UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET

Odsek za Matematiku

Žarko Lj. Popović

KONGRUENCIJE I RAZLAGANJA POLUGRUPA I AUTOMATA

doktorska disertacija

Niš, 2001

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
Odsek za Matematiku

Žarko Lj. Popović

KONGRUENCIJE I RAZLAGANJA POLUGRUPA I AUTOMATA

doktorska disertacija

NIŠ, 2001

Predgovor

U izučavanju algebarskih struktura ključnu ulogu igraju dva međusobno komplementarna metoda - metod slaganja (kompozicije) i metod razlaganja (dekompozicije). Glavni zadatak prvog metoda je konstrukcija algebre željenih osobina iz unapred datih algebri jednostavnije strukture, dok je suština drugog metoda u tome da se algebra razbije u delove prostije strukture, da se izuči struktura tih delova, kao i veza između tih delova u okviru cele algebre.

Veoma važnu ulogu u razlaganjima algebri imaju kongruencije koje je još 1801. godine uveo K. Gauss proučavajući deljivost celih brojeva. Od tada su kongruencije često bile predmet istraživanja mnogih algebraista. Veliki broj važnih tipova razlaganja algebri koristi kongruencije, pa zato kongruencije imaju posebnu i veoma značajnu ulogu u izučavanju razlaganja algebri. Takva uloga kongruencija došla je do posebnog izražaja 1940-ih godina u nizu radova G. Birkhoffa, koji je dokazao da se sva razlaganja algebri u direktne i poddirektne proizvode mogu realizovati pomoću izvesnih sistema kongruencija. Kada su 1950-ih godina T. Tamura i N. Kimura započeli izučavanje najvećih razlaganja polugrupa, u prvi plan su se tada istakle najmanje kongruencije na polugrupi, koje odgovaraju tim najvećim razlaganjima. Sve to je dovelo do intenzivnog izučavanja veza između slaganja i razlaganja algebri i odgovarajućih kongruencija.

Glavna tema ove disertacije jesu neke kongruencije na polugrupama i automatima. Posle prve glave, gde su uvedeni neki osnovni pojmovi iz univerzalne algebre, teorije polugrupa i teorije automata, kao i neki rezultati potrebni za dalji rad, u nastavku je prikazano nekoliko novih načina za konstrukciju najmanje polumrežne kongruencije na polugrupi, odnosno, najvećeg polumrežnog razlaganja polugrupe, zatim, uvedeni su neki novi sistemi kongruencija na polugrupi koji indukuju izvesna poddirektna razlaganja polugrupe, a opisane su i najmanje kongruencije izvesnih tipova na automatu.

Danas, polugrupa predstavlja jednu od najinteresantnijih i najviše izučavanih algebarskih struktura. U teoriji razlaganja polugrupa polumrežna razlaganja igraju glavnu ulogu. Ova vrsta razlaganja prvi put je definisana i izučavana u radu A. H. Clifforda [35] iz 1941. godine. Čuvena teorema, koju je 1956. godine u radu [150] dokazao T. Tamura, kaže da svaka polugrupa ima najveće polumrežno razlaganje i da svaka komponenta tog razlaganja nije dalje polumrežno razloživa. Ali, ako nameravamo da proučavamo strukturu polugrupe preko njenog najvećeg polumrežnog razlaganja, srećemo se sa sledećim problemom: Kako konstruisati najveće polumrežno razlaganje polugrupe? Druga varijanta ovog problema je: Kako na polugrupi konstruisati najmanju polumrežnu kongruenciju σ?

Jedan od prvih, možda i najboljih, metoda za konstrukciju relacije σ dat je 1972. godine od strane T. Tamurae u radu [151]. On je napravio sledeću proceduru: Polazimo od relacije deljivosti na polugrupi. Zatim definišemo novu relaciju deljivosti (deljivost stepena elementa) koju označavamo sa $\longrightarrow$. Konačno, praveći tranzitivno zatvorenje relacije $\longrightarrow$ dobijamo kvazi-uređenje na polugrupi, a simetrično otvorenje ovog kvazi-uređenja (što je njegova prirodna relacija ekvivalencije) jednako je relaciji σ, najmanjoj polumrežnoj kongruenciji na polugrupi.

Sa druge strane, M. S. Putcha je u radu [133] iz 1974. godine, dokazao da delovanja operatora tranzitivnog zatvorenja i simetričnog otvorenja u Tamurainoj proceduri mogu da se permutuju. Drugim rečima, na relaciju $\longrightarrow$ mi prvo možemo primeniti operator simetričnog otvorenja, gde dobijamo novu relaciju koju označavamo sa $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-$, zatim ako na novo dobijenu relaciju $-\!\!\!-$ primenimo operator tranzitivnog zatvorenja ponovo ćemo dobiti najmanju polumrežnu kongruenciju σ.

Najvažniji korak u prethodno navedenim procedurama je primena operatora tranzitivnog zatvorenja na relacije $\longrightarrow$ i $-\!\!\!-$. Kao što je poznato, tranzitivno zatvorenje neke relacije dobijamo ako primenjujemo iterativnu proceduru kompozicije (proizvoda) na tu relaciju. U opštem slučaju broj primenjenih iteracija može biti i beskonačan. Prirodan problem vezan za iterativne procese na relacijama, o kojima je bilo reči, je sledeći: Pod kojim uslovima vezanim za datu polugrupu S, najmanja polumrežna kongruencija na toj polugrupi može biti dobijena primenom konačnog broja iteracija na relaciju $\longrightarrow$ ili $-\!\!\!-$?

Odgovor na ovo pitanje, vezano za relaciju $\longrightarrow$, dali su u radu [45] iz 1996. godine M. Ćirić i S. Bogdanović. U pomenutom radu su M. Ćirić i S. Bogdanović dali još jednu novu karakterizaciju najmanje polumrežne kongruencije pomoću glavnih radikala, odnosno, potpuno poluprim ideala polugrupa, i opisali su strukturu polugrupa u kojima je ograničena dužina minimalnih puteva u grafu koji odgovara relaciji $\longrightarrow$.

U drugoj glavi ove disertacije je razmatran i rešen sličan problem vezan za Putchainu relaciju $-\!\!\!-$. Sa $\mathcal{S}_n$ i $\widehat{\mathcal{S}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, označene su respektivno klase svih polugrupa u kojima je dužina svih minimalnih puteva u grafovima $(S, \longrightarrow)$ i $(S, -\!\!\!-)$ ograničena sa n. Ekvivalentno, $\mathcal{S}_n$ i $\widehat{\mathcal{S}}_n$ su respektivno klase svih polugrupa u kojima n-ti stepeni $\longrightarrow^n$ i $-\!\!\!-^n$, relacija $\longrightarrow$ i $-\!\!\!-$, respektivno, jesu tranzitivne relacije. Poznato je da je $\mathcal{S}_1 = \widehat{\mathcal{S}}_1$. Ova klasa se sastoji od svih polugrupa koje su razložive u polumrežu Arhimedovih polugrupa. Klasu polumreža Arhimedovih polugrupa izučavali su M. S. Putcha u radu [132] iz 1973. godine, i radu [134] iz 1981. godine,

T. Tamura u radu [152] iz 1972. godine, F. Kmeť u radu [95] iz 1988. godine, S. Bogdanović i M. Ćirić u radu [20] iz 1992. godine, i radovima [22] i [42] iz 1993. godine, i drugi autori. Polugrupe koje pripadaju klasi $\mathcal{S}_n$ su u potpunosti opisane od strane M. Ćirića i S. Bogdanovića u radu [45] iz 1996. godine. Uopšte, M. Ćirić i S. Bogdanović su polugrupe iz klase $\mathcal{S}_n$ okarakterisali kao polumreže σ_n-prostih polugrupa. Cilj ove glave je opisivanje osnovnih osobina polugrupa koje pripadaju klasi $\widehat{\mathcal{S}}_n$ polugrupa. Ove polugrupe biće opisane Teoremom 2.2 i ova teorema predstavlja najvažniji rezultat druge glave. Ostalim teoremama daju se karakterizacije različitih polumrežnih razlaganja polugrupa. Takođe, razmatrani su i slični problemi vezani za relacije $\longrightarrow_l$ i $\longrightarrow_r$ i njihove n-te stepene, za $n \in \mathbb{N}$.

Takođe, u ovoj glavi razmatrana su i dva nova operatora $R : \rho \mapsto R(\rho)$ i $T : \rho \mapsto T(\rho)$, na mreži svih binarnih relacija na datoj polugrupi. Prvi od prethodno navedena dva radikala definisao je i izučavao M. S. Putcha u radu [131] iz 1973. godine. U pomenutom radu Putcha je opisao radikal $R(\mathcal{J})$ Greenove $\mathcal{J}$ relacije. Opšta definicija radikala relacija na polugrupama data je od strane L. N. Shevrina u radu [144] iz 1994. godine. Drugi tip radikala definisali su i izučavali S. Bogdanović i M. Ćirić u radu [26] iz 1996. godine. U pomenutom radu oni su oba tipa radikala relacija na polugrupi primenili na Greenove relacije. Kao što je M. S. Putcha dokazao u radu [131] iz 1973. godine, najmanja polumrežna kongruencija na potpuno π-regularnoj polugrupi jednaka je sa tranzitivnim zatvorenjem radikala $R(\mathcal{J})$ Greenove $\mathcal{J}$ relacije. Ovo Putchaino tvrđenje u opštem slučaju ne važi. U drugoj glavi izučavaju se neki uslovi pod kojima su tranzitivna zatvorenja i stepeni relacija $R(\mathcal{J})$ i $T(\mathcal{J})$ najmanje polumrežne kongruencije.

Rezultati dobijeni u drugoj glavi su opštiji od poznatih rezultata datih od strane M. S. Putchae [132], T. Tamurae [151], L. N. Shevrina [144] i M. Ćirića i S. Bogdanovića [45].

Drugi veoma važan metod razlaganja koji je razmatran u ovoj disertaciji je metod poddirektnog razlaganja algebri. Razlaganje algebri u poddirektan proizvod predstavlja jedan od najefikasnijih metoda za izučavanje njihove strukture. Ova razlaganja dospevaju u centar pažnje algebraista 1944. godine, kada je G. Birkhoff [12], [13], [14] dokazao dve važne opšte dekompoziciono-kompozicione teoreme. Prema prvoj od njih, algebra A je poddirektan proizvod sistema algebri A_i, $i \in I$, ako i samo ako postoji sistem θ_i, $i \in I$, relacija kongruencije na A, takav da je $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$, i $A/\theta_i \cong A_i$, za svaki $i \in I$. Ovde Δ_A označava relaciju jednakosti na A. Takvi sistemi relacija kongruencije poznati su kao sistemi faktor kongruencija. Druga teorema, dobijena kao posledica prve, poznata je pod nazivom Birkhoffova teorema o reprezentaciji. Ona kaže da se svaka algebra može razložiti u poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih algebri.

L. Fuchs [71] uvodi 1952. godine jedan poseban tip poddirektnih proizvoda, danas poznat pod nazivom povratni proizvod (pullback product). U Teoriji polugrupa ovi proizvodi koriste se pod nazivom kičmeni proizvodi (spined products). Ovaj naziv je još uvek u opticaju. Kao što je L. Fuchs [71] dokazao, u mnogim slučajevima, na primer kod prstena, grupa ili Booleovih algebri, svi poddirektni proizvodi mogu se predstaviti kao povratni proizvodi. Taj njegov rezultat uopštili su kasnije I. Fleischer [70], 1955., za slučaj konačne familije algebri, i G. H. Wenzel [166], 1967., za slučaj prebrojive familije algebri, dokazavši da povratni proizvodi jesu oni poddirektni proizvodi kod kojih odgovarajući sistemi faktor kongruencija zadovoljavaju izvesno uopštenje čuvene Kineske teoreme o ostacima. U slučaju proizvoda sa dve komponente to se jednostavno svodi na permutabilnost para faktor kongruencija.

U teoriji polugrupa, do poddirektnih razlaganja se dolazilo uglavnom na jedan od sledeća tri načina:

(1) primenom Birkhoffove teoreme o reprezentaciji, čime se problem svodi na izučavanje poddirektno nerazloživih polugrupa datog tipa, u slučaju da se struktura takvih polugrupa može odrediti na jednostavniji način;
(2) primenom izvesnih algebarskih konstrukcija, najčešće onih određenih izvesnim sistemom polugrupa i homomorfizama između njih;
(3) eksplicitnim određivanjem sistema faktor kongruencija koje daju izvesno razlaganje.

Mnoga poznata razlaganja polugrupa u poddirektan i povratni proizvod dobijena su primenom prva dva metoda. Takva su, na primer, razlaganja do kojih su došli N. Kimura [91], [92], 1958., M.Yamada i N. Kimura [175], 1958., M. Yamada [171], 1964., [172], 1965., [173], 1967., M. S. Putcha [132], 1973., M. Ćirić i S. Bogdanović [40], 1990., [41], 1993., [45], [46], 1996., [47], 1998., S. J. L. Kopamu [98], 1994., X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo [137], 1998. godine, i drugi.

U trećoj glavi pažnja je usmerena ka trećem metodu za konstrukciju poddirektnih razlaganja algebri. Definisani su sistemi relacija kongruencije i pomoću njih su opisani poddirektni i povratni proizvodi idealskih-ekstenzija regularnih i potpuno regularnih polugrupa, i nil-ekstenzija pravougaonih grupa. Poddirektni i povratni proizvodi regularnih i potpuno regularnih polugrupa dobijaju se kao posledice. Neki od rezultata napred pomenutih autora prezentovani su na drugačiji način i dati su jednostavniji i konstruktivniji dokazi njihovih teorema.

Relacije $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}_d$ uvedene su u knjizi A. H. Clifforda i G. B. Prestona [36] i radu B. M. Scheina [140], a intenzivno su izučavane u radu S. J. L. Kopamua [98]. U trećoj glavi su definisane relacije $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ i za njih je dokazano da su relacije kongruencije na polugrupi S ako je X duo podskup od S. Takođe, ako je S regularna polugrupa i $E = E(S)$ tada se relacije $\mathcal{K}_{l,E}$, $\mathcal{K}_{r,E}$ i $\mathcal{K}_{d,E}$ poklapaju sa relacijama $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}_d$, tim redom. Na polugrupama koje imaju najveće polumrežno razlaganje definisane su relacije $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$. Razlaganja idealskih-ekstenzija regularnih i potpuno regularnih polugrupa, kao i nil-ekstenzija pravouganih grupa opisana su pomoću relacija $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, i $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, i dati su opisi struktura odgovarajućih faktor polugrupa. Takođe razmatrana je veza između novodefinisanih relacija i Greenovih relacija ekvivalencije, i te veze su iskorišćene za opisivanje novih tipova poddirektnih i povratnih proizvoda napred pomenutih klasa polugrupa.

Pored kongruencija i razlaganja polugrupa, predmet istraživanja u ovoj disertaciji su i kongruencije i razlaganja konačnih automata. Ovde koristimo prirodnu interpretaciju automata gde se automat smatra konačnom algebrom kod koje se svaki ulazni simbol interpretira kao unarna operacija. Važi i obratno, tj. svaka univerzalna algebra čije su sve fundamentalne operacije unarne se može tretirati kao automat. Ova osobina automata daje mogućnost da se u izučavanju automata koriste i rezultati i aparat univerzalne algebre. Pri tom su posebno značajna razmatranja u vezi sa varijetetima automata, pseudovarijetetima konačnih automata, kao i uopštenim varijetetima automata. Takođe, vezu između automata i univerzalne algebre pojačava i činjenica da neki pojmovi iz univerzalne algebre imaju prirodnu interpretaciju u Teoriji automata, kao, na primer, poddirektni proizvodi koji se interpretiraju kao paralelne kompozicije automata.

U skladu sa Birkhoffovim teoremama o reprezentaciji, kada je reč o konačnom automatu, da bi uopšte mogli da govorimo o vezi između kongruencija i razlaganja automata prvo treba odrediti najmanje kongruencije za datu klasu automata. Kako najmanjoj kongruenciji automata odgovara najveća homomorfna slika i najveći faktor automat, to su ove relacije jako važne i mogu poslužiti za konstrukciju razlaganja automata. Najmanje kongruencije na konačnom automatu su predmet proučavanja ove disertacije.

Četvrta glava posvećena je najmanjim kongruencijama na konačnom automatu. U ovom delu data je karakterizacija najmanje kongruencije koja odgovara nekom od veoma važnih pseudovarijeteta automata - varijetetu direktabilnih automata, uvedenom u radu J. Černýa [39] iz 1964. godine, lokalno direktabilnih, uopšteno direktabilnih, trap-direktabilnih, lokalno trap-direktabilnih i utrapljivih automata, uvedenih u radu T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića [113] iz 1998. godine.

Korišćenjem opštih karakterizacija najmanjih $\boldsymbol{P}$-kongruencija na konačnim automatima, gde je $\boldsymbol{P}$ jedan od napred navedenih pseudovarijeteta automata, u ovoj glavi su date teorijske osnove kao i sam izgled algoritama za njihovo efektivno određivanje. Takođe, dati su i algoritmi za testiranje da li konačan automat pripada navedenim pseudovarijetetima, kojima su kao teorijska osnova poslužili neki novi rezultati dokazani u ovoj glavi. Isto tako dat je i algoritam za generisanje komponenti u najvećem polumrežnom razlaganju polugrupe, odnosno za generisanje najmanje direktno sumske kongruencije na automatu, kao i algoritam za generisanje jako povezanih podautomata datog automata.

Na kraju, koristim priliku da se zahvalim svojoj porodici i prijateljima na svestranoj podršci, kao i meni jako važnom, strpljenju i toleranciji. Posebnu i neizmernu zahvalnost na nesebičnoj i ogromnoj pomoći tokom čitavog mog usavršavanja, i naravno, tokom izrade ovog rada, dugujem svojim profesorima i prijateljima, Prof. dr Stojanu Bogdanoviću i Prof. dr Miroslavu Ćiriću. Svesrdnu pomoć pri izradi ove doktorske disertacije pružila mi je i draga koleginica dr Tatjana Petković-Stevanović kojoj se takođe iskreno zahvaljujem.

Sadržaj

Glava 1

Osnovni pojmovi i rezultati

Na početku ove glave uvodimo neke osnovne pojmove i dajemo neke rezultate iz algebre i Teorije automata koji će biti korišćeni u daljem radu u ostalim glavama disertacije.

Algebarske osnove date su u prvom odeljku ove glave. Uveden je pojam Descartesovog proizvoda, relacije, uređenja, kvazi-uređenja, ekvivalencije, preslikavanja, jezgra preslikavanja, grafa i drugo.

Drugi odeljak posvećen je Univerzalnim algebrama. Data je definicija algebare, tipa algebre, podalgebre, homomorfizma, kongruencije, faktor algebre kao i veze koje postoje između ovih pojmova.

U trećem odeljku ove glave date su osnovne definicije i karakteristike direktnih, poddirektnih i povratnih proizvoda algebri.

Četvrti odeljak ove glave posvećen je varijetetima, uopštenim varijetetima i pseudovarijetetima. U ovom odeljku uveden je pojam terma i term algebre. Takođe, navedena je i poznata Teorema Birkhoffa kojom je data karakterizacija varijeteta algebri.

O polugrupama se govori u petom odeljku. U ovom odeljku uveden je pojam kongruencije, ideala i Greenovih ekvivalencija na polugrupi. Takođe, date su definicije i neke osobine različitih tipova traka. Posebna pažnja posvećena je regularnim, potpuno-regularnim, inverznim, ortodoksnim, π-regularnim, potpuno π-regularnim, Arhimedovim i potpuno Arhimedovim polugrupama. Razmatrane su i idealske i nil-ekstenzije polugrupa i tako dalje. Polumrežna i poddirektna razlaganja napred pomenutih tipova polugrupa razmatraju se u Glavi 2 i Glavi 3.

Pojam automata uveden je u šestom odeljku. Date su osnovne karakteristike automata bez izlaza. Takođe, u ovom odeljku se govori o vezi automata sa univerzalnim algebrama, kao i o brojnim konceptima, idejama i metodama univerzalne algebre koji se koriste u proučavanju automata.

1.1. Algebarske osnove

Označimo sa $\mathbb{N}^0$, skup prirodnih brojeva sa nulom, a sa $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva bez nule. Pojam *klasa* koristimo jednako kao i pojam *skup*. Klasu skupova nazivamo *familijom skupova*. Familiju skupova indeksiranu skupom I označavamo sa $\{H_i\}_{i\in I}$. Ako je I konačan skup i ima n elemenata, onda pišemo $\{H_i\}_{i=1}^n$.

Descartesov proizvod familije skupova $\{H_i\}_{i\in I}$, koji označavamo sa $\prod_{i\in I} H_i$, je skup svih preslikavanja

$$a : I \to \bigcup_{i\in I} H_i, \qquad a : i \mapsto a_i,$$

koja ispunjavaju uslov $a_i \in H_i$, za svaki $i \in I$. Preslikavanje

$$\pi_i : H \to H_i, \quad \text{za} \quad i \in I,$$

definisano sa $a\pi_i = a_i$, naziva se *i-ta projekcija* skupa H na skup H_i.

Binarna relacija na nepraznom skupu H jeste svaki podskup ξ skupa H^2, pri čemu to može biti i prazan podskup. Skup svih binarnih relacija na H označavamo sa $\mathcal{B}(H)$. Specijalne vrste relacija na skupu H su *prazna relacija*, sa oznakom $\varnothing$, *relacija jednakosti* ili *identička relacija*, $\Delta_H = \{(x,x) \,|\, x \in H\}$, i *univerzalna relacija* $\nabla_H = H \times H$.

Relaciju koja je refleksivna i tranzitivna nazivamo *kvazi-uređenjem*, dok refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *parcijalnim uređenjem*, ili *relacijom poretka*. Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacijom ekvivalencije*, ili samo *ekvivalencijom*.

Par $(A, \leq)$ koji se sastoji od nepraznog skupa A i parcijalnog uređenja $\leq$ na njemu zovemo *parcijalno uređenim skupom*, ili samo *uređenim skupom*. Slično, par $(A, \preccurlyeq)$, koji se sastoji od skupa A i kvazi-uređenja $\preccurlyeq$ na njemu je *kvazi-uređen skup*. Kvazi-uređen skup A je *usmeren kvazi-uređen skup* ako za proizvoljan konačan podskup $\{a_1, \ldots, a_n\}$ skupa A postoji $a \in A$ tako da je $a_i \preccurlyeq a$, za svaki $i \in [1, n]$. Na isti način definišemo i *usmeren uređen skup* .

Uređenje $\leq$ na skupu A je *linearno* ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leq b$ ili $b \leq a$, i tada kažemo da je A *linearno uređen skup* ili *lanac*.

Neka je θ relacija ekvivalencije na skupu H. Za elemente $a, b \in H$ za koje je $a\,\theta\,b$ kažemo da su *θ-ekvivalentni*. Skup $a\theta$ je *klasa ekvivalencije* elementa $a \in H$ u odnosu na θ, ili samo *θ-klasa* elementa a. Jasno je da $a \in a\theta$. Skup svih θ-klasa označavamo sa H/θ i zovemo *faktor-skup* skupa H, ili kraće samo *faktor* skupa H, u odnosu na relaciju θ. Preslikavanje

$$\theta^\natural : a \mapsto a\theta$$

koje skup H slika na faktor-skup H/θ je *prirodno preslikavanje* skupa H određeno relacijom ekvivalencije θ.

Dalje, neka su H i K neprazni skupovi i neka je $\phi : H \to K$. Relacija

$$\ker \phi = \{(x,y) \in H \times H \mid x\phi = y\phi\}$$

definisana na skupu H je *jezgro preslikavanja* ϕ.

Neka je H neprazan skup i naka je ξ proizvoljna binarna relacija na skupu H. Tada sa ξ^{-1} označavamo relaciju definisanu na H na sledeći način:

$$(a,b) \in \xi^{-1} \;\Leftrightarrow\; (b,a) \in \xi.$$

Ovako definisana relacija naziva se *inverzna relacija* relacije ξ. Relacija $\xi \cap \xi^{-1}$ je najveća simetrična relacija sadržana u relaciji ξ, i ovu relaciju nazivamo *simetrično otvorenje* relacije ξ. Za $n \in \mathbb{N}$, sa ξ^n označavamo *n-ti stepen* relacije ξ u polugrupi $\mathcal{B}(H)$ svih binarnih relacija na skupu H. Sa ξ^0 označavamo *identičku relaciju* na skupu H, tj. imamo da je $\xi^0 = \Delta_H$.

Neprazan presek proizvoljne familije tranzitivnih relacija na H je i sam tranzitivna relacija na H. Dakle, za proizvoljnu relaciju ξ na H, presek svih tranzitivnih relacija na H koje sadrže ξ je tranzitivna relacija. Tu relaciju označavamo sa ξ^∞ i zovemo *tranzitivno zatvorenje* relacije ξ. Jasno je da je

$$\xi^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi^n.$$

Takođe, i presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije na H je relacija ekvivalencije na H. Taj presek je uvek neprazan jer sadrži identičku relaciju na H. Znači, za proizvoljnu relaciju ξ na skupu H, presek svih relacija ekvivalencije koje sadrže relaciju ξ je relacija ekvivalencije koju zovemo *relacija ekvivalencije generisana relacijom* ξ, i označavamo je sa ξ^e. Takođe, jasno je da je

$$\xi^e = (\xi \cup \xi^{-1} \cup \Delta)^\infty.$$

Pod pojmom *graf* podrazumevamo uređen par $G = (G, \varrho)$ koji čine neprazan skup G, čije elemente nazivamo *čvorovima grafa* G, a ϱ je binarna relacija na G, čije elemente nazivamo *granama grafa* G. Graf i njegov skup čvorova označavamo istim slovom G. Za granu $(a,b) \in \varrho$ kažemo da *izlazi iz čvora* a i da *ulazi u čvor* b. Grafički, čvorove grafa G predstavljamo tačkama u ravni ili prostoru, a granu $(a,b) \in \varrho$ orijentisanom linijom koja izlazi iz čvora a i ulazi u čvor b.

Označeni grafovi se koriste za predstavljanje automata. Ova vrsta grafa se definiše kao uređena trojka $G = (G, X, \lambda)$, gde je G skup *čvorova grafa*, X skup *oznaka*, a $\lambda \subseteq G \times X \times G$. Ako je $(a,x,b) \in \lambda$, tada za granu (a,b) kažemo da je označena simbolom x, koji nazivamo *oznakom grane* (a,b).

Oznake i definicije predstavljene u ovom odeljku su u skladu sa oznakama i definicijama koje u svojim knjigama i radovima koriste S. Bogdanović i M. Ćirić [21], M. Ćirić, S. Bogdanović i J. Kovačević [49], M. Ćirić, T. Petković i S. Bogdanović [54], D. Cvetković [56], D. Cvetković i S. Simić [57], B. A. Davey i H. A. Priestley [59], G. Grätzer [77], J. M. Howie [82], [83], [84], R. Madarász i S. Crvenković [103], S. Milić [107], [108] i drugi. Za više informacija o algebarskim osnovama upućujemo na napred nabrojane knjige i radove.

1.2. Univerzalne algebre

Neka je A neprazan skup i neka je $n \in \mathbb{N}$. Kao što znamo sa A^n označavamo skup svih uređenih n-torki elemenata iz A. Stavimo da je $A^0 = \{\varnothing\}$. Sada, za $n \in \mathbb{N}^0$, *n-arna operacija* na skupu A je svako preslikavanje $f : A^n \to A$. Broj n je *dužina* ili *arnost* operacije f.

Operacije dužine 1 zovemo *unarnim*, operacije dužine 2 zovemo *binarnim*, a operacije dužine 0 zovemo *nularnim operacijama*. Nularna operacija je preslikavanje $f : A^0 \to A$. Kako se skup A^0 sastoji iz samo jednog elementa $\varnothing$, to se tim preslikavanjem ustvari fiksira jedan element – konstanta $f(\varnothing) \in A$.

Tip algebri definiše se kao skup simbola τ takvih da je svakom simbolu $f \in \tau$ pridružen neki broj $n \in \mathbb{N}^0$, koji se naziva *arnost* ili *dužina* simbola f. Tada f zovemo *n-arni operacijski simbol*. Nularni operacijski simboli su *znaci konstanti*. Za $n \in \mathbb{N}^0$, skup svih n-arnih operacijskih simbola iz τ označavamo sa τ_n. *Univerzalna algebra*, ili samo *algebra* tipa τ je uređeni par (A, F), gde je A neprazan skup, koji zovemo *nosač* algebre, i $F = \{f^A \,|\, f \in \tau\}$ je familija operacija indeksirana skupom τ tako da je svakom n-arnom operacijskom simbolu $f \in \tau$ pridružena n-arna operacija f^A na A. Operacije f^A, $f \in \tau$, zovemo *fundamentalnim operacijama* algebre, a njihovom kompozicijom dobijaju se *izvedene operacije* te algebre.

Neka je A algebra tipa τ. Neprazan podskup $B \subseteq A$ je *podalgebra* od A ako je zatvoren za sve fundamentalne operacije algebre A, tj. ako važi:

(i) $f^A \in B$, za svaki $f \in \tau_0$,

(ii) za $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, iz $a_1, \dots, a_n \in B$ sledi $f^A(a_1, \dots, a_n) \in B$.

Prema tome, B je podalgebra od A ako i samo ako je B algebra istog tipa τ. Za nosače tih algebri važi $B \subseteq A$ i za proizvoljan $f \in \tau$, f^B je restrikcija operacije f^A na B. Pod pojmom *klase algebri* podrazumevamo svaku klasu koja se sastoji od algebri istog tipa. Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $S(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih podalgebri algebri iz $\boldsymbol{K}$. Klasa $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za operator $S : \boldsymbol{K} \mapsto S(\boldsymbol{K})$, tj. klasa $\boldsymbol{K}$ je *zatvorena za podalgebre*, ako je $S(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Neka je H neprazan podskup algebre A tipa τ. Označimo sa $\langle H \rangle$ presek svih podalgebri od A koje sadrže podskup H. Jasno je da je $\langle H \rangle$ najmanja podalgebra od A koja sadrži H. Za algebru $\langle H\rangle$ kažemo da je *podalgebra od A generisana skupom H*. Ako je $\langle H\rangle = A$, tada je H *generatorni skup* algebre A. Algebra A je *konačno generisana* ako ima konačan generatorni skup. Ako je generatorni skup jednoelementan, tada je algebra *monogena* ili *ciklična*.

Neka su A i B algebre tipa τ. Preslikavanje $\phi : A \to B$ je *homomorfizam* iz A u B ako važi:

(i) ako je $f \in \tau_0$, tada je $f^A\phi = f^B$,

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $a_1, \dots, a_n \in A$, tada je

$$(f^A(a_1, \dots, a_n))\phi = f^B(a_1\phi, \dots, a_n\phi).$$

Pri tom, ako je, ϕ injektivno (jedan-jedan) preslikavanje, tada je ϕ *monomorfizam* ili *potapanje* iz A u B. Ako je ϕ sirjektivni homomorfizam iz A na B, tada je ϕ *epimorfizam* iz A na B. Konačno, ako je homomorfizam $\phi : A \to B$ istovremeno injektivan i sirjektivan, tada je ϕ *izomorfizam* iz A na B i A i B su *izomorfne algebre*, što označavamo $A \cong B$. Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $H(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih homomorfnih slika algebri iz $\boldsymbol{K}$, a sa $I(\boldsymbol{K})$ klasu svih izomorfnih kopija algebri iz $\boldsymbol{K}$. Klasa $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za operator $H : \boldsymbol{K} \mapsto H(\boldsymbol{K})$, tj. klasa $\boldsymbol{K}$ je *zatvorena za homomorfne slike*, ako je $H(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, i $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za operator $I : \boldsymbol{K} \mapsto I(\boldsymbol{K})$, ako je $I(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Homomorfizam algebre A u nju samu je *endomorfizam* te algebre, a izomorfizam A na samu sebe je *automorfizam* te algebre.

Neka je θ binarna relacija na algebri A tipa τ. Ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, tada je θ *saglasna* (*kompatibilna*) sa fundamentalnom operacijom f^A na A ako iz $a_i\,\theta\,b_i$, za sve $i \in [1, n]$, sledi

$$f^A(a_1, \dots, a_n)\,\theta\,f^A(b_1, \dots, b_n).$$

Relaciju ekvivalencije koja je saglasna sa svim fundamentalnim operacijama na algebri A zovemo *relacijom kongruencije*, ili samo *kongruencijom* na A.

Neka je θ kongruencija na algebri A tipa τ. Definišimo na skupu A/θ fundamentalne operacije tipa τ na sledeći način:

(i) ako je $f \in \tau_0$, tada stavljamo da je $f^{A/\theta} = f^A/\theta$;

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $a_1\theta, \dots, a_n\theta \in A/\theta$ su proizvoljni elementi, tada stavljamo da je

$$f^{A/\theta}(a_1\theta, \dots, a_n\theta) = (f^A(a_1, \dots, a_n))\theta.$$

Algebra A/θ tipa τ sa fundamentalnim operacijama $f^{A/\theta}$ definisanim na gornji način je *faktor-algebra* (*količnićk algebra*) algebre A u odnosu na kongruenciju θ.

Veza između kongruencija i homomorfizama data je sledećom teoremom.

Teorema 1.1. (Teorema o homomorfizmu). *Ako je θ kongruencija na algebri A tipa τ, tada je $\theta^\natural$ homomorfizam od A na A/θ.*

Obratno, ako je ϕ homomorfizam algebre A tipa τ na algebru B istog tipa, tada je $\ker\phi$ kongruencija na A i preslikavanje $\Phi : A/\ker\phi \to B$ definisano sa

$$(a\ker\phi)\Phi = a\phi,$$

za $a \in A$, je izomorfizam iz $A/\ker\phi$ na B.

Više informacija o Univerzalnim algebrama mogu se naći u sledećim knjigama: V. A. Artamonov, V. N. Saliĭ, L. A. Skornyakov, L. N. Shevrin i E. G. Shulgeifer [7], S. Burris i H. P. Sankappanavar [34], P. M. Cohn [58], G. Grätzer [77], B. Jónsson [90], Lj. Kočinac i A. Mandak [96], A. G. Kurosh [101], Ž. Mijajlović [106], i drugim.

1.3. Poddirektni i povratni proizvodi algebri

Najbolje moguće razlaganje je ono razlaganje kod koga se komponente dalje ne mogu razlagati. Takvo razlaganje ne postoji u opštem slučaju. U cilju nalaženja takvog razlaganja algebri, u ovom odeljku izlažemo metod poddirektnog razlaganja algebri, koji u stvari predstavlja specijalan tip direktnog razlaganja algebri.

Za nepraznu familiju algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ istog tipa τ na Descartesovom proizvodu $A = \prod_{i\in I} A_i$ te familije definišimo operacije tipa τ "pokoordinatno", što znači na sledeći način:

(i) za $f \in \tau_0$ stavljamo da je $f^A = (f^{A_i})_{i\in I}$;

(ii) za $f \in \tau_n$, gde je $n \in \mathbb{N}$, i $a^{(k)} = (a_i^{(k)})_{i\in I} \in A$, gde je $k \in [1, n]$, stavljamo da je
$$f^A(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) = (f^{A_i}(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)})).$$

Sa tako definisanim operacijama A je algebra tipa τ. Algebra izomorfna ovako definisanoj algebri A je *direktni proizvod* familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$. Ako je I konačan skup, tada je direktni proizvod *konačan.* Ako je za svaki $i \in I$ algebra A_i izomorfna nekoj algebri B, tada direktan proizvod algebri $\{A_i\}_{i\in I}$, označavamo sa B^I i nazivamo *direktnim stepenom* algebre B.

Za klasu algebri $\boldsymbol{K}$, sa $P(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu svih direktnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, sa $P_f(\boldsymbol{K})$ klasu svih konačnih direktnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, a sa $Pow(\boldsymbol{K})$ klasu svih direktnih stepena algebri iz $\boldsymbol{K}$. Klasa $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za operator $P : \boldsymbol{K} \mapsto P(\boldsymbol{K})$, ili *zatvorena za direktne proizvode*, ako je $P(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, zatvorena za operator $P_f : \boldsymbol{K} \mapsto P_f(\boldsymbol{K})$, ili *zatvorena za konačne direktne proizvode*, ako je $P_f(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$, i zatvorena za operator $Pow : \boldsymbol{K} \mapsto Pow(\boldsymbol{K})$, ili *zatvorena za direktne stepene*, ako je $Pow(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija algebri i neka je skup $A \subseteq \prod_{i\in I} A_i$ takav da je algebra A podalgebra direktnog proizvoda $\prod_{i\in I} A_i$ familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$. Algebru A nazivamo *poddirektnim proizvodom* familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$, ako je $A\pi_j = A_j$, za svaki $j \in I$, gde je π_j projekcijsko preslikavanje.

Ako je $A_i = B$, za svaki $i \in I$, tada algebru A nazivamo *poddirektnim stepenom* algebre B.

Za klasu $\boldsymbol{K}$ algebri, sa $P_S(\boldsymbol{K})$ označavamo klasu koja se sastoji iz svih poddirektnih proizvoda algebri iz $\boldsymbol{K}$, i $\boldsymbol{K}$ je zatvorena za operator $P_S : \boldsymbol{K} \mapsto P_S(\boldsymbol{K})$, ili *zatvorena za poddirektne proizvode*, ako je $P_S(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Rezultati koji slede predstavljaju važne rezultate G. Birkhoffa [13]. To su fundamentalni algebarski rezultati kojima je dat opis metoda poddirektnog razlaganja algebri, a samim tim i poddirektnog razlaganja polugrupa, i njegova karakterizacija preko relacija kongruencije. Na dokaze rezultata koji slede upućujemo na [123] a ovde ih nećemo navoditi.

Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija algebri i neka je $\{\xi_i\}_{i\in I}$ familija relacija kongruencije koje su indukovane projekcijskim preslikavanjem $\{\pi_i\}_{i\in I}$ na skupu $\prod_{i\in I} A_i$ i neka je θ_i restrikcija relacije ξ_i na skupu $A \subseteq \prod_{i\in I} A_i$, za svako $i \in I$. Za ovako definisane relacije kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$, na algebri A imamo da važi:

(i) $A/\theta_i \cong A_i,$ za svaki $i \in I$;

(ii) $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$.

Navedena tvrđenja se neposredno proveravaju, a takođe važi i sledeći rezultat G. Birkhoffa [13].

Teorema 1.2. *Neka je A algebra i neka je $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familija relacija kongruencije na algebri A za koju je $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$. Tada je algebra A izomorfna poddirektnom proizvodu familije algebri $\{A/\theta_i\}_{i\in I}$.*

U nastavku navodimo teoremu koja predstavlja uopštenje prethodno navedenog rezultata.

Teorema 1.3. *Algebra A je poddirektan proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ ako i samo ako postoji familija relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$ na algebri A koja zadovoljava sledeće uslove:*

(i) *$A/\theta_i \cong A_i$, za svaki $i \in I$;*

(ii) *$\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$.*

Teoreme 1.2 i 1.3 govore da je egzistencija poddirektnog razlaganja algebre A ekvivalentna sa egzistencijom familije relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$ na algebri A za koju važi $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$.

Za razlaganje algebre A u poddirektan proizvod algebri, kažemo da je *trivijalno razlaganje*, ako je najmanje jedna od relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$ jednaka sa Δ_A.

Algebru A nazivamo *poddirektno nerazloživom* ako iz uslova $\bigcap_{i\in I}\theta_i = \Delta_A$, gde je $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familija relacija kongruencije na A, sledi da postoji bar jedan $i \in I$ takav da je $\theta_i = \Delta_A$.

Lema 1.1. *Algebra A je poddirektno nerazloživa ako i samo ako A ima samo jedan element ili $\boldsymbol{C}on(A)$ ima jedan i samo jedan atom koji je sadržan u svakoj relaciji kongruencije različitoj od Δ_A.*

Rezultat koji sledi je u literaturi poznat kao *Birkhoffova teorema o reprezentaciji.* Ovom teoremom je opisano poddirektno razlaganje algebre na faktore koji se dalje ne mogu poddirektno razlagati.

Teorema 1.4. *Svaka algebra je izomorfna poddirektnom proizvodu poddirektno nerazloživih algebri.*

Razmatrajući poddirektne proizvode algebri videli smo da ne postoji jedinstveno razlaganje proizvoljne algebre u poddirektan proizvod algebri. Postoje više familija algebri koje su poddirektan proizvod jedne iste algebre.

U nastavku biće opisan metod kojim se konstruiše jedan od tipova poddirektnih proizvoda. Navodimo jedan od opštih i osnovnih rezultata, koji je vezan za povratne proizvode algebri.

Teorema 1.5. *Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija algebri i za svaki $i \in I$ neka je φ_i homomorfizam koji algebru A_i slika na neku algebru B. Neka je*

$$C = \{(x_i) \in \prod_{i\in I} A_i \mid x_i\varphi_i = x_j\varphi_j,\ \text{za sve } i,j \in I\}.$$

Tada je C poddirektan proizvod algebri $\{A_i\}_{i\in I}$.

Poddirektan proizvod, dobijen u prethodnom rezultatu, naziva se *povratni proizvod* algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ u odnosu na algebru B i homomorfizme $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Pojam povratnog proizvoda algebri (pullback product) prvi put srećemo u radu L. Fuchsa [71]. Razlaganje polugrupa ovog tipa N. Kimura [93] je nazvao *kičmenim proizvodom* polugrupa (spined product). U Teoriji polugrupa taj naziv je u opticaju.

L. Fuchs [71] je dokazao da ako koristimo konstrukciju iz prethodne Teoreme 1.5 možemo dobiti sve poddirektne proizvode proizvoljne familije grupa, prstena ili Booleovih algebri. Njegov rezultat uopštio je I. Fleischer [70].

Razlaganje algebre u povratni proizvod algebri, koji ima dve komponente, opisuje sledeća teorema. U ovom rezultatu su istaknuti uslovi koji su potrebni da bi neki poddirektni proizvod algebri bio povratni proizvod algebri.

Ako za relacije kongruencije θ_1 i θ_2, definisane na proizvoljnoj algebri A, važi jednakost $\theta_1 \cdot \theta_2 = \theta_2 \cdot \theta_1$ tada za njih kažemo da su *permutabilne*.

Teorema 1.6. *Algebra A je povratni proizvod algebri A_1 i A_2 u odnosu na algebru B ako i samo ako postoje relacije kongruencije θ_1 i θ_2 na algebri A takve da važe sledeći uslovi:*

(i) $A/\theta_1 \cong A_1$, $A/\theta_2 \cong A_2$ *i* $A/\theta \cong B$, *gde je* $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$;

(ii) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$;

(iii) θ_1 *i* θ_2 *su permutabilne relacije kongruencije.*

Rezultat Teoreme 1.6, u drugačijoj formulaciji, prvi je dokazao I. Fleischer u svom radu [70] iz 1955. godine. Taj rezultat predstavlja uopštenje rezultata L. Fuchsa [71]. I. Fleischer [70] je dao potpunu karakterizaciju povratnog proizvoda dve algebre. Metod korišćen u pomenutom rezultatu I. Fleischera [70] može se koristiti i za opisivanje povratnih proizvoda koji imaju više od dve komponente. Uopštenje u tom smislu dao je G. Wenzel u svom radu [166] iz 1967. godine. On je prvi opisao povratni proizvod proizvoljne familije algebri i dao njihovu vezu sa apsolutno permutabilnim relacijama kongruencije.

Neka je $\{\theta_i\}_{i\in I}$ familija relacija kongruencije na algebri A. Za familiju relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$ kažemo da je *apsolutno permutabilna* ako za svaku familiju elemenata $x_i \in A$, $i \in I$, važi implikacija:

$$(x_i, x_j) \in \bigvee_{i\in I} \theta_i \Rightarrow (\exists z \in A)(\forall i \in I)\ (x_i, z) \in \theta_i, \text{ za } i, j \in I.$$

Teorema 1.7. *Algebra A je povratni proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i\in I}$ u odnosu na algebru B ako i samo ako postoji familija relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i\in I}$ na algebri A koja zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $A/\theta_i \cong A_i$, *za svaki* $i \in I$, *i* $A/\theta \cong B$, *gde je* $\theta = \bigvee_{i\in I} \theta_i$;

(ii) $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$;

(iii) *familija relacija kongruencije* $\{\theta_i\}_{i\in I}$ *je apsolutno permutabilna.*

Specijalan slučaj prethodnog rezultata, ako je $|I| = n$, predstavlja sledeći rezultat.

Teorema 1.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Tada je algebra A povratni proizvod familije algebri $\{A_i\}_{i=1}^{i=n}$ u odnosu na algebru B ako i samo ako postoji familija relacija kongruencije $\{\theta_i\}_{i=1}^{i=n}$ na algebri A koja zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $A/\theta_i \cong A_i$, *za svaki* $1 \leq i \leq n$, *i* $A/\theta \cong B$, *gde je* $\theta = \bigvee_{i=1}^{i=n} \theta_i$;

(ii) $\bigcap_{i=1}^{i=n} \theta_i = \Delta_A$;

(iii) *familija relacija kongruencije* $\{\theta_i\}_{i=1}^{i=n}$ *je apsolutno permutabilna.*

Apsolutna permutabilnost familije relacija kongruencije, koja je definisana na proizvoljnoj algebri A, predstavlja uopštenje poznate *Kineske teoreme o ostacima*. U tom smislu, rezultat G. Wenzela [166], kao i navedeni rezultati, Teorema 1.7 i Teorema 1.8, predstavljaju uopštenje pomenute teoreme. Ovim rezultatima je uspostavljena veza između Kineske teoreme o ostacima i povratnih proizvoda algebri.

1.4. Varijeteti

Neka je X neprazan skup izvesnih objekata koje nazivamo *promenljivim* i neka je τ tip algebri. Tada se skup $T(X)$, čije elemente nazivamo *termima* tipa τ nad X, definiše kao najmanji skup koji zadovoljava sledeće uslove:

(i) $X \cup \tau_0 \subseteq T(X)$, tj. promenljive i znaci konstanti su termi;

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in T(X)$, tada i izraz (niz) oblika $f(u_1, \dots, u_n)$ pripada $T(X)$, tj. ako je $f \in \tau_n$ i $u_1, \dots, u_n$ su termi, tada je i $f(u_1, \dots, u_n)$ term.

Slučaj $X = \varnothing$ je dozvoljen samo ukoliko je $\tau_0 \neq \varnothing$. Kako su termi ustvari nizovi simbola definisani pomoću pravila (i) i (ii), to za dva terma $u = f(u_1, \dots, u_n)$ i $v = g(v_1, \dots, v_m)$, $f \in \tau_n$, $g \in \tau_m$, imamo da su jednaki ako i samo su jednaki kao nizovi simbola, tj. ako je $m = n$, $f = g$ i $u_i = v_i$, za svaki $i \in [1, n]$.

Na skupu $T = T(X)$ mogu se definisati operacije tipa τ na sledeći način: ako je $f \in \tau_0$, tada je f^T jednako termu f, a ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, i $u_1, \dots, u_n \in T$, tada je $f^T(u_1, \dots, u_n)$ jednako termu $f(u_1, \dots, u_n)$. Na taj način $T(X)$ postaje algebra tipa τ koju nazivamo *term algebrom* tipa τ nad skupom X. Jasno je da je algebra $T(X)$ generisana skupom X.

Ako je $T = T(X)$ term algebra tipa τ nad skupom X, tada *identitet* tipa τ nad X, ili *identitet u* $T(X)$, je uređeni par $(u, v) \in T \times T$, koji obično pišemo kao izraz oblika $u = v$. To je samo formalna jednakost terma u i v, jer su u opštem slučaju u i v različiti elementi iz $T(X)$. Skup svih identiteta u $T(X)$ označen je sa Id_X. Specijalno, sa T_ω i Id_ω označena je term algebra i skup svih identiteta nad prebrojivim skupom promenljivih, tim redom.

Neka je $u = v \in \mathrm{Id}_X$, pri čemu u i v jesu n-arni termi tipa τ, za neki $n \in \mathbb{N}$, i neka je A algebra istog tipa τ. Kažemo da algebra A *zadovoljava identitet* $u = v$, ili da je identitet $u = v$ *zadovoljen na algebri* A, ako su term operacije u^A i v^A jednake, tj.

$$u^A(a_1, \dots, a_n) = v^A(a_1, \dots, a_n),$$

za sve $a_1, \dots, a_n \in A$. Intuitivno, A zadovoljava identitet $u = v$ ako za svaku moguću zamenu promenljivih u termima u i v elementima iz A, termi u i v daju isti element iz A. Ako je Σ neki skup identiteta, tada algebra A *zadovoljava skup identiteta* Σ ako A zadovoljava svaki identitet iz Σ. Skup svih identiteta nad skupom X zadovoljenih na A označavamo sa $\mathrm{Id}_X(A)$. Specijalno, skup svih identiteta nad prebrojivim skupom promenljivih zadovoljenih na A označavamo sa $\mathrm{Id}_\omega(A)$.

Klasa algebri $\boldsymbol{K}$ zadovoljava identitet $u = v \in \mathrm{Id}_X$ ako svaka algebra iz $\boldsymbol{K}$ zadovoljava $u = v$, tj. $\boldsymbol{K}$ zadovoljava skup identiteta Σ ako $\boldsymbol{K}$ zadovoljava svaki identitet iz Σ. Skup svih identiteta nad X zadovoljenih na $\boldsymbol{K}$ označavamo sa $\mathrm{Id}_X(\boldsymbol{K})$. Klasu svih algebri tipa τ koje zadovoljavaju skup identiteta Σ označavamo sa $[\Sigma]$, i ako je $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$ tada kažemo da je $\boldsymbol{K}$ klasa *definisana skupom identiteta* Σ.

Neka je $\boldsymbol{K}$ klasa algebri tipa τ. Kongruencija θ na algebri A tipa τ je *$\boldsymbol{K}$-kongruencija* ako odgovarajuća faktor-algebra A/θ pripada klasi $\boldsymbol{K}$. Skup svih $\boldsymbol{K}$-kongruencija na algebri A je označen sa $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$.

Glavni rezultat ovog odeljka daje karakterizacije varijeteta algebri. Pod *varijetetom* algebri podrazumevamo svaku klasu algebri $\boldsymbol{K}$ koja zadovoljava jedan od pet ekvivalentnih uslova naredne teoreme.

Teorema 1.9. (Birkhoffova teorema). *Sledeći uslovi za algebarsku klasu $\boldsymbol{K}$ su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i direktne proizvode;*

(ii) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike i poddirektne proizvode;*

(iii) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ *je glavni filter mreže* $\mathrm{Con}(A)$*, za svaku algebru A;*

(iv) $\mathrm{Con}_{\boldsymbol{K}}(A)$ *je potpuna podmreža mreže* $\mathrm{Con}(A)$*, za svaku algebru A;*

(v) $\boldsymbol{K} = [\Sigma]$*, za neki skup identiteta* $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega$.

Ako se skup identiteta Σ može zapisati u obliku $\Sigma = \{u_i = v_i\}_{i \in I}$, gde je I usmeren kvazi-uređen skup, tada kažemo da je Σ *usmeren skup identiteta*. Za algebru A tipa τ kažemo da *ultimativno zadovoljava* Σ, ako postoji $k \in I$ tako da je identitet $u_i = v_i$ zadovoljen na A, za svaki $i \succcurlyeq k$. Klasu svih algebri tipa τ koje ultimativno zadovoljavaju usmeren skup identiteta Σ označavamo sa $[\Sigma]_u$ ili sa $[u_i = v_i \,|\, i \in I]_u$, i za $\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$ kažemo da je klasa *ultimativno definisana* usmerenim skupom identiteta Σ.

Familija skupova je *usmerena familija skupova* ako u odnosu na inkluziju skupova ona čini usmeren uređen skup. Unija takve familije je *usmerena unija*.

Klasa algebri $\boldsymbol{K}$ je *uopšteni varijetet* ako zadovoljava jedan od četiri ekvivalentna uslova naredne teoreme.

Teorema 1.10. *Sledeći uslovi za klasu algebri* $\boldsymbol{K}$ *su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre, konačne direktne proizvode i direktne stepene;*

(ii) $\boldsymbol{K}$ *je usmerena unija varijeteta;*

(iii) $\boldsymbol{K} = [\Sigma]_u$ *za neki usmereni skup identiteta* $\Sigma \subseteq \mathrm{Id}_\omega$*;*

(iv) *postoji filter* $\mathcal{F}$ *Booleove algebre* $\mathcal{P}(\mathrm{Id}_\omega)$ *takav da za svaku algebru* A *važi*

$$A \in \boldsymbol{K} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Id}_\omega(A) \in \mathcal{F}.$$

Klasa $\boldsymbol{K}$ konačnih algebri konačnog tipa je *pseudovarijetet* ako zadovoljava jedan od tri ekvivalentna uslova naredne teoreme.

Teorema 1.11. *Sledeći uslovi za klasu* $\boldsymbol{K}$ *konačnih algebri konačnog tipa su ekvivalentni:*

(i) $\boldsymbol{K}$ *je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i konačne direktne proizvode;*

(ii) $\boldsymbol{K}$ *se sastoji od svih konačnih algebri iz nekog uopštenog varijeteta;*

(iii) $\boldsymbol{K} = [u_n = v_n \,|\, n \in \mathbb{N}]_u$ *za neki niz identiteta* $\{u_n = v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Id}_\omega$.

Varijeteti, uopšteni varijeteti i pseudovarijeteti su stalan predmet istraživanja u algebri. Do sada je o njima napisano više desetina radova, nekoliko knjiga i monografija, a najznačajnije su: P. Agliano i J. B. Nation [2], J. Almeida [3], [4], [5], J. T. Baldwin i J. Berman [10], B. Banaschewski [11], G. Birkhoff [12], S. Bogdanović i M. Ćirić [24], S. Bogdanović, M. Ćirić i T. Petković [27], S. Burris i H. P. Sankappanavar [34], M. Ćirić i S. Bogdanović [44], S. Eilenberg [63], [64], [65], S. Eilenberg i M. P. Schutzenberger [66], G. Grätzer [77], G. Grätzer i J. Plonka [78], E. Graczyńska [75], P. M. Higgins [80], J. M. Howie [83], N. Kimura [94], Lj. Kočinac i A. Mandak [96], S. R. Kogalovskiĭ[97], A. G. Kurosh [101], A. I. Maljcev [104], Ž. Mijajlović [106], J. E. Pin [122], J. Reiterman [136], B. Schein [139], A. Tarski [157], W. Taylor [158], D. Thérien [160], [161].

1.5. Polugrupe

U ovom odeljku su dati osnovni pojmovi, rezultati i oznake Teorije polugrupa, koji nisu obuhvaćeni u delu koji se odnosi na univerzalne algebre, a biće korišćeni u ostalim odeljcima i glavama.

Do pojma polugrupe došlo se uopštavanjem pojma grupe i pojma prstena, odakle polugrupa kao algebarska struktura predstavlja opštiju strukturu od grupe i prstena.

Na početku ovog odeljka je prvo uveden pojam polugrupe i date su neke opšte osobine polugrupa. Zatim su razmatrana neka preslikavanja i relacije koje su definisane na polugrupama. Potom je uveden pojam ideala i idealske ekstenzije polugrupe, pojam nil-polugrupe i nil-ekstenzije polugrupe i dati su naki osnovni rezultati u vezi sa njima. U nastavku su definisane regularne, potpuno regularne, π-regularne, potpuno π-regularne, inverzne i ortodoksne polugrupe, a takođe navedeni su i neki poznati rezultati koji opisuju ove polugrupe. Razmatrane su proste, potpuno proste, Arhimedove i potpuno Arhimedove polugrupe. Na kraju odeljka su razmatrana i različita razlaganja polugrupa.

Algebru $S = (S, \cdot)$, koja ima jednu binarnu operaciju $\cdot$, i koja zadovoljava sledeći uslov:

(S_1) važi *asocijativni zakon* za množenje,

tj. važi
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$
za sve $x, y, z \in S$, nazivamo *polugrupom*.

Element x polugrupe S je *idempotentan element* ili *idempotent* polugrupe S ako je $x^2 = x$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$. Ukoliko su svi elementi polugrupe S idempotenti, tj. ako je $S = E(S)$, tada polugrupu S nazivamo *trakom*.

Neka su I i Λ neprazni skupovi. Definišimo množenje na skupu $I \times \Lambda$ na sledeći način:
$$(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = (i, \mu),$$
gde je $i, j \in I$ i $\lambda, \mu \in \Lambda$. Skup $I \times \Lambda$, sa ovako definisanim množenjem, jeste traka koju nazivamo *pravougaonom trakom* ili *matricom*.

Elementi x i y polugrupe S *komutiraju* ako važi $xy = yx$. Za proizvoljan neprazan podskup A od S sa $C(A)$ označavamo skup svih elemenata polugrupe S koji komutiraju sa svakim od elemenata iz skupa A. Ako je $A = S$, tada skup $C(S)$ nazivamo *centrom* polugrupe S, a njegove elemente, u tom slučaju, nazivamo *centralnim elementima* polugrupe S. Polugrupa S je *komutativna* ako svaka dva njena elementa komutiraju, tj. ako važi
$$x \cdot y = y \cdot x,$$
za sve $x, y \in S$.

