B$ jeste homomorfna slika automata $A(\mu_V) = X^*_@/\mu_V$.

Dokazaćemo da je $A(\mu_V) \in V$. Zaista, kako je

$$\mu_V = \bigcap_{C \in V} \mu_C$$

to imamo da $A(\mu_V) = X^*_@/\mu_V$ jeste poddirektan proizvod automata $A(\mu_C) = X^*_@/\mu_C$, $C \in V$. Međutim, kako je $A(\mu_C) = M(C)$, za svaki automat $C \in V$, to iz (2) sledi $A(\mu_C) \in V$. Odatle je i $A(\mu_V) \in V$, jer je V zatvoren za poddirektne proizvode. Iz već dokazane činjenice da je $M(B)$ homomorfna slika automata $A(\mu_V)$, sledi da je $M(B) \in V$. Koristeći ponovo uslov (2) dobijamo da je $B \in V$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Kao posledicu prethodnih teorema ovog odeljka dobijamo rezultat kojim je uspostavljena veza između mreže svih σ-varijeteta X-automata, za neki alfabet X, i mreže svih slabo invarijantnih kongruencija polugrupe X^+.

Teorema 5.3.3. *Neka je X proizvoljan alfabet. Tada skup svih σ-varijeteta X-automata predstavlja kompletnu mrežu koja je dualno izomorfna kompletnoj mreži svih slabo invarijantnih kongruencija na polugrupi X^+.*

Dokaz. Kao što smo videli u ranijim teoremama, za proizvoljan σ-varijetet X-automata V, njegova Myhillova kongruencija μ_V je slabo invarijantna kongruencija na slobodnoj polugrupi X^+. Razmotrimo stoga preslikavanje

$$V \mapsto \mu_V,$$

gde je V iz skupa svih σ-varijeteta X-automata. Najpre ćemo dokazati da ovo preslikavanje slika skup σ-varijeteta X-automata na mrežu slabo invarijantnih kongruencija na X^+. Uzmimo da je

$$V = \{A \,|\, A \text{ je } X\text{−automat i } \mu \subseteq \mu_A\}.$$

Prema Teoremi 5.3.1, V je σ-varijetet X-automata, pa ostaje da se dokaže da je $\mu = \mu_V$. Zaista, za svako $A \in V$, prema definiciji σ-varijeteta V imamo da je $\mu \subseteq \mu_A$, odakle sledi da je $\mu \subseteq \mu_V$. Sa druge strane, ponovo prema definiciji σ-varijeteta V, Myhillov automat $A = A(\mu)$ kongruencije μ je u V jer je $\mu_A = \mu$ i $\mu \subseteq \mu$. Prema tome, $\mu_v \subseteq \mu_A = \mu$. Time smo dokazali da je $\mu = \mu_V$.

Uočimo sada proizvoljne σ-varijetete X-automata V_1 i V_2. Ako je $V_1 \subseteq V_2$, tada je jasno da je $\mu_{V_2} \subseteq \mu_{V_1}$. Obratno, neka je $\mu_{V_2} \subseteq \mu_{V_1}$ i uočimo proizvoljno $A \in V_1$. Tada je

$$\mu_{V_2} \subseteq \mu_{V_1} \subseteq \mu_A.$$

Kao u drugom delu dokaza Teoreme 5.3.2, može se dokazati da je $A \in V_2$. Dakle,

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow \mu_{V_2} \subseteq \mu_{V_1},$$

što znači da preslikavanje $V \mapsto \mu_V$ jeste dualni izomorfizam parcijalno uređenog skupa svih σ-varijeta X-automata na kompletnu mrežu svih slabo invarijantnih kongruencija na X^+, pa taj parcijalno uređeni skup jeste takođe kompletna mreža i preslikavanje $V \mapsto \mu_V$ jeste dualni kompletni izomorfizam kompletnih mreža. $\square$

U nastavku posmatramo identitete zadovoljene na varijetetima automata, sa namerom da odatle dobijemo informaciju o eventualnoj σ-zatvorenosti posmatranog varijeteta. Najpre dajemo vezu između identiteta zadovoljenih na datom automatu i njegovoj polugrupi prelaza.

Teorema 5.3.4. *Neka je A proizvoljan X-automat. Tada polugrupa $S(A)$ zadovoljava identitet nad alfabetom X oblika*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ako i samo ako automat A zadovoljava sve identitete oblika

$$gu(p_1, p_2, \ldots, p_n) = gv(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

za sve reči $p_1, p_2, \ldots, p_n \in X^+$.

Dokaz. Pretpostavimo da je identitet

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zadovoljen na $S(A)$. Tada za proizvoljne $p_1, p_2, \ldots, p_n \in X^+$ i homomorfizam $\phi : X^+ \to S(A)$ je definisan sa

$$x\phi = \begin{cases} p_i\mu_A, & \text{ako je } x = x_i \text{ za neko } i \in \{1, 2, \ldots, n\}; \\ \in X^+, & \text{ako } x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \end{cases}$$

važi
$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)\phi = v(x_1, x_2, \dots, x_n)\phi,$$
što daje
$$u(p_1, p_2, \dots, p_n)\mu_A = v(p_1, p_2, \dots, p_n)\mu_A,$$
tj. za svako $a \in A$ važi
$$au(p_1, p_2, \dots, p_n) = av(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Obratno, pretpostavimo da je identitet
$$gu(p_1, p_2, \dots, p_n) = gv(p_1, p_2, \dots, p_n),$$
zadovoljen na A za sve $p_1, p_2, \dots, p_n \in X^+$. Tada je
$$u(p_1, p_2, \dots, p_n)\mu_A = v(p_1, p_2, \dots, p_n)\mu_A,$$
za svaki izbor reči $p_1, p_2, \dots, p_n \in X^+$. Neka je $\phi : X^+ \to S(A)$ proizvoljan homomorfizam. Tada za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji $q_i \in X^+$ tako da važi $x_i\phi = q_i\mu_A$. Odatle je
$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n)\phi &= u(x_1\phi, x_2\phi, \dots, x_n\phi) = u(q_1\mu_A, q_2\mu_A, \dots, q_n\mu_A) \\ &= u(q_1, q_2, \dots, q_n)\mu_A = v(q_1, q_2, \dots, q_n)\mu_A \\ &= v(q_1\mu_A, q_2\mu_A, \dots, q_n\mu_A) = v(x_1\phi, x_2\phi, \dots, x_n\phi) \\ &= v(x_1, x_2, \dots, x_n)\phi. \end{aligned}$$
Dakle,
$$(u(x_1, x_2, \dots, x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \ker\, \phi$$
za proizvoljan homomorfizam $\phi : X^+ \to S(A)$, što znači da $S(A)$ zadovoljava identitet
$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x_1, x_2, \dots, x_n).$$
Ovim je teorema dokazana. □

Napomena 5.3.1. Za razliku od "običnih" identiteta za koje ispitujemo da li su zadovoljeni na nekoj algebri tako što promenljive zamenjujemo elementima te algebre, kod hiperidentiteta vršimo zamenu operacijskih simbola termima te algebre. Naime, identitet $s = t$ se naziva *hiperidentitetom* varijeteta V ako se zamenom operacijskih simbola u s i t termima odgovarajuće arnosti dobija identitet koji važi na V. Tako se u ovim terminima prethodna teorema može formulisati i na sledeći način: hiperidentitet $u = v$ važi na automatu A ako i samo ako identitet $u = v$ važi na polugrupi $S(A)$. Inače, hiperidentiteti se po prvi put javljaju u radovima V. D. Belousova [15], J. Aczéla [1], W. Taylora [117], a u skorije vreme se njima bave K. Denecke i K. Glazek [34], K. Denecke i R. Marszalek [35], K. Denecke [37], [36].

U nastavku su date dve teoreme koje omogućavaju da se na osnovu identiteta kojima je zadat varijetet donese zaključak o njegovoj σ-zatvorenosti. Ovi rezultati se mogu dobiti kao posledice Teorema 5.2.1, 5.1.2, 5.3.1, ali će zbog njihovog praktičnog značaja ovde biti dat njihov direktan dokaz.

Teorema 5.3.5. *Neka je X proizvoljan alfabet i neka je V regularan varijetet X-automata takav da je μ_V potpuno invarijantna kongruencija na X^+. Tada V jeste σ-zatvoren varijetet.*

Dokaz. Uočimo proizvoljan automat $A \in V$ i neka je B automat takav da je $S(A) \cong S(B)$. Neka je
$$gu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = gv(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
proizvoljan identitet zadovoljen na V. Tada je on zadovoljen i na A. Zbog potpune invarijantnosti kongruencije μ_V dobijamo da je i svaki identitet oblika
$$gu(p_1, p_2, \ldots, p_n) = gv(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
za sve $p_1, p_2, \ldots, p_n \in X^+$, zadovoljen na varijetetu V, pa i na automatu A. Odavde, prema Teoremi 5.3.4, sledi da $S(A)$ zadovoljava identitet
$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$
Kako je $S(B)$ izomorfna polugrupi $S(A)$, to $S(B)$ takođe zadovoljava ovaj identitet, što, ponovo, prema Teoremi 5.3.4, daje da B zadovoljava sve identitete oblika
$$gu(p_1, p_2, \ldots, p_n) = gv(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
za sve $p_1, p_2, \ldots, p_n \in X^+$. Dakle, $B \in V$. $\square$

Teorema 5.3.6. *Neka je X proizvoljan alfabet i neka je V proizvoljan σ-varijetet X-automata. Tada ako je identitet*
$$gu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = gv(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
zadovoljen na V, onda je na V zadovoljen i identitet
$$gu(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha) = gv(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha).$$
gde je α proizvoljna permutacija skupa X.

Dokaz. Pretpostavimo da je identitet
$$gu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = gv(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
zadovoljen na V. Pretpostavimo da postoje automat $A \in V$, permutacija α skupa X i element $a_0 \in A$ tako da je
$$a_0u(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha) \neq a_0v(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha).$$
Primetimo da α generiše izomorfizam iz X^+ na X^+. Definišimo automat A' sa skupom stanja A i funkcijama prelaza određenim sa $ax_{A'} = a(x\alpha)_A$. Primetimo da $a, u_{A'} = a(u\alpha)_A$ važi za svako $u \in X^+$. Tada je preslikavanje $\psi : S(A') \to S(A)$ definisano sa
$$(u\mu_{A'})\psi = (u\alpha)\mu_A$$

izomorfizam. Naime, pretpostavimo da je $u\mu_{A'} = v\mu_{A'}$. Tada je

$$a(u\alpha)_A = au_{A'} = av_{A'} = a(v\alpha)_A,$$

za svako $a \in A$. Prema tome,

$$(u\alpha)\mu_A = (v\alpha)\mu_A.$$

Takođe, ako je

$$(u\alpha)\mu_A = (v\alpha)\mu_A,$$

tada za proizvoljno $a \in A$ važi

$$au_{A'} = a(u\alpha)_A = a(v\alpha)_A = av_{A'}$$

Prema tome, ψ je dobro definisano i injektivno preslikavanje. Očigledno, ψ je i surjektivni homomorfizam.

Prema tome, $S(A) \cong S(A')$ i $A' \in V$, jer je V σ-zatvoren. Međutim,

$$a_0u_{A'} = a_0(u\alpha)_A \neq a_0(v\alpha)_A = a_0v_{A'},$$

što daje $A' \notin V$, nasuprot činjenici da je $A' \in V$. Dakle, polazna pretpostavka da postoji automat $A \in V$ takav da identiteti zadovoljeni na njemu nisu zatvoreni za permutaciju slova je netačna. $\square$

Koristeći Teoreme 5.3.5 i 5.3.6 ispitujemo σ-zatvorenost varijeteta automata razmatranih u Glavi 3. Videćemo da za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ varijeteti $\mathbf{Nilp}_k$, $\mathbf{RDef}_k$, $\mathbf{Def}_k$ i $\mathbf{GDef}_k$ jesu σ-zatvoreni. Sa druge strane, za proizvoljno $u \in X^*$ varijeteti $\mathbf{OTrap}_u$, $\mathbf{Dir}_u$, nisu regularni, pa nisu ni σ-zatvoreni. Međutim, ni njihove regularizacije nisu σ-zatvoreni varijeteti. Klase $\mathbf{Trap}_u$ i $\mathbf{GDir}_u$ su, takođe, primeri regularnih varijeteta koji nisu σ-zatvoreni.

