Univerzitet u Nišu
Prirodno - matematički fakultet

KARAKTERIZACIJA KLASA MATRIČNIH TRANSFORMACIJA I KOMPAKTNIH LINEARNIH OPERATORA KOD MATRIČNIH DOMENA I PRIMENE

- doktorska disertacija -

Ivana Djolović

Niš, 2007. godina

Univerzitet u Nišu
Prirodno - matematički fakultet

KARAKTERIZACIJA KLASA MATRIČNIH TRANSFORMACIJA I KOMPAKTNIH LINEARNIH OPERATORA KOD MATRIČNIH DOMENA I PRIMENE

- doktorska disertacija -

Ivana Djolović

Niš, 2007. godina

Sadržaj

Predgovor

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja započetog na magistarskim studijama. Izučavajući teoriju sumabilnosti, prostore nizova i matrične transformacije medju njima, mogli smo uočiti da se sve ove oblasti nadovezuju jedna na drugu. Pored toga, znajući norme pojedinih operatora, moguće je ovu medjusobnu povezanost dopuniti i teorijom mera nekompaktnosti, što svakako nije zanemarljivo imajući u vidu široku primenu svih ovih oblasti ne samo u teorijskom smislu, već i kroz primenu u raznim oblastima matematike: teorija fiksne tačke, beskonačni sistemi linearnih jednačina, diferencijalne jednačine, invertibilnost beskonačnih matrica...Ovim radom povezani su na jednom mestu teorija prostora nizova, matričnih transformacija i mere nekompaktnosti. Takodje, koristeći pojam matričnih domena, uveli smo i nove prostore nizova. Originalni rezultati iz [**10**] i [**11**] publikovani su u vodećim svetskim časopisima i sadržani su u ovoj tezi. Rezultati iz [**9**], [**12**], [**13**] objavljeni su u vodećim domaćim časopisima i prezentovani na konferencijama:*International Symposium on Mathematical Analysis and its Applications* (2002, Niška Banja) *International Workshop on Modern Functional Analysis, Operator Theory, Summability and Applications* (2003, Niška Banja), *XI Kongres matematičara Srbije i Crne Gore* (2004, Petrovac na moru).

Rad je sastavljen iz tri glave, podeljene na sekcije.

Prva glava je uvodnog tipa. U Sekciji 1.1. dati su osnovni pojmovi iz teorije sumabilnosti. Neki od rezultata Malkowskog, Jarraha, Rakočevića i Wilanskog, vezanih za teoriju FK i BK prostora nalaze se u drugoj sekciji. Treća sekcija sadrži definicije i rezultate koji se odnose na klasične prostore nizova i matrične transformacije medju njima.

Druga glava posvećena je matričnim domenima trougaonih matrica i karakterizaciji matričnih transformacija medju njima. Rezultati Wilanskog [**46**] i Malkowskog iz [**17**] i [**36**] sadržani su u prvoj sekciji. Takodje su uključeni neki rezultati Rakočevića i Malkowskog iz [**29**]. Ovde posebno treba istaći osobine matričnog domena oblika c_T. Zapravo, Teoreme 2.7 i 2.10 odnose se na $\beta-$dual i matrične transformacije na prostorima oblika X_T, gde se pretpostavlja da je prostor X BK prostor sa osobinom AK, što nije slučaj ni za $X = \ell_\infty$, ni za $X = c$. Medjutim, kroz Napomene 2.8, 2.9 i 2.11 pokazuje se da se navedene teoreme u slučaju $X = \ell_\infty$ mogu u potpunosti primeniti, dok je situacija $X = c$ specifična i zahteva drugačiji pristup. U drugoj sekciji nalaze se originalni rezultati objavljeni u [**10**] i [**11**]. U [**2**], autori su definisali i izučavali prostore $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$ za $0 < r < 1$. Mi nastavljamo sa izučavanjem matričnih transformacija na ovim prostorima, medjutim imamo potpuno drugačiji pristup. Naime, mi nalazimo trougaonu matricu T na osnovu definicije prostora, tako da se prostori $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$ zapravo matrični domeni trougaone matrice T redom u prostorima c_0 i c. Tako dobijamo sledeće: $a_0^r(\triangle) = (c_0)_T$ i $a_c^r(\triangle) = (c)_T$. Dalje je uveden i prostor $a_\infty^r(\triangle)$ koji je matrični domen trougaone matrice T ali u prostoru ℓ_∞. Na ovako definisane prostore nizova, dalje smo primenili rezultate o matričnim domenima i dobili nove rezultate koji se odnose na normu (Tvrdjenje 2.14), egzistenciju i izgled Šauderove baze (Tvrdjenje 2.15), $\beta-$duale (Tvrdjenje 2.16). Dalje smo dali karakterizaciju matričnih transformacija iz klase (X, Y), gde je X jedan od prostora $a_0^r(\triangle)$, $a_c^r(\triangle)$, $a_\infty^r(\triangle)$ a Y proizvoljan klasičan prostor nizova (Teoreme 2.17, 2.18, 2.19). Takodje, na kraju sekcije dajemo i jedan rezultat koji se odnosi na matrične transformacije iz klase (X, Y_T), odnosno situacija kada je finalni prostor matrični domen (Teorema 2.20). U Sekciji 2.3. nalaze se novi rezultati koji još uvek nisu nigde publikovani. Inspirisani prostorima s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$ i s_α izučavanim u [**25**], uvodimo nove prostore $m-$tih razlika, odnosno prostore $s_\alpha^0(\Delta^m)$, $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ i $s_\alpha(\Delta^m)$, pri čemu je $\alpha \in \mathcal{U}$ i $\mathcal{U} = \{u \in \omega | u_n \neq 0 \text{ za svako } n\}$. Izučavanjem ovih prostora uopštili smo neke od rezultata dobijenih u [**25**] i [**27**]. Prostor s_α^0, uveden u [**25**], je BK prostor sa osobinom AK, pa se mogu primeniti Teoreme 2.7 i 2.10

kod izučavanja ovog prostora, a novouvedeni prostor $s_\alpha^0(\Delta^m)$ se može predstaviti kao $(s_\alpha^0)_{\Delta^m}$. Medjutim, mi se u ovom istraživanju odlučujemo na drugačije predstavljanje. Uvodimo dijagonalnu matricu $D = (d_{nk})_{n,k=0}^\infty$ sa elementima $d_{nn} = 1/\alpha_n$ za $n = 0, 1, \dots$ i stavimo $T = D\Delta^m$. Na ovaj način dobijamo $s_\alpha^0(\Delta^m) = (c_0)_T$, $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m) = (c_0 \oplus e)_T$ i $s_\alpha(\Delta^m) = (\ell_\infty)_T$. Ovako definisani prostori nizova su matrični domeni trougaone matrice u klasičnim prostorima nizova, pa istom tehnikom kao u Sekciji 2.2., dobijamo rezultate o normi prostora (Tvrdjenje 2.23), egzistenciji Šauderove baze (Tvrdjenje 2.24) i $\beta-$dualima (Tvrdjenje 2.25). Na kraju dajemo karakterizaciju matričnih transformacija iz (X, Y), gde je X jedan od novouvedenih prostora, a Y proizvoljan klasičan prostor nizova (Teorema 2.26, 2.27, 2.28).

Treća glava posvećena je kompaktnosti operatora. Kuratovski [**20**] je 1930. uveo meru nekompaktnosti α. Kasnije je (1955) Darbo [**5**] nastavio sa izučavanjem ove funkcije u teoriji fiksne tačke. Istrăţesku [**15, 16**] je takodje uveo novu meru nekompaktnosti. J.Banaś i K.Goebel [**3**] dali su aksiomatsku definiciju mera nekompaktnosti. Goldenstein, Gohberg i Markus [**7, 8**] su definisali i izučavali Hausdorfovu (loptastu) meru nekompaktnosti i definisali rezultate koji su od velike važnosti u izučavanju kompaktnih operatora. Merama nekompaktnosti takodje se bavi i Rakočević[**39, 40, 41**]. U našem radu, za nalaženje uslova kompaktnosti operatora koristimo Hausdorfovu meru nekompaktnosti. U prvoj sekciji zato navodimo osnovne pojmove vezane za kompaktnost skupova i operatora, kao i Hausdorfovu meru nekompaktnosti. U izučavanju kompaktnih operatora posebno je važna Teorema 3.1 (Goldenštein, Gohberg, Markus). Specijalni slučajevi ove teoreme, kada je X monoton BK prostor sa osobinom AK ili je $X = c$, razmatrani su u Teoremi 3.12. Sekciju završavamo rezultatima koji se odnose na kompaktnost operatora $L \in \mathcal{B}(X, c)$ i operatora L_A odredjenog beskonačnom matricom $A \in (c, c)$. Kako je za nalaženje Hausdorfove mere nekompaktnosti potrebno izračunavanje normi nekih operatora, druga sekcija ove glave odnosi se na norme potrebne za dalje istraživanje. U Teoremi 3.25 nalazimo normu opratora L_A, za $A \in (X_T, Y)$, kada je $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ili $X = c_0$, a prostor Y je jedan od prostora $c_0, c, \ell_\infty, \ell_1$. Zbog specifičnosti prostora c, posebno dajemo rezultate koji se odnose na normu operatora L_A kada je $A \in (c_T, Y)$ a Y jedan od $c_0, c, \ell_\infty, \ell_1$ (Teorema 3.26). U Sekciji 3.3. nalazimo potrebne i dovoljne uslove (ukoliko je to moguće) za kompaktnost operatora posmatranih u sekciji 3.2. U četvrtoj sekciji se nalaze originalni rezultati objavljeni u [**10**] i [**11**]. Primenjujući rezultate iz prethodnih sekcija ove glave, nalaze se uslovi za kompaktnost operatora izučavanih u Sekciji 2.2. Može se primetiti da kada je $X = a_0^r(\Delta)$ ili $X = a_\infty^r(\Delta)$ rezultati o kompaktnosti operatora L_A za $A \in (X, c_0)$, $A \in (X, c)$, $A \in (X, \ell_\infty)$, $A \in (X, \ell_1)$ mogu istovremeno da se definišu. Ovo je posledica upravo Teoreme 2.7 i Napomene 2.8. Zbog oblika prostora $a_c^r(\Delta)$, odnosno $a_c^r(\Delta) = c_T$, potrebno je posebno definisati uslove za kompaktnost operatora L_A kada je $A \in (a_c^r(\Delta), Y)$. Slična situacija je i u zadnjoj sekciji, u kojoj se nalaze novi, još neobjavljeni rezultati. Kako su i ovde posmatrani prostori nizova koji predstavljaju matrične domene trougaonih matrica u c_0, c i ℓ_∞, tehnika dokazivanja je potpuno ista. Specifičnost ovih prostora je u izgledu trougaone matrice T, a pristup problemu nalaženja klasa kompaktnih linearnih operatora je isti kao u prethodnoj sekciji.

* * *

Na kraju, želim da iskažem posebnu čast i zadovoljstvo što sam za mentora imala profesora Dr Eberharda Malkowskog. Zahvaljujem mu se na iskrenom razumevanju, nesebičnoj pomoći i beskrajnom strpljenju u toku izrade ove teze.

Takodje se zahvaljujem i profesorima Vladimiru Rakočeviću, Draganu Djordjeviću i Ivanu Jovanoviću na korisnim sugestijama koje su ovaj rad učinile boljim.

Ivana Djolović

GLAVA 1

Uvod

Predmet našeg rada biće matrične transformacije medju pojedinim prostorima nizova kao i neke klase operatora na njima. Zato je neophodno na početku dati uvodne pojmove koji su od interesa za dalje istraživanje. Kako mnogi konkretni prostori nizova proizilaze iz različitih koncepata sumabilnosti, to glavu započinjemo osnovnim pojmovima iz teorije sumabilnosti. Dalje nastavljamo sa teorijom BK prostora koja je najvažniji aparat u izučavanju matričnih transformacija izmedju prostora nizova. Navodeći pojedine teoreme koje se odnose na osobine BK prostora, daćemo osnovu za definisanje mnogih klasa matričnih transformacija i odrediti one izmedju klasičnih prostora nizova na kojima će se bazirati neke komplikovanije transformacije. Za detaljnije izučavanje pomenutih teorija videti [**4, 17, 14, 22, 23, 37, 39, 40, 45, 46**].

1.1. Sumabilnost

Klasična teorija sumabilnosti bavi se generalizacijom konvergencije nizova i redova kompleksnih(realnih) brojeva. Naime, poznato je da divergentni nizovi i redovi nemaju granicu u uobičajenom smislu pa je ideja, različitim metodama omogućiti nalaženje "granice" divergentnih nizova, tj. "sumirati" divergentne redove. Pomenute metode nazivaju se metode sumabilnosti. Umesto polanih nizova i redova posmatraju se tranformacije na njima kao i novi nizovi i redovi dobijeni pomoću tih transformacija. Za naše istraživanje, posebno će biti interesantne matrične transformacije, i to one dobijene pomoću beskonačnih matrica.

Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ beskonačna matrica i $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva. Pisaćemo:

$$Ax = (A_n x)_{n=0}^{\infty}$$

gde je

$$A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

pretpostavljajući da poslednji red konvergira.

Dalje, označimo sa ω skup svih nizova $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kompleksnih brojeva i sa c njegov podskup, skup svih konvergentnih nizova.

Definicija 1.1. Za proizvoljnu beskonačnu matricu A, metod sumabilnosti A, definisan je sa $y = Ax$. Skup

$$\omega_A = \{x \in \omega \mid Ax \text{ je definisano}\}$$

naziva se domen A. Ako je X podskup skupa ω, za skup

$$X_A = \{x \in \omega \mid Ax \in X\}$$

kažemo da je matrični domen A u X.

Specijalno, ako u prethodnoj definiciji skup X zamenimo sa c, za matrični domen A u c, koristimo naziv konvergentni domen A, tj. pomenuti skup je:

$$c_A = \{x \in \omega \mid Ax \in c\}.$$

Znači, ako je $x \in c_A$, to postoji kompleksan broj ℓ takav da je $\lim_{n\to\infty} A_n x = \ell$, i u tom slučaju kažemo da je niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ A-sumabilan ka ℓ i pišemo $x \to \ell(A)$. Jasno da možemo govoriti i o sumabilnosti redova pri čemu ćemo prirodno posmatrati niz delimičnih suma, pa kažemo da je red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ A-sumabilan ka ℓ ukoliko je takav niz njegovih delimičnih suma $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, gde je $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, i pišemo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell(A)$.

Prethodno pomenuta sumabilnost nizova predstavlja jedan od tri različita koncepta sumabilnosti. Naime, ovde je reč o običnoj sumabilnosti , a pored ovog koncepta, postoje još i apsolutna i jaka sumabilnost indeksa p.

Neka je $0 < p < \infty$. Za niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kažemo da je apsolutno A-sumabilan sa indeksom p, ka kompleksnom broju ℓ, ukoliko red $A_n x$ konvergira za svako n i važi $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n x|^p = \ell$ i pišemo $x \to \ell |A|^p$. Za niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kažemo da je jako A-sumabilan sa indeksom p, ka kompleksnom broju ℓ, ukoliko red $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}|x_k - \ell|^p$ konvergira za svako n i važi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}|x_k - \ell|^p = 0$, u oznaci $x \to \ell[A]^p$. Ovakvi različiti koncepti daće osnovu za definisanje mnogobrojnih prostora nizova od kojih će neki biti predmet našeg izučavanja.

Definicija 1.2. Za metod sumabilnosti A kažemo da je:

a) konzervativan, ukoliko je $c \subset c_A$;

b) regularan, ako je $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{k\to\infty} x_k$ za svako $x \in c$.

Oba pomenuta metoda su interesantna jer se njima konvergentni nizovi transformišu takodje u konvergentne nizove, pri čemu se kod regularnih "očuvava" i granica. Moguće je izvršiti karakterizaciju ovakvih metoda definišući potrebne i dovoljne uslove za elemente matrice koja odredjuje dati metod. Napomenimo da ćemo upotrebljavati isto slovo za matricu i metod sumabilnosti definisan njom. Sada navodimo čuvenu teoremu Silverman-Toeplitza koje daje karakterizaciju regularnog metoda.

Teorema 1.3. ([**22**, Theorem 3]) *Matrica A je regularna ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

a) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

b) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ *za fiksno k*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1.$

Kao što smo već napred pomenuli, medju metodima sumabilnosti, nama su posebno interesantni oni koji se definisani beskonačnim matricama. Najvažniji su oni definisani Hausdorfovim (Hausdorff) i Norlandovim (Nörlund) matricama, kao i specijalni slučajevi Hausdorfovih matrica: Cesarova (Cesàro), Ojlerova (Euler) i Holderova (Hölder). Najvažniji metod sumabilnosti jeste Cesarov metod reda 1.

Definicija 1.4. Cesarov metod reda 1, u oznaci C_1, definisan je matricom C_1 gde je

$$(C_1)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Kao što vidimo, ovako definisanom matricom, niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ transformišemo u niz $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$, pri čemu je $\sigma_n = 1/(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k$, tj. u niz aritmetičkih sredina.

Primer 1.5. Posmatrajmo niz $x = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$; jasno da je dati niz divergentan, ali se C_1 metodom transformiše u konvergentan niz $\sigma = (0, 1/2, 1/3, 1/2, 2/5, 1/2, 3/7, \ldots)$ sa granicom $1/2$, tj. $x \to 1/2(C_1)$.

Definicija 1.6. Cesarov metod reda $\alpha > -1$, u oznaci C_α, definisan je matricom C_α gde je

$$(C_\alpha)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

a broj $A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ se naziva n-ti Cesarov koeficijent reda α.

Napomena 1.7. *Proučavanjem osobina Cesarovih koeficijenata, mogu se uočiti sledeće veze:* $A_n^0 = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $A_0^{\alpha} = 1$ $(\alpha \in I\!R)$, $A_n^{\alpha} = 0$ $(\alpha = -k \in -I\!N; n = k, k+1, \ldots)$. *Zato, možemo zaključiti da je za* $\alpha = 0$, $C_0 = I$, *tj. odgovarajuća matrica transformacije* C_0 *metoda je jedinična matrica* I *a konvergencija se poklapa sa klasičnom konvergencijom nizova. U slučaju* $\alpha = 1$, *dobija se već pomenuti* C_1 *metod.*

Definicija 1.8. Ojlerov metod reda $q > 0$, u oznaci E_q, definisan je matricom E_q gde je

$$(E_q)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{q^{n-k}}{(q+1)^n}\dbinom{n}{k} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Definicija 1.9. Neka je $H^1 = H = C_1$. Holderov metod reda $n \in I\!N$, u oznaci H_n, definisan je matricom koja je n-ti stepen matrice H.

Napomena 1.10. *Za sada nije poznat oblik elemenata matrice H_n kao što je to bio slučaj kod prethodnih metoda; napomenimo da je moguće proširiti definiciju ovog metoda uzimajući za red metoda proizvoljan realan broj $\alpha > 0$.*

Napred smo pomenuli da su Cesarov, Ojlerov i Holderov metod sumabilnosti specijalni slučajevi Hausdorfovog metoda. Na kraju, definišimo i Hausdorfov metod sumabilnosti i navedimo njegovu vezu sa već pomenutim metodima.

Definicija 1.11. Neka je $\mu = (\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva, $M = (m_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ dijagonalna matrica takva da je $m_{nn} = \mu_n (n = 0, 1, \ldots)$ i $D = (d_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ matrica sa elementima $d_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k}$. Matrica $H(\mu) = DMD$ naziva se Hausdorfova matrica asocirana nizom μ, u oznaci $H(\mu)$, a odgovarajući metod sumabilnosti, Hausdorfov metod $H(\mu)$.

Napomena 1.12. *Elementi matrice $H(\mu)$ imaju sledeći oblik:*

$$(H(\mu))_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j+k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Stavljajući redom $\mu_n = A_n^{\alpha}$, $\mu_n = (n+1)^{-\alpha}$, $\mu_n = (q+1)^{-n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, u formulu za oblik elementa matrice $H(\mu)$, dobijamo Cesarov, Holderov i Ojlerov metod (odgovarajućeg reda), kao specijalne slučajeve Hausdorfovog metoda. Pomenuti postupak i detaljnije proučavanje metoda sumabilnosti može se naći u [**14, 22, 37**].

Od pomenutih važnih matričnih transformacija ostalo je još da definišemo Norlandovu matricu i metod sumabilnosti dobijen njom. Norlandova matrica jeste generalizacija Cesarove matrice.

Definicija 1.13. Neka je $q = (q_n)_{n=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva takav da je $q_0 = 1$ i $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \neq 0$ za svako n. Norlandov metod (N, q) definisan je matricom (N, q)

čiji su elementi oblika

$$(N,q)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{q_{n-k}}{Q_n} & (0 \le k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0,1,\ldots).$$

Napomena 1.14. *Stavimo da je* $q_n = \binom{n+\alpha-1}{n}$, $(n = 0,1,\ldots)$. *Jasno da je* $q_0 = 1$ *i da je*

$$q_n = A_n^{\alpha-1}.$$

Dalje, na osnovu relacija $\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} A_k^{\beta} = A_n^{\alpha+\beta+1}$ *i* $A_n^0 = 1$ *(videti* [**22**]*) imamo:*

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1} = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1} A_{n-k}^{0} = A_n^{\alpha}.$$

Sada, računajući $(N,q)_{nk}$ *dobijamo*

$$(N,q)_{nk} = \frac{q_{n-k}}{Q_n} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} = (C_\alpha)_{nk}.$$

Dakle vidimo da je C_α *metod zapravo specijalan slučaj Norlandovog metoda sumabilnosti, pa je stoga Cesarova matrica istovremeno i Norlandova i Hausdorfova.*

Razlog za uvodjenje osnovnih pojmova iz teorije sumabilnosti leži u činjenici da su napred navedeni metodi sumabilnosti, i uopšte sumabilnost, bitni za istraživanje jer mnogi interesantni prostori nizova, od kojih će neki biti predmet i našeg daljeg izučavanja, proizilaze iz koncepta sumabilnosti. Naime, pošto su nam posebno interesantni metodi sumabilnosti definisani beskonačnim matricama, to ćemo neke prostore u daljem radu posmatrati kao domene ovakvih matrica.

1.2. BK prostori i preslikavanja

Teorija BK prostora igra veoma važnu ulogu kod karakterizacije matričnih transformacija izmedju prostora nizova. Kako u našem istraživanju centralno mesto zauzimaju matrične transformacije, to ćemo ovde dati samo neke, za nas neophodne, pojmove iz BK teorije a za dalje izučavanje predlažemo [**39, 46**].

Kao što smo već napomenuli, sa ω ćemo označiti skup svih nizova $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kompleksnih brojeva. Dalje, koristićemo i sledeće, već dobro poznate, prostore nizova:

$$c = \{x \in \omega \mid \lim_{k\to\infty} x_k = \xi \text{ za neko } \xi \in \mathbb{C}\},$$

$$c_0 = \{x \in \omega \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\},$$

$$\ell_\infty = \{x \in \omega \mid \sup_k |x_k| < \infty\},$$

$$\ell_p = \{x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\} \text{ za } 1 \leq p < \infty.$$

Definišimo metriku d na skupu ω na sledeći način:

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \text{ za svako } x, y \in \omega. \tag{1.1}$$

U odnosu na ovako definisanu metriku, linearan metrički prostor (ω, d) je kompletan, tj. Frešeov(Fréchet). Napomenimo da se koordinatna konvergencija i obična konvergencija poklapaju u (ω, d), odnosno važi:

$$x^{(n)} \to x \ (n \to \infty) \text{ ako i samo ako } x_k^{(n)} \to x_k \ (n \to \infty) \text{ za svako } k.$$

Napomena 1.15. *Dobro je poznato da su c, c_0, ℓ_∞ Banahovi prostori sa normom $\|x\| = \sup_k |x_k|$; Prostor ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ je takodje Banahov prostor ali je norma ovde definisana sa $\|x\| = (\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$ (koristi se često i oznaka $\|x\|_p$). Primetimo da kod pomenutih prostora važi $|x_k| \leq \|x\|$, za svako k, pa zato obična konvergencija u svakom od ovih prostora povlači koordinatnu konvergenciju. Zato je metrika definisana na ovim prostorima uz pomoć odgovarajuće norme, jača od restrikcije metrike d iz ω na njima.*

Definicija 1.16. Za Frešeov prostor nizova (X, d_X) kažemo da je FK prostor ukoliko je u X, metrika d_X jača od metrike $d|_X$ definisane u ω. Normirani FK prostor naziva se BK prostor .

Napomena 1.17. Možemo uočiti da je ω FK prostor sa metrikom d definisanom u (1.1). Dalje, prostori nizova c, c_0, ℓ_∞, ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ su Banahovi prostori kod kojih iz konvergencije po normi sledi koordinatna konvergencija pa su zato BK prostori.

Pre nego što damo teoremu koja ima važnu ulogu u izučavanju matričnih transformacija navedimo neke pomoćne rezultate.

Teorema 1.18. ([**39**, Corollary 1.15.]) *Neka je X Frešeov, Y proizvoljan FK prostor, $f : X \to Y$ linearno preslikavanje i $P_n : X \to \mathbb{C}$ $(n \in I\!N_0)$ preslikavanje definisano sa $P_n(x) = x_n$. Ako je preslikavanje $P_n \circ f : X \to \mathbb{C}$ neprekidno za svako n, tada je i preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno.*

Teorema 1.19. ([**39**, Remark 1.16.]) *Neka je $X \supset \phi$ proizvoljan FK prostor, pričemu je ϕ skup svih konačnih nizova. Ako je red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ konvergentan za svako $x \in X$, tada je linearni funkcional $f_a : X \to C$ definisan sa $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ za svako $x \in X$, neprekidan.*

Sada dolazimo do teoreme koja govori o važnosti teorije BK prostora u izučavanju matričnih transformacija. Napomenimo da ćemo nadalje sa (X, Y) označavati klasu beskonačnih matrica koje preslikavaju prostor X u prostor Y. Jasno, $A \in (X, Y)$ ako i samo ako je $X \subset Y_A$.

Teorema 1.20. ([**39**, Theorem 1.17.],[**46**, Theorem 4.2.8.]) *Svako matrično preslikavanje izmedju FK prostora je neprekidno.*

Dokaz. Neka su X i Y proizvoljni FK prostori i $A \in (X, Y)$. Definišimo preslikavanje $f_A : X \to Y$ na sledeći način: $f_A(x) = Ax$ za svako $x \in X$. Pošto je preslikavanje $P_n \circ f_A : X \to \mathbb{C}$ neprekidno za svako n na osnovu Teoreme 1.19, to je i preslikavanje $f_A : X \to Y$ neprekidno na osnovu Teoreme 1.18. $\square$

Definicija 1.21. Za niz $b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ u linearnom metričkom prostoru X kaže se da je Šauderova (Schauder) baza u X ukoliko za svako $x \in X$ postoji jednoznačno odredjen niz skalara $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ sa osobinom $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$.

Definicija 1.22. Za FK prostor $X \supset \phi$ kažemo da je AK prostor ako svaki niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$ ima jedinstvenu reprezentaciju $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$ gde je

$$e_j^{(k)} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}.$$

Ukoliko je skup ϕ gust u X, za X kažemo da je AD prostor.