Komutativnu traku zovemo *polumrežom*. Polumreža S je *lanac* ako je $xy = x$, za sve $x, y \in S$.

Element z polugrupe S nazivamo *levom* (*desnom*) *nulom* polugrupe S, ako je
$$z \cdot x = z \quad (x \cdot z = z), \quad \text{za svaki } x \in S.$$

Element z je *nula* polugrupe S ako je istovremeno i leva i desna nula polugrupe S. Nije teško dokazati da polugrupa ima nulu ako i samo ako ima levu i desnu nulu, kao i da ukoliko polugrupa ima nulu tada je ona jedinstvena. Svaka nula, a samim tim i svaka leva i desna nula polugrupe je idempotent polugrupe.

Polugrupu, u kojoj je svaki element leva (desna) nula, tj. u kojoj važi $xy = x \quad (xy = y)$, za sve $x, y \in S$, nazivamo *levo* (*desno*) *nultom* trakom. Traka S je (*levo, desno*) *normalna*, ako je $(xyz = xzy, xyz = yxz)$ $xyzx = xzyx$, za sve $x, y, z \in S$. Ako je $(xy = xyx, xy = yxy)$ $xyzx = xyxzx$, za sve $x, y, z \in S$, traka S je (*levo, desno*) *regularna* traka. Takođe, traka S je *levo* (*desno*) *kvazi-normalna*, ako je $xyz = xyxz$ $(xyz = xzyz)$, za sve $x, y, z \in S$.

Element e polugrupe S nazivamo *levom* (*desnom*) *jedinicom* polugrupe S, ako važi

$$e \cdot x = x \quad (x \cdot e = x), \qquad \text{za svaki } x \in S.$$

Element e je *jedinica* polugrupe S ako je istovremeno i leva i desna jedinica polugrupe S. Polugrupa koja sadrži jedinicu je *monoid*. Takođe, polugrupa S ima jedinicu ako i samo ako ima levu i desnu jedinicu, i ako polugrupa ima jedinicu tada je ona jedinstvena. Svaka leva jedinica, desna jedinica i jedinica polugrupe je idempotent te polugrupe.

Neprazan podskup T polugrupe S je *podpolugrupa* od S ako je skup T *zatvoren za operaciju* polugrupe S, tj. ako je $x \cdot y \in T$, za sve $x, y \in T$.

Podpolugrupu G od S, koja je grupa, nazivamo *podgrupom* polugrupe S. Podgrupa G polugrupe S je *maksimalna podgrupa* od S ako ne postoji podgrupa H od S takva da je $G \subset H$.

Sledeća teorema daje opis maksimalnih podgrupa proizvoljne polugrupe.

Teorema 1.12. *Neka je e idempotent polugrupe S. Tada postoji maksimalna podgrupa od S sa jedinicom e, u oznaci G_e, i važi*

$$\begin{aligned} G_e &= \{x \in S \,|\, x = ex = xe,\ (\exists x' \in S)\ e = xx' = x'x\} \\ &= \{x \in S \,|\, x \in eS \cap Se,\ e \in xS \cap Sx\}. \end{aligned}$$

Takođe važi da su za različite idempotente $e, f \in E(S)$ podgrupe G_e i G_f polugrupe S međusobno disjunktne.

Polugrupu S nazivamo *levom* (*desnom*) *grupom* ako je S izomorfna direktnom proizvodu grupe i levo (desno) nulte trake. Polugrupu koja je izomorfna direktnom proizvodu pravougaone trake i grupe nazivamo *pravougaonom grupom*. Polugrupa S je *unija grupa* ako je ona jednaka uniji svojih maksimalnih podgrupa.

U prethodnim odeljcima je već bilo reči o relacijama i preslikavanjima algebri. Ovde su dati neki pojmovi koji su posebno značajni u Teoriji polugrupa.

Za relaciju ρ na polugrupi S kažemo da je *levo* (*desno*) *kompatibilna* ako važi

$$(x,y) \in \rho \Leftrightarrow (zx,zy) \in \rho \quad ((xz,yz) \in \rho), \quad \text{za sve} \;\; x,y,z \in S.$$

Levo (desno) kompatibilnu relaciju ekvivalencije na S nazivamo *levom* (*desnom*) *kongruencijom* polugrupe S. Jasno je da je relacija ρ *kongruencija* na S ako i samo ako je istovremeno i leva i desna kongruencija na S.

Dalje, neposredno se proverava da presek proizvoljne familije relacija kongruencije polugrupe S jeste takođe relacija kongruencije na S. Odavde dobijamo da za proizvoljnu relaciju ρ polugrupe S, presek svih relacija kongruencije na S koje sadrže relaciju ρ jeste relacija kongruencije polugrupe S koju nazivamo *relacija kongruencije koja je generisana relacijom* ρ, i označavmo je sa $\rho^{\#}$.

Podsetimo se još jednom, da su skupovi svih relacija ekvivalencije $Eq(S)$ i svih relacija kongruencije $Con(S)$ polugrupe S, parcijalno uređeni skupovi relacijom inkluzije, tj. oba su kompletne mreže.

Neka je $\mathcal{C}$ neka klasa polugrupa. Relaciju kongruencije ρ polugrupe S nazivamo $\mathcal{C}$-*kongruencijom* ako faktor polugrupa S/ρ pripada klasi $\mathcal{C}$. Razlaganje polugrupe S koje odgovara $\mathcal{C}$-kongruenciji nazivamo $\mathcal{C}$-*razlaganjem* plugrupe S, a odgovarajuću faktor polugrupu S/ρ nazivamo $\mathcal{C}$-*homomorfnom slikom* polugrupe S. U slučaju kada je $\mathcal{C}$ klasa traka, imamo: *tračnu kongruenciju*, *tračno razlaganje* i *tračnu homomorfnu sliku*. Ako je $\mathcal{C}$ klasa polumreža, imamo: *polumrežnu kongruenciju*, *polumrežno razlaganje* i *polumrežnu homomorfnu sliku*.

Pod *tipom relacije* podrazumevamo preslikavanje θ koje proizvoljnoj polugrupi S pridružuje jednu relaciju θ_S na polugrupi S. U tom slučaju kažemo da je θ_S relacija tipa θ na polugrupi S, i ako ne postoji opasnost od zabune onda pišemo samo θ umesto θ_S. Za polugrupu S kažemo da je θ-*prosta* ako se relacija θ_S tipa θ na S poklapa sa univerzalnom relacijom na S.

Neka je I traka. Tada na I definišemo binarnu relaciju $\preccurlyeq$ na sledeći način: za $i,j \in I, \;\; j \preccurlyeq i \;\; \Leftrightarrow \;\; j = jij$. Relacija $\preccurlyeq$ je kvazi-uređenje na I, i za proizvoljne $i,j \in I$ važi $ij \preccurlyeq i,j$. Ako je Y polumreža, tada se ova relacija poklapa sa parcijalnim uređenjem $\leq$ na Y koje je definisano na sledeći način: za $\alpha, \beta \in Y$, $\beta \leq \alpha \;\Leftrightarrow\; \beta = \alpha\beta = \beta\alpha$.

Neka je $\{S_i\}_{i \in I}$ familija polugrupa indeksirana trakom I takva da je $S_i \cap S_j = \varnothing$, za $i \neq j$. Svakom paru $i,j \in I$ za koji važi $j \preccurlyeq i$ pridružimo preslikavanje $\phi_{i,j} : S_i \to S_j$ tako da familija $\{\phi_{i,j}\}_{j \preccurlyeq i}$ zadovoljava sledeće uslove;

(1) $\phi_{i,i}$ je identičko preslikavanje na S_i, za svaki $i \in I$;

(2) $\phi_{i,j}$ je homomorfizam iz S_i u S_j, kadgod je $j \preccurlyeq i$, za $i,j \in I$;

(3) $\phi_{i,j}\phi_{j,k} = \phi_{i,k}$, kadgod je $k \preccurlyeq j \preccurlyeq i$, za $i,j,k \in I$.

Takvu familiju $\{\phi_{i,j}\}_{j\preccurlyeq i}$ nazivamo *tranzitivnim sistemom homomorfizama* nad trakom I. Dalje, na skupu

$$S = \bigcup_{i\in I} S_i$$

definišimo množenje $*$ na sledeći način: za $x_i \in S_i$, $y_j \in S_j$, $i, j \in I$, neka je

$$x_i * y_j = (x\phi_{i,ij})(y\phi_{j,ij}),$$

gde je na desnoj strani množenje u polugrupi S_{ij}. Tada S sa tako definisanim množenjem jeste polugrupa. Štaviše, S je traka I polugrupa S_i, $i \in I$. Za ovako definisanu polugrupu pišemo $S = [I; S_i, \phi_{i,j}]$ i kažemo da S jeste *jaka traka I polugrupa S_i, $i \in I$*.

U slučaju da je I polumreža, u kom slučaju obično pišemo Y umesto I i elemente iz Y označavamo grčkim slovima $\alpha, \beta, \ldots$, tada pišemo $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$ i kažemo da S jeste *jaka polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$*.

Inače, pojam jake polumreže prvi je uveo A. H. Clifford u [35], 1941. godine, dok je jaku traku polugrupa prvi definisao B. M. Schein u [141], 1973. godine, ali u nešto drugačijem obliku pomoću dva međusobno balansirana tranzitivna sistema homomorfizama nad druga dva kvazi-uređenja definisana na traci. Definiciju jake trake polugrupa u ovom obliku, koja je dosta jednostavnija, dali su M. Ćirić i S. Bogdanović u [42], 1993. godine, koji su i dokazali da je ona ekvivalentna Scheinovoj definiciji.

Neka je S polugrupa sa nepraznim skupom idempotenata. Tada na skupu $E(S)$ definišemo uređenje sa

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e,$$

za proizvoljne $e, f \in E(S)$.

Upravo definisano uređenje nazivamo *prirodnim uređenjem* na skupu $E(S)$. Uzmimo, sada, da je S polugrupa bez nule. Element $e \in E(S)$ je *primitivan idempotent* ako je e minimalan element u odnosu na prirodno uređenje na $E(S)$, tj. ako važi

$$f = ef = fe \Rightarrow e = f.$$

Neprazan podskup I polugrupe S nazivamo *levim* (*desnim*) *idealom* polugrupe S ako važi $SI \subseteq I$ $(IS \subseteq I)$. Ako je skup I istovremeno i levi i desni ideal od S, tada I nazivamo *idealom* polugrupe S. Ideal I je *pravi ideal* polugrupe S ako je $I \neq S$. Ukoliko je neprazan, presek svih ideala polugrupe nazivamo *minimalnim idealom* te polugrupe.

Skup $\boldsymbol{Id}(S)$ svih ideala polugrupe S, uređen skupovnom inkluzijom, jeste mreža u kojoj se operacije unije i preseka poklapaju sa skupovnom unijom i presekom ideala, i nazivamo je *mreža ideala* polugrupe S. Kako je presek svaka dva ideala polugrupe S neprazan i on je ideal od S, to mreža $\boldsymbol{Id}(S)$ može imati najviše jedan minimalan element i on je najmanji element u $\boldsymbol{Id}(S)$. Najmanji element mreže $\boldsymbol{Id}(S)$, ukoliko on postoji, nazivamo *jezgrom polugrupe* S. Neposredno se dokazuje da polugrupa S ima jezgro ako i samo ako je presek svih ideala polugrupe S neprazan i u tom slučaju je jezgro jednako tom preseku.

Polugrupa S je (*levo, desno*) *prosta* ako nema pravih (levih, desnih) ideala. Polugrupa je *potpuno prosta* ako je prosta i ako ima primitivan idempotentan element.

Naredne dve teoreme su dobro poznati rezultati Teorije polugrupa. Dokazi ovih rezultata se mogu naći u knjizi S. Bogdanovića i M. Ćirića [21].

Teorema 1.13. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno prosta polugrupa;*
(ii) *S je levo nulta traka desnih grupa;*
(iii) *S je desno nulta traka levih grupa;*
(iv) *S je pravougaona traka grupa.*

Teorema 1.14. *Polugrupa S je pravougaona grupa ako i samo ako je S potpuno prosta polugrupa u kojoj idempotenti čine podpolugrupu.*

Za proizvoljan element x polugrupe S sa $(L(x), R(x))$ $J(x)$ označavamo najmanji (levi, desni) ideal od S koji sadrži element x i zovemo ga *glavni* (*levi, desni*) *ideal* polugrupe S generisan elementom x.

Neka je I ideal polugrupe S. Definišimo na S relaciju ρ_I na sledeći način

$$(x, y) \in \rho_I \Leftrightarrow x, y \in I \ \text{ ili } \ x = y,$$

gde su $x, y \in S$ proizvoljni elementi. Neposredno se proverava da je relacija ρ_I relacija kongruencije na S koju zovemo *Reesova kongruencija* određena idealom I. Faktor polugrupu S/ρ_I nazivamo *Reesova faktor polugrupa* po idealu I, u oznaci S/I. Jasno je da je S/I polugrupa sa nulom koja se dobija iz S sažimanjem ideala I u jedan element koji je nula.

Polugrupa S je *idealska ekstenzija* polugrupe T pomoću polugrupe Q sa nulom ako je T izomorfna idealu T' od S, a faktor polugrupa S/T' je izomorfna sa Q.

Za proizvoljan element x polugrupe S sa nulom 0 kažemo da je *nilpotentan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n = 0$. Skup svih nilpotentnih elemenata polugrupe S označavamo sa $Nil(S)$. Polugrupa S je *nil-polugrupa* ako je svaki od njenih elemenata nilpotentan, tj. ako je $S = Nil(S)$. Pod *radikalom* skupa A, koji je podskup polugrupe S, podrazumevamo skup

$$\sqrt{A} = \{x \in S \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x^n \in A\}.$$

Idealska ekstenzija S polugrupe T je *nil-ekstenzija* ako je S/T nil-polugrupa, tj. ako je $\sqrt{T} = S$.

J. A. Green je 1951. godine u radu [76] pomoću glavnih ideala generisanih elementom definisao specijalan tip relacija koje su po njemu nazvane Greenove relacije. Posle toga su te relacije, zato što su relacije ekvivalencije, postale jedan od najznačajnijih pojmova Teorije polugrupa i nema monografije u kojoj nisu tretirane. Greenove relacije, ili Greenove ekvivalencije imaju značajnu ulogu kod opisa strukture i opisa razlaganja polugrupa.

Na polugrupi S relacije $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{J}$ definisane su na sledeći način:

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathcal{L} \quad &\Leftrightarrow \quad L(x) = L(y), \\ (x,y) \in \mathcal{R} \quad &\Leftrightarrow \quad R(x) = R(y), \\ (x,y) \in \mathcal{J} \quad &\Leftrightarrow \quad J(x) = J(y), \end{aligned}$$

za sve $x, y \in S$.

Ovako definisane relacije su relacije ekvivalencije i nazivamo ih *Greenove relacije* ili *Greenove ekvivalencije*. Kako je presek dve relacije ekvivalencije takođe relacija ekvivalencije, to je i presek relacija $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ relacija ekvivalencije i označavamo je sa $\mathcal{H}$. Ove relacije su veoma značajne u teoriji polugrupa. Unija $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ je takođe važna relacija i zato je označavamo sa $\mathcal{D}$. Dakle, na polugrupi S imamo još dve Greenove relacije ekvivalencije

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \quad \text{i} \quad \mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{L}.$$

Sa L_x (R_x, J_x, H_x, D_x) označavamo $\mathcal{L}$- ($\mathcal{R}$-, $\mathcal{J}$-, $\mathcal{H}$-, $\mathcal{D}$-) klasu elementa x u polugrupi S.

Da bi uopštio pojam idempotenta J. von Neumann [110] je 1936. godine uveo pojam regularnog elementa. Kasnije, klasa regularnih polugrupa i razne njene podklase su u više monografija postale glavni predmet proučavanja. Opštiji od pojma regularnog elementa je pojam π-regularnog elementa koji su uveli R. Arens i I. Kaplansky [6], 1948. godine. Napomenimo još jednom da su π-regularne polugrupe u vrlo bliskoj vezi sa nil-ekstenzijama polugrupa. Regularnost i π-regularnost polugrupa su proučavane od strane više autora od kojih ističemo one najznačajnije: A. H. Clifford i G. B. Preston [36], [37], J. M. Howie [82], [84], R. Croisot [38], M. Petrich [119], [121], S. Bogdanović [16], S. Bogdanović i M. Ćirić [25], P. Protić [130], i drugi.

Element x polugrupe S je (*levo, desno*) *regularan* ako postoji element $x' \in S$ takav da je $x = xx'x$ ($x \in x^2S$, $x \in Sx^2$). Polugrupa S je (*levo, desno*) *regularna* ako je svaki njen element (levo, desno) regularan.

Neke osobine regularne polugrupe kod koje je skup idempotenata $E(S)$ levo nulta traka date su sledećom teoremom.

Teorema 1.15. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je regularna i $E(S)$ je levo nulta traka;*

(ii) *S je levo prosta i desno kancelativna;*

(iii) *S je levo prosta i sadrži idempotent;*

(iv) $(\forall a, x \in S)\ x \in xSa$;

(v) *S ima desnu jedinicu e i $e \in Sa$, za svaki $a \in S$;*

(vi) *za sve $a, b \in S$ postoji tačno jedan $x \in S$ takav da je $xa = b$;*

(vii) *S je levo nulta traka grupa;*

(viii) *S je leva grupa.*

Takođe važi i dualan rezultat prethodnog rezultata.

Element $x' \in S$ je inverz elementa $x \in S$ ako je $x = xx'x$ i $x' = x'xx'$. Sa $V(x)$ označavamo skup svih inverza elementa x. Polugrupa je *inverzna* ako svaki njen element ima jedinstven inverz, tj. ako je regularna polugrupa u kojoj za svaki element x važi $|V(x)| = 1$. Poznato je da je polugrupa S inverzna ako i samo ako je regularna i $E(S)$ je polumreža.

Inverzne polugrupe prvi je proučavao V. V. Vagner [164], [165] i nezavisno od njega G. B. Preston [127], [128], [129]. Ideja za proučavanje ovih struktura potiče od veze između polugrupa i parcijalnih "1-1" preslikavanja na skupu, i jedan od najranijih rezultata govori da svaka inverzna polugrupa ima reprezentaciju kao polugrupa parcijalnih "1-1" preslikavanja. Teorija inverznih polugrupa ima sličnosti sa teorijom grupa, ali ima i važnih razlika. Struktura inverznih polugrupa opisana je sledećom teoremom.

Teorema 1.16. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je inverzna polugrupa;*

(ii) *S je inverzna i idempotenti komutiraju;*

(iii) *svaka $\mathcal{L}$-klasa i svaka $\mathcal{R}$-klasa od S sadrže jedinstven idempotent;*

(iv) *svaki glavni levi i glavni desni ideal od S sadrži jedinstven idempotentan generator.*

Regularna polugrupa S je *ortodoksna* ako njeni idempotenti čine podpolugrupu od S. Klasa ortodoksnih polugrupa u sebe takođe uključuje i klasu inverznih polugrupa i klasu traka. Ove polugrupe opisivali su P. H. H. Fantham [69], M. Yamada [168], [169], [172], [174], M. Petrich [117] i drugi.

Element x polugrupe S je *potpuno regularan* ako postoji element $x' \in S$ takav da je $x = xx'x$ i $xx' = x'x$. Polugrupa S je *potpuno regularna* ako je svaki njen element potpuno regularan.

Sledećom teoremom opisana je struktura potpuno regularnih polugrupa.

Teorema 1.17. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna;*
(ii) *S je unija grupa;*
(iii) *svaka $\mathcal{H}$-klasa od S je grupa;*
(iv) *S je polumreža potpuno prostih polugrupa;*
(v) $(\forall x \in S)\ x \in xSx^2$;
(vi) $(\forall x \in S)\ x \in x^2Sx$.

Ako je potpuno regularna polugrupa istovremeno i ortodoksna, imamo da važi:

Teorema 1.18. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna i ortodoksna;*
(ii) *S je regularna i $x = xyx$ povlači $x = xy^2x^2$, za sve $x, y \in S$;*
(iii) *S je polumreža pravougaonih grupa.*

Ortodoksna potpuno regularna polugrupa naziva se *ortogrupa*.

Važi sledeći rezultat.

Teorema 1.19. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna i $\mathcal{H}$-kompatibilna;*
(ii) *S je traka grupa;*
(iii) *S je regularna i $x^2yS = xyS$, $Sxy^2 = Sxy$, za sve $x, y \in S$.*

Veza između regularnih polugrupa, potpuno regularnih polugrupa, polumreža grupa i jakih polumreža grupa data je sledećom teoremom.

Teorema 1.20. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža grupa;*
(ii) *S je jaka polumreža grupa;*
(iii) *S je regularna i idempotenti iz S su centralni;*
(iv) *S je potpuno regularna i $\mathcal{D} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H}$.*

Element x polugrupe S je (*levo, desno*) *π-regularan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x^n \in x^nSx^n$ ($x^n \in Sx^{n+1}$, $x^n \in x^{n+1}S$), odnosno, ako je neki stepen elementa x (levo, desno) regularan element. Polugrupa je (*levo, desno*) *π-regularna* ako je svaki njen element (levo, desno) π-regularan element.

Sledećom teoremom opisan je jedan specijalan tip razlaganja polugrupe u traku levo prostih polugrupa. Dokoz ovog rezultata se može naći u radu [25].

Teorema 1.21. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *$\mathcal{L}$ je tračna kongruencija na S;*

(ii) *S je levo regularna i $xyz \in Sxzyz$, za sve $x, y, z \in S$;*

(iii) *S je desno regularna traka levo prostih polugrupa;*

(iv) *S je levo poluregularna traka levo prostih polugrupa.*

Važnu osobinu relacija kongruencije na π-regularnoj polugrupi daje sledeći rezultat. Dokaz ovog rezultata može se naći u radu [18] S. Bogdanovića iz 1984. godine.

Teorema 1.22. *Neka je ρ relacija kongruencije na π-regularnoj polugrupi S. Tada svaka ρ-klasa koja je regularan element u faktor polugrupi S/ρ sadrži regularan element iz S i svaka ρ-klasa koja je idempotentan element iz S/ρ sadrži idempotentan element iz S.*

Element x polugrupe S je *potpuno π-regularan* ako postoje elementi $x' \in S$ i $n \in \mathbb{N}$, takvi da je $x^n = x^n x' x^n$ i $x^n x' = x' x^n$, tj. ako je neki stepen od x potpuno regularan element. Polugrupa S je *potpuno π-regularna* ako je svaki njen element potpuno π-regularan.

Imamo da važi:

Teorema 1.23. *Neka je $\mathcal{C}$ klasa potpuno regularnih polugrupa ili klasa potpuno π-regularnih polugrupa, i neka je ξ tračna kongruencija na polugrupi S. Tada je S iz klase $\mathcal{C}$ ako i samo ako svaka ξ-klasa jeste iz klase $\mathcal{C}$.*

Izučavajući razlaganja komutativnih polugrupa T. Tamura i N. Kimura [154] su 1954. godine došli do pojma Arhimedove polugrupe. Reč je o polugrupi u kojoj za svaka dva elementa, svaki od njih deli neki stepen onog drugog. Proste polugrupe, tj. polugrupe koje nemaju prave ideale, jesu Arhimedove. Obrat ne važi. Ove polugrupe igraju značajnu ulogu u polumrežnim razlaganjima polugrupa.

Neka je S polugrupa i neka su $x, y \in S$ proizvoljni elementi. Definišimo na S sledeće relacije deljenja sa:

$$\begin{aligned} x \,|\, y &\Leftrightarrow y \in S^1 x S^1, & x \,|_l\, y &\Leftrightarrow y \in S^1 x, \\ x \,|_r\, y &\Leftrightarrow y \in x S^1, & x \,|_t\, y &\Leftrightarrow x \,|_r\, y \text{ i } x \,|_l\, y, \\ x \longrightarrow y &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ x \,|\, y^n, & x \longrightarrow_l y &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ x \,|_l\, y^n, \\ x \longrightarrow_r y &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ x \,|_r\, y^n, & x \longrightarrow_t y &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ x \,|_t\, y^n. \end{aligned}$$

Polugrupa S je (*levo, desno, t-*) *Arhimedova* ako je ($x \longrightarrow_l y$, $x \longrightarrow_r y$, $x \longrightarrow_t y$) $x \longrightarrow y$, za sve $x, y \in S$.

Takođe, relacije $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!-$, $\underset{l}{-}$, $\underset{r}{-}$ i $\underset{t}{-}$ na polugrupi S definisane su kao simetrično otvorenje relacija $\longrightarrow$, $\longrightarrow_l$, $\longrightarrow_r$ i $\longrightarrow_t$ respektivno, tj. definisane su na sledeći način:

$$x \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!- \; y \;\Leftrightarrow\; x \longrightarrow y \longrightarrow x, \qquad x \underset{l}{-} y \;\Leftrightarrow\; x \longrightarrow_l y \longrightarrow_l x,$$
$$x \underset{r}{-} y \;\Leftrightarrow\; x \longrightarrow_r y \longrightarrow_r x, \qquad x \underset{t}{-} y \;\Leftrightarrow\; x \longrightarrow_t y \longrightarrow_t x,$$

za sve $x, y \in S$.

Više informacija o polugrupama može se naći u sledećim monografijama: V. A. Artamonov , V. N. Saliĭ, L. A. Skornyakov, L. N. Shevrin i E. G. Shulgeifer [7], S. Bogdanović [19], S. Bogdanović i M. Ćirić [21], A. H. Clifford i G. B. Preston [36], [37], P. Dubreil [62], P. A. Grillet [79], P. M. Higgins [81], J. M. Howie [82], [84], G. Lallement [102], M. Petrich [119], [121], M. Teissier [159], i druge.

1.6. Automati

Pod pojmom "automat" u ovom odeljku podrazumevamo automat bez izlaza. Podsetimo se da se takav automat definiše kao uređena trojka (A, X, δ), gde je A *skup stanja*, X je *ulazni alfabet* i $\delta : A \times X \to A$ je *funkcija prelaza*. Osim u slučajevima kada bude drugačije naznačeno automati koje razmatramo biće automati sa fiksiranim ulaznim alfabetom koji označavamo sa X. Takođe, da bi pojednostavili oznake često pišemo "ax" umesto "$\delta(a, x)$". Takođe, automat i njegov skup stanja označavamo istim slovom. Slobodni monoid nad alfabetom X označavaćemo sa X^* i to je ulazni monoid za automat A. Slobodnu polugrupu nad alfabetom X označavamo sa X^+. Pod dejstvom proizvoljne ulazne reči $u \in X^*$ automat A prelazi iz stanja a u stanje koje ćemo označavati sa au. Za $k \in \mathbb{N}^0$, gde $\mathbb{N}^0$ predstavlja skup svih nenegativnih celih brojeva, sa $X^{\leq k} = \{u \in X^* \mid |u| \leq k\}$ označavamo skup reči $u \in X^*$ čija je dužina $|u| \leq k$. Naravno, $|u|$ predstavlja dužinu reči u.

Automat A sa ulaznim alfabetom X može se tretirati kao unarna algebra tipa X kod koje svakom simbolu $x \in X$ odgovara fundamentalna unarna operacija x^A na A definisana sa

$$x^A : a \mapsto ax.$$

Za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in X^+$, kompozicijom fundamentalnih operacija $x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A$, tim redom, dobijamo izvedenu operaciju u^A na A zadatu sa

$$u^A : a \mapsto au.$$

Važi i obratno. Svaka unarna algebra A tipa X može se tretirati kao automat, gde je svaki operacijski simbol $x \in X$ ustvari ulazni simbol automata, a funkcija prelaza $\delta : A \times X \to A$ se definiše sa

$$\delta(a, x) = x^A(a).$$

Inicijalni automati se takođe mogu tretirati kao univerzalne algebre. Kod njih se, osim unarnih operacija koje odgovaraju ulaznim simbolima, javlja i jedna konstanta (nularna operacija) koja odgovara inicijalnom stanju automata.

Veza između automata i univerzalnih algebri nam omogućuje da koristimo pojmove kao što su *podautomat*, *generatorni skup*, *homomorfizam*, *kongruencija*, *direktni* i *poddirektni proizvod* automata i druge, koje definišemo slično odgovarajućim pojmovima iz univerzalne algebre.

Podskup automata A je svaki podskup skupa stanja tog automata, slično, relacija na A je svaka relacija na skupu stanja automata A. Preslikavanje automata A u automat B je svako preslikavanje koje skup stanja automata A slika u skup stanja automata B.

Podskup B automata A je *podautomat* od A ako za svaki $a \in A$ i $x \in X$, iz $a \in B$ sledi $ax \in B$, ili, ekvivalentno, ako za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$, iz $a \in B$ sledi $au \in B$. Ako je B podskup od A takav da za svaki $a \in A$ i $x \in X$, iz $ax \in B$ sledi $a \in B$, ili, ekvivalentno, ako za svaki $a \in A$ i $u \in X^*$, iz $au \in B$ sledi $a \in B$, tada je B *dualni podautomat* od A. Odavde, prazan podskup automata je i podautomat i dualni podautomat. Jasno je da je podskup B automata A podautomat od A ako i samo ako je njegov skupovni komplement $A \setminus B$ u A dualni podautomat od A. Podautomat, odnosno dualni podautomat, B automata A je *pravi podautomat*, odnosno *pravi dualni podautomat*, ako je $B \neq A$ i $B \neq \varnothing$.

Neka je H neprazan podskup automata A. Najmanji podautomat od A koji sadrži H je presek svih podautomata od A koji sadrže H. Taj podautomat označavamo sa $S(H)$ i nazivamo *podautomatom generisanim* skupom H. Najmanji dualni podautomat od A koji sadrži H je presek svih dualnih podautomata od A koji sadrže H, označavamo ga sa $D(H)$ i nazivamo *dualnim podautomatom generisanim* sa H. Jasno je da je

$$
\begin{aligned}
S(H) &= \{b \in A \mid (\exists a \in H)(\exists u \in X^*)\, b = au\} = \{au \mid a \in H,\, u \in X^*\},\\
D(H) &= \{b \in A \mid (\exists a \in H)(\exists u \in X^*)\, a = bu\}.
\end{aligned}
$$

Podautomat (dualni podautomat) generisan jednoelementnim skupom $\{a\}$ nazivamo *monogenim podautomatom* (*monogenim dualnim podautomatom*) generisanim stanjem a i označavamo ga sa $S(a)$ ($D(a)$). Ako je $S(H) = A$, tada je automat A *generisan skupom* H i H je *generatorni skup* automata A. Ako je H konačan skup, tada za automat A kažemo da je *konačno generisan*. Najmanji (neprazan) podautomat automata A, ako postoji, je *jezgro* automata A, i u tom slučaju je ono jedinstven jako povezan podautomat od A.

Neka su A i B automati sa istim ulaznim alfabetom X, tada je preslikavanje $\varphi : A \to B$ *homomorfizam* iz A u B ako je $(ax)\varphi = (a\varphi)x$, za sve $a \in A$ i $x \in X$, ili, ekvivalentno, ako je $(au)\varphi = (a\varphi)u$, za sve $a \in A$ i $u \in X^*$. Sirjektivni homomorfizam je *epimorfizam*, injektivni homomorfizam je *monomorfizam*, a bijektivni homomorfizam je *izomorfizam*. Relacija ϱ na automatu A je *kongruencija* na A ako za proizvoljne $a, b \in A$, iz $(a, b) \in \varrho$ sledi $(ax, bx) \in \varrho$, za svaki $x \in X$, ili, ekvivalentno, ako iz $(a, b) \in \varrho$ sledi $(au, bu) \in \varrho$, za svaki $u \in X^*$.

Takođe, svojstva ideala polugrupa slična su svojstvima podautomata automata. Pojam Reesove kongruencije ideala možemo preneti na podautomate. Neka je B podautomat automata A, tada relacija ϱ_B na A definisana sa

$$(a, b) \in \varrho_B \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } a, b \in B,$$

gde su $a, b \in A$, je kongruencija na A i nazivamo je *Reesovom kongruencijom* na A određenom podautomatom B. Faktor automat A/ϱ_B nazivamo *Reesovim faktor-automatom* od A određenim podautomatom B, i označavamo ga jednostavnije sa A/B. Za automat A kažemo da je *ekstenzija automata* B pomoću automata C ako je B podautomat od A i Reesov faktor-automat A/B je izomorfan sa C. Ako je θ kongruencija na podautomatu B, tada je relacija $R(\theta)$ definisana sa

$$R(\theta) = \theta \cup \Delta_A,$$

kongruencija na A, i nazivamo je *Reesova ekstenzija* kongruencije θ. Uopšte, imamo da je $\rho_B = R(\nabla_B)$.

Stanje $a \in A$ nazivamo *trapom* automata A ako je $au = a$ za svaku reč $u \in X^*$, tj. ako je skup $\{a\}$ podautomat od A. Ako automat A ima samo jedan trap, tada je on *jedno-trapni* automat [9]. Skup svih trapova automata A označavamo sa $Tr(A)$. Automat čija su sva stanja trapovi nazivamo *diskretnim* automatom [61] . Stanje $a \in A$ je *reverzibilno stanje* automata ako za svaku reč $u \in X^*$ postoji reč $v \in X^*$ takva da je $auv = a$, i skup svih reverzibilnih stanja automata A označavamo sa $R(A)$, i pritom $R(A)$ nazivamo *reverzibilni deo* automata A. Automat A je *reverzibilan* ako je svako njegovo stanje reverzibilno. Ako za sve $a, b \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $b = au$, tj. ako je $A = S(a)$, za svaki $a \in A$, tada automat A jeste *jako povezan*. Sa druge strane, automat A je *povezan* ako za sve $a, b \in A$ postoje reči $u, v \in X^*$ takve da je $au = bv$. Specijalno, automat A je *trap-povezan* ako je on povezan i ako ima trap, ili ekvivalentno, ako on ima trap a_0 i za svaki $a \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = a_0$. Dva stanja $a, b \in A$ su *izjednačavajuća* ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = bu$. Za reč $u \in X^*$, stanje $a \in A$ je *u-vrat* automata A ako je $bu = a$, za svaki $b \in A$. Odnosno, stanje $a \in A$ je *vrat* automata A ako je ono u-vrat automata, za neki $u \in X^*$.

Ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = bu$ za sve $a, b \in A$, tada automat A nazivamo *u-direktabilnim* automatom. Reč u nazivamo *usmeravajućom reči* za automat A. Ako automat A jeste u-direktabilan i ima trap, tada automat nazivamo *u-trap-direktabilnim* automatom. Za automat A kažemo da je *direktabilan* (*trap-direktabilan*) ako postoji reč $u \in X^*$ takva da automat A jeste u-direktabilan (u-trap-direktabilan).

P. H. Starke je u radu [148] dokazao da je svaki konačan automat direktabilan ako i samo ako su svaka dva njegova stanja izjednačiva. Kao neposredna posledica ovog tvrđenja dobijen je sledeći rezultat koji koristimo u daljim razmatranjima ove disertacije.

Lema 1.2. *Konačan automat je trap-povezan ako i samo ako je trap-direktabilan.*

Dokaz. Neka je A konačan trap-povezan automat. Tada je A povezan i ima trap a_0. Kako je A povezan, trap a_0 je jedinstven i za svako stanje $a \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = a_0$. Dokažimo da je A direktabilan. Uzmimo proizvoljno $a, b \in A$. Tada, kako je A povezan automat, postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = a_0$. Takođe, za reč $u \in X^*$ i stanje $bu \in A$, postoji reč $v \in X^*$ takva da je $(bu)v = a_0$. Dalje, za date reči $u, v \in X^*$, na osnovu prethodnog i činjenice da je a_0 trap, imamo da važi $(au)v = a_0v = a_0$. Dakle, $auv = buv = a_0$, tj. postoji reč $p = uv \in X^*$ takva da je $ap = bp$. Znači, stanja a i b su izjednačiva, što prema rezultatu P. H. Starkea [148] znači da je A direktabilan automat. Dakle, dobili smo da je A direktabilan i da ima trap a_0, tj. dobili smo da je A trap-direktabilan automat.

Obratno tvrđenje leme sledi neposredno. $\square$

Automat A je *direktna suma* njegovih podautomata $A_\alpha, \alpha \in Y$, u oznaci $A = \sum_{\alpha \in Y} A_\alpha$ ako je $A = \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha$ i $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, za sve $\alpha, \beta \in Y$ takve da je $\alpha \neq \beta$. Automati $A_\alpha, \alpha \in Y$ su u tom slučaju *direktni sumandi* automata A, i oni na A određuju relaciju kongruencije koju nazivamo *direktno sumska kongruencija*, a odgovarajuće razlaganje je *direktno sumska dekompozicija*. Pod najvećim direktno sumskim razlaganjem automata podrazumevamo ono razlaganje koje se dobija preko najmanje direktno sumske kongruencije definisane na automatu A. Automat A je *direktno sumski nerazloživ* ako je univerzalna relacija ∇_A jedina direktno sumska kongruencija na A. Nešto više o direktno sumskim razlaganjima automata može se naći u radu [48]. Od značaja za dalji rad je sledeća teorema, dokazana u radu [48].

Teorema 1.24. *Svaki automat na jedinstven način može biti predstavljen kao direktna suma direktno sumski nerazloživih automata. Ovo razlaganje je najveće direktno sumsko razlaganje datog automata.*

Sledeća teorema predstavlja još jedan bazni i često korišćeni rezultat u ovoj disertaciji. Dokazana je od strane J. Kovačević, M. Ćirića, T. Petković i S. Bogdanovića u radu [100] i njom je opisana struktura proizvoljnog konačnog automata.

Teorema 1.25. *Svaki konačan automat na jedinstven način može biti predstavljen kao ekstenzija direktne sume jako povezanih automata pomoću trap-direktabilnog automata.*

Automati predstavljaju jednu od savremenijih i interesantnijih oblasti istraživanja. Do sada je napisan veliki broj radova, knjiga i monografija o automatima, od kojih ističemo sledeće: I. Babcsányi [8], S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković, B. Imreh i M. Steinby [29], [30], J. R. Büchi [33], S. Burris i H. P. Sankappanavar [34], M. Ćirić i S. Bogdanović [48], M. Ćirić, S. Bogdanović i T. Petković [50], [51], M. Ćirić, B. Imreh i M. Steinby [53], M. Ćirić, T. Petković i S. Bogdanović [54], [55], Z. Ésik [67], Z. Ésik i B. Imreh [68], F. Gécseg i I. Peák [73], D. A. Huffman [85], B. Imreh [86], [87], B. Jónsson [90], G. H. Mealy [105], E. F. Moore [109], T. Petković [111], T. Petković, M. Ćirić i S. Bogdanović [113], [114], [115], M. O. Rabin i D. Scott [135], V. N. Saliĭ[138], M. Setoyanagi [142], C. E. Shannon i J. McCarthy [143], D. M. Smirnov [146], G. H. Wenzel [167], M. Yoeli [176].

Glava 2

Polumrežna razlaganja polugrupa

Polumrežna razlaganja polugrupa prvi je definisao i proučavao A. H. Clifford u radu [35] iz 1941. godine. Posle toga dato je nekoliko zanimljivih opisa polumrežnih razlaganja polugrupa, a najinteresantniji dati su od strane M. Yamadae [170], T. Tamurae i N. Kimurae [155], T. Tamurae [151], M. Petricha [116], M. S. Putchae [133], R. Šulkae [149], M. Ćirića i S. Bogdanovića [45], X. Tanga [156], S. Bogdanovića, M. Ćirića i Ž. Popovića [31], i drugih autora.

U ovoj glavi daju se neke nove karakterizacije najvećih polumrežnih razlaganja polugrupa.

U prvom odeljku opisane su polumreže $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa. Glavni rezultat predstavlja Teorema 2.2 u kojoj su dati potrebni i dovoljni uslovi pod kojima se polugrupa može predstaviti kao polumreža $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa. Takođe, opisane su karakteristike relacije $\longrightarrow^n$ kao i veza tranzitivnosti ove relacije sa polumrežnim razlaganjima polugrupa. Kao posledica dobija se karakterizacija polumreža Arhimedovih polugrupa. Teoremom 2.2 uopšteni su rezultati M. S. Putchae [133], T. Tamurae [151], L. N. Shevrina [144], M. Ćirića i S. Bogdanovića [45].

U drugom odeljku opisane su polumreže $\widehat{\lambda}_n$-prostih polugrupa. Takođe, u ovom odeljku opisane su karakterizacije relacije $\underset{l}{\longrightarrow}^n$. Potrebni i dovoljni uslovi pod kojima se polugrupa može predstaviti kao polumreža $\widehat{\lambda}_n$-prostih polugrupa dati su Teoremom 2.5. Kao posledica ove teoreme dobija se opis polumreža levo Arhimedovih polugrupa.

Polazeći od Greenove $\mathcal{J}$ relacije, u trećem odeljku proučavane su osobine radikala ove relacije. Veze radikala $R(\mathcal{J})$ i $T(\mathcal{J})$ i njihovih n-tih stepena, sa relacijom $\longrightarrow^n$, i polumrežnim razlaganjima "prostih" polugrupa date su Teoremama 2.9 i 2.10. Definisana su i dva nova operatora R i T na mreži svih binarnih relacija polugrupe. Dokazano je da su ovi operatori operatori zatvorenja.

U četvrtom odeljku opisana su polumrežna razlaganja potpuno π-regularnih polugrupa. Razmatrana su razlaganja potpuno π-regularne polugrupe u polumrežu σ_n-prostih polugrupa. Dokazano je da veoma bitnu ulogu u ovom razlaganju igraju idempotentni elementi. Takođe, dati su uslovi pod kojima je potpuno π-regularna polugrupa σ_n- (σ-, λ_n-, λ-) prosta polugrupa. Kao posledice dobijeni su rezultati pod kojima je odgovarajuća potpuno π-regularna polugrupa sa nulom σ_n- (σ-, λ_n-, λ-) prosta polugrupa.

Svi rezultati ove glave su originalni i deo tih rezultata publikovan je u radu [31] iz 2000. godine.

2.1. Polumreže $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa

Dobro je poznato da je najveće polumrežno razlaganje polugrupe realizovano pomoću najmanje polumrežne kongruencije, pa se zato u većini slučajeva opis največeg polumrežnog razlaganja polugrupe zasniva na opisu, odnosno definisanju, najmanje polumrežne kongruencije na datoj polugrupi.

Dve relacije koje su definisali i izučavali M. S. Putcha [132] i T. Tamura [151], koje su označene sa $\longrightarrow$ i $\frac{\quad}{}$, igraju osnovnu i najvažniju ulogu u polumrežnim razlaganjima polugrupa. U ovom odeljku biće date neke osobine i uopštenja vezana za relaciju $\frac{\quad}{}$ i njen n-ti stepen, za $n \in \mathbb{N}$.

Relaciji $\longrightarrow$ na polugrupi S pridružujemo digraf $(S, \longrightarrow)$, a graf $(S, \frac{\quad}{})$ odgovara relaciji $\frac{\quad}{}$ na polugrupi S i on je neusmeren graf. Neka su a i b proizvoljni elementi polugrupe S. Ako postoji put od a do b u digrafu $(S, \longrightarrow)$ (respektivno, put između a i b u grafu $(S, \frac{\quad}{})$), tada takođe postoje i putevi od a do b u digrafu $(S, \longrightarrow)$ (respektivno, između a i b u grafu $(S, \frac{\quad}{})$) minimalne dužine. Ove puteve zvaćemo minimalnim putevima od a do b (respektivno, između a i b).

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan ceo broj. Sa $\mathcal{S}_n$ i $\widehat{\mathcal{S}}_n$ označimo respektivno klase svih polugrupa u kojima je dužina svih minimalnih puteva u grafovima $(S, \longrightarrow)$ i $(S, \frac{\quad}{})$ ograničena sa n. Ekvivalentno, $\mathcal{S}_n$ i $\widehat{\mathcal{S}}_n$ su klase svih polugrupa u kojima n-ti stepeni $\longrightarrow^n$ i $\frac{\quad}{}^n$, relacija $\longrightarrow$ i $\frac{\quad}{}$, respektivno, jesu tranzitivne relacije. Poznato je da je $\mathcal{S}_1 = \widehat{\mathcal{S}}_1$. Ova klasa se sastoji od svih polugrupa koje su razložive u polumrežu Arhimedovih polugrupa. Klasu polumreža Arhimedovih polugrupa izučavali su M. S. Putcha u radu [132] iz 1973. godine, i radu [134] iz 1981. godine, T. Tamura u radu [152] iz 1972. godine, F. Kmeť u radu [95] iz 1988. godine, S. Bogdanović i M. Ćirić u radu [20] iz 1992. godine, i radovima [22] i [42] iz 1993. godine, i drugi autori.

Primetimo da je $\mathcal{S}_n \neq \widehat{\mathcal{S}}_n$ za $n \geq 2$, tj. imamo da je $\widehat{\mathcal{S}}_n \subset \mathcal{S}_n$ za $n \geq 2$. Primer koji potvrđuje ovu nejednakost, dobijen kombinacijom dva konstruktivna metoda koje je dobio M. S. Putcha u radu [133], 1974. godine, biće naveden u ovoj glavi. Polugrupe koje pripadaju klasi $\mathcal{S}_n$ su u potpunosti opisane od strane M. Ćirića i S. Bogdanovića u radu [45] iz 1996. godine. Naime, M. Ćirić i S. Bogdanović su polugrupe iz klase $\mathcal{S}_n$ okarakterisali kao polumreže σ_n-prostih polugrupa.

Pod *rangom polugrupe* S, u oznaci $ran(S)$, podrazumevamo supremum dužina svih minimalnih puteva u grafu $(S, —)$, a pod *polurangom polugrupe* S, u oznaci $sran(S)$, podrazumevamo supremum dužina svih minimalnih puteva u grafu $(S, \longrightarrow)$. Ekvivalentno, $ran(S)$ je najmanji pozitivan ceo broj $n \leq \infty$ za koji je $—^n$ tranzitivna relacija na polugrupi S, a $sran(S)$ je najmanji pozitivan ceo broj $n \leq \infty$ za koji je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija na polugrupi S. Ovakvo označavanje prvi put je uvedeno i korišćeno od strane M. S. Putchae u radu [133], iz 1974. godine. Oznake koje ćemo koristiti u ovoj glavi razlikuju se od Putchainih u tome što je on sa $—^n$ i $\longrightarrow^n$ označavao $(n+1)$-ve stepene relacija $—$ i $\longrightarrow$, a mi označavamo n-te stepene pomenutih relacija, respektivno. Dakle, definicijama koje je koristio Putcha se rang i polurang polugrupe povećavaju za jedan, ako su oni konačni brojevi.

Za dato $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan element a polugrupe S možemo definisati podskupove $\Sigma_n(a)$ i $\Sigma(a)$ polugrupe S na sledeći način:

$$\Sigma_n(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow^n x\}, \qquad \Sigma(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow^\infty x\}.$$

Takođe, na polugrupi S možemo definisati i relacije ekvivalencije σ_n i σ na sledeći način:

$$(a, b) \in \sigma_n \;\Leftrightarrow\; \Sigma_n(a) = \Sigma_n(b), \qquad (a, b) \in \sigma \;\Leftrightarrow\; \Sigma(a) = \Sigma(b).$$

U radu [45] iz 1996. godine M. Ćirić i S. Bogdanović su dokazali da je skup $\Sigma(a)$ najmanji potpuno poluprim ideal polugrupe S koji sadrži element a, takođe, dokazali su da je relacija σ najmanja polumrežna kongruencija na polugrupi S.

Slično, na polugrupi S možemo definisati sledeći skup i relaciju:

$$\widehat{\Sigma}_n(a) = \{x \in S \mid a —^n x\}, \qquad (a, b) \in \widehat{\sigma}_n \;\Leftrightarrow\; \widehat{\Sigma}_n(a) = \widehat{\Sigma}_n(b).$$

Kako je relacija σ_n sadržana u simetričnom otvorenju relacije $\longrightarrow^n$ (prema Lemi 6 iz rada [45]) to dobijamo da je $\widehat{\sigma}_n \subseteq —^n$. Odavde imamo da polugrupa S jeste σ_n-prosta ako i samo ako je $a \longrightarrow^n b$, za sve $a, b \in S$, odnosno, polugrupa S jeste $\widehat{\sigma}_n$-prosta ako i samo ako je $a —^n b$, za sve $a, b \in S$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo da je svaka $\widehat{\sigma}_n$-prosta polugrupa istovremeno i σ_n-prosta polugrupa. Za $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ obratno tvrđenje ne mora da važi, tj. svaka σ_n-prosta polugrupa ne mora biti $\widehat{\sigma}_n$-prosta. Međutim, sve σ_1-proste polugrupe jesu $\widehat{\sigma}_1$-proste, i to su upravo Arhimedove polugrupe.

Glavni rezultat ovog odeljka opisuje strukturu polugrupa koje pripadaju klasi $\widehat{\mathcal{S}}_n$ polugrupa. Pomenut opis dat je u Teoremi 2.2 i u njoj je opisana struktura polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreže $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa. Ali, pre toga daćemo neke nove karakterizacije polugrupa koje pripadaju klasi $\mathcal{S}_n$ polugrupa, tj. u sledećoj teoremi dajemo neke nove karakterizacije polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreže σ_n-prostih polugrupa. Važi sledeći rezultat:

Teorema 2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $S \in \mathcal{S}_n$ (*tj.* $\longrightarrow^n$ *je tranzitivna relacija na* S);

(ii) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa;*

(iii) $(\forall a \in S)\ \ a\ \sigma_n\ a^2$;

(iv) $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n \subseteq \sigma_n$;

(v) $\longrightarrow_l^n \subseteq \sigma_n$;

(vi) $R(\sigma_n) = \sigma_n$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Ekvivalentnost ovih uslova je dokazana u Teoremi 3 u radu [45].

(i) $\Rightarrow$ (iv). Neka je polugrupa S polumreža Y σ_n-prostih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n b$. Tada, prema Lemi 9 [45] imamo da $a, b \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle dobijamo da je $(a, b) \in \sigma_n$, jer za svaki $\alpha \in Y$, S_α jeste σ_n-prosta polugrupa. Dakle, uslov (iv) važi.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Ova implikacija neposredno sledi iz činjenice da na polugrupi S važi inkluzija $\longrightarrow_l^n \subseteq \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n$.

(v) $\Rightarrow$ (iii). Kako je $a \longrightarrow_l^n a^2$, za svaki $a \in S$, to iz uslova (v) neposredno dobijamo da važi (iii).

(i) $\Rightarrow$ (vi). Kako inkluzija $\sigma_n \subseteq R(\sigma_n)$ važi to ostaje da se dokaže da i obratna inkluzija na polugrupi S takođe važi. Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da $(a, b) \in R(\sigma_n)$. Tada je $a^k\, \sigma_n\, b^m$, za neke $k, m \in \mathbb{N}$, i kako je prema pretpostavci σ_n polumrežna kongruencija na polugrupi S to dobijamo da je $a\, \sigma_n\, a^k\, \sigma_n\, b^m\, \sigma_n\, b$. Dakle, dobili smo da $(a, b) \in \sigma_n$, a to je i trebalo dokazati.

(vi) $\Rightarrow$ (iii). Ova implikacija neposredno sledi na osnovu (v) i činjenice da za svaki element $a \in S$ važi $(a, a^2) \in R(\rho)$, za svaku refleksivnu relaciju ρ na polugrupi S. $\square$

Koristeći rezultate prethodne teoreme u nastavku možemo dati karakterizaciju polugrupa koje pripadaju klasi $\widehat{\mathcal{S}}_n$ polugrupa. Odnosno, sledećom teoremom opisujemo polugrupe koje se mogu predstaviti kao plumreže $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa.

Teorema 2.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za polugrupu S su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$ (*tj.* $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n$ *je tranzitivna relacija na* S);

(ii) $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n$ *je polumrežna kongruencija na S;*

(iii) *$\widehat{\sigma}_n$ je tračna kongruencija na S;*

(iv) *S je polumreža $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa;*

(v) $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n = \sigma_n$;

(vi) $(\forall a, b, c \in S)\ a \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^{n+1} c\ \&\ b \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^{n+1} c\ \Rightarrow\ ab \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-^n c$;

(vii) $(\forall a, b \in S)\ a \longrule^{n+1} b \ \Rightarrow\ a^2 \longrule^{n} b$;

(viii) $S \in \mathcal{S}_n$ *i relacija* $\longrule^{n}$ *je jednaka simetričnom otvorenju relacije* $\longrightarrow^{n}$;

(ix) $\longrule^{n}$ *se poklapa sa simetričnim otvorenjem relacije* $\longrightarrow^{n+1}$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$, odnosno neka je $\longrule^{n}$ tranzitivna relacija na polugrupi S. Tada je $\longrule^{n} = \longrule^{\infty}$, i kako se prema Teoremi 1.1 iz rada [133] relacija $\longrule^{\infty}$ poklapa sa najmanjom polumrežnom kongruencijom σ na S, to dobijamo da je i $\longrule^{n}$ jednaka relaciji σ, tj. dobijamo da je i $\longrule^{n}$ najmanja polumrežna kongruencija na S. Dakle, uslov (ii) važi.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Koristeći pretpostavku da je $\longrule^{n}$ tranzitivna relacija na polugrupi S jednostavno se dokazuje jednakost relacija $\longrule^{n}$ i $\widehat{\sigma}_n$, tj. da je $\longrule^{n} = \widehat{\sigma}_n$. Odavde, iz (ii) dobijamo da je $\widehat{\sigma}_n$ polumrežna kongruencija na S, pa je samim tim $\widehat{\sigma}_n$ i tračna kongruencija na S.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Neka je $\widehat{\sigma}_n$ tračna kongruencija na polugrupi S i neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada je $ab\ \widehat{\sigma}_n\ (ab)^2$, tj. imamo da je

$$\widehat{\Sigma}_n(ab) = \widehat{\Sigma}_n((ab)^2).$$

Dalje, uzmimo proizvoljan element $x \in \widehat{\Sigma}_n(ab)$. Tada je $(ab)^2 \longrule^{n} x$, odakle je $(ab)^2 \longrule y \longrule^{n-1} x$, za neki $y \in S$. Ali, kako prema osobinama relacije $\longrule$ uslov $(ab)^2 \longrule y$ implicira $ba \longrule y$ to dobijamo da je $ba \longrule^{n} x$, tj. dobijamo da je $x \in \widehat{\Sigma}_n(ba)$. Dakle, važi inkluzija

$$\widehat{\Sigma}_n(ab) \subseteq \widehat{\Sigma}_n(ba).$$

Slično se dokazuje da važi i obratna inkluzija. Prema tome, imamo da je

$$\widehat{\Sigma}_n(ab) = \widehat{\Sigma}_n(ba).$$

Znači, $ab\, \widehat{\sigma}_n\, ba$, za sve $a, b \in S$, tj. $\widehat{\sigma}_n$ je polumrežna kongruencija na S.

Neka je sada C proizvoljna $\widehat{\sigma}_n$-klasa polugrupe S i neka su $a, b \in C$ proizvoljni elementi. Tada kako je $a \longrule^{n} b$ u S, prema Lemi 9 iz rada [45] dobijamo da je $a \longrule^{n} b$ u C. Dakle, dokazali smo da svaka $\widehat{\sigma}_n$-klasa od S jeste $\widehat{\sigma}_n$-prosta polugrupa, tj. važi (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Neka je polugrupa S polumreža $\widehat{\sigma}_n$-prostih polugrupa. Kao što je već ranije rečeno kako je svaka $\widehat{\sigma}_n$-prosta polugrupa istovremeno i σ_n-prosta polugrupa, to je polugrupa S takođe i polumreža σ_n-prostih polugrupa. Dakle, $\widehat{\sigma}_n = \sigma_n$ i to je najmanja polumrežna kongruencija na S.

Prema Teoremi 2.1 imamo da je $\longrule^{n} \subseteq \sigma_n$. Sa druge strane, uzmimo proizvoljan par $(a, b) \in \sigma_n$, $a, b \in S$. Tada na osnovu prethodnog je $(a, b) \in \widehat{\sigma}_n$, odakle dobijamo da je $a \longrule^{n} b$, a to je i trebalo dokazati. Znači, $\longrule^{n} = \sigma_n$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Neka je $\longrightarrow^n = \sigma_n$. Tada prema Teoremi 2.1 imamo da je polugrupa S polumreža Y σ_n-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Dalje, uzmimo proizvoljne elemente $a, b, c \in S$ takve da je

$$a \longrightarrow^{n+1} c \ \text{ i } \ b \longrightarrow^{n+1} c.$$

Odavde na osnovu Leme 9 iz rada [45] dobijamo da $a, b, c \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Iz prethodnog i činjenice da je $S_\alpha, \alpha \in Y$ polugrupa imamo da i $ab, c \in S_\alpha$, za uočeno $\alpha \in Y$, odakle je $ab\, \sigma_n\, c$. Ali, kako je prema pretpostavci tvrđenja $\longrightarrow^n = \sigma_n$, dobijamo da je $ab \longrightarrow^n c$, a to je i trebalo dokazati.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Ova implikacija je trivijalna.