Primer 5.3.1. Nije teško uočiti da varijetet $\mathbf{Nilp}_k$ svih k-nilpotentnih X-automata nije regularan niti zatvoren za direktne sume, pa nije ni σ-zatvoren. Njegova regularizacija je klasa

$$R(\mathbf{Nilp}_k) = L(\mathbf{Nilp}_k) = \mathbf{D} \circ \mathbf{Nilp}_k = [gxu = gu, gux = gu \,|\, u \in X^{\geq k}, x \in X]$$

svih direktnih suma k-nilpotentnih automata. Ona je zadata identitetima koji zadovoljavaju uslov Teoreme 5.3.5, pa $\mathbf{D} \circ \mathbf{Nilp}_k$ jeste σ-zatvoren varijetet.

Primer 5.3.2. Varijetet $\mathbf{RDef}_k = [gux = gu \,|\, u \in X^{\geq k}, x \in X]$ svih reverzno k-definitnih automata, prema Teoremi 5.3.5, jeste σ-zatvoren.

Primer 5.3.3. Varijetet $\mathbf{Def}_k = [gu = hu \,|\, u \in X^{\geq k}]$ svih k-definitnih automata nije regularan, pa nije σ-zatvoren. Njegova regularizacija je

$$R(\mathbf{Def}_k) = L(\mathbf{Def}_k) = \mathbf{D} \circ \mathbf{Def}_k = [gxu = gu \,|\, u \in X^{\geq k}, x \in X].$$

Varijetet $R(\mathbf{Def}_k)$, prema Teoremi 5.3.5, jeste σ-zatvoren.

Primer 5.3.4. Na kraju, primetimo da je varijetet $\mathbf{GDef}_k = [guvu = gu \,|\, u \in X^{\geq k}, v \in X^*]$ svih k-uopšteno definitnih automata regularan i, zadovoljava uslove Teoreme 5.3.5, pa je σ-zatvoren.

Primer 5.3.5. Varijetet $\mathbf{OTrap}_u = [gux = hu \,|\, x \in X]$ svih jedno-utrapljivih automata sa utrapljujućom reči u nije regularan, pa nije ni σ-zatvoren. Njegova regularizacija je

$$R(\mathbf{OTrap}_u) = L(\mathbf{OTrap}_u) = \mathbf{D} \circ \mathbf{OTrap}_u = [gxu = gu, gux = gu \,|\, x \in X].$$

Varijetet $R(\mathbf{OTrap}_u)$ prema Teoremi 5.3.6, nije σ-zatvoren.

Primer 5.3.6. Varijetet $\mathbf{Trap}_u = [gux = gu \,|\, x \in X]$ svih utrapljivih automata sa utrapljujućom reči u je regularan, ali njegovi identiteti nisu zatvoreni za permutacije slova, pa prema Teoremi 5.3.6, nije σ-zatvoren.

Primer 5.3.7. Razmotrimo i varijetet $\mathbf{Dir}_u = [gu = hu]$ svih direktabilnih automata sa usmeravajućom reči u. Ovaj varijetet nije regularan. Njegova regularizacija je

$$R(\mathbf{Dir}_u) = L(\mathbf{Dir}_u) = \mathbf{D} \circ \mathbf{Dir}_u = [gxu = gu \,|\, x \in X].$$

Identiteti varijeteta $R(\mathbf{Dir}_u)$ nisu zatvoreni za permutacije slova, pa prema Teoremi 5.3.6, ovaj varijetet nije σ-zatvoren.

Primer 5.3.8. Posmatrajmo sada varijetet $\mathbf{GDir}_u = [guvu = gu \,|\, v \in X^*]$ svih uopšteno direktabilnih automata sa uopštenom usmeravajućom reči u. Ovaj varijetet je regularan, ali zbog fiksiranosti reči u njegovi identiteti nisu zatvoreni za permutacije slova, pa prema Teoremi 5.3.6, ovaj varijetet nije σ-zatvoren.

5.4. Teoreme korespondencije

Kao što smo videli u prethodnim odeljcima, za proizvoljan alfabet X kardinalnosti κ, i σ-varijeteti X-automata i κ-varijeteti polugrupa čine kompletne mreže. Pri tome su obe ove mreže dualno izomrfne mreži slabo invarijantnih kongruencija na slobodnoj polugrupi X^+. Dakle, ta dva rezultata govore i o postojanju korespondencije između između κ-varijeteta polugrupa i σ-varijeteta X-automata. Takva korespondencije biće uspostavljena u ovom odeljku i na jedan drugi, neposredniji način.

Drugim rečima, za proizvoljan κ-varijetet polugrupa K, dokazaćemo da klasa $\mathcal{V}(K)$ svih X-automata čije polugrupe prelaza leže u K jeste κ-varijetet, i, obratno, za proizvoljan σ-varijetet X-automata V dokazaćemo da klasa $\mathcal{K}(V)$ svih polugrupa prelaza automata iz V jeste κ-varijetet. Pri tome ćemo dokazati i izomorfizam kompletne mreže svih σ-varijeteta X-automata i kompletne mreže svih κ-varijeteta polugrupa.

Naime, izgled σ-varijeteta X-automata koji dodeljujemo datom κ-varijetetu polugrupa je sugerisan rezultatima Teorema 5.2.1, 5.3.1, 5.2.2, 5.3.3, što je prikazano na sledećem dijagramu.

$$\begin{tikzcd} & V = \{A \mid A \text{ je } X\text{-automat i } \theta_K \subseteq \mu_A\} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \theta_K \arrow[rr, leftrightarrow] & & K \end{tikzcd}$$

Za proizvoljan kardinal κ, proizvoljnu klasu $\mathcal{S}$ κ-generisanih polugrupa i alfabet X kardinalnosti κ, definišemo preslikavanje

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \{A \mid A \text{ je } X\text{-automat i } S(A) \in \mathcal{S}\}.$$

Lema 5.4.1. *Neka je κ proizvoljan kardinal i K proizvoljan κ-varijetet polugrupa. Tada preslikavanje $K \mapsto \mathcal{V}(K)$ jeste injektivno.*

Dokaz. Neka su K_1 i K_2 dva proizvoljna različita κ-varijeteta polugrupa. Tada postoji polugrupa $S \in K_1 \setminus K_2$, ili $S \in K_2 \setminus K_1$. Pretpostavimo da je $S \in K_1 \setminus K_2$. Tada za proizvoljan generatorni skup X polugrupe S kardinalnosti κ postoji kongruencija θ na X^+ tako da je $S \cong X^+/\theta$. Odatle je

$$S(A(\theta)) = X^+/\theta \cong S \in K_1 \setminus K_2.$$

Znači,

$$A(\theta) \in \mathcal{V}(K_1) \setminus \mathcal{V}(K_2),$$

tj. $\mathcal{V}(K_1) \neq \mathcal{V}(K_2)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Lema 5.4.2. *Neka je κ proizvoljan kardinal, $\mathcal{S}$ je klasa κ-generisanih polugrupa i X je alfabet kardinalnosti κ. Tada:*

(1) *ako je $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike, tada je i $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za homomorfne slike;*

(2) *ako je $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike, tada je $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za podautomate;*

(3) *ako je $\mathcal{S}$ zatvorena za κ-poddirektne proizvode, tada je $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za direktne proizvode.*

Dokaz. (1) Uočimo $A \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$ i neka je $\phi : A \to B$ epimorfizam X-automata. Tada je $S(A) \in \mathcal{S}$. Definišimo preslikavanje $\psi : S(A) \to S(B)$ sa $(u\mu_A)\psi = u\mu_B$.

Dokazaćemo da je ψ dobro definisano. Ako je $u\mu_A = v\mu_A$ tada za svako $a \in A$ važi $au = av$. Za proizvoljan $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $a\phi = b$. Tada je

$$bu = (a\phi)u = (au)\phi = (av)\phi = (a\phi)v = bv.$$

Dakle, $(u,v) \in \mu_B$, tj. $u\mu_B = v\mu_B$.

Za dva proizvoljna elementa $u\mu_A, v\mu_A \in S(A)$ važi

$$\begin{aligned}((u\mu_A)(v\mu_A))\psi &= ((uv)\mu_A)\psi = (uv)\mu_B \\ &= (u\mu_B)(v\mu_B) = ((u\mu_A)\psi)((v\mu_A)\psi),\end{aligned}$$

odakle sledi da je ψ homomorfizam. Nije teško uočiti da je ψ takođe surjektivno preslikavanje.

Prema tome, $S(B)$ je homomorfna slika polugrupe $S(A) \in \mathcal{S}$ i kako je $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike, to sledi da je $S(B) \in \mathcal{S}$, i, dakle, $B \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$.

(2) Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$ proizvoljan automat i B je podautomat automata A. Dokazaćemo da je $\mu_A \subseteq \mu_B$. Neka je $(u,v) \in \mu_A$ proizvoljan par. Uočimo proizvoljan element $b \in B$. Kako je $b \in A$, to je $bu = bv$, pa je $(u,v) \in \mu_B$. Odatle sledi da je $S(B)$ homomorfna slika polugrupe $S(A)$. Kako je $S(A) \in \mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike sledi da je $S(B) \in \mathcal{S}$. Prema tome, $B \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$.

(3) Neka je $A_i \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$, za svako $i \in I$, tj. $S(A_i) \in \mathcal{S}$, za svako $i \in I$. Uvedimo oznaku

$$A = \prod_{i \in I} A_i.$$

Posmatrajmo preslikavanje

$$\psi : S(A) \to \prod_{i \in I} S(A_i)$$

definisano sa

$$(u\mu_A)\psi = (u\mu_i)_{i \in I},$$

gde je $\mu_i = \mu_{A_i}$.

Tada za proizvoljna dva elementa $u\mu_A$ i $v\mu_A$ iz $u\mu_A = v\mu_A$ sledi $au = av$ za svako $a \in A$. Kako je $a \in A = \prod_{i \in I} A_i$, to je $a = (a_i)_{i \in I}$. Prema tome, $(a_i)_{i \in I}u = (a_i)_{i \in I}v$, što daje $a_i u = a_i v$, za svako $i \in I$. Za proizvoljno $a_i \in A_i$ postoji $a \in A$ tako da je $a\pi_i = a_i$, gde π_i jeste i-ta projekcija. Prema tome, važi $a_i u = a_i v$, odakle je $(u,v) \in \mu_i$, za svako $i \in I$, tj. $(u\mu_i)_{i \in I} = (v\mu_i)_{i \in I}$. Prema tome, preslikavanje ψ je dobro definisano.

Obratno, za $(u\mu_A)\psi = (v\mu_A)\psi$, tj. $(u\mu_i)_{i \in I} = (v\mu_i)_{i \in I}$ imamo da je $u\mu_i = v\mu_i$, za svako $i \in I$. Znači, za proizvoljan $(a_i)_{i \in I} \in A$ je

$$(a_i)_{i \in I}u = (a_i u)_{i \in I} = (a_i v)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I}v,$$

tj. $(u,v) \in \mu_A$. Prema tome, ψ je injektivno.

Da je ψ homomorfizam dokazuje se slično kao u delu (i).

Konačno, nije teško primetiti da je polugrupa $S(A)$ izomorfna podpolugrupi $T = \{(u\mu_i)_{i \in I} \mid u \in X^+\}$ i da je svaka $S(A_i)$ homomorfna slika od T.

