U n i v e r z i t e t u N i š u
Prirodno matematički fakultet
Odsek za matematiku i informatiku

Jelena Ignjatović

# FAZI RELACIJE, AUTOMATI I JEZICI

Doktorska disertacija

Niš, 2007.

U n i v e r z i t e t u N i š u
Prirodno matematički fakultet
Odsek za matematiku i informatiku

Jelena Ignjatović

# FAZI RELACIJE, AUTOMATI I JEZICI

Doktorska disertacija

Niš, 2007.

# Uvod

Fazi skupove je uveo L. A. Zadeh 1965. godine, kao metod za predstavaljanje nekih nepreciznih aspekata ljudskog znanja, koji se javljaju kada se radi sa problemima kod kojih izvor nepreciznosti jeste odsustvo precizno određenih kriterijuma pripadnosti nekoj klasi. Takvi problemi su veoma česti kada se radi sa klasama objekata koji se sreću u realnom, fizičkom svetu, zbog čega fazi skupovi imaju veoma značajne primene u mnogim oblastima. U istom radu, Zadeh je uveo pojam fazi relacije koji je kasnije razvijao u radu iz 1971. godine, gde je uveo i pojmove fazi ekvivalencije i fazi uređenja. Nakon toga, u velikom broju radova razmatrani su razni aspekti tih fazi relacija, tako da je danas teorija binarnih fazi relacija jedna od najznačajnih oblasti u teoriji fazi skupova. Omogućavajući veću slobodu u izražavanju jedva primetnih nijansi povezanosti, fazi relacije su našle prirodne primene u modeliranju raznih koncepata koji se javljaju u takozvanim "mekim" naukama kao što su psihologija, sociologija, lingvistika, kao i u mnogim drugim naučnim poljima.

Fazi ekvivalencije predstvaljaju uopštenje običnih relacija ekvivalencije, i kao takve su opsežno izučavane, kao način za merenje stepena sličnosti, ili nerazdvojivosti između objekata datog univerzuma razmatranja. Na taj način su se fazi ekvivalencije pokazale korisnim u raznim kontekstima, kao što su fazi kontrola, aproksimativno rezonovanje, klaster analiza, itd. Zavisno od autora i konteksta u kojima su se javljale one su dobijale različita imena, kao što su relacije sličnosti (originalni Zadehov naziv) ili operatori nerazdvojivosti (koji su koristili Valverde, Boixader, Jacas, Recasens i drugi). Fazi pristup je primenjen na teoriju jezika i automata još u prvom stadijumu razvoja teorije fazi skupova. Budući da preciznost formalnih jezika prilično odudara od nepreciznosti koje se javljaju u prirodnim jezicima, fazi jezici i njima odgovarajući fazi automati, su uvedeni kao način za prevazilaženje tih suprotnosti. Zahvaljući tome, fazi jezici i automati su dobili široku primenu u leksičkoj analizi, opisu prirodnih i programskih jezika, sistemima učenja, kontrolnih sistemima, neuronskim mrežama, kliničkom monitoringu, prepoznavanju šablona, bazama podataka i drugim oblastima. Poslednjih godina je postignut veoma veliki naučni napredak u teoriji fazi jezika i automata. Pomenućemo radove čiji su autori Belohlavek [4], Asveld [1], Y. M. Li i W. Pedrycz [81], [82], Z. Li, P. Li i Y.M. Li [84], S. Bozapalidis i O. Louscou - Bozapalidou [13] u kojima su dobijeni interesanti rezultati vezani za fazi automate, fazi jezike i gramatike nad raznim istinitosnim struktrurama. Međutim, mnoga pitanja koja se tiču fazi jezika i automata su ostala i dalje otvorena i predstavljaju važnu temu za dajlja istraživanja. Značajnu ulogu u proučanju klasičnih jezika i automata ima Myhill-Nerode-ova teorija, u kojoj se raspoznatljivost jezika konačnim automatima izučava pomoću desnih kongruencija i kongruencija na slobodnim monoidima, kao i preko drugih koncepata teorije polugrupa. U teoriji fazi jezika slične koncepte koristili su Shen [113], Malik, Mordeson i Sen [86], kao i Mordeson i Malik [89]. U pomenutim izvorima razmatrane su sintaksičke desne kongruencije i izvodi (razlomci) fazi jezika, ali nije razvijena kompletna teorija zasnovana na fazi desnim kongruencijama i fazi kongruencijama na slobodnim monoidima.

Glavni zadatak ove doktorske disertacije je izvođenje kompletne teorije Myhill-Nerodovog tipa za fazi jezike i automate, uz korišćenje fazi desnih kongruencija i fazi kongruencija na slobodnim monoidima, kao i raspoznavanje fazi jezika konačnim monoidima. Da bi se to uradilo, neophodno je prehodno doći do nekih novih rezultata koji se tiču fazi relacija, posebno fazi ekvivalencija, fazi preslikavanja i fazi homomorfizama, što je takođe urađeno u ovoj disertaciji.

U prvoj glavi disertacije uvedeni su osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova, fazi relacija, fazi automata i fazi jezika. Koncept fazi skupova koji je razmatran u ovoj disertaciji baziran je na kompletnim reziduiranim mrežama i znatno je opštiji od originalnog Zadehovog koncepta, gde se koristi realni, zatvoreni jedinični interval [0,1]. Kompletne rezidualne mreže su u ovoj disertaciji korištene kao osnovne istinitosne strukture, ali su razmatrani i neki specijalni slučajevi, kada istinitosne strukture jesu Heytingove algebre, ili jedinični interval [0,1] sa Lukasiwiczevom produkt ili Gödelovom trougaonom normom.

U drugoj glavi disertacije razmatrane su fazi ekvivalencije i njima indukovane fazi semi-particije i fazi particije. Date su razne karakterizacije klasa fazi ekvivalencija i fazi semi-particija nad kompletnim reziduiranim mrežama, kao nad linearno uređenim kompletnim Heyting-ovim algebrama. U ovom drugom slučaju, za fazi ekvivalenciju nad linearno uređenim kompletnim Heytingovim algebrama, daćemo algoritam za izračunavanje minimalne familije klasa ekvivalencije koje generišu tu ekvivalenciju. Rezultati iz ovog dela imaju ključnu ulogu u daljim istraživanjima.

U trećoj glavi disertacije su uvedeni i izučavani koncepti uniformne fazi relacije i fazi preslikavanja, kao i koncept fazi homomorfizma. Ovi koncepti srodni su konceptu fazi funkcije, koji je u raznim oblicima i sa raznih aspekata izučavan u radovima mnogih autora. U mnogim izvorima. fazi funkcija iz skupa A u skup B je definisana kao preslikavanje iz skupa A u fazi partitivni skup $\mathscr{F}(B)$ skupa B. Ovakve fazi funkcije su zapravo fazi relacije iz skupa A u skup B, tako da se tu radi o suviše širokom konceptu. Nešto uže koncepte fazi funkcija su u nizu radova izučavali F. Klawonn [71], M. Demirci [31], [33], [38], [37], [44] i Belohlavek [3] . Ti koncepti su bliski konceptu uniformne fazi relacije, ali se ipak značajno razlikuju, što je u disertaciji i pokazano. Ono što ni jedan raniji koncept fazi funkcije ili preslikavanja nije omogućio je uspostavljanje korespodencije između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija, kakva postoji između običnih (jasnih - crisp) preslikavanja i ekvivalencija. Upravo je to i jedan od glavnih rezultata ovog poglavlja.

Sa tim u vezi ovde je uveden i pojam fazi homomorfizma u četvrtom delu disertacije, uspostavljena je korespodencija između fazi homomorfizama i fazi kongruencija na algebrama i dokazane su odgovarajuće teoreme o homomorfizmu.

U poslednjoj, petoj glavi disertacije je data teorija Myhill-Nerodeovog tipa za fazi jezike i fazi automate. Najpre smo pokazali da se proizvoljnoj fazi desnoj kongruenciji na slobodnom monoidu može pridružiti fazi automat $\mathscr{A}$, a potom smo razmotrili pitanje raspoznavanja fazi jezika fazi automatima koji odgovoraju fazi desnim kongruencijama. Ovde su dobijeni izvesni rezultati koji kažu da je raspoznatiljivost fazi jezika fazi automatom koji odgovara fazi desnoj kongruenciji usko povezana sa ekstenzionalnošću fazi jezika u odnosu na tu fazi desnu kongruenciju. Inače ekstenzionalnost je veoma važan koncept teorije fazi relacija, sa veoma značajnim primenama u fazi kontroli, fazi klasterovanju i drugim oblastima. Takođe su uvedeni i pojmovi Nerodeove fazi desne kongruencije i Myhillove fazi kongruencije automata, i dokazano je da se svaki fazi jezik koji se može raspoznti automatom $\mathscr{A}$ može raspoznti i fazi automatom koji odgovara Nerodeovoj fazi desnoj kongruenciji tog automata, kao i determinističkim krisp automatom koji odgovara krisp delu Nerodeove fazi desne kongruencije. Na osnovu toga je dat postupak za determinizaciju fazi automata koji odgovara takozvanoj konstrukciji dostižnih podskupova koja se koristi pri determinizaciji nedeterminističkih krisp automata, i pokazano je da teorija Myhill-Nerodeovog tipa važi za fazi jezike i automate ako i samo ako se radi o fazi jezicima i automatima nad komplentom reziduiranom mrećom čiji reduk u odnosu na operacije superemuma i množenja jeste lokalno konačan poluprsten.

Na kraju, želim da se zahvalim mom mentoru, profesoru Miroslavu Ćiricu, na nesebičnoj pomoći i prijateljskoj podršci tokom izrade ove disertacije i van toga, profesoru Stojanu Bogdanoviću, na stalnoj motivaciji i inspiraciji za naučno-istraživački rad, svojoj porodici i svima koji su mi, prilikom izrade ove disertacije, pružili neophodno razumevanje.

# Sadržaj

# Glava 1

# Osnovni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi će biti uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati. Takođe će biti predstavljena neka osnovna svojstva uvedenih pojmova, koja će se nadalje koristiti.

Glava se sastoji od osam odeljaka. Najpre će u Odeljku 1.1 biti definisani neki pojmovi i oznake iz teorije skupova i neki tipovi relacija čije je poznavanje neophodno za dalji rad. Dobro poznavanje pojmova kao što su kongruencije, homomorfizmi, direktne sume, direktni proizvodi i drugi, neophodno je i u teoriji fazi relacija, fazi ekvivalencija, fazi preslikavanja i fazi automata. Zbog toga će ovi pojmovi biti definisani za proizvolje algebre,u Odeljku 1.2, pri čemu će biti date i neke opšte teoreme univerzalne algebre, koje će potom biti primenjivane i u fazi teoriji. Zatim ćemo, u Odeljku 1.3 uvesti neke pojmove teorije polugrupa i slobodnih polugrupa. Automati koji će biti definisani u Odeljku 1.4 i koji će se koristiti nadalje su automati bez izlaza. Zatim će biti navedene neke važne relacije na slobodnom monoidu, koje su vezane za automate i neophodne za fazi teoriju Myhill-Nerodeovog tipa. U Odeljku 1.5 će biti navedeni i pojmovi parcijalno uređenog skupa i mreže, koji su vezani za teoriju fazi skupova i poznavanje struktura istinitosnih vrednosti. Odeljak 1.6 će ukazati na opravdanost i značaj razvoja fazi teorija. Ovde će biti uveden pojam "reziduirana mreža" i biće date neke najznačajnije strukture istinitosnih vrednosti koje predstavljaju reziduirane mreže, dok će, u Odeljku 1.7 biti navedena osnovna svojstva ovih mreža. U Odeljku 1.8 biće uvedeni osnovni pojmovi vezani za fazi skupove i fazi relacije.

Pojmovi i oznake su uvedeni u skladu sa sledećim knjigama: S. Burris i H. P. Sankappanavar [14], iz oblasti univerzalnih algebri, S. Bogdanović i M. Ćirić [10], iz oblasti teorije polugrupa i M. Ćirić, T. Petković i S. Bogdanović

[22] iz teorije automata, R. Bělohlávek [3] iz oblasti reziduiranih mreža i teorije fazi skupova i relacija.

## 1.1. Skupovi i relacije

Pojmove i oznake iz Teorije skupova i Teorije brojeva, koji su nam potrebni u daljem radu koristićemo onako kako je to uobičajeno u ovim teorijama. Kardinalni broj skupa $A$ označavamo sa $|A|$. Familija skupova indeksirana skupom $I$ će biti označavana sa $A_i$, $i \in I$, ili $\{A_i \mid i \in I\}$ ili $\{A_i\}_{i\in I}$. Ako je indeksni skup konačan i ima $n$ elemenata, onda obično pišemo $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i familiju indeksiranu sa $I$ označavamo sa $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_n$ ili $\{A_i\}_{i=1}^n$.

Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ neprazna familija nepraznih skupova. Pod *Dekartovim proizvodom* te familije, koji označavamo sa $\prod_{i\in I} A_i$, podrazumevamo skup koji se sastoji iz svih preslikavanja

$$a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad a : i \mapsto a_i \in A_i,$$

za svako $i \in I$. Jednostavnosti radi, element $a \in A = \prod_{i\in I} A_i$ pišemo kao $(a_i)_{i\in I}$ ili kraće samo $(a_i)$, gde je $I$ dati indeksni skup, a $a_i$ je *$i$-ta koordinata* od $a$, za $i \in I$. Ako je indeksni skup $I$ konačan, direktan proizvod familije $\{A_i\}_{i=1}^n$ označavamo sa $\prod_{i=1}^n A_i$ ili $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. U tom slučaju proizvoljan element $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ nazivamo *uređenom $n$-torkom*, a ako je $n = 2$, onda govorimo o *uređenom paru*. Ako je $A_i = A$, za svako $i \in I$, tada direktan proizvod $\prod_{i\in I} A_i$ označavamo sa $A^I$ i nazivamo ga *direktnim stepenom* skupa $A$, a ako je $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, tada pišemo $\prod_{i=1}^n A_i = A^n$.

Neka je $A$ neprazan skup. Pod pojmom *binarne relacije* na $A$ podrazumevamo svaki podskup $\xi$ skupa $A^2$, pri čemu to može biti i prazan podskup. Budući da najčešće radimo sa binarnim relacijama, onda binarne relacije kraće nazivamo samo *relacijama*. Specijalne relacije na skupu $A$ koje su vredne pažnje su *prazna relacija*, sa uobičajenom oznakom $\varnothing$, *relacija jednakosti* $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$, koja se takođe naziva i *dijagonala* ili *identička relacija*, i *univerzalna* ili *puna relacija* $\nabla_A = A \times A$. U slučajevima kada ne postoji opasnost od zabune, mi izostavljamo indeks $A$ u $\Delta_A$ i $\nabla_A$ i pišemo prosto $\Delta$ i $\nabla$. Ako je $\xi$ relacija na $A$ i $(a, b) \in \xi$, tada kažemo da su *$a$ i $b$ u relaciji $\xi$* i obično izrazom "$a\xi b$" zamenjujemo izraz "$(a, b) \in \xi$". *Proizvod relacija $\xi, \eta$* na skupu $A$ je relacija $\xi \circ \eta$ definisana sa

$$\xi \circ \eta = \{(a, c) \in A \times A \mid (\exists b \in A)\, (a, b) \in \xi \text{ i } (b, c) \in \eta\}.$$

Za binarnu relaciju $\xi$ na $A$, relaciju $\xi^{-1} = \{(x,y) \,|\, (y,x) \in \xi\}$ nazivamo *inverznom* ili *obratnom relacijom* relacije $\xi$. Skupovi

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}\xi &= \{a \in A \,|\, (\exists b \in A)\,(a,b) \in \xi\} \\ \operatorname{ran}\xi &= \{b \in A \,|\, (\exists a \in A)\,(a,b) \in \xi\} \end{aligned}$$

nazivaju se *domen* i *rang* relacije $\xi$, tim redom. Jasno je da važi $\operatorname{Dom}(\xi^{-1}) = \operatorname{ran}\xi$ i $\operatorname{ran}(\xi^{-1}) = \operatorname{Dom}\xi$. Za $a \in A$ pišemo

$$a\xi = \{x \in A \,|\, (a,x) \in \xi\}, \qquad \xi a = \{x \in A \,|\, (x,a) \in \xi\}.$$

Za nas će ovde biti interesantne *relacije parcijalnog uređenja* i *relacije ekvivalencije*. Neka je $A$ neprazan skup. Relacija $\xi$ na skupu $A$ je:

- *refleksivna*, ako je $(a,a) \in \xi$, za svaki $a \in A$, tj. ako je $\Delta_A \subseteq \xi$;
- *simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ sledi $(b,a) \in \xi$, tj. ako je $\xi \subseteq \xi^{-1}$;
- *anti-simetrična*, ako za $a,b \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ i $(b,a) \in \xi$ sledi da je $a = b$, tj. ako je $\xi \cap \xi^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- *tranzitivna*, ako za $a,b,c \in A$, iz $(a,b) \in \xi$ i $(b,a) \in \xi$ sledi $(a,c) \in \xi$, tj. ako je $\xi \circ \xi \subseteq \xi$.

Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju *uređenjem* ili *relacijom poretka*. Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu relaciju nazivamo *relacijom ekvivalencije*, ili samo *ekvivalencijom*.

Sada ćemo se malo pozabaviti relacijama ekvivalencije. Neka je $\theta$ ekvivalencija na skupu $A$. Ako su elementi $a,b \in A$ u relaciji $\theta$, tj. $(a,b) \in \theta$, tada kažemo i da su oni *ekvivalentni*. Skup $a\theta$ nazivamo *klasom ekvivalencije* elementa $a \in A$ u odnosu na $\theta$, ili kraće $\theta$-*klasom* elementa $a$. Jasno je da je u tom slučaju $a \in a\theta$. Skup svih $\theta$-klasa označavaćemo sa $A/\theta$ ili $A_\theta$ i nazivaćemo ga *faktor skupom* skupa $A$, ili prosto *faktorom* skupa $A$, u odnosu na $\theta$. Preslikavanje

$$\theta^\natural : a \mapsto a\theta$$

koje slika skup $A$ na faktor skup $A_\theta$ nazivamo *prirodnim preslikavanjem* skupa $A$ određenim ekvivalencijom $\theta$. Sa druge strane, neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i $\phi : A \to B$. Relaciju

$$\ker\phi = \{(x,y) \in A \times A \,|\, \phi(x) = \phi(y)\}$$

na skupu $A$ nazivamo *jezgrom preslikavanja* $\phi$. Vezu između ekvivalencija i preslikavanja daje nam naredna teorema.

**Teorema 1.1.1.** *Neka je $A$ neprazan skup. Ako je $\phi$ preslikavanje skupa $A$ u skup $B$, tada je* $\ker\phi$ *ekvivalencija na $A$. Osim toga, za proizvoljnu ekvivalenciju $\theta$ na $A$ je* $\ker(\theta^\natural) = \theta$.

Neka je $\theta$ relacija ekvivalencije na skupu $A$. Podskup $H$ od $A$ nazivamo *puni presek* od $\theta$ ako $H$ sadrži bar po jedan element iz svake $\theta$-klase. Ako $H$ sadrži tačno jedan element iz svake $\theta$-klase, onda ga nazivamo *poprečni presek* (engl. cross-section).

Familiju $\{A_i \mid i \in I\}$ nepraznih podskupova skupa $A$ nazivamo *razbijanjem* ili *particijom* skupa $A$, ako je

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

i za proizvoljan par $i, j \in I$ važi

$$A_i = A_j \qquad \text{ili} \qquad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Vezu između particije skupa i njegovih relacija ekvivalencije daje nam naredna teorema.