(vii) $\Rightarrow$ (i). Na svakoj polugrupi imamo da je $\longrightarrow^n \subseteq \longrightarrow^{n+1}$. Da bi dokazali obratnu inkluziju uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \longrightarrow^{n+1} b$. Tada na osnovu pretpostavke dobijamo da $a^2 \longrightarrow^n b$, odakle neposredno sledi da $a \longrightarrow^n b$, a to je i trebalo dokazati. Dakle, dokazali smo da je $\longrightarrow^n = \longrightarrow^{n+1}$, tj. dokazali smo da je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija na polugrupi S.

(v) $\Rightarrow$ (viii). Neka je $\longrightarrow^n = \sigma_n$. Tada prema Teoremi 2.1 imamo da je polugrupa S polumreža σ_n-prostih polugrupa. Takođe, prema Teoremi 3 iz rada [45] imamo da je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija, tj. imamo da $S \in \mathcal{S}_n$. Dalje, prema definiciji je relacija σ_n jednaka simetričnom otvorenju relacije $\longrightarrow^n$. Dakle, uslov (viii) takođe važi.

(viii) $\Rightarrow$ (ix). Kako je uslov da $S \in \mathcal{S}_n$ ekvivalentan uslovu da je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija, tj. da je $\longrightarrow^n = \longrightarrow^{n+1}$, to iz (viii) neposredno sledi (ix).

(ix) $\Rightarrow$ (i). Na osnovu pretpostavke imamo da važi

$$\longrightarrow^n \subseteq \longrightarrow^{n+1} \subseteq \longrightarrow^{n+1} \cap \left(\longrightarrow^{n+1}\right)^{-1} = \longrightarrow^n,$$

tj. dobili smo da je $\longrightarrow^n = \longrightarrow^{n+1}$. Dakle, dokazali smo da je $\longrightarrow^n$ tranzitivna relacija, odnosno, važi (i). $\square$

Za $n = 1$ kao posledicu prethodnog rezultata dobijamo karakterizaciju polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreže Arhimedovih polugrupa. Važi sledeći rezultat:

Teorema 2.3. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža Arhimedovih polugrupa;*
(ii) *$\longrightarrow$ je tranzitivna relacija na S;*
(iii) $(\forall a, b, c \in S)\ a \longrightarrow c \ \&\ b \longrightarrow c \ \Rightarrow\ ab \longrightarrow c;$
(iv) $(\forall a, b \in S)\ a \longrightarrow b \ \Rightarrow\ a^2 \longrightarrow b.$

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ova ekvivalencija je neposredna posledica Teoreme 2.2, iz nje se dobija iz ekvivalencije (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) za $n = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka je $\longrightarrow$ tranzitivna relacija na polugrupi S. Tada prema Teoremi 1.1 iz rada [133] imamo da je $\longrightarrow$ polumrežna kongruencija na S, i pritom za proizvoljne elemente $a,b,c \in S$, iz $a \longrightarrow c$ i $b \longrightarrow c$ sledi $ab \longrightarrow c^2$. Kako je na svakoj polugrupi $c^2 \longrightarrow c$ i prema pretpostavci je $\longrightarrow$ tranzitivna relacija, to dobijamo da je $ab \longrightarrow c$, a to je i trebalo dokazati.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Jasno je da ova implikacija sledi neposredno.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Uzmimo proizvoljne elemente $a,b,c \in S$ takve da je $a \longrightarrow b$ i $b \longrightarrow c$. Tada iz $b \longrightarrow c$ dobijamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ važi $b^{2k} \longrightarrow c$. Sa druge strane, iz $a \longrightarrow b$ dobijamo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $b^{2k} = xay$, za neke $x, y \in S$. Dakle, na osnovu prethodnog imamo da je $xay \longrightarrow c$, odakle se neposredno dokazuje da je $a \longrightarrow c$. Na isti način se dokazuje i da je $c \longrightarrow a$. Znači, dobili smo da je $a \longrightarrow c$, odnosno dobili smo da je $\longrightarrow$ tranzitivna relacija na S. $\square$

Za binarnu relaciju ξ na polugrupi S kažemo da zadovoljava (da ima) "stepeno svojstvo" (power property) ako iz $a\,\xi\,b$ sledi $a^2\,\xi\,b$, za sve $a, b \in S$, odnosno, kažemo da zadovoljava (da ima) "svojstvo zajedničkog množenja" (common multiple property), ili kraće "cm-svojstvo" (cm-property) ako iz $a\,\xi\,c$ i $b\,\xi\,c$ sledi $ab\,\xi\,c$, za sve $a, b, c \in S$.

Dakle, prethodnim rezultatom, Teoremom 2.3, dokazali smo da je svako od tranzitivnih svojstava, stepeno svojstvo ili cm-svojstvo, relacije $\longrightarrow$ na polugrupi S potreban i dovoljan uslov da bi polugrupa S mogla biti predstavljena kao polumreža Arhimedovih polugrupa. Ovde takođe treba napomenuti da je T. Tamura u radu [152] iz 1972. godine, dokazao da je stepeno svojstvo ili cm-svojstvo relacije $\longrightarrow$ jedan od uslova da se polugrupa može predstaviti kao polumreža Arhimedovih polugrupa.

U nastavku navodimo primer polugrupe kod koje se rang i polurang razlikuju. U radu [133] M. S. Putcha je definisao specijalan niz polugrupa $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za koji je dokazao da je $ran(T_n) = sran(T_n) = n + 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako, sada za $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ definišemo skup P_n kao ortogonalnu sumu polugrupa T_n tada se rang i polurang polugrupe P_n razlikuju, tj. imamo da je $ran(P_n) = n+2$ i $sran(P_n) = n+1$. Dakle, minimalni put od jednog do drugog elementa polugrupe P_n se razlikuje od minimalnog puta između tih elemenata u polugrupi P_n.

Primer 1. Naka je $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz polugrupa takvih da za svaki $k \in \mathbb{N}$ polugrupa S_k zadovoljva sledeće uslove:

(1) S_k je 0-prosta polugrupa sa nulom 0_k;

(2) postoji nenula element a_k u S_k takav da je ${a_k}^2 = 0_k$;

(3) postoji nenula idempotent e_k u S_k;

(4) $S_k \cap S_{k+1} = \{e_k\} = \{0_{k+1}\}$ i $S_k \cap S_i = \varnothing$ za $i \geq k + 2$.

Definišimo induktivno novi niz $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ polugrupa na sledeći način: Prvo, uzmimo da je $T_1 = S_1$. Zatim, ako je za neki $n \in \mathbb{N}$ definisan skup T_n onda stavimo da je $T_{n+1} = T_n \cup S_{n+1}$ i definišimo množenje na skupu T_{n+1} tako da se ono poklapa sa množenjima i na skupu T_n i na skupu S_{n+1}, i da je pritom za proizvoljne elemente $x \in T_n$ i $y \in S_{n+1}$ množenje definisano sa

$$xy = xe_n \ \text{ i } \ yx = e_n x,$$

gde je desna strana ovog množenja množenje koje je definisano na polugrupi T_n. Lako se proverava da je ovako definisan niz polugrupa $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lanac polugrupa, odakle je u tom slučaju skup $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ takođe polugrupa i pritom je svaka od polugrupa $T_n, n \in \mathbb{N}$ ideal polugrupe T. Ako uzmemo da je $0 = 0_1$ lako se dokazuje da je element 0 nula polugrupe T.

Kao što je M. S. Putcha dokazao 1974. godine u radu [133], rang i polurang polugrupe T_n su $ran(T_n) = sran(T_n) = n + 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, i rang i polurang polugrupe T su $ran(T) = sran(T) = \infty$. Takođe, u istom radu on je dokazao da je niz

$$0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n \longrightarrow e_n$$

minimalni niz između elemenata 0 i e_n u polugrupama T_n i T.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ neka je P_n ortogonalna suma (0-direktna unija) polugrupa T_n i neka 0-prosta polugrupa S ima nenula element a, takav da je $a^2 = 0$, i nenula idempotent e. Tada je rang polugrupe P_n jednak $ran(P_n) = n+2$, a polurang iznosi $sran(P_n) = n + 1$. Uopšte, minimalan niz između e i e_n je niz

$$e \longrightarrow a \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n \longrightarrow e_n,$$

i minimalan niz od e do e_n je niz

$$e \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n \longrightarrow e_n.$$

2.2. Polumreže $\widehat{\lambda}_n$-prostih polugrupa

Problemi koji su u prethodnom odeljku razmatrani i opisivani za relaciju $\longrightarrow$ na polugrupi S, u ovom odeljku biće razmatrani za levostranu analogiju relacije $\longrightarrow$, odnosno za relaciju $\longrightarrow_l$ na polugrupi S.

Za $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan element a polugrupe S definišemo skupove $\Lambda_n(a)$ i $\Lambda(a)$ na sledeći način:

$$\Lambda_n(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow_l^{n} x\}, \qquad \Lambda(a) = \{x \in S \mid a \longrightarrow_l^{\infty} x\},$$

i pomoću njih odgovarajuće relacije ekvivalencije λ_n i λ na polugrupi S na sledeći način:

$$(a, b) \in \lambda_n \ \Leftrightarrow \ \Lambda_n(a) = \Lambda_n(b), \qquad (a, b) \in \lambda \ \Leftrightarrow \ \Lambda(a) = \Lambda(b).$$

Slično, za $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan element a polugrupe S možemo definisati skupove $\widehat{\Lambda}_n(a)$ i $\widehat{\Lambda}(a)$ na sledeći način:

$$\widehat{\Lambda}_n(a) = \{x \in S \mid a \text{ ---}_{l}^{\,n}\, x\}, \qquad \widehat{\Lambda}(a) = \{x \in S \mid a \text{ ---}_{l}^{\,\infty}\, x\},$$

i pomoću njih odgovarajuće relacije $\widehat{\lambda}_n$ i $\widehat{\lambda}$ na polugrupi S na sledeći način:

$$(a, b) \in \widehat{\lambda}_n \;\Leftrightarrow\; \widehat{\Lambda}_n(a) = \widehat{\Lambda}_n(b), \qquad (a, b) \in \widehat{\lambda} \;\Leftrightarrow\; \widehat{\Lambda}(a) = \widehat{\Lambda}(b).$$

Potpunu karakterizaciju polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreže λ-prostih polugrupa dali su M. Ćirić i S. Bogdanović u radu [42] iz 1993. godine. Narednim rezultatom u potpunosti opisujemo polugrupe koje se mogu predstaviti kao polumreže $\widehat{\lambda}$-prostih polugrupa. Imamo da važi sledeća teorema:

Teorema 2.4. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža $\widehat{\lambda}$-prostih polugrupa;*

(ii) $\text{---}_{l}^{\,\infty} = \text{---}^{\infty}$;

(iii) $\text{---}_{l}^{\,\infty}$ *je polumrežna kongruencija na S.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je polugrupa S polumreža Y $\widehat{\lambda}$-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Dalje, uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \text{ ---}^{\infty} b$. Prema Lemi 9 iz rada [45] dobijamo da $a, b \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle kako je $S_\alpha, \alpha \in Y$ $\widehat{\lambda}$-prosta polugrupa dobijamo da je $a \text{ ---}_{l}^{\,\infty} b$. Dakle, dobili smo da je $\text{---}^{\infty} \subseteq \text{---}_{l}^{\,\infty}$. Kako obratna inkluzija uvek važi to je $\text{---}^{\infty} = \text{---}_{l}^{\,\infty}$, odnosno uslov (ii) važi.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ova implikacija neposredno sledi na osnovu Teoreme 1.1 iz rada [133].

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ova implikacija takođe neposredno sledi na osnovu Leme 11 iz rada [45]. $\square$

Za $n \in \mathbb{N}$ označimo sa $\mathcal{L}_n$ klasu svih polugrupa iz klase $\mathcal{S}_n$ u kojoj važi sledeća jednakost $\longrightarrow^n = \longrightarrow_l^n$, odnosno sa $\widehat{\mathcal{L}}_n$ označimo klasu svih polugrupa iz klase $\widehat{\mathcal{S}}_n$ u kojoj važi sledeća jednakost $\text{---}^{n} = \text{---}_{l}^{\,n}$. Polugrupe koje pripadaju klasi $\mathcal{L}_n$ u potpunosti su okarakterisane od strane M. Ćirića i S. Bogdanovića u radu [45] iz 1996. godine. U tom radu pomenuti autori su dokazali da polugrupa $S \in \mathcal{L}_n$ ako i samo ako S jeste polumreža λ_n-prostih polugrupa. Takođe, lako se proverava da polugrupa $S \in \mathcal{L}_n$ ako i samo ako je $\longrightarrow_l^n = \longrightarrow^{n+1}$. U nastavku ovog poglavlja biće izučavana i opisana struktura polugrupa koje pripadaju klasi $\widehat{\mathcal{L}}_n$ polugrupa. Imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada su za polugrupu S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $S \in \widehat{\mathcal{L}}_n$;

(ii) $\text{---}_l^{\,n} = \text{---}^{n+1}$ *na polugrupi* S;

(iii) $\text{---}_l^{\,n}$ *je polumrežna kongruencija na* S;

(iv) S *je polumreža* $\widehat{\lambda}_n$*-prostih polugrupa;*

(v) $\text{---}_l^{\,n} = \sigma_n$ *na polugrupi* S;

(vi) $(\forall a, b \in S)\ a \,\text{---}^{n+1}\, b \ \Rightarrow\ a^2 \,\text{---}_l^{\,n}\, b$;

(vii) $(\forall a, b, c \in S)\ a \,\text{---}^{n}\, b \ \&\ b \,\text{---}^{n}\, c \ \Rightarrow\ a \,\text{---}_l^{\,n}\, c$;

(viii) $(\forall a, b, c \in S)\ a \,\text{---}^{n+1}\, c \ \&\ b \,\text{---}^{n+1}\, c \ \Rightarrow\ ab \,\text{---}_l^{\,n}\, c$;

(ix) $S \in \mathcal{L}_n$ *i relacija* $\text{---}_l^{\,n}$ *se poklapa sa simetričnim otvorenjem relacije* $\longrightarrow_l^{\,n}$ *na polugrupi* S.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ova implikacija je trivijalna.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Na osnovu pretpostavke imamo da je

$$\text{---}^{n+1} = \underset{l}{\text{---}}^{\,n} \subseteq \text{---}^{n} \subseteq \text{---}^{n+1},$$

odnosno imamo da je $\text{---}_l^{\,n} = \text{---}^{n}$. Odavde, dalje, na osnovu pretpostavke je

$$\underset{l}{\text{---}}^{\,\infty} = \underset{l}{\text{---}}^{\,n} = \text{---}^{n} = \text{---}^{\infty}.$$

Dakle, neposredno na osnovu Teoreme 2.4, ekvivalencije (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), dobijamo da je $\text{---}_l^{\,n}$ polumrežna kongruencija na polugrupi S.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Ova implikacija se neposredno dobija na osnovu Leme 11 iz rada [45].

(iv) $\Rightarrow$ (v). Neka je polugrupa S polumreža Y $\widehat{\lambda}_n$-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Tada je po definiciji S_α istovremeno i σ_n-prosta polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$, odakle na osnovu tvrđenja Teoreme 2.1 dobijamo da je $\text{---}_l^{\,n} \subseteq \sigma_n$. Sa druge strane, uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \sigma_n$. Odavde, iz $(a, b) \in \sigma_n$ na osnovu Leme 9 iz rada [45], imamo da postoji $\alpha \in Y$ takav da je $a, b \in S_\alpha$, odakle na osnovu pretpostavke uslova (iv) dobijamo da je $a \,\text{---}_l^{\,n}\, b$, odnosno dobijamo da je $\sigma_n \subseteq \text{---}_l^{\,n}$. Dakle, dokazali smo da (v) važi.

(v) $\Rightarrow$ (i). Na osnovu (v) i Teoreme 2.1 imamo da je

$$\sigma_n = \underset{l}{\text{---}}^{\,n} \subseteq \text{---}^{n} \subseteq \sigma_n,$$

tj. imamo da je $\text{---}_l^{\,n} = \text{---}^{n} = \sigma_n$, odakle na osnovu Teoreme 2.2 neposredno sledi da polugrupa $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$, što je i trebalo dokazati. Dakle, uslov (i) važi.

(i) $\Rightarrow$ (vi). Neka polugrupa $S \in \widehat{\mathcal{L}}_n$. Tada $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$ i pritom je

$$\underset{l}{\text{---}}^{\,n} = \text{---}^{n} = \text{---}^{n+1}.$$

Dalje, uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a -\!\!-^{n+1} b$. Tada na osnovu Teoreme 2.2, ekvivalencije (viii) $\Leftrightarrow$ (vii), imamo da je $a^2 -\!\!-^{n} b$, i kako je po pretpostavci $-\!\!-_{l}^{\,n} = -\!\!-^{n}$, to dobijamo da je $a^2 -\!\!-_{l}^{\,n} b$, što je i trebalo dokazati.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Na osnovu pretpostavke neposrednom proverom dobijamo da iz $a -\!\!-^{n+1} b$ sledi da je $a^2 -\!\!-^{n} b$, za svaki $a, b \in S$, odakle na osnovu Teoreme 2.2, ekvivalencije (vii) $\Leftrightarrow$ (i), imamo da je $-\!\!-^{n}$ tranzitivna relacija na polugrupi S. Uzmimo sada proizvoljne elemente $a, b, c \in S$ takve da je $a -\!\!-^{n} b$ i $b -\!\!-^{n} c$. Tada je i $a -\!\!-^{n} c$, odnosno, zbog tranzitivnosti relacije $-\!\!-^{n}$ je i $a -\!\!-^{n+1} b$. Odavde na osnovu (vi) važi $a^2 -\!\!-_{l}^{\,n} c$, odakle neposredno sledi da je $a -\!\!-_{l}^{\,n} c$. Dakle, dokazali smo da (vii) važi.

(vii) $\Rightarrow$ (i). Iz (vii) dobijamo da je $-\!\!-^{n}$ tranzitivna relacija na polugrupi S, tj. dobijamo da polugrupa $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$. Takođe, na osnovu pretpostavke dobijamo da je $-\!\!-^{n} = -\!\!-_{l}^{\,n}$. Dakle, na osnovu prethodnog imamo da $S \in \widehat{\mathcal{L}}_n$, tj. uslov (i) važi.

(iv) $\Rightarrow$ (ix). Neka je polugrupa S polumreža Y $\widehat{\lambda}_n$-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \longrightarrow^{n+1} b$. Tada $a \in S_\alpha$ i $b \in S_\beta$, za neke $\alpha, \beta \in Y$. Na osnovu Leme 9 iz rada [45] imamo da je $\beta \leq \alpha$ u Y, tj. imamo da je $\alpha\beta = \beta$. Dakle, imamo da $b, ba \in S_\beta$, za uočeno $\beta \in Y$. Odavde, kako je S_β $\widehat{\lambda}_n$-prosta polugrupa, za uočeno $\beta \in Y$, imamo da je $ba -\!\!-_{l}^{\,n} b$, odakle neposredno dobijamo da je $ba \longrightarrow_{l}^{n} b$. Takođe, $ba \longrightarrow_{l}^{n} b$ implicira $a \longrightarrow_{l}^{n} b$, za svaki $a, b \in S$. Dakle, dokazali smo da je $\longrightarrow^{n+1} \subseteq \longrightarrow_{l}^{n}$. Kako obratna inkluzija uvek važi imamo da je $\longrightarrow^{n+1} = \longrightarrow_{l}^{n}$ na polugrupi S, tj. imamo da polugrupa $S \in \mathcal{L}_n$.

Takođe, imamo da je polugrupa S_α istovremeno i σ_n-prosta polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$, i pritom je na osnovu Teoreme 3 iz rada [45] relacija σ_n jednaka simetričnom otvorenju relacije $\longrightarrow^{n}$. Ali, kako smo u prvom delu dokaza ove implikacije dobili da je $\longrightarrow_{l}^{n} = \longrightarrow^{n}$, i pritom implikacija (iv) $\Rightarrow$ (v) ove Teoreme kaže da je $-\!\!-_{l}^{\,n} = \sigma_n$, to neposredno dobijamo da se relacija $-\!\!-_{l}^{\,n}$ poklapa sa simetričnim otvorenjem relacije $\longrightarrow_{l}^{n}$ na polugrupi S. Dakle, ovim je kompletiran dokaz implikacije (iv) $\Rightarrow$ (ix), odnosno, na polugrupi S važi (ix).

(ix) $\Rightarrow$ (v). Na osnovu pretpostavke da polugrupa $S \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ imamo da je $\longrightarrow_{l}^{n} = \longrightarrow^{n}$ i da su pritom relacije $\longrightarrow_{l}^{n}$ i $-\!\!-^{n}$ tranzitivne relacije na polugrupi S. Sa druge strane na osnovu Teoreme 3 iz rada [45] relacija σ_n je tranzitivno zatvorenje relacije $\longrightarrow^{n}$ na S, i sada na osnovu (ix) dobijamo da je $-\!\!-^{n} = \sigma_n$, tj. dobijamo da je $-\!\!-_{l}^{\,n} = \sigma_n$.

(i) $\Rightarrow$ (viii). Neka polugrupa $S \in \widehat{\mathcal{L}}_n$. Dalje, uzmimo proizvoljne elemente $a, b, c \in S$ takve da je $a -\!\!-^{n+1} c$ i $b -\!\!-^{n+1} c$. Tada kako $S \in \widehat{\mathcal{S}}_n$, tj. kako je $-\!\!-^{n}$ tranzitivna relacija na S, to na osnovu Teoreme 2.2 imamo da je $ab -\!\!-^{n} c$. Ali, kako na polugrupi S važi jednakost $-\!\!-^{n} = -\!\!-_{l}^{\,n}$, to na osnovu prethodnog dobijamo da je $ab -\!\!-_{l}^{\,n} c$. Dakle, važi (viii).

(viii) $\Rightarrow$ (vi). Ova implikacija sledi neposredno. $\square$

U nastavku rada dajemo neke nove karakterizacije polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreže levo Arhimedovih polugrupa u terminima vezanim za relaciju $\longrightarrow_l$, odnosno za razne oblike njene tranzitivnosti. Kao neposredna posledica prethodnog rezultata, Teoreme 2.5, za $n = 1$ imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.6. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža levo Arhimedovih polugrupa;*
(ii) $(\forall a, b \in S)\ ab \longrightarrow_l ba;$
(iii) $(\forall a, b \in S)\ a \longrightarrow b \ \Rightarrow\ a^2 \longrightarrow_l b;$
(iv) $(\forall a, b, c \in S)\ a \longrightarrow b \ \&\ b \longrightarrow c \ \Rightarrow\ a \longrightarrow_l c;$
(v) $(\forall a, b, c \in S)\ a \longrightarrow c \ \&\ b \longrightarrow c \ \Rightarrow\ ab \longrightarrow_l c.$

D o k a z . (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Ova ekvivalencija je neposredna posledica prethodne Teoreme 2.5. Iz nje se dobija ako uzmemo da je $n = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (v). Uzmimo proizvoljne elemente $a, b, c \in S$ takve da je $a \longrightarrow c$ i $b \longrightarrow c$. Tada je takođe i $a \longrightarrow^2 c$ i $b \longrightarrow^2 c$. Odavde, na osnovu pretpostavke i Teoreme 2.5 neposredno dobijamo da je $ab \longrightarrow_l c$, a to je i trebalo dokazati.

(v) $\Rightarrow$ (iii). Ova implikacija je trivijalna.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$. Uvek je $ab \longrightarrow ba$, odakle, na osnovu (iii) dobijamo da je $(ab)^2 \longrightarrow_l ba$, a odavde se neposredno dobija da je $ab \longrightarrow_l ba$. Dakle, uslov (ii) važi.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kako se na osnovu pretpostavke lako proverava da je $a \longrightarrow_l ab$, za svaki $a, b \in S$, to odavde na osnovu Propozicije 1.1 iz rada [17] dobijamo da je polugrupa S polumreža levo Arhimedovih polugrupa. $\square$

2.3. Radikali Greenove $\mathcal{J}$-relacije

Radikali $R(\rho)$ i $T(\rho)$ proizvoljne binarne relacije ρ na polugrupi S definisani su na sledeći način:

$$(a, b) \in R(\rho) \ \Leftrightarrow\ (\exists m, n \in \mathbb{N})\ a^m \,\rho\, b^n, \qquad (a, b) \in T(\rho) \ \Leftrightarrow\ (\exists n \in \mathbb{N})\ a^n \,\rho\, b^n.$$

Prvi od prethodno navedena dva radikala definisao je i izučavao M. S. Putcha u radu [131] iz 1973. godine. U pomenutom radu Putcha je opisao radikal $R(\mathcal{J})$ Greenove $\mathcal{J}$ relacije. Opšta definicija radikala relacija na polugrupama data je od strane L. N. Shevrina u radu [144] iz 1994. godine. Drugi tip radikala definisali su i izučavali S. Bogdanović i M. Ćirić u radu [26] iz 1996. godine. U pomenutom radu oni su oba tipa radikala relacija na polugrupi primenili na Greenove relacije.

Gornjim definicijama određena su dva operatora na mreži $\mathcal{B}(S)$ svih binarnih relacija na polugrupi S:

$$R : \rho \mapsto R(\rho) \quad \text{i} \quad T : \rho \mapsto T(\rho).$$

Za proizvoljnu binarnu relaciju $\rho \in \mathcal{B}(S)$ imamo da je $\rho \subseteq T(\rho) \subseteq R(\rho)$, što znači da su pomenuti operatori T i R *ekstenzivni operatori* na mreži $\mathcal{B}(S)$. Dalje, za proizvoljne binarne relacije $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{B}(S)$, iz uslova da je $\rho_1 \subseteq \rho_2$ sledi da je $T(\rho_1) \subseteq T(\rho_2)$ i $R(\rho_1) \subseteq R(\rho_2)$. Operatori koji zadovoljavaju prethodni uslov nazivaju se *izotoni operatori*, tj. operatori T i R su i izotoni operatori na mreži $\mathcal{B}(S)$. Konačno, imamo da je $R(T(\rho)) = T(R(\rho)) = R(\rho)$, za svaku binarnu relaciju $\rho \in \mathcal{B}(S)$, tj. imamo da je $RT = TR = R$ u polugrupi operatora na mreži $\mathcal{B}(S)$. Kao što je poznato ekstenzivni, izotoni i idempotentni operatori na mreži relacija su poznati kao *operatori zatvorenja*. Dakle, prethodna razmatranja mogu biti uopštena kao rezultat dat sledećom lemom:

Lema 2.1. *Neka je S polugrupa. Tada su $R : \rho \mapsto R(\rho)$ i $T : \rho \mapsto T(\rho)$ operatori zatvorenja na mreži $\mathcal{B}(S)$ svih binarnih relacija na S i $RT = TR = R$.*

Binarna relacija ρ na polugrupi S naziva se *T-zatvorena relacija* na S ako je $T(\rho) = \rho$, odnosno, ρ je *R-zatvorena* na S ako je $R(\rho) = \rho$. Lako se proverava da relacija —^n, za svaki $n \in \mathbb{N}$, a takođe i relacija —^∞, jeste istovremeno i T-zatvorena i R-zatvorena relacija na polugrupi S. Dakle, za Greenovu $\mathcal{J}$-relaciju na polugrupi S, uvek su relacije $R(\mathcal{J})$ i $T(\mathcal{J})$ sadržane u relaciji —.

Kao što je već napred rečeno, M. S. Putcha je u radu [131] dokazao da se relacija $R(\mathcal{J})^\infty$ poklapa sa najmanjom polumrežnom kongruencijom na potpuno π-regularnoj polugrupi. U nastavku ovog odeljka dokazujemo da prethodno tvrđenje ne važi u opštem slučaju. Ovde ćemo razmatrati i opisati polugrupe u kojima je $R(\mathcal{J})^\infty$ polumrežna kongruencija na polugrupi S.

Teorema 2.7. *Na polugrupi S relacija $R(\mathcal{J})^\infty$ je polumrežna kongruencija ako i samo ako je $R(\mathcal{J})^\infty = \text{—}^\infty$.*

D o k a z . Ovaj dokaz neposredno sledi na osnovu Teoreme 1.1 koju je dokazao M. S. Putcha u radu [133] iz 1974. godine i činjenice da je relacija $R(\mathcal{J})$ sadržana u relaciji — na polugrupi S. $\square$

Na isti način imamo da važi:

Teorema 2.8. *Na polugrupi S relacija $T(\mathcal{J})^\infty$ je polumrežna kongruencija ako i samo ako je $T(\mathcal{J})^\infty = \text{—}^\infty$.*

U nastavku razmatramo uslove pod kojima je neki stepen relacije $R(\mathcal{J})$ polumrežna kongruencija na polugrupi S. Sledećom teoremom dokazano je da su različiti uslovi tranzitivnosti relacije $R(\mathcal{J})$ potrebni i dovoljni da n-ti stepen, $n \in \mathbb{N}$, relacije $R(\mathcal{J})$ bude polumrežna kongruencija na polugrupi S. Imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada su za polugrupu S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $R(\mathcal{J})^n$ *je polumrežna kongruencija na* S*;*

(ii) $R(\mathcal{J})^n = \sigma_n$*;*

(iii) $R(\mathcal{J})^n = \text{—}^{n+1}$*;*

(iv) $(\forall a, b \in S)\ a \text{—}^{n+1} b \ \Rightarrow\ (a^2, b) \in R(\mathcal{J})^n$*;*

(v) $(\forall a, b, c \in S)\ a \text{—}^{n} b \ \&\ b \text{—}^{n} c \ \Rightarrow (a, c) \in R(\mathcal{J})^n$*;*

(vi) $(\forall a, b, c \in S)\ a \text{—}^{n+1} c \ \&\ b \text{—}^{n+1} c \ \Rightarrow\ (ab, c) \in R(\mathcal{J})^n$*.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (iii). Neka je polugrupa S polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, takvih da je svaka od polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$ jedna $R(\mathcal{J})^n$ klasa od S.

Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \text{—}^{n+1} b$. Tada na osnovu Leme 9 iz rada [45] dobijamo da $a, b \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle po definiciji $(a, b) \in R(\mathcal{J})^n$. Dakle, važi:

$$\text{—}^{n+1} \subseteq R(\mathcal{J})^n \subseteq \text{—}^{n} \subseteq \text{—}^{n+1},$$

tj. uslov (iii) važi.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Ako (iii) važi, tada je

$$\text{—}^{n+1} \subseteq R(\mathcal{J})^n \subseteq \text{—}^{n} \subseteq \text{—}^{n+1}.$$

Odavde dobijamo da je $\text{—}^{n} = \text{—}^{n+1}$, tj. dobijamo da je —^{n} tranzitivna relacija, odakle, na osnovu Teoreme 2.2 neposredno sledi da je $\sigma_n = \text{—}^{n} = R(\mathcal{J})^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ako je $R(\mathcal{J})^n = \sigma_n$, tada je $(a^2, a) \in R(\mathcal{J}) \subseteq R(\mathcal{J})^n = \sigma_n$, za svaki $a \in S$, odakle na osnovu Teoreme 3 iz rada [45] dobijamo da je $\sigma_n = R(\mathcal{J})^n$ polumrežna kongruencija na S.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Neka je polugrupa S polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, takvih da je svaka od polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$ jedna $R(\mathcal{J})^n$ klasa od S.

Iz pretpostavke da $a \text{—}^{n+1} b$ i već pomenute Leme 9, [45], dobijamo da $a^2, b \in S_\alpha$, odakle je $(a^2, b) \in R(\mathcal{J})^n$, odnosno, (iv) važi.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Kako iz $(a^2, b) \in R(\mathcal{J})$ sledi da $(a, b) \in R(\mathcal{J})$, to dobijamo da iz $(a^2, b) \in R(\mathcal{J})^n$ sledi da $(a, b) \in R(\mathcal{J})^n$. Dakle, uslov (iv) implicira inkluziju $\text{—}^{n+1} \subseteq R(\mathcal{J})^n$, odakle neposredno sledi (iii).

(i) $\Rightarrow$ (v). Neka je polugrupa S polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, takvih da je svaka od polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$ jedna $R(\mathcal{J})^n$ klasa od S.

Dalje, uzmimo sada proizvoljne elemente $a, b, c \in S$ takve da je $a \relbar\relbar^{n} b$ i $b \relbar\relbar^{n} c$. Tada $a, b, c \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, na osnovu Leme 9, [45], odakle iz $a, c \in S_\alpha, \alpha \in Y$ sledi da $(a, c) \in R(\mathcal{J})^n$. Dakle, dokazali smo da (v) važi.

(v) $\Rightarrow$ (iii). Prvo, na osnovu (v) dobijemo da je $\relbar\relbar^{n}$ tranzitivna relacija, tj. da je $\relbar\relbar^{n} = \relbar\relbar^{n+1}$. Na osnovu pretpostavke takođe dobijamo da je $\relbar\relbar^{n} = R(\mathcal{J})^n$, odakle uslov (iii) sledi neposredno.

(i) $\Rightarrow$ (vi). Neka je polugrupa S polumreža Y polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$, takvih da je svaka od polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$ jedna $R(\mathcal{J})^n$ klasa od S.

Na isti način, ako uzmemo elemente $a, b, c \in S$ takve da je $a \relbar\relbar^{n+1} c$ i $b \relbar\relbar^{n+1} c$, tada $a, b, c \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, odakle i $ab, c \in S_\alpha$, odnosno $(ab, c) \in R(\mathcal{J})^n$. Ovim je i uslov (vi) dokazan.

(vi) $\Rightarrow$ (iv). Ova implikacija sledi neposredno. $\square$

Sada, specijalno ako je $n = 1$, kao posledicu prethodne Teoreme 2.9 dobijamo sledeći rezultat. Ekvivalentnost nekih uslova ovog rezultata dokazana je od strane M. Ćirića i S. Bogdanovića u radu [45] iz 1996. godine.

Posledica 2.1. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) $R(\mathcal{J})$ *je polumrežna kongruencija;*

(ii) $R(\mathcal{J}) = \sigma_1$;

(iii) $R(\mathcal{J}) = \relbar\relbar^{2}$;

(iv) $(\forall a, b \in S)\ a \relbar\relbar b \ \Rightarrow\ (a^2, b) \in R(\mathcal{J})$;

(v) $(\forall a, b, c \in S)\ a \relbar\relbar b \ \&\ b \relbar\relbar c \ \Rightarrow\ (a, c) \in R(\mathcal{J})$;

(vi) $(\forall a, b, c \in S)\ a \relbar\relbar c \ \&\ b \relbar\relbar c \ \Rightarrow\ (ab, c) \in R(\mathcal{J})$.

Dokaz. Kao što je već rečeno ekvivalencija (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je dokazana u radu [26]. Takođe, uslovi (i), (ii), (iii) i (v) su ekvivalentni na osnovu Teoreme 2.9 za $n = 1$.

Implikacije (i) $\Rightarrow$ (iv) i (i) $\Rightarrow$ (vi) mogu biti dokazane na sličan način kao odgovarajući delovi iz Teoreme 2.9, dok implikacije (iv) $\Rightarrow$ (i) i (vi) $\Rightarrow$ (i) slede neposredno na osnovu Teorema 2.3 i 2.9. $\square$

U slučaju radikala $T(\mathcal{J})$ Greenove relacije $\mathcal{J}$ imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada su sledeći uslovi na polugrupi S ekvivalentni:*

(i) $T(\mathcal{J})^n$ *je polumrežna kongruencija na S;*

(ii) $T(\mathcal{J})^n = \sigma_n = R(\mathcal{J})^n$;

(iii) $T(\mathcal{J})^n = \relbar\relbar^{n+1}$;

(iv) $(\forall a, b \in S)\ a \relbar\relbar^{n+1} b \ \Rightarrow\ (a^2, b) \in T(\mathcal{J})^n$;

(v) $(\forall a,b,c \in S)\ a \,—^n\, b \ \&\ b \,—^n\, c \ \Rightarrow\ (a,c) \in T(\mathcal{J})^n$;

(vi) $(\forall a,b,c \in S)\ a \,—^{n+1}\, c \ \&\ b \,—^{n+1}\, c \ \Rightarrow\ (ab,c) \in T(\mathcal{J})^n$.

Dokaz. (iii) $\Rightarrow$ (ii). Ako (iii) važi, tada imamo da je

$$—^{n+1} = T(\mathcal{J})^n \subseteq R(\mathcal{J})^n \subseteq —^n \subseteq —^{n+1},$$

odakle je $R(\mathcal{J})^n = —^n$. Odavde na osnovu Teoreme 2.9 dobijamo da je $\sigma_n = R(\mathcal{J})^n = —^{n+1} = T(\mathcal{J})$, a to je i trebalo dokazati.

Implikacija (ii) $\Rightarrow$ (i) neposredno sledi na osnovu Teoreme 2.9. Ekvivalentnost ostalih tvrđenja ove teoreme može biti dokazana na sličan način kao ekvivalentnost odgovarajućih tvrđenja iz Teoreme 2.9. □

Neposredno dobijamo da važi sledeća posledica.

Posledica 2.2. *Za polugrupu S sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$T(\mathcal{J})$ je polumrežna kongruencija na S;*

(ii) $T(\mathcal{J}) = \sigma_1 = R(\mathcal{J})$;

(iii) $T(\mathcal{J}) = —^2$;

(iv) $(\forall a,b \in S)\ a \,—\, b \ \Rightarrow\ (a^2,b) \in T(\mathcal{J})^n$;

(v) $(\forall a,b,c \in S)\ a \,—\, b \ \&\ b \,—\, c \ \Rightarrow\ (a,c) \in T(\mathcal{J})^n$;

(vi) $(\forall a,b,c \in S)\ a \,—\, c \ \&\ b \,—\, c \ \Rightarrow\ (ab,c) \in T(\mathcal{J})^n$;

(vii) *S je polumreža nil-ekstenzija prostih polugrupa.*

Dokaz. Ekvivalencije (i) $\Leftrightarrow$ (ii) i (i) $\Leftrightarrow$ (vii) su dokazane u radu [26], a ekvivalentnost uslova (i), (ii), (iii) i (v) neposredno sledi na osnovu Teoreme 2.10 u slučaju kada je $n = 1$.

Implikacije (i) $\Rightarrow$ (iv) i (i) $\Rightarrow$ (vi) mogu biti dokazane na sličan način kao odgovarajuće implikacije u Teoremi 2.10, dok implikacije (iv) $\Rightarrow$ (i) i (vi) $\Rightarrow$ (i) slede neposredno na osnovu Teorema 2.3 i 2.10. □

2.4. Polumreže σ_n-prostih potpuno π-regularnih polugrupa

Kao što smo već ranije istakli polugrupu S nazivamo *potpuno π-regularnom* polugrupom ako za svaki $a \in S$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x \in S$ takvi da je $a^n = a^n x a^n$ i $a^n x = x a^n$. Ovakve polugrupe L. N. Shevrin [144] naziva epigrupama. U radu [45] iz 1996. godine M. Ćirić i S. Bogdanović su Teoremom 3 opisali sve polugrupe koje se mogu predstaviti kao polumreže σ_n-prostih polugrupa. Međutim, ako je polugrupa S potpuno π-regularna polugrupa tada se njeno predstavljanje u polumrežu σ_n-prostih polugrupa može dati korišćenjem skupa idempotentnih elemenata te polugrupe. U nastavku dajemo karakterizaciju potpuno π-regularnih polugrupa koje se mogu predstaviti kao polumreža σ_n-prostih polugrupa. Kao pomoćni rezultat koji često koristimo prilikom dokaza glavnog rezultata u ovom odeljku disertacije navodimo sledeću lemu:

Lema 2.2. *Neka je S polugrupa i neka je $b \in S$ element takav da je $b^j \in G_f$ za neki $f \in E(S)$ i neki $j \in \mathbb{N}$. Tada $a \longrightarrow b$ ako i samo ako $a \mid f$, za svaki $a \in S$.*

Dokaz. Neka su $a, b \in S$ elementi takvi da je $a \longrightarrow b$. Tada iz predpostavke leme i Munnove leme imamo da $b^{jk} \in G_f \cap SaS$ za neki $k \in \mathbb{N}$, odakle $f = b^{jk}(b^{jk})^{-1} \in SaS(b^{jk})^{-1} \subseteq SaS$. Znači, dobili smo da $a \mid f$.

Obratno, neka $a \mid f$ u S. Tada je $b^j = fb^j \in SaSb^j \subseteq SaS$, za neki $j \in \mathbb{N}$. Dakle, $a \longrightarrow b$. $\square$

Glavni rezultat ovog odeljka je sledeća teorema kojom su pomoću idempotenata opisana polumrežna razlaganja potpuno π-regularnih polugrupa. Imamo da važi:

Teorema 2.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je S potpuno π-regularna polugrupa. Tada su na S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *S je polumreža σ_n-prostih polugrupa;*
(ii) $(\forall a \in S)(\forall e \in E(S))\ a \longrightarrow^n e \ \Rightarrow\ a^2 \longrightarrow^n e;$
(iii) $(\forall a, b \in S)(\forall e \in E(S))\ a \longrightarrow^n e \ \&\ b \longrightarrow^n e \ \Rightarrow\ ab \longrightarrow^n e;$
(iv) $(\forall e, f, i \in E(S))\ i \longrightarrow^n e \ \&\ f \longrightarrow^n e \ \Rightarrow\ if \longrightarrow^n e;$
(v) *$\longrightarrow^n$ je tranzitivna relacija na S.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S polumreža Y σ_n-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljne elemente $a \in S$ i $e \in E(S)$ takve da je $a \longrightarrow^n e$. Tada $a^2, e \in S_\alpha$ za neki $\alpha \in Y$. Kako $S_\alpha, \alpha \in Y$ jeste σ_n-prosta polugrupa to imamo da je $a^2 \longrightarrow^n e$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \longrightarrow^n b$. Odavde je $a \longrightarrow^{n-1} x \longrightarrow b$ za neki $x \in S$. Kako je S potpuno π-regularna polugrupa to $b^i \in G_e$ za neki $e \in E(S)$ i neki $i \in \mathbb{N}$. Prema Lemi 2.2 je $x \longrightarrow b$ ekvivalentno sa $x \mid e$. Na svakoj polugrupi je $\mid\ \subseteq \longrightarrow$ odakle $x \longrightarrow e$. Odavde je $a \longrightarrow^{n-1} x \longrightarrow e$, tj. važi $a \longrightarrow^n e$. Iz (ii) dobijamo da $a^2 \longrightarrow^n e$. Odavde je $a^2 \longrightarrow^{n-1} y \longrightarrow e$ za neki $y \in S$. Kako $y \longrightarrow e$ to $e \in SyS$. Dalje,

$$b^i = b^i e \in b^i SyS \subseteq SyS,$$

odakle $y \longrightarrow b$. Znači, dobili smo da $a^2 \longrightarrow^{n-1} y \longrightarrow b$, tj. dobili smo da je $a^2 \longrightarrow^n b$. Iz $a \longrightarrow^n b$ sledi da $a^2 \longrightarrow^n b$ odakle prema Teoremi 3 [45] imamom da je S polumreža σ_n-prostih polugrupa.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Neka je S polumreža Y σ_n-prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ i $e \in E(S)$ takve da je $a \longrightarrow^n e$ i $b \longrightarrow^n e$. Tada $a, e \in S_\alpha$ i $b, e \in S_\beta$ za neke $\alpha, \beta \in Y$. Odavde postoji $\gamma \in Y$ takav da $ab, e \in S_\gamma$. Kako je S_γ σ_n-prosta polugrupa to $ab \longrightarrow^n e$, dakle važi (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Neka su $a \in S$ i $e \in E(S)$ elementi takvi da je $a \longrightarrow^n e$. Tada prema pretpostavci iz $a \longrightarrow^n e$ i $a \longrightarrow^n e$ sledi $a^2 \longrightarrow^n e$, dakle (ii) važi.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Ova implikacija sledi neposredno.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ i $e \in E(S)$ takve da je $a \longrightarrow^n e$ i $b \longrightarrow^n e$. Odavde je $a \longrightarrow x \longrightarrow^{n-1} e$ i $b \longrightarrow y \longrightarrow^{n-1} e$ za neke $x, y \in S$. Kako je S potpuno π-regularna polugrupa, to elementi $x^p \in G_h, y^q \in G_k$ za neke $h, k \in E(S)$ i neke $p, q \in \mathbb{N}$. Prema Lemi 2.2 dobijamo de je $a \longrightarrow x$ ekvivalentno sa $a \mid h$ i $b \longrightarrow y$ je ekvivalentno sa $b \mid k$. Odavde je $h = uav$ i $k = mbn$ za neke $u, v, m, n \in S^1$. Stavimo da je $i = (vua)^2$ i $f = (bnm)^2$. Lako se proverava da $i, f \in E(S)$, i da je $i^2 = ((vua)^2)^2 = vuavuavuavua = vhua = vuavua = i$. Dalje je $h = h^3 = uavuavuav = uaiv$ odakle $i \mid h$. Kako je na svakoj polugrupi $\mid \ \subseteq \longrightarrow$ to je $i \longrightarrow h$, tj. dobijamo da $h \in SiS$. Na isti način je $k = k^3 = mbnmbnmbn = mfbn$ odakle je $f \mid k$. Dalje, imamo da je $f \longrightarrow k$, tj. da $k \in SfS$. Sada smo dobili da je

$$x^p = x^p h \in x^p SiS \subseteq SiS,$$

znači $i \longrightarrow x$ i dualno imamo da je

$$y^q = y^q k \in y^q SfS \subseteq SfS,$$

tj. $f \longrightarrow y$. Dobili smo da $i \longrightarrow x \longrightarrow^{n-1} e$ i $f \longrightarrow y \longrightarrow^{n-1} e$, tj. dobili smo da $i \longrightarrow^n e$ i $f \longrightarrow^n e$. Na osnovu pretpostavke uslova (iv) je $if \longrightarrow^n e$. Sada imamo da je $if \longrightarrow z \longrightarrow^{n-1} e$ za neki $z \in S$. Iz $if \longrightarrow z$ je $z^r \in SifS$ za neki $r \in \mathbb{N}$. Odakle je

$$z^r \in SifS = S(vua)^2(bnm)^2S \ \subseteq \ SabS,$$

tj. $ab \longrightarrow z$. Znači, dobili smo da je $ab \longrightarrow z \longrightarrow^{n-1} e$, tj. dobili smo da je $ab \longrightarrow^n e$. Dakle, važi (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (v). Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $a \longrightarrow^{n+1} b$. Tada je $a \longrightarrow^n x \longrightarrow b$ za neki $x \in S$. Kako je S potpuno π-regularna polugrupa to $b^i \in G_e$ za neki $e \in E(S)$ i neki $i \in \mathbb{N}$. Prema Lemi 2.2 $x \longrightarrow b$ je ekvivalentno sa $x \mid e$ odakle $x \longrightarrow e$ jer je uvek $\mid \ \subseteq \longrightarrow$. Znači, dobili smo da je $a \longrightarrow^n x \longrightarrow e$, tj. dobili smo da je $a \longrightarrow^{n+1} e$. Sada je $a \longrightarrow y \longrightarrow^n e$ za neki $y \in S$. Iz $a \longrightarrow y$ je $y^k \in SaS$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Sa druge strane iz $y \longrightarrow^n e$ prema uslovu (ii), dobijamo da je $y^k \longrightarrow^n e$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Odavde je $y^k \longrightarrow u \longrightarrow^{n-1} e$ za neki $u \in S$. Iz $y^k \longrightarrow u$ dobijamo da

$$u^m \in Sy^kS \subseteq SaS$$

za neki $m \in \mathbb{N}$, odakle je $a \longrightarrow u$. Znači, dobili smo da je $a \longrightarrow u \longrightarrow^{n-1} e$, tj. da je $a \longrightarrow^{n} e$. Dalje, imamo da je $a \longrightarrow^{n-1} v \longrightarrow e$ za neki $v \in S$. Iz $v \longrightarrow e$ je $e \in SvS$. Kako je

$$b^i = b^i e \in b^i SvS \subseteq SvS$$

to $v \longrightarrow b$. Odavde sledi da je $a \longrightarrow^{n-1} v \longrightarrow b$, tj. da je $a \longrightarrow^{n} b$. Dobili smo da je $\longrightarrow^{n+1} \subseteq \longrightarrow^{n}$ i kako obratna inkluzija uvek važi, imamo da je relacija $\longrightarrow^{n}$ tranzitivna na S.

(v) $\Rightarrow$ (i). Neka je $\longrightarrow^{n}$ tranzitivna relacija na S. Tada prema Teoremi 3 [45] dobijamo da je S polumreža σ_n-prostih polugrupa. $\square$

U nastavku navodimo rezultate u kojima su dati uslovi kada su potpuno π-regularne polugrupe "proste" polugrupe u odnosu na relacije $\longrightarrow$ i $—$, i njihove n-te stepene, za $n \in \mathbb{N}$. Imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.12. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je S potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste σ_n-prosta ako i samo ako je*

$$(\forall f \in E(S))\ \Sigma_n(f) = S.$$

Dokaz. Neka za svaki $f \in E(S)$ važi $\Sigma_n(f) = S$ i neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, kako je S potpuno π-regularna polugrupa imamo da $a^i \in G_e$ i $b^j \in G_f$, za neke $e, f \in E(S)$ i neke $i, j \in \mathbb{N}$. Odavde, imamo da je

$$\Sigma_n(e) = \Sigma_n((a^{2i})^{-1} a^{2i}) \subseteq \Sigma_n(a^2) \subseteq \Sigma_n(a) \subseteq \Sigma_n(e).$$

Dakle, imamo da je

$$\Sigma_n(a) = \Sigma_n(a^2) = \Sigma_n(e),$$

za svaki $a \in S$. Odavde, takođe važi

$$\Sigma_n(a) \subseteq \Sigma_n(f) \subseteq \Sigma_n((b^{2j})^{-1} b^{2j}) \subseteq \Sigma_n(b^{2j}) = \Sigma_n(b).$$

Prema tome dobili smo da je $\Sigma_n(a) \subseteq \Sigma_n(b)$. Na isti način može se dokazati da važi i obratna inkluzija na S, odakle je $\Sigma_n(a) = \Sigma_n(b)$. Dakle, dokazali smo da S jeste σ_n-prosta polugrupa.

Obratno, neka S jeste σ_n-prosta polugrupa. Tada je $\Sigma_n(a) = \Sigma_n(b)$, za svako $a, b \in S$, odakle je jasno $\Sigma_n(a) = \Sigma_n(f)$, za svaki $a \in S$ i svaki $f \in E(S)$. Odavde, neposredno dobijamo da je $\Sigma_n(f) = S$. $\square$

Ako polugrupa S ima nulu tada koristimo sledeće označavanje $S = S^0$. Na osnovu prethodnog rezultata neposredno dobijamo da važi:

Posledica 2.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $S = S^0$ potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste σ_n-prosta polugrupa ako i samo ako je $\Sigma_n(0) = S$.*

Slično kao u prethodnom rezultatu, dajemo uslove pod kojima je potpuno π-regularna polugrupa σ-prosta. Važi sledeći rezultat:

Teorema 2.13. *Neka je S potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste σ-prosta polugrupa ako i samo ako je*

$$(\forall e, f \in E(S))\ (e, f) \in \sigma.$$

D o k a z . Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, kako je S potpuno π-regularna polugrupa imamo da $a^i \in G_e$ i $b^j \in G_f$, za neke $e, f \in E(S)$ i neke $i, j \in \mathbb{N}$. Kako je prema pretpostavci tvrđenja $\Sigma(e) = \Sigma(f)$, to za uočene $e, f \in E(S)$ postoje neki $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $e \longrightarrow^p f \longrightarrow^q e$. Iz $e \longrightarrow^p f$ dobijamo da je $e \longrightarrow^{p-1} x \longrightarrow f$, za neki $x \in S$. Kako je $b^j = fb^j \in SxSb^j \subseteq SxS$, tj. kako je $x \longrightarrow b$ to dobijamo da je $e \longrightarrow^{p-1} x \longrightarrow b$, odnosno, dobijamo da je $e \longrightarrow^p b$. Iz $a^i \in G_e$ i iz poslednjeg je $e \longrightarrow y \longrightarrow^{p-1} b$, za neki $y \in S$. Dalje, imamo da $y^k \in SeS = S(a^i)^{-1}a^iS \subseteq SaS$, za neki $k \in \mathbb{N}$, odakle je $a \longrightarrow y$. Prema tome, dobili smo da je $a \longrightarrow y \longrightarrow^{p-1} b$, tj. dobili smo da je $a \longrightarrow^p b$, za neki $p \in \mathbb{N}$. Dakle, $a \in \Sigma(b)$. Na isti način, iz pretpostavke da $f \longrightarrow^q e$ možemo dokazati da je $b \longrightarrow^q a$, za neki $q \in \mathbb{N}$, tj. možemo dokazati da $b \in \Sigma(a)$. Na osnovu dokazanog je $\Sigma(a) \subseteq \Sigma(b)$ i $\Sigma(b) \subseteq \Sigma(a)$, tj. $\Sigma(a) = \Sigma(b)$. Dakle, dokazali smo da $(a, b) \in \sigma$, tj. da S jeste σ-prosta polugrupa.

Direkten smer tvrđenja je trivijalan. $\square$

Posledica 2.4. *Neka je $S = S^0$ potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste σ-prosta polugrupa ako i samo ako je*

$$(\forall e \in E(S))\ \ (e, 0) \in \sigma.$$

Napomena 1. Uslov $(\forall e \in E(S))\ (e, 0) \in \sigma$ je ekvivalentan uslovu $\Sigma(0) = S$.

Još jedan od pomoćnih rezultata koji koristimo u ovom odeljku je sledeća lema.

Lema 2.3. *Neka je S polugrupa i neka je $b \in S$ element takav da je $b^j \in G_f$ za neki $f \in E(S)$ i neki $j \in \mathbb{N}$. Tada $a \longrightarrow_l b$ ako i samo ako $a \mid_l f$, za svaki $a \in S$.*

D o k a z . Neka su $a, b \in S$ elementi takvi da je $a \longrightarrow_l b$. Tada iz pretpostavke leme i Munnove leme imamo da $b^{jk} \in G_f \cap Sa$ za neki $k \in \mathbb{N}$, odakle $f = (b^{jk})^{-1}b^{jk} \in (b^{jk})^{-1}Sa \subseteq Sa$. Znači, dobili smo da $a \mid_l f$.

Obratno, neka $a \mid_l f$ u S. Tada je $b^j = b^j f \in b^j Sa \subseteq Sa$, za neki $j \in \mathbb{N}$. Dakle, $a \longrightarrow_l b$. $\square$

U nastavku navodimo teoreme u kojima su dati uslovi kada je potpuno π-regularna polugrupa λ_n-, odnosno, λ-prosta polugrupa. Teoreme su slične sa Teoremama 2.12 i 2.13.

Teorema 2.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je S potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste λ_n-prosta polugrupa ako i samo ako je*

$$(\forall a \in S)(\forall f \in E(S)) \ \ (a, f) \in \lambda_n.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi i neka za svaki $f \in E(S)$ važi $\Lambda_n(a) = \Lambda_n(f)$. Kako je S potpuno π-regularna polugrupa to $a^i \in G_e$ i $b^j \in G_f$, za neke $e, f \in E(S)$ i neke $i, j \in \mathbb{N}$. Na osnovu prethodnog imamo da je

$$\Lambda_n(a) = \Lambda_n(e) = \Lambda_n((a^{2i})^{-1}a^{2i}) \subseteq \Lambda_n(a^2) \subseteq \Lambda_n(a) = \Lambda_n(e).$$

Dakle, dobili smo da je $\Lambda_n(a) = \Lambda_n(a^2)$, za svako $a \in S$. Dalje, koristeći pretpostavku tvrđenja, važi

$$\Lambda_n(a) = \Lambda_n(f) = \Lambda_n((b^{2j})^{-1}b^{2j}) \subseteq \Lambda_n(b^{2j}) = \Lambda_n(b),$$

i kako je

$$\Lambda_n(b) = \Lambda_n(b^{2j}) \subseteq \Lambda_n(f),$$

dobijamo da je $\Lambda_n(a) = \Lambda_n(b)$. Dakle, S jeste λ_n-prosta polugrupa.

Direktan smer tvrđenja sledi trivijalno. $\square$

Napomena 2. Uslov

$$(\forall a \in S)(\forall f \in E(S)) \ \ (a, f) \in \lambda_n$$

je ekvivalentan sa jednim od sledeća dva uslova

(i) $(\forall e, f \in E(S)) \ \ (e, f) \in \lambda_n \ \& \ (\forall a \in S) \ (a, a^2) \in \lambda_n$;

(ii) $(\forall f \in E(S)) \ \ \Lambda_n(f) = S$.