Prema tome, $S(A)$ je poddirektan proizvod polugrupa $S(A_i) \in \mathcal{S}$, $i \in I$, sa ne više od κ generatora i kako $S(A)$ nema više od κ generatora i $\mathcal{S}$ je zatvorena za κ-poddirektne proizvode, to je $S(A) \in \mathcal{S}$, tj. $A \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$. $\square$

Odavde sledi rezultat koji je prvi deo Teoreme o korespondenciji.

Teorema 5.4.1. *Neka je κ proizvoljan kardinal i neka je X alfabet kardinalnosti κ. Ako K jeste κ-varijetet polugrupa tada $\mathcal{V}(K)$ jeste σ-varijetet X-automata.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{V}(K)$ proizvoljan automat. Tada je $S(A) \in K$. Za proizvoljan X-automat B takav da je $S(A) \cong S(B)$ takođe je $S(B) \in K$. Prema tome, $B \in \mathcal{V}(K)$. Dakle, $\mathcal{V}(K)$ je σ-zatvoren. Ostatak sledi na osnovu Leme 5.4.2. $\square$

Sa druge strane, κ-varijetet polugrupa koji pridružujemo datom σ-varijetetu X-automata je, takođe, sugerisan Teoremama 5.2.1, 5.3.1, 5.2.2, 5.3.3, što je prikazano na sledećoj slici.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \mu_V \arrow[rr, leftrightarrow] & & K = H(X^+/\mu_V) \end{tikzcd}$$

U narednim lemama dati su rezultati koji su obrat tvrđenja datih u Lemi 5.4.2.

Lema 5.4.3. *Neka je polugrupa S homomorfna slika polugrupe T sa generatornim skupom X. Tada postoje X-automati A i B takvi da je $S \cong S(A)$, $T \cong S(B)$ i automat A je homomorfna slika automata B.*

Dokaz. Kako je polugrupa T generisana skupom X, to postoji kongruencija θ na X^+ tako da je $T \cong X^+/\theta$. Prema Lemi 1.3.1 važi $T \cong S(A(\theta))$. Neka je $\pi : X^+ \to T$ prirodni epimorfizam koji odgovara kongruenciji θ i $\phi : T \to S$ dati epimorfizam. Preslikavanje $\psi = \pi\phi : X^+ \to S$ je epimorfizam i uvedimo oznaku $\xi = \ker\psi$. Tada je

$$S \cong X^+/\xi \qquad \text{i} \qquad S \cong S(A(\xi)).$$

Preostaje da se dokaže egzistencija epimorfizma $\varphi : A(\theta) \to A(\xi)$. Definišimo φ sa $(u\theta)\varphi = u\xi$, za proizvoljno $u\theta \in A(\theta)$. Tada, iz $u\theta = v\theta$ sledi da je $u\pi = v\pi$ i, kako je ϕ dobro definisano, $u\pi\phi = v\pi\phi$, odakle je $u\psi = v\psi$, tj. $u\xi = v\xi$. Dakle, φ je dobro definisano preslikavanje. Da bi dokazali da je φ homomorfizam, izaberimo proizvoljno $u\theta \in A(\theta)$ i $x \in X$. Tada imamo

$$((u\theta)x)\varphi = ((ux)\theta)\varphi = (ux)\xi = (u\xi)x = ((u\theta)\varphi)x.$$

Očigledno je da je ρ surjektivno preslikavanje.

Dakle, traženi automati su $A(\xi)$ i $A(\theta)$. $\square$

Lema 5.4.4. *Neka je κ proizvoljan kardinal i neka je X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ. Ako je S polugrupa koja je κ-poddirektan proizvod polugrupa S_i, $i \in I$, tada postoje X-automati $A, A_i, i \in I$, takvi da je $S \cong S(A)$, $S_i \cong S(A_i)$, za svako $i \in I$, i A je poddirektan proizvod automata $A_i, i \in I$.*

Dokaz. Kako je X generatorni skup polugrupe S, to postoji kongruencija θ na X^+ tako da je $S \cong X^+/\theta$. Neka je $\pi : X^+ \to S$ odgovarajući prirodni epimorfizam.

S obzirom da je S poddirektan proizvod polugrupa S_i, $i \in I$, sledi da postoje kongruencije ρ_i, $i \in I$, na S takve da je

$$S/\rho_i \cong S_i,\ i \in I, \qquad \text{i} \qquad \bigcap_{i\in I} \rho_i = \Delta_S.$$

Označimo sa $\pi_i : S \to S_i$, $i \in I$, odgovarajuće prirodne epimorfizme. Tada su preslikavanja $\phi_i = \pi\pi_i : X^+ \to S_i$, $i \in I$, epimorfizmi. Uvedimo oznaku $\theta_i = \ker \phi_i$, $i \in I$. Tada je

$$X^+/\theta_i \cong S_i,\ i \in I, \qquad \text{i} \qquad \bigcap_{i\in I} \theta_i = \theta.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} (u,v) \in \textstyle\bigcap_{i\in I} \theta_i \ &\Leftrightarrow (u,v) \in \theta_i,\ \text{za svako } i \in I, \\ &\Leftrightarrow u\phi_i = v\phi_i,\ \text{za svako } i \in I, \\ &\Leftrightarrow u\pi\pi_i = v\pi\pi_i,\ \text{za svako } i \in I, \\ &\Leftrightarrow (u\theta)\pi_i = (v\theta)\pi_i,\ \text{za svako } i \in I, \\ &\Leftrightarrow (u\theta, v\theta) \in \textstyle\bigcap_{i\in I} \ker \pi_i = \bigcap_{i\in I} \rho_i = \Delta_S \\ &\Leftrightarrow u\theta = v\theta \\ &\Leftrightarrow (u,v) \in \theta. \end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$S \cong S(A(\theta)) \text{ i } S_i \cong S(A(\theta_i)),$$

za svako $i \in I$.

Preostaje da se dokaže da je $A = A(\theta)$ poddirektan proizvod automata $A_i = A(\theta_i)$, $i \in I$. Definišimo preslikavanje

$$\psi : A \to \prod_{i\in I} A_i$$

sa

$$(u\theta)\psi = (u\theta_i)_{i\in I}.$$

Pošto je

$$\theta = \bigcap_{i\in I} \theta_i$$

sledi da je ψ dobro definisano i injektivno. Za $u\theta \in A$ i $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned} ((u\theta)x)\psi \ &= ((ux)\theta)\psi = ((ux)\theta_i)_{i\in I} \\ &= ((u\theta_i)x)_{i\in I} = (u\theta_i)_{i\in I}x = ((u\theta)\psi)x. \end{aligned}$$

Očigledno, ψ je izomorfizam iz A na podautomat

$$B = \big\{ (u\theta_i)_{i\in I} \,\big|\, u \in X^* \big\}$$

automata $\prod_{i\in I} A_i$ i svaki automat A_i je homomorfna slika automata B. $\square$

Koristeći Leme 5.4.3 i 5.4.4 dokazujemo sledeću teoremu, koja predstavlja drugi deo Teoreme o korespondenciji.

Teorema 5.4.2. *Neka je X proizvoljan alfabet i neka je κ njegov kardinalni broj. Ako V jeste σ-varijetet X-automata tada*

$$\mathcal{K}(V) = \big\{ S(A) \,\big|\, A \in V \big\}$$

jeste κ-varijetet polugrupa.

Dokaz. Uočimo proizvoljnu polugrupu $S \in \mathcal{K}(V)$ i neka je T homomorfna slika polugrupe S. Tada je $S = S(A)$ za neki automat $A \in V$ i postoje, prema Lemi 5.4.3, X-automati A' i B takvi da je B homomorfna slika automata A' i

$$S \cong S(A') \text{ i } T \cong S(B).$$

Kako V jeste σ-zatvoren sledi da je $A' \in V$ i, koristeći činjenicu da je V zatvoren za homomorfne slike, dobijamo $B \in \mathcal{V}$. Dakle, $T \in \mathcal{K}(V)$.

Pretpostavimo, sada, da polugrupa T jeste κ-poddirektan proizvod polugrupa $S_i \in \mathcal{K}(V)$, $i \in I$, odnosno postoje X-automati $A_i \in V$ takvi da je $S_i = S(A_i)$, za svako $i \in I$. Prema Lemi 5.4.4 postoje X-automati A_i', za svako $i \in I$, i A takvi da je A poddirektan proizvod automata A_i', $i \in I$, i $S \cong S(A)$, $S_i \cong S(A_i')$, $i \in I$. S obzirom da V jeste σ-zatvoren sledi da je $A_i' \in V$, za svako $i \in I$. Kako je V zatvoren za poddirektne proizvode, imamo da je $A \in V$, i odatle je $S \in \mathcal{K}(V)$. $\square$

Kao suma rezultata datih u Teoremama 5.4.1 i 5.4.2 dobija se

Teorema 5.4.3 (Teorema o korespondenciji). *Neka je κ proizvoljan kardinal i neka je X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ. Tada svakom κ-varijetetu polugrupa K odgovara σ-varijetet X-automata*

$$\mathcal{V}(K) = \big\{ A \,\big|\, A \text{ je } X\text{-automat i } S(A) \in K \big\},$$

i obratno, svakom σ-varijetetu X-automata V odgovara κ-varijetet polugrupa

$$\mathcal{K}(V) = \big\{ S(A) \,\big|\, A \in V \big\}.$$

Kao posledicu Leme 5.4.1 i Teorema 5.4.1 i 5.4.2 dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 5.4.1. *Neka je κ proizvoljan kardinal i neka je X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ. Tada je mreža svih κ-varijeteta polugrupa izomorfna mreži svih σ-varijeteta X-automata.*

Imajući u vidu varijetete X-automata, za fiksirani alfabet X, za koje smo u Odeljku 5.3 dokazali da su σ-zatvoreni, odredićemo njima odgovarajuće κ-varijetete polugrupa, gde je κ kardinalnost skupa X.

Primer 5.4.1. U Primeru 5.3.1 je dokazano da klasa $R(\mathbf{Nilp}_k)$ jeste σ-varijetet X-automata. Tada je $\mathcal{K}(R(\mathbf{Nilp}_k))$, prema Teoremi 3.5.4, κ-varijetet svih κ-generisanih k-nilpotentnih polugrupa.

Slično se može zaključiti i polazeći od klase K svih κ-generisanih k-nilpotentnih polugrupa. Zaista, ova klasa je zatvorena za homomorfne slike i κ-poddirektne proizvode, te je κ-varijetet. Takođe na osnovu Teoreme 3.5.4 zaključujemo da je $\mathcal{V}(K) = L(\mathbf{Nilp}_k) = R(\mathbf{Nilp}_k)$.

Primer 5.4.2. Prema Primeru 5.3.2 klasa $\mathbf{RDef}_k$ jeste σ-varijetet X-automata. Njoj odgovarajući κ-varijetet polugrupa, prema Teoremi 3.5.3, čine sve κ-generisane k-nilpotentne ekstenzije levo nultih traka.

Primer 5.4.3. U Primeru 5.3.3 je dokazano da klasa $R(\mathbf{Def}_k)$ jeste σ-varijetet X-automata. Tada je $\mathcal{K}(R(\mathbf{Def}_k))$, prema Teoremi 3.5.2, κ-varijetet svih κ-generisanih k-nilpotentnih ekstenzija desno-nultih traka.

Primer 5.4.4. Imajući u vidu Primer 5.3.4 gde je dokazano da klasa $\mathbf{GDef}_k$ jeste σ-varijetet X-automata, na osnovu Teoreme 3.5.1, zaključujemo da je njemu odgovarajući κ-varijetet svih κ-generisanih k-nilpotentnih ekstenzija pravougaonih traka.