**Teorema 1.1.2.** *Neka je familija $\varpi = \{A_i \mid i \in I\}$ particija skupa $A$. Tada relacija $\theta_\varpi$ na skupu $A$ definisana sa*

$$(a, b) \in \theta_\varpi \;\Leftrightarrow\; (\exists i \in I)\ a, b \in A_i, \qquad (a, b \in A)$$

*jeste relacija ekvivalencije na skupu $A$. Obratno, neka je $\theta$ relacija ekvivalencije na skupu $A$. Tada familija*

$$\varpi_\theta = \{a\theta \mid a \in A\}$$

*jeste razbijanje skupa $A$. Osim toga, preslikavanja*

$$\varpi \mapsto \theta_\varpi \qquad i \qquad \theta \mapsto \varpi_\theta$$

*su uzajamno inverzne bijekcije iz skupa svih razbijanja skupa $A$ na skup svih relacija ekvivalencije na skupu $A$, i obratno.*

## 1.2. Univerzalne algebre

Neka je $A$ neprazan skup. Skup uređenih $n$-torki, za $n \in \mathbb{N}$, označili smo sa $A^n$, i dodatno stavimo da je $A^0 = \{\emptyset\}$. Sada, za $n \in \mathbb{N}^0$, pod *$n$-arnom* *operacijom* na skupu $A$ podrazumevamo svako preslikavanje $f : A^n \to A$. U tom slučaju, broj $n$ se naziva *dužina* ili *arnost* operacije $f$.

*Tip algebri* ili *signatura* definiše se kao skup simbola $\tau$ sa svojstvom da je svakom simbolu $f \in \tau$ pridružen neki broj $n \in \mathbb{N}^0$ koji nazivamo *arnost* ili *dužina* simbola $f$. U tom slučaju se kaže da je $f$ *n-arni operacijski simbol*. Nularne operacijske simbole nazivamo *znacima konstanti*. Za broj $n \in \mathbb{N}^0$, skup svih $n$-arnih operacijskih simbola iz $\tau$ označavamo sa $\tau_n$. Pod *univerzalnom algebrom* ili samo *algebrom tipa* $\tau$ podrazumevamo uređeni par $(A, F)$, gde je $A$ neprazan skup koji zovemo *nosačem* te algebre i $F = \{f^A \mid f \in \tau\}$ je familija operacijskih simbola indeksirana skupom $\tau$, tako da je svakom $n$-arnom operacijskom simbolu $f \in \tau$ pridružena $n$-arna operacija $f^A$ na $A$ koju nazivamo *interpretacija simbola $f$ u algebri $A$*. Operacije $f^A$, $f \in \tau$ nazivaju se *fundamentalnim operacijama* pomenute algebre, a njihovom kompozicijom se dobijaju *izvedene operacije* te algebre. Ako se podrazumeva o kojoj je algebri reč, onda u oznaci $f^A$ izostavljamo gornji indeks. Bez opasnosti od zabune, univerzalnu algebru i njen nosač označavamo istim slovom. Algebre $A$ i $B$ su *istog tipa* ako im odgovaraju familije operacija iste arnosti. Ako sa $F_n$, $n \in \mathbb{N}^0$, označimo skup svih operacija iz $F$ koje su arnosti $n$, tada se skup $\mathscr{F}$ može predstaviti u obliku $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^0} F_n$. Algebra $A$ je *unarna algebra* ako je $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$.

Neka su algebre $A$ i $B$ istog tipa i neka je $B \subseteq A$. Podskup $B$ je *podalgebra* od $A$ ako je zatvoren za sve fundamentalne operacije algebre $A$, odnosno ako važe sledeći uslovi

(i) $f^A \in B$, za svaki $f \in \tau_0$,

(ii) za $f \in \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$, iz $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ sledi $f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$.

Za proizvoljan neprazan podskup $H$ algebre $A$ postoji najmanja podalgebra koja sadrži $H$. Kažemo da je to *podalgebra algebre $A$ generisana skupom $H$*, u oznaci $\langle H\rangle$. Za podalgebru generisanu jednoelementnim skupom kažemo da je *monogena*. Podskup $H \subseteq A$ takav da je $\langle H\rangle = A$ zovemo *generatorni skup* algebre $A$. Ako algebra $A$ ima konačan generatorni skup, onda kažemo da je ona *konačno generisana*.

Neka su $A$ i $B$ algebre istog tipa. Preslikavanje $\phi : A \to B$ je *homomorfizam* algebre $A$ u algebru $B$ ako važe sledeći uslovi:

(i) ako je $f \in \tau_0$, tada je $\phi(f^A) = f^B$,

(ii) ako je $f \in \tau_n$, za $n \in \mathbb{N}$, iz $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ sledi

$$\phi(f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^B(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)).$$

Ako je $\phi$ još i injektivno preslikavanje, onda kažemo da je *monomorfizam* (*potapanje*). Ako $\phi$ jeste surjektivno preslikavanje, kažemo da je *epimorfizam*, a za algebru $B$ kažemo da je *homomorfna slika* algebre $A$. Ako je $\phi$ bijekcija tada kažemo da je $\phi$ *izomorfizam*. Činjenicu da postoji izomorfizam algebri $A$ i $B$ označavamo sa $A \cong B$. U slučaju kada je $A = B$ homomorfizam $\phi$ nazivamo *endomorfizam*, a ako je još i izomorfizam, onda kažemo da je *automorfizam* algebre $A$.

Neka je $A$ algebra i $\theta$ binarna relacija na skupu $A$. Relacija $\theta$ je *kongruencija na algebri* $A$ ako je ekvivalencija i saglasna je sa operacijama na $A$, tj. za proizvoljne elemente $a_i, b_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i proizvoljnu operaciju $f \in \mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, iz $(a_i, b_i) \in \theta$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sledi $(f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \theta$. Jasno je da je presek proizvoljne familije kongruencija takođe kongruencija. Ako je $\rho$ binarna relacija na algebri $A$, tada je presek svih kongruencija koje sadrže $\rho$ najmanja kongruencija koja sadrži $\rho$ i zovemo je *kongruencija generisana* relacijom $\rho$.

Neka je $A$ algebra i $\theta$ kongruencija na $A$. Na skupu $A_\theta = \{a\theta \mid a \in A\}$ definišemo operaciju $f$, za $f \in \mathscr{F}_n$, sa

$$f^{A_\theta}(a_1\theta, a_2\theta, \ldots, a_n\theta) = f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n)\theta,$$

za proizvoljne $a_1\theta, \ldots a_n\theta \in A_\theta$. Na taj način $A_\theta$ postaje algebra tipa $\tau$ i nazivamo je *faktor* (*količnik*) *algebrom* algebre $A$. Neka je $A$ algebra i $\theta$ kongruencija algebre $A$. Preslikavanje $\phi : A \to A_\theta$ definisano sa $\phi(a) = a\theta$, za proizvoljno $a \in A$, je *prirodni epimorfizam*. Takođe, ako je $\psi : A \to B$ homomorfizam algebri $A$ i $B$, tada relaciju

$$\ker \psi = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid \psi(a_1) = \psi(a_2)\}$$

zovemo *jezgro homomorfizma* $\psi$.

**Teorema 1.2.1. (Teorema o homomorfizmu)** *Neka su $A$ i $B$ algebre i $\phi : A \to B$ epimorfizam. Tada je $\ker \phi$ kongruencija na algebri $A$ i algebra $A_{\ker \phi}$ je izomorfna algebri $B$.*

*Redukt* algebre $A$ tipa $\tau$ je algebra sa istim nosačem $A$ tipa $\tau'$, takva da je $\tau' \subset \tau$.

Napomenimo još jednom da su pojmovi i oznake dati u ovom odeljku u skladu sa knjigom S. Burrisa i H. P. Sankappanavara [14], pa za pojmove i oznake koji nisu ovde definisani upućujemo na pomenutu knjigu.

## 1.3. Polugrupe

Neka je na nepraznom skupu $S$ definisana binarna operacija $\cdot$ , tako da je zadovoljen uslov asocijativnosti, tj. važi

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{za sve } a, b, c \in S.$$

Tada je algebra $(S, \cdot)$ *polugrupa.* Imajući u vidu da na polugrupi važi uopšteni zakon asocijativnosti, tj. da raspored zagrada nije bitan, koristićemo konvenciju o brisanju zagrada.

Neprazan podskup $T$ polugrupe $S$ je *podpolugrupa* od $S$ ako je $T$ zatvoren za operaciju polugrupe $S$, tj. ako je $ab \in T$, za sve $a, b \in T$. Neposredno se proverava da neprazan presek proizvoljne familije podpolugrupa polugrupe $S$ jeste podpolugrupa od $S$. Prema tome, ako je $T$ neprazan podskup od $S$, tada presek svih podpolugrupa polugrupe $S$ jeste podpolugrupa od $S$, koju označavamo sa $\langle T \rangle$ i nazivamo je podpolugrupa od $S$ *generisana skupom* $T$.

Element $e$ polugrupe $S$ je *leva* (*desna*) *jedinica* ako važi $ea = a$ ($ae = a$), za svako $a \in S$. Element $e$ je *jedinica* polugrupe $S$ ako je leva i desna jedinica. Polugrupa sa jedinicom je *monoid*. Takođe se može dokazati da polugrupa ima jedinicu ako i samo ako ima levu i desnu jedinicu, kao i da ukoliko ima jedinicu, tada je ona jedinstvena.

Već smo uveli pojam kongruencije na algebri, ali ćemo kod polugrupa uvesti još nekoliko srodnih pojmova. Za relaciju $\xi$ na polugrupi $S$ kažemo da je *levo* (*desno*) *saglasna* ako za sve $a, b, x \in S$ iz $(a, b) \in \xi$ sledi $(xa, xb) \in \xi$ ($(ax, bx) \in \xi$). Levo (desno) saglasnu ekvivalenciju na polugrupi $S$ nazivamo *levom*(*desnom*)*kongruencijom* na $S$. *Kongruencijom* na $S$ nazivamo relaciju koja je istovremeno i leva i desna kongruencija na polugrupi $S$.

Neka je $X$ neprazan skup koji ćemo zvati *alfabet*, a njegove elemente *slovima*. Konačan niz $x_1 x_2 \cdots x_n$ elemenata alfabeta $X$ zovemo *reč* nad alfabetom $X$. Dve reči $x_1 x_2 \cdots x_n$ i $y_1 y_2 \cdots y_m$ su jednake ako je $n = m$ i $x_i = y_i$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. ako su jednake kao nizovi. Sa $X^+$ označavamo skup svih reči nad alfabetom $X$. Na skupu $X^+$ definišemo operaciju *dopisivanja* (*konkatenacije*) na sledeći način

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)(y_1 y_2 \cdots y_m) = x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_m.$$

Sa ovako definisanom operacijom $X^+$ je polugrupa, koju nazivamo *slobodna polugrupa nad alfabetom* $X$. Skup $X^* = X^+ \cup \{e\}$ sa množenjem definisanim sa

$$uv = \begin{cases} uv, & u, v \in X^+; \\ u, & u \in X^+,\ v = e; \\ v, & u = e,\ v \in X^+; \\ e, & u = v = e \end{cases}$$

jeste monoid koji označavamo sa $X^*$ i zovemo *slobodni monoid nad alfabetom* $X$. Jedinični element, u oznaci $e$, zovemo *prazna reč*.

Pod *jezikom* nad alfabetom $X$ podrazumevamo proizvoljan podskup slobodnog monoida $X^*$. Za reč $u$ alfabeta $X$ sa $|u|$ označavamo *dužinu reči* $u$, tj. broj slova alfabeta $X$ u zapisu reči $u$. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, sa $X^k$ označavamo skup svih reči iz $X^*$ dužine $k$, dok sa $X^{\geqslant k}$, odnosno $X^{\leqslant k}$, označavamo skup svih reči ulaznog alfabeta dužine najmanje, odnosno najviše, $k$.

*Polugrupovni identitet nad alfabetom* $X$ je par $(u, v) \in X^+ \times X^+$ koji obično zapisujemo kao $u = v$. Kada je jasno da mislimo na polugrupovni identitet obično kažemo samo *identitet*.

## 1.4. Automati

Pod *automatom bez izlaza* podrazumevamo trojku $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$, gde je $A$ *skup stanja*, $X$ je *ulazni alfabet* i $\delta : A \times X \to A$ jeste *funkcija prelaza*. Poznato je da se funkcija prelaza $\delta$ može produžiti do funkcije $\delta^* : A \times X^* \to A$ na sledeći način

$$\delta^*(a, e) = a$$

$$\delta^*(a, ux) = \delta(\delta^*(a, u), x), \quad \text{za } u \in X^*.$$

Jednostavnosti radi $\delta^*$ ćemo kraće označavati sa $\delta$. Kažemo da automat pod dejstvom ulazne reči $u \in X^*$ prelazi iz stanja $a \in A$ u stanje $\delta(a, u)$, ili kraće, u stanje $au$.

Uređena četvorka $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$ predstavlja inicijalni automat sa inicijalnim stanjem $a_0$. Sva stanja do kojih se može stići iz $a_0$ nazivaju se *dostižna stanja* automata $\mathscr{A}$. Automat čija su sva stanja dostižna naziva se *stablo*.

Poznato je da automati bez izlaza mogu biti tretirani kao unarne algebre čiji je skup operacijskih simbola indeksiran skupom $X$, tj. kao unarne algebre tipa $X$. Tada pojmovi kao što su: *kongruencija*, *homomorfizam*, *faktor automat*, *podautomat*, itd., imaju svoje uobičajeno algebarsko značenje.

U skladu sa algebarskim značenjem, za podskup $B$ automata $A$ kažemo da je *podautomat* od $A$ ako za $a \in A$ i $u \in X^*$, uslov da je $a \in B$ povlači $au \in B$.

Pomenimo da za jezik $L$ alfabeta $X$ kažemo da je *raspoznatljiv* automatom $A$, pomoću skupa $T \subseteq A$ ako važi

$$u \in L \quad \Leftrightarrow \quad a_0 u \in T.$$

Veoma važnu ulogu u algebarskoj teoriji automata igraju veze koje postoje između automata i desnih kongruencija i kongruencija na slobodnim polugrupama i monoidima. Zato ćemo se malo pozabaviti ovim relacijama.

Neka je dat automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ i stanje $a \in A$. Relacija $\nu_a$ na slobodnom monoidu $X^*$ definisana sa

$$(u, v) \in \nu_a \quad \Leftrightarrow \quad au = av$$

je desna kongriencija na $X^*$ i nazivamo je *Nerodeovom desnom kongruencijom* određenom stanjem $a$ automata $A$. Ako je $\mathscr{A}$ inicijalni automat sa inicijalnim stanjem $a_0$, tada $\nu_{a_0}$ nazivamo *Nerodeovom desnom kongruencijom automata* $\mathscr{A}$ i označavamo je sa $\nu_{\mathscr{A}}$.

Dalje, na $X^*$ možemo definisati relaciju $\mu_{\mathscr{A}}$ na sledeći način:

$$(u, v) \in \mu_{\mathscr{A}} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a \in A)\ au = av.$$

Ovako definisana relacija je kongruencija na $X^*$ i naziva se *Myhillova kongruencija* na $X^*$ automata $\mathscr{A}$. Primetimo da se relacija $\mu_{\mathscr{A}}$ može izraziti i sa:

$$\mu_{\mathscr{A}} = \bigcap_{a \in A} \nu_a.$$

Podsećamo da smo, za pojmove i oznake koji nisu ovde definisani uputili na knjigu M. Ćirića, T. Petković i S. Bogdanovića [22].

## 1.5. Uređeni skupovi i mreže

Refleksivnu, antisimetričnu i tranzitivnu relaciju na skupu $A$ nazivamo *parcijalnim uređenjem* na $A$, ili kraće samo *uređenjem* na $A$. Uređenja najčešće označavamo simbolom $\leqslant$. Par $(A, \leqslant)$ koji se sastoji od skupa $A$ i parcijalnog uređenja $\leqslant$ na njemu nazivamo *parcijalno uređenim skupom*, ili kraće samo *uređenim skupom*. Jednostavnosti radi, umesto "$(A, \leqslant)$ je uređen skup" govorićemo "$A$ je uređen skup", pri čemu ćemo podrazumevati da je uređenje na njemu označeno sa $\leqslant$. Ako je $\leqslant$ uređenje na skupu $A$, tada sa $<$ označavamo relaciju na $A$ definisanu sa

$$a < b \text{ ako i samo ako je } a \leqslant b \text{ i } a \neq b,$$

a sa $\geqslant$ i $>$ označavamo inverzne relacije relacija $\leqslant$ i $<$, tim redom. Uređenje $\leqslant$ na $A$ nazivamo *linearnim* ako za sve $a, b \in A$ važi $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, i u tom slučaju kažemo da je $A$ *linearno uređen skup* ili *lanac*.

Za preslikavanje $\phi$ koje slika uređen skup $A$ u uređen skup $B$ kažemo da je *izotono* ili *rastuće* ili da *očuvava uređenje* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Slično, za preslikavanje $\phi$ iz $A$ u $B$ kažemo da je *antitono* ili da je *opadajuće* ako za sve $a, b \in A$, iz $a \leqslant b$ sledi $\phi(b) \leqslant \phi(a)$. Za $\phi$ kažemo da je *izomorfizam uređenih skupova* $A$ i $B$, ili *uređajni izomorfizam* iz $A$ na $B$, ako je $\phi$ bijekcija iz $A$ na $B$ i $\phi$ i $\phi^{-1}$ su izotona preslikavanja.

Neka je $A$ uređen skup. Za element $a \in A$ kažemo da je

- *minimalan element* skupa $A$, ako u $A$ ne postoji element strogo manji od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $x \leqslant a$ sledi $x = a$;
- *maksimalan element* skupa $A$, ako u $A$ ne postoji element strogo veći od njega, tj. ako za $x \in A$, iz $a \leqslant x$ sledi $a = x$;
- *najmanji element* skupa $A$, ako je manji od svakog drugog elementa iz $A$, tj. ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in A$;
- *najveći element* skupa $A$, ako je veći od svakog drugog elementa iz $A$, tj. ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in A$.

Neka je $H$ neprazan podskup uređenog skupa $A$. Za element $a \in A$ kažemo da je

- *gornja granica* skupa $H$, ako je $x \leqslant a$, za svaki $x \in H$;
- *donja granica* skupa $H$, ako je $a \leqslant x$, za svaki $x \in H$;
- *najmanja gornja granica*, ili *supremum*, skupa $H$, ako je $a$ najmanji element skupa svih gornjih granica skupa $H$, tj. ako je $a$ gornja granica skupa $H$ i za svaku gornju granicu $b$ skupa $H$ važi $a \leqslant b$;
- *najveća donja granica*, ili *infimum*, skupa $H$, ako je $a$ najveći element skupa svih donjih granica skupa $H$, tj. ako je $a$ donja granica skupa $H$ i za svaku donju granicu $b$ skupa $H$ važi $b \leqslant a$.

Supremum skupa $H$, ako postoji, označavamo sa $\bigvee H$, a infimum, takođe ako postoji, sa $\bigwedge H$. Ukoliko je $H = \{x_i \,|\, i \in I\}$, tada umesto $\bigvee H$ i $\bigwedge H$ pišemo redom

$$\bigvee_{i \in I} x_i \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{i \in I} x_i.$$

Uređen skup čiji svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum nazivamo *mrežom*. Indukcijom se lako dokazuje da i svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum. Za beskonačne podskupove mreže to ne mora da važi. Ako je $L$ mreža, tada se na $L$ mogu definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ sa

$$\wedge : (a,b) \mapsto a \wedge b \qquad \text{i} \qquad \vee : (a,b) \mapsto a \vee b.$$

Po analogiji sa odgovarajućim operacijama na skupovima, operacije $\vee$ i $\wedge$ nazivaćemo, redom, *unijom* i *presekom*. Drugim rečima, govorićemo da je $\bigvee H$ *unija skupa* $H$ a $a \vee b$ je *unija elemenata* $a$ i $b$, i slično, da je $\bigwedge H$ *presek skupa* $H$, a $a \wedge b$ je *presek elemenata* $a$ i $b$. Koristeći operacije unije i preseka, mrežu možemo definisati i kao univerzalnu algebru sa dve binarne operacije koje zadovoljavaju nekoliko specijalnih uslova. Naime, neposredno se dokazuje sledeća teorema.