Teorema 2.15. *Neka je S potpuno π-regularna polugrupa. Tada S jeste λ-prosta polugrupa ako i samo ako je*

$$(\forall e, f \in E(S)) \ (e, f) \in \lambda.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi. Tada, kako je S potpuno π-regularna polugrupa imamo da $a^i \in G_e$ i $b^j \in G_f$, za neke $e, f \in E(S)$ i neke $i, j \in \mathbb{N}$. Kako je prema pretpostavci tvrđenja $\Lambda(e) = \Lambda(f)$, to za uočene $e, f \in E(S)$ postoje neki $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $e \longrightarrow_l^p f \longrightarrow_l^q e$. Iz $e \longrightarrow_l^p f$ dobijamo da je $e \longrightarrow_l^{p-1} x \longrightarrow_l f$, za neki $x \in S$. Kako je $b^j = b^j f \in b^j Sx \subseteq Sx$, tj. kako je $x \longrightarrow_l b$ to dobijamo da je $e \longrightarrow_l^{p-1} x \longrightarrow_l b$, odnosno, dobijamo da je $e \longrightarrow_l^p b$. Iz $a^i \in G_e$ i iz poslednjeg je $e \longrightarrow_l y \longrightarrow_l^{p-1} b$, za neki $y \in S$. Dalje, imamo da $y^k \in Se = S(a^i)^{-1}a^i \subseteq Sa$, za neki $k \in \mathbb{N}$, odakle je $a \longrightarrow_l y$. Prema tome, dobili smo da je $a \longrightarrow_l y \longrightarrow_l^{p-1} b$, tj. dobili smo da je $a \longrightarrow_l^p b$, za neko $p \in \mathbb{N}$. Dakle, $a \in \Lambda(b)$. Na isti način, iz pretpostavke da $f \longrightarrow_l^q e$ možemo dokazati da je $b \longrightarrow_l^q a$, za neki $q \in \mathbb{N}$, tj. možemo dokazati da $b \in \Lambda(a)$. Na osnovu dokazanog je $\Lambda(a) \subseteq \Lambda(b)$ i $\Lambda(b) \subseteq \Lambda(a)$, tj. $\Lambda(a) = \Lambda(b)$. Dakle, dokazali smo da $(a, b) \in \lambda$, tj. da S jeste λ-prosta polugrupa.

Direkten smer tvrđenja je trivijalan. $\square$

Na kraju, istaknimo još jednom da su rezultati predstavljeni u ovoj glavi originalni. Takođe, veći broj je izlagan na međunarodnim konferencijama i publikovan u inostranim časopisima.

Glava 3

Poddirektna razlaganja polugrupa

Predmet proučavanja ove glave je jedan od glavnih metoda razlaganja ne samo u Teoriji polugrupa, već i u algebri uopšte. To je metod poddirektnog razlaganja algebarskih struktura. Razlaganje algebri u poddirektan proizvod predstavlja jedan od najefikasnijih metoda za izučavanje njihove strukture. Poddirektne i povratne proizvode polugrupa razmatrali su i opisivali N. Kimura [91], [92], 1958., M.Yamada i N. Kimura [175], 1958., M. Yamada [171], 1964., [172], 1965., [173], 1967., M. S. Putcha [132], 1973., M. Ćirić i S. Bogdanović [40], 1990., [41], 1993., [45], [46], 1998., [47], 1998., S. J. L. Kopamu [98], 1994., X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo [137], 1998. godine, i drugi.

Polazeći od ideja S. J. L. Kopamua [98] u prvom odeljku su definisane relacije kongruencije koje su opštije od onih koje je definisao S. J. L. Kopamu [98]. Dokazano je da se u nekim slučajevima pomenute relacije kongruencije poklapaju. Dalje, koristeći navedene relacije kongruencije opisana su poddirektna i povratna razlaganja idealskih-ekstenzija regularnih, potpuno regularnih, potpuno Arhimedovih polugrupa, kao i u specijalnom slučaju poddirektna i povratna razlaganja regularnih, potpuno regularnih polugrupa i tako dalje.

U drugom odeljku su relacije, koje su definisane u prvom odeljku, proširene do novih relacija koje se definišu pomoću najvećeg polumrežnog razlaganja polugrupa i za ove relacije je dokazano da su takođe relacije kongruencije i da se pomoću njih mogu konstruisati poddirektni i povratni proizvodi regularnih, potpuno regularnih polugrupa i tako dalje. Rezultati S. J. L. Kopamua [98] su u ovom odeljku dokazani na jednostavniji način.

M. S. Putcha u [132] i X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo u [137] su dali veoma interesantne opise nil-ekstenzija pravougaonih grupa u terminima poddirektnih i povratnih proizvoda. Pomenute povratne i poddirektne dekompozicije mogu biti okarakterisane pomoću relacija kongruencije koje su definisane u prethodnim odeljcima. U trećem odeljku je dat opis nil-ekstenzija pravougaonih grupa pomoću poddirektnih i povratnih proizvoda polugrupa, takođe, dat je opis faktor polugrupa koje odgovaraju pomenutim dekompozicijama. Dokazi M. S. Putchae [132] i X. M. Rena, K. P. Shuma i Y. Q. Guoa [137] u ovom odeljku su zamenjeni jednostavnijim i konstruktivnijim dokazima.

Napomenimo, na kraju, da su oznake i osnovni pojmovi koje ćemo koristiti u ovoj glavi u skladu sa oznakama i osnovnim pojmovima koje u svojim knjigama i radovima koriste S. Bogdanović i M. Ćirić [21].

Rezultati predstavljeni u ovoj glavi su izlagani na stranim i domaćim naučnim konferencijama, a neki od njih su publikovani u inostranim časopisima, na primer u radu [52], iz 1999. godine.

3.1. Relacije $\overline{\mathcal{K}}_{l,X}, \overline{\mathcal{K}}_{r,X}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,X}$

S. J. L. Kopamu [98] je na regularnoj polugrupi definisao relacije kongruencije i pomoću njih je dokazao da je svaka regularna polugrupa izomorfna povratnom proizvodu levo reduktivne i desno reduktivne polugrupe. Koristeći takav koncept, u ovom odeljku su definisane neke nove relacije kongruencije i pomoću njih su opisani poddirektni i povratni proizvodi idealskih-ekstenzija regularnih polugrupa i nekih drugih tipova polugrupa.

Neka je X neprazan podskup polugrupe S. Tada su sa

$$L(X) = XS^1, \quad R(X) = S^1X \;\; \text{i} \;\; J(X) = S^1XS^1,$$

označeni redom *levi*, *desni* i *dvostrani ideal* polugrupe S *generisani skupom* X. Za podskup X polugrupe S kažemo da je *duo podskup* polugrupe S ako za njega važi da je

$$L(X) = R(X),$$

tj. ako važi da je $S^1X = XS^1$. Jasno je da je

$$L(X) = R(X) = J(X),$$

za svaki duo podskup X polugrupe S. Sa druge strane, ako je K proizvoljan ideal polugrupe S, tada je

$$L(K) = R(K) = K,$$

tj. svaki ideal polugrupe S je njen duo podskup.

Neka je skup X neprazan podskup polugrupe S. Definišimo na S relacije $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \mathcal{K}_{l,X} \;&\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)\; xa = xb,\\
(a,b) \in \mathcal{K}_{r,X} \;&\Leftrightarrow\; (\forall y \in X)\; ay = by,\\
(a,b) \in \mathcal{K}_{d,X} \;&\Leftrightarrow\; (\forall x, y \in X)\; xay = xby.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da ovako definisane relacije jesu relacije ekvivalencije na S. Takođe, relacija $\mathcal{K}_{l,X}$ je desna kongruencija, relacija $\mathcal{K}_{r,X}$ je leva kongruencija i obe relacije $\mathcal{K}_{l,X}$ i $\mathcal{K}_{r,X}$ su sadržane u relaciji $\mathcal{K}_{d,X}$. Prirodno se postavlja pitanje: Koje uslove treba da zadovoljava skup X da bi relacije $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ bile kongruencije na polugrupi S? Jedan od dovoljnih uslova koje treba da zadovoljava skup X da bi relacije $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ bile kongruencije na S, naveden je u sledećoj lemi.

Lema 3.1. *Ako je X duo podskup polugrupe S tada su $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ relacije kongruencije na S.*

Osim toga, $\mathcal{K}_{i,X} = \mathcal{K}_{i,K}$, za svako $i \in \{l, r, d\}$, gde je $K = J(X)$.

Dokaz. Tvrđenje leme dokazujemo samo za relaciju $\mathcal{K}_{d,X}$. Tvrđenja koja se odnose na relacije $\mathcal{K}_{l,X}$ i $\mathcal{K}_{r,X}$ dokazuju se na isti način.

Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,X}$. Neka je $c \in S$ proizvoljan element. Tada za svaki $x, y \in X$ imamo da je $xay = xby$. Kako je X duo podskup polugrupe S, dobijamo da je $xc = sz$, za neki $z \in X$ i neki $s \in S^1$. Dakle, imamo da je

$$x(ca)y = (xc)ay = (sz)ay = s(zay) = s(zby) = (sz)by = (xc)by = x(cb)y.$$

Analogno dokazujemo da je $x(ac)y = x(bc)y$. Na osnovu prethodnog, $\mathcal{K}_{d,X}$ je levo i desno saglasna relacija i kako je ona relacija ekvivalencije, dobijamo da je $\mathcal{K}_{d,X}$ kongruencija na polugrupi S.

Dokažimo sada drugi deo tvrđenja leme. Kako je $X \subseteq K$, to dobijamo da je $\mathcal{K}_{d,K} \subseteq \mathcal{K}_{d,X}$. Dokažimo da važi i obratna inkluzija. Uzmimo elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,X}$. Neka su $p, q \in K$ proizvoljni elementi. Kako je $K = XS^1 = S^1X$, to imamo da je $p = sx$ i $q = yt$, za neke $x, y \in X$ i neke $s, t \in S^1$. Dalje, imamo da je

$$paq = (sx)a(yt) = s(xay)t = s(xby)t = (sx)b(yt) = pbq,$$

tj. da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$, što je i trebalo dokazati. Dakle, dobili smo da je $\mathcal{K}_{d,X} = \mathcal{K}_{d,K}$. $\square$

Ako je $X = S$, tada umesto oznaka $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$ koristimo oznake $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}_d$, tim redom. Kongruencije $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}_d$ uvedene su u knjizi A. H. Clifforda i G. B. Prestona [36] i radu B. M. Scheina [140], a intenzivno su izučavane u radu S. J. L. Kopamua [98].

Takođe, na polugrupi S možemo definisati još neke relacije.

Neka je skup X duo podskup polugrupe S i neka je $K = J(X)$. Označimo sa ρ_K Reesovu kongruenciju na S generisanu skupom K. Tada na S možemo definisati i sledeće relacije:

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,X} = \mathcal{K}_{l,X} \ \cap \ \rho_K,$$
$$\overline{\mathcal{K}}_{r,X} = \mathcal{K}_{r,X} \ \cap \ \rho_K,$$
$$\overline{\mathcal{K}}_{d,X} = \mathcal{K}_{d,X} \ \cap \ \rho_K.$$

Neka je polugrupa S idealska ekstenzija polugrupe K, tada je $K = J(K)$. Odavde su napred definisane relacije oblika

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \mathcal{K}_{l,K} \ \cap \ \rho_K,\ \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \mathcal{K}_{r,K} \ \cap \ \rho_K \text{ i } \overline{\mathcal{K}}_{d,K} = \mathcal{K}_{d,K} \ \cap \ \rho_K.$$

Kako je K ideal od S, to je on duo podskup od S odakle na osnovu Leme 3.1 dobijamo da su $\mathcal{K}_{l,K}$, $\mathcal{K}_{r,K}$ i $\mathcal{K}_{d,K}$ kongruencije na S. Presek ovih kongruencija sa Reesovom kongruencijom generisanom idealom K je takođe kongruencija, odakle dobijamo da su $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ kongruencije na S.

U nastavku ćemo razmatrati osobine kongruencija $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ na različitim tipovima polugrupa.

Neka je S idealska ekstenzija polugrupe K i neka je $E = E(S)$. Za ideal K kažemo da je *pun ideal* polugrupe S ako je $E \subseteq K$.

Neka je S idealska ekstenzija regularne polugrupe K i neka su $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{H}$ Greenove ekvivalencije na S. Imamo da važi sledeća lema:

Lema 3.2. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K i neka je $E = E(S)$. Tada je*

$$\mathcal{K}_{l,K} = \mathcal{K}_{l,E}, \quad \mathcal{K}_{r,K} = \mathcal{K}_{r,E} \quad i \quad \mathcal{K}_{d,K} = \mathcal{K}_{d,E}.$$

D o k a z . Dokažimo da je $\mathcal{K}_{d,K} = \mathcal{K}_{d,E}$. Ostale jednakosti dokazuju se na isti način.

Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K. Tada je $E \subseteq K$ i kako je K regularna polugrupa to je $KE = EK = K$, tj. E je duo podskup od K. Dokažimo da je E duo podskup i od S. Zaista, imamo da je

$$S^1E \subseteq S^1K \subseteq K = EK \subseteq ES^1.$$

Na isti način se dokazuje i da je $ES^1 \subseteq S^1E$ odakle dobijamo da je $S^1E = ES^1$. Znači, E je duo podskup od S. Odavde, prema Lemi 3.1 relacija $\mathcal{K}_{d,E}$ jeste kongruencija na S.

Dalje, iz $E \subseteq K$ neposredno sledi da je $\mathcal{K}_{d,K} \subseteq \mathcal{K}_{d,E}$. Dokažimo da važi i obratna inkluzija. Neka su $a, b \in S$ takvi da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,E}$. Odavde je $eaf = ebf$, za svaki $e, f \in E$. Dalje, uzmimo proizvoljno $x, y \in K$. Kako je K regularna polugrupa to postoje $x', y' \in K$ takvi da je $x' \in V(x)$, $y' \in V(y)$ i $xx', x'x, yy', y'y \in E$. Na osnovu prethodnog imamo da važi

$$xay = (xx'x)a(yy'y) = x(x'xayy')y = x(x'xbyy')y = (xx'x)b(yy'y) = xby.$$

Prema tome, $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$. Dakle, dobili smo da je $\mathcal{K}_{d,E} \subseteq \mathcal{K}_{d,K}$, tj. da je $\mathcal{K}_{d,K} = \mathcal{K}_{d,E}$. $\square$

Kao posledicu prethodnog rezultata neposredno dobijamo jednakost sledećih relacija.

Posledica 3.1. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K i neka je $E = E(S)$. Tada je*

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}, \quad \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \overline{\mathcal{K}}_{r,E} \quad i \quad \overline{\mathcal{K}}_{d,K} = \overline{\mathcal{K}}_{d,E}.$$

Ako je cela polugrupa S regularna, tj. ako je $S = K$ tada se relacije $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}, \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ poklapaju sa relacijama $\mathcal{K}_{l,K}, \mathcal{K}_{r,K}$ i $\mathcal{K}_{d,K}$ na polugrupi S, tim redom. Dakle, sada kao posledicu dobijamo da se relacije koje je uveo S. J. L. Kopamu [98] poklapaju sa relacijama kongruencije $\mathcal{K}_{l,E}, \mathcal{K}_{r,E}$ i $\mathcal{K}_{d,E}$ na regularnoj polugrupi S.

Posledica 3.2. *Neka je S regularna polugrupa. Tada je*

$$\mathcal{K}_{l,E} = \mathcal{K}_l, \quad \mathcal{K}_{r,E} = \mathcal{K}_r \quad i \quad \mathcal{K}_{d,E} = \mathcal{K}_d.$$

Odnos koji postoji između Greenovih ekvivalencija i kongruencija $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, na polugrupama koje imaju regularan ideal, dat je sledećom lemom.

Lema 3.3. *Neka je S polugrupa sa regularnim idealom K. Tada je*

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \subseteq \mathcal{L}, \quad \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \subseteq \mathcal{R} \quad i \quad \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \mathcal{D}.$$

Dokaz. Dokazaćemo da je $\overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \mathcal{D}$. Ostale inkluzije mogu biti dokazane na isti način.

Uzmimo $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$. Tada $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$ i $(a, b) \in \rho_K$. Ako je $a = b$, tada je jasno da $(a, b) \in \mathcal{D}$. Pretpostavimo sada da je $a \neq b$. Tada iz $(a, b) \in \rho_K$ sledi da $a, b \in K$. Kako je K regularna polugrupa, to postoje elementi $a', b' \in K$ takvi da je $a' \in V(a)$ i $b' \in V(b)$. Neka je $c = ba'a$. Kako je $xay = xby$, za svaki $x, y \in K$, to imamo da je

$$a = aa'a = aa'aa'a = aa'ba'a = aa'c \in Sc,$$

i

$$c = ba'a \in Sa.$$

Odavde, $(a, c) \in \mathcal{L}$. Takođe, imamo da je

$$b = bb'b = bb'bb'b = bb'ab'b = bb'aa'ab'b = bb'ba'ab'b = ba'ab'b = cb'b \in cS,$$

i

$$c = ba'a \in bS.$$

Odavde, $(c, b) \in \mathcal{R}$. Iz $(a, c) \in \mathcal{L}$ i $(c, b) \in \mathcal{R}$ dobijamo da $(a, b) \in \mathcal{L} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{D}$. Dakle, dokazali smo da inkluzija $\overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \mathcal{D}$ važi. $\square$

Ako je cela polugrupa regularna, tj. ako je $S = K$, tada na osnovu prethodnog rezultata neposredno dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.3. *Neka je S regularna polugrupa. Tada je*

$$\mathcal{K}_l \subseteq \mathcal{L}, \quad \mathcal{K}_r \subseteq \mathcal{R} \quad i \quad \mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{D}.$$

Jedna od važnih osobina relacija kongruencije jeste njihova permutabilnost. Naime, na osnovu Teoreme 1.6 ako su relacije kongruencije definisane na proizvoljnoj polugrupi S permutabilne i ako se presek tih relacija poklapa sa identičkom relacijom na polugrupi S tada je polugrupa S izomorfna povratnom proizvodu svojih faktor polugrupa u odnosu na date permutabilne relacije kongruencije. Na polugrupi koja ima regularan ideal važi sledeći rezultat.

Teorema 3.1. *Neka je S polugrupa sa regularnim idealom K. Tada je*

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \quad i \quad \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \Delta_S.$$

Dokaz. Prema definiciji relacija $\overline{\mathcal{K}}_{i,K}$, za $i \in \{l, r, d\}$, imamo da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}, \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$. Prema tome, imamo da je

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$$

i

$$\overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{d,K}.$$

Dakle, ostaje da se dokaže da važe i obratne inkluzije

$$\overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K}.$$

Uzmimo sada elemente $a, b \in S$ takve da $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$. Tada $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$ i $(a, b) \in \rho_K$. Ako je $a = b$ tada je

$$(a, b) \in \Delta_S = \Delta_S \cdot \Delta_S \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$$

i

$$(a, b) \in \Delta_S = \Delta_S \cdot \Delta_S \subseteq \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K},$$

što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo sada da je $a \neq b$. Tada iz $(a, b) \in \rho_K$ sledi da $a, b \in K$, i kako je K regularna polugrupa, to imamo da postoje $a', b' \in K$ takvi da je $a' \in V(a)$ i $b' \in V(b)$. Neka je $c = ba'a$ i $d = aa'b$. Odavde, za proizvoljne $x, y \in K$ kako $x, y, a'a, bb', a'ay \in K$ iz $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$ imamo da je

$$xa = xaa'a = xba'a = xc,$$

$$cy = ba'ay = bb'ba'ay = bb'aa'ay = bb'ay = bb'by = by.$$

Prema tome $(a, c) \in \mathcal{K}_{l,K} \cap \rho_K = \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $(c, b) \in \mathcal{K}_{r,K} \cap \rho_K = \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$, tj. dobili smo da $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$.

Sa druge strane, za proizvoljne $u, v \in K$ kako $u, v, aa', uaa', b'b \in K$ iz $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$ imamo da je

$$av = aa'av = aa'bv = dv,$$

$$ud = uaa'b = uaa'bb'b = uaa'ab'b = uab'b = ubb'b = ub.$$

Dakle, $(a, d) \in \mathcal{K}_{r,K} \cap \rho_K = \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $(d, b) \in \mathcal{K}_{l,K} \cap \rho_K = \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, tj. dobili smo da $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Znači, dokazali smo da je

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{d,K}.$$

Na kraju, uzmimo $a, b \in S$ takve da $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$. Tada $(a, b) \in \mathcal{K}_{l,K}$, $(a, b) \in \mathcal{K}_{r,K}$ i $(a, b) \in \rho_K$. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada $a, b \in K$ i kako je K regularna polugrupa to postoje $a', b' \in K$ takvi da je $a' \in V(a)$ i $b' \in V(b)$. Odavde, kako $aa', b'b \in K$ i kako je $\mathcal{K}_{l,K}, \mathcal{K}_{r,K} \subseteq \mathcal{K}_{d,K}$, to iz $(a, b) \in \mathcal{K}_{l,K}$ i iz $(a, b) \in \mathcal{K}_{r,K}$ imamo da je

$$a = aa'a = aa'b = aa'bb'b = aa'ab'b = ab'b = bb'b = b,$$

što je u kontradikciji sa polaznom predpostavkom. Prema tome, zaključujemo da je $a = b$, što znači da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \Delta_S$. $\square$

Polugrupa S je *levo reduktivna* ako $xa = xb$, za svaki $x \in S$, povlači $a = b$, tj. ako je $\mathcal{K}_l = \Delta_S$, a *desno reduktivna* ako $ay = by$, za svaki $y \in S$, povlači $a = b$, tj. ako je $\mathcal{K}_r = \Delta_S$. Polugrupa S je *reduktivna* ako je i levo i desno reduktivna, tj. ako je $\mathcal{K}_d = \Delta_S$.

Teorema 3.2. *Polugrupa S je idealska ekstenzija regularne polugrupe ako i samo ako je povratni proizvod idealske ekstenzije levo reduktivne regularne polugrupe i idealske ekstenzije desno reduktivne regularne polugrupe u odnosu na idealsku ekstenziju reduktivne regularne polugrupe.*

Dokaz. Neka je polugrupa S idealska ekstenzija regularne polugrupe K. Tada prema Teoremi 3.1 S je povratni proizvod polugrupa $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ u odnosu na polugrupu $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$.

Dokažimo, prvo, da je polugrupa $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ idealska ekstenzija levo reduktivne regularne polugrupe. Neka je φ prirodni homomorfizam sa S na $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ indukovan kongruencijom $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Kako je homomorfna slika idela takođe ideal, to imamo da je $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ ideal od $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, tj. $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ je idealska ekstenzija polugrupe $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Takođe, kako je K regularna polugrupa to je i $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ regularna polugrupa kao homomorfna slika regularne polugrupe. Ostaje da se još dokaže da je $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ levo reduktivna polugrupa.

Neka su $a, b \in K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ elementi takvi da je $xa = xb$, za svaki $x \in K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Tada je $a = u\overline{\mathcal{K}}_{l,K}, b = v\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $x = t\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za neke $u, v, t \in K$. Iz $xa = xb$, za svaki $x \in K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, dobijamo da je $(tu, tv) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za svaki $t \in K$. Odavde, $(tu, tv) \in \mathcal{K}_{l,K}$ i $(tu, tv) \in \rho_K$, za svaki $t \in K$, tj. imamo da je $ytu = ytv$, za svaki $y, t \in K$. Neka je $z \in K$ proizvoljan element. Tada, kako je K regularna polugrupa, to postoji element $z' \in K$ takav da je $z' \in V(z)$, i pritom važi

$$zu = (zz'z)u = z(z'zu) = z(z'zv) = (zz'z)v = zv.$$

Prema tome, $(u, v) \in \mathcal{K}_{l,K}$ i kako $u, v \in K$ to $(u, v) \in \rho_K$, odakle $(u, v) \in \mathcal{K}_{l,K} \cap \rho_K = \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Na osnovu dokazanog je $u\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = v\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, tj. $a = b$. Dakle, dobili smo da je $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ levo reduktivna polugrupa. Znači, $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ je idealska ekstenzija levo reduktivne regularne polugrupe $K/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$.

Na isti način se dokazuje da je $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ idealska ekstenzija desno reduktivne regularne polugrupe $K/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$, i da je $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ idealska ekstenzija reduktivne regularne polugrupe $K/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$.

Obratno, neka je polugrupa $S \cong P \times Q$ povratni proizvod polugrupa P i Q u odnosu na polugrupu H, gde je P idealska ekstenzija levo reduktivne regularne polugrupe K, Q je idealska ekstenzija desno reduktivne regularne polugrupe T i H je idealska ekstenzija reduktivne regularne polugrupe J. Neka je ψ homomorfizam koji P slika na H i ϕ homomorfizam koji Q slika na H. Jasno je da je $K\psi \subseteq J$ i da je $T\phi \subseteq J$.

Uočimo skup $W = K \times T$. Kako je skup K ideal od P i skup T ideal od Q, to se lako proverava da je W ideal od S. Dakle, S je idealska ekstenzija polugrupe W. Da bi kompletirali dokaz teoreme potrebno je još dokazati da je W regularna polugrupa. Neka je $a \in W$ proizvoljan element. Tada je $a = (x, y)$, za neke $x \in K$ i $y \in T$, i pritom je $x\psi = y\phi$. Kako $x \in K$ i K je regularna polugrupa, to postoji element $x' \in K$ takav da je $x' \in V(x)$. Takođe, kako $y \in T$ i T je regularna polugrupa, to postoji element $y' \in T$ takav da je $y' \in V(y)$. Neka je sada $a' = (x', y')$. Za ovako izabran element imamo da je

$$aa'a = (x, y)(x', y')(x, y) = (xx'x, yy'y) = (x, y) = a.$$

Takođe, iz $x\psi = y\phi$ je $(xx'x)\psi = (yy'y)\phi$, odakle je $(x\psi)(x'\psi)(x\psi) = (y\phi)(y'\phi)(y\phi)$, tj. $(y\phi)(x'\psi)(y\phi) = (y\phi)(y'\phi)(y\phi)$. Odavde, kako $x\psi, y\phi \in J$ i J je reduktivna polugrupa dobijamo da je $x'\psi = y'\phi$. Znači, element $a' = (x', y') \in W$, jer je $x'\psi = y'\phi$. Dakle, za svaki $a \in W$ postoji $a' \in W$ takav da je $a = aa'a$, tj. W je regularna polugrupa.

Ovim je dokaz teoreme kompletiran. □

Kao posledice prethodne Teoreme 3.2 imamo da važe sledeća dva rezultata.

Posledica 3.4. *Polugrupa S je nil-ekstenzija regularne polugrupe ako i samo ako je povratni proizvod nil-ekstenzije levo reduktivne regularne polugrupe i nil-ekstenzije desno reduktivne regularne polugrupe u odnosu na nil-ekstenziju reduktivne regularne polugrupe.*

Posledica 3.5. *Polugrupa S je nilpotentna ekstenzija regularne polugrupe ako i samo ako je povratni proizvod nilpotentne ekstenzije levo reduktivne regularne polugrupe i nilpotentne ekstenzije desno reduktivne regularne polugrupe u odnosu na nilpotentnu ekstenziju reduktivne regularne polugrupe.*

Ako je cela polugrupa regularna, tj. ako je $S = K$, tada se rezultat S. J. L. Kopamua [98] dobija kao neposredna posledica Teoreme 3.2.

Posledica 3.6. *Polugrupa S je regularna ako i samo ako je povratni proizvod levo reduktivne regularne polugrupe i desno reduktivne regularne polugrupe u odnosu na reduktivnu regularnu polugrupu.*

Koristeći kongruencije definisane na početku ovog odeljka dokazano je da je svaka idealska-ekstenzija regularne polugrupe izomorfna povratnom proizvodu svojih faktor polugrupa $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ u odnosu na polugrupu $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$. Takođe, ako je S polugrupa sa punim regularnim idealom K, Lemom 3.2 je dokazano da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}, \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \overline{\mathcal{K}}_{r,E}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K} = \overline{\mathcal{K}}_{d,E}$. Zato je interesantno opisati strukturu polugrupe pomoću strukture odgovarajućih faktora njenog povratnog razlaganja. U tom smislu u nastavku dajemo vezu koja postoji između skupa $E = E(S)$ svih idempotenata polugrupe S i skupova $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$, $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ i $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ idempotenata faktor polugrupa u pomenutom povratnom razlaganju punih ekstenzija regularnih polugrupa. Uočene su lepe i zanimljive veze između navedenih skupova.

Imamo da važi sledeći rezultat.

Teorema 3.3. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je desno kvazi-normalna traka;*

(ii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ je desno kvazi-normalna traka;*

(iii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ je desno regularna traka.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $E(S)$ desno kvazi-normalna traka. Tada je $efg = egfg$, za sve $e,f,g \in E(S)$. Neka su $e',f',g' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ proizvoljni elementi i neka je $e' = e\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $f' = f\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $g' = g\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za neke $e,f,g \in E(S)$. Za $e',f',g' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ imamo da je

$$e'f'g' = (e\overline{\mathcal{K}}_{l,K})(f\overline{\mathcal{K}}_{l,K})(g\overline{\mathcal{K}}_{l,K}) = (efg)\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = (egfg)\overline{\mathcal{K}}_{l,K} =$$

$$(e\overline{\mathcal{K}}_{l,K})(g\overline{\mathcal{K}}_{l,K})(f\overline{\mathcal{K}}_{l,K})(g\overline{\mathcal{K}}_{l,K}) = e'g'f'g'.$$

Dakle, $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ je desno kvazi-normalna traka.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno kvazi-normalna traka. Tada je $e'f'g' = e'g'f'g'$, za sve $e',f',g' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$. Neka su $e,f,g \in E(S)$ proizvoljni elementi. Tada je $e\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = e'$, $f\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = f'$ i $g\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = g'$. Sada, iz $e'f'g' = e'g'f'g'$ imamo da je $(efg, egfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $(efg, egfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$ dobijamo da $(efg, egfg) \in \mathcal{K}_{l,E}$. Odavde je $hefg = hegfg$, za svaki $h \in E(S)$. Ako je $h = e = f$ na osnovu napred navedenog dobijamo da je $eg = (eg)^2$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i za $h = e$ iz $hefg = hegfg$ dobijamo da je $efg = egfg$, za sve $e,f,g \in E(S)$, tj. dobijamo da je $E(S)$ desno kvazi-normalna traka.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Neka je $E(S)$ desno kvazi-normalna traka. Tada je $efg = egfg$, za sve $e,f,g \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i na S je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, to iz $efg = egfg$ dobijemo da je $(fg, gfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $f,g \in E(S)$. Kao u dokazu Teoreme 3.5 imamo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$-klasa nekog idempotenta iz S, to iz $(fg, gfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno regularna traka.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno regularna traka. Tada $(fg, gfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $f,g \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $(fg, gfg) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$ imamo da je $(fg, gfg) \in \mathcal{K}_{l,E}$, za sve $f,g \in E(S)$. Odavde je $efg = egfg$, za sve $e,f,g \in E(S)$. Ako je $e = f$ tada na osnovu prethodnog dobijamo da je $eg = (eg)^2$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i iz $efg = egfg$, za sve $e,f,g \in E(S)$, dobijamo da je $E(S)$ desno kvazi-normalna traka. $\square$

Dualno, imamo da važi:

Teorema 3.4. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je levo kvazi-normalna traka;*
(ii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ je levo kvazi-normalna traka;*
(iii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ je levo regularna traka.*

Ako je S regularna polugrupa tada kao neposredne posledice Teoreme 3.3 i Teoreme 3.4, tim redom, dobijamo sledeća dva rezultata.

Posledica 3.7. *Neka je S regularna polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je desno kvazi-normalna traka;*
(ii) *$E(S/\mathcal{K}_l)$ je desno kvazi-normalna traka;*
(iii) *$E(S/\mathcal{K}_l)$ je desno regularna traka.*

Posledica 3.8. *Neka je S regularna polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je levo kvazi-normalna traka;*
(ii) *$E(S/\mathcal{K}_r)$ je levo kvazi-normalna traka;*
(iii) *$E(S/\mathcal{K}_r)$ je levo regularna traka.*

U nastavku navodimo još neke karakterizacije strukture faktor polugrupa kod povratnog razlaganja polugrupe sa punim regularnim idealom.

Teorema 3.5. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je normalna traka;*
(ii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ je desno normalna traka;*
(iii) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ je levo normalna traka;*
(iv) *$E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ je polumreža.*

D o k a z. (i) $\Rightarrow$ (iv). Neka je $E(S)$ normalna traka i neka je $\varphi : S \longrightarrow S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ prirodni homomorfizam indukovan kongruencijom $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ na S. Jasno je da za $e \in E(S)$ važi $e\varphi \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$. Dokažimo da važi i obrat, tj. dokažimo da za proizvoljan $e' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ postoji $e \in E(S)$ takav da je $e\varphi = e'$. Uzmimo proizvoljno $e' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$. Kako je φ epimorfizam to postoji neki $a \in S$ takav da je $a\varphi = e'$. Možemo razlikovati sledeće slučajeve:

Ako $a \notin K$, tada $\{a\}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$-klasa elementa a i ona je podpolugrupa od S, jer je $a\varphi = e' \in E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ što znači da je $a \in E(S)$.

Neka je $a \in K$, i neka je φ' restrikcija od φ na K, i $\theta = \ker \varphi'$. Jasno je da je θ kongruencija na K i da e' jeste θ-klasa elementa a. Kako je K regularna polugrupa to θ-klasa e' sadrži idempotent $e \in E(K)$ i pritom je $e\varphi = e\varphi' = e'$ na osnovu definicije preslikavanja φ'.

Dakle, dokazali smo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ jeste neka $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$-klasa nekog idempotenta polugrupe S.

Sada, kako je $E(S)$ normalna traka imamo da je $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Odavde, prema Lemi 3.2 i činjenici da je $E(S) \subseteq K$ na osnovu definicije relacije $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ dobijamo da je $(gh, hg) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, za sve $g, h \in E(S)$. Dalje, kako na osnovu napred dokazanog imamo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$-klasa nekog idempotenta iz S, to iz $(gh, hg) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ polumreža.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ polumreža. Tada imamo da je $(gh, hg) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, za sve $g, h \in E(S)$. Odave je $(gh, hg) \in \mathcal{K}_{d,K}$ i $(gh, hg) \in \rho_K$, za sve $g, h \in E(S)$. Kako na S važi $\mathcal{K}_{d,K} = \mathcal{K}_{d,E}$ to iz $(gh, hg) \in \mathcal{K}_{d,E}$ dobijamo da je $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Ako je $g = e$ i $h = f$ na osnovu napred navedenog dobijamo da je $ef = (ef)^2$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i iz $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$, dobijamo da je $E(S)$ normalna traka.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $E(S)$ normalna traka. Tada imamo da je $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Kako je S ekstenzija punog regularnog ideala K to je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$ i $E(S) \subseteq K$, odakle $(ghf, hgf) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $f, g, h \in E(S)$. Na isti način kao u implikaciji (i) $\Rightarrow$ (iv) dokazujemo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$-klasa nekog idempotenta iz S, odakle iz $(ghf, hgf) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $f, g, h \in E(S)$, dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno normalna traka.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno normalna traka. Tada imamo da je $(ghf, hgf) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $f, g, h \in E(S)$. Odavde je $(ghf, hgf) \in \mathcal{K}_{l,K}$ i $(ghf, hgf) \in \rho_K$, za sve $f, g, h \in E(S)$. Kako na S važi $\mathcal{K}_{l,K} = \mathcal{K}_{l,E}$ to iz $(ghf, hgf) \in \mathcal{K}_{l,E}$ dobijamo da je $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Ako je $g = e$ i $h = f$ na osnovu napred navedenog dobijamo da je $ef = (ef)^2$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i iz $eghf = ehgf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$ dobijamo da je $E(S)$ normalna traka.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Ova ekvivalencija se dokazuje na isti način kao i ekvivalencija (i) $\Leftrightarrow$ (ii). $\square$

Ako je S regularna polugrupa tada kao neposrednu posledicu prethodnog rezultata dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 3.9. *Sledeći uslovi na regularnoj polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je normalna traka;*

(ii) *$E(S/\mathcal{K}_l)$ je desno normalna traka;*

(iii) $E(S/\mathcal{K}_r)$ *je levo normalna traka;*

(iv) $E(S/\mathcal{K}_d)$ *je polumreža.*

Napomenimo još jednom, da je *inverzna* polugrupa S polugrupa u kojoj svaki element ima jedinstven idempotent, tj. regularna polugrupa u kojoj za svaki element $x \in S$ važi $|V(x)| = 1$. Poznato je da je polugrupa S inverzna ako i samo ako je regularna i $E(S)$ je polumreža.

Rezultat M. Yamade [173] iz 1967. godine sada je neposredna posledica prethodna dva rezultata, Posledice 3.6 i Posledice 3.9. Ovde treba istaći da Yamada pod (*levo*, *desno*) *inverznom* polugrupom podrazumeva regularnu polugrupu S čiji je skup idempotentnih elemenata $E(S)$ (levo normalna traka, desno normalna traka) polumreža.

Na osnovu tvrđenja Posledica 3.6 i 3.9 dobijamo da važi sledeći rezultat.

Posledica 3.10. (**M. Yamada**) *Svaka regularna polugrupa čiji idempotenti čine normalnu traku je izomorfna povratnom proizvodu levo inverzne i desno inverzne polugrupe u odnosu na inverznu polugrupu.*

Dokaz. Neka je S regularna polugrupa i neka je $E(S)$ normalna traka. Tada, prema Posledici 3.6 S je povratni proizvod polugrupa $S/\mathcal{K}_l$ i $S/\mathcal{K}_r$ u odnosu na polugrupu $S/\mathcal{K}_d$. Kako je S regularna, to je i svaka od faktor polugrupa $S/\mathcal{K}_l$, $S/\mathcal{K}_r$ i $S/\mathcal{K}_d$ takođe regularna polugrupa. Na osnovu Posledice 3.9 uslov da je $E(S)$ normalna traka je ekvivalentan uslovima da je $E(S/\mathcal{K}_l)$ desno normalna traka, da je $E(S/\mathcal{K}_r)$ levo normalna traka i da je $E(S/\mathcal{K}_d)$ polumreža. Odavde, kako je $S/\mathcal{K}_l$ regularna i $E(S/\mathcal{K}_l)$ je desno normalna traka, to je $S/\mathcal{K}_l$ desno inverzna polugrupa. Na isti način je $S/\mathcal{K}_r$ levo inverzna polugrupa i $S/\mathcal{K}_d$ je inverzna polugrupa. Prema tome, S je povratni proizvod levo inverzne i desno inverzne polugrupe u odnosu na inverznu polugrupu. $\square$

Takođe, imamo da važi:

Teorema 3.6. *Neka je S polugrupa sa punim regularnim idealom K. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $E(S)$ *je pravougaona traka;*

(ii) $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ *je desno nulta traka;*

(iii) $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ *je levo nulta traka;*

(iv) $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ *je jednoelementna (trivijalna) traka.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $E(S)$ pravougaona traka. Tada je $efe = e$, za sve $e, f \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $efe = ee$, za sve $e, f \in E(S)$, dobijamo da $(fe, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $e, f \in E(S)$. Takođe, kako imamo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$-klasa nekog idempotenta iz S, to iz $(fe, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $e, f \in E(S)$, dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno nulta traka.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno nulta traka. Tada je $(fe, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $e, f \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $(fe, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, za sve $e, f \in E(S)$ dobijamo da je $(fe, e) \in \mathcal{K}_{l,E}$, za sve $e, f \in E(S)$. Odavde je $gfe = ge$, za sve $e, f, g \in E(S)$. Ako je $g = fe$ tada na osnovu prethodnog dobijamo da je $fe = (fe)^2$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i za $g = e$ iz $gfe = ge$, za sve $e, f, g \in E(S)$ dobijamo da je $e = efe$, za sve $e, f \in E(S)$, tj. dobijamo da je $E(S)$ pravougaona traka.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Ova ekvivalencija se dokazuje na isti način kao ekvivalencija (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (iv). Neka je $E(S)$ pravougaona traka. Tada je $efe = e$, za sve $e, f \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{d,K} = \overline{\mathcal{K}}_{d,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $efe = eee$, za sve $e, f \in E(S)$, dobijamo da $(f, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, za sve $e, f \in E(S)$. Takođe, kako imamo da svaki idempotent faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ jeste $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$-klasa nekog idempotenta iz S, to iz $(f, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, za sve $e, f \in E(S)$ dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ trivijalna traka.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Neka je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K})$ trivijalna traka. Tada je $(f, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, za sve $e, f \in E(S)$. Kako je $E(S) \subseteq K$ i kako na S važi $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} = \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, gde je $E = E(S)$, to iz $(f, e) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,E}$, za sve $e, f \in E(S)$ dobijamo da je $(f, e) \in \mathcal{K}_{l,E}$, za sve $e, f \in E(S)$. Odavde je $gfh = geh$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Ako je $g = e$ i $h = ef$ tada na osnovu prethodnog dobijamo da je $(ef)^2 = ef$. Dakle, $E(S)$ je podpolugrupa od S i za $g = h = e$ iz $gfh = geh$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$ dobijamo da je $e = efe$, za sve $e, f \in E(S)$, tj. dobijamo da je $E(S)$ pravougaona traka. $\square$

Ako je S regularna polugrupa tada kao posledicu prethodne Teoreme 3.6 dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 3.11. *Neka je S regularna polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$E(S)$ je pravougaona traka;*
(ii) *$E(S/\mathcal{K}_l)$ je desno nulta traka;*
(iii) *$E(S/\mathcal{K}_r)$ je levo nulta traka;*
(iv) *$E(S/\mathcal{K}_d)$ je jednoelementna (trivijalna) traka.*

Neka je sada K potpuno regularna polugrupa. Tada, svaki element polugrupe K je istovremeno i levo i desno regularan element i pritom je sadržan u nekoj maksimalnoj podgrupi polugrupe K. Kako su svake dve maksimalne podgrupe neke polugrupe međusobno disjunktne ili se poklapaju, to se svaka potpuno regularna polugrupa može predstaviti kao disjunktna unija grupa. Predmet našeg daljeg proučavanja su idealske ekstenzije potpuno regularnih polugrupa na kojima dokazujemo neke rezultate koji su analogni sa napred dokazanim rezultatima. U nastavku ćemo proučavati kakve osobine imaju relacije $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ na idealskim ekstenzijama potpuno regularnih polugrupa, dalje, kakav je odnos ovih kongruencija sa Greenovim ekvivalencijama i da li se pomoću ovih relacija mogu opisati poddirektni ili povratni proizvodi idealskih ekstenzija potpuno regularnih polugrupa.

Imamo da važi sledeći rezultat.

Teorema 3.7. *Neka je S polugrupa sa potpuno regularnim idealom K. Tada je*

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \overline{\mathcal{K}}_{r,K} \cap \mathcal{L} = \overline{\mathcal{K}}_{d,K} \cap \mathcal{H} = \Delta_S.$$

Dokaz. Dokazujemo samo jednakost $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$. Ostale jednakosti dokazuju se na isti način.

Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R}$. Kako je na svakoj polugrupi $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$, to imamo da je $(a, b) \in \mathcal{D}$. Neka je $a = b$, tada je jasno da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$. Neka je sada $a \neq b$. Odavde, iz pretpostavke da je $(a, b) \in \rho_K$ dobijamo da $a, b \in K$. Takođe, iz $(a, b) \in \mathcal{R}$, tj. iz $aS = bS$ imamo da je $aK = bK$, odnosno, imamo da je $(a, b) \in \mathcal{R}_K \subseteq \mathcal{D}_K$, jer je $K \subseteq S$. Odavde $a, b \in D$ za neku $\mathcal{D}$-klasu D polugrupe K. Iz $(a, b) \in \mathcal{R}_K$, tj. iz $aK = bK$ dobijamo da je $aD = bD$, odnosno, dobijamo da je $(a, b) \in \mathcal{R}_D$, jer je $D \subseteq K$. Odavde $a, b \in R$ za neku $\mathcal{R}_D$-klasu R od D. Kako je svaka $\mathcal{D}$-klasa potpuno regularne polugrupe K potpuno prosta polugrupa, to imamo da svaka $\mathcal{R}$-klasa od D jeste desna grupa sa levom jedinicom. Dakle, R je desna grupa sa levom jedinicom e i pritom je $a = ea$ i $b = eb$. Za uočene elemente a i b, na osnovu pretpostavke da je $xa = xb$, za svaki $x \in K$, sada dobijamo da je $a = ea = eb = b$. Znači, dobili smo da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R} \subseteq \Delta_S$ i kako obratna inkluzija uvek važi dobijamo da je $\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Koristeći Teoremu 3.7, u slučaju kada su $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ kongruencije, neposredno dobijamo da važi sledeća posledica.

Posledica 3.12. *Svaka $\mathcal{R}$-kompatibilna ($\mathcal{L}$-kompatibilna, $\mathcal{H}$-kompatibilna) polugrupa S sa potpuno regularnim idealom K je poddirektan proizvod polugrupa $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $S/\mathcal{R}$ ($S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ i $S/\mathcal{L}$, $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ i $S/\mathcal{H}$).*

Ako je cela polugrupa potpuno regularna, tj. ako je $S = K$, tada se kao posledica Teoreme 3.7 dobija sledeći rezultat.

Posledica 3.13. *Neka je S potpuno regularna polugrupa. Tada je*

$$\mathcal{K}_l \cap \mathcal{R} = \mathcal{K}_r \cap \mathcal{L} = \mathcal{K}_d \cap \mathcal{H} = \Delta_S.$$

Koristeći Posledicu 3.13, u slučaju kada su $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ kongruencije, neposredno dobijamo da važi sledeća posledica.

Posledica 3.14. *Svaka $\mathcal{R}$-kompatibilna ($\mathcal{L}$-kompatibilna, $\mathcal{H}$-kompatibilna) potpuno regularna polugrupa S je poddirektan proizvod polugrupa $S/\mathcal{K}_l$ i $S/\mathcal{R}$ ($S/\mathcal{K}_r$ i $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{K}_d$ i $S/\mathcal{H}$).*

3.2. Relacije $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$

Relacije $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ i $\mathcal{K}_{d,X}$, i $\overline{\mathcal{K}}_{l,X}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,X}$ i $\overline{\mathcal{K}}_{d,X}$, koje smo definisali u prethodnom odeljku, u ovom odeljku se proširuju do novih relacija na polugrupama, koristeći njihovo najveće polumrežno razlaganje. Definisane su nove relacije $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$, i $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, za koje je takođe dokazano da su to relacije kongruencije na polugrupi koja je idealska ekstenzija polugrupe K. Svaka regularna polugrupa je polumreža regularnih polugrupa. Svaka potpuno regularna polugrupa je polumreža potpuno prostih polugrupa. Koristeći novodefinisane relacije $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$, i $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, u ovom odeljku su pomoću njih opisani povratni proizvodi regularnih i potpuno regularnih polugrupa. Razmatrana je i veza novodefinisanih relacija sa Greenovim ekvivalencijama.

Neka je θ najmanja polumrežna kongruencija na S i neka je $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ najveće polumrežno razlaganje polugrupe S, tj. razlaganje koje odgovara kongruenciji θ. Za proizvoljan element $\alpha \in Y$ neka je

$$I_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} S_\beta.$$

Lako se proverava da je za svaki $\alpha \in Y$, skup I_α ideal od S. Definišimo na S sledeće relacije:

$$(a,b) \in \mathcal{S}_l \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in S_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{l,I_\alpha},$$

$$(a,b) \in \mathcal{S}_r \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in S_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{r,I_\alpha},$$

$$(a,b) \in \mathcal{S}_d \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in S_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{d,I_\alpha}.$$

Dalje, neka je S idealska ekstenzija polugrupe K. Za svaki $\alpha \in Y$ neka je

$$K_\alpha = K \cap S_\alpha.$$

Jasno je da je $K = \bigcup_{\alpha\in Y} K_\alpha$ polumrežno razlaganje ideala K, i da je K_α ideal od S_α, za svaki $\alpha \in Y$. Takođe, za svaki $\alpha \in Y$, uvedimo oznaku

$$J_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} K_\beta.$$

Lako se proverava da je J_α ideal i od K i od I_α, za svaki $\alpha \in Y$. Definišimo, sada, na S sledeće relacije:

$$(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in K_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha},$$

$$(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in K_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{r,J_\alpha},$$

$$(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in K_\alpha \;\&\; (a,b) \in \mathcal{K}_{d,J_\alpha}.$$

Sada, imamo da važi sledeći rezultat.

Lema 3.4. *Na proizvoljnoj idealskoj ekstenziji S polugrupe K relacije $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ su relacije kongruencije.*

Dokaz. Tvrđenje leme dokazujemo samo za relaciju $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ jer se tvrđenja vezana za ostale relacije dokazuju na isti način.

Neka je $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ najveće polumrežno razlaganje polugrupe S, tj. neka je S_α polumrežno nerazloživa polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$. Odavde je $K = \bigcup_{\alpha\in Y} K_\alpha$ najveće polumrežno razlaganje ideala K jer je prema Teoremi 3.4 [116] ideal polumrežno nerazložive polugrupe takođe polumrežno nerazloživa polugrupa.

Na osnovu osobina relacije $\mathcal{K}_{d,J_\alpha}, \alpha \in Y$ lako se proverava da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ refleksivna i simetrična relacija na S. Dokažimo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i tranzitivna, tj. relacija ekvivalencije na S.

Uzmimo $a,b,c \in S$ tako da $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i $(b,c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Odavde imamo da je

$$a = b \text{ ili } (\exists\alpha \in Y)\; a,b \in K_\alpha \text{ i } xay = xby, \text{ za svaki } \delta \leq \alpha \text{ i sve } x,y \in K_\delta$$

i

$$b = c \text{ ili } (\exists\beta \in Y)\; b,c \in K_\beta \text{ i } xby = xcy, \text{ za svaki } \delta \leq \beta \text{ i sve } x,y \in K_\delta.$$

Razlikujemo sledeće slučajeve. Ako je $a = b$ i $b = c$, tada je $a = c$ odakle je jasno da je $(a,c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Ako je $a = b$ i $b \neq c$, tada je $a = b$ i postoji $\beta \in Y$ takav da $b,c \in K_\beta$ i pritom važi $xby = xcy$, za svaki $\delta \leq \beta$ i sve $x,y \in K_\delta$. Iz prethodnog dobijamo da $a,c \in K_\beta$ i važi $xay = xcy$, za svaki $\delta \leq \beta$ i sve $x,y \in K_\delta$, odakle $(a,c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Ako je $a \neq b$ i $b = c$, tada na isti način kao u prethodnom slučaju dobijamo da je $(a,c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Ako je $a \neq b$ i $b \neq c$, tada postoje $\alpha,\beta \in Y$ takvi da $a,b \in K_\alpha$ i $b,c \in K_\beta$ i pritom važi $xay = xby$ i $ubv = ucv$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i svaki $\gamma \leq \beta$, i sve $x,y \in K_\delta$ i sve $u,v \in K_\gamma$. Kako je $b \in K_\alpha \cap K_\beta = \varnothing$ to dobijamo da je $\alpha = \beta$. Prema tome imamo da $a, b, c \in K_\alpha$ i važi $xay = xby$ i $ubv = ucv$, za sve $\gamma, \delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$ i sve $u, v \in K_\gamma$. Odavde za $x = u$ i $y = v$, dobijamo da $a, c \in K_\alpha$ i pritom je $xay = xcy$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$, odakle $(a, c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Znači, iz $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i $(b, c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ dobili smo da $(a, c) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, tj. dobili smo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ tranzitivna, odnosno, relacija ekvivalencije na S.

Dalje, dokažimo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ desno saglasna relacija na S. U tom smislu, uzmimo elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i $c \in S$. Tada je $a = b$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da je

$$a, b \in K_\alpha \ \text{ i } \ (a, b) \in \mathcal{K}_{d,J_\alpha},$$

i postoji $\beta \in Y$ takav da je $c \in S_\beta$.

Neka je $a \neq b$. Tada $a, b \in K_\alpha$, i važi

$$xay = xby,$$

za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$. Takođe, imamo da je

$$ac, bc \in K_\alpha \cdot S_\beta = (K \cap S_\alpha) \cdot S_\beta = KS_\beta \cap S_\alpha S_\beta \subseteq KS \cap S_{\alpha\beta} \subseteq K \cap S_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}.$$

Neka je $\gamma \leq \alpha\beta$. Tada je $\alpha\gamma = \gamma$ i $\beta\gamma = \gamma$, tj. $\gamma \leq \alpha$ i $\gamma \leq \beta$. Dalje, uzmimo proizvoljno elemente $x, y \in K_\gamma$. Tada je

$$cy \in S_\beta \cdot K_\gamma = S_\beta(K \cap S_\gamma) \subseteq SK \cap S_{\beta\gamma} \subseteq K \cap S_{\beta\gamma} = K_{\beta\gamma} = K_\gamma,$$

Pa kako je $\gamma \leq \alpha$, to na osnovu napred navedene pretpostavke imamo da je $xa(cy) = xb(cy)$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$. Prema tome,

$$x(ac)y = xa(cy) = xb(cy) = x(bc)y.$$

Dakle, dobili smo da je

$$ac, bc \in K_{\alpha\beta} \ \text{ i } \ (ac, bc) \in \mathcal{K}_{d,J_{\alpha\beta}},$$

što znači da je $(ac, bc) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Jasno je da i $a = b$ povlači $ac = bc$, tj. $(ac, bc) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Ovim smo dokazali da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ desno saglasna relacija.

Na isti način se dokazuje da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ levo saglasna relacija na S odakle na osnovu svega napred dokazanog dobijamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ kongruencija na S. $\square$

Ako je $S = K$, tada se relacije $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ poklapaju sa relacijama $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$, tim redom. Prema tome, na osnovu prethodnog rezultata imamo da važi sledeće:

Posledica 3.15. *Na proizvoljnoj polugrupi S relacije $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$ su relacije kongruencije.*

Na osnovu definicije relacija $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_d$, i $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, na svakoj polugrupi S važi $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r \subseteq \mathcal{S}_d$, i $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, tim redom.

Veza između kongruencija $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, i Greenovih ekvivalencija $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{D}$, na polugrupi S sa regularnim idealom data je sledećom teoremom.

Teorema 3.8. *Neka je S polugrupa sa regularnim idealom K. Tada važi*

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \subseteq \mathcal{L}, \qquad \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \mathcal{R}, \qquad \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \mathcal{D}.$$

Dokaz. Dokazujemo samo prvu inkluziju $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \subseteq \mathcal{L}$, jer se ostale inkluzije dokazuju na isti način.

Neka je S polumreža Y polugrupa S_α, $\alpha \in Y$, i neka je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$.

Uzmimo $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Tada je $a = b$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da je $a, b \in K_\alpha$, i važi $xa = xb$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i svaki $x \in K_\delta$. Ako je $a = b$ jasno je da je $(a, b) \in \mathcal{L}$. Naka je $a \neq b$. Tada $a, b \in K_\alpha$, odakle, kako je K regularna polugrupa, postoje $a', b' \in K$ takvi da $a' \in V(a)$, $b' \in V(b)$. Jednostavno se dokazuje da i $a', b' \in K_\alpha$.

Sada, kako $aa', bb' \in K_\alpha$, to na osnovu napred navedene pretpostavke imamo da je

$$a = aa'a = aa'b \in Sb \quad \text{i} \quad b = bb'b = bb'a \in Sa.$$

Prema tome, $Sa = Sb$, pa je $(a, b) \in \mathcal{L}$. Ovim smo dokazali da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \subseteq \mathcal{L}$.

Na potpuno isti način dokazujemo da je $\overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \mathcal{R}$ i da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \mathcal{D}$. □

Ako je S regularna polugrupa, tj. ako je $S = K$, tada je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} = \mathcal{S}_l$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K} = \mathcal{S}_r$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} = \mathcal{S}_d$, i na osnovu prethodne teoreme dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.16. *Neka je S regularna polugrupa. Tada važi*

$$\mathcal{S}_l \subseteq \mathcal{L}, \qquad \mathcal{S}_r \subseteq \mathcal{R}, \qquad \mathcal{S}_d \subseteq \mathcal{D}.$$

Važna osobina kongruencija potrebna za konstrukciju povratnih proizvoda polugrupa je permutabilnost. Sledećom teoremom se dokazuje da su relacije $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ permutabilne na polugrupi S sa regularnim idealom.

Teorema 3.9. *Neka je S polugrupa sa regularnim idealom K. Tada važi*

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K} = \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K} = \overline{\mathcal{S}}_{d,K}.$$

Dokaz. Neka je S polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada je K polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa K_α, $\alpha \in Y$, gde je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Kako je K regularna, to je svaki K_α, $\alpha \in Y$, takođe regularna polugrupa.

Prema definiciji relacija $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}, \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ na polugrupi S imamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}, \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Dakle, uvek je

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K},$$

i

$$\overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K}.$$

Dokažimo da na S važe i obratne inkluzije.