Napomena 1.23. Prostori c, c_0 i ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ imaju Šauderovu bazu dok je prostor ℓ_∞ nema. Kako je niz $\left(e^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$, dat u prethodnoj definiciji, Šauderova baza za prostore c_0 i ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ to su ovi prostori AK. Prostor c nije AK prostor; Šauderova baza za ovaj prostor je niz $(e, e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots)$, gde je $e = (1, 1, \ldots)$, tj. svako $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in c$ ima jedinstvenu reprezentaciju $x = \xi e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \xi) e^{(k)}$, pri čemu je $\xi = \lim_{k \to \infty} x_k$.

U izučavanju matričnih transformacija važnu ulogu imaju i β-duali. Oni predstavljaju specijalan slučaj množitelja prostora (*engl. multiplier space*).

Definicija 1.24. Neka su X i Y podskupovi skupa ω. Prostor

$$M(X, Y) = \{a \in \omega \mid ax = (a_k x_k)_{k=0}^{\infty} \in Y \text{ za svako } x \in X\}$$

naziva se množitelj prostor prostora X u Y.

Teorema 1.25. ([**39**, Lemma 1.25.]) *Neka je $X, Y, Z \subset \omega$ i $\{X_\delta \mid \delta \in A\}$ proizvoljna kolekcija podskupova skupa ω. Tada:*

- *a) $X \subset M(M(X, Y), Y)$*
- *b) Ako je $X \subset Z$ onda $M(Z, Y) \subset M(X, Y)$*
- *c) $M(X, Y) = M(M(M(X, Y), Y), Y)$*
- *d) $M(\bigcup_{\delta \in A} X_\delta, Y) = \bigcap_{\delta \in A} M(X_\delta, Y)$.*

DOKAZ. *a) Neka je $x \in X$. Tada, za svako $a \in M(X, Y)$ imamo da je $ax \in Y$ pa jasno da je $x \in M(M(X, Y), Y)$.*

b) Pretpostavimo da je $X \subset Z$ i neka je $a \in M(Z,Y)$. Tada, $ax \in Y$ za svako $x \in Z$ pa samim tim i za svako $x \in X$ što daje $a \in M(X,Y)$.

c) Zamenjujući u uslovu a) skup X sa $M(X,Y)$ dobijamo

$$M(X,Y) \subset M(M(M(X,Y),Y),Y).$$

Ostaje još da dokažemo obrnutu inkluziju. Stavljajući da je $Z = M(M(X,Y),Y)$, jasno da je na osnovu a) $X \subset Z$, pa je na osnovu b) sada $M(M(M(X,Y),Y),Y) \subset M(X,Y)$ čime je dokaz završen.

d) Jasno da je $X_\delta \subset \bigcup_{\delta \in A} X_\delta$ za svako $\delta \in A$ pa na osnovu a) imamo $M(\bigcup_{\delta \in A} X_\delta, Y) \subset \bigcap_{\delta \in A} M(X_\delta, Y)$. Obrnuto, ako je $a \in \bigcap_{\delta \in A} M(X_\delta, Y)$, tada je $a \in M(X_\delta, Y)$ za svako $\delta \in A$ pa možemo zaključiti da je $ax \in Y$ za svako $\delta \in A$ i svako $x \in X_\delta$, odnosno, $a \in M(\bigcup_{\delta \in A} X_\delta, Y)$. Ovim smo dokazali i obrnutu inkluziju a time i traženu jednakost. $\square$

Označimo sa cs i bs skupove svih konvergentnih i ograničenih redova, odnosno:

$$cs = \left\{ x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} x_k \text{ konvergira} \right\},$$

$$bs = \left\{ x \in \omega \mid \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)_{n=0}^{\infty} \in \ell_\infty \right\}.$$

Kao specijalne slučajeve množitelja prostora dobijamo sledeće :

$$X^\alpha = M(X, \ell_1) = \left\{ a \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_k| \text{ konvergira za svako } x \in X \right\},$$

$$X^\beta = M(X, cs) = \left\{ a \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ konvergira za svako } x \in X \right\},$$

$$X^\gamma = M(X, bs) = \left\{ a \in \omega \mid \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right)_{n=0}^{\infty} \in \ell_\infty \text{ za svako } x \in X \right\},$$

odnosno α-dual , β-dual i γ-dual prostora X.

Kako ćemo se u radu baviti karakterizacijom matričnih transformacija, to će koncept β-duala za nas imati odlučujuću ulogu. Naime, kao što smo već videli, beskonačna matrica A pripada klasi (X,Y) samo ukoliko $A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ konvergira za svako $x \in X$ i svako n. Zato, osnovno je da za zadati prostor nizova X odredimo njegov β-dual, jer činjenica da $A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ konvergira za svako $x \in X$ i svako n zapravo znači $A_n \in X^\beta$ za svako n.

Sledeći rezultati govore o nekim skupovnim osobinama β-duala a direktna su posledica Teoreme 1.25 i činjenice da su β-duali specijalni slučaj množitelja prostora.

Posledica 1.26. *Neka je $X, Y \subset \omega$ i $\{X_\delta \mid \delta \in A\}$ proizvoljna kolekcija podskupova skupa ω. Tada:*

a) $X \subset X^{\beta\beta}$

b) Ako je $X \subset Y$ *onda* $Y^\beta \subset X^\beta$

c) $X^\beta = X^{\beta\beta\beta}$

d) $(\bigcup_{\delta\in A} X_\delta)^\beta = (\bigcap_{\delta\in A} X_\delta)^\beta$.

Za detaljnije izučavanje $\beta-$duala mogu se koristiti [**39, 46**], a nama je za dalji rad važan sledeći rezultat.

Teorema 1.27. ([**46**, Theorem 4.3.15.]),([**39**, Theorem 1.30., Corollary 1.31.]) *Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ BK prostori, $X \supset \phi$ i $Z = M(X,Y)$. Tada, Z je BK prostor u odnosu na normu $\|\cdot\|$, definisanu sa*

$$\|z\| = \|z\|_X^* = \sup\{\|xz\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \text{ za svako } z \in Z.$$

Specijalni, ako je X BK prostor, onda je i X^β BK prostor u odnosu na normu $\|\cdot\|_\beta$ definisanu sa

$$\|a\|_\beta = \sup\left\{\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k x_k| \mid \|x\|_X = 1\right\}.$$

Napomena 1.28. *Navešćemo β–duale klasičnih prostora nizova: $c^\beta = c_0^\beta = \ell_\infty^\beta = \ell_1$, $\ell_1^\beta = \ell_\infty$, $\ell_p^\beta = \ell_q$, $(1 < p < \infty,\ q = p/(p-1))$. Na osnovu* [**39**, Theorem 1.29.], *imamo* *i sledeće jednakosti:* $\|a\|^*_{\ell_1} = \|a\|_\infty$ *za svako* $a \in \ell_1^\beta$*,* $\|a\|^*_{\ell_p} = \|a\|_q$ *za svako* $a \in \ell_p^\beta$ $(1 < p < \infty,\ q = p/(p-1))$*,* $\|a\|^*_c = \|a\|^*_{c_0} = \|a\|^*_{\ell_\infty} = \|a\|_1$ *za svako* $a \in \ell_\infty^\beta$*.*

Koristićemo nadalje oznaku $B(X,Y)$ za skup ograničenih linearnih operatora sa prostora X u prostor Y.

Označimo sa X^* skup svih linearnih ograničenih funkcionala na X (dualni prostor, neprekidni dual za prostor X), odnosno $X^* = B(X, C)$. Za svako $f \in X^*$ važi $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leq 1\}$. Izmedju β-duala i neprekidnih duala postoji uska povezanost. Pomenuta veza data je sledećom teoremom.

Teorema 1.29. ([**46**, Theorem 7.2.9.]), ([**39**, Theorem 1.34.]) *Neka je* $X \supset \phi$ *BK prostor. Tada postoji linearno "jedan-jedan" preslikavanje* $T : X^\beta \to X^*$*, odnosno,* $X^\beta \subset X^*$*. Ukoliko je prostor* X *AK, onda je preslikavanje* T *i "na".*

Primetimo da ukoliko je X BK prostor, na osnovu prethodne teoreme, veličina $\|a\|^*_X = \sup\{|\sum_{k=0}^\infty a_k x_k| \mid \|x\| \leq 1\}$ je definisana i konačna za svako $a \in X^\beta$.

Predmet našeg izučavanje su, kao što smo već napomenuli, matrične transformacije izmedju prostora nizova, pa ćemo zato navesti teoreme koje su od velikog značaja za karakterizaciju klasa (X,Y) a koje koriste teoriju BK prostora. Pre toga napomenimo da ćemo sa $\|a\|^*$ označavati sledeću veličinu:

$$\|a\|^* = \|a\|^*_X = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^\infty a_k x_k\right| \mid \|x\| = 1\right\}.$$

Takodje, ukoliko je A beskonačna matrica, $A_n = (a_{nk})_{k=0}^\infty$ predstavljaće niz elemenata iz n-te vrste matrice A, pa će veličina $\|A_n\|^*$ biti:

$$\|A_n\|^* = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^\infty a_{nk} x_k\right| \mid \|x\| = 1\right\}.$$

Teorema 1.30. ([**39**, Theorem 1.23.]), ([**17**, Example 1.8.]) *Neka su* X *i* Y *FK prostori.*

a) Tada, za svako $A \in (X,Y)$ *postoji* $L_A \in B(X,Y)$ *tako da je* $L_A(x) = Ax$ *za svako* $x \in X$*, odnosno* $(X,Y) \subset B(X,Y)$*;*

b) Neka je X BK prostor. Tada $A \in (X, \ell_\infty)$, ako i samo ako $\|A\|^*_{(X,\ell_\infty)} = \sup_n \|A_n\|^*_X < \infty$; Ako je $A \in (X, Y)$ tada je $\|L_A\| = \|A\|^*_{(X,\ell_\infty)}$;

c) Ako je $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$ Šauderova baza za X i Y_1 zatvoren FK potprostor u Y, tada je $A \in (X, Y_1)$ ako i samo ako je $A \in (X, Y)$ i $A(b^{(k)}) \in Y_1$ za svako k.

Teorema 1.31. ([**17**, Theorem 1.9.]) *Neka su X i Y BK prostori i neka je X sa AK osobinom. Tada je $B(X, Y) \subset (X, Y)$.*

Dokaz. Neka je $L \in B(X, Y)$ i $L_n = P_n \circ L$ za $n = 0, 1, \ldots$. Pošto je Y BK prostor, to je $L_n \in X^*$ za svako n. Stavimo dalje de je $a_{nk} = L_n(e^{(k)})$ za svako $n, k = 0, 1, \ldots$. Pošto je X AK prostor i $L_n \in X^*$ za svako n, sledi da za proizvoljno zadato $x = (x_k)_{k=0}^\infty \in X$ važi $x = \sum_{k=0}^\infty x_k e^{(k)}$, pa je

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^\infty x_k L_n(e^{(k)}) = \sum_{k=0}^\infty x_k a_{nk} \text{ za svako } n.$$

Zaključujemo odatle da je $L(x) = Ax$, gde je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty \in (X, Y)$. □

Na osnovu prethodne dve teorme možemo zaključiti da ukoliko su X i Y BK prostori i pri tom je prostor X sa AK osobinom, svakoj beskonačnoj matrici $A \in (X, Y)$ odgovara ograničeni linearni operator $L \in B(X, Y)$ takav da je $Ax = L(x)$ za svako $x \in X$ ali isto tako i svaki ograničeni linearni operator $L \in B(X, Y)$ može biti predstavljen pomoću beskonačne matrice $A \in (X, Y)$ pri čemu je ispunjeno $Ax = L(x)$ za svako $x \in X$.

Teorema 1.32. ([**46**, 8.3.7.]) *Neka je X FK prostor i $X_1 = X \oplus e$. Tada $A \in (X_1, Y)$ ako i samo ako je $A \in (X, Y)$ i $Ae \in Y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in (X_1, Y)$. Pošto je $X \subset X_1$ i $e \in X_1$, imamo da je $A \in (X, Y)$ i $Ae \in Y$. Obrnuto, pretpostavimo da je $A \in (X, Y)$ i $Ae \in Y$. Neka je x_1 proizvoljan element ix X_1. Tada, postoje $x \in X$ i $\lambda \in C$ takvi da je $x_1 = x + \lambda e$. Odavde sledi da je $Ax_1 = A(x + \lambda e) = Ax + \lambda Ae \in Y$. □

U sledećoj teoremi sa A^T označićemo transponovanu matricu matrice A.

Teorema 1.33. ([**46**, Theorem 8.3.9.]) *Neka su X i Z BK prostori sa osobinom AK i $Y = Z^{\beta}$. Tada $(X, Y) = (X^{\beta\beta}, Y)$ i važi*

$$A \in (X, Y) \text{ ako i samo ako } A^T \in (Z, X^{\beta}).$$

Dokaz. Najpre, pretpostavimo da je $A \in (X, Y)$ i dokažimo da je $A^T \in (Z, X^{\beta})$. Neka je $z \in Z$ i definišimo preslikavanje f na sledeći način

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n A_n x \text{ za svako } x \in X.$$

Kako je $Ax \in Y = Z^{\beta}$, $z \in Z$, Z i Y BK prostori, to zaključujemo da je $f \in X^*$. Dalje, pošto je X sa AK osobinom, imamo

$$f(e^{(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n A_n e^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n a_{nk} = A_k^T z \text{ za svako } k.$$

Dalje imamo

$$f(x) = f(\sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(e^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k A_k^T z \text{ za svako } x \in X.$$

Znači, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k A_k^T z$ konvergira za svako $x \in X$ pa je $A^T z \in X^{\beta}$. Time smo dokazali da je $A^T \in (Z, X^{\beta})$. Zamenjujući u prethodnoj relaciji redom A, X i Y sa A^T, Z i X^{β}, dobijamo

$$A^T \in (Z, X^{\beta}) \text{ povlači } A = A^{TT} \in (X, Z^{\beta}) = (X, Y).$$

Na ovaj način smo dokazali da je

$$A \in (X, Y) \text{ ako i samo ako } A^T \in (Z, X^{\beta}).$$

Ostaje još da dokažemo da je $(X, Y) = (X^{\beta\beta}, Y)$. Na osnovu Posledice 1.26, jasno je da iz $X \subset X^{\beta\beta}$ sledi $(X^{\beta\beta}, Y) \subset (X, Y)$. Ostaje da se dokaže da je $(X, Y) \subset (X^{\beta\beta}, Y)$. Pretpostavimo da je $A \in (X, Y)$ i neka je $w \in X^{\beta\beta}$. Definišimo preslikavanje g na sledeći način

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k A_k^T z \text{ za svako } z \in Z.$$

Slično, kao u prethodnom delu dokaza, $g \in Z^*$. Dalje je

$$g(e^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k A_k e^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k a_{nk} = A_n w \text{ za svako } n.$$

Pošto je $g \in Z^\beta$ i Z sa AK osobinom, imamo

$$g(z) = g(\sum_{n=0}^{\infty} z_n e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n g(e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n A_n w \text{ za svako } z \in Z.$$

Znači, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n A_n w$ konvergira za svako $z \in Z$ i $Aw \in Z^\beta = Y$. Zato, sledi $A \in (X^{\beta\beta}, Y) \subset (X, Y)$. Ovim smo završili dokaz. $\square$

Napomena 1.34. Uslov $A^T \in (Z, X^\beta)$ *se ne sme zameniti uslovom* $A^T \in (Y^\beta, X^\beta)$ *bez obzira što je* $Z = Y^\beta$. *U suprotnom bi se polje delovanja teoreme smanjilo, tj. teorema bi važila za uže polje prostora.*

Označimo sa $\mathcal{F}$ skup svih konačnih podskupova prirodnih brojeva i neka je $K \in \mathcal{F}$. Tada, ako je operator A zadat matricom $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$, pisaćemo $A(K) = (\sum_{k \in K} a_{nk})_{n=0}^{\infty}$.

Teorema 1.35. ([**46**, Theorem 8.4.3.]) *Neka je* Y *FK prostor. Tada,* $A \in (c_0, Y)$ *ako i samo ako je* $\{A(K) \mid K \in \mathcal{F}\}$ *ograničen podskup u* Y.

1.3. Matrične transformacije medju nekim klasičnim prostorima nizova

U ovoj sekciji bavićemo se matričnim transformacijama medju nekim klasičnim prostorima nizova. Naime, naći ćemo potrebne i dovoljne uslove za beskonačnu matricu A kako bi ona pripadala klasi (X, Y), pri čemu su X i Y konkretni prostori nizova i to iz skupa $\{c, c_0, \ell_\infty, \ell_r \ (1 \leq r < \infty)\}$. Na taj način biće odredjen i odgovarajući operator iz Teoreme 1.30 a karakterizacija pomenutih matričnih transformacija biće u formi uslova za elemente a_{nk} matrice $A \in (X, Y)$. Karakterizacija ovih matričnih transformacija nam je potrebna kao osnova za neke komplikovanije prostore nizova i matrične transformacije na njima, što će dalje biti predmet našeg izučavanja. Za detaljnije istraživanje koristiti [**4, 22, 23, 37, 39, 45, 46**].

Podsetimo se pre svega da su c_0 i c zatvoreni podprostori prostora ℓ_∞ dok je ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ podprostor prostora ℓ_∞ , ali ne zatvoren.

Navodimo važan pomoćni rezultat.

Teorema 1.36. ([**39**, Theorem 1.36.], ([**46**, Example 8.4.5A.]) *Imamo* $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ *ako i samo ako*

$$\|A\| = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty; \tag{1.2}$$

Dalje, važi sledeće:

$$(c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty) = (\ell_\infty, \ell_\infty). \tag{1.3}$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \subset (c_0, \ell_\infty)$.
Na osnovu Napomene 1.28 i Teoreme 1.36, jasno da važi (1.2).
Obrnuto, ako je ispunjen uslov (1.2), dobijamo na osnovu Teoreme 1.36 i Napomene 1.28 da je $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty) \subset (c_0, \ell_\infty)$.
Znači, pokazali smo da je $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ ako i samo ako je ispunjeno (1.2) i $(\ell_\infty, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty)$.
Na kraju, kako je $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ dobijamo

$$(\ell_\infty, \ell_\infty) \subset (c, \ell_\infty) \subset (c_0, \ell_\infty) = (\ell_\infty, \ell_\infty),$$

čime smo dokazali (1.3). □

Posmatrajmo sledeće uslove:

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \tag{1.4}$$

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty, \tag{1.5}$$

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^s < \infty \ (1 < r < \infty,\ s = \frac{r}{r-1}). \tag{1.6}$$

Teorema 1.37. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. *Tada:*

a) $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.4).

b) $A \in (c, \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.4).

c) $A \in (c_0, \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.4).

d) $A \in (\ell_1, \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.5).

e) $A \in (\ell_r, \ell_\infty)$, $(1 < r < \infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.6).

Dokaz. Navedeni rezultati su direktna posledica Napomene 1.28 i Teoreme 1.30.

□

Kako su prostori c_0, c i ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ sa Šauderovom bazom a uz to su c_0 i c zatvoreni podprostori prostora ℓ_∞, na osnovu Teoreme 1.30 c) možemo definisati uslove za karakterizaciju klase (X, Y), pri čemu je X jedan od prostora c_0, c i ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$ a Y je c ili c_0. Zapravo, imamo:

$$A \in (X, c_0) \text{ ako i samo ako je } A \in (X, \ell_\infty) \text{ i } Ae^{(k)} \in c_0 \text{ za svako } k$$

i

$$A \in (X, c) \text{ ako i samo ako je } A \in (X, \ell_\infty) \text{ i } Ae^{(k)} \in c \text{ za svako } k$$

a prostor X je c_0 ili ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$.

Na isti način, ukoliko stavimo $X = c$, dobijamo:

$$A \in (c, c_0) \text{ ako i samo ako je } A \in (c, \ell_\infty) \text{ i } Ae \in c_0 \text{ i } Ae^{(k)} \in c_0 \text{ za svako } k$$

i

$$A \in (c, c) \text{ ako i samo ako je } A \in (c, \ell_\infty) \text{ i } Ae \in c \text{ i } Ae^{(k)} \in c \text{ za svako } k.$$

Kako je $Ae = (\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ i $Ae^{(k)} = (a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ za svako k, to na osnovu svega navedenog i Teoreme 1.37 dobijamo sledeće rezultate:

Teorema 1.38. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. *Tada:*

a) $A \in (c, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.4),

(1.7)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0$$

i

(1.8)
$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0.$$

b) $A \in (c, c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.4),

(1.9)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \alpha$$

i

(1.10)
$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \text{ za svako } k.$$

c) $A \in (c_0, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.4) *i* (1.8).

d) $A \in (c_0, c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.4) *i* (1.10).

e) $A \in (\ell_r, c_0)$ $(1 < r < \infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.6) *i* (1.8).

f) $A \in (\ell_r, c)$ $(1 < r < \infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.6) *i* (1.10).

g) $A \in (\ell_1, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.5) *i* (1.8).

h) $A \in (\ell_1, c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (1.5) *i* (1.10).

Za karakterizaciju preslikavanja (c, c), mogli smo koristiti i sledeću teoremu, koja daje ekvivalentne uslove ali u drugačijoj formi.

Teorema 1.39. (Kojima-Schur) ([**22**, Theorem 4.]) *Imamo* $A \in (c, c)$ *ako i samo ako*

a) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$;

b) za svako p postoji $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$.

Primećujemo da smo u prethodnim teoremama dali karakterizaciju preslikavanja (X, c_0) i (X, c) za sve slučajeve gde je X klasičan prostor nizova sem kada je $X = \ell_\infty$. Nemoguće je primeniti isti mehanizam izvodjenja pomoću Teoreme 1.30 zbog činjenice da prostor ℓ_∞ nema Šauderovu bazu. Pomenutu karakterizaciju daje Šurova (Schur) teorema.

Teorema 1.40. (Schur) ([**22**, Theorem 6.]) *Imamo $A \in (\ell_\infty, c)$ ako i samo ako važe sledeći uslovi*

a) $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|$ *konvergira uniformno po n;*

b) postoji $\lim_{n\to\infty}a_{nk}$ *za svako k.*

Posledica 1.41. *Imamo $A \in (\ell_\infty, c_0)$ ako i samo ako važe sledeći uslovi*

a) $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|$ *konvergira uniformno po n;*

b) $\lim_{n\to\infty}a_{nk} = 0$ *za svako k.*

Posmatrajmo sada klase (X, Y) gde je X jedan od prostora c_0 ili c, a prostor Y je ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$. Bez obzira što su prostori c i c_0 sa Šauderovom bazom, ne možemo primeniti Teoremu 1.30 c) zbog činjenice da prostor ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$ nije zatvoren podprostor prostora ℓ_∞. Za pomenute karakterizacije koristićemo Teoremu 1.35 i Teoremu 1.32. Imamo sledeće:

$$A \in (c_0, \ell_r) \text{ ako i samo ako je skup } \{A(K) \mid K \in \mathcal{F}\} \text{ ograničen u } \ell_r,$$

pri čemu je K konačan podskup skupa prirodnih brojeva. Ograničenost skupa $A(K)$ u ℓ_r $(1 \leq r < \infty)$ data je uslovom

$$\sup_{\substack{K\subset\mathbb{N}_0\\ K\text{konačan}}} \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k\in K} a_{nk}\right|^r < \infty. \tag{1.11}$$

Dalje, kako je $c = c_0 \oplus e$ i $Ae = (\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk})_{n=0}^{\infty}$, uslov $Ae \in \ell_r$ je ekvivalentan sa uslovom (1.11) pa imamo sledeću teoremu:

Teorema 1.42. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ i X bilo koji od prostora c ili c_0. Tada,*

$$A \in (X, \ell_r)\ (1 \leq r < \infty) \textit{ ako i samo ako važi uslov } (1.11).$$

Ostalo nam je još da damo karakterizaciju preslikavanja iz klase (ℓ_r, ℓ_s). Napomenimo da je to moguće učiniti za sve slučajeve kada je $r, s \in \{1, \infty\}$. U ostalim slučajevima, sem kada je $r = s = 2$, nema poznatih rezultata. Matrične transformacije iz (ℓ_2, ℓ_2) date su Kronovom teoremom (Crone) [**23**].

Vratimo se na Teoremu 1.33. Posmatrajmo preslikavanje iz klase (ℓ_1, ℓ_r) za $1 < r < \infty$. Jasno da su $X = \ell_1$ i $Z = \ell_s^\beta$, $(s = r/(r-1))$ AK prostori pa važi:

$$A \in (\ell_1, \ell_r) \text{ ako i samo ako } A^T \in (\ell_s, \ell_\infty).$$

Stavljajući $X = \ell_1$ i $Z = c_0$ i primenjujući Teoremu 1.33, dobijamo

$$A \in (\ell_1, \ell_1) \text{ ako i samo ako } A^T \in (c_0, \ell_\infty).$$

Sada, primenom rezultata iz Teoreme 1.37 dobijamo sledeće rezultate:

Teorema 1.43. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$ i $1 < r < \infty$. Tada:*

a) $A \in (\ell_1, \ell_r)$ ako i samo ako važi

$$\sup_k \sum_{n=0}^\infty |a_{nk}|^r < \infty. \tag{1.12}$$

b) $A \in (\ell_1, \ell_1)$ ako i samo ako važi

$$\sup_k \sum_{n=0}^\infty |a_{nk}| < \infty. \tag{1.13}$$

Nastavljajući dalje sa primenom Teoreme 1.33, imamo:

$$A \in (c_0, \ell_r)\ (1 < r < \infty) \text{ ako i samo ako } A^T \in (\ell_s, \ell_1) \text{ za } s = r/(r-1);$$

$$A \in (c_0, \ell_1) \text{ ako i samo ako } A^T \in (\ell_\infty, \ell_1),$$

pa na osnovu rezultata iz Teoreme 1.42, dobijamo sledeće karakterizacije matričnih transformacija:

Teorema 1.44. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$. Tada:*

a) $A \in (\ell_r, \ell_1)$, $1 < r < \infty$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_{\substack{K \subset I\!N_0 \\ K\, konačan}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^s < \infty \ za\ s = r/(r-1). \tag{1.14}$$

b) $A \in (\ell_\infty, \ell_1)$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_{\substack{K \subset I\!N_0 \\ K\, konačan}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right| < \infty. \tag{1.15}$$

Na kraju, koristeći još jednom Teoremu 1.33 imamo: $(c_0, \ell_r) = (c_0^{\beta\beta}, \ell_r) = (\ell_\infty, \ell_r)$. Kako važi $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ to je $(c_0, \ell_r) = (c_0, \ell_r) = (\ell_\infty, \ell_r)$, pa možemo definisati i klasu matričnih transformacija (ℓ_∞, ℓ_r) $(1 < r < \infty)$.

Teorema 1.45. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. *Tada je* $A \in (\ell_\infty, \ell_r)$ $(1 < r < \infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (1.11).