5.5. Korespondencija Eilenbergovog tipa

Čuvenom Eilenbergovom teoremom uspostavljena je korespondencija između 'varijeteta' jezika i pseudovarijeteta monoida. Naime, za pseudovarijetet V monoida definisano je preslikavanje $\mathcal{L}_V$ koje svakom konačnom alfabetu X dodeljuje skup svih jezika nad alfabetom X čiji su sintaksički monoidi u V. Štaviše, ukoliko je $\mathcal{L}(X)$ skup racionalnih jezika, preslikavanje $\mathcal{L}$ je nazvano *RL-preslikavanje*. Takođe, RL-preslikavanje je tzv. *VRL-preslikavanje*, a vrlo često se naziva i *varijetetom jezika*, ako zadovoljava:

(i) $\mathcal{L}(X)$ je zatvoren za uniju i komplementiranje;

(ii) za svako $L \in \mathcal{L}(X)$ i svako $x \in X$ je $x^{-1}L \in \mathcal{L}(X)$ i $Lx^{-1} \in \mathcal{L}(X)$;

(iii) ako je $\phi : X^* \to Y^*$ homomorfizam, tada iz $L \in \mathcal{L}(Y)$ sledi $L\phi^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

S. Eilenberg je dokazao da je za svaki pseudovarijetet monoida V preslikavanje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ jeste VRL-preslikavanje i da za svako VRL-preslikavanje $\mathcal{L}$ postoji pseudovarijetet monoida V takav da je $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$.

Primetimo da su uslovi kojima je definisano VRL-preslikavanje različite prirode. Naime, uslovi (i) i (ii) se odnose na jezike nad istim alfabetom X, dok je uslov (iii) u izvesnom smislu "spoljašnji" uslov jer se odnose na jezike nad različitim alfabetima. Prilikom uspostavljanja korespondencije između κ-varijeteta polugrupa i σ-varijeteta X-automata radili smo samo sa "unutrašnjim" uslovima, tj. uslovima koji se odnose na fiksirani alfabet. Međutim, ovde ćemo pokazati da je i u slučaju automata moguće razmatrati izvesne uslove "spoljašnje" prirode, tj. uslove koji povezuju automate sa različitim ulaznim alfabetima.

Ovde će na sličan način biti uspostavljena korespondencija između varijeteta polugrupa i automata.

Neka je $\mathcal{S}$ klasa polugrupa. Definišemo preslikavanje $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ koje svakom alfabetu X dodeljuje skup svih $X-$automata za koje važi $S(A) \in \mathcal{S}$, tj.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}(X) = \{A \mid A \text{ je } X\text{−automat i } S(A) \in \mathcal{S}\}.$$

Lema 5.5.1. *Preslikavanje varijeteta polugrupa $V \mapsto \mathcal{A}_V$ je injektivno.*

Dokaz. Uočimo dva proizvoljna varijeteta polugrupa V_1 i V_2. Tada postoji polugrupa $S \in V_1 \setminus V_2$, ili $S \in V_2 \setminus V_1$. Pretpostavimo $S \in V_1 \setminus V_2$. Tada za proizvoljan generatorni skup X polugrupe S postoji kongruencija θ na X^+ tako da je $S \cong X^+/\theta$. Dakle, $S(A(\theta)) = X^+/\theta \cong S \in V_1 \setminus V_2$. Dakle, $A(\theta) \in \mathcal{A}_{V_1}(X) - \mathcal{A}_{V_2}(X)$, odakle je $\mathcal{A}_{V_1}(X) - \mathcal{A}_{V_2}(X)$. $\square$

Lema 5.5.2. *Neka je $\mathcal{S}$ klasa polugrupa i X alfabet. Tada:*

(1) *ako je klasa $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike, tada je i klasa automata $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}(X)$ zatvorena za homomorfne slike;*

(2) *ako je klasa $\mathcal{S}$ zatvorena za homomorfne slike, tada je klasa automata $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}(X)$ zatvorena za podautomate;*

(3) *ako je klasa $\mathcal{S}$ zatvorena za poddirektne proizvode, tada je klasa automata $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}(X)$ zatvorena za direktne proizvode.*

Dokaz. Slično dokazu Leme 5.4.2. $\square$

Teorema 5.5.1. *Neka je V varijetet polugrupa i X proizvoljan alfabet. Tada $\mathcal{A}_V(X)$ jeste σ-varijetet X-automata.*

Dokaz. Analogan je dokazu Teoreme 5.4.1. $\square$

Neka su X i Y proizvoljni alfabeti takvi da postoji surjekcija $\phi : Y \to X$. Jasno da je ovom surjekcijom određen epimorfizam iz slobodne polugrupe Y^+ na slobodnu polugrupu X^+, koji ćemo, bez zabune, isto označavati sa ϕ. Neka je A proizvoljan X-automat. Definišimo Y-automat A^ϕ sa istim skupom stanja kao automat A i prelazima određenim sa $ay = a(y\phi)$, za sve $a \in A$, $y \in Y$. Dakle, automat A možemo smatrati Y-automatom. Automat A^ϕ nazivamo *ϕ-ekstenzijom* automata A ili, kada nije neophodno istaći surjekciju, *ulaznom ekstenzijom* automata A.

Lema 5.5.3. *Proizvoljan automat je σ-ekvivalentan svakoj svojoj ulaznoj ekstenziji.*

Dokaz. Sledi neposredno s obzirom na činjenicu da je $\eta_y = \eta_{y\phi}$, za svaku surjekciju ϕ i svako $y \in Y$. $\square$

Uočimo dva proizvoljna alfabeta X i Y takva da je $|X| \leq |Y|$. Tada postoji surjektivno preslikavanje iz Y na X, pa na osnovu prethodne leme dobijamo:

Posledica 5.5.1. *Neka su X i Y alfabeti takvi da je $|X| \leq |Y|$. Tada za svaki X-automat postoji njemu σ-ekvivalentan Y-automat.*

Posledica 5.5.2. *Neka je V varijetet polugrupa i X i Y alfabeti takvi da je $|X| \leq |Y|$. Tada je $\mathcal{A}_V(X) \subseteq \mathcal{A}_V(Y)$ i $\mathcal{A}_V(X)$ je skup svih X-automata iz $\mathcal{A}_V(Y)$.*

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Posledice 5.5.1. $\square$

Preslikavanje $\mathcal{A}$ koje svakom alfabetu X dodeljuje varijetet X-automata nazivamo $\mathcal{A}(X)$ *varijetalnim preslikavanjem*. Ukoliko $\mathcal{A}(X)$ jeste σ-varijetet X-automata, za svaki alfabet X, onda za preslikavanje $\mathcal{A}$ kažemo da je *σ-varijetalno preslikavanje*. Ako varijetalno preslikavanje $\mathcal{A}$ zadovoljava uslov:

- ako su X i Y alfabeti takvi da postoji surjekcija $\phi : Y \to X$, tada

$$A \in \mathcal{A}(X) \Leftrightarrow A^\phi \in \mathcal{A}(Y),$$

onda za preslikavanje $\mathcal{A}$ kažemo da je *ε-varijetalno*. Preslikavanje koje je istovremeno σ-varijetalno i ε-varijetalno nazivamo *$\sigma\varepsilon$-varijetalno preslikavanje*.

Primetimo da uslov dat u definiciji ε-varijetalnog preslikavanja odgovara uslovu (iii) kod Eilenbergove definicije varijeteta jezika.

Teorema 5.5.2. *Za svako $\sigma\varepsilon$-varijetalno preslikavanje $\mathcal{A}$ postoji varijetet polugrupa V tako da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_V$.*

Dokaz. Uočimo proizvoljan konačan alfabet X. Tada je $\mathcal{A}(X)$ varijetet X-automata. Označimo sa $W_X = \{S(A) \,|\, A \in \mathcal{A}(X)\}$. Dokazaćemo da je skup V svih polugrupa oblika $S(A)$ gde je A neki X-automat koji pripada skupu $\mathcal{A}(X)$, odnosno da je $V = \cup\{W_X \,|\, X \text{ je alfabet}\}$ varijetet polugrupa.

Neka je polugrupa T homomorfna slika polugrupe $S \in V$. Tada postoji alfabet X i X-automat $A \in \mathcal{A}(X)$ tako da je $S = S(A)$. Prema Lemi 5.4.3 postoje X-automati A' i B' takvi da je $T \cong S(B')$, $S \cong S(A')$ i automat B' je homomorfna slika automata A'. Kako automat A' jeste σ-ekvivalentan automatu $A \in \mathcal{A}(X)$ i kako $\mathcal{A}(X)$ jeste σ-zatvoren skup, to je $A' \in \mathcal{A}(X)$, a onda, zbog činjenice da je $\mathcal{A}(X)$ varijetet automata, sledi da je $B' \in \mathcal{A}(X)$. Odavde je $T \cong S(B') \in W_X \subseteq V$.

Neka je, sada, polugrupa T poddirektan proizvod polugrupa $S_i \in V$, $i \in I$. To znači da je za svako $i \in I$ polugrupa S_i oblika $S_i = S(A_i)$, za neki $A_i \in \mathcal{A}(X_i)$. Neka je Z proizvoljan alfabet takav da postoje surjekcije ϕ_i iz Z na svaki od skupova X_i, kao i surjekcija ϕ iz Z na Y, gde je Y neki skup generatora polugrupe T. Zbog činjenice da $\mathcal{A}$ jeste ε-varijetalno preslikavanje, imamo da je $A_i^{\phi_i} \in \mathcal{A}(Z)$. Prema Lemi 5.4.4 je $T \cong S(B)$ za Z-automat B koji je poddirektan proizvod Z-automata B_i, $i \in I$, takvih da je $S(B_i) \cong S(A_i^{\phi_i})$, za svako $i \in I$. Kako je $A_i^{\phi_i} \in \mathcal{A}(Z)$ i $\mathcal{A}(Z)$ je σ-zatvoren, sledi da je $B_i \in \mathcal{A}(Z)$. Štaviše, zbog činjenice da je $\mathcal{A}(Z)$ varijetet Z-automata i da je B poddirektan proizvod automata iz $\mathcal{A}(Z)$ dobijamo da je $B \in \mathcal{A}(Z)$. Odatle je $T \cong S(B) \in W_Z \subseteq V$, što je i trebalo dokazati.

Dokazaćemo, sada, da je V traženi varijetet polugrupa, odnosno da važi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_V$, tj. da je $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_V(X)$ za svaki alfabet X.

Najpre, ako je $A \in \mathcal{A}(X)$ proizvoljan automat, tada je $S(A) \in W_X \subseteq V$, odakle je $A \in \mathcal{A}_V(X)$. Prema tome, $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{A}_V(X)$.

Uočimo, sada, proizvoljan automat $A \in \mathcal{A}_V(X)$. Tada je $S(A) \in V$. Zbog načina na koji je formiran varijetet V imamo da postoji alfabet Y i Y-automat $B \in \mathcal{A}(Y)$ takav da je $S(A) \cong S(B)$. Neka je Z proizvoljan alfabet iz kog postoje surjekcije ϕ_1 i ϕ_2 na X i Y, redom. Kako preslikavanje $\mathcal{A}$ jeste ε-varijetalno, to je $B^{\phi_2} \in \mathcal{A}(Z)$, a onda iz σ-zatvorenosti varijeteta $\mathcal{A}(Z)$ i činjenice da je $S(A^{\phi_1}) \cong S(A) \cong S(B) \cong S(B^{\phi_2})$ sledi da je $A^{\phi_1} \in \mathcal{A}(Z)$, odakle, opet zbog toga što je $\mathcal{A}$ ε-varijetalno preslikavanje, dobijamo da je $A \in \mathcal{A}(X)$. Dakle, $\mathcal{A}_V(X) \subseteq \mathcal{A}(X)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Primetimo da je ovde traženi varijetet polugrupa dobijen direktno, a ne kao varijetet generisan nekom klasom polugrupa, kao što je slučaj kod Eilenbergove teoreme.

Na osnovu Teorema 5.5.1 i 5.5.2 neposredno sledi sledeća teorema koja predstavlja teoremu o korespondenciji Eilenbergovog tipa.