**Teorema 1.5.1.** *Ako je $L$ mreža, tada je $(L, \wedge, \vee)$ univerzalna algebra takva da za sve $x, y, z \in L$ važe sledeći uslovi:*

(L1) $x \wedge x = x,\ x \vee x = x$ *(idempotentnost);*
(L2) $x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x$ *(komutativnost);*
(L3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *(asocijativnost);*
(L4) $x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x$ *(apsorpcija).*

*Obratno, ako je $L$ algebra sa dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju uslove (L1)–(L4), tada je $L$ mreža, u odnosu na parcijalno uređenje $\leqslant$ definisano sa*

$$a \leqslant b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b = a \qquad (\textit{ili, ekvivalentno, } a \leqslant b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b).$$

Uslove (L1)–(L4) u Teoremi 1.5.1 nazivamo *aksiomama mreže*. Tretiranje mreže kao univerzalne algebre omogućava nam da kao i kod svake druge univerzalne algebre govorimo o *podmrežama*, kongruencijama, homomorfizmima, izomorfizmima, direktnim proizvodima mreža itd.

Neprazan podskup $X$ mreže $L$ naziva se *podmreža* mreže $L$ ako za svaka dva elementa $a, b \in X$ važi $a \wedge b \in X$ i $a \vee b \in X$.

Za mrežu $L$ i $a \in L$, podmreže

$$[a) = \{x \in L \mid a \leqslant x\} \qquad \text{i} \qquad (a] = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$$

su *poluotvoreni intervali* mreže $L$, a za $a, b \in L$ takve da je $a \leqslant b$, podmreže

$$(a,b) = \{x \in L \mid a < x < b\} \qquad \text{i} \qquad [a,b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

su *otvoreni interval* i *zatvoreni interval*, (ili *segment*) mreže $L$, tim redom.

Sistemi sa jednom binarnom idempotentnom, komutativnom i asocijativnom operacijom nazivaju se polumrežama. Ako neprazan skup $L$ zajedno sa proizvoljnim elementima $a, b \in L$ sadrži i $a \wedge b$, odnosno $a \vee b$ onda se $L$ naziva, redom $\wedge$-*polumrevža* ili *donja polumreža*, tj. $\vee$-*polumreža* ili *gornja polumreža*.

Neprazan podskup $J$ mreže $L$ naziva se *ideal* ako važi:

(a) za elemente $a \in J$ i $x \in L$ takve da je $x \leqslant a$ je $x \in J$;

(b) za dva elementa $a, b \in L$ je i $a \vee b \in J$.

Nije teško pokazati da je $J$ ideal mreže $L$ ako važi:

$$a \vee b \in J \text{ ako i samo ako i } a \in J \text{ i } b \in J.$$

Dualni pojam pojmu ideala u mreži je *dualni ideal*. Dakle, neprazan podskup $D$ mreže $L$ je dualni ideal ako važi:

(a) za elemente $a \in D$ i $x \in L$ takve da je $a \leqslant x$ je $x \in D$;

(b) za dva elementa $a, b \in L$ je $a \wedge b \in D$.

Neka je element $a \in L$. Primetimo da su, tada poluotvoreni intervali $(a]$ i $[a)$, redom ideal, odnosno dualni ideal mreže $L$ i nazivaju se *glavni ideal* generisan sa $a$ i *glavni dualni ideal* generisan sa $a$.

Najmanji element mreže $L$, ako takav postoji, nazivamo *nulom*, a najveći element, ukoliko postoji, nazivamo *jedinicom mreže* $L$. Nulu i jedinicu mreže obično označavamo sa 0 i 1, tim redom. Mrežu koja ima nulu i jedinicu nazivamo *ograničenom mrežom*. Ograničena mreža se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$ koje zadovoljavaju $(L1)$–$(L4)$, i nularnim operacijama (konstantama) 0 i 1 koje zadovoljavaju uslove

$(L5)$ $0 \wedge x = 0$ (ili, ekvivalentno, $0 \vee x = x$), za svaki $x \in L$;
$(L6)$ $1 \wedge x = x$ (ili, ekvivalentno, $1 \vee x = 1$), za svaki $x \in L$.

Nije teško pokazati da su na proizvoljnoj mreži $L$ sledeći uslovi ekvivalentni:

$(L7)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, za sve $x, y, z \in L$;
$(L7')$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, za sve $x, y, z \in L$.

Mrežu koja zadovoljava bilo koji od tih uslova nazivamo *distributivnom mrežom*.

Neka je $L$ ograničena mreža sa nulom 0 i jedinicom 1. Za element $y \in L$ kažemo da je *dopuna* (*komplement*) elementa $x \in L$ ako važi

$$x \wedge y = 0 \qquad \text{i} \qquad x \vee y = 1.$$

U tom slučaju je i $x$ dopuna za $y$, tj. relacija "biti dopuna" je simetrična. Ako je pri tome mreža $L$ još i distributivna, tada se lako dokazuje da svaki element $x \in L$ može imati najviše jednu dopunu, koju ćemo označavati sa $x'$.

Ograničenu distributivnu mrežu u kojoj svaki element ima dopunu nazivamo *Bulovom algebrom*. Preslikavanje $x \mapsto x'$ je unarna oparacija na $L$, i nazivamo je *operacijom dopune*. Bulova algebre se takođe može tretirati kao univerzalna algebra $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ sa binarnim operacijama $\wedge$ i $\vee$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0 i 1.

Kako smo napred napomenuli, svaki konačan podskup mreže ima supremum i infimum, ali to ne mora da važi za beskonačne podskupove. Stoga za mrežu u kojoj svaki neprazan podskup ima supremum i infimum nazivamo *potpunom* ili *kompletnom mrežom*. Jasno, svaka takva mreža je ograničena. Podskup $K$ potpune mreže $L$ je *potpuna podmreža* od $L$ ako se supremum i infumum (u $L$) svakog nepraznog podskupa od $K$ nalaze u $K$.

Podsetimo na neke važne primere mreža.

**Primer 1.5.1.** Označimo sa $\mathscr{E}(A)$ skup svih relacija ekvivalencije na nepraznom skupu $A$. Taj skup je parcijalno uređen inkluzijom relacija, i u odnosu na to parcijalno uređenje on je potpuna mreža. Naime, dok je operacija preseka na $\mathscr{E}(A)$ presek dve relacije, operacija unije je određena drugačije, jer skupovna unija dve ili više relacija ekvivalencije ne mora biti relacija ekvivalencije. Neka je $B$ proizvoljan neprazan podskup od $\mathscr{E}(A)$ i neka je $\langle B \rangle$ podpolugrupa polugrupe binarnih relacija na $A$ generisana sa $B$. Tada je $\bigvee B$ jednako skupovnoj uniji svih relacija iz $\langle B \rangle$. Nula i jedinica u $\mathscr{E}(A)$ su redom $\Delta_A$ i $\nabla_A$.

**Primer 1.5.2.** Neka je $A$ algebra tipa $\mathscr{F}$ i $\mathrm{Sub}(A)$ *skup svih podalgebri* algebre $A$, pri čemu smatramo da je za $\mathscr{F}_0 = \varnothing$ prazna podalgebra uključena u $\mathrm{Sub}(A)$. Tada skup $\mathrm{Sub}(A)$, parcijalno uređen skupovnom inkluzijom, čini potpunu mrežu u kojoj za proizvoljan skup $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ važi

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \qquad \text{i} \qquad \bigvee_{i \in I} A_i = \Big\langle \bigcup_{i \in I} A_i \Big\rangle.$$

Jedinica ove mreže je cela algebra $A$, a nula je prazna podalgebra, ukoliko je $\mathscr{F}_0 = \varnothing$, odnosno podalgebra generisana skupom svih konstanti, ukoliko je $\mathscr{F}_0 \neq \varnothing$. Mrežu $\mathrm{Sub}(A)$ nazivamo *mrežom podalgebri* algebre $A$.

**Primer 1.5.3.** Neka je dat*skup svih kongruencija* na algebri $A$ tipa $\mathscr{F}$. Tada on predstavlja kompletnu podmrežu mreže $\mathscr{E}(A)$ relacija ekvivalencije na $A$, sa istom nulom i jedinicom kao u $\mathscr{E}(A)$.

## 1.6. Reziduirane mreže

U relanom, fizičkom svetu, često se nailazi na klase objekata, kod kojih kriterijum pripadanja određenoj klasi nije precizno definisan. Zbog toga, osnovna ideja fazi skupova i fazi logike "napada" tradiciju u nauci, tzv. bivalentni način razmišljanja i rezonovanja, što je dovodi do formiranja novih modela stvarnosti. Zbog toga, struktura skupa istinitosnih vrednosti zahteva našu posebnu pažnju.

Pokazaćemo sada kako se prirodne, sigurne logičke pretpostavke reflektuju na odgovarajuće osobine strukture istinitosnih vrednosti. Približna ocena istine direktno vodi do pretpostavke da je skup istinitosnih vrednosti $\mathscr{L}$ parcijalno uređen (relacijom $\leqslant$) sa 0 i 1 kao najmanjim i najvećim elementom, respektivno. Ono što sigurno važi je, da za svake dve istinitosne vrednosti $a$ i $b$, postoji istinitosna vrednost veća od obe (može se uzeti 1). Na ovaj način dolazimo do zahteva za postojanjem supremuma (dualno infimuma) dvoelementnih podskupova u $\mathscr{L}$.

Označimo sa $\{\varphi_i \,|\, i \in I\}$ skup nekih datih pravila. Uopštenje klasičnog slučaja dvoelementne logike, dovodi do pretpostavke da je istinitosna vrednost izraza "postoji i tako da je $\varphi_i$" supremum svih istinitosnih vrednosti od $\varphi_i$, tj. $||$"postoji i tako da je $\varphi_i$"$|| = \bigvee_{i\in I} ||\varphi_i||$ ($||\varphi||$ je istinitosna vrednost od $\varphi$). Dakle, ako želimo da razvijemo ove egzistencijalne (i dualno, univerzalne) osobine, onda supremum ( i infimum) proizvoljnog podskupa od $\mathscr{L}$ postoje. Na ovaj način zaključujemo da je $\mathscr{L}$, u ovom slučaju, kompletna mreža. Dolazimo do pitanja operacija na $\mathscr{L}$ koje su modeli logičke povezanosti. Dalje je neophodno da istinitosna vrednost složene formule zavisi samo od istinitosne vrednosti njenih sastavnih delova. Počećemo sa konjunkcijom, koju ćemo označiti sa &. Operaciju koja joj odgovara označićemo sa $\otimes$, tj. $\otimes$ je binarna operacija na $\mathscr{L}$ i da bi ona izražavala operaciju koja odgovara klasičnoj konjnkciji zahtevamo da važi: $1 \otimes 1 = 1$; $1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0$. Ako želimo da istinitosna vrednost od $\varphi \& \psi$ bude ista kao istinitosna vrednost od $\psi \& \varphi$, dolazimo do zahteva da $\otimes$ bude komutativna operacija (tada je $||\varphi\&\psi|| = ||\varphi|| \otimes ||\psi||$ i $||\psi\&\varphi|| = ||\psi|| \otimes ||\varphi||$, pa uslov $||\varphi\&\psi|| = ||\psi\&\varphi||$ povlači $||\varphi|| \otimes ||\psi|| = ||\psi|| \otimes ||\varphi||$. Na sličan način, ako su istinitosne vrednosti za $\varphi\&(\psi\&\chi)$ i za $(\varphi\&\psi)\&\chi$ jednake, dolazimo do asocijativnosti operacije $\otimes$. Tako smo došli do pretpostavke da je $(L, \otimes, 1)$ komutativan monoid. Dalje, intuitivno zahtevamo da $\otimes$ bude neopadajuća operacija, tj. da iz $a_1 \leqslant a_2$ i $b_1 \leqslant b_2$ sledi $a_1 \otimes b_1 \leqslant a_2 \otimes b_2$, što znači da većim istinitosnim stepenima dva pravila odgovaraju veći istinitosni stepeni njihove konjunkcije.

Vraćamo se implikaciji. U klasičnoj logici konjunkcija i implikacija imaju važnu ulogu u formulaciji pravila zaključivanja koje se naziva *modus ponens*. Da podsetimo: ovo pravilo kaže da, ako važi $\varphi$ i važi $\varphi \Rightarrow \psi$, možemo zaključiti da važi $\psi$. Preformulisaćemo, sada ovo pravilo korišćenjem stepena istinitosnih vrednosti (opravdanosti). Rećićemo da $\varphi$ ima stepen opravdanosti 1, ako $\varphi$ važi i stepen opravdanosti 0 ako ne važi (u bivalentnoj logici nema drugih vrednosti). Prema refleksiji koju smo uveli ekvivalentna formulacija modus ponensa je sledeća: Ako je stepen opravdanosti za $\varphi$ najmanje $a$, a stepen opravdanosti za $\varphi \Rightarrow \psi$ najmanje $b$ $(a, b \in \{0, 1\})$, onda $\psi$ ima stepen opravdanosti najmanje $a \otimes b$. Ovo pravilo očuvava smisao da za formule $\varphi$ i $\psi$, takve da je $a \leqslant ||\varphi||$ i $b \leqslant ||\varphi \Rightarrow \psi||$ važi $a \otimes b \leqslant ||\psi||$. Znači da, kada se koristi modus ponens, stepen stvarne istine tvrđenja $\psi$ ne može biti manji od stepena koji dobijen zaključivanjem iz modus ponensa. Prema tome, uloga operacije $\otimes$ je da se dobije najbolja moguća procena za koju je uslov pravila zaključivanja očuvan. Sada ćemo sa $\rightarrow$ označiti binarnu operaciju na $\mathscr{L}$ koja odgovara implikaciji. Tada imamo sledeće: $a \leqslant ||\varphi||$ i $b \leqslant ||\varphi \Rightarrow \psi||$ povlači $a \otimes b \leqslant ||\psi||$, odnosno $a \leqslant ||\varphi||$ i $b \leqslant ||\varphi|| \rightarrow ||\psi||$ daje $a \otimes b \leqslant ||\psi||$. Sada posmatramo specijalan slučaj ove implikacije. Ako izaberemo vrednost $a = ||\varphi||$ i uvedemo oznaku $||\psi|| = c$ dobijamo sledeću implikaciju:

$$b \leqslant a \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad a \otimes b \leqslant c.$$

Drugi smer ove implikacije je najjači zaključak koji izvodimo iz modus ponensa. Kada je dato $a = ||\varphi||$ i istinitosna vrednost za $||\varphi \Rightarrow \psi||$ dobijamo donju granicu $a \otimes ||\varphi \Rightarrow \psi||$ za $||\psi|| = c$, tj. $a \otimes ||\varphi \Rightarrow \psi|| \leqslant c$. Kako je $a$ dato, ova vrednost zavisi samo od $||\varphi \Rightarrow \psi||$. Pošto je $\otimes$ neopadajuća operacija veća vrednost za $||\varphi \Rightarrow \psi||$ vodi do veće (ili bar jednake) vrednosti za $a \otimes ||\varphi \Rightarrow \psi||$. Sada, iz $||\varphi \Rightarrow \psi|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi|| = a \rightarrow c$ sledi da zahtev da je modus ponens što je moguće jači dovodi do najveće vrednosti donje granice za $c$. Ako sa $b$ označimo vrednost koja vodi do donje granice imamo da, kada je $a \otimes b \leqslant c$ važi $b \leqslant a \rightarrow c$. Tako dolazimo do *osobine adjunkcije*:

$$a \otimes b \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad b \leqslant a \rightarrow c.$$

Algebarska struktura koja zadovoljava sve prethodno navedene uslove naziva se *kompkletna reziduirana mreža*. Mada su logičke pretpostavke iz kojih su izvedeni algebarski uslovi relativno jednostavne one vode do veoma bogatih struktura. Na primer, možemo zahtevati da operacija $\otimes$ bude idempotentna, kada je $||\varphi \& \varphi|| = ||\varphi||$, tj. $x \otimes x = x$ i tada dobijamo MV-algebre (algebre Lukasiewicz logike) kao specijalan slučaj reziduiranih mreža itd. Uprkos tome što su reziduirane mreže veoma uopštene strukture, njihove su osobine dovoljno jake da dozvole proučavanje veoma važnih pitanja fazi relacijonih sistema i fazi relacionih modela. Zato ćemo u daljem radu, kao strukture istinitosnih vrednoste uzeti upravo reziduirane mreže. Daćemo sada njihovu algebarsku definiciju:

*Reziduirana mreža* je algebra $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ takva da

(L1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1,

(L2) $(L, \otimes, 1)$ je komutativan monoid sa jedinicom 1,

(L3) operacije $\otimes$ i $\rightarrow$ obrazuju *adjungovani par*, tj. oni zadovoljavaju *osobinu adjunkcije*: za sve $x, y, z \in L$,

$$x \otimes y \leqslant z \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y \rightarrow z. \tag{1.1}$$

Ako je, pored toga, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, onda se $\mathscr{L}$ naziva *kompletna reziduirana mreža*. Operacije $\otimes$ (*množenje*) and $\rightarrow$ (*rezidum*) predstavljaju modele konjunkcije i implikacije u odgovarajućoj logici, a supremum ($\bigvee$) i infimum ($\bigwedge$) su modeli univerzalnog i egzistencijalnog kvantifikatora, respektivno.

Na kompletnoj reziduiranoj mreži mogu se definisati i sledeće operacije:

$$\textit{birezidum (ili biimplikacija)}: \quad x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x), \tag{1.2}$$

$$\textit{negacija}: \quad \neg a = a \rightarrow 0, \tag{1.3}$$

$$n\text{--}\textit{ti stepen}: \quad a^0 = 1 \;\text{ i }\; a^{n+1} = a^n \otimes a. \tag{1.4}$$

Operacija biimplikacije predstavlja model jednakosti istinitosnih vrednosti, dok je negacija model komplementa za datu istinitosnu vrednost.

Najviše proučavan i primenjivan skup istinitosnih vrednosti je realan, jedinični interval $[0, 1]$ sa

$$x \wedge y = \min(x, y), \quad x \vee y = \max(x, y),$$

i sa tri važna para adjungovanih operacija:

*Łukasiewicz*eve operacije: $x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$,
$x \to y = \min(1 - x + y, 1)$,

*proizvod* (*Goguen*)ove operacije: $x \otimes y = x \cdot y$,
$x \to y = 1$ ako je $x \leqslant y$ i $= y/x$ u protivnom,

*Gödel*ove operacije: $x \otimes y = \min(x, y)$,
$x \to y = 1$ ako je $x \leqslant y$ i $= y$ u protivnom.

Drugi važan skup istinitosnih vrednosti je skup $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, gde je $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$, na kome su adjungovane operacije definisane sa

$$a_k \otimes a_l = a_{\max(k+l-n,0)}, \qquad a_k \to a_l = a_{\min(n-k+l,n)}.$$

Specijalan slučaj ovih poslednjih algebri je dvoelementna Bulova algebra, na kojoj je zasnovana klasična logika. Jedini adjungovan par operacija na dvoelementnoj Bulovoj algebri sastoji se samo od klasičnih operacija konjunkcije i implikacije.

Sve tri strukture: Łukasiewiczeva, proizvod i Gödelova struktura su reziduirane mreže indukovane takozvanim $t$-normama.