Ovim smo izložili metode za odredjivanje potrebnih i dovoljnih uslova za preslikavanja izmedju nekih klasičnih prostora nizova $A \in (X, Y)$. Zbog bolje preglednosti, a koristeći uvedene oznake, dajemo tablični pregled dobijenih rezultata:

Y X	ℓ_1	ℓ_r $(1 < r < \infty)$	ℓ_∞	c_0	c
ℓ_1	1.43 b)	1.44 a)	1.44 b)	1.42	1.42
ℓ_s $(1 < s < \infty)$	1.43 a)	nepoznato	1.45	1.42	1.42
ℓ_∞	1.37 d)	1.37 e)	1.37 a)	1.37 c)	1.37 b)
c_0	1.38 g)	1.38 e)	1.40(Schur)	1.38 c)	1.38 a)
c	1.38 b)	1.38 f)	1.41	1.38 d)	1.38 b)

GLAVA 2

Matrične transformacije na matričnim domenima

U ovoj glavi izučavaćemo matrične transformacije izmedju prostora nizova, ali ovog puta ne klasičnih. O njima je bilo reči u prethodnoj glavi. Ovde ćemo najpre posmatrati prostore $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$ definisane u [**2**] i transformacije na njima a zatim prirodno definisati novi prostor nizova $a_\infty^r(\triangle)$ i nastaviti sa njegovim izučavanjem. Postoji novina u odnosu na pristup autora kod prva dva prostora. Naime, mi nalazimo način da zadate prostor posmatramo kao matrične domene neke trougaone matrice koju sami definišemo i dalje istraživanje vršimo u tom pravcu.

Sa primenom osobina matričnih domena trougaonih matrica nastavljamo i u drugom delu rada, gde inspirisani rezultatima u [**27**] i [**25**], definišemo nove prostore nizova. Kod ovih prostora takodje postoji način da se predstave kao matrični domeni neke trougaone matrice koju pronalazimo tokom rada. Dalje izučavanje matričnih transformacija na tako odredjenim prostorima zasniva se na osobinama matričnih domena. Korisni rezultati o matričnim domenima bitni za praćenje i razumevanje našeg istraživanja dati su u uvodnom delu ove glave.

2.1. Osobine matričnih domena trougaonih matrica

Kao sto smo već videli u prethodnoj glavi, ako je A proizvoljna beskonačna matrica i X podskup skupa ω, skup definisan sa

$$X_A = \{x \in \omega \mid Ax \in X\}$$

nazivamo matrični domen A u X. U ovoj glavi ćemo izučavati matrične domene kod kojih je matrica A specijalnog oblika, kao i prostore nizova koji predstavljaju matrični domen takvih matrica u različitim klasičnim prostorima nizova.

Poznato je da za proizvoljnu matricu kažemo da je donja(gornja) trougaona matrica matrica ukoliko su joj svi elementi iznad(ispod) glavne dijagonale jednaki nuli. Medjutim, nama će biti od interesa one matrice $T = (t_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ kod kojih je $t_{nk} = 0$ za $k > n$ i $t_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, \dots)$, odnosno donja trougaona matrica sa nenula elementima na glavnoj dijagonali. Za takve matrice nadalje ćemo reći da su trougaone matrice (engl. triangle).

Tvrdjenje 2.1. ([**46**, 1.4.8]) *Svaka trougaona matrica T ima jedinstveni inverz $S = (s_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ koji je takodje trougaona matrica i važi $x = T(Sx) = S(Tx)$ za svako $x \in \omega$.*

Nadalje, označavaćemo sa T trougaonu matricu i sa S njen inverz. Navešćemo neke već poznate rezultate koji su bitni za naše istraživanje.

Teorema 2.2. ([**17**, Theorem 2.2], [**46**, Theorem 4.2.12]) *Neka je X BK prostor. Tada je i prostor X_T BK prostor sa normom definisanom sa $\|x\|_T = \|Tx\|$. Dalje, ako je X zatvoren podprostor prostora Y, onda je i X_T zatvoren podprostor prostora Y_T.*

Teorema 2.3. ([**17**, Theorem 2.3]) *Ako je $b = (b^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ baza normiranog prostora nizova X, tada je $c^{(n)} = (Sb^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ baza za X_T.*

Dokaz. Neka je y proizvoljan element iz X_T. To znači da je $Ty = x \in X$. Kako je $b = (b^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ baza u X, to postoji jednoznačno odredjen niz skalara $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ sa osobinom $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b^{(n)}$, odnosno, ukoliko stavimo da je $x^{<k>} = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n b^{(n)}$, imamo $\lim_{k\to\infty} x^{<k>} = x$. Neka je sada $c^{(n)} = Sb^{(n)}$. Jasno da je $Tc^{(n)} = T(Sb^{(n)}) = b^{(n)}$ za svako n. Dalje, neka je $\sum_{n=0}^{k} \lambda_n c^{(n)} = y^{<k>}$. Imamo sledeće: $Ty^{<k>} = T(\sum_{n=0}^{k} \lambda_n c^{(n)}) = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n Tc^{(n)} = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n b^{(n)} = x^{<k>}$. Ostaje još da pokažemo da je $\lim_{k\to\infty} y^{<k>} = y$. Poslednje proizilazi iz $\lim_{k\to\infty} \|x^{<k>} - x\| = 0$ i sledećeg $\|y^{<k>} - y\|_T = \|T(y^{<k>} - y)\| = \|Ty^{<k>} - Ty\| = \|x^{<k>} - x\|$. $\square$

Napomena 2.4. ([**17**, Remark 2.4]) *Na osnovu napred izloženog, ako je X normirani prostor nizova, matrični domen X_T ima bazu ako i samo ako prostor X ima bazu.*

Prethodni rezultati govore o egzistenciji baze prostora koji je zapravo matrični domen neke trougaone matrice i o opštem obliku elemenata baze ukoliko ona postoji. Sledeća teorema daće nam precizniju reprezentaciju elemenata iz nekih karakterističnih prostora nizova.

Teorema 2.5. ([**17**, Corollary 2.5]) *Neka je X BK prostor sa osobinom AK i niz $c^{(n)}$ $(n = -1, 0, 1, \dots)$ definisan sa*

$$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k} s_{kj} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

i za svako $n = 0, 1, \dots,$

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-1) \\ s_{kn} & (k \geq n). \end{cases}$$

Tada:

a) Svaki niz $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in Y = X_T$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} T_n y \cdot c^{(n)}.$$

b) Svaki niz $z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in Z = X_T \oplus e$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$z = \xi \cdot e + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z - \xi \cdot e) \cdot c^{(n)}$$

gde je ξ jedinstveni kompleksan broj takav da je $z = y + \xi \cdot e$ za $y \in X_T$.

c) Svaki niz $w = (w_n)_{n=0}^{\infty} \in W = (X \oplus e)_T$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$w = \eta \cdot c^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n w - \eta) c^{(n)}$$

gde je ξ jedinstveni kompleksan broj takav da je $Tx - \eta \cdot e \in X$.

Dokaz. Primetimo najpre da je $c^{(n)} = Se^{(n)}$ $(n = 0, 1, \dots)$ i $c^{(-1)} = Se$; Na osnovu ovog rezultata i Teoreme 2.3, jasno da su $(c^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ i $(c^{(n)})_{n=-1}^{\infty}$ baze redom za prostore Y i W.

a) Neka je $(y_n)_{n=0}^{\infty} \in Y = X_T$. Tada je $x = Ty \in X$. Koristeći dokaz Teoreme 2.3 i stavljajući $\lambda_n = T_n y$ dobijamo traženu reprezentaciju.

b) Neka je $(z_n)_{n=0}^{\infty} \in Z = Y \oplus e$. To znači da postoje jedinstveni $y \in Y$ i $\xi \in \mathbb{C}$ takvi da je $z = y + \xi \cdot e$. Na osnovu već dokazanog dela pod a), imamo da je $z = \xi \cdot e + \sum_{n=0}^{\infty} T_n y \cdot c^{(n)} = \xi \cdot e + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z - \xi \cdot e) \cdot c^{(n)}$.

c) Neka je $w \in W = (X \oplus e)_T$. Tada, $v = Tw \in X \oplus e$, pa postoje jedinstveno odredjeni $x \in X$ i $\eta \in \mathbb{C}$, takvi da je $v = x + \eta \cdot e$. Stavljajući $y = w - \eta \cdot c^{(-1)}$, dobijamo $Ty = T(w - \eta \cdot c^{(-1)}) = Tw - \eta \cdot e = v - \eta \cdot e = x \in X$ pa je jasno da je $y \in X_T$ i važi deo a). Na osnovu prethodnog, $T_n y = T_n w - \eta$, pa je $w = \eta \cdot c^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n w - \eta) c^{(n)}$. $\square$

Kao što smo već videli u prethodnoj glavi, $\beta-$duali imaju veoma važnu ulogu kod karakterizacije matričnih transformacija izmedju klasičnih prostora nizova. Kako ćemo u ovoj glavi izučavati matrične transformacije tipa (X_T, Y), to će nam $\beta-$duali prostora X_T biti od velike važnosti. Za njihovo nalaženje potreban nam je rezultat definisan sledećom lemom. Dokaz ove leme može se naći u ([**29**, Lemma 3.1]).

Lema 2.6. ([**29**, Lemma 3.1]) *Neka je X FK prostor sa osobinom AK i $R = S^t$ transponovana matrica matrice S. Tada važi $(X_T)^\beta \subset (X^\beta)_R$.*

Teorema 2.7. ([**17**, Theorem 2.6], [**29**, Theorem 3.2]) *Neka je X BK prostor sa AK osobinom i $R = S^t$ transponovana matrica matrice S. Tada, $a \in (X_T)^\beta$ ako i samo ako $a \in (X^\beta)_R$ i $W^{(a)} \in (X, c_0)$ pri čemu je trougaona matrica $W^{(a)}$ definisana na sledeći način*

$$w_{mk}^{(a)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} & (0 \le k \le m) \\ 0 & (k > m) \end{cases} \qquad (m = 0, 1, \dots).$$

Dalje, ako je $a \in (X_T)^\beta$, tada imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (R_k a)(T_k z) \text{ za svako } z \in X_T. \tag{2.1}$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $a \in (X_T)^\beta$. Na osnovu prethodne leme, jasno da je $Ra \in X^\beta$ pa je matrica $W^{(a)}$ dobro definisana jer $w_{mk}^{(a)}$ konvergira za svako m i svako k. Dalje imamo sledeće

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k z_k = \sum_{k=0}^{m} (R_k a)(T_k z) - \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(a)} (T_k z) \text{ za svako } m \text{ i svako } z \in X_T. \tag{2.2}$$

Neka je dato $x \in X$. Tada imamo $z = Sx \in X_T$, $a \in (X_T)^\beta$ i $a \in (X^\beta)_R$. Na osnovu svega navedenog je $W^{(a)} x \in c$. Pošto je $x \in X$ proizvoljno zadato, to imamo $W^{(a)} \in (X, c) \subset (X, \ell_\infty)$. Kako $R_k a = \sum_{j=k}^{\infty} a_j s_{jk}$ postoji za svako k, zaključujemo da je

$$\lim_{m \to \infty} w_{mk}^{(a)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} = 0. \tag{2.3}$$

Na osnovu uslova (2.3) i $W^{(a)} \in (X, \ell_\infty)$, proizilazi $W^{(a)} \in (X, c_0)$([**46**, 8.3.6, p. 123]). Jasno je sada da iz $a \in (X_T)^\beta$ sledi $a \in (X^\beta)_R$ i $W^{(a)} \in (X, c_0)$. Zadnji deo teoreme sledi na osnovu uslova (2.2) i (2.3).
Obrnuto, pretpostavimo da je ispunjeno $a \in (X^\beta)_R$ i $W^{(a)} \in (X, c_0)$. Tada, $x = Tz \in X$ i $az \in cs$ za svako $z \in Z$ na osnovu (2.2), što zapravo jeste uslov $a \in (X_T)^\beta$. $\square$

Napomena 2.8. ([**29**, Remark 3.3]) *a) Prethodna teorema važi i za $X = \ell_\infty$.*
b) U slučaju da je $X = c$, odnosno kod nalaženja $\beta-$duala prostora c_T, imamo da je $a \in (c_T)^\beta$ ako i samo ako je $a \in (\ell_1)_R$ i $W^{(a)} \in (c, c)$; Takodje, ako je $a \in (c_T)^\beta$, tada važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (R_k a)(T_k z) - \eta\alpha \text{ za svako } z \in c_T \tag{2.4}$$

$$\text{gde je } \eta = \lim_{k \to \infty} T_k z \text{ i } \alpha = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(a)}.$$

Dokaz. Neka je $X = \ell_\infty$ ili $X = c$. Jasno da je $X \supset c_0$, pa je $X_T \supset (c_0)_T$. Prostor c_0 je BK prostor sa osobinom AK pa priimenjujući rezultat Leme 2.6, dobijamo da iz $a \in (X_T)^\beta \subset ((c_0)_T)^\beta$ sledi $a \in (c_0^\beta)_R = (\ell_1)_R = (X^\beta)_R$, pa na osnovu (2.2)dobijamo $W^{(a)} \in (X, c)$. Obrnuto, ako pretpostavimo da je $a \in (X^\beta)_R$ i $W^{(a)} \in (X, c)$, tada, na osnovu (2.2) imamo da je $a \in (X_T)^\beta$.

a) Neka je $X = \ell_\infty$. Na osnovu Šurove teoreme (Teorema 1.40) i $W^{(a)} \in (X, c)$ sledi da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}| \text{ je ravnomerno konvergentan po } m. \tag{2.5}$$

Poslednji uslov, zajedno sa uslovom (2.3), a na osnovu Posledice 1.41 daje konačno $W \in (\ell_\infty, c_0)$.

b) Ostaje još da dokažemo da iz $a \in (c_T)^\beta$ sledi (2.4). Neka je $a \in (c_T)^\beta$ i $z \in c_T$. Jasno da je $x = Tz \in c$ i postoji $\eta = \lim_{k\to\infty} x_k$; zato, uzmimo $x^{(0)} \in c_0$ tako da važi $x = x^{(0)} + \eta e$ i stavimo $z^{(0)} = Sx^{(0)}$. Sledi da je $z^{(0)} \in (c_0)_T$ i $z = Sx = S(x^{(0)} + \eta e) = z^{(0)} + \eta Se$. Sa ovako uvedenim oznakama, uslov (2.2) je:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} a_k z_k &= \sum_{k=0}^{m} (R_k a)(T_k z) - \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(a)} T_k(z^{(0)} + \eta Se) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (R_k a)(T_k z) - W_m^{(a)}(Tz^{(0)}) - \eta W_m^{(a)} e.
\end{aligned}$$

Kako je $Ra \in \ell_1$, možemo zaključiti da je red $\sum_{k=0}^{\infty}(R_k a)(T_k z)$ konvergentan. Dalje, pošto iz $a \in (c_T)^\beta \subset ((c_0)_T)^\beta$ sledi $W^{(a)} \in (c_0, c_0)$, jasno da je $\lim_{m\to\infty} W_m^{(a)}(Tz^{(0)}) = 0$. Na kraju, iz $W^{(a)} \in (c, c)$ proizilazi da postoji $\alpha = \lim_{m\to\infty} W_m^{(a)} e$ (Teorema 1.38 b), (1.9)), pa važi (2.4). $\square$

Napomena 2.9. Izučavajući $\beta-$duale prostora nizova X, veličina koju smo uveli u Sekciji 1.2. a od važnosti je za naše istraživanje je $\|a\|_X^*$. Ovde ćemo posmatrati ovu veličinu kada je prostor nizova koji se izučava matrični domen trougaone matrice u prostoru c_0, ℓ_∞, $\ell_p (1 \le p < \infty)$ i c.

a) Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $q = \infty$ *za* $p = 1$ *i* $q = p/(p-1)$ *za* $1 < p < \infty$*. Ukoliko stavimo da je* $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$*, tada imamo*

$$\|a\|_{X_T}^* = \|Ra\|_q \text{ za svako } a \in (X_T)^\beta. \tag{2.6}$$

Ako je $X = c_0$ *ili* $X = \ell_\infty$*, onda važi*

$$\|a\|_{X_T}^* = \|Ra\|_1 \text{ za svako } a \in (X_T)^\beta. \tag{2.7}$$

b) U slučaju da je $X = c$*, važi sledeće*

$$\|a\|_{c_T}^* = \|Ra\|_1 + |\alpha| \text{ za svako } a \in (c_T)^\beta \text{ gde je } \alpha = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(a)}. \tag{2.8}$$

Dokaz. Pre nego što damo dokaz, napomenimo da ćemo nadalje pisati $Z = X_T$.
a) Neka je $a \in Z^\beta$. Na osnovu Teoreme 2.7 za slučaj kad je $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ ili $X = c_0$, i na osnovu Napomene 2.8 a) kada je $X = \ell_\infty$, zaključujemo da važi (2.1). Sada, (2.6) i (2.7) slede na osnovu Teoreme 2.2, definicije norme $\|\cdot\|^*$ i činjenice da je $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_q$ za $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$, i $\|\cdot\|_X^* = \|\cdot\|_1$ za $X = c_0$ ili $X = \ell_\infty$.

b) Posmatrajmo sada $X = c$ i neka je $a \in Z^\beta$. Na osnovu Napomene 2.8 b) imamo da je $Ra \in \ell_1$ i važi (2.4). Neka je dato $z \in Z$ i $\eta = \lim_{k\to\infty} T_k z$. Pošto je

$$|\eta| = \left|\lim_{k\to\infty} T_k z\right| \leq \sup_k |T_k z| = \|z\|_Z,$$

imamo

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |R_k a|\,|T_k z| + |\eta\alpha| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |R_k a|\,|T_k z| + |\alpha| \text{ za svako } z \in B_Z,$$

gde je $B_Z = \{z \mid \|z\| \leq 1\}$. Na osnovu toga zaključujemo da je

$$\|a\|_Z^* \leq \|Ra\|_1 + |\alpha|. \tag{2.9}$$

Dokažimo sada obrnutu nejednakost. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n \in IN$ tako da je

$$\sum_{k=0}^{n} |R_k a| > \|Ra\|_1 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (R_k a)\text{sgn}(\alpha)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definišimo niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ na sledeći način

$$x_k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(R_k a) & (0 \le k \le n) \\ \operatorname{sgn}(\alpha) & (k > n) \end{cases},$$

i stavimo $z = Sx$. Jasno da je $x \in c$, odnosno $z \in c_T$, $\eta = \lim_{k\to\infty} T_k z = \lim_{k\to\infty} x_k$ $=\operatorname{sgn}(\alpha)$ i $\|z\|_{X_T} = \|x\|_\infty \le 1$. Iz (2.4) sledi

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} |R_k a| + \sum_{k=n+1}^{\infty} (R_k a)\operatorname{sgn}(\alpha) + |\alpha|\right| \\ &\ge \sum_{k=0}^{n} |R_k a| + |\alpha| - \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (R_k a)\operatorname{sgn}(\alpha)\right| \ge \|Ra\|_1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, to važi $\|a\|_Z^* \ge \|Ra\|_1$. Konačno, iz poslednje nejednakosti i (2.9) proizilazi (2.8). □

Karakterizacija matričnih transformacija iz klase (X_T, Y), pri čemu su X i Y neki od klasičnih prostora nizova, dobija se pomoću rezultata koji slede.

Teorema 2.10. ([**17**, Theorem 2.13], [**29**, Theorem 3.4]) *Neka je X BK prostor sa osobinom AK, Y proizvoljan podskup ω i $R = S^t$. Tada, $A \in (X_T, Y)$ ako i samo ako $\hat{A} \in (X, Y)$ i $W^{(A_n)} \in (X, c_0)$ za svako $n = 0, 1, \dots$, gde je $\hat{A}$ matrica sa vrstama $\hat{A}_n = RA_n$ za $(n = 0, 1, \dots)$, A_n su vrste matrice A i trougaona matrica $W^{(A_n)}$ $(n = 0, 1, \dots)$ definisana je sa*

$$w_{mk}^{(A_n)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^{\infty} a_{nj} s_{jk} & (0 \le k \le m) \\ 0 & (k > m). \end{cases}$$

Dalje, ako je $A \in (X_T, Y)$ tada važi

$$Az = \hat{A}(Tz) \text{ za svako } z \in Z = X_T. \tag{2.10}$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $A \in (Z, Y)$. Odavde sledi da je $A_n \in Z^\beta$ za svako n, pa je na osnovu Teoreme 2.7, $\hat{A} \in X^\beta$ i $W^{(A_n)} \in (X, c_0)$. Ostaje da pokažemo još da je $\hat{A} \in (X, Y)$. Neka je x proizvoljno uzeto iz X. Jasno da je $z = Sx \in Z$. Pošto je $A_n \in Z^\beta$, to je na osnovu zadnjeg dela Teoreme 2.7,

$$Az = \hat{A}_n(Tz) = \hat{A}_n x \text{ za svako } n;$$

Dalje, iz $Az \in Y$ za svako z, sledi $\hat{A}x = Az \in Y$, pa je konačno $\hat{A} \in (X, Y)$. Na osnovu prethodnog razmatranja, jasno da $A \in (Z, Y)$ povlači (2.10).
Dokažimo sada obrnuto. Pretpostavimo da je $\hat{A} \in (X, Y)$ i $W^{(A_n)} \in (X, c_0)$ za svako n. Imamo da je $\hat{A}_n \in X^\beta$ za svako n, a ovo uz uslov $W^{(A_n)} \in (X, c_0)$, daje na osnovu Teoreme 2.7, $A_n \in Z^\beta$. Za proizvoljno $z \in Z$ je $x = Tz \in X$ i na osnovu zadnjeg dela prethodne teoreme je $A_n z = \hat{A}_n x$; iz $\hat{A}x \in Y$ za svako $x \in X$ sledi $Az = \hat{A}x \in Y$. Na kraju, zaključujemo da je $A \in (Z, Y)$. □

Napomena 2.11. ([**29**, Remark 3.5]) a) Prethodna teorema važi i u slučaju da je $X = \ell_\infty$.
b) Neka je Y linearni podprostor prostora ω. Imamo da je $A \in (c_T, Y)$ ako i samo ako važi

$$\hat{A} \in (c_0, Y), \; W^{(A_n)} \in (c, c) \text{ za svako } n \tag{2.11}$$

i

$$\hat{A}e - (\alpha_n)_{n=0}^\infty \in Y \text{ pri čemu je } \alpha_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^m w_{mk}^{(A_n)} \text{ za } n = 0, 1, \ldots; \tag{2.12}$$

Takodje, ukoliko je $A \in (c_T, Y)$, tada je

$$Az = \hat{A}(Tz) - \eta\,(\alpha_n)_{n=0}^\infty \text{ za svako } z \in c_T \text{ gde je } \eta = \lim_{k\to\infty} T_k z. \tag{2.13}$$

Dokaz. a) Dokaz ovog dela je jasna posledica Napomene 2.8 a) i dokaza Teoreme 2.10.

b) Pretpostavimo najpre da je $A \in (c_T, Y)$. Odavde sledi da je $A \in ((c_0)_T, Y)$, a dalje, na osnovu Teoreme 2.10 i da važi $\hat{A} \in (c_0, Y)$. Takodje, uslov $A_n \in (c_T)^\beta$ za svako n, povlači da je $W^{(A_n)} \in (c, c)$ za svako n na osnovu Napomene 2.8 b). Dalje, iz (2.4) dobijamo (2.12). Ukoliko je $A \in (c_T, Y)$, tada je (2.13) direktna posledica (2.4).

Da bismo dokazali obrnuto, pretpostavimo da važe uslovi (2.11) i (2.12). U tom slučaju, iz $\hat{A}_n = RA_n \in c_0^\beta = \ell_1$ i uslova $W^{(A_n)} \in (c, c)$ može se zaključiti, na osnovu Napomene 2.8 b), da važi $A_n \in (c_T)^\beta$. Neka je dato $z \in c_T$. Jasno da je $x = Tz \in c$, pa stavimo da je $x^{(0)} = x - \eta e$ pri čemu je $\eta = \lim_{k\to\infty} x_k$. Odavde zaključujemo da je $x^{(0)} \in c_0$, pa iz (2.4) sledi

$$Az = \hat{A}(Tz) - \eta\,(\alpha_n)_{n=0}^\infty = \hat{A}x^{(0)} + \eta\left(\hat{A}e - (\alpha_n)_{n=0}^\infty\right) \in Y,$$

pošto je $\hat{A} \in (c_0, Y)$, $\hat{A}e - (\alpha_n)_{n=0}^\infty \in Y$ i Y linearan prostor. □

Matrica $\hat{A}$ definisana u Teoremi 2.10 koristi se kod izučavanja matričnih transformacija a sledeća teorema daje još jedan rezultat koji govori o važnosti matrice $\hat{A}$ u karakterizaciji matričnih transformacija kod matričnih domena.

Teorema 2.12. ([**29**, Theorem 3.6]) *Neka su X i Y BK prostori, i neka je prostor X sa osobinom AK. Ako je $A \in (X_T, Y)$ tada važi*

$$\|L_A\| = \|L_{\hat{A}}\| \tag{2.14}$$

pri čemu je $\hat{A}$ matrica definisana u Teoremi 2.10.

Dokaz. Neka je $A \in (X_T, Y)$. Kako je X BK prostor, to je prostor $Z = X_T$, na osnovu Teoreme 2.2, sa normom $\|\cdot\|_Z = \|T(\cdot)\|_X$. Odavde imamo da je $x \in B_X(0,1)$ ako i samo ako je $z = Sx \in B_Z(0,1)$, pri čemu je $B_X(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$. Na osnovu Teoreme 1.20, može se zaključiti da je $L_A \in \mathcal{B}(Z, Y)$, a dalje, na osnovu Teoreme 2.10 važi i $L_{\hat{A}} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Na osnovu (2.10) imamo

$$\begin{aligned}\|L_{\hat{A}}\| &= \sup_{x\in B_X(0,1)} \|L_{\hat{A}}(x)\| = \sup_{x\in B_X(0,1)} \|\hat{A}x\|\\ &= \sup_{x\in B_Z(0,1)} \|Az\| = \sup_{z\in B_Z(0,1)} \|L_A(z)\| = \|L_A\|,\end{aligned}$$

a ovo dalje daje (2.14). □

U našem radu, izučavaćemo matrične transformacije iz klase (X, Y) pri čemu prostor X zapravo predstavlja matrični domen neke trougaone matrice, ali ćemo za kraj navesti i jedan koristan rezultat koji daje rešenje za karakterizaciju matričnih transformacija kada je prostor Y matrični domen trougaone matrice.