Teorema 5.5.3. *Neka je V proizvoljan varijetet polugrupa. Tada $\mathcal{A}_V$ jeste $\sigma\varepsilon$- varijetalno preslikavanje i, takođe, za proizvoljno $\sigma\varepsilon$-varijetalno preslikavanje $\mathcal{A}$ postoji varijetet polugrupa V takav da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_V$.*

5.6. Karakteristične polugrupe neregularnih automata

Kao što smo već primetili u Odeljku 5.3, σ-varijetet automata je regularan. Prema tome, korespondencija između varijeteta automata i varijeteta polugrupa uspostavljena u Odeljku 5.4 odnosi se samo na regularne varijetete. Sa namerom da dođemo do sličnih rezultata za neregularane varijetete predlažemo novu definiciju karakteristične polugrupe automata koji zadovoljava neki neregularni identitet i dajemo neke osobine ovog pojma.

Naime, nije teško primetiti da je Myhillova kongruencija automata A određena sa

$$(u,v) \in \mu_A \Leftrightarrow A \models gu = gv.$$

Dakle, ovako definisana kongruencija tretira samo regularne identitete zadovoljene na automatu. U tom smislu, za neregularan X-automat A definišemo kongruenciju θ_A na X^+ na sledeći način:

$$(u,v) \in \theta_A \Leftrightarrow u = v \qquad \text{ili} \qquad A \models gu = hv.$$

Faktor polugrupu X^+/θ_A zovemo *karakteristična polugrupa* automata A, u oznaci $C(A)$. Napomenimo, još jednom, da ćemo 'klasičnu' karakterističnu polugrupu automata A, tj. polugrupu prelaza, i nadalje označavati sa $S(A)$. Dakle, pod karakterističnom polugrupom neregularnog automata A podrazumevamo polugrupu $C(A)$.

Primetimo da ako je A regularan automat tada je $C(A)$ jednaka X^+, pa je nema smisla razmatrati. Takođe, nije teško primetiti da je za neregularan automat A polugrupa $S(A)$ homomorfna slika polugrupe $C(A)$.

Napomenimo, ovde, da je, prema Posledici 1.4.1, svaki neregularan automat direktabilan. Takođe je poznato da je skup svih usmeravajućih reči $DW(A)$ automata A ideal u polugrupi X^+. Označimo sa ρ_A njemu odgovarajuću Reesovu kongruenciju na polugrupi X^+. Naravno, sa μ_A označavamo Myhillovu kongruenciju automata A. Tada je

Teorema 5.6.1. *Za proizvoljan direktabilan automat A važi $\theta_A = \rho_A \cap \mu_A$.*

Dokaz. Uočimo proizvoljan par $(u,v) \in \theta_A$ i pretpostavimo da je $u \neq v$. Tada identitet $gu = hv$ važi na A. Prema Lemi 1.4.1 važi da je $u, v \in DW(A)$. Dakle, $(u,v) \in \rho_A$. Takođe, za proizvoljan element $a \in A$, stavljajući a umesto promenljivih g, h, dobijamo $au = av$, odakle je $(u,v) \in \mu_A$. Prema tome, $\theta_A \subseteq \rho_A \cap \mu_A$.

Obratno, pretpostavimo da je $(u,v) \in \rho_A \cap \mu_A$ i $u \neq v$. Kako je $(u,v) \in \rho_A$ i $u \neq v$ sledi da je $u, v \in DW(A)$. Znači, za dva proizvoljna elementa $a, b \in A$ imamo da je $au = bu$, i, zbog $(u,v) \in \mu_A$ važi $bu = bv$. Dakle, $au = bu = bv$ što znači da A zadovoljava identitet $gu = hv$, tj. $(u,v) \in \theta_A$. $\square$

Prema Teoremi 3.4.2 i prethodnom rezultatu sledi da važi sledeća teorema.

Teorema 5.6.2. *Za proizvoljan neregularan automat A polugrupa $C(A)$ jeste idealska ekstenzija desno nulte trake.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati, s obzirom na Lemu 1.2.1, da polugrupa $C(A)$ ima desnu nulu. Neka je $u \in DW(A)$ proizvoljan element. Dokazaćemo da je $u\theta_A$ desna nula u $C(A)$. Neka je $v\theta_A \in C(A)$ proizvoljan element. Dovoljno je dokazati da važi $(vu, u) \in \theta_A$. Kako je $u \in DW(A)$ to je $au = avu$, za svako $a \in A$. Prema tome, $(u, vu) \in \mu_A$. Takođe, važi $avu = bvu$, za sve $a, b \in A$. Dakle, $(u, vu) \in \rho_A$. Prema tome, $(u, vu) \in \mu_A \cap \rho_A = \theta_A$. $\square$

Dakle, dok za svaku polugrupu S postoji automat A takav da je $S \cong S(A)$, to ne važi za karakterističnu polugrupu neregularnog automata. Naime, prema Teoremi 5.6.2, imamo da polugrupa S mora imati desnu nulu. Međutim, to nije dovoljno. S namerom da opišemo polugrupe koje mogu biti karakteristične polugrupe nekog neregularnog automata, uvodimo pojmove D-kongruencije i D-polugrupe.

Kongruencija θ slobodne polugrupe X^+ je *D-kongruencija* ako zadovoljava

$$|u\theta| > 1 \text{ ako i samo ako } u\theta \text{ jeste desna nula u } X^+/\theta.$$

Polugrupa S je *D-polugrupa* ako se može predstaviti u obliku $S \cong X^+/\theta$, gde je θ neka D-kongruencija. Klasu svih D-polugrupa ćemo označavati sa $\mathcal{D}$.

Teorema 5.6.3. *Skup svih D-kongruencija na polugrupi X^+, gde je X proizvoljni alfabet, predstavlja kompletnu mrežu.*

Dokaz. Najpre, jasno da ∇_{X^+} jeste D-kongruencija. Pretpostavimo da relacije θ_i, $i \in I$, jesu D-kongruencije. Dokazaćemo da je $\bigcap_{i\in I} \theta_i$ takođe D-kongruencija. Neka je

$$\Big|\, u\big(\bigcap_{i\in I} \theta_i\big) \,\Big| > 1.$$

Tada je i $|u\theta_i| > 1$, za svako $i \in I$, pa su $u\theta_i$ desne nule u X^+/θ_i. Onda je za proizvoljno $v \in X^+$ zadovoljeno $(vu, u) \in \theta_i$, za svako $i \in I$, odakle je

$$(vu, u) \in \bigcap_{i\in I} \theta_i,$$

tj. $u(\bigcap_{i\in I} \theta_i)$ je desna nula u $X^+/\bigcap_{i\in I} \theta_i$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Sada smo spremni da damo odgovor na prethodno postavljeno pitanje o uslovima pod kojima neka polugrupa može biti karakteristična polugrupa nekog direktabilnog automata.

Teorema 5.6.4. *Polugrupa S je karakteristična polugrupa $C(A)$ nekog automata A ako i samo ako je D-polugrupa.*

Dokaz. Neka je A proizvoljan neregularan X-automat. Dokazaćemo da polugrupa $C(A)$ jeste D-polugrupa. Ona je faktor polugrupa slobodne polugrupe X^+ po kongruenciji θ_A. Treba dokazati da θ_A jeste D-kongruencija, tj. da iz $|u\theta_A| \geq 1$ sledi da je $u\theta_A$ desna nula. Pretpostavimo da $u\theta_A$ nije desna nula. Tada postoji $v \in X^+$ tako da $(vu, u) \notin \theta_A = \rho_A \subseteq \mu_A$. Ako $(vu, u) \notin \rho_A$, tada $u \notin DW(A)$. Sa druge strane, iz $(vu, u) \notin \mu_A$ sledi da postoji $a \in A$ tako da je $avu \neq au$, pa opet dobijamo $u \notin DW(A)$. dakle, u svakom slučaju važi $u \notin DW(A)$. Međutim, u tom slučaju je $|u\rho_A| = 1$ i kako je $\theta_A \subseteq \rho_A$, dobijamo da je $|u\theta_A| = 1$. Prema tome, θ_A je D-kongruencija i $C(A)$ je D-polugrupa.

Obratno, pretpostavimo da polugrupa S jeste D-polugrupa, tj. $S \cong X^+/\theta$, gde je θ neka D-kongruencija. Dokazaćemo da je $S = C(A)$, gde je $A = A(\theta)$ Myhillov automat kongruencije θ. Dakle, treba dokazati $\theta_A = \theta$. Iz $(u, v) \in \theta_A$, tj. $u\theta_A = v\theta_A$, gde je $u \neq v$, sledi da je za sve $p\theta, q\theta \in A$ važi $(p\theta)u = (q\theta)v$, tj. $(pu)\theta = (qv)\theta$. Stavljajući $p = q = e$ dobijamo $u\theta = v\theta$. Sa druge strane, neka je $(u, v) \in \theta$, odnosno, $u\theta = v\theta$ i $u \neq v$. Tada je $u\theta = v\theta$ desna nula u X^+/θ. Znači, za sve $p\theta, q\theta \in A$ imamo

$$(p\theta)u = (pu)\theta = u\theta = v\theta = (qv)\theta = (q\theta)v,$$

tj. $(u, v) \in \theta_A$. Dakle, $\theta = \theta_A$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Dokazaćemo sada i neke osobine ovako definisane karakteristične polugrupe automata, koje su analogne odgovarajućim osobinama polugrupe prelaza (vidi [46]). automata

Lema 5.6.1. *Neka je X proizvoljan alfabet i neka A, B, A_i, $i \in I$, jesu X-automati.*

(1) *Ako je automat B homomorfna slika automata A tada je polugrupa $C(B)$ homomorfna slika polugrupe $C(A)$.*

(2) *Ako je automat A podautomat automata B tada je polugrupa $C(A)$ homomorfna slika polugrupe $C(B)$.*

(3) *Ako je automat A direktan proizvod automata A_i, $i \in I$, tada je polugrupa $C(A)$ poddirektan proizvod polugrupa $C(A_i)$, $i \in I$.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da postoji homomorfizam $\psi : A \to B$. Da bi dokazali da je $C(B)$ homomorfna slika polugrupe $C(A)$ dovoljno je dokazati da je $\theta_A \subseteq \theta_B$. Pretpostavimo da je $(u, v) \in \theta_A$ i $u \neq v$. Tada je $a_1u = a_2v$ za sve $a_1, a_2 \in A$. Izaberimo proizvoljne elemente $b_1, b_2 \in B$. Tada postoje $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1\psi = b_1$, $a_2\psi = b_2$. Dakle,

$$b_1u = (a_1\psi)u = (a_1u)\psi = (a_2v)\psi = (a_2\psi)v = b_2v,$$

što daje $(u, v) \in \theta_B$.

(2) Očigledno je da je $\theta_B \subseteq \theta_A$ odakle dobijamo da je $C(A)$ homomorfna slika od $C(A)$.

(3) Definišimo preslikavanje $\phi : C(A) \to T$, gde je

$$T = \{(u\theta_i)_{i\in I} \,|\, u \in X^+\} \qquad \text{i} \qquad \theta_i = \theta_{A_i},$$

sa $(u\theta_A)\psi = (u\theta_i)_{i\in I}$.

Neka su $u\theta_A, v\theta_A \in C(A)$ dva proizvoljna elementa takva da je $u \neq v$ i $u\theta_A = v\theta_A$. Za proizvoljno $i \in I$ i proizvoljne $a_i, b_i \in A_i$ postoje elementi $a, b \in A$ takvi da je $a\pi_i = a_i$ i $b\pi_i = b_i$, gde je π_i i-th projekcija. Kako je $(u, v) \in \theta_A$, to je

$$a_i u = (a\pi_i)u = (au)\pi_i = (bv)\pi_i = (b\pi_i)v = b_i v.$$

Znači, $(u, v) \in \theta_i$, što daje $(u\theta_i)_{i\in I} = (v\theta_i)_{i\in I}$. Prema tome, ϕ je dobro definisano.