$t$-norma je binarna operacija na $[0, 1]$ koja je asocijativna, komutativna, monotona i za koju je 1 jedinični element, tj. $\otimes$ je preslikavanje $\otimes : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ koje zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{array}{rcl}
(x \otimes y) \otimes z & = & x \otimes (y \otimes z), \\
x \otimes y & = & y \otimes x \\
y_1 \leqslant y_2 & \Rightarrow & x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2, \\
x \otimes 1 & = & x.
\end{array}$$

Opštije, algebra $([0, 1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ je kompletna reziduirana mreža ako i samo ako je $\otimes$ levo-neprekidna t-norma
(tj. $\lim_{n\to\infty}(a_n \otimes b) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \otimes b$) i tada je rezidum definisan sa $x \to y = \bigvee\{u \in [0, 1] \mid u \otimes x \leqslant y\}$.

Navešćemo još neke važne istinitosne strukture, koje jesu reziduirane mreže, ali zadovoljavaju i neke dodatne uslove.

Reziduirana mreža $\mathscr{L}$ se naziva *Heytingova algebra* ako je $x \otimes y = x \wedge y$, za sve $x, y \in L$. Ako je, pored toga, $\mathscr{L}$ i kompletna mreža, onda je ona *kompletna Heytingova algebra*, a ako je parcijalno uređenje $\leqslant$ u $\mathscr{L}$ linearno, onda je $\mathscr{L}$ *linearno uređena Heytingova algebra*. Najvažniji primer linearno uređene, kompletne Heytingove algebre je realan, jedinični interval $[0, 1]$ sa

Gödelovim parom adjungovanih operacija, tj. sa standardnom minimum t-normom.

*BL-algebra* (*Basic Logic Algebra*) je reziduirana mreža koja zadovoljava uslov $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$ (*deljivost*) i $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ (*prelinearnost*).

*MV-algebra* (*Multi Valued Algebra*) je BL-algebra u kojoj je $a = \neg\neg a$ (dozvoljava dvostruku negaciju).

*P-algebra* (*product algebra*) je BL-algebra koja zadovoljava
$(c \to 0) \to 0 \leqslant ((a \otimes c) \to (b \otimes c)) \to (a \to b)$ i $a \wedge (a \to 0) = 0$.

*G-algebra* (Gödelova algebra) je BL-algebra koja zadovoljava $a \otimes a = a$ (idempotentnost).

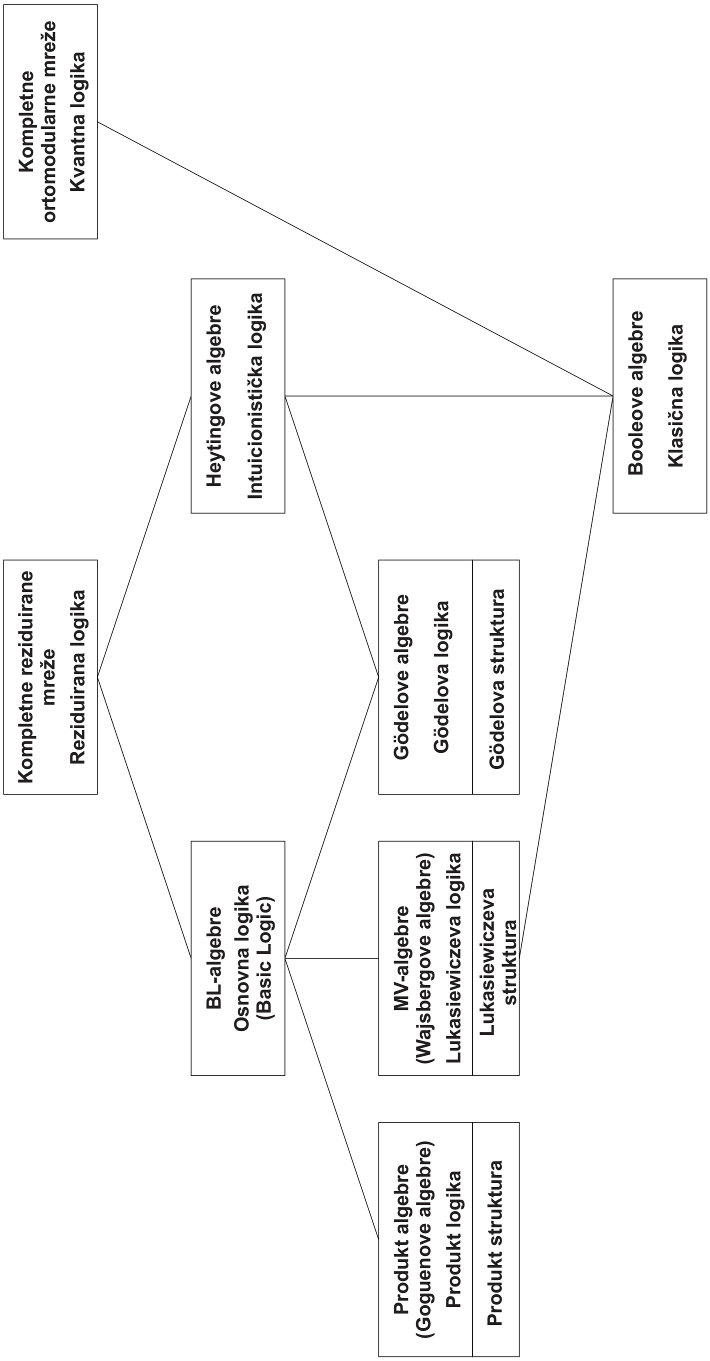
*Booleova algebra* je reziduirana mreža koja je i Heytingova algebra i MV-algebra.

Pregled najvažnijih tipova reziduiranih mreža, njihovih specijalnih podklasa i odgovarajućih logika dat je na Slici 1.1. Na slici su, poređenja radi, prikazane i ortomodularne mreže, na kojima je zasnovana kvantna logika.

Zbog istaknute monoidalne strukture, u nekim radovima se reziduirane mreže se nazivaju integralni, komutativni, reziduirani l-monoidi, dok neki autori naziv reziduirane mreže koriste za neke opštije strukture.

*Komutativni poluprsten* je algebra $(L, +, \cdot, 0, 1)$, gde su $(L, +, 0)$ i $(L, \cdot, 1)$ komutativni monoidi, $\cdot$ je distributivna operacija u odnosu na $+$ i $0 \cdot x = 0$, za svako $x \in L$. Ako je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ reziduirana mreža, tada njen redukt $\mathscr{S} = (L, \vee, \otimes, 0, 1)$ jeste komutativni poluprsten, zbog čega će nam ti poluprsteni i biti važni u daljem radu.

Poluprsten je *lokalno konačan* ako je svaki njegov konačno generisan podpoluprsten konačan, i slično, monoid je lokalno konačan ako je njegov proizvoljan konačno generisan podmonoid konačan. Lako se proverava da je poluprsten $\mathscr{S}$ lokalno konačan ako i samo ako su oba monoida $(L, \vee, 0)$ i $(L, \otimes, 1)$ lokalno konačni monoidi. Kako je $(L, \vee, 0)$ polumreža, a svaka polumreža je lokalno konačna, poluprsten $\mathscr{S}$ je lokalno konačan ako i samo ako je monoid $(L, \otimes, 1)$ lokalno konačan (vidi [54], [81]).




Slika 1.1. Najznačajnije istinitosne strukture i odgovarajuće logike.

## 1.7. Osnovna svojstva reziduiranih mreža

Navešćemo neka osnovna svojstva operacija u reziduiranim mrežama.

**Teorema 1.7.1.** *Svaka reziduirana mreža zadovoljava sledeće uslove:*

$$y \leqslant x \to (x \otimes y), \quad x \leqslant (x \to y) \to y, \tag{1.5}$$

$$x \otimes (x \to y) \leqslant y, \tag{1.6}$$

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1, \tag{1.7}$$

$$x \to x = 1, \quad x \to 1 = 1, \quad 1 \to x = x, \tag{1.8}$$

$$0 \to x = 1, \tag{1.9}$$

$$x \otimes 0 = 0, \tag{1.10}$$

$$x \otimes y \leqslant x, \quad x \leqslant y \to x, \tag{1.11}$$

$$x \otimes y \leqslant x \wedge y, \tag{1.12}$$

$$(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z), \tag{1.13}$$

$$(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant (x \to z), \tag{1.14}$$

$$x \to y \;\text{ je najveći element od }\; \{z \mid x \otimes z \leqslant y\}, \tag{1.15}$$

$$x \otimes y \;\text{ je najmanji element od }\; \{z \mid x \leqslant y \to z\}. \tag{1.16}$$

Naredna teorema ukazuje na izotonost operacije $\otimes$, kao i na izotonost operacije $\to$ po drugom i antitonost ove operacije po prvom argumentu.

**Teorema 1.7.2.** *U svakoj reziduiranoj mreži važi sledeće:*

$$y_1 \leqslant y_2 \quad\Rightarrow\quad x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2, \tag{1.17}$$

$$y_1 \leqslant y_2 \quad\Rightarrow\quad x \to y_1 \leqslant x \to y_2, \tag{1.18}$$

$$x_1 \leqslant x_2 \quad\Rightarrow\quad x_2 \to y \leqslant x_1 \to y. \tag{1.19}$$

Navodimo još neka svojstva operacija u reziduiranoj mreži:

**Teorema 1.7.3.** *U svakoj reziduiranoj mreži zadovoljene su sledeće nejednakosti:*

$$x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z), \tag{1.20}$$

$$x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z), \tag{1.21}$$

$$x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z), \tag{1.22}$$

$$x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y), \tag{1.23}$$

$$x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z). \tag{1.24}$$

Naredna teorema daje odnos između operacija $\bigvee$ i $\bigwedge$, za neku familiju elemenata reziduirane mreže, i operacija $\otimes$ i $\to$.

**Teorema 1.7.4.** *Sledeća tvrđenja su tačna, za svaki indeksni skup $I$. Štaviše, ako u prve tri jednakosti leva strana ima smisla, onda i desna strana ima smisla.*

$$x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x \otimes y_i), \tag{1.25}$$

$$x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i), \tag{1.26}$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to y = \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y), \tag{1.27}$$

$$x \otimes \bigwedge_{i\in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i\in I}(x \otimes y_i), \tag{1.28}$$

$$\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i\in I} y_i, \tag{1.29}$$

$$\bigvee_{i\in I}(x_i \to y) = \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \to y. \tag{1.30}$$

**Teorema 1.7.5.** *Sledeća tvrđenja predstavljaju još neka svojstva reziduiranih mreža:*

$$x \to y = ((x \to y) \to y) \to y, \tag{1.31}$$

$$x \otimes (x \to y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \otimes z = y), \tag{1.32}$$

$$x \to (x \otimes y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \to z = y), \tag{1.33}$$

$$(y \to x) \to x = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(z \to x = y), \tag{1.34}$$

$$(x \wedge y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \otimes y, \tag{1.35}$$

$$x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x), \tag{1.36}$$

$$x \wedge y \geqslant x \otimes (x \to y), \tag{1.37}$$

$$x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z). \tag{1.38}$$

Važi sledeća teorema:

**Teorema 1.7.6.** *Neka je $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$ struktura koja zadovoljava* (i) *i* (ii) *iz definicije reziduiranih mreža i neka je $\mathscr{L}$ kompletna mreža. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja:*

(i) *Postoji* $\to$ *koje zadovoljava svojstvo adjunkcije u odnosu na* $\otimes$.

(ii) *Za sve* $a, b$, *skup* $\{c \,|\, a \otimes c \leqslant b\}$ *ima najveći element.*

(iii) $x \otimes \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I}(x \otimes y_i)$ *važi u* $\mathscr{L}$,
*i za* $x \to y = \bigvee\{z \,|\, x \otimes z \leqslant y\}$ *su* $\otimes$ *i* $\to$ *adjungovane operacije.*

Videćemo, dalje neka svojstva negacije u reziduiranoj mreži.

**Teorema 1.7.7.** *Negacija ima sledeća svojstva:*

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \tag{1.39}$$

$$x \otimes \neg x = 0, \tag{1.40}$$

$$x \leqslant \neg\neg x, \quad \neg x = \neg\neg\neg x, \tag{1.41}$$

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \neg y \leqslant \neg z, \tag{1.42}$$

$$\neg\Big(\bigvee_{i \in I} x_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} \neg x_i, \tag{1.43}$$

$$\neg\Big(\bigwedge_{i \in I} x_i\Big) \geqslant \bigvee_{i \in I} \neg x_i. \tag{1.44}$$

Sledeća teorema pokazuje koja svojstva ima operacija bireziduma.

**Teorema 1.7.8.** *Operacija bireziduma ima sledeća svojstva:*

$$0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0, \quad 0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1, \tag{1.45}$$

$$x \leftrightarrow x = 1, \tag{1.46}$$

$$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x, \tag{1.47}$$

$$(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant x \leftrightarrow z, \tag{1.48}$$

$$x \leftrightarrow 1 = x, \quad x \leftrightarrow 0 = \neg x, \tag{1.49}$$

$$x \leftrightarrow y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \tag{1.50}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (y_1 \wedge y_2), \tag{1.51}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (y_1 \vee y_2), \tag{1.52}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \otimes x_2) \leftrightarrow (y_1 \otimes y_2), \tag{1.53}$$

$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (y_1 \to y_2), \tag{1.54}$$

$$\bigwedge_{i \in I}(x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigwedge_{i \in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigwedge_{i \in I} y_i\Big), \tag{1.55}$$

$$\bigwedge_{i \in I}(x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigvee_{i \in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigvee_{i \in I} y_i\Big) \tag{1.56}$$

$$x \leftrightarrow y = (x \vee y) \to (x \wedge y). \tag{1.57}$$

## 1.8. Fazi skupovi i fazi relacije

*Fazi podskup* skupa $A$ *nad* $L$, ili, jednostavno, *fazi podskup* od $A$, je svako preslikavanje iz $A$ u $L$. Neka su $f$ i $g$ dva fazi podskupa od $A$. *Jednakost* fazi podskupova $f$ i $g$ definiše se kao uobičajena jednakost preslikavanja, tj. $f = g$ ako i samo ako je $f(x) = g(x)$, za svako $x \in A$. *Inkluzija* $f \leqslant g$ se, takođe, definiše kao uređenje preslikavanja: $f \leqslant g$ ako i samo ako je $f(x) \leqslant g(x)$, za svaki $x \in A$. Snabdeven ovim parcijalnim uređenjem, skup $\mathscr{F}(A)$ svih fazi podskupova od $A$ predstavlja kompletnu distributivnu mrežu, u kojoj su infimum (presek) $\bigwedge_{i\in I} f_i$ i supremum (unija) $\bigvee_{i\in I} f_i$ proizvoljne familije $\{f_i\}_{i\in I}$ fazi podskupova od $A$ definisani sa

$$\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} f_i(x), \qquad \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x).$$

*Proizvod* fazi podskupva $f, g \in \mathscr{F}(A)$, u oznaci $f \otimes g$ je fazi podskup od $A$ definisan sa: $f \otimes g(x) = f(x) \otimes g(x)$, za svako $x \in A$.

*Stepen preklapanja* fazi podskupova $f$ i $g$ skupa $A$ definiše kao

$$\bigwedge_{x\in A} f(x) \otimes g(x).$$

*Stepen inkluzije* od $f$ i $g$ se definiše kao

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \to g(x).$$

*Stepen jednakosti* fazi podskupova $f$ i $g$ definiše se kao

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \leftrightarrow g(x).$$

*Krisp deo* fazi podskupa $f$ skupa $A$, u oznaci $c(f)$, ili kraće $\widehat{f}$ je *jasan* ili *krisp* (engl. *crisp*) *podskup* od $A$ definisan sa $\widehat{f} = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Ovakvi podskupovi se drugačije nazivaju i *obični* podskupovi, pa ćemo ponekad i ovaj naziv koristiti u daljem radu.

Može se primetiti da su mnogi autori koristili naziv "jezgro" umesto "krisp deo", u oznaci "$\ker f$" umesto "$\widehat{f}$", ali mi ćemo naziv "jezgro" koristiti u njegovom uobičajenom značenju – za običnu ekvivalenciju koja se, na prirodan način, pridružuje preslikavanju. Naime, *jezgro* fazi podskupa $f$ od $A$, u oznaci $\ker f$, je ekvivalencija na $A$ definisana sa

$$\ker f = \{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

*Visina* od $f$, u oznaci $\|f\|$, je definisana sa

$$\|f\| = \bigvee_{x \in A} f(x).$$

Razmotrićemo sada fazi relacije kao fazi podskupove od $A \times A$.

*Fazi relacija* na $A$ je svako preslikavanje iz $A \times A$ u $L$, odnosno, svaki fazi podskup od $A \times A$, a jednakost, inkluzija, unija, presek i uređenje fazi relacija su definisani kao za fazi skupove. Za dve fazi relacije $R$ i $S$, njihova *kompozicija* je fazi relacija $R \circ S$ definisana sa:

$$(R \circ S)(x,y) = \bigvee_{a \in A} \big( R(x,a) \otimes S(a,y) \big),$$

za sve $x, y \in A$.

*Krisp deo* fazi relacije $R$, u oznaci $\widehat{R}$ je obična relacija za koju je

$$(a,b) \in \widehat{R} \quad \Leftrightarrow \quad R(a,b) = 1,$$

za proizvoljne elemente $a, b \in A$.

Za fazi podskup $f$ od $A$ i fazi relaciju $R$ na $A$, *kompozicije* $f \circ R$ i $R \circ f$ su fazi podskupovi od $A$ definisani sa

$$(f \circ R)(a) = \bigvee_{b \in A} f(b) \otimes R(b,a), \quad (R \circ f)(a) = \bigvee_{b \in A} R(a,b) \otimes f(b), \tag{1.58}$$

za proizvoljan $a \in A$. Konačno, za fazi podskupove $f$ i $g$ od $A$ pišemo

$$f \circ g = \bigvee_{a \in A} f(a) \otimes g(a). \tag{1.59}$$

Primećujemo da vrednost $f \circ g$ možemo smatrati "stepenom preklapanja" od $f$ i $g$. Poznato je da je kompozicija fazi relacija asocijativna, i lako se proverava da je

$$(f \circ R) \circ S = f \circ (R \circ S), \quad (f \circ R) \circ g = f \circ (R \circ g), \tag{1.60}$$

za proizvoljne fazi podskupove $f$ i $g$ od $A$, i fazi relacije $R$ i $S$ na $A$, što znači da se zagrade u (1.60) mogu izostaviti. Primetimo takođe da, ako je $A$ konačan skup od $n$ elemenata, fazi relacije $R$ i $S$ mogu da se posmatraju kao $n \times n$ fazi matrice nad $\mathscr{L}$ i $R \circ S$ je matrični proizvod, dok se $f \circ R$ može smatrati proizvodom $1 \times n$ matrce $f$ i $n \times n$ matrice $R$, i $R \circ f$ je proizvod $n \times n$ matrice $R$ i $n \times 1$ matrice $f^t$ (transponovane matrice od $f$).

Glava 2

# Fazi ekvivalencije i fazi particije

Fazi ekvivalencije su uvedene u radu Zadeha [126], kao uopštenje koncepta obične relacije ekvivalencije, i opsežno su izučavane u nizu radova, kao način za merenje stepena sličnosti ili nerazlučivosti između objekata datog univerzuma razmatranja. U tim radovima, fazi ekvivalencije su se pokazale veoma korisnim u mnogim primenama, kao, na primer, u fazi kontroli, aproksimativnom rezonovanju, klaster analizi, i drugim oblastima. Zavisno od autora i konteksta u kojima su razmatrane, one su dobijale različita imena, kao što su relacije sličnosti (originalni Zadehov naziv, engl. similarity relations), operatori nerazlučivosti (engl. indistinguishability operators [120, 67, 68, 12, 69, 44, 45]), $\mathscr{T}$-ekvivalencije [29, 30], više-vrednosne ekvivalencije (engl. many-valued equivalence relations [42, 43]), i druga.