Uzmimo proizvoljne elemente $a, b \in S$ takve da je $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Tada je $a = b$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da je $a, b \in K_\alpha$, i $(a,b) \in \mathcal{K}_{d,J_\alpha}$, tj. tada je $a = b$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da je $a, b \in K_\alpha$, i pritom je $xay = xby$, za svaki $\beta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\beta$. Ako je $a = b$, tada je jasno da je $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, što je i trebalo dokazati. Pretpostavimo sada da je $a \neq b$. Tada, kako je $K_\alpha, \alpha \in Y$ regularna polugrupa i $a, b \in K_\alpha$, to postoje $a', b' \in K_\alpha$ takvi da je $a' \in V(a)$ i $b' \in V(b)$. Neka je $c = ba'a$ i $d = aa'b$. Dalje, uzmimo proizvoljne elemente $x, y \in K_\alpha$. Tada iz $x, y, a'a, bb', a'ay \in K_\alpha$, na osnovu prethodnog sledi da je

$$xa = xaa'a = xba'a = xc,$$

$$cy = ba'ay = bb'ba'ay = bb'aa'ay = bb'ay = bb'by = by.$$

Prema tome, dobili smo da je $(a,c) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha}$ i da je $(c,b) \in \mathcal{K}_{r,J_\alpha}$. Sada, kako $a, c \in K_\alpha$ i $(a,c) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha}$, to $(a,c) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, i kako $c, b \in K_\alpha$ i $(c,b) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha}$, to $(c,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$. Dakle, $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$. Takođe, kako $x, y, aa', b'b, xaa' \in K_\alpha$, to na osnovu pretpostavke imamo da je

$$ay = aa'ay = aa'by = dy,$$

$$xd = xaa'b = xaa'bb'b = xaa'ab'b = xab'b = xbb'b = xb.$$

Dakle, dobili smo da je $(a,d) \in \mathcal{K}_{r,J_\alpha}$ i da je $(d,b) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha}$. Odavde, kako $a, d \in K_\alpha$ i $(a,d) \in \mathcal{K}_{r,J_\alpha}$, to $(a,d) \in \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$, i kako $d, b \in K_\alpha$ i $(d,b) \in \mathcal{K}_{l,J_\alpha}$, to $(d,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Dakle, $(a,b) \in \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Prema tome, imamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Znači, na S je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{r,K} = \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{l,K} = \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. $\square$

Ako je S regularna polugrupa, tj. ako je $S = K$, tada važi sledeća posledica.

Posledica 3.17. *Neka je S regularna polugrupa. Tada važi*

$$\mathcal{S}_l \cdot \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \cdot \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_d.$$

Takođe, važi i sledeći rezultat.

Teorema 3.10. *Neka je S polugrupa sa regularnim idealom K. Tada važi*

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{S}}_{r,K} = \Delta_S.$$

Dokaz. Neka je S polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada je K polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa K_α, $\alpha \in Y$, gde je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Kako je K regularna, to je svaki K_α, $\alpha \in Y$, takođe regularna polugrupa.

Uzmimo elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{S}}_{r,K}$. Kako je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}, \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, to imamo da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Odavde, je $a = b$ ili postoji element $\alpha \in Y$ takav da $a, b \in K_\alpha$, i da je $xa = xb$, $ay = by$ i $xay = xby$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada $a, b \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i kako je K_α regularna polugrupa, to postoje $a', b' \in K_\alpha$ takvi da je $a' \in V(a)$ i $b' \in V(b)$. Odavde, kako $aa', b'b \in K_\alpha$, na osnovu napred navedenog dobijamo da je

$$a = aa'a = aa'b = aa'bb'b = aa'ab'b = ab'b = bb'b = b,$$

što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Prema tome, zaključujemo da je $a = b$, što znači da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{S}}_{r,K} = \Delta_S$. $\square$

Ako je S regularna polugrupa, jasno je da važi.

Posledica 3.18. *Neka je S regularna polugrupa. Tada važi*

$$\mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}_r = \Delta_S.$$

Dakle, na osnovu prethodnih rezultata, Teoreme 3.9 i Teoreme 3.10, i Posledice 3.17 i Posledice 3.18, neposredno dobijamo sledeće dve posledice.

Posledica 3.19. *Svaka polugrupa S sa regularnim idealom K je povratni proizvod polugrupa $S/\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ i $S/\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ u odnosu na polugrupu $S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$.*

Posledica 3.20. *Svaka regularna polugrupa S je povratni proizvod polugrupa $S/\mathcal{S}_l$ i $S/\mathcal{S}_r$ u odnosu na polugrupu $S/\mathcal{S}_d$.*

U nastavku razmatramo veze koje postoje između Greenovih ekvivalencija $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ i relacija $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ na polugrupama sa potpuno regularnim idealom. Na osnovu razmatranih veza između navedenih relacija došlo se do opisa novih poddirektnih i povratnih proizvoda polugrupa sa potpuno regularnim idealom.

Imamo da važi sledeći rezultat.

Teorema 3.11. *Neka je S polugrupa sa potpuno regularnim idealom K. Tada na S važi:*

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \overline{\mathcal{S}}_{r,K} \cap \mathcal{L} = \overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cap \mathcal{H} = \Delta_S.$$

D o k a z . Dokazaćemo samo jednakost $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$. Ostale jednakosti se dokazuju na isti način.

Neka je S polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada je K polumreža Y polugrupa K_α, $\alpha \in Y$, gde je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Kako je K potpuno regularna, to je i svaki K_α, $\alpha \in Y$, potpuno regularna polugrupa. Dalje, kako je prema Teoremi 3.4 [116] ideal polumrežno nerazložive polugrupe takođe polumrežno nerazloživ, to je K_α potpuno prosta polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$.

Uzmimo sada elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \mathcal{R}$. Tada je $a = b$ ili postoji element $\alpha \in Y$ takav da je $a, b \in K_\alpha$, i pritom važi $xa = xb$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i svaki $x \in K_\delta$. Takođe, $(a, b) \in \mathcal{R}$ u S. Neka je $a \neq b$. Kako je K_α regularna polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$ i $a, b \in K_\alpha$, to postoje $a', b' \in K_\alpha$ takvi da je $a = aa'a$ i $b = bb'b$. Iz $(a, b) \in \mathcal{R}$ u S, postoje $x, y \in S^1$ takvi da je $a = bx$ i $b = ay$. Neka $x \in S_\beta$ i $y \in S_\gamma$, za neke $\beta, \gamma \in Y$. Dalje, imamo da

$$p = xa'a \in S_\beta K_\alpha = S_\beta(S_\alpha \cap K) \subseteq S_{\beta\alpha} \cap SK \subseteq S_{\beta\alpha} \cap K = K_{\beta\alpha}$$

i

$$q = yb'b \in S_\gamma K_\alpha = S_\gamma(S_\alpha \cap K) \subseteq S_{\gamma\alpha} \cap SK \subseteq S_{\gamma\alpha} \cap K = K_{\gamma\alpha}.$$

Odavde, dobijamo da $a = aa'a = bxa'a = bp \in K_\alpha \cap K_{\alpha\beta\alpha} = \varnothing$ i da $b = bb'b = ayb'b = aq \in K_\alpha \cap K_{\alpha\gamma\alpha} = \varnothing$, tj. dobijamo da je $\alpha = \alpha\beta\alpha$ i da je $\alpha = \alpha\gamma\alpha$. Dakle, kako je $\alpha = \alpha\beta\alpha = \beta\alpha^2 = \beta\alpha$ i $\alpha = \alpha\gamma\alpha = \gamma\alpha^2 = \gamma\alpha$, dobijamo da je $\beta\alpha = \alpha = \gamma\alpha$. Na osnovu prethodnog za $a, b \in K_\alpha$ imamo da postoje elementi $p = xa'a \in K_{\beta\alpha} = K_\alpha$ i $q = yb'b \in K_{\gamma\alpha} = K_\alpha$ takvi da je $a = bp$ i $b = aq$, odakle $(a, b) \in \mathcal{R}$ u K_α. Neka R jeste $\mathcal{R}$-klasa polugrupe K_α koja sadrži elemente a i b. Kako je K_α potpuno prosta polugrupa, to je R desna grupa i ima levu jedinicu e. Odavde je $a = ea$ i $b = eb$, pa na osnovu napred navedenog imamo da je $a = ea = eb = b$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Prema tome, zaključujemo da je $a = b$, što znači da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$. $\square$

Ako je S potpuno regularna polugrupa, tada iz prethodne Teoreme 3.11 neposredno dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.21. *Neka je S potpuno regularna polugrupa. Tada na S važi:*

$$\mathcal{S}_l \cap \mathcal{R} = \mathcal{S}_r \cap \mathcal{L} = \mathcal{S}_d \cap \mathcal{H} = \Delta_S.$$

Još jedna veza između Greenovih ekvivalencija $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$, i relacija $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, na polugrupi S sa potpuno regularnim idealom, data je sledećim rezultatom.

Teorema 3.12. *Neka je S polugrupa sa potpuno regularnim idealom K. Tada je*

$$\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}=\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K},\qquad \overline{\mathcal{S}}_{r,K}\cdot\mathcal{L}=\mathcal{L}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{r,K}\quad i\quad \overline{\mathcal{S}}_{d,K}\cdot\mathcal{H}=\mathcal{H}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{d,K}.$$

Dokaz. Neka je S polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa $S_\alpha, \alpha\in Y$. Tada je K polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa $K_\alpha, \alpha\in Y$, gde je $K_\alpha=K\cap S_\alpha$, za svaki $\alpha\in Y$. Kako je K potpuno regularna polugrupa, to je K_α potpuno prosta polugrupa, za svaki $\alpha\in Y$.

Uzmimo proizvoljne elemente $a,b\in S$ tako da je $(a,b)\in\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}$. Tada, postoji element $c\in S$ takav da je $(a,c)\in\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ i da je $(c,b)\in\mathcal{R}$. Odavde je $a=c$ ili postoji element $\alpha\in Y$ takav da je $a,c\in K_\alpha$, i da je $xa=xc$, za svaki $\delta\le\alpha$ i svaki $x\in K_\delta$. Iz $(c,b)\in\mathcal{R}$ je $cu=b$, $bv=c$, za neke $u,v\in S^1$. Pretpostavimo da je $a\neq c$. Tada, $a,c\in K_\alpha$. Za svaki $\alpha\in Y$ je K_α regularna polugrupa. Neka je $a'\in V(a)$ i neka je $d=au$. Jasno je da a', aa', $a'a\in K_\alpha$. Dalje, za elemente $u,v\in S^1$, imamo da $u\in S_\beta$, $v\in S_\gamma$, za neke $\beta,\gamma\in Y$ i da pritom važi:

$$d=au\in K_\alpha\cdot S_\beta=(K\cap S_\alpha)S_\beta\subseteq KS\cap S_{\alpha\beta}\subseteq K\cap S_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta},$$
$$b=cu\in K_\alpha\cdot S_\beta=(K\cap S_\alpha)S_\beta\subseteq KS\cap S_{\alpha\beta}\subseteq K\cap S_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}.$$

Neka je $\delta\le\alpha\beta$. Tada je $\delta\le\alpha$, pa na osnovu pretpostavke da je $xa=xc$, za svaki $\delta\le\alpha$ i svaki $x\in K_\delta$, za proizvoljno izabrani element $x\in K_\delta$, imamo da je

$$xb=xcu=xau=xd.$$

Odavde, kako je $d,b\in K_{\alpha\beta}$ i $(d,b)\in\mathcal{K}_{l,J_{\alpha\beta}}$, to dobijamo da je $(d,b)\in\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Dalje, važi

$$dS=auS\subseteq aS$$

i iz pretpostavke da je $xa=xc$, za svaki $\delta\le\alpha$ i svaki $x\in K_\delta$, važi

$$aS=aa'aS=aa'cS=aa'bvS=aa'cuvS=aa'auvS=auvS\subseteq auS=dS.$$

Dakle, dobili smo da je $aS=dS$, tj da je $(a,d)\in\mathcal{R}$. Na osnovu napred dokazanog, kako $(a,d)\in\mathcal{R}$ i kako $(d,b)\in\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ to sledi da je $(a,b)\in\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, tj. dobili smo da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Na isti način se dokazuje da važi i obratna inkluzija, odakle imamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}=\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$.

Neka je $a=c$. Tada $(a,b)\in\mathcal{R}$ i kako je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ refleksivna relacija, to imamo da je $(b,b)\in\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Dakle, $(a,b)\in\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, tj. $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$. Na isti način se dokazuje da važi i obratna inkluzija, odakle i u ovom slučaju imamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}\cdot\mathcal{R}=\mathcal{R}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$.

Jednakost $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}\cdot\mathcal{L}=\mathcal{L}\cdot\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ dokazuje se na isti način.

Dokažimo sada da važi i treća jednakost iz teoreme. U tom smislu uzmimo $a,b\in S$ takve da je $(a,b)\in\overline{\mathcal{S}}_{d,K}\cdot\mathcal{H}$, tj. da je $(a,c)\in\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i $(c,b)\in\mathcal{H}$, za neki

$c \in S$. Odavde je $a = c$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da je $a, c \in K_\alpha$, i $xay = xcy$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$. Pretpostavimo da je $a \neq c$. Tada $a, b, c \in K_\alpha$, $\alpha \in Y$, zatim, $a \in G_e$, $b, c \in G_f$, za neke $e, f \in E(K_\alpha)$, i važi $xay = xcy$, za svaki $\delta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\delta$. Uzmimo da je $d = ebe$. Tada $d \in eK_\alpha e = G_e$, pa imamo da je $(a, d) \in \mathcal{H}$.

Sa druge strane, iz $b, c \in G_f$ sledi da je $b = cu = vc$, za neke $u, v \in G_f \subseteq K_\alpha$, pa za $\beta \leq \alpha$ i proizvoljne $x, y \in K_\beta$ imamo da je

$$\begin{aligned} xdy &= xebey = xecuey = xeauey = xauey = xcuey = \\ &= xbey = xvcey = xvaey = xvay = xvcy = xby, \end{aligned}$$

jer su $xe, uey, x, xv, ey, y \in K_\beta$ i $a \in G_e$. Dakle, $(d, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Odavde, kako je $(a, d) \in \mathcal{H}$ i $(d, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, to dobijamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Na isti način se dokazije da važi i obratna inkluzija, odakle dobijamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$.

Neka je sada $a = c$. Tada, $(a, b) \in \mathcal{H}$ i kako je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ refleksivna relacija, to imamo da je $(b, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Odavde, iz $(a, b) \in \mathcal{H}$ i $(b, b) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ dobijamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. Na isti način se dokazije da važi i obratna inkluzija, odakle dobijamo da je $\overline{\mathcal{S}}_{d,K} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$. $\square$

Ako je S potpuno regularna polugrupa, tj. ako je $S = K$, tada na osnovu prethodne teoreme neposredno sledi posledica.

Posledica 3.22. *Ako je S potpuno regularna polugrupa. Tada je*

$$\mathcal{S}_l \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{S}_l, \qquad \mathcal{S}_r \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{S}_r \quad i \quad \mathcal{S}_d \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}_d.$$

Kao što smo istakli ranije, na potpuno regularnoj polugrupi Greenove ekvivalencije $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ nisu kongruencije, u opštem slučaju. Na polugrupama na kojima $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ jesu kongruencije, kao neposrednu posledicu prethodna dva rezultata dobijamo sledeće posledice.

Posledica 3.23. *Svaka $\mathcal{R}$-kompatibilna ($\mathcal{L}$-kompatibilna, $\mathcal{H}$-kompatibilna) polugrupa S sa potpuno regularnim idealom K je povratni proizvod polugrupa $S/\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$ i $S/\mathcal{R}$ ($S/\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ i $S/\mathcal{L}$, $S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i $S/\mathcal{H}$).*

Posledica 3.24. *Svaka potpuno regularna, $\mathcal{R}$-kompatibilna ($\mathcal{L}$-kompatibilna, $\mathcal{H}$-kompatibilna) polugrupa S je povratni proizvod polugrupa $S/\mathcal{S}_l$ i $S/\mathcal{R}$ ($S/\mathcal{S}_r$ i $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{S}_d$ i $S/\mathcal{H}$).*

Kao što je poznato, regularna polugrupa S je ortodoksna ako je $E(S)$ podpolugrupa od S. Klasa ortodoksnih polugrupa u sebe takođe uključuje i klasu inverznih polugrupa i klasu traka. Neke osobine ortodoksne potpuno regularne polugrupe date su sledećim rezultatom.

Teorema 3.13. *Neka je S polugrupa sa potpuno regularnim idealom K. Tada je K ortodoksna ako i samo ako polugrupa $S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ ima ideal koji je polumreža grupa.*

Dokaz. Neka je S polumreža Y polumrežno nerazloživih polugrupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada je K polumreža Y polugrupa K_α, $\alpha \in Y$, gde je $K_\alpha = K \cap S_\alpha$, za svaki $\alpha \in Y$. Kako je K potpuno regularna, to je svaki K_α, $\alpha \in Y$, takođe potpuno regularna polugrupa. Odavde, prema Teoremi 3.4 [116], kako je ideal polumrežno nerazložive polugrupe polumrežno nerazloživ, dobijamo da je K_α potpuno prosta polugrupa, za svaki $\alpha \in Y$.

Neka je K ortodoksna polugrupa, tj. neka je $E(K)$ podpolugrupa od K. Odatle je prema Teoremi 1.18, za svaki $\alpha \in Y$, $E(K_\alpha)$ pravougaona traka, tj. K_α je pravougaona grupa. Neka je φ prirodni homomorfizam koji polugrupu S slika na polugrupu $S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ indukovan kongruencijom $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ na S. Kako je K ideal od S to je i $K\varphi$ ideal od $S\varphi = S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ jer je homomorfna slika ideala takođe ideal. Dokažimo sada da je $K\varphi$ polumreža grupa.

Neka je $e' \in E(K\varphi)$ proizvoljan element. Dokažimo da je e' slika nekog idempotenta iz K. Neka je φ' restrikcija preslikavanja φ na K i neka je $\theta = \ker \varphi'$. Jasno je da je θ kongruencija na K. Kako je K regularna polugrupa, to θ-klasa e' sadrži idempotent $e \in E(K)$ i pritom je $e\varphi = e\varphi' = e'$.

Uzmimo sada proizvoljne $u, v \in E(K\varphi)$. Tada, imamo da je $u = e\varphi$ i $v = f\varphi$, za neke $e, f \in E(K)$. Pretpostavimo da $e, f \in E(K_\alpha)$, za neki $\alpha \in Y$. Kako je $E(K)$ podpolugrupa, to $ef, fe \in E(K_\alpha)$, $\alpha \in Y$. Uzmimo sada proizvoljan $\beta \leq \alpha$ i proizvoljne $x, y \in K_\beta$. Odavde, kako je K_β regularna polugrupa, to postoje elementi $x', y' \in K_\beta$ takvi da je $x' \in V(x)$ i $y' \in V(y)$. Tada, imamo da $x'x, yy' \in E(K_\beta)$ i takođe, $x'xefyy'$, $x'xfeyy' \in E(K) \cap K_\beta K_\alpha K_\beta \subseteq E(K) \cap K_\beta = E(K_\beta)$. Kako je $E(K_\beta)$ pravougaona traka to je

$$x'xefyy' = (x'x)(x'xefyy')(yy') = x'xyy',$$

i slično, $x'xfeyy' = x'xyy'$. Prema tome

$$xefy = xx'xefyy'y = xx'xyy'y = xx'xfeyy'y = xfey,$$

čime smo dokazali da je $(ef, fe) \in \mathcal{K}_{d,J_\alpha}$, i kako $ef, fe \in K_\alpha$, to $(ef, fe) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, što znači da je

$$uv = (e\varphi)(f\varphi) = (ef)\varphi = (f\varphi)(e\varphi) = vu.$$

Dakle, $K\varphi$ je potpuno regularna polugrupa, kao homomorfna slika potpuno regularne polugrupe, i $E(K\varphi)$ je polumreža, što prema Teoremi 1.20 znači da je $K\varphi$ polumreža grupa.

Obratno, neka je $K/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ ideal faktor polugrupe $S/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ i neka je $K/\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ polumreža grupa. To znači da je $(ef, fe) \in \overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, za proizvoljne $e, f \in E(K)$. Odavde je $ef = fe$ ili postoji $\alpha \in Y$ takav da $ef, fe \in K_\alpha$ i pritom važi $xefy = xfey$, za svaki $\beta \leq \alpha$ i za sve $x, y \in K_\beta$. Ako je $ef = fe$ tada je jasno da $ef \in E(K)$, tj. jasno je da je $E(K)$ podpolugrupa od K. Neka je $ef \neq fe$, tj. neka $ef, fe \in K_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$ i pritom je $xefy = xfey$, za svaki $\beta \leq \alpha$ i sve $x, y \in K_\beta$. Odavde, za $x = e$ i $y = f$ dobijamo da je $eeff = efef$, odnosno dobijamo da je $ef = (ef)^2$. Prema tome, $E(K_\alpha)$ je podpolugrupa od K, pa iz Teoreme 1.13 sledi da je $E(K_\alpha)$ pravougaona traka, odnosno, K_α je pravougaona grupa, prema Teoremi 1.14. Dakle, K je polumreža pravougaonih grupa, što u svetlu Teoreme 1.18 znači da je K ortodoksna, što je i trebalo dokazati. $\square$

Ako je $S = K$, tj. ako je S potpuno regularna polugrupa, tada važi sledeći rezultat.

Teorema 3.14. *Neka je S potpuno regularna polugrupa. Tada je S ortodoksna ako i samo ako je $S/\mathcal{S}_d$ polumreža grupa.*

Štaviše, na ortodoksnoj potpuno regularnoj polugrupi $\mathcal{S}_d$ je najmanja kongruencija za koju odgovarajuća faktor polugrupa jeste polumreža grupa.

Dokaz. Ako je $S = K$, tj. ako je S potpuno regularna polugrupa, tada se na S relacije $\mathcal{S}_d$ i $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$ poklapaju, odakle na osnovu prethodnog rezultata Teoreme 3.13, imamo da je S ortodoksna ako i samo ako je $S/\mathcal{S}_d$ polumreža grupa.

Dokažimo sada da važi i drugi deo tvrđenja. Neka je S ortodoksna i dokažimo da je $\mathcal{S}_d \subseteq \theta$ za proizvoljnu relaciju kongruencije θ na S takvu da S/θ jeste polumreža grupa. Neka je φ prirodni homomorfizam koji polugrupu S slika na polugrupu S/θ, dalje, neka je S/θ polumreža Z grupa G_ξ, $\xi \in Z$, i neka je ψ prirodni homomorfizam koji polugrupu S/θ slika na polugrupu Z i koji odgovara polumrežnoj kongruenciji na S/θ sa klasama G_ξ, $\xi \in Z$. Tada je $\varphi\psi$ homomorfizam koji polugrupu S slika na polugrupu Z, pa je $\ker(\varphi\psi)$ polumrežna kongruencija na S, odakle je $\sigma \subseteq \ker(\varphi\psi)$, gde je σ najmanja polumrežna kongruencija na S, tj. relacija kongruencije čije su klase polugrupe S_α, $\alpha \in Y$. Uzmimo sada $a, b \in S$ tako da je $(a, b) \in \mathcal{S}_d$. Tada $a, b \in S_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i $xay = xby$, za svaki $\beta \leq \alpha$ i sve $x, y \in S_\beta$. Uzmimo da su $x, y \in S_\alpha$. Tada imamo da je $(a, b) \in \sigma$, $(x, y) \in \sigma$ i $(a, x) \in \sigma$, što zbog $\sigma \subseteq \ker(\varphi\psi)$ daje $a\varphi\psi = b\varphi\psi$, $x\varphi\psi = y\varphi\psi$ i $a\varphi\psi = x\varphi\psi$. Prema tome, $a\varphi$, $b\varphi$, $x\varphi$, $y\varphi \in G_\xi$, za neki $\xi \in Z$, i iz $xay = xby$ sledi da je $(xay)\varphi = (xby)\varphi$, odnosno

$$(x\varphi)(a\varphi)(y\varphi) = (x\varphi)(b\varphi)(y\varphi).$$

Odavde, zbog kancelativnosti u grupi G_ξ sledi da je $a\varphi = b\varphi$, odnosno $(a, b) \in \ker\varphi = \theta$. Time smo dokazali da je $\mathcal{S}_d \subseteq \theta$, što nam je i bio cilj. $\square$

Veze između ortodoksne potpuno regularne polugrupe, jake trake grupa i poddirektnog i povratnog proizvoda trake i polumreže grupa razmatrane su i u potpunosti opisane u sledećoj teoremi. Napomenimo da je ekvivalentnost uslova (i), (ii) i (iii), i (i) i (v) dokazao M. Yamada u radu [173] iz 1967. godine, a uslova (iii) i (iv) M. Petrich u radu [120] iz 1973. godine. Dokaz implikacije (i) $\Rightarrow$ (iii), koja se ovde dokazuje kao posledica prethodnih rezultata, znatno je jednostavniji od odgovarajućeg dokaza M. Yamadae. Takođe, i ostali dokazi su novi i slede iz prethodnih rezultata.

Imamo da važi:

Teorema 3.15. *Sledeći uslovi za polugrupu S su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna, ortodoksna i $\mathcal{H}$-kompatibilna;*
(ii) *S je ortodoksna traka grupa;*
(iii) *S je povratni proizvod trake i polumreže grupa;*
(iv) *S je regularna i poddirektni proizvod trake i polumreže grupa;*
(v) *S je jaka traka grupa.*

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ova ekvivalencija neposredno sledi iz Teoreme 1.19.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Prema Teoremama 3.21 i 3.22 imamo da je

$$\mathcal{S}_d \cap \mathcal{H} = \Delta_S \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_d \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{S}_d,$$

pa kako je, prema pretpostavci, i $\mathcal{H}$ relacija kongruencije na S, to dobijamo da je S povratni proizvod polugrupa $S/\mathcal{H}$ i $S/\mathcal{S}_d$. Kako je $S/\mathcal{H}$ traka, a prema Posledici 3.14, $S/\mathcal{S}_d$ je polumreža grupa, to smo, dakle, dobili da važi (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Neka je S povratni proizvod trake E i polugrupe T koja je polumreža grupa u odnosu na neku polugrupu H i neka je φ homomorfizam koji polugrupu E slika na H i ψ homomorfizam koji polugrupu T slika na H. Treba dokazati samo da je S regularna. Uzmimo proizvoljan element $(e,a) \in S$. Prema definiciji povratnog proizvoda je $e\varphi = a\psi$. Uzmimo proizvoljne $f \in V(e)$ i $x \in V(a)$. Tada se lako dokazuje da je $(f,x) \in V((e,a))$ u polugrupi $E \times T$, i da je $f\varphi \in V(e\varphi)$ i $x\psi \in V(a\psi)$ u polugrupi H. Kako je H homomorfna slika i od E i od T, to je H istovremeno i traka i polumreža grupa, odakle sledi da je H polumreža. Dalje, kako svaka polumreža jeste inverzna polugrupa, to je $f\varphi = e\varphi$ i $x\psi = a\psi$, što zbog $e\varphi = a\psi$ daje $f\varphi = x\psi$. Prema tome $(f,x) \in S$ i $(f,x) \in V((e,a))$ u S, čime smo dokazali da je S regularna polugrupa.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $S \subseteq E \times T$ poddirektan proizvod trake E i polugrupe T koja je polumreža grupa, i neka je S regularna polugrupa. Najpre dokazujemo da je S potpuno regularna.

Za proizvoljan element $(e,a) \in S$, zbog regularnosti polugrupe S, postoji $(f,x) \in S$ takav da je $(f,x) \in V((e,a))$. Tada je $f \in V(e)$ u E, tj. $e = efe$ i $f = fef$, i $x \in V(a)$ u T. Kako je T inverzna i potpuno regularna polugrupa, prema Teoremi

1.16, x je jedini inverz od a u T i $ax = xa$. Sada iz (e,a), $(f,x) \in S$ sledi da je $(e,a)(f,x)^3(e,a) \in S$. Međutim,

$$(e,a)(f,x)^3(e,a) = (efe, ax^3a) = (efe, xaxax) = (e,x),$$

čime smo dokazali da je $(e,x) \in S$. Sada imamo da je $(e,x) \in V((e,a))$ i $(e,x)(e,a) = (e,a)(e,x)$. Prema tome, (e,a) je potpuno regularan element, čime smo dokazali da je S potpuno regularna polugrupa.

Uzmimo dalje da je T polumreža Y grupa G_α, $\alpha \in Y$, i za $\alpha \in Y$ označimo sa e_α jedinicu grupe G_α. Neka je

$$B = \{(e,\alpha) \in E \times Y \mid S \cap (\{e\} \times G_\alpha) \neq \varnothing\},$$

i za $(e,\alpha) \in B$ neka je $S_{(e,\alpha)} = S \cap (\{e\} \times G_\alpha)$. Jasno je da je

$$S = \bigcup_{(e,\alpha)\in B} S_{(e,\alpha)} \quad \text{i} \quad S_{(e,\alpha)} \cdot S_{(f,\beta)} \subseteq S_{(ef,\alpha\beta)},$$

za sve (e,α), $(f,\beta) \in B$, pri čemu je, dakle, $S_{(ef,\alpha\beta)} \neq \varnothing$.

Prema tome, B je traka i S je traka B polugrupa $S_{(e,\alpha)}$, $(e,\alpha) \in B$. Kako je S potpuno regularna, za proizvoljno $(e,\alpha) \in B$, polugrupa $S_{(e,\alpha)}$ može sadržati najviše jedan idempotent, jer $\{e\} \times G_\alpha$ ima tačno jedan idempotent, odakle zaključujemo da je $S_{(e,\alpha)}$ grupa. Dakle, S je traka grupa. Konačno, proizvoljna dva idempotenta iz S su oblika (e, e_α), (f, e_β), za neke $e, f \in E$ i $\alpha, \beta \in Y$, i $(e,e_\alpha)(f,e_\beta) = (ef, e_{\alpha\beta}) \in E(S)$. Time smo dokazali da je S ortodoksna.

(ii) $\Rightarrow$ (v). Neka je S ortodoksna polugrupa i neka je S traka I grupa G_i, $i \in I$. Za $i \in I$ označimo sa e_i jedinicu grupe G_i. Jasno je da je $E(S) = \{e_i \mid i \in I\}$ i da je $e_ie_j = e_{ij}$, za proizvoljne $i, j \in I$.

Uzmimo sada $i, j \in I$ tako da je $j \leq i$, tj. da je $j = jij$, i definišimo preslikavanje $\phi_{i,j} : S_i \longrightarrow S_j$ na sledeći način:

$$a_i\phi_{i,j} = e_ja_ie_j,$$

za $a_i \in S_i$.

Kako je $jij = j$, to je zaista $e_ja_ie_j \in S_j$. Jasno je da je $\phi_{i,i}$ identičko preslikavanje na S_i, za svaki $i \in I$. Ako su $i, j \in I$ takvi da je $j \leq i$, tj. da je $jij = j$, i ako su $a_i, b_i \in S_i$, tada je $e_ja_i \in G_{ji}$ i $b_ie_j \in G_{ij}$, pa je $e_ja_i = e_ja_ie_{ji}$ i $b_ie_j = e_{ij}b_ie_j$, odakle sledi

$$(a_ib_i)\phi_{i,j} = e_ja_ib_ie_j = e_ja_ie_{ji}e_{ij}b_ie_j =$$
$$e_ja_ie_{jij}b_ie_j = e_ja_ie_jb_ie_j = (a_i\phi_{i,j})(b_i\phi_{i,j}).$$

Prema tome, $\phi_{i,j}$ je homomorfizam.

Dalje, uzmimo $i, j, k \in I$ tako da je $k \leq j \leq i$, tj. da je $kjk = k$ i da je $jij = j$, i uzmimo $a_i \in S_i$ proizvoljno. Tada je

$$a_i\phi_{i,j}\phi_{j,k} = e_ke_ja_ie_je_k = e_ke_je_ijka_ie_je_k = e_kjijka_ie_je_k = \\ e_ka_ie_kjie_je_k = e_ka_ie_kjijk = e_ka_ie_k = a_i\phi_{i,k},$$

jer je $e_ke_ja_i \in G_{kji}$ i $a_ie_je_k \in G_{ijk}$. Prema tome, $\{\phi_{i,j}\}_{j\leq i}$ je tranzitivni sistem homomorfizama.

Konačno, uzmimo proizvoljne $i, j \in I$, $a_i \in S_i$ i $a_j \in S_j$. Tada je

$$a_ia_j = e_{ij}a_ia_je_{ij} = e_{ij}a_ie_{iji}e_{jij}a_je_{ij} = e_{ij}a_ie_{ijijij}a_je_{ij} \\ = e_{ij}a_ie_{ij}a_je_{ij} = (a_i\phi_{i,ij})(a_j\phi_{j,ij}).$$

Dakle, $S = [I; G_i, \phi_{i,j}]$, tj. S je jaka traka grupa.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $S = [I; G_i, \phi_{i,j}]$, jaka traka I grupa G_i, $i \in I$. Za $i \in I$ neka je e_i jedinica grupe G_i. Jasno, $E(S) = \{e_i \,|\, i \in I\}$, pri čemu za proizvoljne $i, j \in I$ važi $e_ie_j = (e_i\phi_{i,ij})(e_j\phi_{j,ij})$. Međutim, kako su $\phi_{i,ij}$ i $\phi_{j,ij}$ homomorfizmi, i kako homomorfna slika idempotenta jeste idempotent i kako je e_{ij} jedini idempotent u G_{ij}, to je $e_i\phi_{i,ij} = e_j\phi_{j,ij} = e_{ij}$. Prema tome, $e_ie_j = (e_{ij})^2 = e_{ij} \in E(S)$, čime smo dokazali da je S ortodoksna polugrupa. $\square$

Već je istaknuto da na potpuno regularnoj polugrupi Greenove ekvivalencije ne moraju biti kongruencije. Sledećom teoremom data je karakterizacija potpuno regularne polugrupe na kojoj je $\mathcal{L}$ kongruencija.

Teorema 3.16. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna i $\mathcal{L}$-kompatibilna;*
(ii) *S je regularna i $xyz \in Sxzyz$, za sve $x, y, z \in S$;*
(iii) *S je levo poluregularna traka levih grupa;*
(iv) *S je desno regularna traka levih grupa.*

D o k a z . (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S potpuno regularna polugrupa i neka je $\mathcal{L}$ kongruencija na S. Jasno je da je S regularna polugrupa. Dokažimo da je u ovom slučaju $\mathcal{L}$ takođe i tračna kongruencija na S. Neka je $a \in S$ proizvoljan element. Tada, kako je S potpuno regularna, to postoji element $a' \in S$ takav da je $a = aa'a$ i $aa' = a'a$. Odavde,

$$a = aa'a = a'aa = a'a^2 \in Sa^2,$$

i kako je uvek $Sa^2 \subseteq Sa$ to dobijamo da je $Sa = Sa^2$, tj. dobijamo da je $a\mathcal{L}a^2$. Dakle, $\mathcal{L}$ je tračna kongruencija na S. Odavde, prema Teoremi 1.21 je $xyz \in Sxzyz$, za sve $x, y, z \in S$. Znači, (ii) važi.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je S regularna polugrupa i neka $xyz \in Sxzyz$, za sve $x, y, z \in S$. Neka je $a \in S$ proizvoljan element. Tada, kako je S regularna, to postoji element $a' \in S$ takav da je $a = aa'a$. Odavde i na osnovu pretpostavke imamo da

$$a = aa'a \in Saaa'a = Saa = Sa^2,$$

tj. imamo da je S levo regularna polugrupa. Sada, kako je S levo regularna i $xyz \in Sxzyz$, za sve $x, y, z \in S$, to na osnovu Teoreme 1.21 dobijamo da je $\mathcal{L}$ tračna kongruencija na S. Kako je $\mathcal{L}$ tračna kongruencija na S to je $Sa = Sa^2$, za svaki $a \in S$. Dokažimo sada da je S potpuno regularna polugrupa. Neka je $a \in S$ proizvoljan element. Tada, kako je S regularna, to imamo da postoji element $a' \in S$ takav da je $a = aa'a$. Odavde, imamo da je

$$a = aa'a \in aSa = aSa^2,$$

odakle, na osnovu Teoreme 1.17 dobijamo da je S potpuno regularna polugrupa.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Neka je S potpuno regularna polugrupa i neka je $\mathcal{L}$ kongruencija na S. Kao u (i) $\Rightarrow$ (ii) dobijamo da je $\mathcal{L}$ takođe i tračna kongruencija na S. Odavde, prema Teoremi 1.21 imamo da je S levo poluregularna traka Y levo prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka je ξ tračna kongruencija čije su klase ekvivalencije polugrupe $S_\alpha, \alpha \in Y$. Odavde, kako je S potpuno regularna polugrupa, to prema Teoremi 1.23 za svaki $\alpha \in Y$ je i S_α potpuno regularna polugrupa. Dokažimo da je S_α leva grupa, za svaki $\alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljno $\alpha \in Y$ i neka je $a \in S_\alpha$ proizvoljan element. Tada, kako je S_α potpuno regularna, to postoji $a' \in S_\alpha$, takav da je $a = aa'a$ i $aa' = a'a$. Odavde, imamo da $a, aa' \in S_\alpha$ i kako je S_α levo prosta polugrupa i $aa' \in E(S_\alpha)$, to na osnovu Teoreme 1.15 dobijamo da je S_α leva grupa.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Neka je S levo poluregularna traka Y levih grupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Tada je S levo poluregularna traka levo prostih polugrupa, pa na osnovu Teoreme 1.21 imamo da je $\mathcal{L}$ tračna kongruencija na S. Jasno je da je S potpuno regularna jer je svaka $S_\alpha, \alpha \in Y$, regularna polugrupa.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Neka je S potpuno regularna polugrupa i neka je $\mathcal{L}$ kongruencija na S. Tada je $\mathcal{L}$ tračna kongruencija na S. Odavde, prema Teoremi 1.21 imamo da je S desno regularna traka Y levo prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Neka je ξ tračna kongruencija čije su klase ekvivalencije polugrupe $S_\alpha, \alpha \in Y$. Odavde, kako je S potpuno regularna polugrupa, to prema Teoremi 1.23 za svaki $\alpha \in Y$ je i S_α potpuno regularna polugrupa. Dokažimo da je S_α leva grupa, za svaki $\alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljno $\alpha \in Y$ i neka je $a \in S_\alpha$ proizvoljan element. Tada, kako je S_α potpuno regularna, to postoji $a' \in S_\alpha$ takav da je $a = aa'a$ i $aa' = a'a$. Odavde, imamo da $a, aa' \in S_\alpha$ i kako je S_α levo prosta i $aa' \in E(S_\alpha)$, to na osnovu Teoreme 1.15 dobijamo da je S_α leva grupa.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Neka je S desno regularna traka Y levih grupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Tada je S desno regularna traka levo prostih polugrupa, pa na osnovu Teoreme 1.21 imamo da je $\mathcal{L}$ tračna kongruencija na S. Prema tome, $Sa = Sa^2$ za svaki $a \in S$. Jasno je da je S potpuno regularna polugrupa. $\square$

Dualan rezultat takođe važi ako je reč o Greenovoj $\mathcal{R}$ ekvivalenciji.

Teorema 3.17. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna i $\mathcal{R}$-kompatibilna;*
(ii) *S je regularna i $xyz \in xyxzS$, za sve $x, y, z \in S$;*
(iii) *S je desno poluregularna traka desnih grupa;*
(iv) *S je levo regularna traka desnih grupa.*

Karakterizacija skupa idempotenata potpuno regularne polugrupe na kojoj je $\mathcal{L}$, odnosno $\mathcal{R}$, kongruencija, data je sledećim rezultatom.

Teorema 3.18. *Neka S jeste potpuno regularna i $\mathcal{L}$-kompatibilna polugrupa. Tada $E(S)$ jeste levo poluregularna traka.*

Dokaz. Prema Teoremi 3.16, S je desno regularna traka Y levih grupa $S_\alpha, \alpha \in Y$. Dokažimo najpre da je $E(S)$ podpolugrupa od S.

Uzmimo proizvoljne $e, f \in E(S)$. Tada je $e \in S_\alpha$ i $f \in S_\beta$, za neke $\alpha, \beta \in Y$, i iz $\alpha\beta = \beta\alpha\beta$, jer je Y desno regularna traka, sledi da $ef, fef \in S_{\alpha\beta}$. Neka je $ef \in G_g$ i $fef \in G_h$, za neke $g, h \in E(S_{\alpha\beta})$. Tada je

$$g = (ef)(ef)^{-1} = (ef)^{-1}(ef) \quad \text{i} \quad h = (fef)(fef)^{-1} = (fef)^{-1}(fef),$$

odakle je

$$eg = gf = g \quad \text{i} \quad fh = hf = h,$$

i takođe je

$$ef = efg = gef \quad \text{i} \quad fef = fefh = hfef.$$

Sa druge strane,

$$fg = f(ef)(ef)^{-1} = hf(ef)(ef)^{-1} = hfg = hg = h,$$

jer je $E(S_{\alpha\beta})$ levo nulta traka, dok iz istog razloga imamo da je

$$eh = efh = efgh = efg = ef.$$

Kako svaki idempotent leve grupe $S_{\alpha\beta}$ jeste desna jedinica od $S_{\alpha\beta}$, to imamo da je

$$fef = hfef = hef = hefg = heh = he = heg = hg = h.$$

Konačno, odavde sledi da je

$$(ef)^2 = e(fef) = eh = ef.$$

prema tome, $E(S)$ je podpolugrupa od S. Jasno je da je $E(S)$ desno regularna traka Y levo nultih traka $E(S_\alpha), \alpha \in Y$, pa prema Teoremi 3 iz rada [118], $E(S)$ je levo poluregularna traka. $\square$

Posledica 3.25. *Neka S jeste potpuno regularna, $\mathcal{L}$-kompatibilna i $\mathcal{R}$-kompatibilna polugrupa. Tada $E(S)$ jeste regularna traka.*

Dokaz. Prema Teoremi 3.18, kako je S potpuno regularna i $\mathcal{L}$-kompatibilna, dobijamo da je $E(S)$ levo poluregularna traka. Takođe, prema dualnoj teoremi, kako je S potpuno regularna i $\mathcal{R}$-kompatibilna, dobijamo da je $E(S)$ desno poluregularna traka. Odavde, kako je $E(S)$ i levo i desno poluregularna traka, na osnovu Leme 1 iz rada [91] dobijamo da je $E(S)$ regularna traka. □

Kako smo prema Teoremama 3.21 i 3.22, i Posledici 3.24 dobili da se potpuno regularna polugrupa S može predstaviti kao povratni proizvod svojih faktor polugrupa $S/\mathcal{S}_l$ i $S/\mathcal{R}$, i $S/\mathcal{S}_r$ i $S/\mathcal{L}$, u slučaju kada su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ kongruencije na S, to je od velikog značaja opis strukture ovih faktor polugrupa. Karakterizacija skupa idempotenata faktor polugrupa i njihova veza sa skupom idempotenata cele polugrupe data je sledećim rezultatima.

Teorema 3.19. *Neka S jeste potpuno regularna polugrupa. Tada:*

(a) *$E(S)$ je levo poluregularna traka ako i samo ako $E(S/\mathcal{S}_l)$ jeste desno regularna traka;*

(b) *$E(S)$ je desno poluregularna traka ako i samo ako $E(S/\mathcal{S}_r)$ jeste levo regularna traka.*

Dokaz. Kako S jeste potpuno regularna polugrupa, to S jeste polumreža Y potpuno prostih polugrupa $S_\alpha, \alpha \in Y$.

(a) Neka $E(S)$ jeste levo poluregularna traka. Tada je S_α pravougaona grupa, tj. $E(S_\alpha)$ je pravougaona traka, za svaki $\alpha \in Y$. Neka su $u, v \in E(S/\mathcal{S}_l)$ proizvoljni elementi. Tada je $u = e\varphi$ i $v = f\varphi$, za neke $e, f \in E(S)$, gde je φ prirodni homomorfizam iz S na $S/\mathcal{S}_l$, prema Lallementovoj lemi. Neka je $e \in S_\alpha$ i $f \in S_\beta$, za neke $\alpha, \beta \in Y$, neka je $\gamma \in Y$ takav da je $\gamma \leq \alpha\beta$, tj. $\gamma\alpha\beta = \alpha\beta\gamma = \gamma$, i neka je $x \in S_\gamma$ proizvoljan element. Uočimo proizvoljan $x' \in V(x)$. Tada , $g = x'x \in E(S_\gamma)$ i imamo da je $gefg = g(gef)g = g$, jer je $gef \in E(S_\gamma)$, i $E(S_\gamma)$ je pravougaona traka. Prema tome,

$$gef = gefgfef = gfef,$$

odnosno

$$xef = xgef = xgfef = xfef.$$

To znači da je $(ef, fef) \in \mathcal{S}_l$, tj. da je $uv = vuv$. Dakle, $E(S/\mathcal{S}_l)$ je desno regularna traka.

Obratno, neka $E(S/\mathcal{S}_l)$ jeste desno regularna traka. Najpre treba dokazati da je $E(S)$ podpolugrupa od S, odnosno, da je $E(S_\alpha)$ podpolugrupa od S_α, za svaki

$\alpha \in Y$. Neka je $\alpha \in Y$ proizvoljan element i uzmimo neke $e, f \in E(S_\alpha)$. Označimo sa φ prirodni homomorfizam iz S na $S/\mathcal{S}_l$. Tada $e\varphi, f\varphi \in E(S/\mathcal{S}_l)$, odakle kako je $E(S/\mathcal{S}_l)$ podpolugrupa od $E(S)$ i φ homomorfizam, dobijamo da je $(e\varphi)(f\varphi) = ((e\varphi)(f\varphi))^2$, tj. dobijamo da je $(ef)\varphi = ((ef)^2)\varphi$, što znači da je $(ef, (ef)^2) \in \mathcal{S}_l$. Međutim, na osnovu prethodnog je $xef = x(ef)^2$, za svaki $\beta \leq \alpha$ i svaki $x \in S_\beta$. Ako je $\beta = \alpha$ i $x = e$ dobijamo da je $ef = (ef)^2$. Prema tome, $E(S)$ je podpolugrupa od S.

Dalje, neka su uočeni proizvoljni $x, y, z \in E(S)$. Tada $x \in E(S_\alpha), y \in E(S_\beta)$ i $z \in E(S_\gamma)$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \in Y$. Kako je $E(S/\mathcal{S}_l)$ desno poluregularna traka, to je $(xy, yxy) \in \mathcal{S}_l$, za svaki $x, y \in E(S)$, i pri tom $yz, zyz \in S_{\beta\gamma}$. Sa druge strane, $xyzx \in S_{\alpha\beta\gamma}$, gde je $\alpha\beta\gamma \leq \alpha\beta$. Dakle, iz $(yz, zyz) \in \mathcal{S}_l, yz, zyz \in S_{\beta\gamma}, xyzx \in S_{\alpha\beta\gamma}$ i $\alpha\beta\gamma \leq \beta\gamma$ sledi da je

$$xyzxyz = xyzxzyz.$$

Međutim, kako je $xyzxyz = (xyz)^2 = xyz$, to na osnovu prethodnog dobijamo da je

$$xyz = xyzxzyz.$$

Prema tome, $E(S)$ je levo poluregularna traka.

(b) Ovu ekvivalenciju dokazujemo na isti način kao ekvivalenciju (a). $\square$

Lema 3.5. *Neka S jeste potpuno regularna polugrupa i neka je $E(S)$ regularna traka. Tada:*

(a) *$E(S/\mathcal{S}_l)$ je desno regularna traka;*
(b) *$E(S/\mathcal{S}_r)$ je levo regularna traka.*

Dokaz. Kako je $E(S)$ regularna traka to je ona istovremeno i levo i desno poluregularna traka. Odavde, na osnovu prethodne Teoreme 3.19 neposredno dobijamo da je $E(S/\mathcal{S}_l)$ desno regularna, a $E(S/\mathcal{S}_r)$ levo regularna traka. $\square$

Opis povratnih proizvoda potpuno regularne, $\mathcal{L}$-kompatibilne i $\mathcal{R}$-kompatibilne polugrupe dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 3.20. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *S je potpuno regularna, $\mathcal{L}$-kompatibilna i $\mathcal{R}$-kompatibilna;*
(ii) *S je regularna i $xyz \in xyxzSxzyz$, za sve $x, y, z \in S$;*
(iii) *S je regularna traka grupa;*
(iv) *S je povratni proizvod regularne trake i polumreže grupa;*
(v) *S je povratni proizvod levo regularne trake i polumreže desnih grupa;*
(vi) *S je povratni proizvod desno regularne trake i polumreže levih grupa.*

D o k a z . (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ova ekvivalencija neposredno sledi na osnovu tvrđenja Teoreme 3.16 i njoj dualnog tvrđenja Teoreme 3.17.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Prema pretpostavci S je i $\mathcal{H}$-kompatibilna polugrupa, odakle prema Teoremi 1.16 dobijamo da je S traka grupa. Kako je prema Posledici 3.25, $E(S)$ regularna traka, to je jasno da je S regularna traka grupa.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Neka je S regularna traka Y grupa $G_\alpha, \alpha \in Y$. Uzmimo proizvoljne $x, y, z \in S$. Tada $x \in G_\alpha, y \in G_\beta$ i $z \in G_\gamma$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \in Y$. Odavde,

$$xyz \in G_\alpha G_\beta G_\gamma \subseteq G_{\alpha\beta\gamma}.$$

Takođe, kako je Y regularna traka i $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, to imamo da je

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta\gamma)^2 = \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\gamma,$$

i

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta\gamma)^2 = \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\gamma.$$

Sa druge strane,

$$xyxzxyz \in G_{\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma}$$

i

$$xyzxzyz \in G_{\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma}.$$

Dakle, dobili smo da elementi $xyz, xyxzxyz, xyzxzyz \in G_{\alpha\beta\gamma}$, odakle, kako je $G_{\alpha\beta\gamma}$ grupa, postoji jedinstveno rešenje po $u \in G_{\alpha\beta\gamma}$ jednačine $xyz = xyxzxyzuxyzxzyz$ u $G_{\alpha\beta\gamma}$. Prema tome, $xyz \in xyxzSxzyz$, za sve $x, y, z \in S$. Jasno je da je S potpuno regularna. Znači, (ii) važi.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Kako su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ kongruencije na S to je i $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ kongruencija na S, kao presek kongruencija na polugrupi S. Prema Teoremi 3.18 dobijamo da je $E(S)$ podpolugrupa od S. Odavde, kako je S regularna i $E(S)$ je podpolugrupa od S, to je S ortodoksna polugrupa. Sada za polugrupu S imamo da je potpuno regularna, ortodoksna i $\mathcal{H}$-kompatibilna, odakle, prema Teoremi 3.15, dobijamo da je S povratni proizvod trake B i polumreže grupa. Takođe, prema Posledici 3.25 imamo da je $E(S)$ regularna traka. Odavde na osnovu Lallementove leme je B homomorfna slika od $E(S)$ odakle dobijamo da je B takođe regularna traka. Znači, dobijamo da je S povratni proizvod regularne trake i polumreže grupa.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Neka je S povratni proizvod regularne trake i polumreže grupa. Tada je jasno da je S povratni proizvod trake i polumreže grupa, odakle, na osnovu Teoreme 3.15 imamo da je S potpuno regularna, ortodoksna i $\mathcal{H}$-kompatibilna polugrupa, tj. imamo da je S ortodoksna traka grupa. Da bi dokazali tvrđenje trebamo dokazati da je $E(S)$ regularna traka. U tom smislu, prema pretpostavci imamo da je $E(S)$ povratni proizvod regularne trake i polumreže, što je regularna traka, jer je svaka polumreža regularna traka.

(i) $\Rightarrow$ (v). Kako je S potpuno regularna i $\mathcal{R}$-kompatibilna, prema Posledici 3.24, imamo da je S povratni proizvod polugrupa $S/\mathcal{S}_l$ i $S/\mathcal{R}$. Takođe, prema Posledici 3.25 je $E(S)$ regularna traka, odakle prema Lemi 3.5 je $E(S/\mathcal{S}_l)$ desno regularna traka. Odavde, na osnovu duala Teoreme 4.3.10 [119] dobijamo da je $S/\mathcal{S}_l$ polumreža desnih grupa, jer je $S/\mathcal{S}_l$ potpuno regularna polugrupa, kao homomorfna slika potpuno regularne polugrupe u odnosu na prirodni homomorfizam indukovan kongruencijom $\mathcal{S}_l$ na S, i $E(S/\mathcal{S}_l)$ je desno regularna traka. Dokažimo još da je $S/\mathcal{R}$ levo regularna traka. Lako se proverava da je $\mathcal{R}$ tračna kongruencija na S, odakle za proizvoljne $x, y \in S$ neposredno dobijamo da je $xy \,\mathcal{R}\, xyx$. Odavde je $S/\mathcal{R}$ levo regularna traka. Prema tome, važi (v).

(v) $\Rightarrow$ (iii). Neka je S povratni proizvod levo regularne trake i polumreže desnih grupa. Prema dualu Teoreme 3.15, S je ortodoksna traka grupa. Takođe, i $E(S)$ je povratni proizvod levo regularne trake i polumreže desnih grupa. Dalje, kako su i levo regularna traka i polumreža desnih grupa regularne trake, to je $E(S)$ regularna traka kao povratni proizvod regularnih traka. Dakle, S je regularna traka grupa.

(i) $\Rightarrow$ (vi). Ova implikacija se dokazuje na isti način kao implikacija (i) $\Rightarrow$ (v).

(vi) $\Rightarrow$ (iii). Sledi na isti način kao (v) $\Rightarrow$ (iii). $\square$

3.3. Nil-ekstenzije pravougaonih grupa

Postoji nekoliko strukturnih karakterizacija polugrupa koje su nil-ekstenzije pravougaonih grupa. Na primer, one su okarakterisane kao π-regularne polugrupe čiji idempotentni elementi obrazuju pravougaonu traku, ili kao potpuno Arhimedove polugrupe čiji idempotentni elementi obrazuju podpolugrupu, i tako dalje. Najinteresantniju karakterizaciju nil-ekstenzija pravougaonih grupa dao je M. S. Putcha [132] u terminima poddirektnih proizvoda polugrupa, kao i X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo [137] u istim terminima.

M. S. Putcha [132] je dokazao teoremu u kojoj je karakterizacija pomenutih polugrupa data na dva načina: kao poddirektan proizvod grupe i nil-ekstenzije pravougaone trake, i kao poddirektan proizvod grupe, nil-ekstenzije levo nulte trake i nil-ekstenzije desno nulte traka. On je ovu teoremu dokazao koristeći poznatu Birkhoffovu teoremu o reprezentaciji prema kojoj svaka algebra može biti predstavljena kao poddirektan proizvod poddirektno nerazloživih algebri. U stvari, svaka poddirektno nerazloživa polugrupa u klasi nil-ekstenzija pravougaonih grupa je ili grupa, ili nil-ekstenzija levo nulte trake, ili nil-ekstenzija desno nulte trake.

K. P. Shum i X. M. Ren su u [147] dali opšti metod za konstrukciju potpuno Arhimedovih polugrupa uopštavajući poznat Rees-Sushkevitschev metod za konstrukciju potpuno prostih polugrupa. Kao opštiji slučaj ove konstrukcije, X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo su u [137] konstruisali sve nil-ekstenzije pravougaonih grupa, oni su dali drugi dokaz teoreme koja opisuje nil-ekstenzije pravougaonih grupa kao povratni proizvod nil-ekstenzije leve grupe i nil-ekstenzije desne grupe u odnosu na nil-ekstenziju grupe.

Postavlja se pitanje: Koje relacije kongruencije realizuju Putchainu dekompoziciju nil-ekstenzija pravougaonih grupa, kao i dekompoziciju koju su opisali X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo? U ovom odeljku dokazujemo da pomenute dekompozicije realizuju relacije kongruencije koje smo definisali i razmatrali u prethodnim odeljcima.

U nastavku, predmet našeg proučavanja biće potpuno Arhimedove polugrupe. Kao što je poznato, za polugrupu S kažemo da je potpuno Arhimedova ako je ona Arhimedova polugrupa i ako ona ima primitivan idempotentan element, ili ekvivalentno, ako je polugrupa S nil-ekstenzija potpuno proste polugrupe. U ovom slučaju, ova potpuno prosta podpolugrupa od S je jezgro polugrupe S.

Ako je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K i ako je $E = E(S)$, tada je $L(E) = R(E) = K$, tj. podpolugrupa E je duo podskup polugrupe S, odakle na osnovu Leme 3.1 imamo da je $\mathcal{K}_{i,E} = \mathcal{K}_{i,K}$, za svaki $i \in \{l, r, d\}$. Sa druge strane imamo da važi sledeći rezultat.