Pretpostavimo, sada, da je $(u\theta_i)_{i\in I} = (v\theta_i)_{i\in I}$. Tada za proizvoljne $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned} au &= (a\pi_i)_{i\in I}u = ((a\pi_i)u)_{i\in I} \\ &= ((b\pi_i)v)_{i\in I} = (b\pi_i)_{i\in I}v = bv. \end{aligned}$$

Dakle, $(u, v) \in \theta_A$. Dakle, ϕ je injektivno preslikavanje. Očigledno, ϕ je surjektivno preslikavanje.

Preostaje da se dokaže da je ϕ homomorfizam. Izaberimo dva proizvoljna elementa $u\theta_A, v\theta_A \in C(A)$. Tada je

$$\begin{aligned} ((u\theta_A)(v\theta_A))\phi &= ((uv)\theta_A)\phi = ((uv)\theta_i)_{i\in I} \\ &= ((u\theta_i)(v\theta_i))_{i\in I} = (u\theta_i)_{i\in I}(v\theta_i)_{i\in I} = ((u\theta_A)\phi)((v\theta_A)\phi). \end{aligned}$$

Dakle, polugrupe T i $C(A)$ su izomorfne. Očigledno, T je poddirektan proizvod polugrupa $C(A_i)$, $i \in I$, pa je i $C(A)$ takođe njihov poddirektan proizvod. $\square$

Neka je κ proizvoljan kardinal. Za proizvoljan alfabet X kardinalnosti κ i proizvoljnu klasu $\mathcal{S}$ koja se sastoji od κ-generisanih polugrupa definišemo $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ kao skup svih X-automata A čije su karakteristične polugrupe $C(A)$ u $\mathcal{S}$, tj.

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \{A \,|\, A \text{ je } X\text{-automat i } C(A) \in \mathcal{S}\}.$$

Tada imamo sledeću posledicu Leme 5.6.1.

Posledica 5.6.1. *Neka je κ proizvoljan kardinal, X proizvoljan alfabet kardinalnosti κ i $\mathcal{S}$ klasa κ-generisanih polugrupa. Tada važi:*

(1) *Ako je $\mathcal{S}$ klasa polugrupa zatvorena za homomorfne slike, tada je klasa automata $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za homomorfne slike.*

(2) *Ako je $\mathcal{S}$ klasa polugrupa zatvorena za homomorfne slike, tada je klasa automata $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za podautomate.*

(3) *Ako je $\mathcal{S}$ klasa polugrupa zatvorena za κ-poddirektne proizvode, tada je klasa automata $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ zatvorena za direktne proizvode.*

Primetimo da pojam σ-varijeteta automata koji uveden u Odeljku 5.3 definisan u odnosu na polugrupe prelaza automata. Slično uvodimo pojam tzv. σ_C-varijeteta automata.

Neka je X proizvoljan alfabet. Tada na klasi svih X-automata definišemo relaciju ekvivalencije

$$(A, B) \in \sigma_C \text{ ako i samo ako je } C(A) \cong C(B).$$

Tada varijetet X-automata V jeste *σ_C-zatvoren* ako je zasićen relacijom σ_C. Takav varijetet zovemo još i *σ_C-varijetet automata*.

Sledeća teorema predstavlja jedan deo veze između neregularnih varijeteta automata i κ-varijeteta polugrupa. Nažalost, obratna veza nije još ustanovljena.

Teorema 5.6.5. *Neka je κ proizvoljan kardinal i X alfabet kardinalnosti κ. Ako K jeste κ-varijetet polugrupa tada $\mathcal{V}(K)$ jeste σ_C-varijetet X-automata.*

Dokaz. Očigledno je da $\mathcal{V}(K)$ jeste σ_C-zatvoren. Prema Posledici 5.6.1, $\mathcal{V}(K)$ jeste varijetet X-automata. $\square$

Neka je X proizvoljan alfabet. Za kongruenciju θ polugrupe X^+ kažemo da je je *slabo D-invarijantna* ako i samo ako zadovoljava

- ako ρ_1 i ρ_2 jesu D-kongruencije na polugrupi X^+ takve da je $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$, tada iz $\theta \subseteq \rho_1$ sledi $\theta \subseteq \rho_2$.

U sledećoj teoremi data je karakterizacija σ_C-varijeteta automata koristeći koncept slabo D-invarijantnih kongruencija.

Teorema 5.6.6. *Neka je X proizvoljan alfabet i V klasa neregularnih X-automata. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *V je σ_C-varijetet automata;*

(ii) *postoji slabo D-invarijantna kongruencija θ na X^+ takva da je V skup svih σ_C-ekvivalentnih X-automata automatima iz $H(A(\theta))$;*

(iii) *postoji slabo D-invarijantna kongruencija θ na X^+ takva da je*

$$V = \{A \mid A \text{ je } X\text{-automat i } \theta \subseteq \theta_A\}.$$

Dokaz. (i)⇒(ii). Pretpostavimo da V jeste σ_C-varijetet automata. Kako je, prema Teoremi 5.6.3, presek D-kongruencija takođe D-kongruencija, to

$$\theta_V = \bigcap_{A \in V} \theta_A$$

jeste D-kongruencija, za koju ćemo pokazati da zadovoljava uslove teoreme.

Uočimo proizvoljan automat $B \in V$. Tada je $\theta_V \subseteq \theta_B$. Odatle je $A(\theta_B)$ homomorfna slika automata $A(\theta_V)$, a automat B je σ_C-ekvivalentan automatu $A(\theta_B)$.

Obratno, neka automat B jeste σ_C-ekvivalentan automatu $C \in H(A(\theta_V))$. Kako iz

$$\theta_V = \cap_{A \in V} \theta_A$$

sledi da je $A(\theta_V) \in V$, jer je $A(\theta_V)$ poddirektan proizvod automata $A(\theta_A)$ koji su u V, zbog σ_C-zatvorenosti ovog varijeteta. Tada je i $C \in V$ kao homomorfna slika automata iz V, a onda je, opet zbog σ_C-zatvorenosti, i $B \in V$.

Treba još dokazati da je θ_V slabo D-invarijantna kongruencija. Neka su ρ_1 i ρ_2 D-kongruencije na X^+ takve da je $X^+/\rho_1 \cong X^+/\rho_2$ i $\theta_V \subseteq \rho_1$. Tada je $A(\rho_1) \in H(A(\theta_V))$, pa je prema već dokazanom $A(\rho_1) \in V$. Međutim, onda je $A(\rho_2) \in V$ jer je σ_C-ekvivalentan sa $A(\rho_1)$. Odatle je $\theta_V \subseteq \theta_{A(\rho_2)} = \rho_2$, što je i trebalo dokazati.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Uočimo automat $B \in V$. Tada automat B jeste σ_C-ekvivalentan nekom automatu C koji je homomorfna slika automata $A(\theta)$. Odatle sledi da je $\theta = \theta_{A(\theta)} \subseteq \theta_C$. Kako je $X^+/\theta_B \cong X^+/\theta_C$ i po pretpostavci je θ slabo D-invarijantna kongruencija, to je $\theta \subseteq \theta_B$.

Obratno, neka je B automat takav da je $\theta \subseteq \theta_B$. Tada je

$$A(\theta_B) \in H(A(\theta)) \subseteq V,$$

a onda je i $B \in V$ jer je σ_C-ekvivalentan automatu $A(\theta_B)$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka je θ slabo D-invarijantna i

$$V = \{A \mid A \text{ je } X\text{-automat i } \theta \subseteq \theta_A\}.$$

Dokazaćemo da V jeste σ_C-varijetet automata.

Uočimo automat $A \in V$ i njegovu homomorfnu sliku B. Tada je $\theta_A \subseteq \theta_B$. Zaista, označimo sa $\phi : A \to B$ dati epimorfizam i uočimo proizvoljan par $(u,v) \in \theta_A$ takav da je $u \neq v$. Neka su $b_1, b_2 \in B$ proizvoljni elementi. Tada postoje $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1\phi = b_1$ i $a_2\phi = b_2$. Tada važi

$$b_1 u = (a_1\phi)u = (a_1 u)\phi = (a_2 v)\phi = (a_2\phi)v = b_2 v,$$

pa je $(u,v) \in \theta_B$. Odatle i iz $\theta \subseteq \theta_A$ sledi da je $\theta \subseteq \theta_B$, pa je $B \in V$. Slično se dokazuje i u slučaju kada je B podautomat nekog automata $A \in V$.

Neka je, sada, automat A direktan proizvod automata $A_i \in V$, $i \in I$. Tada je $\theta \subseteq \theta_i$, za svako $i \in I$, gde smo sa θ_i označili kongruenciju automata A_i. Dokazaćemo da je

$$\bigcap_{i \in I} \theta_i \subseteq \theta_A.$$

Neka je

$$(u,v) \in \bigcap_{i \in I} \theta_i$$

proizvoljan par takav da je $u \neq v$. Tada je $(u, v) \in \theta_i$, za svako $i \in I$. Neka su $a, b \in A$ proizvoljni elementi. Tada je

$$au = (a_i)_{i\in I}u = (a_i u)_{i\in I} = (b_i v)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I}v = bv.$$

Dakle, $(u, v) \in \theta_A$. Prema tome,

$$\theta \subseteq \bigcap_{i\in I} \theta_i \subseteq \theta_A,$$

pa je $A \in V$.

Takođe, slično kao u dokazu Teoreme 5.3.1, dokazujemo da V jeste σ_C-zatvoren varijetet. $\square$

Literatura

[1] J. Aczél, *Proof of a theorem of distributive type hyperidentities*, Algebra Universalis **1** (1971), 1–6.

[2] A. Adam, *On certain partitions of finite directed graphs and of finite automata*, Acta Cybernetica (Szeged) **6** (1984), 331–346.

[3] J. Almeida, *On pseudovarieties, varieties of languages, filters of congruences, pseudoidentities and related topics*, Algebra Universalis **27** (1990), 333–350.

[4] J. Almeida, *Finite semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1994.

[5] H. Andréka, S. Horváth and I. Németi, *Notes on maximal congruence relations, automata and related topics*, Acta Cybernetica **2** (1973), 71–88.

[6] M. A. Arbib (ed), *Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigrouops*, Academic Press, New York, 1968.

[7] M. A. Arbib, *Algebraic Theories of Abstract Automata*, Prentice Hall, 1969.

[8] C. J. Ash, *Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes*, J. Algebra **92** (1985), 104–115.

[9] I. Babcsányi, *Rees automaták*, Matematikai Lapok **29** (1977-81), no. 1–3, 139–148 (in Hungarian).

[10] I. Babcsányi, *Ideals in automata*, Conf. on System Theor. Aspect in Computer Science, Salgótarján, (1982), Dept. of Math., Karl Marx Univ. of Economics, Budapest, 1982-2, 20–29.

[11] I. Babcsányi, $(t;m,n)$*-commutative automata*, Pure Math. Appl., Ser. A, **2** (1991), 161–174.

[12] I. Babcsányi and A. Nagy, *Right-group type automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), 131–136.

[13] J. T. Baldwin and J. Berman, *Varieties and finite closure conditions*, Colloq. Math. **35** (1976), 15–20.

[14] B. Banaschewski, *The Birkhoff theorem for varieties of finite algebras*, Algebra Universalis **17** (1983), 360–368.

[15] V. D. Belousov, *Systems of quasigroups with generalized identities*, Uspekhi Mat. Nauk **20** (1965), 75–146.

[16] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433–454.

[17] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1940.

[18] G. Birkhoff, *Subdirect unions in universal algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 764–768.

[19] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Polugrupe*, Prosveta, Niš, 1993, (in Serbian).

[20] S. Bogdanović and M. Ćirić, *A note on congruences on algebras*, in Proc. of II Math. Conf. in Priština 1996, Lj. D. Kočinac ed., Priština, 1997, 67–72.

[21] S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković and M. Steinby, *On extensions and subdirect decompositions of automata and unary algebras*, Fundamenta Informaticae, (to appear).

[22] S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković and M. Steinby, *Local properties of automata*, (to appear).