Prvu definiciju fazi particija dao je Ruspini u [110], i ona se kasnije pokazala veoma značajnom u istraživanjima u okviru fazi klaster analize. Butniariu je u [15] dao drugu definiciju, koja se zasniva na Lukasiewiczevoj t-normi i koja je kasnije proširena na proizvoljne t-norme. Međutim, ni jedna od ovih definicija fazi particije ne daje bijektivnu korespodenciju između fazi particija i fazi ekvivalencija. Definicija fazi particija koja obezbeđuje takvu korespondenciju je ona pomoću klasa ekvivalencije. Koncept klase fazi ekvivalencije uveden je takođe u napred pomenutom radu Zadeha [126], kao prirodno uopštenje koncepta klase obične relacije ekvivalencije, a potom je izučavan u brojnim radovima (vidi [94], [100], [27], [29]). Ovchinnikov u [100] i De Baets, De Cooman i Kerre u [27] definisali su fazi particiju kao skup svih klasa ekvivalencije neke fazi ekvivalencije, i ta prirodna definicija se pokazala kao pogodna za uspostavljanje bijektivne korespondencije između fazi particija i fazi ekvivalencija. De Baets, De Cooman i Kerre [27] su takođe definisali fazi semi-particiju kao skup klasa ekvivalencije (neobavezno svih) neke fazi ekvivalencije. U raznim kontekstima fazi semi-particije su izučavane u [60], [73], [27], [29], [63] i drugim radovima.

U ovoj glavi disertacije biće izučavana razna svojstva klasa ekvivalencije fazi ekvivalencija nad kompletnom reziduiranom mrežom, i biće date razne karakterizacije fazi semi-particija i fazi particija nad kompletnom reziduiranom mrežom, kao i nad linearno uređenom Heytingovom algebrom. U ovom drugom slučaju, biće dat i algoritam za izračunavanje minimalne familije klasa ekvivalencije koje generišu datu fazi ekivivalenciju. Većina prikazanih rezultata su novi i originalni, a jedan deo rezultata predstavlja i uopštenja nekih poznatih rezultata koja su data na takav način da pojednostavljuju i razjašnjuju te rezultate. Rezultati iz ove glave publikovani su u radu [23].

Glava se sastoji iz četiri odeljka. U Odeljku 2.1 uvedeni su osnovni koncepti i prikazana osnovna svojstva fazi ekvivalencija i njihovih klasa ekvivalencije. Glavni deo glave je Odeljak 2.2, u kome se razmatraju klase fazi ekvivalencija, fazi semi-particije i fazi particije. Dati su potrebni i dovoljni uslovi da familija fazi podskupova datog skupa $A$ bude fazi semi-particija, kao i potrebni i dovoljni uslovi da ta familija bude particija. Pokazuje se da postoje tri načina za konstrukciju fazi ekvivalencije koja odgovara datoj fazi particiji, dok su na kraju odeljka data i dva interesantna svojstva fazi ekvivalencija, koja će se pokazati veoma korisnim u narednom odeljku. U Odeljku 2.3 bavimo se fazi ekvivalencijama nad linearno uređenom, kompletnom Heytingovom algebrom, i dajemo karakterizacije fazi semi-particija i fazi particija koje su nešto jednostavnije nego u opštijem slučaju. Dobijeni rezultati koriste se u Odeljku 2.4 za konstrukciju algoritma za izračunavanje minimalne generatorne fazi semi-particije date fazi ekvivalencije nad linearno uređenom, kompletnom Heytingovom algebrom.

Naša istraživanja koja se tiču fazi semi-particija i fazi particija tesno su povezana sa istraživanjima De Baetsa i Mesiara [29], Klawonna i Krusea [73], Höhlea [63], Demircia [42] i Ovchinnikova [100], a istraživanja koja se tiču generatornih familja klasa fazi ekvivalencije su povezana sa istraživanjima Valverdea [120], Jacasa [67], Jacasa i Recasensa [69], [68], Demircia and Recasensa [52], i drugih.

## 2.1. Fazi ekvivalencije

*Fazi relacija* na skupu $A$ definiše se kao preslikavanje $R : A \times A \to L$, odnosno, kao fazi podskup skupa $A \times A$, pa se jednakost, inkluzija, unija presek i inkluzija fazi relacija definišu na isti način kao i kod fazi skupova.

Za dve fazi relacije $R$ i $S$ na skupu $A$, njihov *proizvod* ili *kompozicija* je fazi relacija $R \circ S$ na $A$ definisana sa:

$$(R \circ S)(x,y) = \bigvee_{a \in A} \big( R(x,a) \otimes S(a,y) \big),$$

za sve $x, y \in A$.

Fazi relacija $E$ na $A$ je

(R) *refleksivna* (ili *fazi refleksivna*) ako je $E(x,x) = 1$, za svako $x \in A$;

(S) *simetrična* (ili *fazi simetrična*) ako je $E(x,y) = E(y,x)$, za sve $x, y \in A$;

(T) *tranzitivna* (ili *fazi tranzitivna*) ako je $E \circ E \leqslant E$, odnosno, ako za proizvoljne $x, a, y \in A$ važi

$$E(x,a) \otimes E(a,y) \leqslant E(x,y).$$

Jednostavno se proverava da za proizvoljnu refleksivnu i tranzitivnu fazi relaciju $E$ važi $E \circ E = E$.

Refleksivnu, simetričnu i tranzitivnu fazi relacija na skupu $A$ nazivamo *fazi ekvivalencija* na $A$ (engl. fuzzy equivalence). U odnosu na inkluziju fazi relacija, skup $\mathscr{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija na skupu $A$ je kompletna mreža, u kojoj se infimum poklapa sa uobičajenim presekom familije fazi relacija, ali u opštem slučaju, supremum u $\mathscr{E}(A)$ ne mora da se poklopi sa unijom familije fazi relacija (vidi [94]).

Fazi ekvivalencija $E$ na skupu $A$ naziva se *fazi jednakost* (engl. fuzzy equality) ako za sve $x, y \in A$, iz $E(x,y) = 1$ sledi $x = y$.

Neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A$. Za svaki $a \in A$ definišimo fazi podskup $E_a$ od $A$ na sledeći način:

$$E_a(x) = E(a,x), \quad \text{za svaki } x \in A.$$

Fazi skup $E_a$ nazivamo *klasa fazi ekvivalencije*, ili samo *klasa ekvivalencije*, fazi relacije $E$ određena elementom $a$. Skup $A_E = \{E_a \,|\, a \in A\}$ nazivamo *faktor skup* od $A$ u odnosu na $E$. Istaknimo da je koncept klase fazi ekvivalencije uveo još Zadeh u [126], kao prirodno uopštenje koncepta obične klasa ekvivalencije, da bi potom taj koncept bio intenzivno izučavan u velikom broju radova (vidi [94], [100], [27], [29]).

Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$. Za fazi podskup $f$ skupa $A$ kažemo da je *ekstenzionalan* (engl. extensional, ili *primetiv*, engl. observable) u odnosu na $E$ ako je

$$f(x) \otimes E(x,y) \leqslant f(y), \tag{2.1}$$

za sve $x, y \in A$ (vidi [52, 93]), a da je *nerazlučiv* (engl. indistinguishable) u odnosu na $E$ ako je

$$f(x) \otimes f(y) \leqslant E(x, y), \tag{2.2}$$

za sve $x, y \in A$. U [100], fazi skupovi nerazlučivi u odnosu na $E$ nazivaju se pre-klase od $E$.

Za fazi podskup $f$ od $A$ kažemo da je *normalizovan* (engl. normalized, ili *modalan*, engl. modal) ako je $f(x) = 1$ za neki $x \in A$. Ako je $f$ normalizovan, ekstenzionalan i nerazlučiv u odnosu na fazi ekvivalenciju $E$, on se naziva *fazi tačka* (engl. fuzzy point) u odnosu na $E$ (vidi [93]).

**Lema 2.1.1.** *Neka je $f$ normalizovan fazi podskup skupa $A$ i $E \in \mathscr{E}(A)$. Tada je $f$ nerazlučiv u odnosu na $E$ ako i samo ako je sadržan u nekoj klasi fazi ekvivalencije $E$.*

*Dokaz.* Neka je element $a \in A$ takav da je $f(a) = 1$.

Ako je $f$ nerazlučiv u odnosu na $E$, onda za svako $x \in A$ imamo da je

$$f(x) = f(a) \otimes f(x) \leqslant E(a, x) = E_a(x),$$

i prema tome, $f \leqslant E_a$.

Obratno, neka je $f \leqslant E_a$, za neko $a \in A$. Tada za svako $x, y \in A$ važi $f(x) \leqslant E(a, x)$ i $f(y) \leqslant E(a, y)$, što povlači

$$f(x) \otimes f(y) \leqslant E(x, a) \otimes E(a, y) \leqslant E(x, y).$$

Dakle, $f$ je nerazlučiv u odnosu na $E$. □

**Lema 2.1.2.** *Fazi podskup $f$ skupa $A$ je fazi tačka u odnosu na $E$ ako i samo ako je klasa ekvivalencije fazi relacije $E$.*

*Dokaz.* Neka je $f$ fazi tačka u odnosu na $E$. Prema Lemi 2.1.1, $f \leqslant E_a$, gde je $a \in A$ element takav da je $f(a) = 1$. Sa druge strane, za proizvoljan element $x \in A$, na osnovu ekstenzionalnosti od $f$ u odnosu na $E$ je

$$E_a(x) = E(a, x) = f(a) \otimes E(a, x) \leqslant f(x),$$

i prema tome, $E_a \leqslant f$. Dakle, $f = E_a$.

Obratno, uzmimo da je $f = E_a$ za neko $a \in A$. Tada je $f(a) = 1$, pa je $f$ normalizovan. Za proizvoljne $x, y \in A$, zbog tranzitivnosti od $E$ važi

$$f(x) \otimes E(x, y) = E(a, x) \otimes E(x, y) \leqslant E(a, y) = f(y),$$
$$f(x) \otimes f(y) = E(x, a) \otimes E(a, y) \leqslant E(x, y),$$

te je, dakle, $f$ fazi tačka. □

Prethodna lema pokazuje da je definicija fazi tačke koja je ovde data ekvivalentna onoj koju je dao Klawonn u [71], gde je fazi tačka definisana kao ekstenzionalni omotač tačke u odnosu na fazi ekvivalenciju $E$, tj. kao klasa ekvivalencije od $E$.

Sledeće dve osobine relacija ekvivalencije su poznate, (vidi [27, 100]), ali ćemo ih, zbog potpunosti rada, dokazati i ovde.

**Lema 2.1.3.** *Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$. Tada za sve $x, y \in A$ važi sledeće:*

(a) $E(x, y) = \|E_x \otimes E_y\|$;

(b) $E_x = E_y \quad \Leftrightarrow \quad E(x, y) = 1$.

*Dokaz.* (a) Tvrđenje (a) sledi iz sledećeg niza jednakosti:

$$\begin{aligned}\|E_x \otimes E_y\| &= \bigvee_{a\in A} (E_x(a) \otimes E_y(a)) = \bigvee_{a\in A} (E(x, a) \otimes E(a, y)) \\ &= E \circ E(x, y) = E(x, y).\end{aligned}$$

(b) Ako je $E_x = E_y$, onda važi $E(x, y) = E_x(y) = E_y(y) = E(y, y) = 1$. Obratno, neka je $E(x, y) = 1$. Tada, za svako $a \in A$ imamo

$$E_x(a) = E(x, a) \geqslant E(x, y) \otimes E(y, a) = E(y, a) = E_y(a),$$

i slično, $E_y(a) \geqslant E_x(a)$. Prema tome, $E_x = E_y$. $\square$

## 2.2. Fazi semi-particije i fazi particije

Pre no što krenemo na razmatranje fazi semi-particija i fazi particija, definisaćemo tri vrste fazi ekvivalencija, koje su na prirodan način indukovane fazi skupovima i familijama fazi skupova.

Neka je $f$ fazi podskup skupa $A$. Definišimo fazi relacije $S_f$, $T_f$ i $E_f$ na $A$ na sledeći način:

$$S_f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = y, \\ f(x) \otimes f(y) & \text{ako je } x \neq y, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$T_f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } f(x) = f(y), \\ f(x) \otimes f(y) & \text{ako je } f(x) \neq f(y), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$E_f(x, y) = f(x) \leftrightarrow f(y). \tag{2.5}$$

Jednostavno se proverava da su $S_f$, $T_f$ i $E_f$ fazi ekvivalencije na $A$, i prema (1.12) imamo da je $S_f \leqslant T_f \leqslant E_f$, za svaki fazi podskup $f$ od $A$.

Istaknimo da relacija $E_f$ igra ključnu ulogu u teoriji reprezentacije fazi ekvivalencija, koju je započeo Valverde u [120], dok su relacije oblika $S_f$ poznate kao *dekompozicione relacije* (vidi [12]).

Dalje, neka je $\mathscr{C}$ proizvoljna familija fazi podskupova skupa $A$. Tada fazi ekvivalencije $T_{\mathscr{C}}$ i $E_{\mathscr{C}}$ na $A$ definišemo sa

$$T_{\mathscr{C}}(x,y) = \bigwedge_{f\in\mathscr{C}} T_f(x,y), \quad E_{\mathscr{C}}(x,y) = \bigwedge_{f\in\mathscr{C}} E_f(x,y),$$

za sve $x, y \in A$, dok $S_{\mathscr{C}}$ definišemo kao najmanju fazi ekvivalenciju na $A$ za koju je $\sigma_f \leqslant S_{\mathscr{C}}$, za svaki $f \in \mathscr{C}$. Fazi ekvivalencija $S_{\mathscr{C}}$ se može eksplicitno izražiti preko supremuma u mreži $\mathscr{L}$ na način prikazan u radu [94], a ovde će kasnije, Teoremom 2.2.3, biti data i jedna jednostavnija karakterizacija fazi ekvivalencije $S_{\mathscr{C}}$, ali u specijalnom slučaju, kada je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija.

Prva teorema ovog odeljka daje karakterizaciju svih fazi ekvivalencija koje imaju dati fazi skup kao svoju klasu ekvivalencije.

**Teorema 2.2.1.** *Fazi podskup $f$ skupa $A$ je klasa ekvivalencije neke fazi ekvivalencije na $A$ ako i samo ako je normalizovan.*

*U tom slučaju, skup svih $E \in \mathscr{E}(A)$ takvih da je $f$ klasa ekvivalencije od $E$ jednak je zatvorenom intervalu $[S_f, E_f]$ mreže $\mathscr{E}(A)$.*

*Dokaz.* Jasno je da proizvoljna klasa fazi ekvivalencije jeste normalizovan fazi podskup od $A$.

Obratno, ako je $f$ normalizovan fazi podskup $A$, lako se proverava da je $f$ klasa ekvivalencije svake od fazi ekvivalencija $S_f$, $T_f$ i $E_f$.

Dalje, za proizvoljne $E \in \mathscr{E}(A)$ i $x, y \in A$, na osnovu svojstva adjunkcije (1.1) i definicije rezidualne ekvivalencije (1.2) imamo da je

$$\begin{aligned} E(x,y) \leqslant E_f(x,y) &\Leftrightarrow E(x,y) \leqslant f(x) \leftrightarrow f(y) \\ &\Leftrightarrow E(x,y) \leqslant f(x) \to f(y) \ \ \& \ \ E(x,y) \leqslant f(y) \to f(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) \otimes E(x,y) \leqslant f(y) \ \ \& \ \ f(y) \otimes E(x,y) \leqslant f(x), \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $E$ ako i samo ako je $E \leqslant E_f$. Prema tome, skup svih fazi ekvivalencija $E \in \mathscr{E}(A)$ takvih da je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $E$ je jednak glavnom idealu $(E_f]$ mreže $\mathscr{E}(A)$ generisanom sa $E_f$.

Sa druge strane, za proizvoljne $E \in \mathscr{E}(A)$ i $x, y \in A$, $x \neq y$, na osnovu (2.2) i definicije relacije $S_f$ dobijamo da je $f$ nerazlučiv u odnosu na $E$ ako i samo ako je $S_f \leqslant E$, pa je skup svih fazi ekvivalencija $E \in \mathscr{E}(A)$ takvih da je $f$ nerazlučiv u odnosu na $E$ jednak glavnom dualnom idealu (glavnom filteru) $[S_f)$ od $\mathscr{E}(A)$ generisanom sa $S_f$.

Sada, na osnovu napred dokazanog i Leme 2.1.2, zaključujemo da skup svih fazi ekvivalencija $E \in \mathscr{E}(A)$ takvih da je $f$ klasa ekvivalencije od $E$ jeste presek glavnog ideala $(E_f]$ i glavnog dualnog ideala $[S_f)$ u $\mathscr{E}(A)$, odnosno, jednak je zatvorenom intervalu $[S_f, E_f]$ od $\mathscr{E}(A)$. $\square$

Neka je $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ familija običnih podskupova skupa $A$. Ako važi

(i) $A_i \neq \varnothing$, za svako $i \in I$,

(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$, za svaka dva različita indeksa $i, j \in I$,

onda se $\mathscr{A}$ naziva *semi-particija* od $A$, a ako važi

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$,

onda se $\mathscr{A}$ naziva *pokrivač* skupa $A$. Ako $\mathscr{A}$ istovremeno zadovoljava uslove (i), (ii) i (iii), onda se $\mathscr{A}$ naziva *particija* skupa $A$. Dobro je poznato da je $\mathscr{A}$ particija od $A$ ako i samo ako je skup svih klasa neke ekvivalencije na $A$, a da je $\mathscr{A}$ semi-particija od $A$ ako i samo ako je podskup skupa svih klasa ekvivalencije neke relacije ekvivalencije na $A$.

Kao što je već rečeno, postoje različite definicije fazi particija. Prvu takvu definiciju dao je Ruspini u [110], i ona se kasnije pokazala veoma značajnom u istraživanjima u okviru fazi klaster analize. Butniariu je u [15] dao drugu definiciju koja se zasniva na Lukasiewiczevoj t-normi, koja je kasnije proširena na proizvoljne t-norme. Međutim, ni jedna od ovih definicija fazi particije ne daje bijektivnu korespodenciju između fazi particija i fazi ekvivalencija.

Definicija fazi particije koja obezbeđuje takvu korespodenciju je definicija pomoću klasa fazi ekvivalencije, kakvu su dali Ovchinnikov u [100] i De Baets, De Cooman i Kerre u [27] . Naime, familija $\mathscr{C}$ normalizovanih fazi podskupova skupa $A$ koja je skup svih različitih klasa neke fazi ekvivalencije na $A$ naziva se *fazi particija* od $A$. Takođe govorimo i da je $\mathscr{C}$ fazi particija te fazi ekvivalencije, odnosno da je indukovana njome. Skup nekih klasa ekvivalencije (ne obavezno svih) neke fazi ekvivalencije na $A$, odnosno podskup odgovarajuće fazi particije, nazivamo *fazi semi-particija* od $A$, odnosno fazi semi-particija ove fazi ekvivalencije.

Naredna teorema, koja daje nekoliko karakterizacija fazi semi-particija, predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata ove glave.