Lema 3.6. *Neka je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K. Tada:*

(i) *$\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$ su relacije kongruencije na S;*

(ii) *$\mathcal{D} = \rho_K$ i $S/\mathcal{D}$ je nil-polugrupa;*

(iii) *$S/\mathcal{L}$ je nil-ekstenzija desno nulte trake, $S/\mathcal{R}$ je nil-ekstenzija levo nulte trake i $S/\mathcal{H}$ je nil-ekstenzija pravougaone trake.*

Dokaz. Tvrđenja (i) i (ii) je dokazao L. N. Shevrin u radu [145]. Tvrđenje (iii) je neposredna posledica tvrđenja (i) i (ii). $\square$

U sledećem rezultatu su razmatrane osobine napred definisanih relacija kongruencije na potpuno Arhimedovim polugrupama. Dokazano je da pomenute relacije kongruencije obrazuju permutabilne parove faktor kongruencija.

Teorema 3.21. *Neka je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K. Tada je*

$$\mathcal{K}_{l,K} \ \cap \ \mathcal{R} = \mathcal{K}_{r,K} \ \cap \ \mathcal{L} = \mathcal{K}_{d,K} \ \cap \ \mathcal{H} = \overline{\mathcal{K}}_{l,K} \ \cap \ \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \Delta_S.$$

Dokaz. Neka je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K.

Dokažimo, prvo, da jednakost $\mathcal{K}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$ važi na S. U tom smislu, uzmimo elemente $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{l,K} \cap \mathcal{R}$. Tada razlikujemo dva slučaja. Ako $a, b \notin K$, tada iz pretpostavke da je $(a, b) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} = \rho_K$ sledi da je $a = b$, a to je i trebalo dokazati. Dalje, pretpostavimo da $a, b \in K$. Kako su elementi a i b u relaciji $\mathcal{R}$ na polugrupi S, to su oni u relaciji $\mathcal{R}$ i na podpolugrupi K. Tada $a, b \in R$, gde je R neka $\mathcal{R}$-klasa polugrupe K. Kako je K potpuno prosta polugrupa, to imamo da je R desna grupa i da je e leva jedinica u R, za svaki $e \in E(R)$. Odavde imamo da je $a = ea$ i $b = eb$, za svaki $e \in E(R)$. Dalje, kako $(a, b) \in \mathcal{K}_{l,K}$ dobijamo da je $ea = eb$, za svaki $e \in K$. Na osnovu prethodnog dobijamo da je $a = b$, što je i trebalo dokazati. Znači, $\mathcal{K}_{l,K} \cap \mathcal{R} \subseteq \Delta_S$, i kako obratna inkluzija uvek važi, to imamo da je $\mathcal{K}_{l,K} \cap \mathcal{R} = \Delta_S$.

Jednakost $\mathcal{K}_{r,K} \cap \mathcal{L} = \Delta_S$ dokazuje se na isti način kao i prethodna jednakost.

Dalje, dokažimo jednakost $\mathcal{K}_{d,K} \cap \mathcal{H} = \Delta_S$. Uzmimo proizvoljne $a, b \in S$ takve da je $(a, b) \in \mathcal{K}_{r,K} \cap \mathcal{H}$. Kao i u dokazu prethodne jednakosti, ako $a, b \notin K$, tada dobijamo da je $a = b$. Dalje, neka $a, b \in K$. Tada iz pretpostavke da je $(a, b) \in \mathcal{H}$ dobijamo da $a, b \in G_e$, za neki $e \in E(S)$, odakle imamo da je $a = eae$ i $b = ebe$. Ali, kako je $(a, b) \in \mathcal{K}_{d,K}$, to dobijamo da je $eae = ebe$, za svaki $e \in K$. Odavde, na osnovu napred navedenog sledi da je $a = b$. Znači, dobili smo da je $\mathcal{K}_{d,K} \cap \mathcal{H} \subseteq \Delta_S$, i kako obratna inkluzija uvek važi dobijamo da je $\mathcal{K}_{d,K} \cap \mathcal{H} = \Delta_S$.

Kako je S Arhimedova polugrupa sa jezgrom K, tada je K potpuno prosta polugrupa. Takođe, polugrupa je potpuno prosta ako i samo ako je prosta i potpuno regularna. Prema tome imamo da je S polugrupa sa potpuno regularnim idealom K. Dalje, na osnovu Teoreme 3.1, kako je svaka potpuno regularna plugrupa takođe i regularna polugrupa, dobijamo da je

$$\overline{\mathcal{K}}_{l,K} \cap \overline{\mathcal{K}}_{r,K} = \Delta_S.$$

□

Koristeći prethodnu teoremu na potpuno Arhimedovoj polugrupi neposredno dobijamo da važi sledeći rezultat.

Posledica 3.26. *Neka je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K. Tada je polugrupa S poddirektan proizvod sledećih polugrupa:*

(i) $S/\mathcal{K}_{l,K}$ *i* $S/\mathcal{R}$*;*
(ii) $S/\mathcal{K}_{r,K}$ *i* $S/\mathcal{L}$*;*
(iii) $S/\mathcal{K}_{d,K}$ *i* $S/\mathcal{H}$*;*
(iv) $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$*,* $S/\mathcal{L}$ *i* $S/\mathcal{R}$*;*
(v) $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ *i* $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$*;*
(vi) $S/\mathcal{D}$*,* $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ *i* $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$*.*

Nažalost, u opštem slučaju, kada je S potpuno Arhimedova polugrupa, mi nemamo mnogo informacija o strukturi faktor polugrupa $S/\mathcal{K}_{i,K}$ i $S/\overline{\mathcal{K}}_{i,K}$, za $i \in \{l, r, d\}$. Međutim, u nastavku ćemo opisati strukturu ovih polugrupa u slučaju kada idempotentni elementi polugrupe S obrazuju podpolugrupu, tj. u slučaju kada je polugrupa S nil-ekstenzija pravougaone grupe.

Prvo, možemo dokazati sledeću lemu.

Lema 3.7. *Neka je polugrupa S nil-ekstenzija pravougaone grupe. Tada je $eaf = efaef$, za svaki $a \in S$ i sve $e, f \in E(S)$.*

Dokaz. Neka je polugrupa S nil-ekstenzija pravougaone grupe K. Uzmimo proizvoljno element $a \in S$ i proizvoljne $e, f \in E(S)$. Kako je K ideal od S, to imamo da $ea \in K$. Odavde dobijamo da $ea \in G_g$, za neki $g \in E(S)$. Sada imamo da je $eag = g$ i da je $gf = egf = ef$, jer je $E(S)$ pravougaona traka. Na osnovu prethodnog dobijamo da je $eaf = eagf = eaef$. Odavde dalje imamo da $ae \in G_h$, za neki $h \in E(S)$. Sada imamo da je $hef = h$ i da je $eh = ehef = ef$. Dakle, dobili smo da je

$$eaf = eaef = ehaef = efaef,$$

što je i trebalo dokazati. □

Sledeća teorema je jedan od najvažnijih rezultata u ovom odeljku, a takođe i u ovoj glavi. Ona daje neke nove karakterizacije polugrupa koje su nil-ekstenzije pravougaonih grupa u terminima relacija kongruencije koje su definisane i razmatrane u ovom i u prethodnim odeljcima ove glave.

Teorema 3.22. *Neka je S potpuno Arhimedova polugrupa sa jezgrom K. Tada su na S sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *S je nil-ekstenzija pravougaone grupe;*
(ii) *$S/\mathcal{K}_{d,K}$ je nil-ekstenzija grupe;*
(iii) *$S/\mathcal{K}_{d,K}$ je grupa;*
(iv) *$S/\mathcal{K}_{l,K}$ je nil-ekstenzija desne grupe;*
(v) *$S/\mathcal{K}_{r,K}$ je nil-ekstenzija leve grupe;*
(vi) *$S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ je nil-ekstenzija grupe;*
(vii) *$S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ je nil-ekstenzija desne grupe;*
(viii) *$S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ je nil-ekstenzija leve grupe.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka na S važi tvrđenje (i). Tada je podpolugrupa K polugrupe S pravougaona grupa. Dalje, uzmimo proizvoljan element $a \in S$ i uzmimo proizvoljne $e, f, g \in E(S)$. Na osnovu prethodne Leme 3.7, imamo da je

$$e(ag)f = ea(gf) = (egf)a(egf) = efaef = eaf,$$

odakle dobijamo da $(a, ag) \in \mathcal{K}_{d,K}$. Kako $ag \in K = Reg(S)$, tada dobijamo da svaka $\mathcal{K}_{d,K}$-klasa polugrupe S sadrži regularan element, a na osnovu toga dobijamo da je faktor polugrupa $S/\mathcal{K}_{d,K}$ regularna polugrupa.

Sa druge strane, za proizvoljne elemente $e, f, g, h \in E(S)$, imamo da je $egf = ef = ehf$, odakle dobijamo da $(g, h) \in \mathcal{K}_{d,K}$. Kako svaka $\mathcal{K}_{d,K}$-klasa polugrupe S, koja je idempotent u polugrupi $S/\mathcal{K}_{d,K}$, sadrži idempotent polugrupe S, to dobijamo da faktor polugrupa $S/\mathcal{K}_{d,K}$ jeste regularna polugrupa koja sadrži tačno jedan idempotent, tj. dobijamo da je $S/\mathcal{K}_{d,K}$ grupa, što je i trebalo dokazati.

(i) $\Rightarrow$ (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii). Kao što je poznato, faktor polugrupa π-regularne polugrupe je takođe π-regularna polugrupa, na osnovu toga imamo da su sve faktor polugrupe $S/\mathcal{K}_{d,K}$, $S/\mathcal{K}_{l,K}$ i $S/\mathcal{K}_{r,K}$, $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, $S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i $S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ takođe π-regularne polugrupe. Kao u dokazu prve implikacije (i) $\Rightarrow$ (ii) dobijamo da $S/\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$ sadrži tačno jedan idempotent, odakle neposredno slede dokazi tvrđenja (iii) i (vi). Sa druge strane, za proizvoljne elemente $e, f, g \in E(S)$ imamo da je $efg = eg$ i da je $fge = fe$, što znači da $(fg, g) \in \overline{\mathcal{K}}_{l,K}$ i da $(fg, f) \in \overline{\mathcal{K}}_{r,K}$, za sve $f, g \in E(S)$. Dakle, na osnovu prethodnog dobijamo da je $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{l,K})$ desno nulta traka i da je polugrupa $E(S/\overline{\mathcal{K}}_{r,K})$ levo nulta traka, odnosno dobijamo da tvrđenja (iv), (vii), (v) i (viii) važe na S.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ako je faktor polugrupa $S/\mathcal{K}_{d,K}$ grupa, tada imamo da $(g, h) \in \mathcal{K}_{d,K}$, za sve $g, h \in E(S)$. Odavde je $egf = ehf$, za sve $e, f, g, h \in E(S)$. Sada, ako uzmemo da je $e = g = f$, dobijamo da je $g = ghg$, za sve $g, h \in E(S)$. Dakle, dobili smo da je $E(S)$ pravougaona traka, što je i trebalo dokazati.

(iii) $\Rightarrow$ (i). i (vi) $\Rightarrow$ (i). Ove dve implikacije mogu se dokazati na isti način kao i prethodna implikacija (ii) $\Rightarrow$ (i).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Kako je svaka $\mathcal{K}_{l,K}$-klasa idempotenta polugrupe S takođe idempotent faktor polugrupe $S/\mathcal{K}_{l,K}$ i kako je pritom polugrupa $E(S/\mathcal{K}_{l,K})$ desno nulta traka, to imamo da $(gh, h) \in \mathcal{K}_{l,K}$, za sve $g, h \in E(S)$. Odavde dobijamo da je $egh = eh$, za sve $e, g, h \in E(S)$. Sada, ako uzmemo da je $e = h$, dobijamo da je $h = hgh$, za sve $g, h \in E(S)$, tj. dobijamo da je $E(S)$ pravougaona traka. Dakle, dobili smo da tvrđenje (i) važi na S.

(v) $\Rightarrow$ (i), (vii) $\Rightarrow$ (i) i (viii) $\Rightarrow$ (i). Ove implikacije dokazujemo na isti način kao prethodnu implikaciju (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Sada, dajemo novi dokaz sledeće dekompozicione teoreme, koji je jednostavniji od dokaza koga je M. S. Putcha dao u radu [132] iz 1973. godine i dokaza koga su dali X. M. Ren, K. P Shum i Y. Q. Guo u radu [137] iz 1999. godine.

Teorema 3.23. *Sledeći uslovi na polugrupi S su ekvivalentni:*

(i) *S je nil-ekstenzija pravougaone grupe;*

(ii) *S je poddirektan proizvod grupe i nil-ekstenzije pravougaone trake;*

(iii) *S je poddirektan proizvod grupe, nil-ekstenzije levo nulte trake i nil-ekstenzije desno nulte trake;*

(iv) *S je povratni proizvod nil-ekstenzije leve grupe i nil-ekstenzije desne grupe u odnosu na nil-ekstenziju grupe.*

Dokaz. Ekvivalentnost uslova (i), (ii) i (iii) dokazao je M. S. Putcha u radu [132], a ekvivalenciju (i) $\Leftrightarrow$ (iv). dokazali su X. M. Ren, K. P. Shum i Y. Q. Guo u radu [137]. Drugi, novi dokaz ovih ekvivalencija daćemo koristeći relacije koje smo definisali u prethodnim odeljcima ovog dela disertacije. Dakle, implikacija (i) $\Rightarrow$ (ii). je neposredna posledica Teoreme 3.22 i Posledice 3.26 (3), implikacija (i) $\Rightarrow$ (iii). je posledica Teoreme 3.22, Leme 3.6 i Posledice 3.26 (4) i implikacija (i) $\Rightarrow$ (iv). neposredno sledi na osnovu Teoreme 3.22 i Teoreme 3.1.

Sa druge strane, dokazi obratnih implikacija su izostavljeni u radovima [132] i [137] kao lakši delovi dokaza. Ali, u pomenutim radovima, ovi delovi dokaza nisu tako jednostavni zato što se π-regularnost (a takođe i regularnost) ne očuvava kroz poddirektne proizvode u opštem slučaju. Za dokaz obratnih implikacija koristimo π-regularnost, koja se u ovom slučaju očuvava kroz poddirektne proizvode ako ih konstruišemo pomoću relacija kongruencije koje smo definisali u ovom i u prethodnim odeljcima ove glave.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Neka je polugrupa $S \subseteq G \times T$ poddirektan proizvod grupe G i polugrupe T koja je nil-ekstenzija pravougaone trake. Tada je $E(S) \subseteq E(G) \times E(T)$, i ako je $E(S)$ neprazan skup, tada je $E(S)$ pravougaona traka. Dakle, da bi dokazali ovo tvrđenje dovoljno je još samo dokazati da S jeste π-regularna polugrupa. U tom smislu, neka je $u \in S$ proizvoljan element. Tada je $u = (a, x)$, za neki $a \in G$ i neki $x \in T$. Označimo sa b inverzni element elementa a u grupi G. Tada postoji element $y \in T$, takav da je $(b, y) \in S$ i postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $x^n, y^n \in Reg(T) = E(T)$. Kako je $E(T)$ pravougaona traka, to imamo da je

$$u^n v^n u^n = (a^n b^n a^n, x^n y^n x^n) = (a^n, x^n) = u^n,$$

gde je $v = (b, y)$. Dakle, $u^n \in Reg(S)$, što je i trebalo dokazati.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Neka je $S = \{(u, v) \in P \times Q \mid u\varphi = v\psi\}$ povratni proizvod polugrupa P i Q u odnosu na polugrupu H i neka je φ homomorfizam koji polugrupu P slika na polugrupu H i neka je ψ homomorfizam koji polugrupu Q slika na polugrupu H, gde je P nil-ekstenzija leve grupe, Q je nil-ekstenzija desne grupe i H je nil-ekstenzija grupe. Tada je $E(S) \subseteq E(P) \times E(Q)$ i ako je $E(S)$ neprazan skup, to je $E(S)$ pravougaona traka. Odavde, da bi dokazali ovu implikaciju, dovoljno je još dokazati da S jeste π-regularna polugrupa.

Dalje, uzmimo proizvoljan element $a \in S$. Tada je $a = (u, v) \in P \times Q$ i pritom je $u\varphi = v\psi$. Sada, imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da su u^n i v^n regularni elementi. Neka je $x \in V(u^n)$ i $y \in V(v^n)$. Tada je $x\varphi$ inverzni element elementa $(u\varphi)^n$, $y\psi$ je inverzni element elementa $(v\psi)^n$ i takođe je $(u\varphi)^n = (v\psi)^n$. Dalje, kako regularan element nil-ekstenzije grupe može imati najviše jedan inverzni element, to dobijamo da je $x\varphi = y\psi$. Sada imamo da $(x, y) \in S$, i da je on inverzni element elementa a^n. Dakle, S je π-regularna polugrupa.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ova implikacija se može dokazati na isti način kao i prethodna implikacija (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Na kraju, napomenimo još jednom da su osnovni pojmovi i oznake koje smo koristili u ovoj glavi u skladu sa pojmovima i oznakama koje u svojoj knjizi koriste S. Bogdanović i M. Ćirić [21]. Takođe, rezultati koji su prezentovani u ovoj glavi su originalni i neki od njih su već publikovani u radovima [123] i [52].

Glava 4

Najmanje kongruencije na automatu

Najmanje kongruencije na automatu su predmet proučavanja ove glave. Glavni i najvažniji rezultati jesu teorijske osnove za konstrukciju kao i sama konstrukcija algoritama kojima se testira pripadnost nekog konačnog automata pseudovarijetetu konačnih utrapljivih, lokalno trap-direktabilnih, trap-direktabilnih, uopšteno direktabilnih i lokalno direktabilnih automata. Takođe, određuju se i opisuju, za svaki od napred nabrojanih pseudovarijeteta konačnih automata, najmanje kongruencije na konačnom automatu čiji faktor automat pripada datom pseudovarijetetu. Analogne probleme za pseudovarijetet konačnih direktabilnih automata proučavali su i opisali B. Imreh i M. Steinby u radu [88], a J. Demel, M. Demelová i V. Koubek u radu [60] opisali su slične probleme na algebrama.

Osnovne definicije i rezultati koji nisu navedeni u prvoj glavi dati su u prvom odeljku ove glave. Predstavljene su interpretacije algebarskih pojmova u terminima Teorije automata. Takođe, date su definicije nekih klasa konačnih automata koje razmatramo u ostalim odeljcima ove glave.

Polazeći od skupa svih trapova kod konačnog automata, u drugoj glavi definiše se rastući niz podskupova automata. Za uniju tih skupova proverava se da li se ona stabilizuje na nekom skupu iz niza i da li se pritom ona poklapa sa celim automatom. Kako je pomenuta unija utrapljiv automat, to je i dati automat utrapljiv ako dolazi do pomenutog poklapanja unije sa celim, u suprotnom automat nije utrapljiv. Ovaj rezultat omogućuje konstrukciju algoritma za testiranje utrapljivosti konačnog automata. Takođe, definiše se i najmanja utrapljujuća kongruencija na automatu.

Modifikacijom algoritama iz prethodnog odeljka u trećem odeljku dati su algoritmi kojima se testira trap-direktabilnost i konstruiše najmanja trap-usmeravajuća kongruencija na konačnom automatu. Algoritam za testiranje trap-direktabilnosti je ustvari algoritam za testiranje utrapljivosti sa dodatim uslovom provere da li je skup svih trapova takvog automata jednoelementan skup.

U četvrtom odeljku se daje algoritam kojim se automat razlaže u najveću direktnu sumu i pritom se određuju monogeni i dualni monogeni podautomati datog automata. Zatim se pomoću algoritama datih u prethodnom odeljku na monogenim podautomatima testira trap-direktabilnost i nalazi najmanja trap-usmeravajuća kongruencija. Na taj način se testira lokalna trap-direktabilnost i nalazi najmanja lokalno trap-direktabilna kongruencija na konačnom automatu.

Peti odeljak ove glave posvećen je direktabilnim automatima. Kod ovih automata usmeravajuće reči dovode sva stanja automata u jedno stanje vršeći na taj način neku sinhronizaciju rada automata. Ova klasa automata je jedna od najvažnijih i najčešće izučavanih klasa automata. Direktabilni automati predstavljaju dosta široku klasu automata jer u klasu direktabilnih automata, kao podklase, uključene su klase lokalno direktabilnih, trap-direktabilnih, lokalno trap-direktabilnih, utrapljivih, uopšteno direktabilnih automata, i druge. Dalje, u ovom odeljku date su teorijske osnove za konstrukciju, kao i sama konstrukcija algoritama kojima se testira direktabilnost i nalazi najmanja direktabilna kongruencija na proizvoljnom konačnom automatu.

Uopšteno direktabilni automati opisani su u šestom odeljku. Ova klasa automata predstavlja još jedno uopštenje klase direktabilnih automata. Takođe, kao i u prethodnim odeljcima predstavljeni su algoritmi kojima se testira uopštena direktabilnost i nalazi najmanja uopšteno direktabilna kongruencija na automatu.

U poslednjem, sedmom odeljku ove glave dati su algoritmi kojima se testira lokalna direktabilnost i nalazi najmanja lokalno direktabilna kongruencija na datom automatu.

4.1. Definicije i osnovni rezultati

Automati koje razmatramo u ovoj glavi biće automati bez izlaza u smislu definicije date u knjizi F. Gécsega i I. Peáka [73] iz 1972. godine. U cilju pojednostavljenja označavanja automat sa skupom stanja A označavaćemo takođe slovom A. Za automat A njegov ulazni alfabet označavaćemo sa X. Slobodni monoid nad alfabetom X označavaćemo sa X^* i to je ulazni monoid za automat A. Slobodnu polugrupu nad alfabetom X označavamo sa X^+. Pod dejstvom proizvoljne ulazne reči $u \in X^*$ automat A prelazi iz stanja a u stanje koje ćemo označavati sa au.

Neka je $u \in X^*$. Automat A nazivamo *u-utrapljiv* ako $au \in Tr(A)$ za svaki $a \in A$. U tom slučaju reč u nazivamo *utrapljujućom reči* za automat A. Skup svih utrapljujućih reči za automat A označavamo sa $TW(A)$. Ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je $au = bu$ za sve $a, b \in A$, tada automat A nazivamo *u-direktabilnim* automatom. Reč u nazivamo *usmeravajućom reči* automata A i skup svih usmeravajućih reči za automat A označavamo sa $DW(A)$. Ako automat A jeste u-direktabilan i ima trap, ili ekvivalentno, ako je on u-utrapljiv i ako ima jedinstven trap, tada automat nazivamo *u-trap-direktabilan*. Za automat A kažemo da je *utrapljiv* (respektivno, *direktabilan, trap-direktabilan*) ako postoji reč $u \in X^*$ takva da automat A jeste u-utrapljiv (respektivno, u-direktabilan, u-trap-direktabilan). Ako je svaki monogeni podautomat od A direktabilan, odnosno, trap-direktabilan, tada za automat A kažemo da je *lokalno direktabilan*, odnosno, *lokalno trap-direktabilan*. Automat A je *jako direktabilan* ako je svako njegovo stanje vrat automata, ili ekvivalentno, ako je istovremeno i jako povezan i direktabilan automat. Utrapljivi, trap-direktabilni i lokalno trap-direktabilni automati su proučavani od strane T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića u radu [113]. Direktabilni automati su prvi put definisani i opisivani u radu J. Černýa [39] iz 1964. godine. Više informacija o ovoj klasi automata može se naći u preglednom članku S. Bogdanovića, B. Imreha, M. Ćirića i T. Petković [28] iz 1998. godine. Za automat A kažemo da je *uopšteno direktabilan* ako postoji reč $u \in X^*$ takva da je $auvu = au$ za svaki $a \in A$ i svaki $v \in X^*$. Reč u je *uopšteno usmeravajuća reč* za automat A, a skup svih uopšteno usmeravajućih reči za A označavamo sa $GDW(A)$. Više informacija o ovoj klasi automata može se naći u doktorskoj disertaciji T. Petković [111] iz 1998. godine.

Neka je $\boldsymbol{K}$ klasa automata. Kažemo da automat A lokalno pripada klasi $\boldsymbol{K}$, odnosno da je *lokalno $\boldsymbol{K}$-automat*, ako se svaki njegov monogeni podautomat nalazi u klasi $\boldsymbol{K}$. Klasu svih automata koji se lokalno nalaze u klasi $\boldsymbol{K}$ označavamo sa $L(\boldsymbol{K})$. Ako svaki monogeni podautomat automata A jeste u-direktabilan, za neki $u \in X^*$, tj. ako su svi monogeni podautomati od A direktabilni i imaju zajedničku usmeravajuću reč u, tada je A *uniformno lokalno direktabilan* automat, reč u je *uniformno lokalno usmeravajuća reč* od A, i skup svih takvih reči označavamo sa $ULDW(A)$. Takođe, *uniformno lokalno jako direktabilan* automat je automat čiji je svaki monogeni podautomat jako povezan i u-direktabilan, za fiksirano $u \in X^*$.

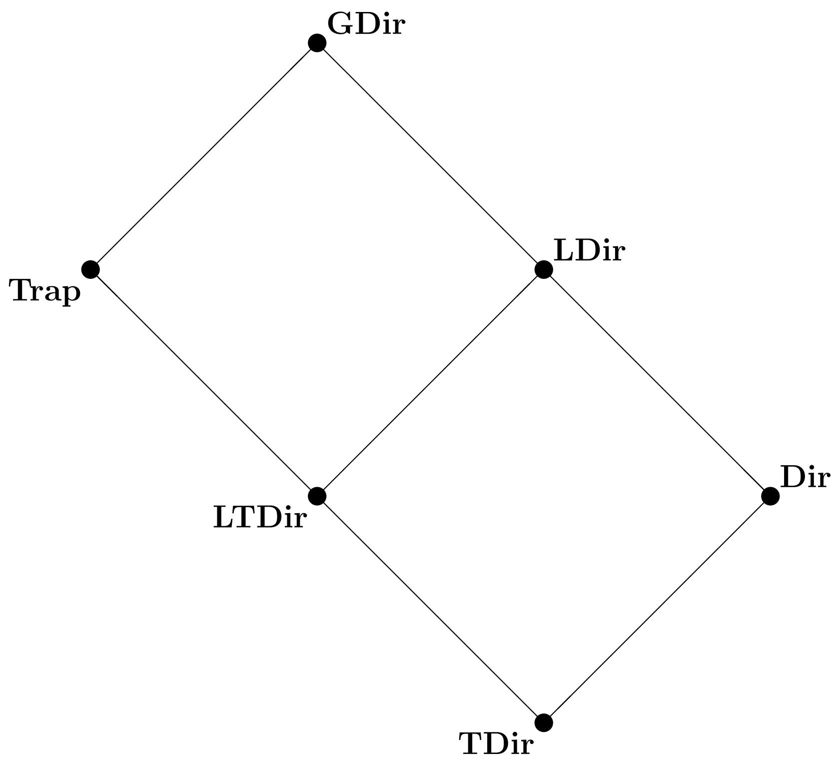
Podsetimo se još jednom da klasa automata jeste *uopšteni varijetet* ako je ona zatvorena za podautomate, homomorfne slike, konačne direktne proizvode i direktne stepene, odnosno, *pseudovarijetet* ako je ona zatvorena za podautomate, homomorfne slike i konačne poddirektne proizvode automata iz te klase. Takođe, klasa automata je pseudovarijetet ako i samo ako je klasa svih konačnih članova nekog uopštenog varijeteta (vidi [1]). Kao što je dokazano u [113] klase direktabilnih, uniformno lokalno direktabilnih, uopšteno direktabilnih, trap-direktabilnih, uniformno lokalno trap-direktabilnih i utrapljivih automata su uopšteni varijeteti. Takođe, konačni članovi ovih klasa čine pseudovarijetete.

Pseudovarijetet automata je *iregularan* ako je sadržan u pseudovarijetetu svih konačnih direktabilnih automata. Inače, nazivamo ga *regularnim* pseudovarijetetom. Algebarske osobine iregularnih i regularnih pseudovarijeteta opisane su u [30] i [28]. Ovde citiramo rezultat iz [30] koji igra važnu ulogu u daljem radu.

Teorema 4.1. *Ako je $\boldsymbol{P}$ proizvoljan pseudovarijetet automata, tada je i $L(\boldsymbol{P})$ takođe pseudovarijetet automata.*

Osim toga, ako je $\boldsymbol{P}$ iregularan pseudovarijetet automata i A je konačan automat, tada $A \in L(\boldsymbol{P})$ ako i samo ako A jeste direktna suma automata iz $\boldsymbol{P}$.

Označimo sa $\boldsymbol{Dir}$ pseudovarijetet konačnih direktabilnih automata, sa $L(\boldsymbol{Dir})$ pseudovarijetet konačnih lokalno direktabilnih automata, sa $\boldsymbol{GDir}$ pseudovarijetet konačnih uopšteno direktabilnih automata, sa $\boldsymbol{Trap}$ pseudovarijetet konačnih utrapljivih automata, sa $L(\boldsymbol{TDir})$ pseudovarijetet konačnih lokalno trap-direktabilnih automata i sa $\boldsymbol{TDir}$ pseudovarijetet konačnih trap-direktabilnih automata. Inkluzione relacije između napred nabrojanih pseudovarijeteta konačnih automata date su sledećim dijagramom:



Neka je $\boldsymbol{K}$ klasa automata. Relacija kongruencije θ na automatu $A \in \boldsymbol{K}$ je $\boldsymbol{K}$-kongruencija ako i samo ako za faktor-automat važi $A/\theta \in \boldsymbol{K}$. Glavni cilj ove glave je opis najmanje kongruencije za svaki od pseudovarijeteta konačnih automata predstavljenih prethodnim dijagramom. Do sada je to učinjeno samo za pseudovarijetet konačnih direktabilnih automata od strane B. Imreha i M. Steinbya u radu [88] iz 1995. godine.

U algoritmima koji će biti predstavljeni u sledećim odeljcima ove glave razmatrani su konačni automati, tj. automati koji imaju konačan skup stanja i konačan skup ulaza. Neka je A konačan automat sa m ulaznih slova i n stanja, gde su stanja označena sa $1, 2, \ldots, n$, tj. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Svaki takav automat A je zadat njegovom *tablicom prelaza* $T = (T[i,x])_{i\in A, x\in X}$, gde je $T[i,x] = j$ ako je $ix = j$, za $i, j \in A$ i neko slovo $x \in X$. *Listu* definišemo kao linearno uređen skup podataka. Za proizvoljnu listu L, sa $i \rightarrow L$ označavamo da je element i stavljen na listu L, a $i \leftarrow L$ nam označava da je prvi element i sa liste L obrisan iz L. Praznu listu, listu bez podataka, označavamo sa $\varnothing$.

Ako je automat A zadat svojom tablicom prelaza $T = (T[i,x])_{i\in A, x\in X}$, tada *inverzan vektor* $I = (I[i])_{i\in A}$ automata A formiramo na sledeći način: za svako stanje $i \in A$, skup $I[i]$ se sastoji od svih stanja $j \in A$ za koje postoji neko ulazno slovo $x \in X$ koje stanje j prevodi u stanje i, tj.

$$I[i] = \{j \in A \mid (\exists x \in X)\ T[j,x] = i\}.$$

Proizvoljno stanje $j \in I[i]$ nazivamo *neposrednim predhodnikom* stanja i, dok stanje i nazivamo *neposrednim sledbenikom* stanja j.

U ovom delu disertacije biće korišćen pojam - *inverzni vektor* automata. U nastavku dajemo sledeći prost algoritam kojim se generiše inverzni vektor za dati konačan automat.

Algoritam: Inverzni vektor

Ulaz: skup A stanja automata A,
skup X ulaznih slova automata A,
tablica prelaza T automata A.

Izlaz: Inverzni vektor $I = (I[i])_{i\in A}$.

Procedura:

Korak 1. Inicijalizacija:
for $i \in A$ **do** $I[i] := \varnothing$.
Korak 2. **for** $i \in A$ **do**
for $x \in X$ **do**
$i \rightarrow I[T[i,x]]$.

Lako se proverava da je kompleksnost ovog algoritma $\mathcal{O}(mn)$, tj. lako se proverava da ovaj algoritam radi u vremenu $\mathcal{O}(mn)$. Ovde treba istaći da se *kompleksnost algoritma* izražava vremenom rada algoritma, tj. brojem elementarnih koraka unutar algoritma potrebnih za dobijanje rešenja postavljenog problema. Kako se jedan elementarni korak obavi za fiksno vreme, vreme rada algoritma i broj elementarnih koraka su međusobno proporcionalni. Vreme rada algoritma zavisi i od obima polaznih podataka koji predstavlja *dimenziju problema*. Funkcija koja daje vreme rada algoritma u zavisnosti od dimenzije problema za najnepovoljniji podatak dimenzije je mera kompleksnosti algoritma ili samo kompleksnost algoritma.

Ostale pojmove i oznake koje koristimo u daljem izlaganju, a ovde nisu definisani, možemo naći u knjigama [73] i [34], i oni uglavnom predstavljaju standardne i opšte poznate pojmove i oznake iz Teorije automata i Univerzalne algebre.

U odeljcima koji slede predstavljamo rezultate i algoritme, dobijene na osnovu tih rezultata, pomoću kojih se testira direktabilnost, utrapljivost, trap-direktabilnost, lokalna trap-direktabilnost, uopštena direktabilnost i lokalna direktabilnost konačnih automata. Takođe, navodimo algoritme koji određuju najmanju direktabilnu, utrapljujuću, trap-direktabilnu, lokalno trap-direktabilnu, uopšteno direktabilnu i lokalno direktabilnu kongruenciju na konačnom automatu. Veći broj rezultata predstavljenih u ovim odeljcima je originalan.

4.2. Utrapljivi automati

Neka je A automat. Ako postoji reč koja svako stanje automata vodi u neki trap, tada takav automat nazivamo utrapljivim, a odgovarajuća reč naziva se utrapljujuća reč automata. Klasu svih konačnih utrapljivih automata ozn čili smo sa ***Trap*** i ona obrazuje pseudovarijetet. Utrapljive automate proučavali su T. Petković, u svojoj doktorskoj disertaciji [111], T. Petković, M. Ćirić i S. Bogdanović u radu [113] i Ž. Popović, S. Bogdanović, T. Petković i M. Ćirić u radu [126]. Za nešto više informacija i rezultata o ovoj klasi automata upućujemo na pomenute radove.

4.2.1. Testiranje utrapljivosti automata

Pređimo sada na razmatranje problema utrapljivosti konačnog automata. Jasno je da je automat A utrapljiv ako i samo ako ima utrapljujuću reč. Minimalna dužina utrapljujuće reči kod utrapljivih automata može biti procenjena korišćenjem poznate procene usmeravajuće reči kod direktabilnih automata. Kod direktabilnog automata A broj $d(A)$ je definisan sa

$$d(A) = min\{|u| \mid u \in DW(A)\},$$

i za $n \in \mathbb{N}^0$ broj $d(n)$ je definisan kao

$$d(n) = max\{d(A) \mid A \text{ je direktabilan automat sa } n \text{ stanja}\}.$$

Dobro je poznata Černýjeva procena ovog broja koja kaže da je $d(n) \leq (n-1)^2$. Kada se radi o utrapljivim automatima imamo da važi sledeća procena:

Lema 4.1. *Neka je A konačan automat sa n stanja i t trapova. Tada je minimalna dužina utrapljujuće reči za A manja ili jednaka sa $d(n-t+1)$.*

Dokaz prethodne leme neposredno sledi na osnovu Teoreme 3 iz rada [113] koja daje karakterizaciju utrapljivog automata kao ekstenziju diskretnog automata trap-direktabilnim automatom. Ako uzmemo da Černýjeva procena važi, što je najbolja procena koju možemo da očekujemo, tada kod automata sa n stanja i t trapova treba proveriti postojanje utrapljujuće reči u skupu $X^{\leq (n-t)^2}$. Ali, kako ovaj algoritam nije tako brz, to se prirodno postavlja cilj nalaženja boljeg algoritma za testiranje utrapljivosti automata.

Neka je $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ niz podskupova i neka je P podskup automata A definisan na sledeći način:

$$P_k = \{a \in A \mid (\exists u \in X^{\leq k})\ au \in Tr(A)\}, \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{N}^0,$$
$$P = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} P_k = \{a \in A \mid (\exists u \in X^*)\ au \in Tr(A)\}.$$

Imamo da važi sledeća teorema:

Teorema 4.2. *Neka je A konačan automat sa n stanja i nepraznim skupom trapova $Tr(A) \neq \varnothing$. Tada na A važe sledeći uslovi:*

(a) *$\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je rastući niz skupova;*

(b) *skup P_k može biti izračunat na sledeći način:*
  (1) *$P_0 = Tr(A)$,*
  (2) *$P_{k+1} = P_k \cup \{a \in A \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\}$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$;*

(c) *ako je $P_k = P_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, tada je $P_k = P_{k+m} = P$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$;*

(d) *postoji $k \in [0, n-1]$ takav da je*

$$Tr(A) = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_k = P_{k+1} = \ldots = P;$$

(e) *$P = D(Tr(A))$;*

(f) *A je utrapljiv ako i samo ako je $A = P$.*

Dokaz. (a) Uzmimo proizvoljno $k \in \mathbb{N}^0$ i dokažimo da je $P_k \subseteq P_{k+1}$.

Neka je $a \in P_k$ proizvoljan element. Tada postoji reč $u \in X^{\leq k}$ takva da je $au \in Tr(A)$. Odavde je $auv = au$, za svako $v \in X^*$.

Neka je $w = uu_{k+1}$, gde je $u_{k+1} \in X$ proizvoljno slovo. Reč $w \in X^{\leq k+1}$ i za proizvoljnu reč $v \in X^*$ na osnovu prethodnog imamo da važi

$$awv = a(uu_{k+1})v = au(u_{k+1}v) = au = auu_{k+1} = aw.$$

Odavde, $aw \in Tr(A)$, za dato $w \in X^{\leq k+1}$, odakle $a \in P_{k+1}$.

Znači, dobili smo da je $P_k \subseteq P_{k+1}$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$, tj. $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je rastući niz podskupova od A.

(b) (1) Jasno je da je $P_0 = Tr(A)$.

(2) Dokažimo da važi i druga jednakost ovog tvrđenja.

Uzmimo proizvoljno $a \in P_{k+1}/P_k$. Tada $a \in P_{k+1}$ i $a \notin P_k$. Kako $a \in P_{k+1}$ imamo da $a \in A$ i da postoji reč $u \in X^{\leq k+1}$, $u = u_1 u_2 \cdots u_{k+1}$, gde su $u_1, \ldots, u_{k+1} \in X$ neka slova, takva da je $au \in Tr(A)$. Odavde je $auv = au$, za svako $v \in X^*$.

Neka je $x = u_1$ i $w = u_2 \cdots u_{k+1}$. Tada je $u = xw$ i reč $w \in X^{\leq k}$. Za ovako uočene elemente na osnovu prethodnog imamo da je $axwv = auv = au = axw$, za svako $v \in X^*$. Odakle $(ax)w \in Tr(A)$, za dato $w \in X^{\leq k}$, što prema definiciji skupa P_k znači da element $ax \in P_k$. Dakle, za uočeni element a dobili smo da $a \in A$ i $a \notin P_k$ i da postoji slovo $x = u_1 \in X$ takvo da je $ax \in P_k$, tj. dobili smo da inkluzija $P_{k+1}/P_k \subseteq \{a \in A/P_k \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\}$ važi.

Obratno, neka $a \in \{a \in A/P_k \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\}$. Odavde, $a \notin P_k$ i iz $ax \in P_k$, za neko slovo $x \in X$, imamo da postoji reč $u \in X^{\leq k}$ takva da je $(ax)u \in Tr(A)$. Neka je $w = xu$. Tada $w \in X^{\leq k+1}$ i $au \in Tr(A)$, što znači da $a \in P_{k+1}$. Kako $a \in P_{k+1}$ i $a \notin P_k$, to $a \in P_{k+1}/P_k$, tj. $\{a \in A/P_k \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\} \subseteq P_{k+1}/P_k$.

Znači, na osnovu napred dokazanog imamo da je $P_{k+1}/P_k = \{a \in A/P_k \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\}$, tj. jednakost (2) važi.

(c) Neka je $P_k = P_{k+1}$ za neki $k \in \mathbb{N}^0$.

Dokažimo da je u tom slučaju $P_k = P_{k+m}$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$. Dokaz izvodimo indukcijom po $m \in \mathbb{N}^0$.

Za $m = 1$ jednakost $P_k = P_{k+1}$ važi na osnovu pretpostavke tvrđenja. Pretpostavimo da je jednakost $P_k = P_{k+m-1}$ tačna za neki $m \in \mathbb{N}^0$. Tada na osnovu jednakosti (2) tvrđenja (b) imamo da je

$$
\begin{aligned}
P_{k+m} &= P_{k+m-1} \cup \{a \in A/P_{k+m-1} \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_{k+m-1}\} \\
&= P_k \cup \{a \in A/P_k \mid (\exists x \in X)\ ax \in P_k\} = P_{k+1} = P_k.
\end{aligned}
$$

Dakle, jednakost $P_k = P_{k+m}$ važi za svaki $m \in \mathbb{N}^0$.

Dalje, na osnovu definicije skupa P i napred dokazanog, ako je $P_k = P_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$ jasno je da je $P_k = P_{k+m} = P$, za svaki $m \in \mathbb{N}^0$.

(d) Ovo tvrđene sledi na osnovu tvrđenja (a) i činjenice da je A automat sa n stanja, $n \in \mathbb{N}^0$. Neposredno proveravamo dali se skupovi P_k i P_{k+1} poklapaju za neko $k < n-1$. Ako takvog preklapanja nema za $k < n-1$ ono će se desiti za $k = n-1$ jer su u tom slučaju sva stanja automata A istovremeno i elementi skupa P_k. Svi naredni skupovi $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots$ poklapaju se sa $A = P_k$, jer prema (b) ne postoje novi elementi za njihovu dalju konstrukciju. Dakle, tvrđenje (d) važi.

(e) Jasno je da je $Tr(A) = P_0 \subset P \subset A$, tj. da je P podautomat od A koji sadrži podautomat $Tr(A)$.

Neka je $a \in A$ proizvoljno stanje automata A i neka je $u \in X^*$ proizvoljna ulazna reč takva da je $au \in P$. Tada $au \in P_k$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, odakle sledi da postoji reč $v \in X^{\leq k}$ takva da je $auv \in Tr(A)$, tj. da je $auvw = auv$, za svaki $w \in X^*$.

Neka je $p = uv$. Tada $p \in X^{\leq k+|u|=r}$ i $r \in \mathbb{N}^0$. Na osnovu prethodnog je $apw = ap$, za svaki $w \in X^*$, tj. $ap \in Tr(A)$, za neki $p \in X^{\leq r}$. Odavde, $a \in P_r \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} P_k = P$. Dakle, dobili smo da iz $au \in P$ sledi da $a \in P$, za proizvoljno $a \in A$ i proizvoljno $u \in X^*$, što znači da je P dualan podautomat od A.

Neka je B proizvoljan dualan podautomat od A takav da je $Tr(A) \subset B \subset P$ i neka je $a \in P$ proizvoljan element. Tada $a \in P_k$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, odakle postoji reč $u \in X^{\leq k}$ takva da je $au \in Tr(A)$. Odavde, $au \in Tr(A) \subset B$ i kako je B dualan podautomat od A dobijamo da je $a \in B$, tj. da je $P \subset B$. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je $B \subset P$. Dakle, P je najmanji dualan podautomat od A koji sadrži $Tr(A)$.

(f) Neka je A utrapljiv automat. Uvek je $P \subset A$. Uzmimo proizvoljno $a \in A$. Kako je A utrapljiv, postoji reč $u \in X^{\leq k} \subset X^*$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, takva da je $au \in Tr(A)$. Odavde, prema definiciji skupa P_k, $a \in P_k$, za dato $k \in \mathbb{N}^0$ i kako je $a \in P_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} P_k = P$, to imamo da je $A \subset P$. Dakle, dobili smo da je $A = P$.

Obratno, neka je $A = P$ i neka je a proizvoljno stanje automata A. Kako $a \in A = P$, to $a \in P_k$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$. Odavde, postoji reč $u \in X^{\leq k}$ takva da je $au \in Tr(A)$. Dakle, za svako $a \in A$ postoji reč $u \in X^{\leq k} \subset X^*$ takva da je $au \in Tr(A)$, što znači da je A utrapljiv automat. □

Sada, koristeći prethodno dobijenu teoremu, možemo konstruisati algoritam koji će testirati utrapljivost konačnih automata. Zapravo, na konačnom automatu možemo formirati rastući niz podskupova, gde je najmanji od njih skup $Tr(A)$ a najveći skup P, koji predstavlja uniju svih skupova $P_k, k \in \mathbb{N}^0$. Skup P je dualni podautomat od A generisan skupom $Tr(A)$ i na osnovu tvrđenja (f) Teoreme 4.2 imamo da je konačan automat A utrapljiv ako i samo ako je $A = P$.

Algoritam 1: Testiranje utrapljivosti automata

Ulaz: skup A stanja automata A;
skup X ulaznih slova automata A;
tablica prelaza T automata A.

Izlaz: DA, ako je A utrapljiv, ili NE, ako A nije utrapljiv.

Pomoćne strukture podataka:
lista L;
Booleov vektor $V = (V[i])_{i\in I}$;
Booleova promenljiva t.

Procedura:

Korak 1. Inicijalizacija:
for $i \in A$ **do** $V[i] := 0$;
$L := \varnothing$.
Korak 2. Formiranje inverznog vektora $I = (I[i])_{i \in A}$.
Korak 3. Formiranje liste trapova:
for $i \in A$ **do**
  $t := 0$;
  for $x \in X$ **do**
    if $T[i, x] \neq i$ **then** $t := 1$;
  if $t := 0$ **then** $i \to L$, $V[i] := 1$.
Korak 4. **while** $L \neq \varnothing$ **do**
  $i \leftarrow L$;
  for $j \in I[i]$ **do**
    if $V[j] = 0$ **then** $j \to L$, $V[j] := 1$.
Korak 5. **for** $i \in A$ **do**
    if $V[i] = 0$ **then** STOP i NE;
DA.

U nastavku dajemo opis rada prethodno konstruisanog algoritma. Glavna uloga vektora V je da naznači da li stanje i automata A pripada skupu P (tada je $V[i] = 1$) ili ne pripada skupu P (tada je $V[i] = 0$). Algoritam počinje rad sa praznom listom L, i u Koraku 3 sve trapove automata smeštamo u listu L i istovremeno ta stanja registrujemo kao elemente skupa P, tj. $V[i]$ dobija vrednost 1. Dalje, ako je stanje i već registrovano kao element skupa P i smešteno u listu L, njega brišemo sa liste L a sve njegove neposredne prethodnike smeštamo u listu L, ali samo one koji prethodno nisu bili na listi. Kada stanje i smeštamo u listu L to istovremeno registrujemo sa $V[i] = 1$, odakle imamo da stanje i još nije bilo na listi L ako i samo ako je $V[i] = 0$. Korak 4 se završava kada je lista L prazna, i tada imamo da stanje $i \in P$ ako i samo ako je $V[i] = 1$. Dakle, na osnovu Teoreme 4.2 sledi da je automat A utrapljiv ako i samo ako je $V[i] = 1$ za svako stanje $i \in A$. Lako se proverava da je kompleksnost rada ovog algoritma $\mathcal{O}(mn)$.

4.2.2. Najmanja $\boldsymbol{Trap}$-kongruencija na automatu

U ovom odeljku dajemo karakterizaciju najmanje utrapljujuće kongruencije na konačnom automatu, kao i efektivan algoritam za njeno nalaženje. Kongruencija θ na automatu $A \in \boldsymbol{Trap}$ je $\boldsymbol{Trap}$-kongruencija ako i samo ako faktor-automat $A/\theta \in \boldsymbol{Trap}$.

Na osnovu Teoreme 3 iz rada [100], svaki konačan automat na jedinstven način može biti predstavljen kao ekstenzija reverzibilnog automata trap-direktabilnim automatom. Sa druge strane, prema dobro poznatom rezultatu datom od strane G. Thierrina u radu [163] imamo da reverzibilni automat može biti na jedinstven način predstavljen kao direktna suma njegovih jako povezanih podautomata. Ovo predstavljanje automata je od ogromne koristi u rezultatima koje u nastavku predstavljamo.

Sada, imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 4.3. *Neka je konačan automat A predstavljen kao ekstenzija reverzibilnog automata B trap-direktabilnim automatom C i neka je automat B predstavljen kao direktna suma njegovih jako povezanih podautomata $B_\alpha, \alpha \in Y$. Tada relacija τ definisana na automatu A na sledeći način:*

$$(a,b) \in \tau \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ ili } a,b \in B_\alpha, \text{ za neki } \alpha \in Y,$$

jeste najmanja $\boldsymbol{Trap}$*-kongruencija na A.*

Dokaz. Neka je σ najmanja direktno sumska kongruencija na automatu B, tj. neka je σ kongruencija na B čije su klase podautomati $B_\alpha, \alpha \in Y$. Tada se relacija τ može predstaviti u obliku $\tau = \sigma \cup \Delta_A$, gde je sa Δ_A označena identička relacija na automatu A. Odavde, na osnovu Teoreme 4.1 iz rada [29] dobijamo da je τ relacija kongruencije na A.

Dalje, neka je u usmeravajuća reč za automat $C \cong A/B$ i uočimo proizvoljno stanje $a \in A$ i proizvoljnu reč $v \in X^*$. Tada imamo da $au \in B$, tj. $au \in B_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$. Odavde sledi da i reč $auv \in B_\alpha$, pa prema tome $(auv, au) \in \tau$. Na osnovu prethodnog smo dobili da je A/τ utrapljiv automat, tj. τ je $\boldsymbol{Trap}$-kongruencija na automatu A.

Neka je θ proizvoljna druga $\boldsymbol{Trap}$-kongruencija na A. Tada postoji reč $v \in X^*$ takva da je $(avw, av) \in \theta$, za svaki $a \in A$ i svaki $w \in X^*$. Uočimo stanja $(a,b) \in \tau$ takva da je $a \neq b$. Tada $a, b \in B_\alpha$, za neki $\alpha \in Y$, i kako je $B_\alpha, \alpha \in Y$ jako povezan podautomat to je $avp = a$ i $avq = b$, za neke reči $p, q \in X^*$. Sada imamo da važi

$$a = avp, \quad (avp, av) \in \theta, \quad (av, avq) \in \theta \;\text{ i }\; avq = b,$$

dakle dobili smo da $(a,b) \in \theta$. Prema tome, dokazali smo da je $\tau \subseteq \theta$, tj. dokazali smo da je τ najmanja $\boldsymbol{Trap}$-kongruencija na konačnom automatu A. $\square$

Sada kada smo dokazali da važi prethodna teorema, ako iskoristimo dobijene rezultate, možemo konstruisati najmanju $\boldsymbol{Trap}$-kongruenciju na konačnom automatu, tj. možemo odrediti sve klase $\boldsymbol{Trap}$-kongruencije. Da bismo to uradili potrebno je naći sve jako povezane podautomate datog automata. Svaka komponenta jake povezanosti automata je jedna netrivijalna klasa i elementi koji nisu uključeni u neku od ovih klasa predstavljaju jednoelementne klase ***Trap***-kongruencije. Potsetimo se još jednom da smo sa $R(A)$ označili skup svih reverzibilnih stanja automata A, a sa $S(a)$ i $D(a)$ monogeni i dualni monogeni podautomat od A generisan stanjem a automata A. Pre nego što konstruišemo algoritam kojim se mogu odrediti jako povezani podautomati datog konačnog automata navodimo još jedan pomoćni rezultat. Važi sledeća lema:

Lema 4.2. *Naka je A automat i neka je a neko njegovo proizvoljno stanje. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(a) *$a \in R(A)$ ako i samo ako je $S(a) \subseteq D(a)$;*
(b) *ako $a \in R(A)$ tada je $S(a) \subseteq R(A)$ i $(D(a) \setminus S(a)) \cap R(A) = \varnothing$.*

Dokaz. (a) Predpostavimo da stanje $a \in R(A)$ i uočimo proizvoljno stanje $b \in S(a)$. Tada je $b = au$, za neki $u \in X^*$, i pritom postoji reč $v \in X^*$ takva da je $auv = a$. Dakle, imamo da je $bv = (au)v = a$, tj. dobili smo da je $b \in D(a)$.

Obratno, neka je $S(a) \subseteq D(a)$ i uočimo proizvoljnu reč $u \in X^*$. Tada $au \in S(a) \subseteq D(a)$, odakle je $(au)v = a$, za neku reč $v \in X^*$. Znači, dobili smo da je stanje a reverzibilno.

(b) Neka je $a \in R(A)$. Tada, na osnovu Leme 2 iz rada [100], skup $R(A)$ je podautomat od A, odakle dobijamo da je $S(a) \subseteq R(A)$. Uzmimo sada da stanje $b \in (D(a) \setminus S(a)) \cap R(A)$. Kako $b \in D(a)$ dobijamo da je $bu = a$, za neki $u \in X^*$. Na osnovu pretpostavke da $b \in R(A)$ sledi da postoji reč $v \in X^*$ takva da je $buv = b$. Odavde, u tom slučaju dobijamo da je $b = buv = av$. Prema tome imamo da je $b \in S(a)$, a to je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom. Dakle, dobili smo da je $(D(a) \setminus S(a)) \cap R(A) = \varnothing$. $\square$

U nastavku, na osnovu prethodno predstavljenih rezultata, navodimo algoritam kojim se mogu odrediti komponente jake povezanosti kod konačnih automata. Ovde, takođe, treba istaći da algoritam za nalaženje komponenata jeke povezanosti kod grafova na automatima ne možemo koristiti zato što se definicije jake povezanosti u Teoriji grafova i Teoriji automata ne poklapaju.

Algoritam za nalaženje komponenata jake povezanosti konačnih automata dajemo u sledećem obliku:

Algoritam 2: Jako povezani podautomati

Ulaz: skup A stanja automata A;
skup X ulaznih slova automata A;
tablica prelaza T automata A.

Izlaz: liste $R_1, \ldots, R_k$ koje predstavljaju sve komponente jake povezanosti automata A.

Pomoćne strukture:

liste C, S i D;

Booleovi vektori $s = (s[i])_{i\in I}$ i $d = (d[i])_{i\in I}$,

broj k.

Procedura:

Korak 1. Inicijalizacija:
$C := \varnothing$, $k := 0$.

Korak 2. Formiranje inverznog vektora $I = (I[i])_{i\in A}$.

Korak 3. **for** $i \in A$ **do** $i \to C$.

Korak 4. **while** $C \neq \varnothing$ **do**

Korak 4.1. **for** $j \in A$ **do** $s[j] := 0$, $d[j] := 0$;
$S := \varnothing$, $D := \varnothing$,
$i \leftarrow C$, $i \to S$, $i \to D$;
$s[i] := 1$, $d[i] := 1$;

Korak 4.2. **while** $D \neq \varnothing$ **do**
$j \leftarrow D$;
for $l \in I[j]$ **do**
if $d[l] = 0$ **then** $l \to D$, $d[l] := 1$;

Korak 4.3. **while** $S \neq \varnothing$ **do**
$j \leftarrow S$;
for $x \in X$ **do**
if $s[T[j,x]] = 0$ **then**
if $d[T[j,x]] = 0$ **go to** Korak 4.1
else $s[T[j,x]] := 1$, $T[j,x] \to S$;

Korak 4.4. $k := k+1$;
for $j \in A$ **do**
if $s[j] = 1$ **then** $j \to R_k$, $j \leftarrow C$;
else if $d[j] = 1$ **then** $j \leftarrow C$.

Ovaj algoritam radi na sledeći način: Posle inicijalizacije i formiranja inverznog vektora, u Koraku 3 sva stanja automata smeštamo u listu C. Kada počnemo sa proverom da li je proizvoljno stanje i reverzibilno, istovremeno to stanje brišemo sa liste C i smeštamo i u listu S i u listu D (Korak 4.1). Ove dve liste koristimo za generisanje monogenih podautomata $S(i)$ i $D(i)$, i ako neko stanje pripada nekom od podautomata $S(i)$ i $D(i)$ to registrujemo vektorima s i d. Vektore s i d resetujemo na početku svakog ciklusa u Koraku 4. Dualni monogeni podautomat $D(i)$ je generisan u Koraku 4.2, a u Koraku 4.3 istovremeno generišemo monogeni podautomat $S(i)$ i proveravamo da li je $S(i) \subseteq D(i)$. Ako je pronađeno stanje automata koje pripada skupu $S(i) \backslash D(i)$, to onda znači da stanje i nije reverzibilno. Tada, prekidamo pretraživanje i započinjemo novi ciklus u Koraku 4. Inače, ako je $S(i) \subseteq D(i)$ tada stanje i jeste reverzibilno i monogeni podautomat $S(i)$ je jako povezan podautomat koji sadrži stanje i, tj. $S(i)$ je jedna komponenta jake povezanosti automata. Kada je $S(i)$ formiran, sva njegova stanja smeštamo u listu R_k i istovremeno svako od njih brišemo sa liste C. Sa druge strane, kako prema prethodnoj Lemi 4.2 imamo da ako postoji stanje koje pripada skupu $D(i) \backslash S(i)$ onda ono ne može pripadati nekom od jako povezanih podautomata automata A, to se ovakva stanja ne proveravaju i ona se automatski brišu sa liste C. Ako je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih slova, kompleksnost prethodnog algoritma je $\mathcal{O}(mn)$.