[23] J. A. Brzozowski, *Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events*, Proc. Symp. Math. Theory of Automata, Microwave Research Inst. Symp. Ser. **12** (Brooklyn, 1963), New York, 1963, 529–561.

[24] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[25] J. Černý, *Poznámka k homogénym experimentom s konecinými automatami*, Mat.-fyz. cas. SAV **14** (1964), 208–215.

[26] J. Černý, A. Pirická and B. Rosenauerová, *On directable automata*, Kybernetika **7** (1971), no. 4, 289–298.

[27] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Posets of $\mathcal{C}$-congruences*, Algebra Universalis **36** (1996), 423–424.

[28] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata*, Algebra Colloq. **6**:1 (1999), 71–88.

[29] M. Ćirić, S. Bogdanović and B. Imreh, *Semigroups, Automata and Languages*, Prosveta, Niš. (to appear)

[30] M. Ćirić, S. Bogdanović and J. Kovačević, *Direct sum decompositions of quasi-ordered sets and their applications*, Filomat (Niš) **12**, (1998), (to appear).

[31] M. Ćirić, S. Bogdanović and T. Petković, *The lattice of positive quasi-orders on an automaton*, Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. **11**, (1996), 143–156.

[32] M. Ćirić, S. Bogdanović and T. Petković, *The lattice of subautomata of an automaton* (a brief survey), Publ. Inst. Math. (Beograd), N. S., (to appear).

[33] M. Ćirić, B. Imreh and M. Steinby, *On finite defiite, reverse definite and generalized definite automata*, Univ. Beograd Publ. Elektr. Fak., Ser. Mat., (to appear).

[34] K. Denecke and K. Glazek, *M-solid varieties and Q-free clones*, Math. Slovaca **46** (1996), 515–524.

[35] K. Denecke and R. Marszalek, *Binary Relations on Monoids of Hypersubstitutions*, Algebra Colloquium **4**:1 (1997), 49–64.

[36] K. Denecke, *Clones and Hyperidentities*, Southeast Asian Bulletin of Math. **4** (1997), 357–383.

[37] K. Denecke, *Hyperequational Theory*, Math. Japonica **47**, No. 2 (1998), 333–356.

[38] P. Dömösi, *On temporal products of automata*, Papers on Automata and Languages X, Dept. of Math. Karl Marx Univ. of Economics, Budapest, 1988-1, 49–62.

[39] Dong Yang Long, *The structure of languages whose syntactic monoid is nilpotent*, Acta Sci. Natur. Univ. Sunyatseni **35** (1996), no. 1, 12–16.

[40] L. Dubuc, *Les automates circulaires biaisés vérifient la conjecturede Černý*, RAIRO Inform. Théor. Appl. **30** (1996), no. 6, 495–505.

[41] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York and London, Vol. A, 1974, Vol B, 1976.

[42] S. Eilenberg and M. P. Schutzenberger, *On pseudovarieties*, Adv. Math. **19** (1976), 413–418.

[43] Z. Ésik, *Varieties of automata and transformation semigroups*, Acta Mathematica Hungarica **59** (1–2) (1992), 59–74.

[44] Z. Ésik, *Definite tree languages and their cascade compositions*, Publ. Math. Debrecen **48**/3–4 (1996), 243–261.

[45] Z. Ésik and B. Imreh, *Subdirectly irreducible commutative automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 251–260.

[46] F. Gécseg and I. Peák, *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[47] F. Gécseg and M. Steinby, *Tree automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

[48] F. Gécseg and G. Thierrin, *Characterizations of locally transitive semiautomata*, Papers on Automata and languages IX, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest **87–2** (1987), 1–8.

[49] A. Ginzburg, *About some properties of definite, reverse definite and related automata*, IEEE Trans. Electronic Computers **EC-15** (1966), 809–810.

[50] V. M. Glushkov, *Abstract theory of automata*, Uspehi matem. nauk **16:5 (101)** (1961), 3–62 (in Russian).

[51] V. M. Glushkov, *Abstract automata and partitions of free semigroups*, DAN SSSR **136** (1961), 765–767 (in Russian).

[52] E. Graczyńska, *Proofs of unary regular identities*, Demonstratio Math. **16** (1983), no. 4, 925–929.

[53] E. Graczyńska, *On some operators on pseudovarieties*, Bull. Sect. Logic, Pol. Acad. Sci. **19** (1990), 122–127.

[54] E. Graczyńska, *On some operators on pseudovarieties*, General Algebra, Proc. Conf., Vienna/Austria 1990, Contrib. General Algebra **7** (1991), 177–184.

[55] E. Graczyńska, *On some operators on pseudovarieties* II, Bull. Sect. Logic, Univ. Lodz, Dep. Logic **24** (1995), 80–88.

[56] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Akademie–Verlag, Berlin, 1978.

[57] U. Heuter, *Definite tree languages*, Bull. EATCS **35** (1988), 137–144.

[58] U. Heuter, *Generalized definite tree languages*, Mathem. Found. Comput. Sci. (Proc. Symp., Porabka-Kozubnik, Poland 1989). Lect. Notes in Comput. Sci. 379, Springer-Verlag, Berlin 1989, 270–280.

[59] P. M. Higgins, *An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities*, Algebra Universalis **27** (1990), 597–599.

[60] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, Acad. Press, New York, 1976.

[61] J. M. Howie, *Automata and languages*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[62] S. Huzino, *On some sequential machines and experiments*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **12** (1958), 136–158.

[63] B. Imreh, *On finite nilpotent automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 281–293.

[64] B. Imreh, *On finite definite automata*, Acta Cybernetica **7** (1984), 61–65.

[65] B. Imreh and M. Steinby, *Some remarks on directable automata*, Acta Cybernetica **12**, (1995), no. 1, 23–35.

[66] M. Ito and J. Duske, *On cofinal and definite automata*, Acta Cybernetica **6** (1983), no. 2, 181–189.

[67] B. Jonsson and E. Nelson, *Relatively free products in regular varieties*, Algebra Universalis **4** (1974), no. 1, 14–19.

[68] S. C. Kleene, *Representation of events in nerve nets and finite automata*, Automata Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956, 3–41.

[69] A. Kljachko, I. Rystsov and M. Spivak, *Extremal combinatorial problem concerninig the length of the reset word in a finite automaton*, Cybernetics **23** (1987), 165–170 (Translated from Russian).

[70] B. B. Kloss, *Some properties of correctable automata*, Kibernetika (Kiev) (1988), no. 1, 10–15 (in Russian).

[71] B. B. Kloss, *On minimal autonomuos partitions of directed graphs and some aplications to automata theory*, Acta Cybernetica (Szeged) **8** (1988), no. 4, 325–339.

[72] S. R. Kogalovskiĭ, *On the Theorem of Birkhoff*, Uspehi Mat. Nauk. **20** (1965), 206–207 (in Russian).

[73] S. R. Kogalovskiĭ, *Lattices of equational theories of unary algebras*, Studia Sci. Math. Hungar. **26** (1991), 53–62 (in Russian).

[74] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, Willey Interscience, New York, 1979.

[75] W. Lex and R. Wiegandt, *Torsion theory for acts*, Studia Sci. Math. Hungar. **16** (1981), 263–280.

[76] R. Sz. Madarász and S. Crvenković, *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*, Univ. u Novom Sadu, Novi Sad, 1995 (in Serbian).

[77] A. I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Nauka, Moskva, 1970 (in Russian).

[78] E. F. Moore, *Gedanken-experiments on sequential machines*, in: Automata studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds), Princeton, 1956, 129–153.

[79] A. Nagy, *Boolean type retractable automata with traps*, Acta Cybernetica **10** (1991), no. 1–2, 53–64.

[80] L. Niemelu, *On the directability of automata*, Kybernetika (Prague) **25** (1989), no. 5, 419–421.

[81] M. Nivat and A. Podelski, *Definite tree automata* (cont'd), Bull. EATCS **38** (1989), 186–190.

[82] I. Peák, *Automata and semigroups* I, Acta Sci. Math. (Szeged) **25** (1964), 193–201 (in Russian).

[83] I. Peák, *Automata and semigroups* II, Acta Sci. Math. (Szeged) **26** (1965), 49–54 (in Russian).

[84] M. Perles, M. O. Rabin and E. Shamir, *The theory of definite automata*, IEEE Trans. Electronic Computers **EC-12** (1963), 233–243.

[85] T. Petković, *Polugrupovni identiteti i automati*, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, 1996 (in Serbian).

[86] T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Decompositions of automata and transition semigroups*, Acta Cybernetica (to appear).

[87] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Morill, Ohio, 1973.

[88] M. Petrich and P. A. Grillet, *Extensions of an arbitrary semigroup*, J. Reine Angew. Math. **244** (1970), 97–107.

[89] J. E. Pin, *Sur les mots synchronisants dans un automata fini*, Elektron. Inform. Verarb. u. Kybernetik, EIK **14** (1978), 297–303.

[90] J. E. Pin, *Sur un cas particulier de la conjecture de Cerny*, Automata, langagues and programming, ICALP'79 (Proc. Coll., Udine, 1979), Lect. Notes. Comp. Sci. **62**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 345–352.

[91] J. E. Pin, *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984. (English translation: *Varieties of Formal Languages*, North Oxford Academic Publ., London, 1986.

[92] J. Płonka, *On equational classes of abstract algebras defined by regular identities*, Fundamenta Math. **64** (1969), 241–247.

[93] J. Płonka, *On the sum of a system of disjoint unary algebras corresponding to a given type*, Bull. Acad. Polon. Sci. **30** (1982), no. 7–8, 305–309.

[94] J. Płonka, *On the sum of a direct system of universal algebras with nullary polynomials*, Algebra Universalis **19** (1984), 197–207.

[95] J. Płonka, *On the lattice of varieties of unary algebras*, Simon Stevin **59** (1985), no. 4, 353–364.

[96] J. Reiterman, *The Birkhoff theorem for finite algebras*, Algebra Universalis **14** (1982), 1–10.

[97] I. C. Rystsov, *An almost optimal estimate for the length of a reset word for regular automata*, Dokl. Akad. Nauk. Ukrainy (1992), no. 9, 5–8 (in Russian).

[98] I. C. Rystsov, *Rank of a finite automaton*, Kibernet. Sistem. Anal. **28** (1992), 323–328 (Translated from Russian).

[99] I. C. Rystsov, *Reset words for solvable automata*, Kibernet. Sistem. Anal. (1994), no. 6, 21–26 (in Russian).

[100] I. C. Rystsov, *An almost optimal estimate for the length of a reset word for regular automata*, Kibernet. Sistem. Anal. (1995), no. 5, 40–48 (in Russian).

[101] I. C. Rystsov, *Quasioptimal band for the length of reset words for regular automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), no. 5, 145–152.

[102] I. C. Rystsov, *Exact linear bound for the length of reset words in commutative automata*, (to appear).

[103] V. N. Saliĭ, *Universal algebra and automata*, Izd. Saratovskogo Univ., Saratov, 1988 (Russian).

[104] B. M. Schein, *Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific J. Math. **17** (1966), 529–547.

[105] M. P. Schutzenberger, *On finite monoids having only trivial subgroups*, Inf. Control **8** (1965), 190–194.

[106] M. Setoyanagi, *Note on subdirectly irredicible automata*, Proc. Conf. on Semigroup Theory and its Related Fields, Kyoto, 1982, 68–77.

[107] L. N. Shevrin, *About some classes of abstract automata*, Uspehi matem. nauk **17:6 108** (1962), p. 219 (in Russian).

[108] D. M. Smirnov, *Regular varieties of algebras*, Algebra i Logika **15** (1976), no. 3, 331–342 (in Russian).

[109] D. M. Smirnov, *The correspondence between regularly definable varieties of unary algebras and semigroups*, Algebra i Logika **17** (1978), no. 4, 468–477 (in Russian).