Teorema 2.13. ([**39**, Theorem 3.8]) *Neka su X i Y proizvoljni podskupovi ω. Tada, $A \in (X, Y_T)$ ako i samo ako $B = TA \in (X, Y)$. Važi još, ako su X i Y BK prostori i $A \in (X, Y_T)$, tada je $\|L_A\| = \|L_B\|$.*

Dokaz. Neka je $A \in (X, Y_T)$. To znači da je $A_n \in X^\beta$ za svako n i $Ax \in Y_T$ za svako $x \in X$, odnosno $A_n x = \sum_{k=0}^\infty a_{nk} x_k$ konvergira za svako $x \in X$ i svako n i $Bx \in Y$ za svako $x \in X$. Dalje, $B_n x = \sum_{k=0}^\infty b_{nk} x_k = \sum_{k=0}^\infty x_k (\sum_{i=0}^n t_{ni} a_{ik}) = \sum_{i=0}^n t_{ni} (\sum_{k=0}^\infty a_{nk} x_k)$ konvergira za svako $x \in X$ i svako n, pa je $B_n \in X^\beta$ za svako n, odnosno $B \in (X, Y)$. Da bi dokazali drugi deo teoreme, polazeći od toga da je Y BK prostor, zaključujemo da je takav i Y_T i za svako $y \in Y_T$ važi

$$\|y\|_{Y_T} = \|Ty\|_Y. \tag{2.15}$$

Operator A je neprekidan na osnovu Teoreme 1.20 i važi

$$\|L_A\| = \sup\{\|L_A x\|_{Y_T} \mid \|x\| = 1\} = \sup\{\|Ax\|_{Y_T} \mid \|x\| = 1\} < \infty. \tag{2.16}$$

Operator B je takodje neprekidan i važi

$$\|L_B\| = \sup\{\|L_B x\|_{Y_T} \mid \|x\| = 1\} = \sup\{\|Bx\|_{Y_T} \mid \|x\| = 1\} < \infty. \tag{2.17}$$

Kako je $A_n \in X^\beta$, to je $x \in \omega_A$. Dalje, pošto je T trougaona matrica, to je $T_n \in \phi$ $(n = 0, 1, \ldots)$, pa je $Bx = (TA)x = T(Ax)$. Sada, na osnovu (2.15), (2.16) i (2.17) sledi tvrdjenje teoreme. $\square$

2.2. Matrične transformacije na prostorima $a_0^r(\triangle)$, $a_c^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$

Kao što smo već napred pomenuli, razni prostori nizova potiču iz različitih koncepata sumabilnosti. Takodje, pojedini prostori nizova mogu se posmatrati kao matrični domeni nekih odredjenih matrica. Nekim od ovakvih prostora bavićemo se u ovoj sekciji.

Posmatrajmo sledeće prostore nizova za $0 < r < 1$:

$$a_0^r(\triangle) = \left\{ x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k)(x_k - x_{k-1}) = 0 \right\}; \tag{2.18}$$

$$a_c^r(\triangle) = \left\{ x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k)(x_k - x_{k-1}) = \eta \text{ za neko } \eta \in \mathbb{C} \right\}; \tag{2.19}$$

$$a_\infty^r(\triangle) = \left\{ x \in \omega \mid \sup_n \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (1+r^k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \infty \right\}. \tag{2.20}$$

Prostori nizova iz (2.18) i (2.19) uvedeni su u [**2**]. Autori su izučavali topološke osobine pomenutih prostora i dali karakterizaciju nekih matričnih transformacija na njima, pri tome ne uočivši specifičnost ovi prostora u smislu matričnih domena. Naime, pomenuti prostori nizova mogu se tretirati kao matrični domeni trougaone matrice, što ćemo nadalje videti, pa je moguće izvršiti karakterizaciju matričnih transformacija na njima na drugačiji način nego što je to učinjeno u [**2**]. Takodje, ovi prostori asociraju svojom definicijom na neku vrstu sumabilnosti i na neku modifikaciju prostora c_0 i c respektivno. Ovo upravo i daje ideju da se u [**11**] definiše prostor (2.20), kao prirodni nastavak istraživanja u [**2**], a koji je na neki način u vezi sa prostorom ℓ_∞ i ograničenim nizovima. Ovu sekciju posvetićemo upravo definisanim prostorima i njihovo izučavanje biće bazirano na primeni teorije matričnih domena.

Neka je $0 < r < 1$ i definišimo trougaonu matricu $T = (t_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ na sledeći način:

$$t_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}(r^k - r^{k+1}) & (0 \leq k < n) \\ \dfrac{r^n + 1}{n+1} & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Jednostavnim računom se može pokazati (uzimajući da je $x_{-1} = 0$) da za svako n važi

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(1 + r^k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(r^k - r^{k+1}\right) x_k + \frac{r^n + 1}{n+1} x_n.$$

Na ovaj način dobijamo još jedan, ekvivalentan, oblik prostora nizova definisanih na početku sekcije, a koji ćemo koristiti u daljem izučavanju pomenutih prostora.

Jasno da su prostori $a_0^r(\triangle)$, $a_c^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$ matrični domeni ovako definisane matrice T redom u c_0, c i ℓ_∞, odnosno, $a_0^r(\triangle) = (c_0)_T$, $a_c^r(\triangle) = (c)_T$, $a_\infty^r(\triangle) = (\ell_\infty)_T$. Možemo definisati sledeće tvrdjenje.

Tvrdjenje 2.14. *Prostori $a_0^r(\triangle)$, $a_c^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$ su BK prostori sa normom $\|\cdot\|$ definisanom na sledeći način*

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|Tx\|_\infty = \sup_n |T_n x| \\ &= \sup_n \left(\frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (r^k - r^{k+1}) x_k + (1 + r^{n+1}) x_n \right| \right);\end{aligned}$$

$a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$ su zatvoreni podprostori prostora $a_\infty^r(\triangle)$.

Dokaz. Dokaz je direktna posledica Teoreme 2.2 i oblika posmatranih prostora nizova. □

Na osnovu Teoreme 2.1, jasno da matrica T ima jedinstveni inverz S. Kako će nam matrica S biti potrebna za neke dalje rezultate, odredićemo najpre oblik elemenata s_{nk} matrice $S = (s_{nk})_{n,k=0}^\infty$.

Kako je $y_n = T_n x$ dobijamo sledeće

$$\begin{aligned}&(n+1)y_n - ny_{n-1} = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} (r^k - r^{k+1}) x_k + (r^n + 1) x_n - \left(\sum_{k=0}^{n-2} (r^k - r^{k+1}) x_k + (r^{n-1} + 1) x_{n-1} \right) = \\ &\qquad (r^{n-1} - r^n) x_{n-1} + (r^n + 1) x_n - (r^{n-1} + 1) x_{n-1} = (r^n + 1)(x_n - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Odavde je

$$x_k - x_{k-1} = \frac{(k+1)y_k - ky_{k-1}}{r^k + 1} \text{ za svako } k,$$

pa je zato, (uzimajući da je $x_{-1}=0$)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)y_k}{r^k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{ky_{k-1}}{r^k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)y_k}{r^k+1} + \frac{(n+1)y_n}{r^n+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)y_k}{r^{k+1}+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)y_k + \frac{(n+1)y_n}{r^n+1} \text{ za svako } n.
\end{aligned}
$$

Pošto je $x_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_{nk}y_k = \sum_{k=0}^{n} s_{nk}y_k$, zaključujemo da je element s_{nk} matrice S definisan na sledeći način

$$
s_{nk} = \begin{cases} (k+1)\left(\dfrac{1}{1+r^k} - \dfrac{1}{1+r^{k+1}}\right) & (0 \leq k < n) \\ \dfrac{n+1}{1+r^n} & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2.21}
$$

Sada, znajući kako izgleda inverzna matrica S, možemo preći na nalaženje Šauderove baze, ukoliko je posmatrani prostor ima.

Na osnovu Napomene 2.4, zaključujemo da prostori $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$ imaju Šauderovu bazu, dok je prostor $a_\infty^r(\triangle)$ nema. Kako je prostor c_0 BK prostor sa osobinom AK a važi i $c = c_0 \oplus e$, to možemo primeniti Teoremu 2.5 za nalaženje Šauderove baze za prostore $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$. Na osnovu iste teoreme, jasno da su $(c^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ i $(c^{(n)})_{n=-1}^{\infty}$ baze redom za prostore $a_0^r(\triangle)$ i $a_c^r(\triangle)$, pri čemu je

$$
c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k} s_{kj} \quad (k = 0, 1, \ldots),
$$

i za svako $n = 0, 1, \ldots,$

$$
c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-1) \\ s_{kn} & (k \geq n). \end{cases}
$$

U našem slučaju, za matricu S koju smo prethodno odredili, dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} c_k^{(-1)} &= \sum_{j=0}^{k} s_{kj} = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)\left(\frac{1}{1+r^j} - \frac{1}{1+r^{j+1}}\right) + \frac{k+1}{1+r^k} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{j}{1+r^j} - \frac{j+1}{1+r^{j+1}}\right) + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{1+r^j} + \frac{k+1}{1+r^k} \\ &= -\frac{k}{1+r^k} + \frac{k+1}{1+r^k} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{1+r^j} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{1+r^j} \text{ za } k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

i za svako $n = 0, 1, \ldots$ je

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \le k \le n-1) \\ s_{kn} & (k \ge n) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (0 \le k < n) \\ \dfrac{n+1}{1+r^n} & (k = n) \\ (n+1)\left(\dfrac{1}{1+r^n} - \dfrac{1}{1+r^{n+1}}\right) & (k > n). \end{cases}$$

Na osnovu svega razmatranog, kao direktnu posledicu dajemo sledeći rezultat

Tvrdjenje 2.15. *Neka je niz $c^{(n)}$ $(n = -1, 0, 1, \ldots)$ definisan sa*

$$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{1+r^j} \text{ za } k = 0, 1, \ldots$$

i za svako $n = 0, 1, \ldots,$

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \le k < n) \\ \dfrac{n+1}{1+r^n} & (k = n) \\ (n+1)\left(\dfrac{1}{1+r^n} - \dfrac{1}{1+r^{n+1}}\right) & (k > n). \end{cases}$$

Tada:

a) Prostor $a_0^r(\triangle)$ ima Šauderovu bazu $\left(c^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ i svaki niz $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in a_0^r(\triangle)$ ima *jedinstvenu reprezentaciju*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (T_n x) \cdot c^{(n)}.$$

b) Prostor $a_c^r(\triangle)$ *ima Šauderovu bazu* $\left(c^{(n)}\right)_{n=-1}^{\infty}$ *i svaki niz* $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in a_c^r(\triangle)$ *ima jedinstvenu reprezentaciju*

$$x = \xi \cdot c^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n x - \eta) c^{(n)}$$

gde je η *jedinstveni kompleksan broj takav da je* $Tx - \eta \cdot e \in c_0$.

Pre nego što predjemo na karakterizaciju matričnih transformacija iz klase (X, Y) gde je $X \in \{a_0^r(\triangle), a_c^r(\triangle), a_\infty^r(\triangle)\}$ a Y jedan od klasičnih prostora nizova, odredićemo $\beta-$ duale prostora $a_0^r(\triangle)$, $a_c^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$. Primena Teoreme 2.7 daće tražene rezultate kako za prostor $a_0^r(\triangle)$, tako i za prostore $a_c^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$, na osnovu Napomene 2.8.

Na osnovu Teoreme 2.7 i Napomene 2.8 imamo sledeće

$$a \in (a_0^r(\triangle))^\beta \text{ ako i samo ako } a \in (c_0^\beta)_R \text{ i } W^{(a)} \in (c_0, c_0);$$

$$a \in (a_c^r(\triangle))^\beta \text{ ako i samo ako } a \in (c^\beta)_R \text{ i } W^{(a)} \in (c, c);$$

$$a \in (a_\infty^r(\triangle))^\beta \text{ ako i samo ako } a \in (\ell_\infty^\beta)_R \text{ i } W^{(a)} \in (\ell_\infty, c_0)$$

pri čemu je $R = S^t$ a matrica W je definisana na sledeći način

$$w_{mk}^{(a)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} & (0 \le k \le m) \\ 0 & (k > m) \end{cases} \qquad (m = 0, 1, \dots).$$

Na osnovu (2.21) dobijamo

$$R_k a = \sum_{j=0}^{\infty} r_{kj} a_j = \sum_{j=k}^{\infty} s_{jk} a_j = \frac{k+1}{1+r^k} a_k + \left(\frac{k+1}{1+r^k} - \frac{k+1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \tag{2.22}$$

$$= (k+1)\left(\frac{a_k}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right) \text{ za svako } k = 0, 1, \ldots.$$

Pošto je $X^\beta = \ell_1$ za $X = c_0, c, \ell_\infty$, jasno da će u nalaženju $\beta-$duala naših prostora, uslov $Ra \in \ell_1$ biti zajednički za sva tri slučaja, odnosno, pri definisanju $\beta-$duala naših prostora nizova, jedan od uslova biće

$$\sum_{k=0}^{\infty} |R_k a| = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\frac{a_k}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right| < \infty. \tag{2.23}$$

Na osnovu karakterizacije matričnih transformacija izmedju klasičnih prostora nizova, kojima smo se bavili u prethodnoj glavi, dobijamo dodatne uslove za $\beta-$duale posmatranih prostora koji se odnose na matricu $W^{(a)} = \left(w_{mk}^{(a)}\right)_{m,k=0}^{\infty}$.

Zapravo, imamo da je $W^{(a)} \in (c_0, c_0)$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi (Teorema 1.38 c))

$$\sup_m \sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}| < \infty \tag{2.24}$$

i

$$\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = 0 \text{ za svako } k. \tag{2.25}$$

Dalje, $W^{(a)} \in (c, c)$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi (Teorema 1.38 b)) (2.24),

$$\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = \alpha_k \text{ za svako } k \tag{2.26}$$

i uslov

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{mk}^{(a)} = \alpha. \tag{2.27}$$

Primetimo da iz konvergencije reda $R_k a = \sum_{j=k}^{\infty} a_j s_{jk}$ za svako k sledi $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} = 0$, pa se uslovi (2.25) i (2.26) mogu izostaviti.

Na kraju, $W^{(a)} \in (\ell_\infty, c_0)$ ako i samo ako

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}| = 0. \tag{2.28}$$

Poslednja transformacija karakteriše se pomoću Šurove teoreme, ali je konkretan oblik iz (2.28) dobijen na osnovu [**45**, (21.1)].

Na osnovu Teoreme 2.7 i definicije matrice $W^{(a)}$ date u njoj, imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}|w_{mk}^{(a)}| &= \sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_js_{jk}\right| = \sum_{k=0}^{m-1}\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_js_{jk}\right| + \left|\sum_{j=m}^{\infty}a_js_{jm}\right| \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_j\right| \\
&\quad + (m+1)\left|\frac{a_m}{1+r^m}+\left(\frac{1}{1+r^m}-\frac{1}{1+r^{m+1}}\right)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j\right|,
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

pa uslovi (2.24)i (2.28) imaju redom sledeće oblike

$$
\begin{aligned}
\sup_m \Bigg(&\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_j\right| \\
&+ (m+1)\left|\frac{a_m}{1+r^m}+\left(\frac{1}{1+r^m}-\frac{1}{1+r^{m+1}}\right)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j\right|\Bigg) < \infty
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \Bigg(&\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_j\right| \\
&+ (m+1)\left|\frac{a_m}{1+r^m}+\left(\frac{1}{1+r^m}-\frac{1}{1+r^{m+1}}\right)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j\right|\Bigg) = 0.
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Dalje, pošto važi i

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}w_{mk}^{(a)} &= \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=m}^{\infty}a_j \\
&\quad + (m+1)\left(\frac{a_m}{1+r^m}+\left(\frac{1}{1+r^m}-\frac{1}{1+r^{m+1}}\right)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=m}^{\infty}a_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (m+1)\left(\frac{1}{1+r^m} - \frac{1}{1+r^{m+1}} - \frac{1}{1+r^m}\right) a_m \\
&= \sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=m}^{\infty} a_j + a_m \frac{m+1}{1+r^{m+1}},
\end{aligned}
$$

uslov (2.27) postaje

$$
\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=m}^{\infty} a_j + a_m \frac{m+1}{1+r^{m+1}}\right) = \alpha. \tag{2.32}
$$

Sada, koristeći rezultate Teoreme 2.7 i Napomena 2.8 i 2.9, a na osnovu prethodnog izvodjenja, možemo dati rezultate koji se odnose na $\beta-$duale prostora definisanih u ovoj sekciji.

Tvrdjenje 2.16. *Važi sledeće:*

a) $a \in (a_0^r(\triangle))^\beta$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.23) *i* (2.30)*;*

b) $a \in (a_c^r(\triangle))^\beta$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.23), (2.30) *i* (2.32)*;*

c) $a \in (a_\infty^r(\triangle))^\beta$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.23) *i* (2.31).

d) Takodje, imamo:

$$
\|a\|^*_{X_T} = \|Ra\|_1 \text{ za svako } a \in (X_T)^\beta \text{ za } X = c_0 \text{ ili } X = \ell_\infty
$$

i

$$
\|a\|^*_{c_T} = \|Ra\|_1 + |\alpha| \text{ za svako } a \in (c_T)^\beta \text{ gde je } \alpha \text{ iz uslova (2.32).}
$$

Posmatrajmo klasu $(a_0^r(\triangle), Y)$. Kako je $a_0^r(\triangle) = (c_0)_T$, zaključujemo da će se transformacije iz ove klase svesti na transformacije iz klase (c_0, Y),jer na osnovu Teoreme 2.10 imamo sledeće

$$
A \in (a_0^r(\triangle), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (c_0, Y) & \text{i} \\ W^{(A_n)} \in (c_0, c_0) & \text{za svako } n = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{2.33}
$$

Teorema 2.17. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$*. Tada:*

a) $A \in (a_0^r(\triangle), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi*

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left| \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) \right| < \infty; \tag{2.34}$$

i

$$\sup_m \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \left| \sum_{j=m}^{\infty} a_{nj} \right| + (m+1) \left| \frac{a_{nm}}{1+r^m} + \left(\frac{1}{1+r^m} - \frac{1}{1+r^{m+1}} \right) \sum_{j=m+1}^{\infty} a_{nj} \right| \right) < \infty \tag{2.35}$$

za svako $n = 0, 1, \ldots$;

b) $A \in (a_0^r(\triangle), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34)*,* (2.35) *i*

$$\lim_{n\to\infty} (k+1) \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) = 0 \text{ za svako } k; \tag{2.36}$$

c) $A \in (a_0^r(\triangle), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34)*,* (2.35) *i*

$$\lim_{n\to\infty} (k+1) \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) = \alpha_k \text{ za svako } k; \tag{2.37}$$

d) $A \in (a_0^r(\triangle), \ell_p)$ $(1 \le p < \infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.35) *i*

$$\sup_{\substack{K \subset \mathbb{N}_0 \\ K \text{konačan}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} (k+1) \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) \right|^p < \infty. \tag{2.38}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo direktnom primenom (2.33), stavljajući za prostor Y odgovarajuće prostore nizova.

Kako je $\hat{A} = (R_k A_n))_{n,k=0}^{\infty}$, dobijamo na isti način kao u (2.22), stavljajući A_n umesto a, sledeće

$$\hat{a}_{nk} = R_k A_n = (k+1) \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) \tag{2.39}$$

za svako $n, k = 0, 1, \ldots$.

Odavde, jasno da slede uslovi (2.34) u a), (2.34) i (2.36) u b), (2.34) i (2.37) u c), i uslov (2.38) u d) na osnovu karakterizacija $\hat{A} \in (c_0, \ell_\infty)$, $\hat{A} \in (c_0, c_0)$, $\hat{A} \in (c_0, c)$ i $\hat{A} \in (c_0, \ell_p)$ dobijenih pomoću Teorema 1.37 c), 1.38 b), c) i Teoreme 1.42.
Takodje, imamo da je uslov (2.35) ekvivalentan uslovu $W^{(A_n)} \in (c_0, c_0)$ za svako n (bez obzira na to koji prostor Y posmatramo), i dobija se na isti način kao u dokazu Tvrdjenja 2.16 a), zamenjujući u (2.30) a sa A_n. □

Slično, za karakterizaciju transformacija iz $(a_c^r(\triangle), Y)$ i $(a_\infty^r(\triangle), Y)$, gde je Y proizvoljan prostor nizova, pošto važi $a_c^r(\triangle) = (c)_T$ i $a_\infty^r(\triangle) = (\ell_\infty)_T$, biće nam potrebne matrične transformacije redom iz (c, Y) i (ℓ_∞, Y) , odnosno

(2.40)
$$A \in (a_c^r(\triangle), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (c_0, Y) \\ W^{(A_n)} \in (c, c) & \text{za svako } n = 0, 1, \dots \\ \hat{A}e - (\beta)_{n=0}^{\infty} \in Y & \text{gde je } \beta_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(A_n)}. \end{cases}$$

$$(2.41) \quad A \in (a_\infty^r(\triangle), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (\ell_\infty, Y) & \text{i} \\ W^{(A_n)} \in (\ell_\infty, c_0) & \text{za svako } n = 0, 1, \dots . \end{cases}$$

Teorema 2.18. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. *Tada:*

a) $A \in (a_c^r(\triangle), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34), (2.35),

$$(2.42) \quad \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=m}^{\infty} a_{nj} + a_{nm} \frac{m+1}{1+r^{m+1}} \right) = \beta_n$$

postoji za svako n

i

$$(2.43) \quad \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right) - \beta_n \right| < \infty$$

za β_n *definisano u* (2.42);

b) $A \in (a_c^r(\triangle), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34), (2.36), (2.35), (2.42) *i*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k}+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right)-\beta_n\right)=0 \tag{2.44}$$

za β_n *definisano u* (2.42)*;*

c) $A \in (a_c^r(\triangle), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34), (2.37), (2.35), (2.42) *i*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k}+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right)-\beta_n\right)=\gamma \tag{2.45}$$

za β_n *definisano u* (2.42)*;*

d) $A \in (a_c^r(\triangle), \ell_p)$ $(1 \le p < \infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.38), (2.35), (2.42) *i*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k}+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right)-\beta_n\right|^p<\infty \tag{2.46}$$

za β_n *definisano u* (2.42).

Dokaz. Za dokaz koristimo (2.40).
Kao u Teoremi 2.17, iz uslova $\hat{A} \in (c_0, Y)$ proizilaze uslovi (2.34), (2.36), (2.37) i (2.38). Pošto je $W^{(A_n)} \in (c,c)$ za svako n, stavljajući A_n umesto a u (2.32), a koristeći rezultate Teoreme 1.38 b), dobijamo uslove (2.35) i (2.42). Iz istog razloga, kao što je napred već rečeno, moguće je izostaviti uslov o postojanju $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(A_n)}$ za svako n. Konačno, kako za svako n važi $\hat{A}_n e = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk}$, uslovi (2.43), (2.44), (2.45) i (2.46) slede iz $\hat{A}e - (\beta_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$ i (2.39). □

Teorema 2.19. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. *Tada:*

a) $A \in (a_\infty^r(\triangle), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.34) *i*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\left|\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}\right|+|a_{nm}|\cdot\frac{m+1}{1+r^m}\right)=0; \tag{2.47}$$

b) $A \in (a_\infty^r(\triangle), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.47) *i*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k+1}{1+r^k}\cdot a_{nk}+(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right|=0; \tag{2.48}$$

c) $A \in (a_\infty^r(\triangle), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.47), (2.37) *i*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\frac{1}{1+r^k}\cdot a_{nk}+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right| \tag{2.49}$$

konvergira uniformno po n;

d) $A \in (a_\infty^r(\triangle), \ell_p)$ $(1 \le p < \infty)$ *ako i samo ako važi uslov* (2.47) *i za* $1 < p < \infty$ *uslov* (2.38), *ili za* $p = 1$ *uslov*

$$\sup_{\substack{K\subset I\!N_0\\ K\,konačan}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in K}(k+1)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k}+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nj}\right)\right|<\infty. \tag{2.50}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo koristeći (2.41).
Na osnovu karakterizacija $A \in (\ell_\infty, c_0)$, $A \in (\ell_\infty, c)$, $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ i $A \in (\ell_\infty, \ell_p)$ dobijenih pomoću rezultata iz [**45**, (21.1)], Teoreme 1.40, 1.37 a), 1.45 za $1 < p < \infty$ i 1.44 b) za $p = 1$, dobijamo uslove (2.48) u a), (2.37) i (2.49) u b), (2.34) u c) i (2.38) za $1 < p < \infty$, odnosno (2.50) za $p = 1$ u d).
Uslov (2.47) izvodimo pomoću [**45**, (21.1)], a na osnovu uslova $W^{(A_n)} \in (\ell_\infty, c_0)$ za svako n. □

Na kraju dajemo još jedan rezultat koji se odnosi na matrične transformacije (X, Y), pri čemu je prostor Y neki matrični domen, odnosno, daćemo jednu primenu Teoreme 2.13. Pre toga uvedimo prostor bv^p $(1 \le p < \infty)$

$$bv^p = \{x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty}|x_k - x_{k-1}|^p < \infty\}$$

i matricu $\Delta = (\Delta_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ definisanu sa

$$\Delta_{nk} = \begin{cases} 1 & (k = n) \\ -1 & (k = n-1) \\ 0 & (\text{ u ostalim slučajevima }) \end{cases}.$$

Jasno da je $bv^p = (\ell_p)_\Delta$ $(1 \leq p < \infty)$. Posmatrajmo sada matrične transformacije (X, Y) gde je prostor X redom jedan od prostora definisanih u (2.18), (2.19) i (2.20) a prostor Y je upravo uvedeni prostor bv^p $(1 \leq p < \infty)$.

Teorema 2.20. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ i $1 \leq p < \infty$. Tada:*

a) $A \in (a_0^r(\triangle), bv^p)$ *ako i samo ako važe uslovi*

$$\sup_m \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \left| \sum_{j=m}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right| \right. \\ \left. + (m+1) \left| \frac{a_{nm} - a_{n-1,m}}{1+r^{m+1}} + \left(\frac{1}{1+r^m} - \frac{1}{1+r^{m+1}} \right) \sum_{j=m+1} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right| \right) < \infty \tag{2.51}$$

i

$$\sup_{\substack{K \subset I\!N_0 \\ K \, konačan}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} (k+1) \left(\frac{(a_{nk} - a_{n-1,k})}{1+r^k} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right) \right|^p < \infty; \tag{2.52}$$

b) $A \in (a_c^r(\triangle), bv^p)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.51), (2.52),

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}} \right) \sum_{j=m}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right. \\ \left. + (a_{nm} - a_{n-1,m}) \frac{m+1}{1+r^{m+1}} \right) = \tilde{\beta}_n \text{ za svako } n \tag{2.53}$$

i

$$(2.54)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a_{nk}-a_{n-1,k}}{1+r^k}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}(a_{nj}-a_{n-1,j})\right)-\tilde{\beta}_n\right|^p<\infty \text{ za } \tilde{\beta}_n \text{ definisano u (2.53);}$$

c) *$A \in (a_\infty^r(\triangle), bv^p)$ ako i samo ako važe uslovi (2.52) za $1 < p < \infty$ ili za $p = 1$*

$$(2.55)\quad \sup_{\substack{K\subset \mathbb{N}_0\\ K \text{ konačan}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in K}(k+1)\left(\frac{a_{nk}-a_{n-1,k}}{1+r^k}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty}(a_{nj}-a_{n-1,j})\right)\right|<\infty$$

i uslov

$$(2.56)\quad \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\left|\sum_{j=m}^{\infty}(a_{nj}-a_{n-1,j})\right|\right.$$
$$\left.+\,|a_{nm}-a_{n-1,m}|\cdot\frac{m+1}{1+r^{m+1}}\right)=0.$$

DOKAZ. Na osnovu Teoreme 2.13, imamo da je $A \in (X, bv^p)$ ako i samo ako je $\Delta A \in (X, \ell_p)$ $(1 \le p < \infty)$ pošto je $bv^p = (\ell_p)_\Delta$. Sada dokaz neposredno sledi iz Teorema 2.17 d), 2.18 d) i 2.19 d) i oblika matrice ΔA. $\square$

2.3. O novim prostorima nizova razlika m-tog reda

U ovom delu uvešćemo neke nove prostore nizova a zatim posmatrati njihove osobine. Razlog da definišemo upravo ovakve prostore nizova jesu rezultati dobijeni u radovima [**25**] i [**27**]. Koristeći neke rezultate iz [**17**], opisaćemo nove klase matričnih transformacija.