4.3. Trap-direktabilni automati

Za automat kažemo da je trap-direktabilan ako je on direktabilan i ima trap. Takođe, automat je trap-direktabilan ako je on utrapljiv i ima tačno jedan trap. Klasu svih konačnih trap-direktabilnih automata označili smo sa $\boldsymbol{TDir}$, i ona obrazuje pseudovarijetet. Ako iskoristimo prethodno navedene činjenice tada na osnovu ranije datih rezultata možemo testirati trap-direktabilnost konačnih automata i definisati najmanju $\boldsymbol{TDir}$-kongruenciju na datom automatu.

4.3.1. Testiranje trap-direktabilnosti automata

Algoritam koji testira trap-direktabilnost konačnih automata se dobija iz algoritma za testiranje utrapljivosti, **Algoritam 1**, jednostavnom modifikacijom. Naime, u prethodnom algoritmu potrebno je posle formiranja skupa $Tr(A)$ svih trapova automata proveriti da li taj skup ima samo jedan element, tj. da li je $|Tr(A)| = 1$. Ako je tako, nastavljamo dalje sa testiranjem utrapljivosti automata prema prethodnom algoritmu, ako nije tako neposredno zaključujemo da automat A nije trap-direktabilan.

4.3.2. Najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na automatu

Kongruencija θ na automatu $A \in \boldsymbol{TDir}$ je $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija ako i samo ako faktor-automat $A/\theta \in \boldsymbol{TDir}$. Sledećom teoremom opisana je najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na konačnom automatu. Imamo da važi:

Teorema 4.4. *Neka je konačan automat A predstavljen kao ekstenzija reverzibilnog automata B trap-direktabilnim automatom C. Tada je Reesova kongruencija ρ_B na A najmanja* $\boldsymbol{TDir}$*-kongruencija na automatu A.*

D o k a z . Jasno je da ρ_B jeste $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na automatu A, odakle ostaje da se dokaže da je ona i najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A. Neka je θ proizvoljna $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A. Tada postoji reč $u \in X^*$ takva da je $(auv, bu) \in \theta$, za svaki $a, b \in A$ i svaki $v \in X^*$. Uočimo stanja $(a, b) \in \rho_B$ takva da je $a \neq b$. Tada $a, b \in B$ i kako je B reverzibilan automat, imamo da je $a = aup$ i $b = buq$, za neke reči $p, q \in X^*$. Prema tome imamo da je

$$a = aup \quad (aup, bu) \in \theta, \quad (bu, buq) \in \theta \ \text{ i } \ buq = b,$$

tj. imamo da je $(a, b) \in \theta$. Dakle, dobili smo da je $\rho_B \subseteq \theta$, tj. dobili smo da je ρ_B najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na automatu A. $\square$

Sledećim rezultatom opisana je jedna karakteristična osobina trap-direktabilnih automata. Važi:

Posledica 4.1. *Neka je A konačan automat i neka je $R(A)$ njegov reverzibilni deo. Tada je automat A trap-direktabilan ako i samo ako je $|R(A)| = 1$.*

D o k a z . Neka je $|R(A)| = 1$, tj. neka je $R(A) = \{a\}$, za neko stanje $a \in A$. Kao što je poznato, svaki konačan automat A je ekstenzija svog reverzibilnog podautomata $R(A)$ trap-direktabilnim automatom $B \cong A \backslash R(A) = A \backslash \{a\}$.

Na osnovu prethodne Teoreme 4.4 relacija $\rho_{R(A)}$ je najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A i kako je $R(A) = \{a\}$ to dobijamo da je $\rho_{R(A)} = \Delta_A$. Dakle, identička relacija Δ_A je najmanja i jedina $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A. Prema tome, dobili smo da je A/Δ_A trap-direktabilan automat i kako ja $A/\Delta_A \cong A$, dobijamo da je i A trap-direktabilan automat.

Obratno, neka je A trap-direktabilan automat i neka je a_0 trap u A. $R(A)$ kao podautomat trap-direktabilnog automata je i sam trap-direktabilan automat. Takođe, trap $a_0 \in R(A)$. Kako je $R(A)$ trap-direktabilan automat, on je nerazloživ u direktnu sumu jako povezanih automata, odnosno, $R(A)$ je jako povezan automat. Dakle, kako je $R(A)$ jako povezan i ima trap $a_0 \in R(A)$, to je $R(A)$ jednoelementan skup, tj. $|R(A)| = 1$. $\square$

Sada je jasno da se algoritam za konstrukciju najmanje trap-direktabilne kongruencije na konačnom automatu A može dobiti blagom modifikacijom prethodnog algoritma, **Algoritam 2**, koji smo koristili za konstrukciju najmanje utrapljujuće kongruencije na automatu A. Naime, u algoritmu za konstrukciju najmanje trap-direktabilne kongruencije se ne zahteva odvajanje komponenata jake povezanosti automata, potrebno je samo pronaći reverzibilna stanja automata, i kada su ona izdvojena smeštamo ih u listu. Reesova kongruencija generisana reverzibilnim delom $R(A)$ automata A je najmanja trap-direktabilna kongruencija na A. Za određivanje minimalne kongruencije generisane nekim podautomatom možemo koristiti analogan algoritam dat za kongruencije generisane idealima neke algebre od strane J. Demela, M. Demlove i V. Koubeka [60].

4.4. Lokalno trap-direktabilni automati

Neka je A automat. Ako je svaki monogeni podautomat od A trap-direktabilan, tada za A kažemo da je lokalno trap-direktabilan. Klasa svih konačnih lokalno trap-direktabilnih automata obrazuje pseudovarijetet koji je označen sa $L(\boldsymbol{TDir})$. Lokalno trap-direktabilne automate proučavali su T. Petković, M. Ćirić i S. Bogdanović u radu [113], takođe, više informacija o ovoj klasi automata može se naći u radu S. Bogdanovića, B. Imreha, M. Ćirića i T. Petković [28].

U nastavku razmatramo uslove za testiranje lokalne trap-direktabilnosti automata, kao i teorijske osnove za određivanje najmanje $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencije na konačnom automatu.

4.4.1. Testiranje lokalne trap-direktabilnosti automata

Sledeći rezultat predstavlja teorijsku osnovu za konstruisanje algoritma koji testira lokalnu trap-direktabilnost konačnih automata. Važi sledeća teorema:

Teorema 4.5. *Konačan automat A je lokalno trap-direktabilan ako i samo ako su na A sledeći uslovi zadovoljeni:*

(a) $Tr(A) \neq \varnothing$;

(b) $D(a) \cap D(b) = \varnothing$, *za sve* $a, b \in Tr(A)$ *takve da je* $a \neq b$;

(c) $A = \bigcup\{D(a) \mid a \in Tr(A)\}$.

Dokaz. Neka je A lokalno trap-direktabilan automat. Odavde je jasno da tvrđenje (a) važi, tj. da je skup $Tr(A) \neq \varnothing$. Dalje, uočimo elemente $a, b \in Tr(A)$ takve da je $a \neq b$. Ako $c \in D(a) \cap D(b)$, tada $a, b \in S(c)$. Ovaj rezultat je nemoguć zato što na osnovu pretpostavke teoreme imamo da je $S(c)$ trap-direktabilan automat i on ne može imati dva različita trapa. Dakle, zaključujemo da je $D(a) \cap D(b) = \varnothing$.

Da bi dokazali tvrđenje (c) uočimo proizvoljno stanje $b \in A$. Prema pretpostavci teoreme, monogeni podautomat $S(b)$ automata A je trap-direktabilan i ako je stanje a jedinstven trap u $S(b)$ tada $b \in D(a)$. Dakle, tvrđenje (c) važi.

Obratno, naka važe tvrđenja (a), (b) i (c) i neka je $c \in A$ proizvoljno stanje. Na osnovu tvrđenja (c) imamo da $c \in D(a)$ za neko $a \in Tr(A)$, i ako $cu \in D(b)$

za neku reč $u \in X^*$ i neko stanje $b \in Tr(A)$ takvo da je $a \neq b$, tada dobijamo da $c \in D(cu) \subseteq D(b)$, što je u kontradikciji sa tvrđenjem (b). Dakle, zaključujemo da $cu \in D(a)$, za svaki $u \in X^*$, na osnovu čega dobijamo da je $S(c) \subseteq D(a)$. Sada je jasno da je $S(c)$ trap-povezan automat sa trapom a, odakle na osnovu Leme 1.2 $S(c)$ jeste trap-direktabilan. Znači, dobili smo da je A lokalno trap-direktabilan automat. $\square$

Drugim rečima, prethodna teorema kaže da je automat A lokalno trap-direktabilan ako i samo ako svaki dual podautomat od A generisan trapom jeste podautomat od A i pritom je A direktna suma takvih podautomata. Prema tome, na osnovu ovog rezultata možemo dati sledeći algoritam pomoću koga se testira lokalna trap-direktabilnost konačnih automata.

Algoritam 3: Testiranje lokalne trap-direktabilnosti

Ulaz: skup A stanja automata A;
skup X ulaznih slova automata A;
tablica prelaza T automata A.

Izlaz: DA, ako A jeste lokalno trap-direktabilan, ili NE, ako A nije lokalno trap-direktabilan.

Pomoćne strukture podataka:
liste Tr i L;
Booleovi vektori $V = (V[i])_{i \in I}$ i $U = (U[i])_{i \in I}$.

Procedura:

Korak 1. Inicijalizacija:
for $i \in A$ **do** $V[i] := 0$;
$Tr := \varnothing$, $L := \varnothing$.
Korak 2. Formiranje inverznog vektora $I = (I[i])_{i \in A}$.
Korak 3. Formiranje liste trapova:
for $i \in A$ **do**
  for $x \in X$ **do**
    if $T[i, x] = i$ **then** $i \to Tr$.
Korak 4. **while** $Tr \neq \varnothing$ **do**
  $i \leftarrow Tr$, $i \to L$, $V[i] := 1$;
  for $j \in A$ **do** $U[j] := 0$;
Korak 4.1. **while** $L \neq \varnothing$ **do**
    $j \leftarrow L$;

for $l \in I[j]$ **do**
if $U[l] = 0$ **then**
if $V[l] = 1$ **then** STOP i NE
else $l \to L$, $U[l] := 1$, $V[l] := 1$.

Korak 5. **for** $i \in A$ **do**
if $V[i] = 0$ **then** STOP i NE;
DA.

Za razliku od algoritma za testiranje utrapljivosti, **Algoritam 1**, u kome se svi dual podautomati generisani trapovima izgrađuju istovremeno, u ovom algoritmu se oni izgrađuju pojedinačno i pritom se istovremeno proverava da li su oni po parovima disjunktni. Naime, kada formiramo listu Tr svih trapova automata (Korak 3), mi je odmah ne uključujemo u listu L, već u listu L smeštamo samo jedan element iz Tr, tj. samo jedan trap. Drugi trap se ne smešta u L sve dotle dok se lista L prethodno ne isprazni. Korak 4 registruje da li stanje pripada skupu $P = \bigcup\{D(i) \mid i \in Tr(A)\}$. Za to koristimo vektor V koji za stanje i koje pripada P uzima vrednost $V[i] = 1$. Za stanje $i \in P$, uloga Koraka 4.1 je da registruje sve elemente skupa $D(i)$, za to koristimo vektor U koji uvek resetujemo pre početka ponavljanja Koraka 4.1. U Koraku 4.1 takođe vektor V koristimo za proveravanje da li je podautomat $D(i)$ disjunktan sa prethodno formiranim glavnim dual podautomatom. Ako se disjunktnost glavnih dual podautomata naruši, algoritam zaustavljamo i odgovor je NE. Odgovor je DA ako i samo ako algoritam završi svoj rad bez zaustavljanja i pritom je vrednost vektora $V[i] = 1$ za svako stanje $i \in A$. Ako je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih simbola kompleksnost prethodnog algoritma je $\mathcal{O}(mn + n^2)$.

4.4.2. Najmanja $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencija na automatu

Pre nego što ćemo dokazati teoremu u kojoj je data karakterizacija najmanje lokalno trap-direktabilne kongruencije na konačnom automatu, navodimo još jedan pomoćni rezultat koji u nastavku višestruko koristimo.

Lema 4.3. *Neka je $A = \Sigma_{\alpha \in Y} A_\alpha$ direktno sumsko razlaganje automata A, za svaki $\alpha \in Y$ neka je θ_α relacija kongruencije na A_α i neka je $\theta = \bigcup_{\alpha \in Y} \theta_\alpha$. Tada je θ relacija kongruencije na automatu A.*

Dokaz. Kako je $A = \Sigma_{\alpha \in Y} A_\alpha$ razlaganje automata A u direktnu sumu podautomata $A_\alpha, \alpha \in Y$, to je $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, za svaki $\alpha, \beta \in Y$. Odavde je jasno da je i $\theta_\alpha \cap \theta_\beta = \varnothing$, za svaki $\alpha, \beta \in Y$. Na osnovu prethodnog, definicije relacije θ i osobina kongruencija $\theta_\alpha, \alpha \in Y$ lako se zaključuje da je θ relacija kongruencije na A. $\square$

U dokazu sledeće teoreme oznaku $H \between K$ koristimo u slučaju kada za skupove H i K imamo da je $H \cap K \neq \varnothing$. Rezultat koji sledi daje karakterizaciju najmanje $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencije na konačnom automatu. Važi:

Teorema 4.6. *Neka je A konačan automat, neka je $A = \Sigma_{i=1}^{i=k} A_i$ najveće razlaganje u direktnu sumu automata A, dalje, za svaki $i \in [1,k]$ neka je ρ_i najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A_i, i neka je $\rho = \bigcup_{i=1}^{i=k} \rho_i$. Tada je ρ najmanja $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencija na automatu A.*

Dokaz. Na osnovu Leme 4.3 neposredno dobijamo da je ρ relacija kongruencije na automatu A. Dalje, dokažimo da je A/ρ lokalno trap-direktabilan automat. Za neki $i \in [1,k]$ neka je u_i proizvoljna trap-usmeravajuća reč za automat A_i/ρ_i i neka je $u = u_1 u_2 \cdots u_k$. Poznato je da je u trap-usmeravajuća reč za automat A_i/ρ_i, za svaki $i \in [1,k]$. Dokažimo sada da je u lokalno trap-usmeravajuća reč za automat A/ρ.

Uočimo proizvoljno stanje $a \in A$ i reči $p, q \in X^*$. Neka je $i \in [1,k]$ takav da je $a \in A_i$. Kako je A_i/ρ_i trap-direktabilan automat i kako je u jedna od njegovih trap-usmeravajućih reči, tada imamo da je $(apuq, apu) \in \rho_i$ i da je $(apu, au) \in \rho_i$, odakle je $(apuq, au) \in \rho_i$. Prema tome, dobili smo da $(apuq, au) \in \rho$, odakle je A/ρ lokalno trap-direktabilan automat i u je jedna od njegovih lokalno trap-usmeravajućih reči.

Neka je θ proizvoljna relacija kongruencije na automatu A takva da je A/θ lokalno trap-direktabilan automat. Tada, postoji reč $u \in X^*$ takva da je $(apuq, au) \in \theta$, ili ekvivalentno, da je

$$(apu, au) \in \theta \ \text{ i } \ (auq, au) \in \theta,$$

za svaki $a \in A$ i sve reči $p, q \in X^*$. Za neki $i \in [1,k]$ neka je θ_i restrikcija relacije θ na automat A_i, tj. neka je $\theta_i = \theta \cap (A_i \times A_i)$. Odavde je jasno da je θ_i relacija kongruencije na A_i, a takođe, dokazaćemo da θ_i jeste $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A_i.

Uočimo stanja $a, b \in A_i$ takva da je $S(a) \between S(b)$, tj. da je $av = bw$, za neke $v, w \in X^*$. Tada je $(avu, au) \in \theta_i$ i $(bwu, bu) \in \theta_i$, odakle dobijamo da je $(au, bu) \in \theta_i$. Uočimo sada dva proizvoljna stanja $a, b \in A_i$. Tada na osnovu Teoreme 3.2 iz rada [48] postoje stanja $c_1, c_2, \dots, c_j \in A_i$ takva da je

$$S(a) \between S(c_1) \between S(c_2) \between \cdots \between S(c_j) \between S(b).$$

Odavde i na osnovu prethodno dokazane činjenice dobijamo da je

$$(au, c_1u) \in \theta_i, \ (c_1u, c_2u) \in \theta_i, \dots, (c_ju, bu) \in \theta_i,$$

tj. dobijamo da je $(au, bu) \in \theta_i$. Sa druge strane, takođe je $(auq, au) \in \theta_i$, za svaki $q \in X^*$. Prema tome, zaključujemo da je $(auq, bu) \in \theta_i$, za svaki $q \in X^*$, što znači da θ_i jeste $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A_i. Kako je na osnovu pretpostavke relacija ρ_i najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na A_i, to je $\rho_i \subseteq \theta_i$. Dakle, dobili smo da je

$$\rho = \bigcup_{i=1}^{k} \rho_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \theta_i = \theta,$$

tj. dobili smo da je ρ najmanja $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencija na konačnom automatu A. $\square$

Sada, na osnovu prethodno dobijenog rezultata imamo da se algoritam za nalaženje najmanje $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencije na konačnom automatu može podeliti na dva dela. U prvom delu algoritma bi trebalo konstruisati razlaganje razmatranog automata u njegovu direktnu sumu, a u drugom delu algoritma bi na svakoj komponenti, razlaganja automata u direktnu sumu, trebalo pronaći njen reverzibilni deo, tj. u svakoj komponenti bi trebalo pronaći sva njena reverzibilna stanja. Kako je algoritam za nalaženje raverzibilnih stanja automata već predstavljen, modifikacija **Algoritma 2**, to ostaje da se konstruiše algoritam kojim se konačan automat može razložiti u direktnu sumu svojih nerazloživih podautomata.

Kao što su M. Ćirić i S. Bogdanović u radu [48] već dokazali, sumand (komponenta) koji sadrži stanje a, u najvećem direktno sumskom razlaganju automata A, poklapa se sa *glavnim filtrom* $F(a)$ generisanim stanjem a. Takođe, u istom radu, [48], dokazano je da se glavni filter $F(a)$ može odrediti kao

$$F(a) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^0} U_k(a),$$

gde je $\{U_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući niz podskupova automata A definisanih na sledeći način:

$$U_0(a) = \{a\} \ \text{ i } \ U_{k+1}(a) = D(S(U_k(a))),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}^0$.

Neka je A konačan automat sa n stanja, gde je $n \in \mathbb{N}^0$. Tada je $F(a) = U_k(a)$, za neki $k \in [1, n]$. U ovom slučaju se svi sumandi u najvećem direktno sumskom razlaganju automata mogu odrediti počev od nekog proizvoljnog stanja i nesinhronizovanim primenjivanjem operatora $S : H \mapsto S(H)$ i $D : H \mapsto D(H)$ konačno mnogo puta na automatu A. Međutim, algoritam koji u nastavku predstavljamo sinhronizovano primenjuje operatore S i D, čime se povećava brzina rada algoritma. Pre toga, za podskup H automata A definišemo skup $A(H)$ svih susednih stanja skupa H na sledeći način:

$$A(H) = H \cup \{b \in A \mid (\exists a \in H)(\exists x \in X)\ ax = b \text{ ili } bx = a\}.$$

Za ovako definisan skup $A(H)$ generisan podskupom H automata A, imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 4.7. *Neka je a proizvoljno stanje automata $\mathcal{A}$, $a \in A$, i neka je*

$$A_0(a) = \{a\} \quad i \quad A_{k+1}(a) = A(A_k(a)),$$

za $k \in \mathbb{N}^0$. Tada je $\{A_k(a)\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući niz podskupova i

$$F(a) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a).$$

Dokaz. Dokažimo prvo da je $A_k(a) \subseteq U_k(a)$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$. Ova inkluzija je evidentna za $k = 0$. Pretpostavimo sada da je $A_k(a) \subseteq U_k(a)$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, i uočimo proizvoljan element $c \in A_{k+1}(a)$. Tada mogu nastupiti sledeće tri mogućnosti: da $c \in A_k(a)$, ili da je $c = xb$, za neki $b \in A_k(a)$ i neki $x \in X$, ili da je $cx = b$, za neki $b \in A_k(a)$ i neki $x \in X$. U prvom slučaju imamo da je $c \in A_k(a) \subseteq U_k(a) \subseteq U_{k+1}(a)$. Ako važi druga mogućnost tada imamo da $b \in U_k(a)$, odakle dobijamo da $c \in S(U_k(a)) \subseteq D(S(U_k(a))) = U_{k+1}(a)$. Konačno, ako važi treća mogućnost tada imamo da je $b \in U_k(a) \subseteq S(U_k(a))$, odakle dobijamo da je $c \in D(S(U_k(a))) = U_{k+1}(a)$. Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije dobili smo da je $A_k(a) \subseteq U_k(a)$, za svaki $k \in \mathbb{N}^0$, odakle neposredno sledi da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a) \subseteq F(a)$.

Da bi dokazali obratnu inkluziju dovoljno je dokazati da je $U_i(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$, za svaki $i \in \mathbb{N}^0$. Jasno je da inkluzija važi ako je $i = 0$. Pretpostavimo sada da inkluzija važi za neko $i \in \mathbb{N}^0$ i izaberimo proizvoljno stanje $d \in U_{i+1}(a)$. Tada je $du = c$, za neki $c \in S(U_i(a))$ i neki $u \in X^*$, takođe je $c = bv$, za neki $b \in U_i(a)$ i neki $v \in X^*$. Tada reči $u \in X^r$ i $v \in X^s$, za neke $r, s \in \mathbb{N}^0$. Kako na osnovu pretpostavke imamo da $b \in A_t(a)$, za neki $t \in \mathbb{N}^0$, to dobijamo da je $d \in A_{r+s+t}(a)$. Dakle, dobili smo da je $U_{i+1}(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$ odakle na osnovu principa matematičke indukcije dobijamo da je $U_i(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0}$, za svaki $i \in \mathbb{N}^0$. Na kraju, na osnovu napred dokazanog imamo da je $F(a) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^0} A_k(a)$, čime je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

Sada, posle dokaza prethodne teoreme možemo konstruisati algoritam kojim se konačan automat razlaže u najveću direktnu sumu svojih podautomata, koji se dalje nemogu direktno sumski razlagati.

Algoritam 4: Najveće direktno sumsko razlaganje:

Ulaz: skup A svih stanja automata $\mathcal{A}$;
skup X ulaznih slova automata $\mathcal{A}$;
tablica prelaza T automata $\mathcal{A}$.

Izlaz: liste $F_1, \ldots, F_k$ koje predstavljaju sumande u najvećem direktno sumskom razlaganju automata $\mathcal{A}$, tj. glavni filtri automata $\mathcal{A}$.

Pomoćne strukture podataka:
liste C i L;
Booleov vektor $V = (V[i])_{i\in I}$;
broj k.

Procedura:

Korak 1. Inicijalizacija:
$C := \varnothing$, $L = \varnothing$, $k := 0$;
for $i \in A$ **do** $V[i] := 0$.
Korak 2. Formiranje inverznog vektora $I = (I[i])_{i\in A}$.
Korak 3. **for** $i \in A$ **do** $i \to C$.
Korak 4. **while** $C \neq \varnothing$ **do**
Korak 4.1. $i \leftarrow C$;
if $V[i] = 0$ **then**
$i \to L$, $k := k+1$, $i \to F_k$, $V[i] := 1$.
Korak 4.2. **while** $L \neq \varnothing$ **do**
$j \leftarrow L$;
for $x \in X$ **do**
if $V[T[j,x]] = 0$ **then**
$T[j,x] \to L$, $T[j,x] \to F_k$, $V[T[j,x]] := 1$;
for $l \in I[j]$ **do**
if $V[l] = 0$ **then**
$l \to L$, $l \to F_k$, $V[l] := 1$.

U Koraku 3, sva stanja automata se smeštaju u listu C. Vektor V se koristi za registrovanje pripadnosti stanja nekoj listi F_k. Kada izaberemo prvo stanje i iz liste C, brišemo ga sa liste C i proveravamo da li je $V[i] = 0$. Ako je za neko stanje $V[i] = 1$ to znači da je to stanje već smešteno u neku listu F_k, tj. to znači da je glavni filter $F(i)$ već generisan. Inače, ako je $V[i] = 0$, počinjemo sa generisanjem glavnog filtra $F(i) = F_k$ stavljajući stanje i na liste L i F_k i to automatski registrujemo time što vektor V dobija vrednost $V[i] = 1$. Elementi glavnog filtra $F(i)$ su određeni u Koraku 4.2. Kada stanje j izbrišemo sa liste L istovremeno u listu L smeštamo sve njegove neposredne prethodnike i neposredne sledbenike koji još uvek nisu razmatrani u postojećem ciklusu u Koraku 4. Ako je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih simbola tada je kompleksnost prethodnog algoritma $\mathcal{O}(mn)$.

4.5. Direktabilni automati

Konačan automat je direktabilan ako postoji ulazna reč, usmeravajuća reč, koja vodi automat iz svakog stanja u jedno isto stanje. Klasa direktabilnih automata obrazuje uopšteni varijetet, i taj varijetet je označen sa $\boldsymbol{Dir}$.

Algoritam kojim se testira direktabilnost konačnih automata, kao i algoritam kojim se konstruiše najmanja $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija na konačnom automatu, dali su B. Imreh i M. Steinby [88]. Kao jedno od sredstava kojim se može uštedeti vreme rada algoritma za testiranje direktabilnosti konačnih automata, B. Imreh i M. Steinby u radu [88] koriste inverznu tablicu prelaza automata.

4.5.1. Testiranje direktabilnosti automata

Neka je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih slova. U ranije korišćenim algoritmima za ispitivanje da li je dati automat direktabilan ili ne, konstruisani su skupovi oblika $\{Aw \mid w \in X^*\}$. Ovaj algoritam je koristio dosta vremena jer je trebalo upoređivati skoro 2^n skupova, $n \in \mathbb{N}$, tj. za svaki novi skup Aw trebalo je formirati sve skupove oblika Awx, za svaki $x \in X$ i svaki od njih trebalo je upoređivati sa prethodno formiranim skupom. Najlošija procena kompleksnosti ovog metoda je bila veličina reda najmanje $\mathcal{O}(m2^n)$. M. Ito i J. Duske [89] su u svom algoritmu istakli da se direktabilnost automata A može testirati primenjujući reč t koja sardži kao svoje podreči sve reči dužine n nad alfabetom X, tj. oni su dokazali da je automat direktabilan ako i samo ako je $|At| = 1$. Broj operacija za konstrukciju reči t iznosi $m^n + n - 1$, što i za male vrednosti promenljivih m i n stvara ogromne probleme, i test čini nestandardnim. Ako uzmemo da Černýjeva procena važi [39], a to je najbolje što možemo da pretpostavimo, kompleksnost rada ovog algoritma procenjena je na veličinu reda $\mathcal{O}(m^{(n-1)^2})$. B. Imreh i M. Steinby [88] su konstruisali prostiji algoritam za testiranje direktabilnosi automata. Njegova kompleksnost je veličina reda $\mathcal{O}(mn^2)$.

Za $k \geq 0$, relacija $\mu_A(k)$ je *k-izjednačiva* na skupu stanja automata A, ako za proizvoljna stanja $a, b \in A$, je

$$(a, b) \in \mu_A(k) \quad \Leftrightarrow \quad aw = bw, \text{ za neki } w \in X^{\leq k}.$$

Dva stanja a i b su *izjednačiva* ako su ona k-izjednačiva, za neki $k \geq 0$. Označimo sa $\mu_A = \bigcup_{k\geq 0} \mu_A(k)$. Kao što je P. H. Starke [148] dokazao automat je direktabilan ako i samo ako su svaka dva njegova stanja izjednačiva. Ova i još nekoliko drugih osobina relacija μ_A i $\mu_A(k)$ date su u sledećem rezultatu:

Lema 4.4. *Neka je A konačan automat sa n stanja. Tada na A važe sledeći uslovi:*

(a) *A je direktabilan ako i samo ako je $\mu_A = \nabla_A$;*

(b) *relacije $\mu_A(k)$ su refleksivne i simetrične, za $k \geq 0$;*

(c) $\Delta_A = \mu_A(0) \subseteq \mu_A(1) \subseteq \cdots \subseteq \mu_A$;

(d) *relacija $\mu_A(k)$ može biti izračunata na sledeći način:*

  (1) $\mu_A(0) = \Delta_A$;

  (2) $\mu_A(k) = \mu_A(k-1) \cup \{(a,b) \mid (\exists x \in X)\ (ax, bx) \in \mu_A(k-1)\}$, *za* $k \geq 1$;

(e) *ako je $\mu_A(k) = \mu_A(k-1)$, za neko $k \geq 0$, tada je $\mu_A(k) = \mu_A(k+1) = \cdots = \mu_A$;*

(f) $\Delta_A = \mu_A(0) \subset \mu_A(1) \subset \cdots \subset \mu_A(k) = \mu_A(k+1) = \mu_A$, *za neko k, gde je $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$.*

Na osnovu Leme 4.4, tvrđenja (a), direktabilnost automata A može biti određena sukcesivnim izračunavanjem relacija $\mu_A(0)$, $\mu_A(1)$, $\mu_A(2)$, $\ldots$, sve do poklapanja $\mu_A(k) = \mu_A(k+1)$. Ako ove relacije izračunavamo direktno, kompleksnost tog direktnog algoritma je $\mathcal{O}(mn^4)$. Međutim, ako se bolje organizuje pretraživanje kompleksnost algoritma se smanjuje na veličinu reda $\mathcal{O}(mn^2)$. Velika ušteda u vremenu se dobija ako se umesto tablice prelaza automat A zadaje svojom inverznom tablicom prelaza.

4.5.2. Najmanja *Dir*-kongruencija na automatu

Najmanju ***Dir***-kongruenciju na konačnom automatu konstruisali su B. Imreh i M. Steinby u radu [88] iz 1995. godine. U pomenutom radu su B. Imreh i M. Steinby, uz potrebne teorijske osnove, predstavili algoritam kojim se efektivno određuje najmanja ***Dir***-kongruencija na automatu. Ukupna kompleksnost algoritma kojim se određuje najmanja ***Dir***-kongruencija na automatu A sa n stanja i m ulaznih simbola je $\mathcal{O}(mn^2 + n^3)$.

Osim, opisa ***Dir***-kongruencije i algoritma za njeno nalaženje, dato od strane B. Imreha i M. Steinbya [88], u nastavku ovog odeljka navodimo još neke opise najmanje ***Dir***-kongruencije na konačnom automatu.

Polazimo od pojma *par automata* datog automata A koji su uveli T. Petković i M. Steinby u radu [112]. Koristimo specijalan podautomat datog automata definisan na sledeći način: Na skupu

$$A^{(2)}_{\mathrm{nm}} = \{\, \{a,b\} \mid a, b \in A,\ a \neq b,\ (a,b) \notin \mu_A\}$$

svih parova neizjednačivih stanja automata A funkcija prelaza je definisana sa

$$\{a,b\}x = \{ax, bx\},$$

za svaki $x \in X$. Funkcija prelaza, u ovom slučaju, je dobro definisana jer ako je par $\{a,b\}$ neizjednačiv tada su i svi parovi $\{ax, bx\}$, za svaki $x \in X$, takođe neizjednačivi.

Automat $A_{\mathrm{nm}}^{(2)}$ nazivamo *neizjednačiv par automat* automata A. Neizjednačivi par automati igraju važnu ulogu u dokazu sledećih rezultata kojima su dati novi opisi najmanje $\boldsymbol{Dir}$-kongruencije na konačnom automatu.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na automatu A. Za dva stanja a i b kažemo da su *ρ-izjednačiva* ako je $(aw, bw) \in \rho$, za neko $w \in X^*$. Važi sledeći rezultat:

Lema 4.5. *Relacija kongruencije ρ definisana na automatu A je $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija ako i samo ako svaka dva stanja iz A jesu ρ-izjednačiva.*

Dokaz prethodnog rezultata dali su B. Imreh i M. Steinby u radu [88].

Sada opisujemo najmanju $\boldsymbol{Dir}$-kongruenciju na proizvoljnom konačnom automatu A.

Teorema 4.8. *Neka je A proizvoljan konačan automat i neka je δ_A tranzitivno zatvorenje relacije ρ_A definisane na A na sledeći način*

$$(a, b) \in \varrho_A \;\Leftrightarrow\; a = b \;\; ili \;\; (\forall v \in X^*)(\exists u \in X^*)\ \{avu, bvu\} = \{a, b\}.$$

Tada je δ_A najmanja $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija na A.

Dokaz. Jasno je da je ρ_A refleksivna i simetrična relacija. Uzmimo proizvoljno $(a, b) \in \rho_A$ i $w \in X^*$. Tada za svaki $v \in X^*$ postoji $u \in X^*$ takav da je $\{a(wv)u, b(wv)u\} = \{a, b\}$, odakle

$$\{(aw)vuw, (bw)vuw\} = \{aw, bw\},$$

tj. $(aw, bw) \in \rho_A$. Prema tome, ρ_A je kompatibilna relacija. Kako je relacija δ_A tranzitivno zatvorenje refleksivne, simetrične i kompatibilne relacije ρ_A, to ona ima iste osobine kao i relacija ρ_A i jeste tranzitivna, tj. relacija δ_A jeste kongruencija na A.

Da bi dokazali da δ_A jeste $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija na A uzmimo proizvoljne $a, b \in A$. Ako je $aw = bw$, za neki $w \in X^*$, tada je jasno da je $(aw, bw) \in \delta_A$, tj. a i b su δ_A-izjednačiva stanja. Pretpostavimo sada da je $aw \neq bw$, za svaki $w \in X^*$. Tada je $\{a, b\}$ stanje neizjednačivog par automata $A_{\mathrm{nm}}^{(2)}$ automata A. Odavde, prema Teoremi 1.25, postoji $w \in X^*$ takav da je $\{aw, bw\}$ reverzibilno stanje automata $A_{\mathrm{nm}}^{(2)}$. Na osnovu prethodnog imamo da za svaki $v \in X^*$ postoji $u \in X^*$ takav da je

$$\{awvu, bwvu\} = \{aw, bw\}vu = \{aw, bw\},$$

tj. imamo da je $(aw, bw) \in \rho_A \subseteq \delta_A$. Prema tome, a i b su δ_A-izjednačiva stanja, odakle prema Lemi 4.5 dobijamo da δ_A jeste $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija na A.

Ostaje još da se dokaže da je δ_A sadržana u proizvoljnoj $\boldsymbol{Dir}$-kongruenciji θ na A. Uzmimo proizvoljno $(a, b) \in \rho_A$. Prema pretpostavci tvrđenja i Lemi 4.5, stanja

a i b su θ-izjednačiva, odakle postoji $v \in X^*$ takav da je $(av, bv) \in \theta$. Sa druge strane, $(a,b) \in \rho_A$ implicira da je $\{avu, bvu\} = \{a,b\}$, za neki $u \in X^*$. Odavde, kako iz $(av,bv) \in \theta$ sledi da $(avu, bvu) \in \theta$, to dobijamo da je $(a,b) \in \theta$. Prema tome, dobili smo da je $\rho_A \subseteq \theta$, odnosno da je $\delta_A \subseteq \theta$, a to je i trebalo dokazati. $\square$

Možemo primetiti sledeće: Ako su a i b dva različita stanja automata A tada za svaki $v \in X^*$ postoji $u \in X^*$ takav da je $\{avu, bvu\} = \{a,b\}$ ako i samo ako je $\{a,b\}$ reverzibilno stanje neizjednačivog par automata $A^{(2)}_{\mathrm{nm}}$. Prema tome, prethodna teorema može biti iskazana i na sledeći ekvivalentan način:

Teorema 4.9. *Neka je A proizvoljan konačan automat i neka je δ_A tranzitivno zatvorenje relacije ρ_A definisane na A na sledeći način*

$$(a,b) \in \varrho_A \;\Leftrightarrow\; a = b \;\; ili \;\; \{a,b\} \in R(A^{(2)}_{\mathrm{nm}}).$$

*Tada je δ_A najmanja **Dir**-kongruencija na A.*

Sada, na osnovu Teoreme 4.8 i Teoreme 1.25 imamo da važi sledeća posledica.

Posledica 4.2. *Najmanja **Dir**-kongruencija na konačnom automatu A je Reesova ekstenzija najmanje **Dir**-kongruencije na reverzibilnom delu automata A, tj.*

$$\delta_A = \delta_{R(A)} \cup \Delta_A.$$

Osim algoritma za nalaženje najmanje ***Dir***-kongruencije, date od strane B. Imreha i M. Steinbya u radu [88], još jedan algoritam za konstrukciju najmanje ***Dir***-kongruencije, na osnovu prethodnih rezultata, bi se sastojao iz algoritma za konstrukciju par automata i algoritma za konstrukciju reverzibilnog dela tog par automata. Algoritam za konstrukciju par automata je ustvari algoritam za testiranje direktabilnosti, odnosno, algoritam za konstrukciju relacije μ_A na konačnom automatu koji su dali B. Imreh i M. Steinby [88], a algoritam za određivanje reverzibilnog dela automata je ustvari **Algoritam 2**, kojim se određuju komponente jake povezanosti datog automata.

Ako je A beskonačan automat tada on ne mora imati najmanju ***Dir***-kongruenciju. U nastavku ovog odeljka dokazaćemo egzistenciju najmanje ***Dir***-kongruencije na proizvoljnom uopšteno direktabilnom automatu, čak i u slučaju ako je on beskonačan automat. Karakterizacija ove kongruencije se razlikuje od one date za konačne automate u Teoremi 4.8.

Prvo uvedimo nekoliko novih pojmova i oznaka. Neka je A proizvoljan, konačan ili beskonačan, automat. Tada, svakom stanju $a \in A$ možemo pridružiti jezik $G(a) \subseteq X^*$ definisan na sledeći način

$$G(a) = \{\, u \in X^* \mid (\forall v \in X^*)\, avu = a \,\}.$$

Glavne osobine ovako definisanog jezika su opisane sledećom lemom.

Lema 4.6. *Neka je A proizvoljan automat i neka je $a \in A$. Tada je $G(a) \neq \varnothing$ ako i samo ako je $S(a)$ jako direktabilan automat.*

U ovom slučaju sledeći uslovi važe:

(a) $G(a) = \{\, u \in X^* \mid a \text{ je } u\text{-vrat od } S(a) \,\}$;

(b) $G(a)$ *je levi ideal od* X^*;

(c) $G(a)w \subseteq G(aw)$, *za svaki* $w \in X^*$.

Dokaz. Ako je $G(a) \neq \varnothing$ tada je jasno da je $S(a)$ direktabilan automat. Sa druge strane, a je reverzibilno stanje, odakle sledi da je $S(a)$ jako povezan automat. Dakle, $S(a)$ je jako direktabilan. Obratno, naka je $S(a)$ jako direktabilan automat. Tada, a jeste u-vrat od $S(a)$, za neki $u \in X^*$, i tada $u \in G(a)$.

Tvrđenje (a) je očigledno. Dalje, uzmimo proizvoljno $u \in G(a)$ i $w \in X^*$. Tada je $avwu = a$, za svaki $v \in X^*$, odakle $wu \in G(a)$. Prema tome, $G(a)$ je levi ideal od X^*. Takođe, uzmimo proizvoljno $u \in G(a)$ i $w \in X^*$. Tada je $awvu = a$, odakle dobijamo da je $awvuw = aw$, za svaki $v \in X^*$. Dakle, $uw \in G(aw)$. $\square$

Sada, možemo opisati najmanju ***Dir***-kongruenciju na uopšteno direktabilnom automatu.

Teorema 4.10. *Neka je A proizvoljan uopšteno direktabilan automat i neka je υ_A tranzitivno zatvorenje relacije ν_A definisane na sledeći način*

$$(a,b) \in \nu_A \;\Leftrightarrow\; a = b \;\; \textit{ili} \;\; G(a) \cap G(b) \neq \varnothing.$$

*Tada je υ_A najmanja **Dir**-kongruencija na A.*

Dokaz. Relacija ν_A je jasno refleksivna i simetrična. Uzmimo proizvoljne $a, b \in A, a \neq b$ takve da je $(a,b) \in \nu_A$, i neka je $w \in X^*$ proizvoljna reč. Tada postoji $u \in G(a) \cap G(b)$, odakle prema Lemi 4.6 imamo da je $uw \in G(aw) \cap G(bw)$, tj. dobili smo da $(aw, bw) \in \nu_A$. Prema tome, ν_A je kompatibilna relacija, odnosno, υ_A je kongruencija na A.

Da bi dokazali da υ_A jeste ***Dir***-kongruencija na A, uzmimo proizvoljno $u \in GDW(A)$ i $a, b \in A$. Tada $u \in G(au) \cap G(bu)$, odakle $(au, bu) \in \nu_A \subseteq \upsilon_A$. Znači, A/υ_A je u-direktabilan automat, tj. υ_A jeste ***Dir***-kongruencija na A.

Neka je θ proizvoljna ***Dir***-kongruencija na A. Pretpostavimo da $(a,b) \in \nu_A$ i da je $a \neq b$. Tada postoji $u \in G(a) \cap G(b)$. Sa druge strane, za proizvoljno $v \in DW(A/\theta)$ imamo da $(av, bv) \in \theta$, odakle dobijamo da $(avu, bvu) \in \theta$. Sada, iz $u \in G(a) \cap G(b)$ imamo da je

$$(a,b) = (avu, bvu) \in \theta.$$

Prema tome, $\nu_A \subseteq \theta$, tj. $\upsilon_A \subseteq \theta$ i ovim je dokazano da je υ_A najmanja ***Dir***-kongruencija na A. $\square$

Prethodna teorema može biti iskazana i na sledeći ekvivalentan način:

Teorema 4.11. *Neka je A proizvoljan uopšteno direktabilan automat i neka je υ_A tranzitivno zatvorenje relacije ν_A definisane na sledeći način*

$$(a,b)\in\nu_A \;\Leftrightarrow\; a=b \;\; ili \;\; (\exists u\in X^*)(\forall v\in X^*)\; avu=a \;\;\&\;\; bvu=b.$$

*Tada je υ_A najmanja **Dir**-kongruencija na A.*

Kao što se iz Teoreme 4.11 može videti uslov kojim je definisana relacija ν_A strožiji je od uslova kojim je u Teoremi 4.8 definisana relacija ρ_A.

4.6. Uopšteno direktabilni automati

U ovom odeljku razmatramo uopšteno direktabilne automate. Potsetimo se još jednom da automat A nazivamo *uopšteno direktabilnim* ako postoji reč $u\in X^*$ takva da za svako stanje $a\in A$ i svaku reč $v\in X^*$ važi $auvu=au$. U nastavku navodimo algoritme kojima se testira uopštena direktabilnost konačnih automata i određuje najmanja kongruencija na automatu koji pripada klasi uopšteno direktabilnih automata. Rezultati koje predstavljamo u ovom odeljku publikovani su od strane Ž. Popovića, S. Bogdanovića, M. Ćirića i T. Petković u radu [125].

4.6.1. Testiranje uopštene direktabilnosti automata

Pseudovarijetet konačnih uopšteno direktabilnih automata označavamo sa ***GDir***. Skup svih uopšteno direktabilnih reči datog automata A označavamo sa $GDW(A)$. Polugrupe prelaza uošteno direktabilnih automata opisala je T. Petković u svojoj doktorskoj disertaciji [111], takođe, neke osobine ove klase automata date su od strane T. Petković, M. Ćirića i S. Bogdanovića [113] i M. Bogdanović, S. Bogdanovića, T. Petković i M. Ćirića u radu [15]. U poslednje pomenutom radu dokazan je i veoma koristan rezultat kojim se uopšteno direktabilan automat može predstaviti kao ekstenzija uniformno lokalno jako direktabilnog automata trap-direktabilnim automatom. Sledećom teoremom data je preciznija strukturna karakterizacija uopšteno direktabilnih automata.

Teorema 4.12. *Automat A je uopšteno direktabilan ako i samo ako je ekstenzija uniformno lokalno jako direktabilnog automata B trap-direktabilnim automatom C.*

U ovom slučaju imamo da je

$$DW(C)\cdot ULDW(B)\subseteq GDW(A)\subseteq DW(C)\cap ULDW(B).$$

Dokaz. Neka je A uopšteno direktabilan automat. Uzmimo proizvoljno stanje $a \in A$ i reč $u \in GDW(A)$. Tada je $auvu = au$, za svaki $v \in X^*$, odakle dobijamo da je $au \in R(A)$. Sada, ako stavimo da je $B = R(A)$, imamo da je B podautomat od A, i kako $au \in B$, za svaki $a \in A$ i svaki $u \in GDW(A)$, to dobijamo da je $C = A/B$ trap-direktabilan automat i da je $GDW(A) \subseteq DW(C)$.

Neka je D proizvoljan monogeni podautomat od B. Kako je B reverzibilan, to imamo da je D jako povezan. Uzmimo proizvoljno $a, b \in D$ i $u \in GDW(A)$. Tada $au, b \in D$ i kako je $auv = b$, za neki $v \in X^*$, to dobijamo da je $bu = auvu = au$. Dakle, D je direktabilan automat i $u \in DW(D)$. Prema tome, dokazali smo da je B uniformno lokalno jako direktabilan i da je $GDW(A) \subseteq ULDW(B)$.

Obratno, neka je A predstavljen kao ekstenzija uniformno lokalno jako direktabilnog automata B trap-direktabilnim automatom C. Uzmimo proizvoljno $a \in A$, $p \in DW(C)$, $q \in ULDW(B)$ i $v \in X^*$, i neka je $u = pq$. Tada, $ap, apqvp \in D$, za neki jako direktabilan podautomat D od B. Odavde, imamo da je $auvu = (apqvp)q = (ap)q = au$, zato što je $q \in DW(D)$. Dakle, A je uopšteno direktabilan automat i $DW(C) \cdot ULDW(B) \subseteq GDW(A)$. $\square$

Još jedna karakterizacija uopšteno direktabilnih automata data je sledećom teoremom.

Teorema 4.13. *Sledeći uslovi na konačnom automatu A su ekvivalentni:*

(i) *A je uopšteno direktabilan;*
(ii) *svaki jako povezan podautomat od A je direktabilan;*
(iii) *svaki podautomat od A sadrži direktabilan podautomat;*
(iv) $(\forall a \in A)(\exists u \in X^*)(\forall v \in X^*)\ auvu = au$*;*
(v) $(\forall a \in A)(\exists u \in X^*)(\forall v \in X^*)(\exists w \in X^*)\ auvw = auw$*.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ova implikacija je neposredna posledica Teoreme 4.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Prema Teoremi 1.25, A je ekstenzija automata B trap-direktabilnim automatom C, gde je B direktna suma jako povezanih automata B_i, $i \in [1, n]$, i na osnovu pretpostavke sledi da je B_i direktabilan automat, za svaki $i \in [1, n]$. Kako je $DW(B_i)$ ideal od X^*, za svaki $i \in [1, n]$, i kako je presek svake konačne familije ideala neprazan, to postoji $q \in \bigcap_{i=1}^{n} DW(B_i)$. Odavde, prema Teoremi 4.1 dobijamo da je automat B uniformno lokalno jako direktabilan, odakle, na osnovu Teoreme 4.12 dobijamo da je A uopšteno direktabilan automat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Ova implikacija je neposredna posledica Teoreme 1.25.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Uzmimo proizvoljno $a \in A$. Prema pretpostavci, monogeni podautomat $S(a)$ sadrži direktabilan podautomat B, i tada postoji $p \in X^*$ takav da je $ap \in B$. Neka je $u = pq$, gde je $q \in DW(B)$, i neka je $v \in X^*$ proizvoljna reč. Tada kao u dokazu Teoreme 4.12 dobijamo da je $auvu = au$. Dakle, (iv) važi.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Jasno je da za svaki $a \in A$ postoji $u \in X^*$ takav da je $auvu = au = au^2$, za svaki $v \in X^*$.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Uočimo proizvoljan jako povezan podautomat B automata A i neka su $a, b \in B$. Na osnovu pretpostavke, postoji $u \in X^*$ takav da za svaki $v \in X^*$ postoji $w \in X^*$ takav da je $auvw = auw$. Tada $au, bu \in B$ i kako je B jako povezan to postoji $p \in X^*$ takav da je $aup = bu$, i za dato p postoji $q \in X^*$ takav da je $aupq = auq$. Odavde je $auq = buq$. Dakle, dokazali smo da su a i b izjednačiva stanja, tj. dokazali smo da je B direktabilan automat. $\square$

Sada, prema uslovu (v) prethodne teoreme imamo da za svaki $a \in A$ postoji reč $u \in X^*$ takva da stanje au i svako stanje iz $S(au)$ jesu izjednačiva stanja, dok prema (iv) imamo da svako stanje, u nekom smislu, ima svoju uopšteno usmeravajuću reč.

Takođe, na osnovu prethodnog rezultata možemo konstruisati algoritam ze testiranje uopštene direktabilnosti konačnih automata. Ovaj algoritam bi se sastojao iz dva dela. U prvom delu koristimo algoritam za određivanje komponenata jake povezanosti automata, **Algoritam 3**, a zatim, u drugom delu, kada su komponente jake povezanosti automata određene, na svakoj komponenti testiramo njenu direktabilnost algoritmom datim od strane B. Imreha i M. Steinbya u radu [88] iz 1995. godine. Dakle, algoritam za testiranje uopštene direktabilnosti automata sastojao bi se od **Algoritma 3** i algoritma za testiranje direktabilnosti, u svakom ciklusu prvog algoritma. Kao izlaz ovog algoritma imamo da je automat uopšteno direktabilan, ako posle završetka rada **Algoritma 3** i algoritma za testiranje direktabilnosti, dobijamo da svaka komponenta jake povezanosti automata jeste direktabilan automat, u suprotnom automat nije uopšteno direktabilan. Ako je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih slova, tada kako je vreme potrebno za rad **Algoritma 3** ograničeno sa $\mathcal{O}(mn + n^2)$, a vreme rada algoritma za testiranje direktabilnosti je ograničeno sa $\mathcal{O}(mn^2)$, to je ukupno vreme rada celog algoritma koji testira uopštenu direktabilnost automata veličina reda $\mathcal{O}(mn^2)$. Kompleksnost ovog algoritma je ista kao i kompleksnost algoritma koji testira direktabilnost konačnog automata sa n stanja i m ulaznih slova.

Neka je A uopšteno direktabilan automat. Kao što je u prethodnim odeljcima već rečeno relacija τ_A definisana na A na sledeći način

$$(a, b) \in \tau_A \quad \Leftrightarrow \quad a = b \ \text{ ili } \ (\forall u, v \in X^*)(\exists p, q \in X^*)\ aup = b \ \ \& \ \ bvq = a$$

je najmanja ***Trap***-kongruencija na A. Drugim rečima, $(a, b) \in \tau_A$ ako i samo ako je ili $a = b$ ili a i b pripadaju istom jako povezanom podautomatu od A. Takođe, već je rečeno da relacija ϑ_A definisana na A na sledeći način

$$(a, b) \in \vartheta_A \quad \Leftrightarrow \quad a = b \ \text{ ili } \ (\forall u, v \in X^*)(\exists p, q \in X^*)\ aup = a \ \ \& \ \ bvq = b$$

jeste najmanja ***TDir***-kongruencija na A. Ekvivalentno, $(a, b) \in \vartheta_A$ ako i samo ako je ili $a = b$ ili $a, b \in R(A)$, tj. ϑ_A je Reesova kongruencija određena podautomatom $R(A)$ automata A. Ovako definisane relacije su najmanja ***Trap***- i najmanja $\boldsymbol{TDir}$-kongruencija na konačnom automatu. Skoro isti dokazi rezultata egzistencije pomenutih relacija važe ako je A uopšteno direktabilan i ne obavezno konačan automat.

Sledećom teoremom opisane su veze između kongruencija υ_A, τ_A i ϑ_A na uopšteno direktabilnom automatu A.

Teorema 4.14. *Neka je A uopšteno direktabilan automat. Tada je*

$$\upsilon_A \cdot \tau_A = \tau_A \cdot \upsilon_A = \vartheta_A.$$

Dokaz. Kako je $\upsilon_A \subseteq \vartheta_A$ i $\tau_A \subseteq \vartheta_A$, to je $\upsilon_A \cdot \tau_A \subseteq \vartheta_A$ i $\tau_A \cdot \upsilon_A \subseteq \vartheta_A$. Dakle, ostaje da se dokaže da obratne inkluzije takođe važe. U tom smislu, uzmimo proizvoljno par $(a,b) \in \vartheta_A$. Ako je $a = b$, tada je jasno da $(a,b) \in \upsilon_A \cdot \tau_A$ i $(a,b) \in \tau_A \cdot \upsilon_A$. Neka je $a \neq b$. Tada $a,b \in R(A)$, odakle, prema Teoremi 4.12, imamo da su $S(a)$ i $S(b)$ jako direktabilni automati, tj. imamo da je $G(a) \neq \varnothing$ i $G(b) \neq \varnothing$. Neka su $u \in G(a)$ i $v \in G(b)$ proizvoljne reči. Tada, na osnovu tvrđenja (b) i (c) Leme 4.6 imamo da je

$$uv \in X^*G(b) \subseteq G(b) \quad \text{i} \quad uv \in G(a)v \subseteq G(av),$$

odakle dobijamo da $(a, av) \in \tau_A$ i $(av, b) \in \nu_A \subseteq \upsilon_A$, i na isti način,

$$vu \in X^*G(a) \subseteq G(a) \quad \text{i} \quad vu \in G(b)u \subseteq G(bu),$$

što znači da $(a, bu) \in \nu_A \subseteq \upsilon_A$ i $(bu, b) \in \tau_A$. Prema tome, $(a,b) \in \tau_A \cdot \upsilon_A$ i $(a,b) \in \upsilon_A \cdot \tau_A$, a to je i trebalo dokazati. $\square$

Uopšte, relacija ν_A na uopšteno direktabilnom automatu A nije tranzitivna relacija, tj. $\nu_A \neq \upsilon_A$. Sledeća teorema daje interesantne karakterizacije strukture uopšteno direktabilnih automata na kojima relacija ν_A jeste tranzitivna relacija.

Teorema 4.15. *Sledeći uslovi na automatu A su ekvivalentni:*

(i) *A je uopšteno direktabilan i ν_A je tranzitivna relacija;*
(ii) *A je uopšteno direktabilan i $\upsilon_A \cap \tau_A = \Delta_A$;*
(iii) *A je povratni proizvod direktabilnog automata i utrapljivog automata (u odnosu na trap-direktabilan automat);*
(iv) *A je poddirektni proizvod direktabilnog automata i utrapljivog automata;*
(v) *A je paralelna kompozicija direktabilnog i utrapljivog automata.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ako je ν_A tranzitivna relacija tada je $\nu_A = \upsilon_A$. Uzmimo proizvoljno par $(a,b) \in \upsilon_A \cap \tau_A$. Ako je $a = b$ tada $(a,b) \in \Delta_A$ odakle je implikacija trivijalna, zato neka je $a \neq b$. Iz $(a,b) \in \tau_A$ sledi da $a,b \in B$, za neki jako povezan podautomat B od A, i tada postoji $w \in X^*$ takav da je $aw = b$. Sa druge strane, iz $(a, b) \in \upsilon_A = \nu_A$ sledi da postoji $u \in X^*$ takav da je $avu = a$ i $bvu = b$, za svaki $v \in X^*$. Sada, imamo da je $a = awu = bu = b$. Dakle, $\upsilon_A \cap \tau_A = \Delta_A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Na osnovu Teoreme 1.6, koja važi za proizvoljne univerzalne algebre, sledi da je automat A povratni proizvod automata A_1 i A_2 u odnosu na automat A_3 ako i samo ako postoji par kongruencija θ_1 i θ_2 na A takvih da je $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$, θ_1 i θ_2 su permutabilne, i $A/\theta_1 \cong A_1$, $A/\theta_2 \cong A_2$ i $A/\theta_3 \cong A_3$, gde je $\theta_3 = \theta_1 \cdot \theta_2 = \theta_2 \cdot \theta_1$. Kako prema Teoremi 4.14 imamo da je $\upsilon_A \cdot \tau_A = \tau_A \cdot \upsilon_A = \vartheta_A$, tada iz $\upsilon_A \cap \tau_A = \Delta_A$ sledi da je automat A povratni proizvod direktabilnog automata A/υ_A i utrapljivog automata A/τ_A u odnosu na trap-direktabilan automat A/ϑ_A.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) i (iv) $\Rightarrow$ (v). Ove implikacije su očigledne.