[110] P. H. Starke, *Abstrakte Automaten*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

[111] M. Steinby, *On definite automata and related systems*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Mathematica **444**, 1969.

[112] M. Steinby, *Syntactic algebras and varieties of recognizible sets*, Les arbres en algebre et en programmation, 4eme Coll. Lille (Proc. Coll., Lille 1979), University of Lille, Lille 1979, 226–240.

[113] M. Steinby, *Some algebraic aspects of recognizability*, Fundamentals of computation theory (Proc. Conf. Szeged 1981). Lect. Notes in Comput. Sci. 117, Springer-Verlag, Berlin 1981, 360–372.

[114] M. Steinby, *A theory of tree language varieties*, in: Tree automata and Languages (M. Nivat and A. Podelski, eds.), Elsevier Science Publ., 1992, 57–81.

[115] M. Steinby, *Classifying regular languages by their syntactic algebras*, in: Results and trends in theoretical computer science (Graz, 1994), Lect. Notes in Comput. Sci., 812, Springer, Berlin, 1994, 396–409.

[116] T. Tamura, *Maximal or greatest homomorphic images of given type*, Canad. J. Math. **20** (1968), 264–271.

[117] W. Taylor, *Hyperidentities and hypervarieties*, Aequationes Math. **23** (1981), 111–127.

[118] D. Thérien, *Classification of regular languages by congruences*, Rep. CS-80-19, University of Waterloo, Dept. Comput. Sci. Waterloo, Ontario, 1980.

[119] D. Thérien, *Recognizable languages and congruences*, Semigroup Forum **23** (1981), 371–373.

[120] G. Thierrin, *Decompositions of locally transitive semiautomata*, Utilitas Mathematica **2** (1972), 25–32.

[121] G. H. Wenzel, *Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras* $\langle A; f \rangle$, Arch. Math. (Basel) **21** (1970), 256–263.

[122] M. Yoeli, *Subdirectly irreducible unary algebras*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 957–960.

Varieties of automata and semigroups

Preface

A starting preliminary of the investigations done in this thesis are connections and mutual influence between Theory of automata and Theory of semigroups, and, also, Universal algebra, which is, in a some sense, a basis of these two theories. Results and methods of Theory of semigroups have applications in Theory of automata. Among the most frequently applied methods are various compositions and decompositions, such as: extensions, subdirect products, parallel compositions, direct sums, etc. On the other hand, Theory of automata gives motivation for investigations of some new classes of semigroups, and, also, methods of Theory of automata can be successfully used in Theory of semigroups.

The witness of the importance of these connections is significant number of papers and monographs from this area. The most important among them are: M. A. Arbib (ed) [6] from 1968, M. A. Arbib [7] from 1969, F. Gésceg and J. Peák [46] from 1972, G. Lallement [74] from 1979, J. E. Pin [91] from 1986, V. N. Saliĭ[103] from 1988, J. M. Howie [61] from 1991.

One connection between semigroups, on one side, and automata and languages, on the other, is realised through free semigroups and monoids. Namely, they are input semigroups of automata and, also, languages are defined precisely as their subsets.

However, more significant connection for this thesis is realized through transition semigroups[4)] of automata. This concept was introduced by V. M. Glushkov in 1961, in [51], but systematic investigations of connections between automata and their transition semigroups were initiated by I. Peák, in papers [82], [83] from 1964 and 1965. When the structure of the transition semigroup is known, some conclusions on the structure of the automaton itself can be made. The best example for that is the sequence of the well-known Krohn–Rhodes theorems from 1965 and later, where connection between cascade decompositions of automata and semidirect decompositions of their semigroups is given.

4)also known as "characteristic semigroups of automata"

It is known that automata, by which automata without outputs are considered, can be treated as unary algebras. Certainly, the converse also holds, i.e. every unary algebra can be treated as an automaton. This enables using results and methods of universal algebra in investigation of automata. Considerations devoted to varieties, pseudovarieties and generalized varieties of automata are especially important. It should be mentioned that some varieties of automata have been being investigated for many years. The most famous among them are the following generalized varieties of automata: directable automata, introduced by J. Černý [25] in 1964, and P. H. Starke [110] in 1969, definite automata, introduced by S. C. Kleene [68] in 1956, and M. Perles, M. O. Rabin and E. Shamir [84] in 1963, reverse definite automata, introduced by J. A. Brzozowski [23] in 1963. and A. Ginzburg [49] in 1966, as well as generalized definite automata, introduced in the same paper of A. Ginzburg, and nilpotent automata, which were introduced by L. N. Shevrin [107] in 1962.

In various algebraic theories, one of the most frequently investigated subject has been algebras whose all subalgebras of certain type belong to some class of algebras. Very often, subalgebras taken in consideration are exactly monogenic or finitely generated subalgebras. For algebras satisfying just described condition it is said that they "locally belong" to a given class. However, in Algebraic theory of automata this problem has been rarely treated. Problems of that type can be found only in the paper due to M. Steinby [115], who investigated certain "locally closed" classes of automata. Therefore, this will be one of the problems treated in this thesis.

Another very important problem that will be investigated here is subdirect decompositions of automata. Thanks to the well-known Birkhoff's Representation Theorem [18], given in 1944, the problem of subdirect decompositions of algebras has arisen as a classical algebraic problem. Namely, the theorem says that every algebra is a subdirect product of subdirectly irreducible algebras. Hence, the problem of describing the structure of subdirectly irreducible algebras becomes very important.

In theory of automata only subdirectly irreducible automata belonging to some special classes of automata have been treated. Thus, M. Yoeli in [122] investigated subdirectly irreducible connected finite autonomuous automata, G. H. Wenzel in [121] generalized his results by giving the structure of all subdirectly irreducible autonomous automata. Further generalizations were given by Z. Ésik and B. Imreh in [45], for commutative automata, and I. Babcsányi in [11], for so called $(t; m, n)$-commutative automata. On the other hand, B. Imreh in [63] characterized and gave algorithm for constructing all subdirectly irreducible nilpotent automata. He also characterized subdirectly irreducible definite automata in [64], and the same problem for reverse definite and generalized definite automata was solved by M. Ćirić, B. Imreh and M. Steinby in [33].

In the general case, subdirectly irreducible automata were treated only by M. Setoyanagi in [106], and, since, by S. Bogdanović, M. Ćirić, B. Imreh, T. Petković and M. Steinby in [21]. The results from that paper will be given here.

The central problem of this thesis is establishing the correspondence between varieties of automata and semigroups. Consideration of such problem has its historical origins. Namely, just after Theory of automata and formal languages was founded, it was noticed that it could use successfully results of one older theory – Theory of semigroups. Hence, the triangle "semigroups–automata–languages" was settled, and it is still, thirty years after, very actual.

One of the most famous results that establishes correspondence between languages and monoids is Eilenberg's Correspondence Theorem [41], given in 1976. This correspondence is made between pseudovarieties of monoids and "varieties" of languages through syntactic congruences of languages. The first result of that type was given by M. Schützenberger [105] in 1965. He made connection between pseudovarieties of aperiodic monoids and star-free languages.

Eilenberg's theorem initiated many investigations considering connections between some special varieties of languages and pseudovarieties of monoids and semigroups[5)], and, also, investigations treating more general connections between varieties of languages, pseudovarieties of semigroups and congruences on free semigroups, as well as corresponding universal algebraic generalizations. Among such papers are the papers due to J. Almeida [3], 1990, D. Thérien [118], [119] from 1980, 1981, respectively, etc.

On the other hand, Eilenberg's theorem was motivation for investigating similar connections between languages and automata, what was done by M. Steinby [115], 1994. Therefore, in the previously mentioned triangle "semigroups–languages–automata" it remains to give some kind of correspondence between automata and semigroups. It is natural to use transition semigroups of automata for that aim. This will be done in this thesis.

The thesis consists of five chapters.

The first chapter is introductionary. Some notions from universal algebra, semigroup theory and theory of automata are given there, as well as some basic results that will be used in the sequel.

Chapter 2 is devoted to closure operators defined on the classes of automata and, especially, on varieties of automata. Namely, in Section 2.1 we introduce the notions of the operators $L : K \mapsto L(K)$ which assigns to a class K of automata the class $L(K)$ of all automata whose all monogenic subautomata are in K, and operator $CL : K \mapsto CL(K)$ which assigns the class $CL(K)$ of all automata whose all finitely generated subautomata belong to K. In Section 2.2 this operators are applied on the class of connected automata and some of its subclasses. In Sections 2.3 and 2.4, those operators are used on varieties, and, also, on generalized varieties and pseudovarieties.

Chapter 3 is devoted to a very wide class of directable automata, its generalizations and specializations, intoduced in the paper [86] due to T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović. Section 3.1 is introductionary. It contains notions and notations of the classes that are considered in this chapter. Besides some already known classes, some new classes, introduced in [86], are also considered. In Section 3.2 we give some impor-

[5)]see J. M. Howie [61], G. Lallement [74], J. E. Pin [91] etc.

tant properties of the languages of all directable, one-trapping, trapping, etc. words of an automaton. In the third section we consider relationships between the classes introduced in 3.1, and give some their algebraic properties. In Sections 3.4 and 3.5 two important problems are considered. The first one is describing the structure of automata belonging to the classes of all generalized directable and generalized definite automata, as well as to some their important subclasses. The second question is connection between the structure of automata from those classes and their transition semigroups.

In Chapter 4 we consider subdirect decompositions of automata and, especially, subdirectly irreducible automata. Analogously to the notion of the Rees conguence on a semigroup determined by its ideal, in Section 4.1 we introduce the notion of the Rees conguence on an automaton determined by its subautomaton, and, also, the notions of an extension and a dense extension of automata and investigate them. In the second section of this chapter, still motivated by ideas from the semigroup theory, especially by those from the paper [104] due to B. M. Schein, we introduce and treat some new concepts, such as a kernel, a core and disjunctive elements are. All those new concepts we use in Section 4.3 in order to prove the theorem which describes the structure of subdirectly irreducible automata in general case. Then, in Section 4.4 this theorem is applied on nilpotent, definite, reverse definite and generalized definite automata. In the last section of this chapter, Section 4.5, we introduce the notion of a subdirect product of two classes of automata and investigate conditions that irregular variety $\boldsymbol{V}$ has to satisfy in order that the relation $\mathbf{D} \vee \boldsymbol{V} = \mathbf{D} \oplus \boldsymbol{V}$ holds, where $\mathbf{D}$ is the variety of all discrete automata. In that way we give answer to the question implicitly stated by J. Płonka in [95].

The last chapter, Chapter 5, is devoted to a correspondence between varieties of automata and semigroups. It has been shown that for the varieties of semigroups considered here is important to have bounded number of generators. That leads us to a new concept – κ-varieties of semigroups, which is investigated in Section 5.2, where we use the concept of a weakly invariant congruence, introduced in Section 5.1. In Section 5.3 we define and investigate the concept of a σ-closed variety, i.e. a σ-variety, of automata. Finally, in Section 5.4, we prove The Correspondence Theorem between σ-varieties of automata and κ-varieties of semigroups. In Section 5.5 we give another correspondence between automata and semigroups. As in the correspondence given in the Section 5.4 irregular automata stayed out of consideration, and reason for that is inconvenient concept of transition semigroups for those automata, in Section 5.6 we introduce a new concept of a characteristic semigroup of an irregular automaton and consider corresponding σ_C-varieties.

In this occasion I offer thanks to my family and friends for the support given to me during doing this thesis. Especial acknowledgement for unselfish help during my whole studying and, certainly, in working on this thesis, I give to my professors Miroslav Ćirić and Stojan Bogdanović.

Contents

Indeks pojmova i oznaka

Zahvaljujem se na pomoći koju su pri realizaciji rada pružili:

SO Leskovac

Omladinska zadruga Leskovac

JP “Pijaca” Leskovac

DP “Porečje” Vučje

PP “Eurokomerc” Leskovac

PP “5M-Milićević” Leskovac

Fabrika plastificiranih limova Leskovac