Pre nego što definišemo prostore nizova koje ćemo izučavati, daćemo kratak pregled rezultata i oznaka koje ćemo koristiti u daljem radu. Za detaljnije izučavanje videti [**14**], [**27**], [**39**].

Neka je nadalje m prirodan broj. Definišimo operatore $\Delta^{(m)}, \Sigma^{(m)} : \omega \to \omega$ na sledeći način

$$\left(\Delta^{(1)} x\right)_k = \Delta^{(1)} x_k = x_k - x_{k-1} (k = 0, 1, \dots)$$

$$\left(\Sigma^{(1)} x\right)_k = \Sigma^{(1)} x_k = \sum_{j=0}^{k} x_j (k = 0, 1, \dots)$$

i za $m \geq 2$ je

$$\Delta^{(m)} = \Delta^{(1)} \circ \Delta^{(m-1)},$$

$$\Sigma^{(m)} = \Sigma^{(1)} \circ \Sigma^{(m-1)}.$$

Sledeći rezultati važe za $m \geq 1$ i $k = 0, 1, \dots$ ([**39**], str.183):

$$\left(\Delta^{(m)} x\right)_k = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} x_{k-j} = \sum_{j=\max\{0,k-m\}}^{k} (-1)^{k-j} \binom{m}{k-j} x_j; \tag{2.57}$$

$$\left(\Sigma^{(m)} x\right)_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{m+k-j-1}{k-j} x_j; \tag{2.58}$$

$$\Delta^{(m)} \circ \Sigma^{(m)} = \Sigma^{(m)} \circ \Delta^{(m)} = id \text{ , identično preslikavanje na } \omega. \tag{2.59}$$

Sa Δ i Σ označavaćemo matrice definisane na sledeći način: $\Delta_{nk} = (\Delta^{(1)}(e^{(k)})_n$ i $\Sigma_{nk} = (\Sigma(e^{(k)}))_n$ za svako n i k, a sa $\Delta^{(1)}$ i $\Sigma^{(1)}$ operatore upravo odredjene matricama Δ i Σ, redom. Slično, operatori $\Delta^{(m)}$ i $\Sigma^{(m)}$ odredjeni su matricama Δ^m i Σ^m, koje zapravo predstavljaju $m-$ti stepen matrica Δ i Σ. Kako su Δ i Σ trougaone matrice i istovremeno predstavljaju jedna drugoj inverze, možemo primetiti da su takve i matrice Δ^m i Σ^m.

Definicija 2.21. Neka je dat niz $z = (z_n)_{n=0}^{\infty}$ i $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ dijagonalna matrica definisana na sledeći način: $a_{nn} = z_n$ i $a_{nk} = 0$ za $k \neq n$ $(n = 0, 1, \dots)$. Tada pišemo

$$z^{-1} * X = X_A = \{x \in \omega : xz \in X\}.$$

Označimo sa $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}^+$ sledeće skupove:

$$\mathcal{U} = \{u \in \omega | u_n \neq 0 \text{ za svako } n\} \quad \text{i} \quad \mathcal{U}^+ = \{u \in \omega | u_n > 0 \text{ za svako } n\}.$$

Za proizvoljno zadato $\alpha \in \mathcal{U}$, pisaćemo $1/\alpha = (1/\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ i koristeći uvedene oznake, definisaćemo nove skupove:

$$s_\alpha^0 = (1/\alpha)^{-1} * c_0 = \{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} (x_n/\alpha_n) = 0\}, \tag{2.60}$$

$$s_\alpha^{(c)} = (1/\alpha)^{-1} * c = \{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} (x_n/\alpha_n) = \eta \text{ za neko } \eta \in \mathbb{C}\} \tag{2.61}$$

i

$$s_\alpha = (1/\alpha)^{-1} * \ell_\infty = \{x \in \omega \mid \sup_n |x_n/\alpha_n| < \infty\}. \tag{2.62}$$

Ovako definisani skupovi, specijalno za $\alpha \in \mathcal{U}^+$, izučavani su u [**25**].

Sledeći rezultat je direktna posledica Teorema 2.2 i 2.5, i predstavlja uopštenje za rezultat [**25**, Lemma 1.1].

Tvrdjenje 2.22. *Neka je $\alpha \in \mathcal{U}$. Tada važi sledeće:*

a) *Prostori s_α^0, $s_\alpha^{(c)}$ i s_α su BK prostori sa normom $\|\cdot\|$ definisanom na sledeći način*

$$\|x\| = \sup_n \left(\frac{|x_n|}{|\alpha_n|}\right);$$

b) *Prostor s_α^0 je sa AK osobinom. Prostor $s_\alpha^{(c)}$ ima Šauderovu bazu $\{\alpha, e^{(0)}, e^{(1)}, \dots\}$ i svako $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in s_\alpha^{(c)}$ ima reprezentaciju*

$$x = \eta\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - \eta\alpha_n)\, e^{(n)} \tag{2.63}$$

pri čemu je $\lim_{n\to\infty} x_n/\alpha_n = \eta$.

Dokaz. Označimo sa $T = (t_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ dijagonalnu matricu sa dijagonalnim elementima $t_{nn} = 1/\alpha_n$ za svako n. Njena inverzna matrica $S = (s_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ je takodje dijagonalna matrica sa dijagonalnim elementima $s_{nn} = \alpha_n$ za svako n. Jasno da ovako definisane matrice zadovoljavaju uslove za primenu rezultata o trougaonim matricama.

a) Dokaz ovog dela je direktna posledica Teoreme 2.2.

b) Na osnovu Teoreme 2.5, dobijamo sledeće:

$$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{\infty} s_{kj} = \alpha_k \text{ za svako } k, \text{ pa je zato } c^{(-1)} = \alpha,$$

i za svako n,

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-1) \\ s_{kn} & (k > n) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ \alpha_n & (k = n) \end{cases}, \text{ pa sledi da je } c^{(n)} = \alpha_n e^{(n)}.$$

Sada, svako $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in s_\alpha^0$ ima na osnovu Teoreme 2.5 a) jedinstvenu reprezentaciju

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} T_n y \cdot c^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{\alpha_n} \cdot \alpha_n e^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot e^{(n)},$$

odnosno, s_α^0 ima AK osobinu.

Slično, na osnovu Teoreme 2.5 c), svaki niz $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in s_\alpha^{(c)}$ ima jedinstvenu reprezentaciju:

$$\begin{aligned} y &= \eta c^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n y - \eta) c^{(n)} = \eta\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y_n}{\alpha_n} - \eta \right) \alpha_n e^{(n)} \\ &= \eta\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} (y_n - \eta\alpha_n) e^{(n)}, \end{aligned}$$

pa važi (2.63). □

Prostori nizova koje ćemo izučavati u ovoj sekciji predstavljaju prostore nizova $m-$tih razlika i za njihovo izučavanje biće nam potrebna teorija matričnih domena.

(2.64) $$s_\alpha^0(\Delta^m) = \{x \in \omega \mid \Delta^m x \in s_\alpha^0\} = \{x \in \omega \mid \left(\frac{\Delta^m x_n}{\alpha_n} \right)_n \in c_0\};$$

(2.65) $$s_\alpha^{(c)}(\Delta^m) = \{x \in \omega \mid \Delta^m x \in s_\alpha^{(c)}\} = \{x \in \omega \mid \left(\frac{\Delta^m x_n}{\alpha_n}\right)_n \in c\};$$

(2.66) $$s_\alpha(\Delta^m) = \{x \in \omega \mid \Delta^m x \in s_\alpha\} = \{x \in \omega \mid \left(\frac{\Delta^m x_n}{\alpha_n}\right)_n \in \ell_\infty\}.$$

Označimo sa $D = (d_{nk})_{n,k=0}^\infty$ dijagonalnu matricu sa elementima $d_{nn} = 1/\alpha_n$ za $n = 0, 1, \dots$ i definišimo novu matricu $T = D\Delta^m$. Na ovaj način dobijamo da je $s_\alpha^0(\Delta^m) = (c_0)_T$, $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m) = (c_0 \oplus e)_T$ i $s_\alpha(\Delta^m) = (\ell_\infty)_T$. Takodje, ovako definisana matrica T je trougaona i osnovu (2.57) imamo

$$T_n x = \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} x_{n-k} \text{ za svako } n = 0, 1, \dots.$$

Zato, koristeći Teoremu 2.2 imamo sledeći rezultat.

Tvrdjenje 2.23. *Prostori $s_\alpha^0(\Delta^m)$, $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ i $s_\alpha(\Delta^m)$ su BK prostori sa normom $\|\cdot\|$ definisanom na sledeći način*

$$\|x\| = \sup_n \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x_{n-k}\right|}{|\alpha_n|}.$$

Prirodno je da sada ispitamo da li novodefinisani prostori imaju Šauderovu bazu.

Tvrdjenje 2.24. *Definišimo niz $c^{(n)}$ za $n = -1, 0, 1, \dots$ na sledeći način:*

(2.67) $$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \binom{m+k-j-1}{k-j} \text{ za } k = 0, 1, \dots,$$

i neka je za $n = 0, 1, \dots,$

(2.68) $$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \le k < n) \\ \binom{m+k-n-1}{k-n} & (k \ge n) \end{cases}.$$

a) Prostor $s_\alpha^0(\Delta^m)$ ima Šauderovu bazu $\left(c^{(n)}\right)_{n=0}^\infty$ definisanu u (2.68) i svaki niz $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in s_\alpha^0(\Delta^m)$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^m x \cdot c^{(n)} \text{ pri čemu je } \Delta_n^m x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x_{n-k} \text{ za svako } n.$$

b) Prostor $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ ima Šauderovu bazu $\left(c^{(n)}\right)_{n=-1}^{\infty}$ definisanu u (2.67) i (2.68) i svaki niz $x=(x_n)_{n=0}^\infty \in s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$x=\eta\cdot c^{(-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_n^m x-\alpha_n\eta)c^{(n)} \text{ gde je } \eta=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\Delta_n^m x.$$

c) Prostor $s_\alpha(\Delta^m)$ nema Šauderovu bazu.

DOKAZ. Primetimo najpre da je inverzna matrica $S=(s_{nk})_{n,k=0}^\infty$ gore uvedene matrice T, definisana sa $S=\Sigma^m D^{-1}$. Stoga, na osnovu (2.58) imamo sledeće:

$$s_{nk}=\begin{cases}\alpha_k\binom{m+n-k-1}{n-k} & (0\le k\le n)\\ 0 & (k>n)\end{cases} \quad (n=0,1,\dots).$$

Dalje, za svako $x\in\omega$ i svako n važi $T_n x=(1/\alpha_n)\Delta_n^m x$ a za $k=0,1,\dots$ imamo $c_k^{(-1)}=\sum_{j=0}^k s_{kj}$. Definišimo sada novi niz $\tilde{c}^{(n)}$ za svako n na sledeći način:

$$\tilde{c}_k^{(n)}=\begin{cases}0 & (0\le k\le n-1)\\ s_{kn}=\alpha_n\binom{m+k-n-1}{k-n} & (k\ge n)\end{cases}.$$

Jasno da je odavde $\tilde{c}^{(n)}=\alpha_n c^{(n)}$ za $n=0,1,\dots$.

a) Na osnovu Teoreme 2.5 a), imamo da je $(\tilde{c}^{(n)})_{n=0}^\infty$ Šauderova baza za $s_\alpha^0(\Delta^m)$ pa odatle, svaki niz $x=(x_n)_{n=0}^\infty\in s_\alpha^0(\Delta^m)$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$x=\sum_{n=0}^\infty T_n x\cdot\tilde{c}^{(n)}=\sum_{n=0}^\infty \Delta_n^m x\cdot c^{(n)}.$$

b) Koristeći Teoremu 2.5 c), $c^{(-1)}$ i $\tilde{c}^{(n)}$ $(n=0,1,\dots)$ predstavljaju Šauderovu bazu za prostor $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ pa svaki niz $x=(x_n)_{n=0}^\infty\in s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$x=\eta\cdot c^{(-1)}+\sum_{n=0}^\infty(T_n x-\eta)\tilde{c}^{(n)}=\eta\cdot c^{(-1)}+\sum_{n=0}^\infty(\Delta_n^m x-\alpha_n\eta)c^{(n)}$$

$$\text{gde je } \eta=\lim_{n\to\infty}T_n x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\Delta_n^m x.$$

c) Dokaz ovog dela sledi na osnovu Napomene 2.4. $\square$

Tvrdjenje 2.25. *Imamo*

a) $a \in (s_\alpha^0(\Delta^m))^\beta$ *ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j \right| < \infty \tag{2.69}$$

i

$$\sup_\ell \left(\sum_{k=0}^{\ell} \left| \alpha_k \sum_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j \right| \right) < \infty; \tag{2.70}$$

b) $a \in \left(s_\alpha^{(c)}(\Delta^m)\right)^\beta$ *ako i samo ako su ispunjeni uslovi* (2.69), (2.70) *i*

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\alpha_k \sum_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k}{j-k} a_j \right) = \alpha; \tag{2.71}$$

c) $a \in (s_\alpha(\Delta^m))^\beta$ *ako i samo ako su ispunjeni uslovi* (2.69) *i*

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \left| \alpha_k \sum_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k}{j-k} a_j \right| = 0; \tag{2.72}$$

d) Važi i sledeće:

$$\|a\|_{X_T}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j \right| \quad \textit{za svako } a \in (X_T)^\beta \textit{ za } X = c_0 \textit{ ili } X = \ell_\infty$$

i

$$\|a\|_{s_\alpha^{(c)}(\Delta^{(m)})}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j \right| + |\alpha| \quad \textit{za svako } a \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m))^\beta$$

gde je α *definisano u* (2.71).

Dokaz. Koristeći (2.58) i definiciju matrica R i $W^{(a)} = (w_{\ell k}^{(a)})_{\ell,k=0}^\infty$, dobijamo sledeće:

$$R_k a = \sum_{j=k}^{\infty} s_{jk} a_j = \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j \text{ za } k = 0, 1, \ldots \tag{2.73}$$

i

$$(2.74)\qquad w_{\ell k}^{(a)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=\ell}^{\infty} s_{jk}a_j = \alpha_k \sum\limits_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_j & (0 \le k \le \ell) \\ 0 & (k > \ell) \end{cases} \qquad (\ell = 0, 1, \dots).$$

Uslovi (2.69), (2.70), (2.71) i (2.72) su zapravo redom

$$Ra \in \ell_1,\ \sup_{\ell} \sum_{k=0}^{\ell} |w_{\ell,k}^{(a)}|, \infty,\ \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} w_{\ell k}^{(a)} = \alpha \text{ i } \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} |w_{\ell k}^{(a)}| = 0,$$

pa a), b) i c) proizilaze iz Teoreme 2.7 i Napomene 2.8 a dokazuju se na isti način kao i oni u Tvrdjenju 2.16.

Na kraju, deo d) je posledica (2.7) i (2.8) iz Napomene 2.9. □

Sekciju ćemo završiti matričnim transformacijama na ovde proučavanim prostorima. Prema zahtevima Teoreme 2.10 i Napomene 2.11, prostore definisane u ovoj sekciji, kao što smo već videli, tretiraćemo kao matrične domene trougaonih matrica, i to: $s_\alpha^0(\Delta^m) = (c_0)_{D\Delta^m}$, $s_\alpha^{(c)}(\Delta^m) = (c)_{D\Delta^m}$ i $s_\alpha(\Delta^m) = (\ell_\infty)_{D\Delta^m}$. Ovakav oblik prostora nam obezbedjuje direktnu primenu pomenute teoreme i napomene.

Posmatrajmo najpre klasu $(s_\alpha^0(\Delta^m), Y)$. Na isti način kao u (2.73) i (2.74), zamenjujući a sa A_n, dobijamo:

$$(2.75)\quad \hat{a}_{nk} = R_k A_n = \sum_{j=0}^{\infty} r_{kj}a_{nj} = \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} s_{jk}a_{nj} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_{nj}$$

za svako $n, k = 0, 1, \dots,$

i za svako n je:

$$(2.76)\quad w_{\ell k}^{(A_n)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=\ell}^{\infty} s_{jk}a_{nj} = \alpha_k \sum\limits_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_{nj} & (0 \le k \le \ell) \\ 0 & (k > \ell) \end{cases} \qquad (\ell = 0, 1, \dots).$$

Sada, primenjujući Teoremu 2.10 i činjenicu da je $s_\alpha^0(\Delta^m) = (c_0)_{D\Delta^m}$, imamo:

$$A \in (s_\alpha^0(\Delta^m), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (c_0, Y) & \text{i} \\ W^{(A_n)} \in (c_0, c_0) & \text{za svako } n = 0, 1, \dots . \end{cases} \tag{2.77}$$

Teorema 2.26. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$. *Tada:*

a) $A \in (s_\alpha^0(\Delta^m), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi*

$$\sup_n \sum_{k=0}^\infty \left| \alpha_k \sum_{j=k}^\infty \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right| < \infty \tag{2.78}$$

i

$$\sup_\ell \sum_{k=0}^\ell \left| \alpha_k \sum_{j=\ell}^\infty \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right| < \infty \text{ za svako } n; \tag{2.79}$$

b) $A \in (s_\alpha^0(\Delta^m), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78), (2.79) *i*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha_k \sum_{j=k}^\infty \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right) = 0 \text{ za svako } k; \tag{2.80}$$

c) $A \in (s_\alpha^0(\Delta^m), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78), (2.79) *i*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha_k \sum_{j=k}^\infty \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right) = \hat{\beta}_k \text{ postoji za svako } k. \tag{2.81}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo koristeći (2.77).
Uslovi (2.78) u a), (2.78) i (2.80) u b) i uslovi (2.78) i (2.81) u c) proizilaze iz (2.75) i karakterizacija $\hat{A} \in (c_0, \ell_\infty)$, $\hat{A} \in (c_0, c_0)$ i $\hat{A} \in (c_0, c)$ dobijenih pomoću Teorema 1.37 c), 1.38 b) i c).
Uslov (2.79), koji se javlja u svim slučajevima, posledica je (2.76) i uslova $W^{(A_n)} \in (c_0, c_0)$ dobijenog pomoću Teoreme 1.37 c), pošto se uslov $\lim_{\ell\to\infty} w_{\ell k}^{(A_n)} = 0$ iz već objašnjenih razloga može izostaviti. $\square$

Na osnovu Napomene 2.11, imamo sledeće:

$$A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (c_0, Y) \\ W^{(A_n)} \in (c, c) & \text{za svako } n = 0, 1, \ldots \\ \hat{A}e - (\eta_n)_{n=0}^\infty \in Y & \text{gde je } \eta_n = \lim_n \sum_{k=0}^{\ell} w_{lk}^{(A_n)} \end{cases} \tag{2.82}$$

i

$$A \in (s_\alpha(\Delta^m), Y) \text{ ako i samo ako } \begin{cases} \hat{A} \in (\ell_\infty, Y) & \text{i} \\ W^{(A_n)} \in (\ell_\infty, c_0) & \text{za svako } n = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{2.83}$$

Teorema 2.27. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$. Tada:*

a) $A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78), (2.79),

$$\lim_{\ell \to \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \alpha_k \left(\sum_{j=\ell}^{\infty} \binom{n+j-k-1}{j-k} a_{nj} \right) = \beta_n \textit{ postoji za svako } n \tag{2.84}$$

i

$$\sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_{nj} - \beta_n \right| < \infty \textit{ pri čemu je } \beta_n \textit{ iz } (2.84); \tag{2.85}$$

b) $A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78), (2.79), (2.80), (2.84) *i*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_{nj} - \beta_n \right) = 0 \textit{ gde je } \beta_n \textit{ iz } (2.84); \tag{2.86}$$

c) $A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78), (2.79), (2.81), (2.84) *i*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-k} a_{nj} - \beta_n \right) = \gamma \textit{ gde je } \beta_n \textit{ iz } (2.84). \tag{2.87}$$

Dokaz. U svrhu ovog dokaza koristimo (2.82).
Kao i u Teoremi 2.26, uslov $\hat{A} \in (c_0, Y)$ povlači uslove (2.78), (2.80) i (2.81).
Dalje, iz $W^{(A_n)} \in (c, c)$ dobijamo uslove (2.79) i (2.84) koristeći rezultate Teoreme 1.38 b). Kao i ranije, uslov da $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(A_n)}$ postoji za svako n se može izostaviti.

I na kraju, uzimajući redom za Y prostore ℓ_∞, c_0 i c, uslov $\hat{A}e - (\eta_n)_{n=0}^\infty \in Y$ daje redom (2.85), (2.86) i (2.87). $\square$

Teorema 2.28. *Neka je* $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$. *Tada:*

a) $A \in (s_\alpha(\Delta^m), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.78) *i*

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \left| \alpha_k \sum_{j=\ell}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right| = 0 \text{ za svako } n; \tag{2.88}$$

b) $A \in (s_\alpha(\Delta^m), c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.88) *i*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right| = 0; \tag{2.89}$$

c) $A \in (s_\alpha(\Delta^m), c)$ *ako i samo ako važe uslovi* (2.81), (2.88) *i*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \alpha_k \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j-k-1}{j-1} a_{nj} \right| \text{ konvergira ravnomerno po } n \ . \tag{2.90}$$

Dokaz. Dokaz se izvodi na sličan način kao i prethodni, ali ovde, polazeći od (2.83).

Uslovi (2.78) iz a), (2.89) iz b) i (2.81) i (2.90) iz c) dobijaju se na osnovu $\hat{A} \in (\ell_\infty, Y)$ a primenom Teoreme 1.37 a), [**45**, (21.1)] i Teoreme 1.40.

Primenjujući [**45**, (21.1)] na $W^{(A_n)} \in (\ell_\infty, c_0)$, dobija se najzad i uslov (2.88). $\square$

GLAVA 3

Kompaktni operatori na matričnim domenima

Zadatak u ovoj glavi jeste karakterizacija nekih klasa kompaktnih linearnih operatora. U prethodnom delu rada videli smo da beskonačnoj matrici A koja predstavlja transformaciju izmedju dva prostora nizova X i Y, u oznaci $A \in (X, Y)$, možemo pridružiti operator $L_A \in B(X, Y)$ takav da je $Ax = L_A(x)$ za svako $x \in X$. Sada je zadatak da nadjemo potrebne i dovoljne uslove da operator L_A bude kompaktan. Hausdorfova mera nekompaktnosti predstavlja najefikasniji "alat" za rešavanje ovog problema.

Najpre ćemo dati uvodne pojmove, neophodne za praćenje daljeg istraživanja. Kako su predmet našeg rada transformacije na matričnim domenima trougaonih matrica u klasičnim prostorima nizova, dalje ćemo naći norme nekih operatora korisnih za naše istraživanje, a nakon toga i Hausdorfove mere nekompaktnosti ovih operatora. Primenom tako dobijenih rezultata, dalje ćemo odrediti uslove za kompaktnost operatora na prostorima nizova definisanim u prethodnoj glavi.

3.1. Uvodni pojmovi

Predmet izučavanja u ovoj glavi biće kompaktni operatori na odredjenim prostorima nizova, pa ćemo u ovoj sekciji dati neophodne definicije i rezultate za dalje istraživanje.

Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Skup $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0), r\}$ predstavlja otvorenu kuglu u X, sa centrom u x_0 i poluprečnikom r.

Definicija 3.1. Podskup M metričkog prostora X je kompaktan ako svaki niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ iz M ima konvergentan podniz i pri tome granica tog podniza pripada skupu M.

Definicija 3.2. Podskup M metričkog prostora X je relativno kompaktan ako je zatvorenje skupa M kompaktan skup.

Definicija 3.3. Dijametar skupa $E \subset X$, u oznaci $diamX$, je:

$$diamE = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in E\}.$$

Podskup E, metričkog prostora (X,d), je ograničen ako je $diamE < \infty$.

Definicija 3.4. Neka su M i S podskupovi metričkog prostora (X,d) i $\epsilon > 0$. Za skup S kažemo da je $\epsilon-$mreža skupa M, ako je $M \subset \cup_{s\in S} B(s,\epsilon)$. Ako je skup S konačan i $\epsilon-$mreža skupa M, tada je S konačna $\epsilon-$mreža skupa M. Skup M je totalno ograničen ako za svako $\epsilon > 0$ ima konačnu $\epsilon-$mrežu.

Definicija 3.5. Neka je X vektorski prostor nad poljem K. Skup $E \subset X$ je konveksan ako za svako $x, y \in E$ i svako $\lambda \in (0,1)$ važi da je $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$. Ako je $F \subset X$, tada se presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup F naziva konveksan pokrivač(ljuska) skupa F, u oznaci $co(F)$.

Označimo sa $L(X,Y)$ skup svih linearnih operatora sa prostora X u prostor Y.

Definicija 3.6. Neka su X i Y normirani prostori i L linearan operator, tj. $L \in L(X,Y)$. Operator L je kompaktan ako je $L(Q)$ relativno kompaktan podskup u Y za svaki ograničen podskup Q u X. Skup svih kompaktnih operatora sa X u Y, označava se sa $K(X,Y)$.

Teorema 3.7. ([**40**, Teorema 2.12.5]) *Neka su X i Y normirani prostori i $L \in L(X,Y)$. Operator L je kompaktan ako i samo ako niz $(Lx_n)_{n=0}^{\infty}$ ima konvergentan podniz za svaki ograničen niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ iz X.*

Mi ćemo za odredjivanje klase kompaktnih operatora koristiti Hausdorfovu (Hausdorff) meru nekompaktnosti, jer nam ona omogućava efikasno nalaženje kompaktnih operatora na odredjenim prostorima. Pored ove mere nekompaktnosti postoje i druge ali nam ova najefikasnije rešava problem sa kojim se mi srećemo u ovom radu.

Kuratovski ([**20**]) je 1930 uveo meru nekompaktnosti α. Kasnije je (1955) Darbo ([**5**]) nastavio sa izučavanjem ove funkcije u teoriji fiksne tačke. Istrăţesku ([**15, 16**]) je takodje uveo novu meru nekompaktnosti. J.Banaś i K.Goebel ([**3**]) dali su aksiomatsku definiciju mera nekompaktnosti. Goldenstein, Gohberg i Markus ([**7, 8**]) su definisali i izučavali Hausdorfovu (loptastu) meru nekompaktnosti i definisali rezultate koji su od velike važnosti u izučavanju kompaktnih operatora.
Za detaljnije rezultate i dalje izučavanje mera nekompaktnosti koristiti [**1**].

Definicija 3.8. Neka je (X, d) metrički prostor i Q ograničen podskup u X. Hausdorfova mera nekompaktnosti skupa Q, u oznaci $\chi(Q)$, definisana je sa

$$\chi(Q) = \inf\{\epsilon > 0 \mid Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X,\ r_i < \epsilon\ (i = 1, \ldots, n),\ n \in I\!N\}.$$

Teorema 3.9. ([**40**, Lema 2.11.7], [**39**, Lemma 2.11, p. 168]) *Neka su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi u metričkom prostoru (X, d). Tada je:*

$$\chi(Q) = 0 \textit{ ako i samo ako je } Q \textit{ totalno ograničen skup},$$

$$\chi(Q) = \chi(\overline{Q}),$$

$$Q_1 \subset Q_2 \textit{ implicira } \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2),$$

$$\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\},$$

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}.$$

Teorema 3.10. ([**40**, Teorema 2.11.8], [**39**, Theorem 2.12, p. 168]) *Neka su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi u normiranom prostoru X. Tada je:*

$$\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2),$$

$$\chi(Q + x) = \chi(Q)\ (x \in X)$$

$$\chi(\lambda Q) = |\lambda| \chi(Q) \textit{ za svako } \lambda \in C.$$

$$\chi(Q) = \chi(co(Q)).$$

Teorema 3.11. (Goldenštein, Gohberg, Markus) ([**39**, Theorem 2.23, p. 173]) *Neka je X Banahov prostor sa Šauderovom bazom (b_n), Q ograničen podskup u X i $P_n : X \to X$ projektor na linealu skupa $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Tada je:*

$$\frac{1}{a}\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|\right) \le \chi(Q) \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|\right), \tag{3.1}$$

pri čemu je $a = \limsup_{n\to\infty}\|I-P_n\|$.