(v) $\Rightarrow$ (i). Neka je automat $A \subseteq B \times C$ paralelna kompozicija direktabilnog automata B i utrapljivog automata C. Tada su B i C uopšteno direktabilni automati, i kako uopšteno direktabilni automati čine uopšteni varijetet, to je i A uopšteno direktabilan automat. Dalje, lako se proverava da važi ekvivalencija

$$((b, c), (b', c')) \in \nu_A \quad \Leftrightarrow \quad b = b' \;\; \& \;\; (c = c' \;\; \text{ili} \;\; c, c' \in Tr(C)\,),$$

odakle dobijamo da je ν_A tranzitivna relacija na A. $\square$

4.6.2. Najmanja *GDir*-kongruencija na automatu

Kako pseudovarijetet ***GDir*** uopšteno direktabilnih automata u sebi sadrži i pseudovarijetet ***Trap*** utrapljivih automata i pseudovarijetet ***Dir*** direktabilnih automata, to se najmanja ***GDir***-kongruencija na konačnom automatu mora sadržati u najmanjoj ***Trap***- i najmanjoj ***Dir***-kongruenciji na datom konačnom automatu. U ovom odeljku dajemo rezultat koji definiše najmanju ***GDir***-kongruenciju na automatu i predstavlja teorijsku osnovu za konstruisanje algoritma za efektivno određivanje najmanje ***GDir***-kongruencije.

Imamo da važi sledeći rezultat:

Teorema 4.16. *Neka je konačan automat A predstavljen kao ekstenzija reverzibilnog automata B pomoću trap-direktabilnog automata C, gde je B direktna suma jako povezanih automata $B_i, i \in [1, n]$. Za svaki $i \in [1, n]$, neka je δ_i najmanja **Dir**-kongruencija na B_i. Tada je relacija γ_A definisana na A sa*

$$(a, b) \in \gamma_A \;\Leftrightarrow\; a = b \;\; \textit{ili} \;\; (a, b) \in \delta_i, \quad \textit{za neki} \;\; i \in [1, n],$$

*najmanja **GDir**-kongruencija na A.*

D o k a z . Lako se proverava da je relacija γ_A kongruencija na A. Kao u dokazu Teoreme 4.13 dobijamo da postoji reč $p \in \bigcap_{i=1}^{n} DW(B_i/\delta_i)$. Dalje, uzmimo proizvoljno

$q \in DW(C)$ i $v \in X^*$. Uočimo, sada, proizvoljno stanje $a \in A$. Tada $aq \in B_i$, za neki $i \in [1, n]$, i za $u = qp$ imamo da važi $auvq = (aq)pvq \in B_i$, što implicira da

$$(auvu, au) = ((auvq)p, (aq)p) \in \delta_i.$$

Dakle, $(auvu, au) \in \gamma_A$, za svaki $a \in A$, odakle dobijamo da je A/γ_A uopšteno direktabilan automat, tj. γ_A je $\boldsymbol{GDir}$-kongruencija na A.

Da bi dokazali da je γ_A najmanja $\boldsymbol{GDir}$-kongruencija na A, uočimo proizvoljnu $\boldsymbol{GDir}$-kongruenciju θ na A. Neka je φ prirodni homomorfizam iz A na A/θ i za svaki $i \in [1, n]$ neka φ_i označava restrikciju od φ na B_i. Tada za svaki $i \in [1, n]$, $B_i\varphi_i$ je jako povezan podautomat od A/θ, odakle prema Teoremi 4.13 imamo da je $B_i\varphi_i$ direktabilan automat. To znači da je $\ker \varphi_i$ direktabilna kongruencija na B_i. Na osnovu pretpostavke dobijamo da je $\delta_i \subseteq \ker \varphi_i$. Prema tome, dobili smo da je

$$\gamma_A = \Delta_A \cup \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i \subseteq \ker \varphi = \theta.$$

Znači, dokazali smo da je γ_A najmanja $\boldsymbol{GDir}$-kongruencija na A. $\square$

I algoritam za određivanje najmanje $\boldsymbol{GDir}$-kongruencije na konačnom automatu, kao i prethodni algoritam za testiranje uopštene direktabilnosti, sastoji se iz dva dela. U prvom delu na datom automatu konstruišemo razlaganje u direktnu sumu jako povezanih automata. Tada koristimo algoritam koji se dobija modifikacijom **Algoritma 4** (algoritam za razlaganje u direktnu sumu) i **Algoritma 3** (algoritam za određivanje komponenata jake povezanosti). U drugom delu algoritmom za nalaženje najmanje direktabilne kongruencije, koji su dali B. Imreh i M. Steinby [88], na svakoj komponenti jake povezanosti, dobijenoj u prvom delu, nalazimo najmanju $\boldsymbol{Dir}$-kongruenciju. Unija svih ovako dobijenih najmanjih $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija predstavlja najmanju $\boldsymbol{GDir}$-kongruenciju na datom automatu. Kao što je već ranije rečeno, za automat sa n stanja i m ulaznih slova, prvi algoritam radi u vremenu $\mathcal{O}(mn + n^2)$, a drugi u vremenu $\mathcal{O}(mn^2 + n^3)$. Prema tome, ukupno vreme rada algoritma kojim se određuje najmanja $\boldsymbol{GDir}$-kongruencija je ograničeno veličinom reda $\mathcal{O}(mn^2 + n^3)$, i ono se poklapa sa vremenom potrebnim za realizaciju algoritma za nalaženje najmanje $\boldsymbol{Dir}$-kongruencije na konačnom automatu.

4.7. Lokalno direktabilni automati

Automat A je lokalno direktabilan ako su svi njegovi monogeni podautomati direktabilni u odnosu na istu usmeravajuću reč. Uslov da svi monogeni podautomati imaju istu usmeravajuću reč je uvek zadovoljen kod konačnih automata. Dakle, konačan automat je lokalno direktabilan ako i samo ako su svi njegovi monogeni podautomati direktabilni. Klasu svih lokalno direktabilnih automata označimo sa

$L(\boldsymbol{Dir})$. Ako je ovo klasa konačnih automata tada je $L(\boldsymbol{Dir})$ pseudovarijetet. U ovom odeljku dajemo algoritme za testiranje lokalne direktabilnosti i nalaženje najmanje $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencije na konačnom automatu. Pomenuti algoritmi uglavnom predstavljaju kombinaciju ili modifikaciju nekog od algoritama navedenih u prethodnim odeljcima ove glave.

4.7.1. Testiranje lokalne direktabilnosti automata

Neke karakteristike lokalno direktabilnih automata, kao i karakteristike njihovih polugrupa prelaza dali su T. Petković, M. Ćirić i S. Bogdanović u radu [113]. Takođe, imamo da važi sledeća teorema.

Teorema 4.17. *Sledeći uslovi na konačnom automatu A su ekvivalentni:*

(i) *A je lokalno direktabilan;*

(ii) *svaki monogeni podautomat od A ima direktabilno jezgro;*

(iii) *A je direktna suma direktabilnih automata;*

(iv) *svaki sumand u najvećem direktno sumskom razlaganju automata A ima direktabilno jezgro;*

(v) $(\forall a \in A)(\exists u \in X^*)(\forall v \in X^*)\ avu = au$.

Dokaz. Prema Teoremi 1.25, konačan automat je direktabilan ako i samo ako ima direktabilno jezgro. Ova činjenica neposredno implicira ekvivalencije (i) $\Leftrightarrow$ (ii) i (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Kako konačni direktabilni automati obrazuju pseudovarijetet, ekvivalencija (i) $\Leftrightarrow$ (iii) sledi na osnovu Teoreme 4.1. Konačno, uslov (v) je zapravo uslov (i) zapisan preko simbola, tj. (i) $\Leftrightarrow$ (v) takođe važi. $\square$

Koristeći prethodnu teoremu možemo dati algoritam kojim se testira lokalna direktabilnost konačnog automata A sa n stanja i m ulaznih slova. Ovaj algoritam predstavlja kombinaciju tri prostija algoritma. Prvi od njih je **Algoritam 4** koji određuje sumande u najvećem direktno sumskom razlaganju automata A. On radi u vremenu $\mathcal{O}(mn)$. Neposredno, posle formiranja sakog od sumanada, proveravamo da li svaki sumand ima jezgro. Pritom, koristimo **Algoritam 3** kojim nalazimo jako povezane podautomate automata A. Kao što je već ranije rečeno ovaj algoritam je kompleksnosti $\mathcal{O}(mn+n^2)$. Ovaj algoritam može biti modifikovan tako da proverava da li uočeni sumand ima samo jedan jako povezan podautomat. Ako takav podautomat postoji sumand ima jezgro, i ostaje još da se testira direktabilnost jezgra za šta koristimo algoritam B. Imreha i M. Steinbya iz rada [88]. Ukupno vreme potrebno za testiranje direktabilnosti svih jezgara je $\mathcal{O}(mn^2)$. Dakle, ceo algoritam za testiranje lokalne direktabilnosti konačnog automata može biti realizovan u vremenu $\mathcal{O}(mn^2)$.

4.7.2. Najmanja $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencija na automatu

Na početku ovog odeljka dajemo rezultat kojim je definisana najmanja $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencija na konačnom automatu. Teorema je dokazana u opštem slučaju za neki direktabilan pseudovarijet $\boldsymbol{P}$ i njegovu odgovarajuću lokalizaciju $L(\boldsymbol{P})$.

Imamo da važi sledeća teorema:

Teorema 4.18. *Neka je $\boldsymbol{P}$ iregularan pseudovarijetet automata i neka je konačan automat A predstavljen kao direktna suma direktno sumski nerazloživih automata $A_i, i \in [1,n]$. Za svaki $i \in [1,n]$ neka je $\lambda_{\boldsymbol{P},i}$ najmanja $\boldsymbol{P}$-kongruencija na A_i. Tada je relacija $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ definisana na A na sledeći način*

$$(a,b) \in \lambda_{\boldsymbol{P},A} \ \Leftrightarrow \ (a,b) \in \lambda_{\boldsymbol{P},i}, \quad \textit{za neki } i \in [1,n],$$

najmanja $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A.

Dokaz. Jasno je da je $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ kongruencija na automatu A. Neka je φ prirodni homomorfizam sa A na $A' = A/\lambda_{\boldsymbol{P},A}$, i za svaki $i \in [1,n]$ neka je φ_i restrikcija od φ na A_i i neka je $A'_i = A_i\varphi_i$. Tada za svaki $i \in [1,n]$ imamo da je

$$\begin{aligned}(a,b) \in \ker\varphi_i \ &\Leftrightarrow \ a,b \in A_i \ \ \& \ \ (a,b) \in \ker\varphi \\ &\Leftrightarrow \ a,b \in A_i \ \ \& \ \ (a,b) \in \lambda_{\boldsymbol{P},A} \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \in \lambda_{\boldsymbol{P},i},\end{aligned}$$

odakle je $\ker\varphi_i = \lambda_{\boldsymbol{P},i}$. Odavde, dobijamo da je $A'_i \cong A_i/\lambda_{\boldsymbol{P},i} \in \boldsymbol{P}$, zato što $\lambda_{\boldsymbol{P},i}$ jeste $\boldsymbol{P}$-kongruencija na A_i. Sa druge strane, ako $a' \in A'_i \cap A'_j$, za neke $i,j \in [1,n], i \neq j$, tada je $a' = a_i\varphi_i = a_i\varphi$ i $a' = a_j\varphi_j = a_j\varphi$, za neke $a_i \in A_i$ i $a_j \in A_j$, odakle $(a_i,a_j) \in \lambda_{\boldsymbol{P},A}$. Ali, prema definiciji relacije $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ sledi da a_i i a_j moraju pripadati istoj komponenti A_k, za neki $k \in [1,n]$, tj. sledi da je $i = k = j$, a to vodi u kontradikciju. Dakle, zaključujemo da je $A'_i \cap A'_j = \varnothing$ za $i,j \in [1,n], i \neq j$. Odavde, A' je direktna suma automata $A'_i, i \in [1,n]$. Prema tome, na osnovu Teoreme 4.1 dobijamo da $A' \in L(\boldsymbol{P})$, tj. dobijamo da $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ jeste $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A.

Da bi dokazali da je $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ najmanja $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A, uočimo proizvoljno $L(\boldsymbol{P})$-kongruenciju θ na A. Neka je ϕ prirodni homomorfizam sa A na $A" = A/\theta$, i za svaki $i \in [1,n]$ neka je ϕ_i restrikcija od ϕ na A_i i neka je $A_i" = A_i\phi_i = A_i\phi$. Dokazaćemo da je $A_i"$ automat nerazloživ u direktnu sumu, za svaki $i \in [1,n]$. Fiksirajmo $i \in [1,n]$ i uočimo $A_i"$. Lako se proverava da inverzna homomorfna slika $B{\phi_i}^{-1}$ svakog direktnog sumanda B od $A_i"$ jeste direktni sumand od A_i, i kako je prema pretpostavci A_i nerazloživ u direktnu sumu, to je i $A_i"$ takođe nerazloživ u direktnu sumu. Sa druge strane, θ je $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A, odakle $A" = A/\theta \in L(\boldsymbol{P})$, i kako je $L(\boldsymbol{P})$ pseudovarijetet, to takođe imamo da $A_i" \in L(\boldsymbol{P})$. Prema Teoremi 4.1 automat $A_i"$ može biti predstavljen kao direktna suma automata iz $\boldsymbol{P}$, i kako je $A_i"$ nerazloživ u direktnu sumu, dobijamo da $A_i" \in \boldsymbol{P}$. Odavde i iz činjenice da je $A_i" = A_i\phi_i \cong A_i/\ker\phi_i$ sledi da $\ker\phi_i$ jeste $\boldsymbol{P}$-kongruencija na A_i, tj. sledi da je $\lambda_{\boldsymbol{P},i} \subseteq \ker\phi_i$. Znači, $\lambda_{\boldsymbol{P},i} \subseteq \ker\phi_i$ za svaki $i \in [1,n]$, odakle dobijamo da je $\lambda_{\boldsymbol{P},A} \subseteq \ker\phi = \theta$. Prema tome, dokazali smo da je $\lambda_{\boldsymbol{P},A}$ najmanja $L(\boldsymbol{P})$-kongruencija na A $\square$

Na osnovu prethodnog rezultata ako je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet direktabilnih automata, tj. ako je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Dir}$, kao neposrednu posledicu dobijamo opis najmanje $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencije na konačnom automatu. Možemo iskazati sledeći rezultat:

Posledica 4.3. *Neka je konačan automat A predstavljen kao direktna suma direktno sumski nerazloživih automata $A_i, i \in [1,n]$. Za svaki $i \in [1,n]$ neka je δ_i najmanja $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija na A_i. Tada je relacija λ_A definisana na A na sledeći način*

$$(a,b) \in \lambda_A \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in \delta_i \;\; \textit{za neki } i \in [1,n],$$

najmanja $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencija na A.

I algoritam ze određivanje najmanje $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencije, kao i nekoliko prethodnih algoritama, sastoji se iz dva dela. U prvom delu koristimo **Algoritam 4** kojim dati automat razlažemo u direktnu sumu njegovih podautomata. Zatim, u drugom delu, na svakoj komponenti direktno sumskog razlaganja, dobijenog u prvom delu, algoritmom B. Imreha i M. Steinbya [88], konstruišemo najmanju $\boldsymbol{Dir}$-kongruenciju. Na kraju kada oba algoritma završe svoj rad, unija svih najmanjih $\boldsymbol{Dir}$-kongruencija, dobijanih na svakom sumandu napravljenog direktnosumskog razlaganja, predstavlja najmanju $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruenciju na konačnom automatu. Ako je A konačan automat sa n stanja i m ulaznih slova, kompleksnost prvog algoritma je $\mathcal{O}(mn)$, kompleksnost drugog algoritma je $\mathcal{O}(mn^2 + n^3)$, dok kompleksnost celog algoritma za nalaženje najmanje $L(\boldsymbol{Dir})$-kongruencije na A jeste veličina $\mathcal{O}(mn^2+n^3)$.

Takođe, ako je $\boldsymbol{P}$ pseudovarijetet svih konačnih trap-direktabilnih automata, tj. ako je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{TDir}$, to se kao posledica Teoreme 4.18 može dobiti rezultat iskazan Teoremom 4.6. Dakle, dokaz egzistencije najmanje $L(\boldsymbol{TDir})$-kongruencije dat je na dva načina.

Na kraju, napomenimo još jednom da su rezultati prezentovani u ovoj glavi originalni. Takođe, izlagani su na nekoliko međunarodnih konferencija, a neki od njih su publikovani u inostranim časopisima, na primer u radovima [125] i [126].

Literatura

[1] C. J. Ash, *Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes*, J. Algebra **92** (1985), 104–115.

[2] P. Agliano and J. B. Nation, *Lattices of pseudovarieties*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **46** (1989), 177–183.

[3] J. Almeida, *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1994.

[4] J. Almeida, *The algebra of implicit operations*, Algebra Universalis **26** (1989), 16–32.

[5] J. Almeida, *On pseudovarieties, varieties of languages, filters of congruences, pseudoidentities and related topics*, Algebra Universalis **27** (1990), 333-350.

[6] R. Arens and I. Kaplansky, *Topological representation of algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 457-481.

[7] V. A. Artamonov, V. N. Saliĭ, L. A. Skornyakov, L. N. Shevrin and E. G. Shulgeifer, *General algebra*, Vol 2, L. A. Skornyakov (ed.), Matematicheskaya Biblioteka, Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).

[8] I. Babcsányi, *Rees automaták*, Matematikai Lapok **29** (1977–81), no. 1–3, 139–148.

[9] I. Babcsányi and A. Nagy, *Right-group type automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), 131-136.

[10] J. T. Baldwin and J. Berman, *Varieties and finite closure conditions*, Colloq. Math. **35** (1976), 413–418.

[11] B. Banaschewski, *The Birkhoff Theorem for varieties of finite algebras*, Algebra Universalis **17** (1983), 360–368.

[12] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Comb. Phil. Soc. **31** (1935), 433–454.

[13] G. Birkhoff, *Subdirect unions in universal algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 764–768.

[14] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq., New York, 1979.

[15] M. Bogdanović, S. Bogdanović, T. Petković and M. Ćirić, *The necks of automata*, (to appear).

[16] S. Bogdanović, *Power regular semigroups*, Zb. radova PMF Novi Sad **12** (1982), 418-428.

[17] S. Bogdanović, *Semigroups of Galbiati-Veronesi*, Algebra and Logic, Zagreb, Inst. of Math., Novi Sad, (1984), 9–20.

[18] S. Bogdanović, *Right π-inverse semigroups*, Zbornik radova PMF, Ser. Mat., Novi Sad **14** (1984), 187–195.

[19] S. Bogdanović, *Semigroups with a system of subsemigroups*, Inst. of Math., Novi Sad, 1985.

[20] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Semigroups in which the radical of every ideal is a subsemigroup*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta, Niš **6** (1992), 129–135.

[21] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Semigroups*, Prosveta, Niš, 1993, IV + 287 pp. (in Serbian).

[22] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Semilattices of Archimedean semigroups and (completely) π-regular semigroups I* (*A survey*), Filomat(Niš) **7** (1993), 1–40.

[23] S. Bogdanović and M. Ćirić, *A new approach to some greatest decompositions of semigroups* (*A survey*), SEA Bull. Math. **18** (1994), 27–42.

[24] S. Bogdanović and M. Ćirić, *A note on congruences on algebras*, Proc. 2-nd Math. Confer. in Priština 1996, Lj. D. Kočinac, Ed., (1997), pp. 67–72.

[25] S. Bogdanović and M. Ćirić, *A note on left regular semigroups*, Publ. Math. Debrecen bf 49/3-4 (1996), 1–7.

[26] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Radicals of Green's relations*, Czechosl. Math. Journal **49 (124)** (1999), 683–688.

[27] S. Bogdanović, M. Ćirić and T. Petković, *Generalized varieties of algebras*, (to appear).

[28] S. Bogdanović, B. Imreh, M. Ćirić and T. Petković, *Directable automata and their generalizations - A survey*, in: S. Crvenković (ed.), Proc. VIII Inter. Confer. "Algebra and Logic" (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math. **29 (2)** (1999), 31–74.

[29] S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković, B. Imreh and M. Steinby, *Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras*, Fundamenta Informaticae **34** (1999), 31–40.

[30] S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković, B. Imreh and M. Steinby, *Local properties of unary algebras and automata*, (to appear).

[31] S. Bogdanović, M. Ćirić and Ž. Popović, *Semilattice decompositions of semigroups revisited*, Semigroup Forum **61** (2000), 263–276.

[32] J. A. Brzozowski, *Canonocal regular expressions and minimal atate graphs for definite events*, in: Proc. Symp. Math. Theory of Automata, Microwave Research Inst. Symp. Ser. **12** (Brooklyn, 1963), New York, (1963), 529–561.

[33] J. R. Büchi, *Finite automata, their algebras and grammars. Towards a theory of formal expressions*, (ed. D. Siefkes), Springer-Verlag, New York, 1989.

[34] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1981.

[35] A. H. Clifford, *Semigroups admitting relative inverses*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 1037–1049.

[36] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups I*, Amer. Math. Soc., 1961.

[37] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups II*, Amer. Math. Soc., 1967.

[38] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. bf 70, no. **3** (1953), 361-379.

[39] J. Černý, *Poznámka k homogénym experimentom s konecinými automatami*, Mat.-fyz. cas. SAV **14** (1964), 208–215.

[40] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Sturdy bands of semigroups*, Collect. Math. **41** No. 3 (1990), 189–195.

[41] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Spined products of some semigroups*, Proc. Japan Acad. **69** (1993), 357–362.

[42] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Decompositions of semigroups induced by identities*, Semigroup Forum **46** (1993), 329–346.

[43] M. Ćirić and S. Bogdanović, *0-Archimedean semigroups*, Indian J. Pure Appl. Math. **27 (5)** (1996), 463–468.

[44] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Posets of $\mathcal{C}$-congruences*, Algebra Univerzalis **36** (1996), 423–424.

[45] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum **52** (1996), 119–132.

[46] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Subdirect products of a band and a semigroup*, Portugaliae Math. **53** (1996), 117–128.

[47] M. Ćirić and S. Bogdanović, *The lattice of varieties of bands*, Proceedings of the Conference on Semigroups and Applications, St Andrews, 1997 (J. M. Howie and N. Ruškuc, eds.), World Scientific, (1998), pp. 47–61.

[48] M. Ćirić and S. Bogdanović, *Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata*, Algebra Colloquium **6:1** (1999), 71–88.

[49] M. Ćirić, S. Bogdanović and J. Kovačević, *Direct sum decompositions of quasi-ordered sets and their applications*, Filomat (Niš) **12:1**, (1998), 65–82.

[50] M. Ćirić, S. Bogdanović and T. Petković, *The lattice of positive quasi-orders on an automaton*, Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. **11**, (1996), 143–156.

[51] M. Ćirić, S. Bogdanović and T. Petković, *The lattice of subautomata of an automaton: A survey*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **64** (**78**) (1998), 165–182.

[52] M. Ćirić, S. Bogdanović and Ž. Popović, *On nil-extensions of rectangular groups*, Algebra Colloquium **6**:2 (1999), 205–213.

[53] M. Ćirić, B. Imreh and M. Steinby, *Subdirectly irreducible definite, reverse definite and generalized definite automata*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **10** (1999), 69–79.

[54] M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Languages and Automata*, Prosveta, Niš, 2000 (in Serbian).

[55] M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Weak direct limits of unary algebras*, (to appear).

[56] D. Cvetković, *Graph theory and applications*, Naučna knjiga, Beograd, 1990 (in Serbian).

[57] D. Cvetković and S. Simić, *Discrete mathematics – mathematics for computer science*, Drugo izdanje, Prosveta, Niš, 1996 (in Serbian).

[58] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper and Row, New York, N. Y., 1965.

[59] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[60] J. Demel, M. Demlová and V. Koubek, *Fast algorithms constructing minimal subalgebras, congruences, and ideals in a finite algebra*, Theoretical Computer Science **36** (1985), 203–216.

[61] P. Dömösi, *On temporal products of automata, papers on automata and languages X*, Dep. of Math. Karl Marx Univ. of Economics, Budapest, 1988-1, pp. 49–62.

[62] P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes*, Mem. Acad. Sci. Inst. Fr. **63**, Gauthiers-Villars, 52 pp.

[63] S. Eilenberg, *Classes of semigroups and classes of sets*, Proc. ACM Symp. on Theory of Computing **5** (1973), 266–267.

[64] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York and London, Vol. A, 1974.

[65] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York and London, Vol B, 1976.

[66] S. Eilenberg and M. P. Schutzenberger, *On pseudovarieties*, Advances in Math. **19** (1976), 413–418.

[67] Z. Ésik, *Varieties of automata and transformation semigroups*, Acta Mathematica Hungarica **59** (1–2) (1992), 59–74.

[68] Z. Ésik and B. Imreh, *Subdirectly irreducible commutative automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 251–260.

[69] P. H. H. Fantham, *On the classification of a certain type of semigroup*, Proc. London Math. Soc. (3) **10** (1960), 409–427.

[70] I. Fleischer, *A note on subdirect products*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **6** (1955), 463–465.

[71] L. Fuchs, *On subdirect unions I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **3** (1952), 103–120.

[72] J. L. Galbiati e M. L. Veronesi, *Bande di semigruppi quasi bisemplici*, Scritti in onore di G. Melzi, Vita e Pensiero (1994), 157–172.

[73] F. Gécseg and I. Peák, *Algebraic theory of automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[74] A. Ginzburg, *About some properties of definite, reverse definite and related automata*, IEEE Trans. Electronic Computers **EC-15** (1966), 809–810.

[75] E. Graczyńska, *On some operators on pseudovarieties*, General Algebra, Proc. Conf., Vienna/Austria 1990, Contrib. General Algebra **7** (1991), 177–184.

[76] J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. of Math. **54** (1951), 163–172.

[77] G. Grätzer, *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1968.

[78] G. Grätzer and J. Plonka, *A characterization of semilattices*, Colloq. Math. **22** (1970), 21–24.

[79] P. A. Grillet, *Semigroups. An intoduction to structure theory*, ColloMarcel Dekker, Inc., New York, 1995.

[80] P. M. Higgins, *An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities*, Algebra Universalis **27** (1990), 597–599.

[81] P. M. Higgins, *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford University Press, Oxford-New York-Tokyo, 1992.

[82] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, Acad. Press, New York, 1976.

[83] J. M. Howie, *Automata and languages*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[84] J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Mathematical Cociety Monographs. New Series, Oxford: Clarendon Press, 1995.

[85] D. A. Huffman, *The synthesis of sequential switching circuits*, J. Franklin Inst. **57** (1954), I, 161–190.

[86] B. Imreh, *On finite nilpotent automata*, Acta Cybernetica **5** (1981), 281–293.

[87] B. Imreh, *On finite definite automata*, Acta Cybernetica **7** (1984), 61–65.

[88] B. Imreh and M. Steinby, *Some remarks on directable automata*, Acta Cybernetica **12** (1995), 23–35.

[89] M. Ito and J. Duske, *On cofinal and definite automata*, Acta Cybernetica **6** (1983), 181–189.

[90] B. Jónsson, *Topics in universal algebra*, Lect. Notes in Math. Vol 250, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[91] N. Kimura, *Note on idempotent semigroups III*, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 113–114.

[92] N. Kimura, *Note on idempotent semugroups IV (Identities in three variables)*, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 121–123.

[93] N. Kimura, *The structure of idempotent semigroups I*, Pacific J. Math. **8** (1958), 257–275.

[94] N. Kimura, *On some existence theorems on multiplicative systems*. I. *Greatest quotients*, Proc. Japan Acad. **36** (1958), no. 6, 305–309.

[95] F. Kmeť, *Radicals and their left ideal analogues in a semigroup*, Math. Slovaca **38** (1988), 139–145.

[96] Lj. Kočinac and A. Mandak, *Algebra* II: *Groups, rings and fields, universal algeba, moduls and linear algebra, lattice and Boolean algebras*, Univerzitet u Prištini, Priština, 1996 (in Serbian).

[97] S. R. Kogalovskiĭ, *On the Theorem of Birkhoff*, Uspehi Mat. Nauk. **20** (1965), 206–207 (in Russian).

[98] S. J. L. Kopamu, *Orthodox right quasi normal bands of groups*, S E A Bull. Math. **18** (1994), No. 3, 105–116.

[99] S. J. L. Kopamu, *Varieties of structurally trivial semigroups I*, Semigroup Forum **58** (1999), 159–174.

[100] J. Kovačević, M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Decompositions of automata and reversible states*, (to appear).

[101] A. G. Kurosh, *Lectures in general algebra*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).

[102] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications*, Willey Interscience, New York, 1979.

[103] R. Sz. Madarász and S. Crvenković, *Rational algebra*, Mat. Inst. SANU, Beograd, 1992 (in Serbian).

[104] A. I. Maljcev, *Algebraic Systems*, Nauka, Moskva, 1970 (in Russian).

[105] G. H. Mealy, *A method for synthesizing sequential circuits*, Bell. System. Techn. J. **34** (1955), 1045–1049.

[106] Ž. Mijajlović, *Algebra* I, Milgor, Beograd-Moskva, 1993 (in Serbian).

[107] S. Milić, *Elements of mathematical logic and set theory*, A–Š delo, Beograd, 1991 (in Serbian).

[108] S. Milić, *Elements of algebra*, Carić, Beograd, 1995 (in Serbian).

[109] E. F. Moore, *Gedanken-experiments on sequential machines*, in: Automata studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds), Princeton, 1956, 129–153.

[110] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22** (1936), 707–713.

[111] T. Petković, *Varieties of automata and semigroups*, Ph. D. Thesis, University of Niš, 1998 (in Serbian).

[112] T. Petković and M. Steinby, *Piecewise directable automata*, Turku Center for Computer Science, TUCS Technical Report No. 354, July 2000, 1–17.

[113] T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Decompositions of automata and transition semigroups*, Acta Cybernetica (Szeged) **13** (1998), 385–403.

[114] T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Correspondences between varieties of automata and semigroups*, (to appear).

[115] T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Characteristic semigroups of directable automata*, (to appear).

[116] M. Petrich, *The minimal semilattice decomposition of semigroup*, Math. Zeitcher. **85** (1964), 68–82.

[117] M. Petrich, *The structure of a class of semigroups which are unions of groups*, Notices Amer. Math. Soc. No.1, Part 1 **12** (1965), 102–112.

[118] M. Petrich, *A construction and a classification of bands*, Math. Nachr. **48** (1971), 263–274.

[119] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merill, Ohio, 1973.

[120] M. Petrich, *Regular semigroups wich are subdirect products of a band and a semilattice of groups*, Glasgow Math. J. **14** (1973), 27–49.

[121] M. Petrich, *Lectures in semigroups*, Akad. Verlag, Berlin, 1977.

[122] J. E. Pin, *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984. (English translation: *Varieties of formal languages*, North Oxford Academic Publ., London, 1986).

[123] Ž. Popović, *Subdirect decompositions of algebras*, Master Thesis, Faculty of Philosopy, University of Niš, 1998 (in Serbian).

[124] Ž. Popović, S. Bogdanović, and M. Ćirić, *Subdirect decompositions of semigroups preserving semilattice decompositions and ideal extensions*, (to appear).

[125] Ž. Popović, S. Bogdanović, M. Ćirić and T. Petković, *Generalized directable automata*, in: M. Ito (ed.), Words, languages and combinatorics. III. Proceedings of the Second International Colloquium held at Kyoto Sangyo University, Kyoto, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (to appear).

[126] Ž. Popović, S. Bogdanović, T. Petković and M. Ćirić, *Trapped automata*, in: A. Adam and P. Dömösi (eds.), Proceedings of the Nineth International Conference on Automata and Formal Languages, Publ. Math. Debrecen (to appear).

[127] G. B. Preston, *Inverse semigroups*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 396–403.

[128] G. B. Preston, *Inverse semigroups with minimal right ideals*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 404–411.

[129] G. B. Preston, *Representations of inverse semigroups*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 412–419.

[130] P. Protić, *Bands of right simple semigroups*, Publ. Math. Debrecen **51** (1998), 126–132.

[131] M. S. Putcha, *Semigroups in which a power of each element lies in a subgroup*, Semigroup Forum **5** (1973), 354–361.

[132] M. S. Putcha, *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum **6** (1973), 12–34.

[133] M. S. Putcha, *Minimal sequences in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 93–106.

[134] M. S. Putcha, *Rings which are semilattices of Archimedean semigroups*, Semigroup Forum **23** (1981), 1–5.

[135] M. O. Rabin and D. Scott, *Finite automata and their decision problem*, IBM J. Res. Dev. **3** (1959), 114–125.

[136] J. Reiterman, *The Birkhoff theorem for finite algebras*, Algebra Universalis **14** (1982), 1–10.

[137] X. M. Ren, K. P. Shum and Y. Q. Guo, *On spined products of quasi-rectangular groups*, Algebra Colloquium **6:1** (1999), 202-213.

[138] V. N. Saliĭ, *Universal algebra and automata*, Izd. Saratovskogo Univ., Saratov, 1988 (in Russian).

[139] B. M. Schein, *On the theorem Birkhoff-Kogalovkiĭ*, Uspehi Mat. Nauk. **20** (1965), 173–174 (in Russian).

[140] B. M. Schein, *Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific Jour. Math. **17** (1966), 529–547.

[141] B. M. Schein, *Bands of monoids*, Acta Sci. Math. Szeged **36** (1974), 145–154.

[142] M. Setoyanagi, *Note on subdirectly irredicible automata*, Proc. Conf. on Semigroup Theory and its Related Fields, Kyoto, (1982), 68–77.

[143] C. E. Shannon and J. McCarthy, *Automata studies*, Princeton Univ. Press **13**, Princeton, N.J., 1956.

[144] L. N. Shevrin, *Theory of epigroups I*, Mat. Sbornik **185** (1994), 129–160 (in Russian).

[145] L. N. Shevrin, *Theory of epigroups II*, Mat. Sbornik **185** (1994), no. 9, 153–176 (in Russian).

[146] D. M. Smirnov, *The correspondence between regularly definable varieties of unary algebras and semigroups*, Algebra i Logika **17** (1978), no. 4, 468–477 (in Russian).

[147] K. P. Shum and X. M. Ren, *Completely Archimedean semigroups*, Proc. of Internat. Conf. in Math. in Kaoshing, Taiwan, 1994, World Scient. INC, (1995), 193–202.

[148] P. H. Starke, *Abstrakte automaten*, VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

[149] R. Šulka, *The minimal semilattice decomposition of a semigroup, radicals and nilpotency*, Mat. časop. **20** (1970), 172–180.

[150] T. Tamura, *The theory of construction of finite semigroups I*, Osaka Math. Journal **8** (1956), 243–261.

[151] T. Tamura, *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum **4** (1972), 255–261.

[152] T. Tamura, *On Putcha's theorem concerning semilattice of Archimedean semigroups*, Semigroup Forum **5** (1972), 83–86.

[153] T. Tamura, *Quasi-orders, generalized Archimedeaness, semilattice decompositions*, Math. Nachr **68** (1975), 201–220.

[154] T. Tamura and N. Kimura, *On decompositions of a commutative semigroups*, Kodai Math. Sem. Rep. **4** (1954), 109-112.

[155] T. Tamura and N. Kimura, *Existence of greatest decomposition of semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep. **7** (1955), 83–84.

[156] X. Tang, *Semilattices of $\mathcal{L}$-simple semigroups*, Semigroup Forum **57** (1998), 37–41.

[157] A. Tarski, *A remark on functionally free algebras*, Ann. of Math. **47** (1946), 163–165.

[158] W. Taylor, *Equational logic*, Houston J. Math. **5** (1979), 1–83.

[159] M. Teissier, *Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes*, C. R. Acad. Sci. Paris. **232** (1951), 1987–1989.

[160] D. Thérien, *Classification of regular languages by congruences*, Rep. CS-80-19, University of Waterloo, Dept. Comput. Sci. Waterloo, Ontario, 1980.

[161] D. Thérien, *Recognizable languages and congruences*, Semigroup Forum **23** (1981), 371–373.

[162] G. Thierrin, *Sur quelques propriétiés de certaines classes de demi-groupes*, C. R. Acad. Sci. Paris **239** (1954), 1335-1337.

[163] G. Thierrin, *Decompositions of locally transitive semiautomata*, Utilitas Mathematica **2** (1972), 25–32.

[164] V. V. Vagner, *Generalised groups*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

[165] V. V. Vagner, *Theory of generalised heaps and generalised groups*, Mat. Sbornik (N. S) **32** (1953), 545–632 (in Russian).

[166] G. H. Wenzel, *Note on a subdirect representation of universal algebras*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 329–333.

[167] G. H. Wenzel, *Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras* $\langle A; f\rangle$, Arch. Math. (Basel) **21** (1970), 256–263.

[168] M. Yamada, *Inversive semigroups I*, Proc. Japan Acad. **39** (1963), 100-103.

[169] M. Yamada, *Inversive semigroups II*, Proc. Japan Acad. **39** (1963), 104-106.

[170] M. Yamada, *On the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep. **7** (1955), 59–62.

[171] M. Yamada, *Strictly inversive semigroups*, Bull. Shimane Univ. **13** (1964), 128–138.

[172] M. Yamada, *Inversive semigroups III*, Proc. Japan Acad. **41** (1965), 221–224.

[173] M. Yamada, *Regular semigroups whose idempotents satisfy permutation identities*, Pacific Jour. of Math. **21** (1967), 371–392.

[174] M. Yamada, *Construction of inverse semigroups*, Mem. Fac. Lit. & Sci., Shimane Univ., Nat. Sci. **4** (1971), 1–9.

[175] M. Yamada and N. Kimura, *Note on idempotent semigroups II*, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 110–112.

[176] M. Yoeli, *Subdirectly irreducible unary algebras*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 957–960.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCE
Department of Mathematics

Žarko Lj. Popović

CONGRUENCES AND DECOMPOSITIONS OF SEMIGROUPS AND AUTOMATA

ph.d. thesis

NIŠ, 2001

Preface

The main role in the study of algebraic structures play two complementary methods - the composition and the decomposition methods. The main task of the first one is the construction of an algebra of wished properties from in advance given algebras of simpler structure. The second method consists in partitioning of an algebra into parts of simpler structure, and describing the properties of these parts and the connections between them.

Congruences were introduced by K. Gauss in 1801, who studied the divisibility of integers, and later they have been often studied by a number of algebraists. Many important types decompositions of algebra are based on the usage of congruences, so that they have a very important and special role in the study of decompositions of algebras. Such a role of congruences became apparent in the 1940-ties in several papers by G. Birkhoff, who proved that all decompositions of algebras into direct and subdirect products could be realized using some systems of congruences. In 1950-ties, when T. Tamura and N. Kimura started to study the greatest decompositions of semigroups, then appeared the smallest semigroup congruences which corresponding to those the greatest decompositions of semigroups. All of this has lead to an intensive study of connections between compositions and decompositions of algebras and corresponding congruences.

The main subject of this dissertation are some congruence on semigroups and automata. After the first chapter, where we introduce some basic terms and notions from universal algebra, semigroup theory and theory of automata, needed for the further work, and some results which will be used in the sequel, we present some new ways for the construction of the smallest semilattice congruence on a semigroup, i.e. the greatest semilattice decomposition of a semigroup. Furthermore, we introduce some new systems of congruences on semigroups, which made subdirect decompositions of semigroups. Finally, we describe the smallest congruences of certain types on an automaton.

Nowadays, a semigroup presents one of the most interesting and the most studied algebraic structures. In decompositions of semigroups, semilattice decompositions play the main role. The first time this kind of decompositions was defined and studied in the paper by A. H. Clifford [35], in 1941. The famous theorem, which T.

Tamura proved in his work [150] in 1956, says that every semigroup has a greatest semilattice decomposition and each its component is a semilattice indecomposable semigroup. But, if we intend to study the structure of semigroups through its greatest semilattice decomposition we meet the problem: How to construct this the greatest semilattice decomposition of the semigroup? Another more convenient version of this problem is: How to construct the smallest semilattice congruence σ on a semigroup?

One of the first, maybe the best, construction method for σ was given by T. Tamura, in paper [151], in 1972. He made the following procedure: We start from the division relation on a semigroup. Then we define a new division relation (division of a power of elements) on a semigroup denoted by $\longrightarrow$. Finally, making the transitive closure of $\longrightarrow$ we obtain a quasi-order whose symmetric opening (that is, its natural equivalence) equals σ, the smallest semilattice congruence on a semigroup.

On the other hand, M. S. Putcha in [133], in 1974, proved that the action of the transitive closure and the symmetric opening operators in the Tamura's procedure can be permuted. In other words, on the relation $\longrightarrow$ we can apply the symmetric opening operator first, to obtain a relation denoted by $\longrightarrow$, and applying the transitive closure operator on $—$, we obtain the smallest semilattice congruence σ again.

The hardest step in these procedure is application of the transitive closure operator to relations $\longrightarrow$ and $—$. As known, the transitive closure on a relation is obtained using an iteration procedure of composition (product) on that relation. In the general case, the number of iterations applied may be infinite. A natural problem that one imposes here is the following: Under what conditions on a semigroup S, the smallest semilattice congruence on S can be obtained applying only a finite number of iterations to $\longrightarrow$ or $—$?

The answer to this question, connected to the relation $\longrightarrow$ was given in 1996, in the work [45] of M. Ćirić and S. Bogdanović. In the above mentioned paper M. Ćirić and S. Bogdanović gave a new characterization of the smallest semilattice congruence on a semigroup using principal radicals, i.e. completely semiprime ideals of semigroups, and they described the structure of all semigroups in which the length of the minimal paths in the graph corresponding to the relation $\longrightarrow$ is bounded.

In the second chapter of this dissertation we consider and solve the related problems concerning the Putcha's relation $—$. Namely, let $\mathcal{S}_n$ and $\widehat{\mathcal{S}}_n$ denote respectively the classes of all semigroups S in which the lengths of all minimal paths in the graphs $(S, \longrightarrow)$ and $(S, —)$ are bounded by n, for $n \in \mathbb{N}$. Equivalently, $\mathcal{S}_n$ and $\widehat{\mathcal{S}}_n$ are respectively the classes of all semigroups in which the n-th powers $\longrightarrow^n$ and $—^n$ of $\longrightarrow$ and $—$ are transitive relations. It is known that $\mathcal{S}_1 = \widehat{\mathcal{S}}_1$. This class consists of all semigroups that are decomposable into the semilattice of Archimedean semigroups. They were studied by M. S. Putcha in [132], 1973, and in [134], 1981, T. Tamura in [152], 1972, F. Kmet in [95], 1988, S. Bogdanović and M. Ćirić in [20], 1992, and in [22] and [42], 1993, and others. Semigroups from the class $\mathcal{S}_n$ were completely described by M. Ćirić and S. Bogdanović in [45], 1996. In particular, they were characterized as semilattices of σ_n-simple semigroups. The purpose of this dissertation is to study semigroups belonging to the class $\widehat{\mathcal{S}}_n$. These semigroups will be described by Theorem 2.2 and this theorem represented the most important result of chapter two. By other theorems we characterize various special types of semilattice decompositions of semigroups. We also discuss similar problems concerning the relations $\mathrel{-\!\!-}_l$ and $\mathrel{-\!\!-}_r$ and their n-th powers, for $n \in \mathbb{N}$.

Furthermore, in this chapter we consider two new operators $R : \rho \mapsto R(\rho)$ and $T : \rho \mapsto T(\rho)$ on the lattice of all binary relations on the given semigroup. The first one is introduced and studied by M. S. Putcha in [131], 1973. In above mentioned paper Putcha described the radical $R(\mathcal{J})$ of the Green relation $\mathcal{J}$. The general definition for radicals of relations on semigroups was given by L. N. Shevrin in [144], 1994. The second type of radicals was defined and studied by S. Bogdanović and M. Ćirić in [26], 1996, where both of these radicals were applied to Green's relations. As was proved by M. S. Putcha in [131], 1973, the smallest semilattice congruence on a completely π-regular semigroup equals the transitive closure of $R(\mathcal{J})$. But, this assertion does not hold in the general case. In the second chapter we investigate some conditions under which the transitive closure and powers of the relations $R(\mathcal{J})$ and $T(\mathcal{J})$ are the smallest semilattice congruences.

The results obtained in Chapter 2 generalize the known results given by M. S. Putcha [132], T. Tamura [151], L. N. Shevrin [144], M. Ćirić and S. Bogdanović [45].

Another very important decomposition method considered in this dissertation are subdirect decompositions of algebras. The subdirect product of algebras presents one of the most efficient methods for the study of their structure. A lot of algebraist have aimed their attention on these decompositions since 1944, when G. Birkhoff [12], [13], [14] proved two important general decomposition-composition theorems. According to the first Birkhoff's theorem, an algebra A is a subdirect product of algebras A_i, $i \in I$, if and only if there exists a system θ_i, $i \in I$ of congruences on A, such that $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$, and $A/\theta_i \cong A_i$, for each $i \in I$. Here Δ_A denote the identity relation on A and the system of congruences θ_i, $i \in I$ is known as a system of factor congruences on A. The second theorem, obtained as a consequence of the first one, is known as Birkhoff's representation theorem. It says that every algebra can be represented as a subdirect product of subdirectly irreducible algebras.

L. Fuchs [71] introduced in 1952 a special type of subdirect products, nowadays in the universal algebra known as the pullback product. In Semigroup theory, these products are also called spined products. This name is still being used. As L. Fuchs [71] proved, in a lot of cases, for example for rings, groups or Boolean algebras, all subdirect products can be represented as pullback products. This Fuchs's result was generalized by I. Fleischer [70], in 1955, for the finite family of algebras, and by G. Wenzel [166], in 1967, for the countable family of algebras, proving that pullback products are those subdirect products for which the corresponding system of factor congruences satisfy some conditions which can be viewed as a generalization of the conditions of the Chinese remainder theorem. In the case of products with two components, it is simply reduced to the permutability of a pair factor congruences.

In Semigroups theory, there are three general approaches to subdirect decompositions of semigroups:

(1) using the Birkhoff representation theorem, where we study components of decompositions, which are subdirectly indecomposable semigroups of a given type, in the case that the structure of such semigroup can be determined in an easier way;
(2) using certain algebra constructions, most often those defined by certain systems of semigroups and homomorphisms between them;
(3) explicitly defining the systems of factor congruences which give a certain decomposition.

A lot of well known decompositions of semigroups into subdirect and pullback product were obtained by using the first two methods. Such are, for example, decompositions given by: N. Kimura in [91], [92], 1958, M. Yamada and N. Kimura in [175], 1958, M. Yamada in [171], 1964, in [172], 1965, in [173], 1967, M. S. Putcha in [132], 1973, M. Ćirić and S. Bogdanović in [40], 1990, in [41], 1993, in [45], [46], 1996, in [47], 1998, S. J. L. Kopamu in [98], 1994, X. M. Ren, K.P . Shum and Y. Q. Guo in [137], 1998, and others.

In Chapter 3 of this dissertation, our attention is aimed to the third method for construction of subdirect decomposition of semigroups. Namely, we introduce several systems of congruences and using them we construct subdirect and pullback products of ideal extensions of regular and completely regular semigroups and a nil-extensions of rectangular groups. The subdirect and pullback products of regular and completely regular semigroups are obtained as a consequence. Some results of above mentioned authors are represented in a different and easier way and more constructive proofs to their theorem are given.

The relations $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ and $\mathcal{K}_d$ were introduced in the book of A. H. Clifford and G. B. Preston [36] and in paper [140] by B. M. Shein; they were intensively studied in paper [98] by S. J. L. Kopamu. In the third chapter the relations $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ and $\mathcal{K}_{d,X}$ are defined. If a set X is a duo subset of a semigroup S then the relations $\mathcal{K}_{l,X}$, $\mathcal{K}_{r,X}$ and $\mathcal{K}_{d,X}$ are congruences on S. Furthermore, if S is a regular semigroup and $E = E(S)$ then the relations $\mathcal{K}_{l,E}$, $\mathcal{K}_{r,E}$ and $\mathcal{K}_{d,E}$ equals $\mathcal{K}_l$, $\mathcal{K}_r$ and $\mathcal{K}_d$, respectively. On the semigroups which have the greatest semilattice decomposition we define the relations $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ and $\mathcal{S}_d$. The decompositions of an ideal-extensions of regular and completely regular semigroups, as well as a nil-extensions of rectangular groups were described using the relations $\overline{\mathcal{K}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{K}}_{r,K}$ and $\overline{\mathcal{K}}_{d,K}$, and $\overline{\mathcal{S}}_{l,K}$, $\overline{\mathcal{S}}_{r,K}$ and $\overline{\mathcal{S}}_{d,K}$, and the description of structure of the corresponding factor semigroups were given. Also, the connections between newly defined relations and Green's equivalence were discussed; those relations were used for the description of a new types of a subdirect and pullback products of above mentioned classes of semigroups.

Except of congruences and decompositions of semigroups, the subject of research in this dissertation are also congruences and decompositions of finite automata. Here we use an interpretation of an automaton as a unary algebra, where every input symbol of an automaton is interpreted as a unary operation symbol. Note that the converse also holds, i.e. every universal algebra whose all fundamental operations are unary, can be treated as an automaton. The mentioned interpretation of automata gives the possibility to use results and methods of universal algebra in the study of automata. Here, the investigation concerning to varieties of automata, pseudovarieties of finite automata, and generalized varieties of automata are especially important. Furthermore, connections between automata and the universal algebra are reinforced by the fact that some terms from universal algebra have natural interpretation in the theory of automata, like, for example, subdirect products which are interpreted as a parallel composition of automata.

In accordance with Birkhoff's representation theorems, when speaking about the finite automata, in order to be able to speak about connections between congruences and decompositions of automata we first need to define the least congruences for the given class of automata. Since the least congruence on an automaton correspond the greatest homomorphic image and the greatest factor automaton, the least congruences are very important and we can use them for decompositions of automata. The least congruences on finite automata we also study in this dissertation.

The fourth chapter is dedicated to the least congruences on the finite automata. In this part is given the characterization of the least congruence which corresponds to one of the very important pseudovariety of automata - the variety of directable automata, introduced in paper [39] by J. Černýa, 1964, locally directable, generalized directable, trap-directable, locally trap-directable and trapped automata, introduced in paper [113] by T. Petković, M. Ćirić and S. Bogdanović, 1998.

Using the general characterizations of the least $\boldsymbol{P}$-congruences on the finite automata, where $\boldsymbol{P}$ is one of the above mentioned pseudovarieties of automata, in this chapter the theoretical bases and algorithms for finding the least $\boldsymbol{P}$-congruence on automata are given. Also, here is given the algorithm for testing the membership of a finite automata to the above mentioned pseudovarieties of a finite automata. Furthermore, the algorithm for finding the components in the greatest semilatice decomposition of semigroups, i.e. the algorithm for finding the least direct sum congruence on automata and the algorithm for determining the strongly connected components of a finite automata are given.

At the end, I am using the opportunity to thank my family and my friends for the support, patients and tolerance. A special and unmeasurable gratitude for the unselfish and enormous help during my education, and, of course, during the work-out of my dissertation, I owe to my professors and friends, Prof. dr Stojan Bogdanović and Prof. dr Miroslav Ćirić. Cordial help during the work-out of this doctoral dissertation my dear colleague, dr Tatjana Petković-Stevanović, offered to me and I would like to thank her as well sincerely.

Contents

Indeks

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Поповић Љ. Жарко
Ментор, **МН**:	Мирослав Ћирић
Наслов рада, **НР**:	КОНГРУЕНЦИЈЕ И РАЗЛАГАЊА ПОЛУГРУПА И АУТОМАТА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Југославија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2001.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Чарнојевића 10а
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	4 по.; viii, 152 стр.; 176 реф.; граф. прикази
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	алгебра, рачунарство и информатика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	полугрупе, конгруенције, производи, аутомати, универзалне алгебре
УДК	512.53 (043.3) 512.533.2(043.3) 519.713(043.3) 512.57(043.3)
Чува се, Ч**У**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Још од 1801. године, када су конгруенције уведене у радовима F. Gauss-а, оне играју кључну улогу у изучавању алгебарских структура. Посебно важно место конгруенције имају код разлагања алгебри, где се у први план ситичу најмање конгруенције као оне којима одговарају највећа разлагања алгебри. Главна тема ове дисертације су разни типови конгруенција на полугрупама и аутоматима, као и разлагања полугрупа и аутомата у која су те конгруенције укључене. Најпре се разматрају полумрежна разлагања, где је посебна пажња усмерена ка проблему генерисања најмање полумрежне конгруенције на полугрупи. Методи за њено генерисање, које су 70-тих година дали T. Tamura и M. S. Putcha, захтевају транзитивно затворење извесних релација, што у општем случају захтева итеративни поступак са бесконачно много итерација. Зато се природно поставља питање: Под којим се условима тај број итерација може ограничити? Одговор на то питање за релацију Tamurae дали су 1996. године M. Ћирић и С. Богдановић, а овде је тај проблем решен за релацију Putchae.

	Слични проблеми се разматрају и за неке друге релације, а дају се и неке нове, веома занимљиве, карактеризације полумрежа Архимедових полугрупа. У наставку тезе уводе се неки нови системи конгруенција на полугрупама, разматрају се нека њихова основна својства, а посебно њихови односи са Греен-овим релацијама. Резултати који се том приликом добијају користе се да би се дала нека нова поддиректа разлагања идеалских екстензија регуларних и потпуно регуларних полугрупа, и нил-екстензија правоугаоних група. Такође, разна раније позната поддиректна разлагања су овде изведена на много једноставнији начин, експлицитним одређивањем система конгруенција које их реализују. На крају дисертације говори се о најмањим конгруенцијама на коначном аутомату које одговарају извесним важним псеудоваријететима коначних аутомата. Описана је најмања конгруенција која одговара псеудоваријетету директабилних, локално директабилних, уопштено директабилних, трап-директабилних, локално трап-директабилних и утрапљивих аутомата. Такође, дати су алгоритми којима се тестира припадност аутомата неком од напред поменутих псеудоваријетета, као и алгоритми за налажење одговарајућих најмањих конгруенција.
Датум прихватања теме, **ДП**:	22. 03. 2000.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	Проф. др Стојан Богдановић
	Члан:	др Татјана Петковић-Стевановић
	Члан, ментор:	Проф. др Мирослав Ћирић

Образац **Q4.09.13** - Издање 1

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO:	
Identification number, INO:	
Document type, DT:	monograph
Type of record, TR:	textual / graphic
Contents code, CC:	doctoral dissertation
Author, AU:	Žarko Lj. Popović
Mentor, MN:	Miroslav Ćirić
Title, TI:	CONGRUENCES AND DECOMPOSITIONS OF SEMIGROUPS AND AUTOMATA
Language of text, LT:	Serbian
Language of abstract, LA:	English
Country of publication, CP:	Yugoslavia
Locality of publication, LP:	Serbia
Publication year, PY:	2001.
Publisher, PB:	author's reprint
Publication place, PP:	Niš, Čarnojevića 10a
Physical description, PD: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	4 ch.; viii, 152 pa. ; 176 ref.; graphic representations
Scientific field, SF:	mathematics
Scientific discipline, SD:	algebra, computer science
Subject/Key words, S/KW:	semigroups, congruences, products, automata, universal algebra
UC	512.53(043.3) 521.533.2(043.3) 519.713(043.3) 512.57(043.3)
Holding data, HD:	library
Note, N:	
Abstract, AB:	Since 1801, when congruences have been introduced in the papers by F. Gauss, they play a crucial role in studying of algebraic structures. An outstanding role congruences have in theory of decompositions of algebras, where the least congruences are especially important, as the ones which correspond to the greatest decompositions of algebras. The main subject of this dissertation are various types of congruences on semigroups and automata, as well as decompositions of semigroups and automata which correspond to those congruences. First we consider semilattice decompositions, where an especial attention is aimed to the problem of generation of the least semilattice congruence on a semigroup. Methods for its generation, which were given in 70-ties by T. Tamura and M. S. Putcha, include the transitive closure of certain relations, which in the general case require iterative procedures with infinitely many iterations. Because of that, it is natural to state the question: Under what conditions the number of iterations can be bounded? An answer to this question concerning Tamura's relation was given in 1996 by M. Ćirić and S. Bogdanović, and here this problem is completely solved for the Putrcha's

		relation. Similar problems concerning some other relations are also treated, and some new, very interesting characterizations of semilattices of Archimedean semigroups are given, too. In the next part of the dissertation we introduce some new systems of congruences on semigroups, we study their basic properties, and especially, the relationships between them and the Green's relations. The obtained results are used for some new subdirect decompositions of ideal exstensions of regular and completely regular semigroups, as well as of nil-exstensions of rectangular groups. Also, various known subdirect decompositions are made in a much simpler way, determining explicit systems of congruences which realize these decompositions. Finally, we talk about the least congruences on finite automata which correspond to certain important pseudovarieties of finite automata. We describe the least congruences corresponding to pseudovarieties of directable, locally directable, generalized directable, trap-directable, locally trap-directable and trapped automata. Also, the algorithms for testing the membership of an automaton to the above mentioned pseudovarieties and the algorithms for finding the corresponding least congruences are given.
Accepted by the Scientific Board on, ASB:		22. 03. 2000.
Defended on, DE:		
Defended Board, DB:	President:	Prof. dr Stojan Bogdanović
	Member:	dr Tatjana Petković-Stevanović
	Member, Mentor:	Prof. dr Miroslav Ćirić