Dokaz. Jasno da za svako $n \in IN$ važi sledeć:

$$Q \subset P_n(Q) + (I-P_n)(Q).$$

Sada, na osnovu osobina mere χ i poslednjeg imamo:

$$\chi(Q) \le \chi(P_n(Q)) + \chi((I-P_n)(Q)) = \chi((I-P_n)(Q)) \le \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|,$$

pa sledi

$$\chi(Q) \le \inf_n \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\| \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|\right).$$

Ostaje da dokažemo prvu nejednakost u (3.1). Neka je $\epsilon > 0$ i skup $\{z_1, z_2, \dots z_k\}$ $[\chi(Q)+\epsilon]-$mreža skupa Q. Ako sa B_X označimo zatvorenu jediničnu loptu u normiranom prostoru X, jasno da važi da je $Q \subset \{z_1, z_2, \dots z_k\} + [\chi(Q)+\epsilon]B_X$. To znači da za svako $x \in Q$ postoji $z \in \{z_1, z_2, \dots z_k\}$ i $s \in B_X$, tako da je $x = z + [\chi(Q)+\epsilon]s$, pa odatle važi

$$\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\| \le \sup_{1\le i\le k}\|(I-P_n)(z_i)\| + [\chi(Q)+\epsilon]\|(I-P_n)\|.$$

Na osnovu svega ovoga sledi

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|\right) \le (\chi(Q)+\epsilon)\limsup_{n\to\infty}\|(I-P_n)\|.$$

□

Pre nego što damo rezultate koji predstavljaju specijalan slučaj prethodne teoreme, primenjene na odredjene BK prostore sa osobinom AK kao i na prostor c, uvedimo novi pojam, potreban za dalji rad.

Norma $\|\cdot\|$, na prostoru nizova X je monotona, ukoliko za $x, \tilde{x} \in X$ za koje važi $|x_k| \leq |\tilde{x}_k|$ za svako k proizilazi da važi $\|x\| \leq \|\tilde{x}\|$. Za prostor X sa ovakvom normom kažemo da je monoton.

Teorema 3.12. *a) Neka je X monoton BK prostor sa osobinom AK i P_n projektor iz X na lineal skupa $\{e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ za $n = 0, 1, \ldots$. Tada*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|\right) \text{ postoji za svaki ograničen skup } Q \text{ u } X \tag{3.2}$$

i

$$a = \lim_{n\to\infty}\|I-P_n\| = 1. \tag{3.3}$$

b) Neka je P_n projektor iz c na lineal skupa $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ za $n = -1, 0, 1, \ldots$. Tada važi (3.2) i

$$a = \lim_{n\to\infty}\|I-P_n\| = 2. \tag{3.4}$$

Dokaz. Primetimo najpre da je

$$\mu_n(Q) = \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\| < \infty \text{ za svako } n \text{ i svaki ograničen skup } Q \text{ u } X, \text{ ili } c.$$

a) Pošto je X monoton BK prostor sa osobinom AK, sledi da je

$$\|(I-P_n)(x)\| = \|x - x^{<n>}\| \geq \|x - x^{<n+1>}\| = \|(I-P_{n+1})(x)\| \text{ za svako } n \tag{3.5}$$

pri čemu je $x^{<n>} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$. Neka su dati n i $\varepsilon > 0$. Tada, postoji niz $x^0 \in Q$ takav da je $\|(I-P_{n+1})(x^0)\| \geq \mu_{n+1}(Q) - \varepsilon$ i na osnovu (3.5) važi

$$\mu_n(Q) \geq \|(I-P_n)(x^0)\| \geq \|(I-P_{n+1})(x^0)\| \geq \mu_{n+1}(Q) - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Kako su n i $\varepsilon > 0$ proizvoljno zadati, to imamo $\mu_n(Q) \geq \mu_{n+1}(Q) \geq 0$ za svako n, pa zaključujemo da $\lim_{n\to\infty}\mu_n(Q)$ postoji. Ovim smo dokazali (3.2).
Pošto je norma $\|\cdot\|$ monotona, imamo da važi $\|(I-P_n)(x)\| = \|x - x^{<n>}\| \leq \|x\|$ za svako $x \in X$ i svako n, pa proizilazi jasno da je

$$\|I-P_n\| \leq 1 \text{ za svako } n. \tag{3.7}$$

Da bismo dokazali i obrnutu nejednakost, za dato n, stavimo $x = e^{(n+1)}$. Tada je $\|(I-P_n)(e^{(n+1)})\| = \|e^{(n+1)}\|$. Kako je n proizvoljno i $\|e^{(n+1)}\| \neq 0$ za svako n, to zaključujemo da važi

$$\|I - P_n\| \geq 1 \text{ za svako } n. \tag{3.8}$$

Na osnovu (3.7) i (3.8) dobijamo (3.3).

b) Neka je dato $x \in c$. Jasno da x ima jedinstvenu reprezentaciju oblika $x = \xi \cdot e + \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - \xi)e^{(k)}$ gde je $\xi = \lim_{k\to\infty} x_k$, pa odatle imamo

$$(I-P_n)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(x_k - \xi)e^{(k)} \text{ za svako } n = -1, 0, 1\ldots,$$

i

$$\|(I-P_n)(x)\| = \sup_{k\geq n+1}|x_k - \xi| \geq \sup_{k\geq n+2}|x_k-\xi| = \|(I-P_{n+1})(x)\|. \tag{3.9}$$

Neka su n i $\varepsilon > 0$ proizvoljno zadati. Tada postoji x^0 tako da je $\|(I-P_{n+1})(x^0)\| \geq \mu_{n+1}(Q) - \varepsilon$ pa na osnovu (3.9) sledi (3.6)i isto kao u a) zaključujemo da važi (3.2). Dalje, kako je $|\xi| = |\lim_{k\to\infty} x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|$, imamo

$$\|(I-P_n)(x)\| = \sup_{k\geq n+1}|x_k - \xi| \leq \sup_k |x_k| + |\xi| \leq 2\|x\| \text{ za svako } x \in c,$$

pa je zato

$$\|I - P_n\| \leq 2 \text{ za svako } n. \tag{3.10}$$

Da bismo dokazali obrnutu nejednakost, za proizvoljno uzeto n, stavimo $x = e - 2e^{(n+1)}$, odnosno $x_{n+1} = -1$ i $x_k = 1$ za $k \neq n+1$. Jasno da je $x \in c$, $\|x\| = 1$, $\xi = \lim_{k\to\infty} x_k = 1$ i $\|(I-P_n)(x)\| = \sup_{k\geq n+1}|x_k - \xi| = |x_{n+1} - 1| = 2$, pa sledi $\|I - P_n\| \geq 2$. Zbog proizvoljnosti n, zaključujemo da važi

$$\|I - P_n\| \geq 2 \text{ za svako } n, \tag{3.11}$$

zajedno daju (3.4). □

Pošto su ℓ_p i c_0 monotoni BK prostori sa osobinom AK, kao direktnu posledicu Teorema 3.11 i 3.12 imamo sledeći rezultat.

Teorema 3.13. *a) Neka je Q ograničen podskup normiranog prostora X, pri čemu je X jedan od prostora ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ili c_0. Ako je $P_n : X \to X$ operator definisan sa $P_n(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0 \ldots)$ za $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$, tada važi*

$$\chi(Q) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)(x)\| \right)$$

([**40**, Theorem 2.11.11], [**39**, Theorem 2.15, p. 170]).
b) Neka je Q ograničen podskup u c i P_n projektor iz prostora c na lineal skupa $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ za $n = -1, 0, 1, \ldots$. Tada važi

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)(x)\| \right) \leq \chi(Q) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)(x)\| \right).$$

Napred su dati rezultati koji se odnose na Hausdorfovu meru nekompaktnosti ograničenih skupova. Medjutim, moguće je "meriti" i nekompaktnost operatora.

Definicija 3.14. Neka su μ_1 i μ_2 mere nekompaktnosti, respektivno, na Banahovim prostorima X_1 i X_2, i neka su $\mathcal{M}_{X_1}$ i $\mathcal{M}_{X_2}$ kolekcije ograničenih skupova u X_1 i X_2 redom. Za operator $L : X_1 \to X_2$ kažemo da je $(\mu_1, \mu_2)-$ ograničen ako je $L(Q) \in \mathcal{M}_{X_2}$ za svako $Q \in \mathcal{M}_{X_1}$ i postoji broj K $(0 \leq K < \infty)$, takav da je

$$\mu_2(L(Q)) \leq K \cdot \mu_1(Q) \text{ za svako } Q \in \mathcal{M}_{X_1}.$$

Ako je operator L (μ_1, μ_2)-ograničen, tada se broj $\|L\|_{\mu_1,\mu_2}$ definiše sa

$$\|L\|_{\mu_1,\mu_2} = \inf\{K \geq 0 \mid \mu_2(L(Q)) \leq K \cdot \mu_1(Q) \text{ za svako } Q \in \mathcal{M}_{X_1}\}$$

i naziva $(\mu_1, \mu_2)-$norma operatora L, ili $(\mu_1, \mu_2)-$mera nekompaktnosti operatora L. Ukoliko je $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, umesto $\|L\|_{\mu_1,\mu_2}$ pisaćemo $\|L\|_\mu$.

Zadržavajući prethodne oznake imamo

$$\|L\|_\chi = \inf\{K \geq 0 \mid \chi(L(Q)) \leq K \cdot \chi(Q) \text{ za svako } Q \in \mathcal{M}_{X_1}\}.$$

Za efektivno nalaženje Hausdorfove mere nekompaktnosti operatora koristićemo narednu teoremu.

Teorema 3.15. ([**40**, Teorema 2.12.11], [**39**, Theorem 2.25, p. 175]) *Neka su X i Y Banahovi prostori, $L \in B(X,Y)$, $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ i $\bar{B}_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Tada je*

$$\|L\|_\chi = \chi(L(\bar{B}_X)) = \chi(L(S_X)).$$

Dokaz. Radi kraćeg zapisivanja, neka je nadalje $S = S_X$ i $\bar{B} = \bar{B}_X$.
Kako je $co(S) = \bar{B}$ i $L(co(S)) = co(L(S))$, na osnovu osobina mere χ imamo

$$\chi(L(\bar{B})) = \chi(L(co(S))) = \chi(co(L(S))) = \chi(L(S))$$

a odavde je $\chi(L(\bar{B})) \leq \|L\|_\chi$.

Dokažimo još da je $\|L\|_\chi \leq \chi(L(\bar{B}))$. Naka je Q neprazan i ograničen skup u X i $\{x_i\}_{i=1}^n$ konačna $r-$ mreža skupa Q. Tada je $Q \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$ i važi

$$L(Q) \subset \bigcup_{i=1}^n L(B(x_i, r)).$$

Na osnovu osobina mere χ dalje sledi

$$\chi(L(Q)) \leq \chi\left(\bigcup_{i=1}^n L(B(x_i, r))\right) = \chi(L(B(0, r))) = r\chi(L(\bar{B})),$$

a odavde

$$\chi(L(Q)) \leq \chi(Q)\chi(L(\bar{B})).$$

□

Tvrdjenje 3.16. ([**40**, Posledica 2.12.12], [**39**, Corollary 2.26, p. 175]) *Neka su X, Y i Z Banahovi prostori, $L \in B(X,Y)$, $\tilde{L} \in B(Y,Z)$ i neka je $\|\cdot\|_K$ kvocijent norma na Banahovom prostoru $B(X,Y) \setminus K(X,Y)$. Tada je $\|\cdot\|_\chi$ seminorma na $B(X,Y)$, i*

$$\|L\|_\chi = 0 \text{ ako i samo ako } \tilde{K} \in K(X,Y);$$

$$\|L\|_\chi \leq \|L\|;$$

$$\|L + K\|_\chi = \|L\|_\chi, \text{ za svako } K \in K(X,Y);$$

$$\|\tilde{L} \circ L\|_\chi \leq \|\tilde{L}\|_\chi \|L\|_\chi;$$

$$\|L\|_\chi \leq \|L\|_K.$$

Kao što smo videli u prethodnoj glavi, predmet našeg izučavanja su prostori nizova koji predstavljaju matrične domene nekih trougaonih matrica, pa ćemo navesti rezultat koji povezuje matrične domene i Hausdorfovu meru nekompaktnosti.

Teorema 3.17. ([**17**, Theorem 2.18]) *Neka je X normiran prostor nizova a $\mathbf{M}_{X_T}$ i $\mathbf{M}_X$ kolekcije svih ograničenih skupova u X_T i X, redom. Naka su dalje χ_T i χ Hausdorfove mere nekompaktnosti na $\mathbf{M}_{X_T}$ i $\mathbf{M}_X$, redom. Tada je*

$$\chi_T(Q) = \chi(T(Q)) \text{ za svako } Q \in \mathbf{M}_{X_T}.$$

Dokaz. Kroz dokaz, koristićemo sledeće oznake: $Y = X_T$, $B(x,r)$ i $B_T(y,r)$ biće otvorene kugle poluprečnika r i centrima x i y u X i Y, redom. Činjenica da je $Q \in \mathbf{M}_Y$ važi ako i samo ako je $P = T(Q) \in \mathbf{M}_X$ na osnovu definicije norme $\|\cdot\|_T$. Zato, $\chi_T(Q)$ je definisano ako i samo ako je definisano $\chi(T(Q))$.

Najpre ćemo pokazati da važi $\chi_T(Q) \leq \chi(T(Q))$ za svako $Q \in \mathbf{M}_Y$. Stavimo da je $t = \chi_T(Q)$ i $s = \chi(T(Q))$ i pretpostavimo da je $t > s$ za neko $Q \in \mathbf{M}_Y$. To bi značilo da postoji realan broj ϵ takav da je $s < \epsilon < t$, zatim $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ i $r_1, r_2, \ldots r_n < \epsilon$ takvi da važi $T(Q) \subset \cup_{k=1}^n B(x_k, r_k)$. Neka je dato $q \in Q$ i stavimo da je $p = Tq \in X$. Tada postoji $y_j \in Y$ tako da je $x_j = Ty_j$, $r_j < \epsilon$ i važi $p \in B(x_j, r_j)$, odnosno

$$\|p - x_j\| = \|Tq - Ty_j\| = \|q - y_j\|_T < r_j.$$

Zato je $q \in B_T(y_j, r_j) \subset \cup_{k=1}^n B_T(y_k, r_k)$. Pošto je $q \in Q$ proizvoljno uzeto, imamo da je $Q \subset \cup_{k=1}^n B_T(y_k, r_k)$. To znači da je $\chi_T(Q) \leq \epsilon < t$, što je kontradikcija sa $t = \chi_T(Q)$, pa mora važiti nejednakost $\chi_T(Q) \leq \chi(T(Q))$ za svako $Q \in \mathbf{M}_Y$.

Ostaje da se još dokaže da važi i obrnuta nejednakost, odnosno, $\chi(T(Q)) \leq \chi_T(Q)$. Stavimo sada umesto X i Y redom Y i Y_S, gde je $S = T^{-1}$, i primenimo rezultat koje smo upravo dokazali. Imamo sledeće

$$\chi(T(Q)) = (\chi_T)_S(T(Q)) \leq \chi_T(S(T(Q))) = \chi_T(Q)$$

za svako $Q \in \mathbf{M}_Y$. □

Sekciju ćemo završiti rezultatima koji se odnose na Hausdorfovu meru nekompaktnosti neprekidnih linearnih operatora u c.

I ovde ćemo sa A_n označavati n–tu vrstu beskonačne matrice $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. Takodje, ukoliko je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor nizova, pisaćemo

$$\|a\|_X^* = \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{ \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right| \right\}.$$

pri čemu za proizvoljan FK prostor X i $a \in X^\beta$ izraz na desnoj strani postoji i konačan je.

Teorema 3.18. *Neka je X BK prostor sa osobinom AK. Tada se svaki operator $L \in \mathcal{B}(X, c)$ može predstaviti pomoću beskonačne kompleksne matrice $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ tako da je $(L(x))_n = A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ za svako n i svako $x \in X$. Za Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora L važi sledeće:*

$$\frac{1}{2} \cdot \limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{n\geq r} \|A_n - \alpha\|_X^* \right) \leq \|L\|_\chi \leq \limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{n\geq r} \|A_n - \alpha\|_X^* \right) \tag{3.12}$$

pri čemu je

$$\alpha_k = \lim_{k\to\infty} a_{nk} \text{ za svako } k \text{ i } \alpha = (\alpha_k)_{k=0}^{\infty}. \tag{3.13}$$

Dokaz. Radi kraćeg zapisa, umesto $\|\cdot\|_X^*$, nadalje ćemo pisati $\|\cdot\|^*$.
Prvi deo teoreme sledi na osnovu Teorema 1.30 a) i 1.31.
Dalje, na osnovu Teoreme 1.30 b), iz $A \in (X, c)$ proizilazi

$$\|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* < \infty$$

i

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ postoji za svako } k. \tag{3.14}$$

Pokazaćemo najpre da je $\alpha \in X^\beta$. Neka je $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno uzeto. Pošto je X prostor sa osobinom AK, to postoji nenegativan ceo broj m_0 takav da je $\|x^{<m>}\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ za svako $m \geq m_0$, gde je $x^{<m>} = \sum_{k=0}^m x_k e^{(k)}$. Neka je zadato $m \geq m_0$. Tada imamo

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k^{<m>}\right| \leq (1+\varepsilon)\|A_n\|^* \, \|x\| \text{ za svako } n,$$

pa na osnovu (3.14) sledi

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k\right| \leq (1+\varepsilon)\|A\|^* \, \|x\| \text{ za svako } m \geq m_0. \tag{3.15}$$

Odavde zaključujemo da je $(\alpha_k x_k)_{k=0}^\infty \in bs$, a kako je $x \in X$ proizvoljno uzeto, proizilazi da je $\alpha \in X^\gamma$. Pošto je prostor X sa osobinom AK, to važi $\alpha \in X^\gamma = X^\beta$ ([**46**, Theorem 7.2.7, p. 106]), a odavde, na osnovu Teoreme 1.29 sledi da je $\|\alpha\|^* < \infty$.
Može se i bolje odrediti granica za $\|\alpha\|^*$. Zapravo, koristeći (3.15) zaključujemo da je

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k\right| \leq (1+\varepsilon)\|A\|^* \, \|x\| \text{ za svako } x \in X, \text{ pa dobijamo } \|\alpha\|^* \leq (1+\varepsilon)\|A\|^*.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno uzeto, to proizilazi da je $\|\alpha\|^* \leq \|A\|^*$.
Pokazaćemo sada da je

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \textit{ za svako } x \in X. \tag{3.16}$$

Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno uzeti. Kako je prostor X sa osobinom AK, postoji nenegativan ceo broj k_0 takav da je

$$\|x - x^{<k_0>}\| < \frac{\varepsilon}{2(\|A-\alpha\|^* + 1)}. \tag{3.17}$$

Takodje, na osnovu (3.13) sledi da postoji i nenegativan ceo broj n_0 takav da je

$$\left|\sum_{k=0}^{k_0} (a_{nk} - \alpha_k)x_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ za svako} n \geq n_0. \tag{3.18}$$

Neka je dato $n \geq n_0$. Iz (3.17) i (3.18) sledi

$$\left| A_n x - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{k_0} (a_{nk} - \alpha_k) x_k \right| + \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_{nk} - \alpha_k) x_k \right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|A_n - \alpha\|^* \, \|x - x^{<k_0>}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kako je $x \in X$ proizvoljno, time smo dokazali (3.16).

Ostaje još da dokažemo (3.12).

Neka je dato $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in c$. Jasno da y ima jedinstvenu reprezentaciju oblika $y = \eta \cdot e + \sum_{n=0}^{\infty} (y_n - \eta) e^{(n)}$ gde je $\eta = \lim_{n \to \infty} y_n$. Odvade sledi da je

$$(I - P_r)(y) = \sum_{n=r+1}^{\infty} (y_n - \eta) e^{(n)} \text{ za svako } r = -1, 0, 1, \ldots.$$

Sada, stavljajući da je $y_n = A_n x$ $(n = 0, 1, \ldots)$ i $B = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ matrica definisana sa $b_{nk} = a_{nk} - \alpha_k$ za svako n i k, dobijamo koristeći (3.16) sledeće:

$$\|(I - P_r)(Ax)\| = \sup_{n \geq r+1} |y_n - \eta| = \sup_{n \geq r+1} \left| A_n x - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \right| = \sup_{n \geq r+1} |B_n x|,$$

odakle zaključujemo da je

$$\sup_{x \in S_x} \|(I - P_r)(Ax)\| = \sup_{n \geq r+1} \|B_n\|^* \text{ za svako } n \geq r + 1.$$

Jasno da nejednakosti u (3.12) slede iz Teoreme 3.15, (3.1) u Teoremi 3.11 i (3.4) u Teoremi 3.12 b). □

U prethodnoj teoremi za prostor X se zahtevalo da je BK prostor sa AK osobinom, pa slučaj kada je $X = c$ nije bio obuhvaćen. Teorema koja sledi daće rešenje pomenute situacije. Označimo zato sa $\mathcal{B}(c)$ skup svih ograničenih linearnih operatora iz c u c.

Teorema 3.19. *Svaki operator $L \in \mathcal{B}(c)$ može se zadati matricom $B = (b_{nk})_{n=0,k=-1}^{\infty}$ tako da važi sledeće:*

(3.19) $$L(x) = \left(b_{n,-1}\xi + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} x_k \right)_{n=0}^{\infty} \text{ gde je } \xi = \lim_{k \to \infty} x_k,$$

(3.20) $$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = \beta_k \text{ postoji za svako } k = 0, 1, \dots,$$

(3.21) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} b_{nk} = \beta$$

i

(3.22) $$\|L\| = \sup_n \sum_{k=-1}^{\infty} |b_{nk}| < \infty.$$

Takodje, važi

(3.23)
$$\lim_{n\to\infty}(L(x))_n = \xi \cdot \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x_k - \xi) = \left(\beta - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\right) \xi + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k \text{ za svako } x \in c.$$

Dokaz. Neka je $L \in \mathcal{B}(c)$ i $x \in c$. Definišimo $L_n : c \to \mathbb{C}$ za $n = 0, 1, \dots$ na sledeći način: $L_n(x) = (L(x))_n$ $(x \in c)$. Pošto je c BK prostor, sledi da je $L_n \in c^*$, i za svako n postoji niz $(b_k^{(n)})_{k=-1}^{\infty} \in \ell_1$ tako da je ispunjeno

$$L_n(x) = b_{-1}^{(n)} \xi + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} x_k \ , \ \xi = \lim_{k\to\infty} x_k,$$

gde je

(3.24) $$b_{-1}^{(n)} = L_n(e) - \sum_{k=0}^{\infty} L_n(e^{(k)}) \text{ i } b_k^{(n)} = L_n(e^{(k)}) \ (k \ge 0) \text{ za } n = 0, 1, \dots,$$

i

(3.25) $$\|L_n\| = \sum_{k=-1}^{\infty} |b_k^{(n)}| \text{ za svako } n = 0, 1, \dots.$$

Definišimo sada matricu $B = (b_{nk})_{n=0,k=-1}^{\infty}$ na sledeći način: $b_{nk} = b_k^{(n)}$ $(n = 0, 1, \dots;$ $k = -1, 0, 1, \dots)$. Dobijamo

$$L_n(x) = b_{n,-1}\xi + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} x_k \text{ za } n = 0, 1, \dots.$$

Ovim smo dokazali (3.19).

Neka je dalje $\hat{B} = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. Tada je $L(x^{(0)}) = Bx^{(0)} \in c$ za svako $x^{(0)} \in c_0$, odnosno $\hat{B} \in (c_0, c)$, pa proizilazi (3.20).

Kako je $L(e) \in c$ i $L_n(e) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_{nk}$ za svako n sledi (3.21).

Dokažimo sada (3.22). Pisaćemo nadalje

$$c_{-1} = \{\tilde{x} = (x_k)_{k=-1}^{\infty} : (\tilde{x}_k)_{k=0}^{\infty} \in c \text{ i } \tilde{x}_{-1} = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k\}.$$

Na osnovu rezultata [**46**, Theorem 4.5.1, p.69], c_{-1} je BK prostor u odnosu na normu $\|\tilde{x}\| = \sup_{k\geq -1} |\tilde{x}_k|$, važi $B \in (c_{-1}, c) \subset (c_{-1}, \ell_\infty)$ i $L(\tilde{x}) = B\tilde{x}$ za svako $\tilde{x} \in c_{-1}$. Sada, (3.22) sledi iz Teoreme 1.30 b) i (3.25).

Dokažimo na kraju (3.23). Pošto je $\hat{B} \in (c, c) \subset (c_0, c)$, na osnovu dela i) iz dokaza Teoreme 3.18 imamo da je $(\beta_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell_1 = c_0^{\beta} = c^{\beta}$, pa je zato $(\beta_k)_{k=0}^{\infty} \in cs$ i važi

$$\xi \cdot \beta + \sum_{k=0}^{\infty} (x - \xi)\beta_k = \left(\beta - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\right) \xi + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k.$$

Dalje, na osnovu (3.16) iz dokaza Teoreme 3.18, imamo

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = \lim_{n\to\infty} B_n x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k \text{ za svako } x \in c_0. \tag{3.26}$$

Uzmimo sada $x \in c \setminus c_0$. Tada je $\xi = \lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$, pa za $x^{(0)} = x - \xi \cdot e$, na osnovu (3.26) i (3.21) dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_n L_n(x) &= \xi \cdot \lim_{n\to\infty} L_n(e) + \lim_{n\to\infty} L_n(x^{(0)}) = \xi \cdot \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k^{(0)} \\ &= \xi \cdot \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - \xi) = \left(\beta - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\right) \xi + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k.\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali i (3.23). □

Kao posledicu Teoreme 3.19, dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 3.20. *Neka je $A \in (c, c)$ i $L_A(x) = Ax$ za svako $x \in X$. Tada imamo:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \text{ postoji za svako } k = 0, 1, \ldots, \tag{3.27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \alpha \tag{3.28}$$

i

$$\|L_A\| = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty. \tag{3.29}$$

Važi još i sledeće:

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \xi \cdot \alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x_k - \xi) = \xi \left(\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ za svako } x \in c. \tag{3.30}$$

Dokaz. Uzimajući $b_{n,-1} = 0$ za $n = 0, 1, \dots$ i $b_{nk} = a_{nk}$ za svako $n, k = 0, 1, \dots,$ dokaz je direktna posledica prethodne teoreme. □

Primenimo dalje Hausdorfovu meru nekompaktnosti na operatore iz $\mathcal{B}(c)$.

Teorema 3.21. *Za $L \in \mathcal{B}(c)$ važi sledeće:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} &\left(\left| b_{n,-1} - \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} - \beta_k| \right) \\ &\le \|L\|_{\chi} \le \limsup_{n\to\infty} \left(\left| b_{n,-1} - \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} - \beta_k| \right), \end{aligned} \tag{3.31}$$

pri čemu je $b_{nk} = b_k^{(n)}$ a $b_k^{(n)}$ definisano u (3.24) za $n = 0, 1, \dots; k = -1, 0, 1 \dots$; za β i β_k $(k = 0, 1, \dots)$ uzimamo veličine date u (3.21) i (3.20).

Dokaz. Neka je $L \in \mathcal{B}(c)$. Na osnovu Teoreme 3.19, operator L se može zadati pomoću matrice $B = (b_{nk})_{n=0,k=-1}^{\infty}$. Stavimo da je $Q^{(r)} = (I - P_r) \circ L$ za svako $r = -1, 0, 1, \dots$ pri čemu je $P_r : c \to c$ projektor na linealu skupa $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, \dots e^{(r)}\}$. Jasno da je $Q^{(r)} \in \mathcal{B}(c)$ za svako r, i na osnovu Teoreme 3.19 postoji matrica $C = (c_{nk})_{n=0,k=-1}^{\infty}$ takva da je

$$Q_n^{(r)}(x) = \big(Q^{(r)}(x)\big) = c_{n,-1}\xi + \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x_k \text{ za svako } x \in c \text{ i svako } n = 0, 1, \dots,$$

gde je $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$;
Imamo još:

$$c_{nk} = \begin{cases} Q_n^{(r)}(e^{(k)}) & (k \geq 0) \\ Q_n^{(r)}(e) - \sum\limits_{j=0}^{\infty} Q_n^{(r)}(e^{(j)}) & (k = -1) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

i

$$\|Q^{(r)}\| = \sup_n \sum_{k=-1}^{\infty} |c_{nk}|. \tag{3.32}$$

Stavljajući da je $\eta(x) = \lim\limits_{\ell\to\infty} L_\ell(x)$ i imajući u vidu da je

$$L(x) = \eta(x) \cdot e + \sum_{m=0}^{\infty} (L_m(x) - \eta(x)) e^{(m)},$$

dobijamo

$$Q^{(r)}(x) = (I - P_r)(L(x)) = \sum_{m=r+1}^{\infty} (L_m(x) - \eta(x)) e^{(m)} \text{ za svako } r. \tag{3.33}$$

Uzmimo $k \geq 0$. Na osnovu (3.33) je

$$c_{nk} = Q_n^{(r)}(e^{(k)}) = \sum_{m=r+1}^{\infty} \left(L_m(e^{(k)}) - \eta(e^{(k)})\right) e_n^{(m)} = \begin{cases} 0 & (n \leq r) \\ L_n(e^{(k)}) - \eta(e^{(k)}) & (n \geq r + 1). \end{cases}$$

Kako je $L_n(e^{(k)}) = b_{nk}$ $(n, k = 0, 1, \dots)$, na osnovu (3.24) i $\eta(e^{(k)}) = \lim_{\ell\to\infty} L_\ell(e^{(k)}) = \lim_{\ell\to\infty} b_{\ell k} = \beta_k$ za svako k, dobijamo koristeći (3.20) sledeće $c_{nk} = 0$ za $n \leq r$ i $c_{nk} = b_{nk} - \beta_k$ za $n \geq r + 1$.
Ukoliko je $k = -1$, tada je

$$c_{n,-1} = Q_n^{(r)}(e) - \sum_{j=0}^{\infty} Q_n^{(r)}(e^{(j)}) = Q_n^{(r)}(e) - \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj};$$

Na osnovu (3.33) sledi

$$Q_n^{(r)}(e) = \sum_{m=r+1}^{\infty} \left(L_m(e) - \eta(e)\right) e_n^{(m)} = \begin{cases} 0 & (n \leq r) \\ L_n(e) - \eta(e) & (n \geq r + 1) \end{cases}$$

pa dalje uz (3.19) i (3.21) proizilazi

$$L_n(e) = b_{n,-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \text{ i } \eta(e) = \beta.$$

Iz svega navedenog sledi da je

$$c_{n,-1} = b_{n,-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty}(b_{nk} - \beta_k) - \beta = b_{n,-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k - \beta \text{ za } n \geq r+1$$

i $c_{n,-1} = 0$ za $n \leq r$. Konačno, na osnovu (3.32) imamo

$$\|Q^{(r)}\| = \sup_{n \geq r+1} \left(\left| b_{n,-1} - \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} - \beta_k| \right).$$

Kako je $\limsup_{r\to\infty} \|I - P_r\| = 2$, sledi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \limsup_{r\to\infty} \|Q^{(r)}\| &= \frac{1}{2} \limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{n \geq r+1} \left(\left| b_{n,-1} - \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} - \beta_k| \right) \right) \\ &\leq \|L\|_\chi \leq \limsup_{r\to\infty} \left(\sup_{n \geq r+1} \left(\left| b_{n,-1} - \beta + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} - \beta_k| \right) \right), \end{aligned}$$

a zadnje jasno implicira (3.31). □

Posledica 3.22. *Ako je $A \in (c, c)$ i $L_A(x) = Ax$ za svako $x \in c$, tada važi*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} & \left(\left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k - \alpha \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - \alpha_k| \right) \\ &\leq \|L_A\|_\chi \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k - \alpha \right| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - \alpha_k| \right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

gde je

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ za } k = 0, 1, \ldots \text{ i } \alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}.$$

Dokaz. Uzimajući $b_{n,-1} = 0$ za $n = 0, 1, \ldots$ i $b_{nk} = a_{nk}$ za svako $n, k = 0, 1, \ldots,$ dokaz je direktna posledica Teoreme 3.21. □

3.2. Norme nekih matričnih transformacija

Na početku našeg istraživanja, u Teoremi 1.30, videli smo da se svakoj matrici $A \in (X, Y)$ može pridružiti ograničeni linearni operator $L_A \in B(X, Y)$ takav da je $Ax = L_A x$ za svako $x \in X$. Ovde ćemo dati nekoliko rezultata koji se odnose na normu operatora zadatih pomoću beskonačnih matrica.

Ukoliko je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor nizova, pisaćemo

$$\|a\|_X^* = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right| \right\}.$$

Uzimajući za X proizvoljan FK prostor nizova i $a \in X^\beta$, izraz na desnoj strani postoji i konačan je.

Neka je dalje $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ beskonačna matrica sa vrstama A_n $(n = 0, 1, \dots)$, i N konačan podskup u $I\!N_0$. Rezultati koji slede su bitni za naš dalji rad sa matričnim domenima.

Teorema 3.23. *Neka je X proizvoljan BK prostor.*

a) Ako je $A \in (X, Y)$, pri čemu je Y bilo koji od prostora c_0, c ili ℓ_∞, tada:

$$\|L_A\| = \|A\|^*_{(X,\ell_\infty)} = \sup_n \|A_n\|_X^* \text{ (Teorema 1.30).} \tag{3.35}$$

b) Imamo da je $A \in (X, \ell_1)$ ako i samo ako je

$$\|A\|^*_{(X,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset I\!N_0 \\ N \, konačan}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|_X^* < \infty \text{ ([**28**, Satz 1]);} \tag{3.36}$$

Dalje, ako je $A \in (X, \ell_1)$, važi sledeće:

$$\|A\|^*_{(X,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset I\!N_0 \\ N \, konačan}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|_X^* \leq \|L_A\| \leq 4 \cdot \|A\|^*_{(X,\ell_1)}. \tag{3.37}$$

Napomena 3.24. *Jasno da u slučaju kada je* $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty), c_0$ *ili* c, *umesto norme* $\|\cdot\|_X^*$ *u (3.35) i (3.37) u prethodnoj teoremi, koristimo normu* $\|\cdot\|_\infty$ *za* $p = 1$, $\|\cdot\|_q$ *gde je* $q = p/(p-1)$ *u slučaju* $1 < p < \infty$, *ili* $\|\cdot\|_1$ *za* $p = \infty$ *i* $X = c_0, c$.

Označimo sa $T = (t_{nk})_{n,k=0}^\infty$ trougaonu matricu, sa S njen inverz i $R = S^t$ transponovanu matricu matrice S. Nadalje ćemo koristiti oznake kao u Teoremi 2.10 i Napomeni 2.11, odnosno sa $\hat{A} = (\hat{a}_{nk})_{n,k=0}^\infty$ i $W^{(A_n)} = (w_{mk}^{(A_n)})_{m,k=0}^\infty$ $(n = 0, 1, \dots)$ označavaćemo matrice koje se javljaju u karakterizaciji matričnih transformacija iz (X_T, Y) i čiji elementi su definisani sa:

$$\hat{a}_{nk} = R_k A_n = \sum_{j=k}^\infty s_{jk} a_{nj} \text{ i } w_{mk}^{(A_n)} = \begin{cases} \sum_{j=m}^\infty s_{jk} a_{nj} & (0 \leq k \leq m) \\ 0 & (k > m), \end{cases}$$

a sa $\gamma = (\gamma_n)_{n=0}^\infty$ označićemo niz koji potiče iz uslova da je $A_n \in (c_T)^\beta$ a definisan je sa:

$$\gamma_n = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^m w_{mk}^{(A_n)} \text{ za } n = 0, 1, \dots .$$

Dalje, sa $A_n = (a_{nk})_{k=0}^\infty$ i $A^k = (a_{nk})_{n=0}^\infty$ obeležavaćemo redom nizove u n–tom redu i k–toj koloni matrice $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$. Za proizvoljan konačan podskup N skupa $I\!N_0$ pisaćemo $b^{(N)} = \sum_{n \in N} A_n$, odnosno, $b^{(N)} = (b_k^{(N)})_{k=0}^\infty$ je niz definisan sa: $b_k^{(N)} = \sum_{n \in N} a_{nk}$ $(k = 0, 1, \dots)$.

Najpre ćemo posmatrati matrične transformacije oblika (X_T, Y), gde je X neki od prostora c_0 ili ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ a prostor Y je c_0, c, ℓ_∞ ili ℓ_1. Za ovu klasu transformacija izračunaćemo normu operatora L_A odredjenog beskonačnom matricom $A \in (X_T, Y)$.

Teorema 3.25. *Neka je* $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ili* $X = c_0$ *i neka je* $q = p/(p-1)$ *za* $1 < p < \infty$.

a) Neka je $Y = c_0, c, \ell_\infty$. Ako je $A \in (X_T, Y)$, tada je:

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \begin{cases} \sup_n \|\hat{A}_n\|_1 = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| & (X = c_0, \ell_\infty) \\ \sup_n \|\hat{A}_n\|_q = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} & (X = \ell_p \text{ za } 1 < p < \infty) \\ \sup_n \|\hat{A}_n\|_\infty = \sup_{n,k} |\hat{a}_{nk}| & (X = \ell_1). \end{cases}$$

Važi sledeće:

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \|L_A\|. \tag{3.38}$$

b) Neka je $Y = \ell_1$. Ako je $A \in (X_T, Y)$, tada je

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \begin{cases} \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N \text{ konačan}}} \|\hat{b}^{(N)}\|_1 = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N \text{ konačan}}} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\sum_{n \in N} \hat{a}_{nk}\right| & (X = c_0, \ell_\infty) \\ \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N \text{ konačan}}} \|\hat{b}^{(N)}\|_q = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N \text{ konačan}}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\sum_{n \in N} \hat{a}_{nk}\right|^q\right)^{1/q} & (X = \ell_p, p \neq 1, \infty) \\ \sup_k \|\hat{A}^k\|_1 = \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| & (X = \ell_1). \end{cases}$$

Za $X = \ell_1$ važi (3.38), dok u ostalim slučajevima imamo:

$$\|A\|_{(X_T,Y)} \le \|L_A\| \le 4 \cdot \|A\|_{(X_T,Y)}. \tag{3.39}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in (X_T, Y)$.
Kako je prostor X ili BK prostor sa osobinom AK ili $X = \ell_\infty$, u oba slučaja, na osnovu Teoreme 2.10 i Napomene 2.11 a) iz uslova $A \in (X_T, Y)$ dobijamo da je $\hat{A} \in (X, Y)$, pa na osnovu Teoreme 2.12 proizilazi

$$\|L_A\| = \|L_{\hat{A}}\|. \tag{3.40}$$

a) Ukoliko je $Y = c_0, c, \ell_\infty$ zaključujemo na osnovu (3.35) i Napomene 1.28 da važi sledeće

$$\|L_{\hat{A}}\| = \sup_n \|\hat{A}\|^*_{(X,\ell_\infty)} = \|A\|_{(X_T,Y)}.$$

Sada (3.38) sledi iz (3.40).

b) Neka je $Y = \ell_1$. Ukoliko je $X = \ell_p$ $(1 < p \leq \infty)$ ili $X = c_0$, dokaz se izvodi na isti način kao u a), s tim što se umesto (3.35) u Teoremi 3.23 primenjuju (3.36) i (3.37).

Na kraju, ostaje da dokažemo i slučaj kada je $X = \ell_1$. I ovde je $\hat{A} \in (\ell_1, \ell_1)$, i važi (3.40). Pošto je $L_{\hat{A}} \in \mathcal{B}(\ell_1, \ell_1)$, imamo za svako $x \in \ell_1$ za koje je $\|x\|_1 = 1$ sledeće:

$$\begin{aligned}\|L_{\hat{A}}(x)\|_1 = \|\hat{A}x\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{A}_n x| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk} x_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|\right) \\ &\leq \left(\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|\right) \|x\|_1 = \sup_k \|\hat{A}^k\|_1 = \|A\|_{((\ell_1)_T,\ell_1)},\end{aligned}$$

pa je otuda

$$\|L_{\hat{A}}\| \leq \|A\|_{((\ell_1)_T,\ell_1)}. \tag{3.41}$$

Dalje imamo da je

$$\|L_{\hat{A}}(e^{(k)})\|_1 = \|\hat{A}e^{(k)}\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \leq \|L_{\hat{A}}\| \text{ za svako } k,$$

pa sledi

$$\|A\|_{((\ell_1)_T,\ell_1)} = \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \leq \|L_{\hat{A}}\|. \tag{3.42}$$

Konačno, (3.38) proizilazi iz (3.40), (3.41) i (3.42). □

Prethodnom teoremom nismo obuhvatili situaciju kada je $X = c$. Naredni rezultat odnosi se na normu operatora iz prostora c_T u neki od prostora c_0, c, ℓ_∞ i ℓ_1.

Teorema 3.26. *a) Ako je $A \in (c_T, Y)$, pri čemu je Y neki od prostora c_0, c ili ℓ_∞, tada važi*

$$\|L_A\| = \|A\|_{(c_T,\infty)} = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n| \right). \tag{3.43}$$

b) Ako je $A \in (c_T, \ell_1)$, tada je:

$$\|A\|_{(c_T,1)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N \, konačan}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \hat{a}_{nk} \right| + \left| \sum_{n \in N} \gamma_n \right| \right) \leq \|L_A\| \leq 4 \cdot \|A\|_{(c_T,1)}. \tag{3.44}$$

Dokaz. Radi kraćeg obeležavanja stavimo $L = L_A$.

a) Pretpostavimo da je Y bilo koji od prostora c_0, c ili ℓ_∞. Kako je c_T BK prostor, to imamo na osnovu Teoreme 3.23 a) da je

$$\|L\| = \sup_n \|A_n\|^*_{c_T}. \tag{3.45}$$

Dalje, $A \in (c_T, Y)$ povlači $\hat{A} \in (c_0, Y)$ i $\hat{A}e - (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$ na osnovu (2.11) i (2.12) u Napomeni 1.28 b). Na osnovu Teorema 1.37 c) i 1.38 c) i d), dobijamo da je zbog $\hat{A} \in (c_0, Y)$ ispunjeno

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| < \infty,$$

a iz $\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty} \in Y \subset \ell_\infty$ ((2.13) u Napomeni 1.28 b)), proizilazi

$$\sup_n |\gamma_n| \leq \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk} - \gamma_n \right| + \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| < \infty,$$

odnosno, $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_\infty$. Dakle, izraz na desnoj strani u (3.43) je dobro definisan i konačan. Na kraju, iz uslova da je $A_n \in (c_T)^\beta$ za $n = 0, 1, \ldots$, a koristeći (2.8) iz Napomene 2.9 b), dobijamo sledeće:

$$\|A_n\|^*_{c_T} = \|RA_n\|_1 + |\gamma_n| = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n| \text{ za svako } n = 0, 1, \ldots. \tag{3.46}$$

Jasno da se (3.43) dobija iz (3.45) i (3.46).

b) Uzmimo sada de je $Y = \ell_1$. Pošto je c_T BK prostor, sledi iz (3.37) u Teoremi 3.23

$$\|A\|_{(c_T,1)} = \sup_{\substack{N\subset\mathbb{N}_0\\ N\text{konačan}}} \left\|\sum_{n\in N} A_n\right\|^*_{c_T} \leq \|L\| \leq 4\cdot\|A\|_{(c_T,1)}. \tag{3.47}$$

Označimo sa N konačan podskup skupa IN_0, i definišimo niz $b^{(N)}$, na način koji smo već imali napred, odnosno, $\hat{b}^{(N)} = \sum_{n\in N}\hat{A}_n$. Kako je $A_n \in (c_T)^\beta$ za svako n, to red R_kA_n, a samim tim i $R_kb^{(N)}$ konvergira za svako k, pa dobijamo

$$\begin{aligned} R_kb^{(N)} &= \sum_{j=k}^\infty s_{jk}b_j^{(N)} = \sum_{j=k}^\infty s_{jk}\sum_{n\in N} a_{nj} = \sum_{n\in N}\sum_{j=k}^\infty s_{jk}a_{nj}\\ &= \sum_{n\in N} R_kA_n = \sum_{n\in N}\hat{a}_{nk} \text{ za svako } k, \end{aligned}$$

odnosno

$$Rb^{(N)} = \hat{b}^{(N)}, \tag{3.48}$$

i

$$w_{mk}^{(b^{(N)})} = \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^\infty s_{jk}b_j^{(N)} = \sum\limits_{n\in N}\left(\sum\limits_{j=m}^\infty s_{jk}a_{nj}\right) & (0\leq k\leq m)\\ 0 & (k>m)\end{cases} \quad (m=0,1,\dots),$$

odnosno, $w_{mk}^{(b^{(N)})} = \sum_{n\in N} w_{mk}^{(A_n)}$ za svako n i k, i

$$\beta^{(N)} = \lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(b^{(N)})} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n\in N} w_{mk}^{(A_n)} = \sum_{n\in N}\gamma_n. \tag{3.49}$$

Iz $A\in(c_T,\ell_\infty)$ sledi da je $\hat{A}\in(c_0,\ell_1)$ i $\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}\in\ell_1$ na osnovu (2.11) i (2.13) iz Napomene 1.28 b). Dalje, iz $\hat{A}\in(c_0,\ell_1)$ dobijamo na osnovu Teoreme 1.42 i (3.48)

$$M_1 = \sup_{\substack{N\subset\mathbb{N}_0\\ N\text{konačan}}}\sum_{k=0}^\infty\left|\sum_{n\in N}\hat{a}_{nk}\right| = \sup_{\substack{N\subset\mathbb{N}_0\\ N\text{konačan}}}\|Rb^{(N)}\|_1 = \sup_{\substack{N\subset\mathbb{N}_0\\ N\text{konačan}}}\|\hat{b}^{(N)}\|_1 < \infty,$$

a iz $\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$ i (3.49), stavljajući $M_2 = \|\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}\|_1$, imamo

$$\begin{aligned}\left|\beta^{(N)}\right| &= \left|\sum_{n\in N}\gamma_n\right| \le \left|\sum_{n\in N}\left(\hat{A}_n e - \gamma_n\right)\right| + \left|\sum_{n\in N}\hat{A}_n e\right| \\ &\le M_2 + \left|\sum_{n\in N}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{a}_{nk}\right| \le M_2 + \|\hat{b}^{(N)}\|_1 \le M_1 + M_2 < \infty.\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\|A\|_{(c_T,1)}$ dobro definisana i konačna. Konačno, uslov $A_n \in (c_T)^{\beta}$ za svako n implicira uslov $b^{(N)} \in (c_T)^{\beta}$ za svaki konačan podskup N skupa IN_0, pa koristeći (2.8) u Napomeni 2.9 b), zatim (3.48) i (3.49), dobijamo

$$\|b^{(N)}\|_{c_T}^{*} = \|Rb^{(N)}\|_1 + |\beta^{(N)}| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\hat{a}_{nk}\right| + \left|\sum_{n\in N}\gamma_n\right|$$

Sada (3.44) jasno sledi iz (3.47). $\square$

3.3. Hausdorfova mera nekompaktnosti operatora L_A na matričnim domenima trougaonih matrica u klasičnim prostorima nizova

Primenjujuići rezultate dobijene u prethodnoj sekciji, sada ćemo pronaći Hausdorfovu meru nekompaktnosti neprekidnih linearnih operatora na matričnim domenima trougaonih matrica u klasičnim prostorima nizova.

Sekciju započinjemo posmatrajući operatore $L_A \in ((\ell_p)_T, Y)$ i $L_A \in ((c_0)_T, Y)$ pri čemu je $Y = c_0, c, \ell_1$.

Posledica 3.27. *Neka je $1 \le p \le \infty$ i $q = \infty$ za $p = 1$, zatim, $q = p/(p-1)$ za $1 < p < \infty$ i $q = 1$ za $p = \infty$.*

a) Ako je $A \in ((\ell_p)_T, c_0)$ $(1 \le p \le \infty)$ ili $A \in ((c_0)_T, c_0)$, tada je

(3.50)

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left\|\hat{A}_n\right\|_q\right) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty}\left(\sup\limits_{n\ge r, k\ge 0}|\hat{a}_{nk}|\right) & (p=1) \\ \lim\limits_{r\to\infty}\left(\sup\limits_{n\ge r}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q\right)^{1/q}\right) & (1<p<\infty) \\ \lim\limits_{r\to\infty}\left(\sup\limits_{n\ge r}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right)\right) & (p=\infty \text{ or } X = c_0). \end{cases}$$

b) Označimo sa N_r ($r \in I\!N_0$) podskup skupa $I\!N_0$ sa elementima većim ili jednakim r. Ako je $A \in ((\ell_p)_T, \ell_1)$ $(1 < p \leq \infty)$ ili $A \in ((c_0)_T, \ell_1)$, važi sledeće:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\, konačan}}\left\|\sum_{n\in N_r}\hat{A}_n\right\|_q\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq 4\cdot\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\, konačan}}\left\|\sum_{n\in N_r}\hat{A}_n\right\|_q\right); \tag{3.51}$$

ukoliko je $A \in ((\ell_1)_T, \ell_1)$, tada je

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_k\left(\sum_{n=r}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right)\right). \tag{3.52}$$

c) Ako je $A \in ((\ell_p)_T, c)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ili $A \in ((c_0)_T, c)$, tada je

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left\|\hat{A}_n - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\right\|_q\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \tag{3.53}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left\|\hat{A}_n - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\right\|_q\right) \text{ gde je } \hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk} \ (k = 0, 1, \ldots).$$

DOKAZ. a) Dokaz sledi iz Teoreme 2.10 (i Napomene 2.11 a) za $X = \ell_\infty$), 3.13 a), 3.15 i 3.25 a).

b) Slično kao u a), dokaz proizilazi iz Teoreme 2.10 (ili Npomene 2.11 a) u slučaju $X = \ell_\infty$), 3.13 b), 3.15 i 3.25 a).

c) Dokaz sledi iz Teoreme 2.10 (ili Napomene 2.11 a) kada je $X = \ell_\infty$), 3.18 i 3.25 a). □

Ostaje još da primenimo Hausdorfovu meru nekompaktnosti na operator L_A kada je $A \in (c_T, c)$, (c_T, c_0), (c_T, ℓ_1).

Teorema 3.28. *a) Neka je $A \in (c_T, c)$,*

$$\hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk} \text{ za } k = 0, 1, \ldots, \tag{3.54}$$

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(A_n)} \text{ za } n = 0, 1 \ldots \tag{3.55}$$

i

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{a}_{nk} - \gamma_n\right). \tag{3.56}$$

Tada imamo:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}-\hat{\alpha}_k| + \left|\beta-\gamma_n-\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\alpha}_k\right|\right)\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \tag{3.57}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}-\hat{\alpha}_k| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}\beta-\gamma_n-\hat{\alpha}_k\right|\right)\right).$$

b) Neka je $A \in (c_T, c_0)$. Važi sledeće:

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right)\right). \tag{3.58}$$

c) Neka je $A \in (c_T, \ell_1)$ i označimo sa N_r proizvoljan podskup skupa $I\!N_0$ sa elementima koji su veći ili jednaki r $(r \geq 0)$. Tada važi:

$$\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\,konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_r}\hat{a}_{nk}\right| + \left|\sum_{n\in N_r}\gamma_n\right|\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \tag{3.59}$$

$$4\cdot\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\,konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_r}\hat{a}_{nk}\right| + \left|\sum_{n\in N_r}\gamma_n\right|\right).$$

Dokaz. a) Pretpostavimo da je $A \in (c_T, c)$. Na osnovu (2.11) i (2.12) iz Napomene 1.28, dobijamo da je $\hat{A} \in (c_0, c)$, $W^{(A_n)} \in (c, c)$ za svako n i $\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty} \in c$ pri čemu su kompleksni brojevi γ_n granične vrednosti iz (3.55). Dalje, neka je dato $z \in c_T$ i $\xi_T = \lim_{k\to\infty} T_k z$. Tada je na osnovu (2.13) u Napomeni 1.28, ispunjeno sledeće:

$$Az = \hat{A}(Tz) - \xi_T(\gamma_n)_{n=0}^{\infty} = \hat{A}(Tz - \xi_T e) + \xi_T\left(\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}\right). \tag{3.60}$$

Sada, iz $\hat{A} \in (c_0, c)$ i $Tz - \xi_T e \in c_0$ dobijamo koristeći (3.16) iz Teoreme 3.18 sledeće:

$$\hat{\eta}_0 = \lim_{n\to\infty} \hat{A}_n(Tz - \xi_T e) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(T_k z - \xi_T) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(T_k z) - \xi_T \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k,$$

gde su kompleksni brojevi $\hat{\alpha}_k$ granične vrednosti iz (3.55). Takodje, iz $\hat{A}e - (\gamma_n)_{n=0}^{\infty} \in c$ proizilazi da granična vrednost β iz (3.56) postoji i ispunjeno je:

$$\hat{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(T_k z) + \xi_T \left(\beta - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k\right).$$

Na osnovu (3.60) se dalje dobija $y_n = \hat{A}_n(Tz) - \xi_T \gamma_n$ za svako n, pa zato, za $n \geq r - 1$ imamo:

$$\begin{aligned} y_n - \hat{\eta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk}(T_k z) - \xi_T \gamma_n - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(T_k z) + \xi_T \left(\beta - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k(T_k z) + \xi_T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k - \beta - \gamma_n\right). \end{aligned}$$

Konačno, kako je $\|z\|_{c_T} = \|Tz\|_c$, dobijamo na osnovu (3.43)

$$\sup_{z\in \bar{B}_Z} \|(I - P_{r-1})\,(Az)\| = \sup_{n\geq r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k)| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k - \beta - \gamma_n\right|\right).$$

Iz svega ovoga proizilazi (3.57).

b) Neka je $A \in (c_T, c_0)$. Kao u dokazu pod a), imamo da je $\hat{a}_k = 0$ za svako k, $\beta = 0$ i $y_n = \hat{A}_n(Tz)$ $(n = 0, 1, \dots)$ za svako $z \in c_T$. Stoga sledi

$$\sup_{z\in \bar{B}_Z} \|(I - P_{r-1})(Az)\| = \sup_{n\geq r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right), \tag{3.61}$$

pa jasno dobijamo i (3.58).

c) U slučaju kada je $A \in (c_T, \ell_1)$, istim postupkom kao u dokazu pod b), koristeći (3.44), dobijamo da sledi (3.59). $\square$

3.4. Neke klase kompaktnih operatora na prostorima $a_c^r(\triangle)$, $a_0^r(\triangle)$, $a_\infty^r(\triangle)$

U sekciji 2.1. definisali smo najpre nove prostore nizova $a_c^r(\triangle)$, $a_0^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$ $(0 < r < 1)$ a zatim su predmet našeg istraživanja bile matrične transformacije izmedju ovako definisanih prostora nizova i nekih klasičnih prostora nizova. Karakterizacija ovih matričnih transformacija svodila se na nalaženje potrebnih i dovoljnih uslova da beskonačna matrica A bude element klase (X, Y), pri čemu je prostor X jedan od prostora $a_c^r(\triangle)$, $a_0^r(\triangle)$ i $a_\infty^r(\triangle)$ $(0 < r < 1)$ a za prostor Y uzimamo c_0, c, ℓ_∞, ℓ_p, bv^p $(1 \leq p < \infty)$. U ovoj sekciji izučavaćemo podklasu $K(X, Y)$ kompaktnih linearnih operatora, odnosno, naći ćemo potrebne i dovoljne uslove da operator L_A, koji je odredjen matricom $A \in (X, Y)$, bude kompaktan operator. Za nalaženje ovih uslova koristićemo Hausdorfovu meru nekompaktnosti.

Ukoliko je $A \in (X, Y)$ a prostori X i Y kao što smo već pomenuli, imamo sledeće:

$$\hat{a}_{nk} = R_k A_n = (k+1)\left(\frac{a_{nk}}{1+r^k} + \left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\right) \quad \text{za svako } n, k = 0, 1, \ldots. \tag{3.62}$$

i

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(\frac{1}{1+r^k} - \frac{1}{1+r^{k+1}}\right)\sum_{j=m}^{\infty} a_{nj} + a_{nm}\frac{m+1}{1+r^{m+1}}\right) \quad \text{za svako } n = 0, 1, \ldots. \tag{3.63}$$

Ako je $B = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ beskonačna matrica i m nenegativan ceo broj, koristićemo oznaku $B^{[m]} = (b_{nk}^{[m]})_{n,k=0}^{\infty}$ za matricu definisanu na sledeći način: $b_{nk}^{[m]} = 0$ za $n < m$ i $b_{nk}^{[m]} = b_{nk}$ za $n \geq m$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Teorema 3.29. *Neka je $X = a_0^r(\Delta)$ ili $X = a_\infty^r(\Delta)$, $0 < r < 1$ i $\hat{a}_{nk}$ definisano u (3.62).*

a) Ako je $A \in (X, c_0)$, tada imamo:

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]}\|_{(X,\infty)} = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \right) \right). \tag{3.64}$$

b) Ako je $A \in (X, c)$, važi sledeće:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]} - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\|_{(X,\infty)} = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| \right) \right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]} - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\|_{(X,\infty)} \text{ gde je } \hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty} \hat{a}_{nk} \ (k = 0, 1, \dots). \tag{3.65}$$

c) Ako je $A \in (X, \ell_\infty)$, tada je:

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]}\|_{(X,\infty)}. \tag{3.66}$$

Dokaz. Dokazi delova a) i b) slede direktno iz Posledice 3.27, i to redom iz delova a) i c).

c) Primetimo najpre da granica u (3.66) postoji. Dalje, označimo sa $\bar{B}$ skup $\bar{B} = \{x \in \ell_\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$. Na osnovu Teoreme 3.15 je $\|L_A\|_\chi = \chi(L_A(\bar{B}))$. Neka je $P_m : \ell_\infty \to \ell_\infty$ $(m = 0, 1, \dots)$ projektor definisana sa $P_m(x) = (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, 0 \dots)$ za $x = (x_k)_k \in \ell_\infty$. Kako je $L_A(\bar{B}) \subset P_m(L_A(\bar{B})) + (I - P_m)(L_A(\bar{B}))$, primenjujući osobine mere χ, dobijamo

$$\chi(L_A(\bar{B})) \leq \chi(P_m(L_A(\bar{B})) + \chi((I - P_m)(L_A(\bar{B})) = \chi((I - P_m)(L_A(\bar{B})) \leq \sup_{x\in\bar{B}} \|(I - P_m)(L_A(x))\|.$$

Kako važi da je $A^{[m]} \in (X, \ell_\infty)$, to Teoremu 3.25 a) možemo primeniti na matricu $A^{[m]}$, pa dobijamo

$$\sup_{x\in\bar{B}} \|(I - P_m)(Ax)\| = \|L_{A^{[m]}}\| = \|A^{[m]}\|_{(X,\infty)}.$$

Jasno da je $\|L_A\|_\chi \geq 0$, a na osnovu poslednjeg je i $\|L_A\|_\chi \leq \|A^{[m]}\|_{(X,\infty)}$, pa dobijamo (3.66). $\square$

Teorema 3.30. *Neka je* $0 < r < 1$ *i* $\hat{a}_{nk}$ *i* γ_n *definisani redom u (3.62) i (3.63).*
a) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), c_0)$*, tada imamo:*

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right)\right). \tag{3.67}$$

b) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), c)$ *i* β *definisano sa*

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{a}_{nk} - \gamma_n\right),$$

tada važi sledeće:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| + \left|\beta - \gamma_n - \sum_{k=0}^{\infty}\hat{\alpha}_k\right|\right)\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \tag{3.68}$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}\beta - \gamma_n - \hat{\alpha}_k\right|\right)\right)$$

gde je $\hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk}$ $(k = 0, 1, \dots)$.

c) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), \ell_\infty)$*, tada je:*

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right)\right). \tag{3.69}$$

Dokaz. Delovi a) i b) slede direktno iz Teoreme 3.28 , redom iz b) i a).

Dokaz za c) se izvodi na isti način kao i dokaz pod c) u Teoremi 3.29. □

Sledeći rezultat proizilazi neposredno iz prethodnih teorema i osobine Hausdorfove mere nekompaktnosti.

Posledica 3.31. *Neka je* $X = a_0^r(\Delta)$ *ili* $X = a_\infty^r(\Delta)$, $0 < r < \infty$ *i oznake iste kao u Teoremi 3.29.*
a) Ako je $A \in (X, c_0)$*, tada* L_A *je kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{m\to\infty}\|\hat{A}^{[m]}\|_{(X,\infty)} = \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right)\right) = 0. \tag{3.70}$$

b) Ako je $A \in (X, c)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]} - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^\infty\|_{(X,\infty)} = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} \left(\sum_{k=0}^\infty |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| \right) \right) = 0. \tag{3.71}$$

c) Ako je $A \in (X, \ell_\infty)$, tada L_A je kompaktan ako je ispunjen uslov (3.70).

Sledeći primer govori o tome da ekvivalencija ne važi u delu c) Posledice 3.31, odnosno da postoji operator L_A takav da je kompaktan a da je $\lim_{m\to\infty} \|A^{[m]}\|_{(X,\infty)} \neq 0$.

Primer 3.32. Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$ beskonačna matrica takva da je $a_{n0} = 1$ i $a_{nk} = 0$ za $k \geq 1$ $(n = 0, 1, \dots)$. Jasno da je $Ax = x_0 e$ za svako $x = (x_k)_{k=0}^\infty \in \omega$, pa sledi da je operator L_A kompaktan i $A \in (\omega, \ell_\infty)$, a samim tim važi i $A \in (X, \ell_\infty)$. Medjutim, imamo da je $\lim_{m\to\infty} \|\hat{A}^{[m]}\|_{(X,\infty)} = 1/2$, pa time pokazujemo da ne važi ekvivalncija u prethodnom rezultatu.

Posledica 3.33. *Neka je $0 < r < 1$ i oznake iste kao u Teoremi 3.30.*
a) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), c_0)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} \left(\sum_{k=0}^\infty |\hat{a}_{nk}| + |\gamma_n| \right) \right) = 0. \tag{3.72}$$

b) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), c)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} \left(\sum_{k=0}^\infty |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| + \left| \sum_{k=0}^\infty \beta - \gamma_n - \hat{\alpha}_k \right| \right) \right) = 0. \tag{3.73}$$

c) Ako je $A \in (a_\infty^r(\Delta), \ell_\infty)$, tada L_A je kompaktan ako je ispunjen uslov (3.72).

Jasno da je naredni rezultat direktna posledica Posledice 3.27 b), Teoreme 3.28 i osobina mere χ.

Posledica 3.34. *Neka je $0 < r < 1$ i N_m $(m \in IN_0)$ proizvoljan podskup skupa IN_0 sa elementima većim ili jednakim m.*
a) Ako je $X = a_0^r(\Delta)$ ili $X = a_\infty^r(\Delta)$ i $A \in (X, \ell_1)$, tada L_A je kompaktna ako i samo

ako je

$$(3.74)\quad \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_m\subset I\!N_0\\ N_m\, konačan}}\left\|\sum_{n\in N_m}\hat{A}_n\right\|_1\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_m\subset I\!N_0\\ N_m\, konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_m}\hat{a}_{nk}\right|\right)\right)=0.$$

b) Ako je $A\in(a_c^r(\Delta),\ell_1)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$(3.75)\qquad \lim_{m\to\infty}\sup_{\substack{N_m\subset I\!N_0\\ N_m\, konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_m}\hat{a}_{nk}\right|+\left|\sum_{n\in N_m}\gamma_n\right|\right)=0.$$

Na kraju sekcije, daćemo još jedan rezultat dobijen na osnovu rezultata iz Posledice 3.34 i Teoreme 3.17.

Posledica 3.35. *Neka je $0<r<1$ i N_m $(m\in I\!N_0)$ proizvoljan podskup skupa $I\!N_0$ sa elementima većim ili jednakim m.*
a) Ako je $X=a_0^r(\Delta)$ ili $X=a_\infty^r(\Delta)$ i $A\in(X,bv)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$(3.76)\quad \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_m\subset I\!N_0\\ N_m\, konačan}}\left\|\sum_{n\in N_m}(\hat{A}_n-\hat{A}_{n-1})\right\|_1\right)=$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_m\subset I\!N_0\\ N_m\, konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_m}(\hat{a}_{nk}-\hat{a}_{n-1,k})\right|\right)\right)=0.$$

b) Ako je $A \in (a_c^r(\Delta), bv)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_m\subset \mathbb{N}_0\\ N_m konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_m}(\hat{a}_{nk}-\hat{a}_{n-1,k})\right|+\left|\sum_{n\in N_m}(\gamma_n-\gamma_{n-1})\right|\right)\right)=0. \tag{3.77}$$

3.5. Mere nekompaktnosti i transformacije na prostorima $s_\alpha^{(c)}(\triangle^m)$, $s_\alpha^0(\triangle^m)$, $s_\alpha(\triangle^m)$

Kao i u prethodnoj sekciji, i ovde ćemo nastaviti sa nalaženjem potrebnih i dovoljnih uslova za kompaktnost operatora L_A, odredjenog bskonačnom matricom $A \in (X, Y)$. Ovde ćemo za prostor X uzeti jedan od prostora uvedenih u Sekciji 2.3., odnosno $s_\alpha^{(c)}(\triangle^m)$, $s_\alpha^0(\triangle^m)$ ili $s_\alpha(\triangle^m)$, dok će prostor Y biti neki od prostora c_0, c, ℓ_∞, ℓ_1 .

Slično kao u prethodnoj sekciji, stavimo:

$$\widetilde{a}_{nk} = R_k A_n = \sum_{j=k}^{\infty}\alpha_k\binom{m+j-k-1}{j-k}a_{nj}, \tag{3.78}$$

$$\widetilde{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\widetilde{a}_{nk}\ (k=0,1,\dots) \tag{3.79}$$

Na osnovu (2.84) stavimo da je

$$\gamma_n = \lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=0}^{\ell} w_{\ell,k}^{(A_n)} = \lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=0}^{\ell}\alpha_k\left(\sum_{j=\ell}^{\infty}\binom{n+j-k-1}{j-k}\right)\ \text{za } n=0,1,\dots \tag{3.80}$$

i neka je

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a}_{nk}-\gamma_n\right). \tag{3.81}$$

Sada, kao u Teoremi 3.29 stavljajući umesto $\hat{A}$ i $\hat{\alpha}_k$ redom $\widetilde{A}$ i $\widetilde{\alpha}_k$ definisanim pomoću (3.78) i (3.79), dobijamo rezultate na potpuno isti način. Tehnika dokazivanja kod narednih rezultata je potpuno ista kao u prethodnoj sekciji, pa zato ovde izostavljamo dokaze. Takodje, i ovde ćemo koristiti oznaku $A^{[r]} = (a_{nk}^{[r]})_{n,k=0}^{\infty}$, gde je r nenegativan ceo broj, za beskonačnu matricu definisanu na sledeći način: $a_{nk}^{[r]} = 0$ za $n < r$ i $a_{nk}^{[r]} = a_{nk}$ za $n \geq r$ $(k = 0, 1, \dots)$

Teorema 3.36. *Neka je $X = s_{\alpha}^{0}(\Delta^m)$ ili $X = s_{\alpha}(\Delta^m)$, $m \in IN_0$ i $\widetilde{a}_{nk}$ definisano u (3.78).*

a) Ako je $A \in (X, c_0)$, važi sledeće:

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty} \|\widetilde{A}^{[r]}\|_{(X,\infty)} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk}|\right)\right). \tag{3.82}$$

b) Neka je $A \in (X, c)$ i $\widetilde{\alpha}_k$ definisano u (3.79). Tada važi:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{r\to\infty}\|\widetilde{A}^{[r]} - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\|_{(X,\infty)} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk} - \widetilde{\alpha}_k|\right)\right) \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r\to\infty}\|\widetilde{A}^{[r]} - (\widetilde{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\|_{(X,\infty)}. \tag{3.83}$$

c) Ako je $A \in (X, \ell_\infty)$, važi sledeće:

$$0 \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r\to\infty}\|\widetilde{A}^{[r]}\|_{(X,\infty)}. \tag{3.84}$$

Na isti način kao u Teoremi 3.30 dobijamo naredne rezultate.

Teorema 3.37. *Let $m \in IN_0$ i $\widetilde{a}_{nk}$, $\widetilde{\alpha}_k$, γ_n i β definisani redom u (3.78), (3.79), (3.80) i (3.81).*

a) Ako je $A \in (s_{\alpha}^{(c)}(\Delta^m), c_0)$, tada važi:

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right)\right). \tag{3.85}$$

b) Ako je $A \in (s_{\alpha}^{(c)}(\Delta^m), c)$,važi sledeće:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk} - \widetilde{\alpha}_k| + \left|\beta - \gamma_n - \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{\alpha}_k\right|\right)\right) \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk} - \widetilde{\alpha}_k| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}\beta - \gamma_n - \widetilde{\alpha}_k\right|\right)\right). \tag{3.86}$$

c) Ako je $A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), \ell_\infty)$, *važi:*

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk}| + |\gamma_n|\right)\right). \tag{3.87}$$

Sada, na osnovu prethodnih teorema i osobina Hausdorfove mere nekompaktnosti, možemo kao posledice definisati potrebne i dovoljne uslove za kompaktnost operatora L_A.

Posledica 3.38. *Neka je X bilo koji od prostora $s_\alpha^0(\Delta^m)$ ili $s_\alpha(\Delta^m)$, $m \in I\!N_0$ i oznake iste kao u Teoremi 3.36.*
a) Ako je $A \in (X, c_0)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{r\to\infty}\|\widetilde{A}^{[r]}\|_{(X,\infty)} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk}|\right)\right) = 0. \tag{3.88}$$

b) Ako je $A \in (X, c)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{r\to\infty}\|\widetilde{A}^{[r]} - (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty}\|_{(X,\infty)} = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\widetilde{a}_{nk} - \widetilde{\alpha}_k|\right)\right) = 0. \tag{3.89}$$

c) Ako je $A \in (X, \ell_\infty)$, tada L_A je kompaktan ako je ispunjen uslov (3.88).

Posledica 3.39. *Neka je $m \in I\!N_0$ i N_r ($r \in I\!N_0$) proizvoljan podskup skupa $I\!N_0$ sa elementima većim ili jednakim r.*
a) Ako je X bilo koji od prostora $s_\alpha^0(\Delta^m)$ ili $s_\alpha(\Delta^m)$ i $A \in (X, \ell_1)$, tada L_A je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\, konačan}}\left\|\sum_{n\in N_r}\widetilde{A}_n\right\|_1\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{\substack{N_r\subset I\!N_0\\ N_r\, konačan}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N_r}\widetilde{a}_{nk}\right|\right)\right) = 0. \tag{3.90}$$

b) Ako je $A \in (s_\alpha^{(c)}(\Delta^m), \ell_1)$, *tada* L_A *je kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\substack{N_r \subset I\!N_0 \\ N_r \, konačan}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in N_r} \widetilde{a}_{nk} \right| + \left| \sum_{n \in N_r} \gamma_n \right| \right) = 0. \tag{3.91}$$

Literatura

[1] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, *Operator Theory, Advances and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.

[2] Aydin C., Başar F., Some new difference sequence spaces, *Appl.Math. and Comp.* **157** (2004), 677–693

[3] J. Banaś, K. Goebl, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **60** , Marcel Dekker, New York and Basel, 1980

[4] Cohen L.W., Dunford N., Transformations on Sequence Spaces, *Duke Math.J.*, **3**(1937), 689–701.

[5] G. Darbo, Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto, *Rend. Sem Mat. Univ. Padova* **24**, (1955), 84–92

[6] M.Et, On some topological properties of generalized difference sequence spaces, *Internal.J.Math. and Math.Sc.***24**(2000), No.11, 785–791

[7] Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их q-нормой, Уч. зап. Кишиневского гос. ун-та, 29, (1957), 29–36.

[8] Л. С. Гольденштейн, А. С. Маркус, О мере некомпактности ограниченных множеств и линейных операторов, В кн.: Исследование по алгебре и математическому анализу, Кишинев: Картя Молдавеняске, 1965, с. 45–54.

[9] Djolović I., Two ways to compactness, *FILOMAT* **17** (2003), 15–21

[10] Djolović I., Compact operators on the spaces $a_0^r(\triangle)$ and $a_c^r(\triangle)$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **318**(2006), No.2, 658–666

[11] Djolović I., On the space of bounded Euler difference sequences and some classes of compact operators, *Applied Mathematics and Computation*, **182**(2006), No.2, 1803–1811

[12] Djolović (Stanojević) I., The Measure of Noncompactness of Matrix Transformations On the Spaces $c^p(\Lambda)$ and $c^p_\infty(\Lambda)$ $(1 < p < \infty)$, *Matematički vesnik* , **57** (2005), No.3-4, 65–78

[13] Djolović(Stanojević) I., *Prostori nizova, matrčne transformacije i mere nekompaktnosti*, magistraska teza, Niš, 2003.

[14] Hardy G.H., *Divergent Series*, Oxford University Press, 1973.

[15] V. Istrăţesku, On a measure of noncompactness, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumania (N. S.)* **16**, (1972), 195–197

[16] V. Istrăţesku, *Fixed Point Theory, ASn Introduction*, Reidel, Dordrecht, Boston, London, 1981

[17] A. M. Jarrah, E. Malkowsky, Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations, *FILOMAT* **17** (2003), 59–78

[18] Jovanović I., Rakočević V., Multipliers of mixed-norm sequence spaces and measures of noncompactness, *Publ.Inst.Math.*, Beograd, **56**(70)(1994), 61–68.

[19] Jovanović I., Rakočević V., Multipliers of mixed-norm sequence spaces and measures of noncompactness II, *Publ.Inst.Math.*, Beograd, **49**(1997), 197–206.

[20] K. Kuratowski, Sur les espaces complets, *Fund Math.* **15**, (1920), 301–309

[21] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Aplications*, John Wiley&Sons, New York, Santa Barbara, London, Sidney, Toronto, 1978.

[22] Maddox I.J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge, University Press, Cambridge, 1970.

[23] Maddox I.J., *Infinite Matrices of Operators*, Lecture Notes in Mathematics 786, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1980.

[24] Maddox I.J., Maps of Bounded sequences in a Banach Space, *American Mathematical Society*, (1977), 82–86

[25] B.de Malafosse, Rakočević V., Application of measure of noncompactness in operators on the spaces s_α, s_α^0, s_α^c, ℓ_α^p *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **323**(2006), No.1, 131–145

[26] B.de Malafosse, Malkowsky E., Rakočević V., Measure of noncompactness of operators and matrices on the spaces c and c_0, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2006), Art ID, 5 pp.

[27] Malkowsky, E., Rakočević V., The measure of noncompactness of linear operators between spaces of m^{th}-order difference sequences, *Studia Sci.Math.Hungar.* **35**(1999), 381–395

[28] Malkowsky, E., Klassen von Matrixabbildungen in paranormierten FK–Räumen, *Analysis* **7** (1987), 275–292

[29] E. Malkowsky, V. Rakočević, On matrix domains of triangles, *Applied Mathematics and Computations*, to appear

[30] Malkowsky E., Rakočević V., Živković S., Matrix Transformations between the sequence spaces $w_0^p(\Lambda)$, $v_0^p(\Lambda)$,$c_0^p(\Lambda)$ $(1 < p < \infty)$ and BK spaces, *Appl. and Comput.Math.***147**(2004), 377–396

[31] Malkowsky E., Rakočević V., Živković-Zlatanović S., Matrix Transformations between some sequence spaces and their measures of noncompactness, *Bulletin Academie Serbe des Sciences et des Arts*, **27**(2002), 33–46

[32] Malkowsky E., On Λ-strong convergence and boundedness with index $p \geq 1$, *Proceedings of the 10th Congress of Yugoslav Mathematicians*, Belgrade (2001), 251–260

[33] Malkowsky E., Rakočević V., The Measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces, *Acta Sci.Math.*(Szeged), **64**(1998), 151–170

[34] Malkowsky E., Rakočević V., The Measure of noncompactness of linear operators between spaces of strongly C_1 summable and bounded sequences, *Acta Math.Hungar.*, **89**(1-2)(2000), 29–45

[35] Malkowsky E., Rakočević V., Measure of noncompactness of linear operators between spaces of sequences that are (N, q) summable or bounded, *Czechoslovak Math.J.*, **51**(126)(2001), 505–522

[36] Malkowsky E., Savas E., The $\beta-$dualt of some matrix domains in FK spaces and matrix transformations, Novi Sad J. Math, **64**(2)(2003), 163–172

[37] Peyerimhoff A., *Lectures on Summability*, Lecture Notes in Mathematics 107, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1969.

[38] A. Peyerimhoff, Über ein Lemma vom Herrn Chow, *J. London Math. Soc.* **32** (1956), 33–36

[39] Malkowsky E., Rakočević V., An Introduction into the Theory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness, *Zbornik radova* **9(17)**, Matematički institut SANU, Belgrade, 2000, 143–234

[40] Rakočević V., *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[41] Rakočević V., Measures of noncompactness and some applications, *FILOMAT* **12** (1998), 87–120

[42] Ruckle W., *Sequence Spaces*, Pitman, London, 1981.

[43] Sargent W.L.C., On Compact Matrix Transformations Between Sectionally Bounded BK-spaces,*Journal London Math.Soc.*, **41**(1966), 79–87

[44] Schechter M., *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971.

[45] M. Stieglitz, H. Tietz, Matrixtransformationen von Folgenräumen, eine Ergebnisübersicht, *Math.Z.* **154**, (1977), 1–16

[46] Wilansky A., *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam, 1984.

[47] A.Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell Publishing Co., New York, Toronto, London, 1964.

[48] K.Zeller, W.Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer Verlag, Heidelberd-Berlin-New York, 1968.

Indeks simbola i pojmova

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Ивана Ђоловић
Ментор, МН:	Eberhard Malkowsky
Наслов рада, НР:	Карактеризација класа матричних трансформација и компактних линеарних оператора код матричних домена и примене
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публиковања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2007.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	101 стр., граф. прикази
Научна област, НО:	математика
Научна дисциплина, НД:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	функционална анализа
УДК	517.982.2 + 517.983
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	

Извод, **ИЗ**:	Ова теза састоји се из три главе: 1. Увод; 2. Матричне трансформације на матричним доменима; 3. Компактни оператори на матричним доменима. Прва глава садржи свеобухватан преглед различитих концепата и метода сумабилности и детаљан увод у основне резултате теорије ФК и БК простора. Ови резултати се даље користе у карактеризацији матричних трансформација између класичних простора низова. Друга глава посвећена је матричним доменима троугаоних матрица. Изучавају се њихове тополошке особине, одређује се Шаудерова база, бета дуали и даје се карактеризација матричних трансформација између њих. Дефинисани су и нови простори низова. Једну групу чине ограничени и конвергентни низови разлика дефинисани помоћу Ојлеровог метода реда *r*, док другу групу представљају ограничени и конвергентни простори низова *m*-тих разлика. За новодефинисане просторе изучавају се тополошке особине, Шаудерова база, бета дуали, као и матричне трансформације на њима. У трећој глави, најпре изучавамо норме неких линеарних оператора. Даље, помоћу Хаусдорфове мере некомпактности налазимо потребне и довољне услове за компактност линеарног оператора одређеног бесконачном матрицом . Специјално се изучавају класе компактних линеарних оператора међу просторима дефинисаним у претходној глави.
Датум прихватања теме, **ДП**:	**28.12.2006.**
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Ivana Đolović**
Mentor, **MN**:	**Eberhard Malkowsky**
Title, **TI**:	**Characterization of classes of matrix transformations and compact linear operators on matrix domains and applications**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2007**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**101p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis**
UC	**517.982.2 + 517.983**
Holding data, **HD**:	**Library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		The thesis contains three chapters: 1. Introduction; 2. Matrix transformations on matrix domains; 3. Compact operators on matrix domains. The first chapter contains a comprehensive survey of the various concepts and methods of summability and a detailed introduction to the fundamental results of the theory of FK and BK spaces. These results are applied to yield the characterisations of the classes of matrix transformations between the classical sequence spaces. The second chapter deals with matrix domains of triangles, establishes general results on their topological properties and Schauder bases, the determination of their beta-duals and the characterization of matrix transformations between them. The new sequence spaces are introduced of convergent and bounded difference sequences by the Euler method of order r and of bounded and convergent m-th order difference sequences. Their topological properties and bases are studied, the beta-duals are determined and matrix transformations between them are characterized. In the third chapter the operator norms of linear operators are studied. The Hausdorff measure of noncompactness is applied to give necessary and sufficient conditions for linear operators given by the infinite matrix to be compact. In particular, the characterization is established of the classes of compact linear operators between the sequence spaces of the second chapter.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		**28.12.2006.**
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац **Q4.09.13** - Издање 1