**Teorema 2.2.2.** *Neka je $\mathscr{C}$ familija normalizovanih fazi podskupova skupa $A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\mathscr{C}$ je fazi semi particija od $A$;*

(ii) *za sve $f, g \in \mathscr{C}$*

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \otimes g(x) \leqslant \bigwedge_{y\in A} f(y) \leftrightarrow g(y); \tag{2.6}$$

(iii) *za sve $x, y \in A$*

$$\bigvee_{f\in\mathscr{C}} f(x) \otimes f(y) \leqslant \bigwedge_{g\in\mathscr{C}} g(x) \leftrightarrow g(y); \tag{2.7}$$

(iv) *$S_{\mathscr{C}} \leqslant E_{\mathscr{C}}$.*

*Osim toga, ako je bilo koji od ova četiri uslova zadovoljen, onda je skup svih fazi ekvivalencija na $A$ čija je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija jednak intervalu $[S_{\mathscr{C}}, E_{\mathscr{C}}]$ mreže $\mathscr{E}(A)$.*

*Dokaz.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Neka je $\mathscr{C}$ skup klasa ekvivalencije relacije fazi ekvivalencije $E$ na $A$. Razmotrimo proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$. Tada je $f = E_a$ i $g = E_b$, za neke $a, b \in A$, i prema Lemi 2.1.3 vidimo da se leva strana nejednakosti (2.6) može napisati na sledeći način:

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \otimes g(x) = \|f \otimes g\| = \|E_a \otimes E_b\| = E(a, b).$$

Sa druge strane, uzmimo proizvoljan element $y \in A$ i fazi skup $E_y = h$. Prema Teoremi 2.2.1 važi

$$\begin{aligned} E(a, b) &\leqslant E_h(a, b) = h(a) \leftrightarrow h(b) = E_y(a) \leftrightarrow E_y(b) \\ &= E_a(y) \leftrightarrow E_b(y) = f(y) \leftrightarrow g(y). \end{aligned}$$

Dakle,

$$E(a, b) \leqslant \bigwedge_{y\in A} f(y) \leftrightarrow g(y).$$

i time smo dokazali (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Uzmimo da važi (ii). Primetimo da se (ii) može predstaviti kao

$$f(x) \otimes g(x) \leqslant f(y) \leftrightarrow g(y), \tag{2.8}$$

za sve $f, g \in \mathscr{C}$ i $x, y \in A$. Razmotrimo proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$ i $x, y \in A$. Tada (2.8) povlači

$$f(x) \otimes g(x) \leqslant f(y) \to g(y) \quad \text{and} \quad f(y) \otimes g(y) \leqslant f(x) \to g(x),$$

i zbog svojstva adjunkcije sledi da važi

$$\begin{aligned} f(x) \otimes g(x) \leqslant f(y) \to g(y) \ &\Leftrightarrow \ f(x) \otimes f(y) \leqslant g(x) \to g(y), \\ f(y) \otimes g(y) \leqslant f(x) \to g(x) \ &\Leftrightarrow \ f(x) \otimes f(y) \leqslant g(y) \to g(x). \end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$f(x) \otimes f(y) \leqslant g(x) \leftrightarrow g(y),$$

za sve $f, g \in \mathscr{C}$ i $x, y \in A$, čime smo dokazali da važi (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Neka važi (iii). Za proizvoljne $f \in \mathscr{C}$ i $x, y \in A$ takve da je $x \neq y$, prema (2.7) sledi

$$f(x) \otimes f(y) \leqslant \bigwedge_{g \in \mathscr{C}} g(x) \leftrightarrow g(y) = E_{\mathscr{C}}(x, y),$$

odakle je $S_f \leqslant E_{\mathscr{C}}$, za svako $f \in \mathscr{C}$, odnosno $S_{\mathscr{C}} \leqslant E_{\mathscr{C}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Neka je $S_{\mathscr{C}} \leqslant E_{\mathscr{C}}$ i $E \in [S_{\mathscr{C}}, E_{\mathscr{C}}]$. Tada $E \in [S_f, E_f]$, za svako $f \in \mathscr{C}$, i prema Teoremi 2.2.1, svaki $f \in \mathscr{C}$ je klasa ekvivalencije od $E$. Dakle, $\mathscr{C}$ je fazi semi-particija od $A$.

Na kraju, ako je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija od $A$, tj. ako je $S_{\mathscr{C}} \leqslant E_{\mathscr{C}}$, onda je interval $[S_{\mathscr{C}}, E_{\mathscr{C}}]$ mreže $\mathscr{E}(A)$ presek intervala $[S_f, E_f]$, $f \in \mathscr{C}$, i prema Teoremi 2.2.1, interval $[S_{\mathscr{C}}, E_{\mathscr{C}}]$ je skup svih fazi ekvivalencija na $A$ koje imaju svaki $f \in \mathscr{C}$ kao svoju klasu ekvivalencije. $\square$

Napomenimo i to da su De Baets i Mesiar [30] i Demirci [42] koristili uslov (ii) kao definiciju fazi semi-particija. U slučaju kada su fazi semi-particije definisane preko levo neprekidne t-norme na realnom, jediničnom intervalu, ekvivalentnost uslova (i) i (ii) dokazana je u radu Klawonna i Krusea [73] (kao i u radovima De Baetsa [26], De Baetsa i Mesiara [29] i Klawonna [71]). Klawonn i Kruse su, takođe, dokazali da su $S_{\mathscr{C}}$ i $E_{\mathscr{C}}$, tim redom, najmanja i najveća fazi ekvivalencija čija je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija.

Naredne dve posledice opisuju neka svojstva fazi semi-particija, koja će biti korišćena u daljem tekstu. Prvu od tih posledica su dokazali De Baets i Mesiar u [29] za $\mathscr{T}$-semi-particije (fazi semi-particije definisane pomoću t-norme na realnom, jediničnom intervalu), ali ćemo ovde dati nešto jednostavniji dokaz.

**Posledica 2.2.1.** *Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija skupa $A$. Tada za proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$ važi*

$$\bigvee_{x\in A} f(x)\otimes g(x) = \bigwedge_{y\in A} f(y)\leftrightarrow g(y). \tag{2.9}$$

*Dokaz.* Za proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$ i $a \in \widehat{f}$, prema (1.8) sledi

$$\bigwedge_{y\in A} f(y)\leftrightarrow g(y) \leqslant f(a)\leftrightarrow g(a) = g(a) = f(a)\otimes g(a) \leqslant \bigvee_{x\in A} f(x)\otimes g(x).$$

Na osnovu toga i Teoreme2.2.2 zaključujemo da važi (2.9). □

**Posledica 2.2.2.** *Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija skupa $A$. Tada za proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$ važe sledeća tvrđenja:*

(A1) $\|f\otimes g\| < 1$,

(A2) $g(x) = \|f\otimes g\|$, *za svako* $x \in \widehat{f}$.

*Dokaz.* Tvrđenje (A1) je posledica jednakosti (2.9) i (1.50), dok (A2) sledi neposredno iz dokaza Posledice 2.2.1. □

Primetimo da uslov (A1) predstavlja neku vrstu uslova disjunktnosti fazi skupova $f$ i $g$, kao i da je ekvivalentan uslovu

(A1)$'$ $\{\widehat{f}\}_{f\in\mathscr{C}}$ je semi-particija od $A$,

što obezbeđuje da $\mathscr{C}$ ne sadrži dva različita člana sa istim krisp delom.

Sa druge strane, uslov (A2) ukazuje na to da proizvoljan član iz $\mathscr{C}$ uzima konstantnu vrednost na krisp delu proizvoljnog člana iz $\mathscr{C}$, na šta su ukazali De Baets i Mesiar u [29]. Dokazaćemo kasnije, da su uslovi (A2) i jača verzija od (A1)$'$, koja kaže da je $\{\widehat{f}\}_{f\in\mathscr{C}}$ particija od $A$, potrebni i dovoljni za karakterizaciju fazi particija.

Sledeća teorema daje reprezentaciju relacije fazi ekvivalencije $S_{\mathscr{C}}$, u slučaju kada je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija. Dokazali su je Klawonn i Kruse u [73], za fazi semi-particije definisane preko levo neprekidnih t-normi na realnom jediničnom intervalu ([71], [118] i [119]) ali, zbog kompletnosti, ovde ćemo dati dokaz i u ovom opštijem slučaju.

**Teorema 2.2.3.** *Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija skupa $A$. Tada se relacija $S_{\mathscr{C}}$ može predstaviti na sledeći način: $S_{\mathscr{C}}(x,x) = 1$, za svaki $x \in A$, i*

$$S_{\mathscr{C}}(x,y) = \bigvee_{f \in \mathscr{C}} f(x) \otimes f(y), \tag{2.10}$$

*za proizvoljne različite $x, y \in A$.*

*Dokaz.* Neka je $S$ fazi relacija na $A$ definisana sa: $S(x,x) = 1$, za svaki $x \in A$, i $S(x,y)$ je jednako supremumu na desnoj strani jednakosti (2.10), za različite $x, y \in A$.

Imamo da je $S_f \leqslant S_{\mathscr{C}}$, za svako $f \in \mathscr{C}$, i na osnovu definicije fazi relacija $S_f$ i $S$ sledi $S \leqslant S_{\mathscr{C}}$. Sa druge strane, takođe, važi $S_f \leqslant S$, za svako $f \in \mathscr{C}$, pa je za dokaz nejednakosti $S_{\mathscr{C}} \leqslant S$, dovoljno dokazati tranzitivnost od $S$.

Kako je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija od $A$, možemo pisati $\mathscr{C} = \{E_a\}_{a \in I}$, za neku fazi ekvivalenciju $E$ na $A$ i $I \subseteq A$. Na osnovu tranzitivnosti fazi relacije $E$ i (1.25) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
S(x,y) \otimes S(y,z) = &\ \Big(\bigvee_{a \in I} E(x,a) \otimes E(a,y)\Big) \otimes \Big(\bigvee_{b \in I} E(y,b) \otimes E(b,z)\Big) \\
\leqslant &\ \Big(\bigvee_{a \in I} E(x,a) \otimes E(a,y)\Big) \otimes E(y,z) \\
= &\ \Big(\bigvee_{a \in I} E(x,a) \otimes E(a,y) \otimes E(y,z)\Big) \\
\leqslant &\ \Big(\bigvee_{a \in I} E(x,a) \otimes E(a,z)\Big) = S(y,z),
\end{aligned}$$

za proizvoljne $x, y, z \in A$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Kao što smo videli u Teoremi 2.2.2, fazi ekvivalencija koja odgovara fazi semi-particiji nije obavezno jedinstveno određena. Naredna posledica pokazuje da u nekim slučajevima ovakva fazi ekvivalencija može biti jedinstvena.

**Posledica 2.2.3.** *Neka je $\mathscr{C}$ familija normalizovanih fazi podskupova skupa $A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Postoji jedinstvena fazi ekvivalencija takva da je $\mathscr{C}$ njena fazi semi-particija;*

(ii) *za sve različite $x, y \in A$ je*

$$\bigvee_{f \in \mathscr{C}} f(x) \otimes f(y) = \bigwedge_{g \in \mathscr{C}} g(x) \leftrightarrow g(y); \tag{2.11}$$

(iii) $S_{\mathscr{C}} = E_{\mathscr{C}}$.

*Dokaz.* Ovo sledi na osnovu Teorema 2.2.2 i 2.2.3. □

**Primer 2.2.1.** (a) Neka je $\mathscr{L}$ proizvod struktura, i neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A = \{1, 2, 3, 4\}$ zadata sledećom tabelom:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 0.12 | 0.41 | 0.13 |
| 2 | 0.12 | 1.00 | 0.12 | 0.23 |
| 3 | 0.41 | 0.12 | 1.00 | 0.27 |
| 4 | 0.13 | 0.23 | 0.27 | 1.00 |

$E$

Za svako $i \in A$, označimo sa $E_i$ klasu ekvivalencije određenu sa $i$. Tada je $\mathscr{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$ fazi semi-particija koja zadovoljava uslove Posledice 2.2.3, tj., $S_{\mathscr{C}} = E_{\mathscr{C}} = E$. Prema Teoremi 2.2.4 koja će biti dokazana nešto kasnije, $\mathscr{C}$ nije fazi particija.

(b) Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura, i neka je $\mathscr{C} = \{f, g\}$, gde su $f$ i $g$ fazi podskupovi skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dati sa:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 1.0 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $g$ | 0.4 | 0.1 | 1.0 | 0.3 |

Lako se proverava da je $E_f = S_f < S_g = E_g$, so $S_{\mathscr{C}} = S_g > E_f = E_{\mathscr{C}}$. Sada, prema Teoremi 2.2.2, zaključujemo da $\mathscr{C}$ nije fazi semi-particija, ali, uprkos tome, $S_{\mathscr{C}}$ se može predstaviti kao u Teoremi 2.2.3, što znači da je relacija $S$ definisana kao u dokazu Teoreme 2.2.3 tranzitivna.

Sada ćemo se posvetiti fazi particijama, čiju karakterizaciju daje naredna teorema:

**Teorema 2.2.4.** *Neka je $\mathscr{C}$ familija normalizovanih fazi podskupova skupa $A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\mathscr{C}$ je fazi particija od $A$;*

(ii) *$\mathscr{C}$ je fazi semi-particija od $A$ i zadovoljava uslov:*

(A3) *za svako* $x \in A$ *postoji* $f \in \mathscr{C}$ *takav da je* $f(x) = 1$.

(iii) $\mathscr{C}$ *zadovoljava sledeće uslove:*

(A4) *za svako* $x \in A$ *postoji jedinstven* $f_x \in \mathscr{C}$ *tako da je* $f_x(x) = 1$*;*

(A5) $f_x(y) = \|f_x \otimes f_y\|$*, za sve* $x, y \in A$*;*

*Osim toga, ako je bilo koji od ova tri navedena uslova ispunjen, onda je* $S_{\mathscr{C}} = E_{\mathscr{C}}$*, i to je jedinstvena fazi ekvivalencija na* $A$ *takva da je* $\mathscr{C}$ *njena fazi particija.*

*Dokaz.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Ako je $\mathscr{C}$ fazi particija relacije fazi ekvivalencije $E$ na $A$, onda za svako $x \in A$ imamo $E_x \in \mathscr{C}$ i $E_x(x) = 1$. Prema tome, važi (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Neka važi (ii). Tada, prema (A3), za svako $x \in A$ postoji $f \in \mathscr{C}$ tako da je $f(x) = 1$, i ako postoji drugo $g \in \mathscr{C}$ takvo da je $g(x) = 1$, onda je $\|f \otimes g\| \geqslant f(x) \otimes g(x) = 1$, što je u suprotnosti sa uslovom (A1). Dakle, zaključijemo da važi (A4). Uslov (A5) je samo drugačija formulacija uslova (A2).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Neka važi (iii). Koristeći oznake iz (A4) i (A5), definišimo fazi relaciju $E$ na $A$ na sledeći način: za proizvoljne $x, y \in A$ neka je

$$E(x, y) = \|f_x \otimes f_y\|. \tag{2.12}$$

Očigledno, $E$ je refleksivna i simetrična. Da bi dokazali tranzitivnost, uočimo proizvoljne $x, y, z \in A$. Tada prema (A5) sledi da je

$$\begin{aligned} E(x, y) \otimes E(y, z) &= \|f_x \otimes f_y\| \otimes \|f_y \otimes f_z\| \\ &= f_x(y) \otimes f_z(y) \leqslant \|f_x \otimes f_z\| = E(x, z). \end{aligned}$$

Odatle sledi da je $E$ fazi ekvivalencija na $A$. Kako, prema uslovu (A5), važi $E(x, y) = f_x(y)$, za sve $x, y \in A$, zaključujemo da je $\mathscr{C}$ skup svih klasa ekvivalencije fazi relacije $E$, tj., fazi particija od $E$.

Dalje, uzmimo da je zadovoljen bilo koji od uslova (i), (ii) i (iii). Koristeći oznake iz (iii), prema (A4), (A5) i Posledici 2.2.1 dobijamo da je

$$\begin{aligned} \bigvee_{f \in \mathscr{C}} f(x) \otimes f(y) &= \bigvee_{a \in A} f_a(x) \otimes f_a(y) = \bigvee_{a \in A} f_x(a) \otimes f_y(a) \\ &= \bigwedge_{a \in A} f_x(a) \leftrightarrow f_y(a) = \bigwedge_{a \in A} f_a(x) \leftrightarrow f_a(y) = \bigwedge_{g \in \mathscr{C}} g(x) \leftrightarrow g(y), \end{aligned}$$

a prema Posledici 2.2.3 zaključujemo da je $S_{\mathscr{C}} = E_{\mathscr{C}}$, i to je jedinstvena fazi ekvivalencija na $A$ takva da je $\mathscr{C}$ njena fazi particija. $\square$

Primetimo da su uslovi (A3) i (A4), tim redom, ekvivalentni sa

(A3)′ $\{\widehat{f}\}_{f\in\mathscr{C}}$ je pokrivač od $A$;

(A4)′ $\{\widehat{f}\}_{f\in\mathscr{C}}$ je particija od $A$.

Uočimo i da se fazi ekvivalencija koja odgovara fazi particiji $\mathscr{C}$ skupa $A$ može predstaviti na tri načina, tj., za sve $x, y \in A$,

$$E_{\mathscr{C}}(x,y) = \bigwedge_{f\in\mathscr{C}} f(x) \leftrightarrow f(y) = \bigvee_{f\in\mathscr{C}} f(x) \otimes f(y) = \|f_x \otimes f_y\|. \tag{2.13}$$

Ako je $E$ fazi ekvivalencija na $A$ i $x, y \in A$, onda prva jednakost u (2.13) povlači

$$E(x,y) = \bigwedge_{z\in A} E_x(z) \leftrightarrow E_y(z), \tag{2.14}$$

što znači da je *stepen povezanosti* elemenata $x$ i $y$ jednak *stepenu jednakosti* klasa fazi ekvivalencije $E_x$ i $E_y$.

Primetimo, takođe, da su De Baets i Mesiar [29] definisali $\mathscr{T}$-particiju (gde je $\mathscr{T}$ t-norma) kao i $\mathscr{T}$-semi-particiju koja zadovoljava uslov (A4)′, dok je Ovchinnikov [100] okarakterisao fazi particije pomoću uslova (A4)′ i uslova koji bi u našim oznakama bio izražen na sledeći način:

(A5)′ $f_x(y) \otimes f_y(x) = \|f_x \otimes f_y\|$, za sve $x, y \in A$.

Nije teško proveriti da je uslov (A5)′ ekvivalentan sa (A5). U više puta pomenutom radu De Baetsa and Mesiara [29] mogu se naći još neke srodne karakterizacije fazi particija. Neki primeri fazi particija na beskonačnim skupovima, među kojima je i primer $\mathscr{T}$-particije nad skupom realnih brojeva, dati su u radu De Baetsa, Mareša i Mesiara [28].

Thiele i Schmechel [119] i Demirci [42] su izučavali neke koncepte veoma bliske fazi semi-particijama i fazi particijama koje se izučavaju ovde. Naime, familiju $\mathscr{C}$ normalizovanih fazi podskupova skupa $A$ nazivaćemo *fazi semi-particija* od $A$ *u smislu Thiele-Schmechela* ako za proizvoljne $f, g \in \mathscr{C}$ i proizvoljne $x, y \in A$ važi

$$g(x) = 1 \;\Rightarrow\; f(x) \otimes f(y) \leqslant g(y) \tag{2.15}$$

Ako uz to familija $\mathscr{C}$ zadovoljava uslov (A3)′ (ili, ekvivalentno (A3)) onda je ona *fazi particija* od $A$ *u smislu Thiele-Schmechela*. Svaka fazi semi-particija koja zadovoljava uslove navedene u ovoj glavi je fazi semi-particija u smislu

Thiele-Schmechela (to je neposredna posledica Teoreme 2.2.2 (iii)), ali obrat ne važi. Na primer, familija $\mathscr{C} = \{f, g\}$ iz Primera 2.2.1 (b) nije fazi semi-particija, ali jeste fazi semi-particija u smislu Thiele-Schmechela. Međutim, $\mathscr{C}$ je fazi particija prema ovde korišćenoj definiciji ako i samo ako je fazi particija u smislu Thiele-Schmechela(vidi [119], [42]). Bijektivna korespodencija između fazi ekvivalencija i fazi particija u smislu Thiele-Schmechela prvi put je uspostavljena u [119].

Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$ i neka je $\mathscr{C}$ familija fazi podskupova od $A$. Ako je $E = E_{\mathscr{C}}$, odnosno ako za sve $x, y \in A$ važi

$$E(x,y) = \bigwedge_{f\in\mathscr{C}} f(x) \leftrightarrow f(y), \tag{2.16}$$

onda se kaže da $\mathscr{C}$ *generiše* $E$, i $\mathscr{C}$ se naziva *generatorna familija* od $E$, a elementi familije $\mathscr{C}$ se nazivaju *generatori* fazi ekvivalencije $E$.

Ako primetimo da se jednakost (2.14) može zapisati i u obliku

$$E(x,y) = \bigwedge_{z\in A} E_z(x) \leftrightarrow E_z(y), \tag{2.17}$$

što zapravo predstavlja Valverdeovu teoremu o reprezentaciji, onda zaključujemo da je svaka fazi ekvivalencija generisana familijom svih svojih klasa ekvivalencije, odnosno fazi particijom koja joj odgovara. Međutim, fazi ekvivalencija $E$ može da bude generisana i familijom $\mathscr{C}$ koja nije fazi particija koja joj odgovara. Nešto kasnije, razmatraćemo fazi semi-particije fazi ekvivalencije $E$ koje je generišu, a videćemo i da se može naći i takva generatorna familija koja nije ni fazi semi-particija.

Vredno je istaći i to da napred pomenuta Valverdeova teorema o reprezentaciji ima veoma značajnu primenu u klaster analizi, koja se može grubo opisati na sledeći način. Neka je dat skup $A$ elemenata koji treba da se klasifikuju prema nekom zadatom kriterijumu, odnosno prema zadatom prototipu. Ta klasifikacija se sastoji u proceni koliko svaki element $x \in A$ odgovara kriterijumu $i$, odnosno, u proceni stepena sličnosti svakog $x \in A$ sa prototipom $i$. Ako označimo taj stepen sličnosti sa $f_i(x)$, dobijamo familiju $\mathscr{C} = \{f_i\}_{i\in I}$ fazi podskupova od $A$. Teorema o reprezentaciji nam daje način da se sve te procene grupišu u fazi ekvivalenciju generisanu familijom $\mathscr{C}$, koja nam daje strukturni opis uzorka podataka.

U praktičnim primenama često nije bitno samo naći generatornu familiju fazi ekvivalencije, već je bitno i da ta familija bude što manje kardinalnosti, a ako je to moguće, da bude i minimalne kardinalnosti. Familija minimalne kardinalnosti u kolekciji svih generatornih familija fazi ekvivalencije $E$ naziva se *minimalna generatorna familija* od $E$. Sve minimalne generatorne familije od $E$ imaju istu kardinalnost, i ta kardinalnost se naziva *dimenzija* od $E$. Fazi ekvivalencija dimenzije jedan naziva se *jedno-dimenzionalna* fazi relacija. Pojam dimenzije fazi relacija uveden je u [99] (gde su ustanovljene i prve teoreme o reprezentaciji fazi ekvivalencija), a dalje je razvijen u [53].

Dalje, familiju minimalne kardinalnosti u kolekciji svih generatornih familija fazi ekvivalencije $E$ koje se sastoje od klasa ekvivalencije od $E$ nazivaćemo *minimalna generatorna fazi semi-particija* od $E$. U narednom odeljku prikazaćemo algoritam za nalaženje minimalne generatorne fazi semi-particije u slučaju fazi skupova i relacija koji uzimaju istinitosne vrednosti u linearno uređenoj, kompletnoj Heytingovoj algebri. Taj algoritam je zasnovan na sledećoj teoremi:

**Teorema 2.2.5.** *Neka je $\mathscr{C}$ familija fazi podskupova skupa $A$ i $E$ fazi ekvivalencija na $A$. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(a) *Ako je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija od $E$, onda je*

$$T_{\mathscr{C}} \leqslant E \;\Leftrightarrow\; \bigcap_{f\in\mathscr{C}} \ker f \subseteq \widehat{E}. \tag{2.18}$$

(b) *Ako je $\mathscr{C}$ generatorni skup od $E$, onda je*

$$\bigcap_{f\in\mathscr{C}} \ker f = \widehat{E}. \tag{2.19}$$

*Dokaz.* (a) Neka je $T_{\mathscr{C}} \leqslant E$. Pretpostavimo da je $(x,y)\in\ker f$, za svako $f\in\mathscr{C}$. To znači da je $f(x)=f(y)$, za svako $f\in\mathscr{C}$, odakle je $T_{\mathscr{C}}(x,y)=1$, i sada iz $T_{\mathscr{C}}\leqslant E$ dobijamo da je $E(x,y)=1$, odnosno $(x,y)\in\widehat{E}$.

Obratno, pretpostavimo da je

$$\bigcap_{f\in\mathscr{C}} \ker f \subseteq \widehat{E},$$

i uzmimo proizvoljne $x,y\in A$. Ako je $T_{\mathscr{C}}(x,y)=1$, onda je $T_f(x,y)=1$, za svako $f\in\mathscr{C}$, što znači da je $f(x)=f(y)$, za svako $f\in\mathscr{C}$, pa prema polaznoj pretpostavci zaključujemo da je $E(x,y)=1$, i dakle, $T_{\mathscr{C}}(x,y)\leqslant E(x,y)$.

Sa druge strane, ako je $T_{\mathscr{C}}(x,y)<1$, u tom slučaju postoji $f\in\mathscr{C}$ tako da je $f(x)\neq f(y)$ i $T_f(x,y)=f(x)\otimes f(y)$, pa zbog nerazlučivosti fazi skupa $f$ u odnosu na $E$ imamo da je

$$T_{\mathscr{C}}(x,y)\leqslant T_f(x,y)=f(x)\otimes f(y)\leqslant E(x,y).$$

Dakle, dokazali smo da je $T_{\mathscr{C}} \leqslant E$.

(b) Neka je $\mathscr{C}$ generatorni skup od $E$, tj., $E = E_{\mathscr{C}}$. Kako je $\widehat{E}_g = \ker g$, za svaki fazi podskup $g$ od $A$, to imamo da je

$$\widehat{E} = \widehat{E}_{\mathscr{C}} = \bigcap_{f\in\mathscr{C}} \widehat{E}_f = \bigcap_{f\in\mathscr{C}} \ker f,$$

odakle sledi da važi (2.19). $\square$

## 2.3. Fazi ekvivalencije nad Heytingovim algebrama

U ovom odeljku ćemo razmatrati fazi ekvivalencije nad kompletnom reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$ koja ima svojstvo da je $T_f = E_f$, za svaki fazi skup $f$ nad $\mathscr{L}$. Jasno, ovo je tačno ako i samo ako $\mathscr{L}$ zadovoljava uslov

$$x \otimes y = x \leftrightarrow y, \text{ za sve } x, y \in L \text{ takve da je } x \neq y, \tag{2.20}$$

Prvo ćemo pokazati da ovaj uslov važi ako i samo ako je $\mathscr{L}$ linearno uređena, kompletna Heytingova algebra.

**Lema 2.3.1.** *Kompletna reziduirana mreža $\mathscr{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ zadovoljava uslov (2.20) ako i samo ako je $\mathscr{L}$ linearno uređena Heytingova algebra.*

*Dokaz.* Neka važi jednakost (2.20). Da bi dokazali da je $\mathscr{L}$ linearno uređena Heytingova algebra, dovoljno je dokazati da za sve $x, y \in L$ važi sledeće:

$$x \otimes y = x \quad \text{ili} \quad x \otimes y = y. \tag{2.21}$$

Zaista, pretpostavimo da je $x \otimes y \neq x$. Tada prema (1.12) sledi

$$x \otimes y \leqslant x \wedge y \leqslant x, y,$$

pa na osnovu (1.7), (2.20) i (1.5) dobijamo da je

$$\begin{aligned} x \otimes y &= (x \otimes y) \wedge x = (x \otimes y) \leftrightarrow x = \big((x \otimes y) \to x\big) \wedge \big(x \to (x \otimes y)\big) \\ &= x \to (x \otimes y) \geqslant y, \end{aligned}$$

odakle je, $x \otimes y = y$.

Obratno, uzmimo da je $\mathscr{L}$ linearno uređena Heytingova algebra, i neka su $x, y \in L$ dva proizvoljna različita elementa. Ukoliko je $x < y$, onda imamo da je $x \otimes y = x \wedge y = x$ i prema (1.7) i (1.5) sledi da je

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = y \to x = y \to (y \otimes x) \geqslant x = x \otimes y,$$

pa na osnovu (1.12) zaključujemo da je $x \leftrightarrow y = x \otimes y$. Na isti način dokazujemo da $y < x$ povlači $x \leftrightarrow y = x \otimes y$, čime je dokaz leme završen. $\square$

U daljem tekstu $\mathscr{L}$ će biti linearno uređena, kompletna Heytingova algebra. U tom slučaju, za proizvoljan fazi podskup $f$ skupa $A$, fazi ekvivalencije $S_f$, $T_f$ i $E_f$ mogu se predstaviti na sledeći način:

$$S_f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x = y, \\ f(x) \wedge f(y) & \text{ako je } x \neq y, \end{cases},$$

$$T_f(x,y) = E_f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } f(x) = f(y), \\ f(x) \wedge f(y) & \text{ako je } f(x) \neq f(y). \end{cases}$$

Možemo primetiti da sve fazi ekvivalencije iz intervala $[S_f, E_f]$ (to su sve one čija je jedna klasa ekvivalencije $f$) imaju istu vrednost $f(x) \wedge f(y)$ na svim parovima $(x, y)$ takvim da je $f(x) \neq f(y)$, odnosno, na svim parovima $(x, y)$ van $\ker f$. Ako za svako $s \in L$ stavimo da je $f^{[s]} = \{x \in A \mid f(x) = s\}$, tada se ova situacija može objasniti Slikom 2.1.

**Teorema 2.3.1.** *Neka je $\mathscr{C}$ failija normalizovanih fazi podskupova skupa $A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\mathscr{C}$ je fazi semi-particija od $A$;*

(ii) *za svaka dva različita $f, g \in \mathscr{C}$ i svako $y \in A$ je*

$$f(y) \neq g(y) \;\Rightarrow\; f(y) \wedge g(y) = \|f \wedge g\|;$$

(iii) *za proizvoljne, različite $f, g \in \mathscr{C}$ i sve $x, y \in A$ je*

$$g(x) \neq g(y) \;\Rightarrow\; f(x) \wedge f(y) \leqslant g(x) \wedge g(y);$$

(iv) *za sve različite $f, g \in \mathscr{C}$ važe sledeći uslovi:*

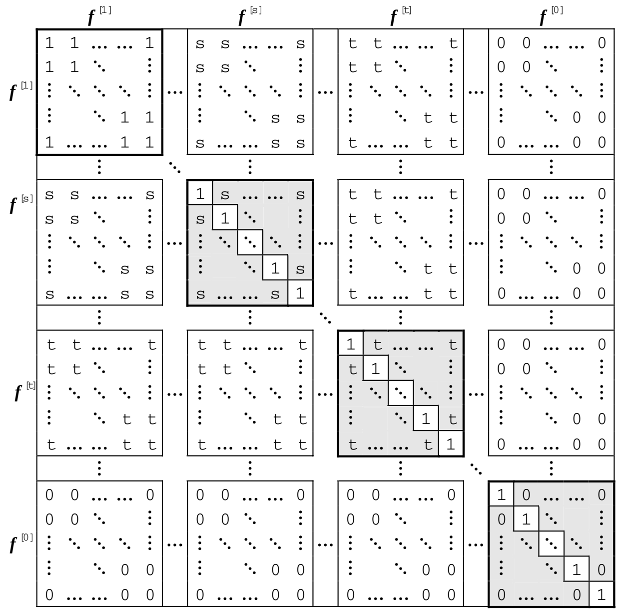
(B1) *$g(x) = g(y)$, za sve $x, y \in \widehat{f}$;*

(B2) *za sve $x, y \in A$, iz $f(x) \neq f(y)$ i $g(x) \neq g(y)$ sledi*

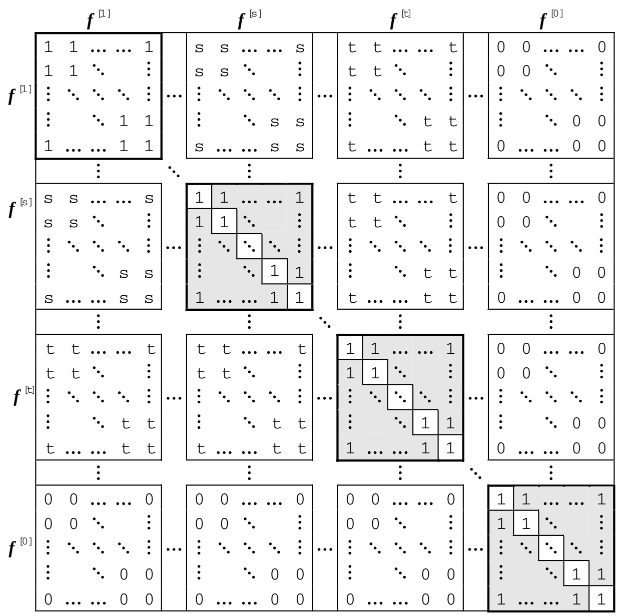
$$f(x) \wedge f(y) = g(x) \wedge g(y).$$

*Dokaz.* (i)⇔(ii). Primetimo najpre da se u slučaju kada se razmatraju fazi skupovi nad linearno uređenom kompletnom Heytingovom algebrom, uslov (ii) Teoreme 2.2.2 može drugačije zapisati kao

$$\|f \wedge g\| \leqslant f(y) \leftrightarrow g(y), \tag{2.22}$$




$S_f$




$E_f$

Slika 2.1. Fazi ekvivalencije iz intervala $[S_f, E_f]$ mogu se razlikovati od $S_f$ i $E_f$, kao i među sobom, samo u vrednostima u sivoj oblasti slike (ovde je $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$).

za sve $f, g \in \mathscr{C}$ i $y \in A$. Kako je desna strana nejednakosti (2.22) jednaka 1 kada je $f(y) = g(y)$, a nejednakost (2.22) je ekvivalentna sa

$$f(y) \neq g(y) \;\Rightarrow\; \|f \wedge g\| \leqslant f(y) \wedge g(y), \tag{2.23}$$

i kako prema definiciji visine fazi skupa uvek važi $f(y) \wedge g(y) \leqslant \|f \wedge g\|$, to zaključujemo da je nejednakost (2.23) ekvivalentna sa

$$f(y) \neq g(y) \;\Rightarrow\; \|f \wedge g\| = f(y) \wedge g(y).$$

Na osnovu toga i prema Teoremi 2.2.2 zaključujemo da su uslovi (i) i (ii) ekvivalentni.

(i)$\Leftrightarrow$(iii). Ekvivalentnost ova dva uslova može da se dokaže na isti način kao (i)$\Leftrightarrow$(ii).

(i)$\Rightarrow$(iv). Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija od $A$. Prema Posledici 2.2.2 važi (B1), i pošto smo pokazali da je (i)$\Leftrightarrow$(iii), uslov (B2) sledi iz (iii).

(iv)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da proizvoljni, različiti fazi skupovi $f, g \in \mathscr{C}$ zadovoljavaju uslove (B1) i (B2). Dokazaćemo da je svako $f \in \mathscr{C}$ klasa ekvivalencije fazi relacije $E = E_{\mathscr{C}}$.

Uočimo proizvoljne $f \in \mathscr{C}$, $x \in \widehat{f}$ i $y \in A$, i skup

$$\mathscr{C}_{x,y} = \{g \in \mathscr{C} \mid g(x) \neq g(y)\}.$$

Pretpostavimo najpre da je $f \in \mathscr{C}_{x,y}$. Tada za svako $g \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_{x,y}$ imamo da je $E_g(x, y) = 1$, a na osnovu uslova (B2) dobijamo da je $E_g(x, y) = E_f(x, y)$, za svako $g \in \mathscr{C}_{x,y}$. Prema tome

$$E_x(y) = E(x, y) = \bigwedge_{g \in \mathscr{C}} E_g(x, y) = \bigwedge_{g \in \mathscr{C}_{x,y}} E_g(x, y) = E_f(x, y) = f(y).$$

Dalje, pretpostavimo da $f \notin \mathscr{C}_{x,y}$, odnosno da je $f(x) = f(y)$. Tada $x, y \in \widehat{f}$, i iz (B1) sledi da je $g(x) = g(y)$, za svako $g \in \mathscr{C} \setminus \{f\}$, pa zaključujemo da je $E_g(x, y) = 1$, za proizvoljno $g \in \mathscr{C}$, i

$$E_x(y) = E(x, y) = \bigwedge_{g \in \mathscr{C}} E_g(x, y) = 1 = f(y).$$

Ovim smo pokazali da je $f = E_x$, pa je teorema dokazana. $\square$

Drugim rečima, uslov (B3) znači da se $E_f$ i $E_g$ moraju poklapati na svim parovima $(x, y)$ iz krisp skupa (relacije) $(\ker f)^c \cap (\ker g)^c = (\ker f \cup \ker g)^c$ (gde je sa $\varrho^c$ označen komplement obične relacije $\varrho \subseteq A^2$ u odnosu na $A^2$).

Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija skupa $A$ takva da za sve različite $x, y \in A$ postoji $f \in \mathscr{C}$ tako da je $f(x) \neq f(y)$. Tada za svaka dva različita $x, y \in A$, i za $f \in \mathscr{C}$ takav da je $f(x) \neq f(y)$, prema Lemi 2.3.1 imamo da je

$$f(x) \wedge f(y) = f(x) \leftrightarrow f(y),$$

pa važi

$$\bigwedge_{g \in \mathscr{C}} g(x) \leftrightarrow g(y) \leqslant f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x) \wedge f(y) \leqslant \bigvee_{g \in \mathscr{C}} h(x) \wedge h(y).$$

Odavde i iz Teorema 2.2.2 i 2.2.3 sledi da postoji jedinstvena fazi ekvivalencija za koja ima $\mathscr{C}$ kao svoju fazi semi-particiju. Na ovu činjenicu su ukazali Klawonn [71] i Demirci [42] (pogledati Posledicu 2 u [71] ili komentar neposredno iza Teoreme 3.5 u [42]).

**Teorema 2.3.2.** *Neka je $\mathscr{C}$ fazi semi-particija fazi ekvivalencije $E$ na skupu $A$. Tada je $\mathscr{C}$ generatorna familija od $E$ ako i samo ako je*

$$\bigcap_{f \in \mathscr{C}} \ker f \subseteq \widehat{E}. \tag{2.24}$$

*Dokaz.* Ako je $\mathscr{C}$ generatorna familija od $E$, onda inkluzija (2.24) sledi iz Teoreme 2.2.5 (b).

Obratno, ako važi (2.24), onda na osnovu Teoreme 2.2.5 (a) imamo da je $E_{\mathscr{C}} = T_{\mathscr{C}} \leqslant E \leqslant E_{\mathscr{C}}$, odakle dobijamo da je $E = E_{\mathscr{C}}$, odnosno da je $\mathscr{C}$ generatorna familija od $E$. $\square$

**Posledica 2.3.1.** *Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$. Tada je $E$ jednodimenzionalna ako i samo ako postoji klasa ekvivalencije $f$ od $E$ takva da je* $\ker f \subseteq \widehat{E}$.

Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$ i neka je $\mathscr{P}$ fazi particija indukovana sa $E$, odnosno familija svih njenih klasa ekvivalencije. Za proizvoljna dva različita elementa $x, y \in A$, za klasu ekvivalencije $f \in \mathscr{P}$ kažemo da *razdvaja elemente* $x$ i $y$ ako je $f(x) \neq f(y)$. Kolekciju svih klasa ekvivalencije od $E$ koja razdvajaju elemente $x$ i $y$ označićemo sa $\mathscr{P}_{x,y}$, tj.

$$\mathscr{P}_{x,y} = \{f \in \mathscr{P} \mid f(x) \neq f(y)\}.$$

Jednostavno se proverava da za sve $x, y \in A$ važi:

(C1) $\mathscr{P}_{x,y} = \mathscr{P}_{y,x}$;

(C2) $\mathscr{P}_{x,y} \neq \varnothing$ ako i samo ako je $E(x,y) < 1$;

(C3) ako je $E(x,y) = 1$, tj., $E_x = E_y$, onda je $\mathscr{P}_{x,z} = \mathscr{P}_{y,z}$, za svako $z \in A$.

Specijalno, ako je $E(x,y) < 1$, onda $E_x$ i $E_y$ razdvajaju elemente $x$ i $y$, tj., $E_x, E_y \in \mathscr{P}_{x,y}$.

Dalje, neka je

$$\mathscr{S}(E) = \{\mathscr{P}_{x,y} \,|\, x, y \in A,\ E(x,y) < 1\}.$$

i neka je $\mathscr{S}_{\min}(E)$ kolekcija svih minimalnih elemenata parcijalno uređenog skupa $(\mathscr{S}(E), \subseteq)$.

**Teorema 2.3.3.** *Neka je $E$ fazi ekvivalencija na skupu $A$, neka je $\mathscr{P}$ fazi particija indukovana sa $E$, i neka je $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\mathscr{C}$ je generatorna familija fazi relacije $E$;*

(ii) *$\mathscr{C}$ ima neprazan presek sa svim članovima familije $\mathscr{S}(E)$;*

(iii) *$\mathscr{C}$ ima neprazan presek sa svi članove familije $\mathscr{S}_{\min}(E)$.*

*Dokaz.* Skup $\mathscr{C}$ seče sve članove iz $\mathscr{S}(E)$ ako i samo ako za proizvoljne $x, y \in A$ za koje je $E(x,y) < 1$ postoji $f \in \mathscr{C}$ tako da je $f(x) \neq f(y)$, što je očito ekvivalentno sa

$$\bigcap_{f \in \mathscr{C}} \ker f \subseteq \widehat{E}, \tag{2.25}$$

i prema Teoremi 2.3.2 zaključujemo da je (i)⇔(ii).

Implikacija (ii)⇒(iii) je očigledna, dok je (iii)⇒(ii) neposredna posledica činjenice da proizvoljan skup iz $\mathscr{S}(E)$ sadrži neki skup iz $\mathscr{S}_{\min}(E)$. □

Neka je $\bar{A}$ podskup od $A$ koji ima osobinu da za svaki $f \in \mathscr{P}$ postoji tačno jedan element $a \in \bar{A}$ takav da je $f = E_a$, koji ćemo nazivati *predstavnik* te klase ekvivalencije. Drugim rečima, $\bar{A}$ je skup koji sadrži tačno po jedan element iz svake klase krisp relacije ekvivalencije $\widehat{E}$. Setimo se da se takvi skupovi nazivaju *poprečni preseci* od $\widehat{E}$ (engl. cross-section). Za svaka dva različita elementa $a, b \in \bar{A}$ je $E(a,b) < 1$. Prema uslovu (C3), za svaki par elemenata $x, y \in A$ za koje je $E(x,y) < 1$ postoji par različitih elemenata $a, b \in \bar{A}$ za koje je $\mathscr{P}_{x,y} = \mathscr{P}_{a,b}$, pa se $\mathscr{S}(E)$ može takođe predstaviti kao

$$\mathscr{S}(E) = \{\mathscr{P}_{a,b} \,|\, a, b \in \bar{A},\ a \neq b\}.$$

Dakle, kada budemo izračunavali kolekcije $\mathscr{S}(E)$ i $\mathscr{S}_{\min}(E)$, dovoljno je da razmatramo proizvoljan skup $\bar{A}$ predstavnika klasa fazi ekvivalencije $E$ umesto celog skupa $A$. Takođe je moguće razmatrati predstavnike klasa ekvivalencije, umesto samih klasa, kao članova familija $\mathscr{S}(E)$ i $\mathscr{S}_{\min}(E)$, i u tom slučaju $\mathscr{S}(E)$ i $\mathscr{S}_{\min}(E)$ će biti tretirani kao podskupovi od $\bar{A}$.

## 2.4. Algoritam za izračunavanje minimalne generatorne fazi semi-particije

U nastavku dajemo algoritam za izračunavanje minimalne generatorne fazi semi-particije.

**Algoritam 2.4.1.** Izračunavanje minimalne generatorne fazi semi-particije date fazi ekvivalencije $E$ na konačnom skupu $A = \{1, 2, \dots, n\}$:

1. Formiramo familiju $\mathscr{P}$ svih klasa ekvivalencije od $E$;
2. Biramo proizvoljan skup $\bar{A}$ predstavnika klasa ekvivalencije;
3. Za svaki par $i, j \in \bar{A}$ takav da je $i < j$ nalazimo skup $\mathscr{P}_{i,j}$, i formiramo kolekciju $\mathscr{S}(E) = \{\mathscr{P}_{i,j} \,|\, i, j \in \bar{A},\ i < j\}$;
4. Eliminišemo iz $\mathscr{S}(E)$ sve elemente koji nisu minimalni, i time formiramo kolekciju $\mathscr{S}_{\min}(E)$ svih minimalnih elemenata od $\mathscr{S}(E)$;
5. Nalazimo podskup $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}$ sa minimalnim brojem elemenata, koji seče sve članove kolekcije $\mathscr{S}_{\min}(E)$.

Kolekciju $\mathscr{C}$ koju dobijamo kao rezultat na kraju ovog postupka je minimalna generatorna fazi semi-particija od $E$.

Daćemo kratko objašnjenje funkcionisanja ovog algoritma.

Ako je fazi ekvivalencija $E$ na $A$ predstavljena matricom reda $n \times n$, onda su njene klase ekvivalencije predstavljene vrstama te matrice, što znači da u prvom koraku iz matrice fazi ekvivalencije $E$ izdvajamo vrste kojima su predstavljene njene klase.

U drugom koraku, za svako $i \in A$ i $j > i$ proveravamo da li je $j$-ta vrsta matrice jednaka $i$-toj, i ako to važi, eliminišemo $j$ iz $A$. Od elemenata koji su nakon tog postupka ostali u $A$ formira se skup $\bar{A}$ predstavnika klasa ekvivalencije fazi ekvivalencije $E$.

U trećem koraku, za svaki par $i, j \in \bar{A}$ za koji je $i < j$, i za svaki $k \in \bar{A}$, proveravamo da li se $k$-te pozicije u $i$-toj i $j$-toj koloni razlikuju, i formiramo skup $\mathscr{P}_{i,j}$ od svih onih $k \in \bar{A}$ koji imaju to svojstvo. Na taj način formiramo kolekciju $\mathscr{S}(E)$.

U četvrtom koraku proveravamo da li je proizvoljno $P \in \mathscr{S}(E)$ minimalni element u $\mathscr{S}(E)$. Naime, za svako $Q \in \mathscr{S}(E)$ proveravamo da li je $Q \subset P$. Ako nađemo takvo $Q$, zaključujemo da $P$ nije minimalni element u $\mathscr{S}(E)$, pa prekidamo proveru sa njim i nastavljamo proveru sa narednim elementom iz $\mathscr{S}(E)$. Sa druge strane, ako za svako $Q \in \mathscr{S}(E)$ dobijemo da $Q \not\subset P$, onda zaključujemo da je $P$ minimalni element kolekcije $\mathscr{S}(E)$, i smeštamo ga u $\mathscr{S}_{\min}(E)$. Na taj način formiramo kolekciju $\mathscr{S}_{\min}(E)$.

Na kraju, u petom koraku određujemo sve poprečne presekečlanova kolekcije $\mathscr{S}_{\min}(E)$, uzimajući po jedan element iz svakog člana kolekcije $\mathscr{S}_{\min}(E)$, i na taj način nalazimo poprečne preseke sa minimalnim brojem elemenata. Oni predstavljaju minimalne generatorne fazi semi-particije od $E$.

Slede dva primera koji demonstriraju primenu ovog algoritma.

**Primer 2.4.1.** Neka je data $\mathscr{L}$ Gödelova struktura, i neka su fazi ekvivalencije $E$ i $F$ na $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ date sa

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 0.2 | 1.0 | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.2 | 0.3 | 1.0 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 1.0 | 0.3 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 1.0 | 0.8 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.8 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 |

$E$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 0.4 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 1.0 | 0.4 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 1.0 | 0.3 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 |

$F$

(a) Kako je $\widehat{E}$ relacija jednakosti na $A$, to $E$ ima 8 različitih klasa, tj., $\mathscr{P} = \{E_1, E_2, \dots, E_8\}$ i $\bar{A} = A$. Nadalje ćemo, umesto klasa pisati njihove predstavnike, pa imamo sledeće:

$\mathscr{P}_{1,i} = \{1, \ldots, 6\}$, for $2 \leqslant i \leqslant 6$;
$\mathscr{P}_{2,5} = \mathscr{P}_{2,6} = \mathscr{P}_{4,5} = \mathscr{P}_{4,6} = \{2, 4, 5, 6\}$;
$\mathscr{P}_{i,7} = \{1, \ldots, 6, 7\}$, for $1 \leqslant i \leqslant 6$;
$\mathscr{P}_{i,8} = \{1, \ldots, 6, 8\}$, for $1 \leqslant i \leqslant 6$;
$\mathscr{P}_{2,3} = \mathscr{P}_{3,4} = \{2, 3, 4\}$;
$\mathscr{P}_{2,4} = \{2, 4\}$.
$\mathscr{P}_{3,5} = \mathscr{P}_{3,6} = \{3, 5, 6\}$;
$\mathscr{P}_{5,6} = \{5, 6\}$;
$\mathscr{P}_{7,8} = \{7, 8\}$;

Eliminacijom skupova koji nisu minimalni, dobijamo da se $\mathscr{S}_{\min}(E)$ sastoji od skupova $\{2, 4\}$, $\{5, 6\}$ i $\{7, 8\}$, pa $E$ ima 8 minimalnih generatornih fazi semi-particija datih sa $\{E_i, E_j, E_k\}$, za proizvoljan izbor $i \in \{2, 4\}$, $j \in \{5, 6\}$ i $k \in \{7, 8\}$.

Primetimo da ni jedna od ovih generatornih familija nije minimalna generatorna familija u kolekciji svih generatornih familija od $E$. Naime, $E$ ima dvoelementnu generatornu familiju $\{f, g\}$, gde su $f$ i $g$ fazi skupovi dati sa

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 0.1 | 0.0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 0.3 | 0.8 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |

Ovo je minimalna generatorna familija, jer, ukoliko bi $E$ imala jednoelementnu generatornu familiju, onda bi njen jedini član morao biti klasa ekvivalencije od $E$.

(b) Jasno je da $F$ ima 5 različitih klasa, i možemo uzeti da je

$$\bar{A} = \{1, 4, 5, 6, 7\}, \quad \mathscr{P} = \{F_1, F_4, F_5, F_6, F_7\}.$$

U tom slučaju dobijamo da je

$\mathscr{P}_{1,4} = \{1, 4\}$;
$\mathscr{P}_{1,5} = \{1, 5\}$;
$\mathscr{P}_{1,6} = \mathscr{P}_{4,6} = \mathscr{P}_{5,6} = \{1, 4, 5, 6\}$,
$\mathscr{P}_{1,7} = \mathscr{P}_{4,7} = \mathscr{P}_{5,7} = \mathscr{P}_{6,7} = \bar{A}$;
$\mathscr{P}_{4,5} = \{4, 5\}$;

pa imamo da se $\mathscr{S}_{\min}(F)$ sastoji od skupova $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$ i $\{4, 5\}$. Očigledno, skupovi sa minimalnim brojem elemenata koji seku sve članove od $\mathscr{S}_{\min}(F)$ su isti ti skupovi $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$ i $\{4, 5\}$, pa $F$ ima 3 minimalne generatorne fazi semi-particije: $\{F_1, F_4\}$, $\{F_1, F_5\}$ i $\{F_4, F_5\}$.

Naredni primer pokazuje da Teorema 2.3.2, kao i Teorema 2.3.3 i Algoritam 2.4.1, važe samo u slučaju kada je kompletna reziduirana mreža $\mathscr{L}$ istinitosnih vrednosti linearno uređena Heytingova algebra, odnosno, ako zadovoljava uslov (2.20).

**Primer 2.4.2.** Pretpostavimo da je $\mathscr{L}$ proizvoljna kompletna reziduirana mreža koja ne zadovoljava uslov (2.20), tj., postoje $\alpha, \beta \in L$ takvi da je $\alpha \neq \beta$ i $\alpha \otimes \beta < \alpha \leftrightarrow \beta$.

Kako $\alpha = 1$ ili $\beta = 1$ povlači $\alpha \otimes \beta = \alpha \leftrightarrow \beta$, zaključujemo da je $\alpha < 1$ i $\beta < 1$. Takođe, iz $\alpha \neq \beta$ sledi da je $\alpha \leftrightarrow \beta < 1$. Stavimo da je $\gamma = \alpha \leftrightarrow \beta$.

Sada, neka su $f$ i $g$ fazi podskupovi skupa $A = \{1, 2, 3\}$ zadati sledećim tablicama, i neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A$ generisana familijom $\{f, g\}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline f & 1 & \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline g & 1 & \beta & \alpha \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{E_f}{\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & \alpha & \beta \\ \hline 2 & \alpha & 1 & \gamma \\ \hline 3 & \beta & \gamma & 1 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{E_g}{\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & \beta & \alpha \\ \hline 2 & \beta & 1 & \gamma \\ \hline 3 & \alpha & \gamma & 1 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{E = E_f \wedge E_g}{\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & \alpha\wedge\beta & \alpha\wedge\beta \\ \hline 2 & \alpha\wedge\beta & 1 & \gamma \\ \hline 3 & \alpha\wedge\beta & \gamma & 1 \\ \hline \end{array}}$$

Tada je $\ker f = \ker g = \Delta_A = \widehat{E}$ (gde je $\Delta_A$ relacija ekvivalencije na $A$), i iz tablica koje predstavljaju $E_f$, $E_g$ i $E$ se vidi da je $E \neq E_f$ i $E \neq E_g$, što znači da familije $\{f\}$ i $\{g\}$ ne generišu $E$.

Ovaj primer pokazuje i to da je uslov (2.20) neophodan da bi $T_f = E_f$ bilo zadovoljeno za svako $f$ nad $\mathscr{L}$, jer ovde imamo da je

$$T_f(2,3) = \alpha \otimes \beta < \alpha \leftrightarrow \beta = E_f(2,3),$$

odakle se vidi da je $T_f < E_f$.

# Glava 3

# Uniformne fazi relacije i fazi preslikavanja

U teoriji fazi skupova bilo je dosta različitih pristupa konceptu fazi funkcije ili fazi preslikavanja. Uvelikom broju radova razne vrste fazi funkcija iz skupa $A$ u skup $B$ definisane su polazeći od date fazi ekvivalencije $E$ na $A$ i date fazi ekvivalencije $F$ na $B$. Specijalno, ovakav pristup korišćen je u definiciji parcijalnih fazi funkcija i fazi funkcija, koje je dao Klawonn u [71], u definiciji perfektnih i jakih fazi funkcija i fazi funkcija, datih od strane Demircija u [31, 33, 39], kao i u definicijama drugih srodnih koncepata koji su izučavani u [3], [16], [31, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 52], [59], [62], [70, 72, 74], i u drugim radovima. Takve fazi funkcije, koje su bazirane na fazi ekvivalencijama, pokazale su se kao veoma korisne u mnogim primenama u fazi kontroli, aproksimativnom rezonovanju, neodređenoj algebri (vague algebra) i drugim oblastima.

Cilj ove glave je da ponudi takav koncept fazi preslikavanja koji će obezbediti međusobnu korespodenciju između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija, analognu onoj koja postoji između običnih preslikavanja i relacija ekvivalencije. Treba istaći da nijedan do sada izučavan koncept fazi preslikavanja ili fazi funkcije nije obezbedio takvu korespondenciju. Dobro je poznato da se korespondencija između običnih krisp preslikavanja i relacija ekvivalencije uspostavlja pomoću jezgra preslikavanja, čije se klase ekvivalencije sastoje od onih elemenata domena koji imaju iste slike. Motivisani ovom činjenicom, u Odeljku 3.1 proizvoljnoj fazi relaciji $\varphi$ između skupova $A$ i $B$ pridružujemo podskupove $\operatorname{Dom}\varphi \subseteq A$ i $\operatorname{Im}\varphi \subseteq B$, koje nazivamo domenom i slikom od $\varphi$, fazi ekvivalencije $\ker\varphi$ na $\operatorname{Dom}\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$ na $\operatorname{Im}\varphi$, kao i kolekcije $\{\varphi_p\}_{p\in\operatorname{Im}\varphi}$, fazi podskupova od $\operatorname{Dom}\varphi$, i $\{\varphi_x\}_{x\in\operatorname{Dom}\varphi}$, fazi podskupova od $\operatorname{Im}\varphi$, koje bi pod izvesnim uslovima trebale da budu fazi particije koje odgovaraju fazi ekvivalencijama $\ker\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$. U opštem slučaju ove kolekcije nisu fazi particije, ali ako to jesu, onda su one upravo fazi particije koje odgovaraju fazi ekvivalencijama $\ker\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$. U tom slučaju se $\varphi$ naziva uniformna fazi relacija. Ovakav naziv koristimo jer se pokazuje da postoji bijektivno preslikavanje između tih fazi particija koje se može shvatiti kao izvesna vrsta "uniformnosti" između njih.

Osnovna svojstva uniformnih fazi relacija prikazana su u Odeljku 3.2. Tu je data njihova karakterizacija u terminima jezgra i ko-jezgra, dokazana je teorema o egzistenciji uniformne fazi relacije sa datim domenom, slikom, jezgrom i ko-jezgrom, i prikazana su dva metoda za konstrukciju uniformnih fazi relacija. U Odeljku 3.3 definiše se parcijalno fazi preslikavanje, kao uniformna fazi relacija iz $A$ u $B$ čije ko-jezro je fazi jednakost, i fazi preslikavanje, kao parcijalno fazi preslikavanje čiji je domen ceo skup $A$. Parcijalna fazi preslikavanja i fazi preslikavanja okarakterisana su pomoću njihovih krisp delova, jezgara i ko-jezgara. I ovde je dokazana teorema o egzistenciji parcijalnog fazi preslikavanja sa datim domenom, slikom, jezgrom i ko-jezgrom, i prikazana su dva načina za konstrukciju parcijalnih fazi preslikavanja.

Kako uobičajena fazi relacijska kompozicija dva fazi preslikavanja ne mora biti fazi preslikavanje, u Odeljku 3.4 se uvodi nova vrsta kompozicije koja je tesno povezana sa kompozicijom običnih krisp preslikavanja i očuvava svojstvo "biti fazi preslikavanje". Takođe je uvedena i treća vrsta kompozicije, dobijena modifikacijom fazi relacijske kompozicije, i objašnjen odnos između sve tri vrste kompozicija.

Međusobna korespodencija između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija uspostavljena je u Odeljku 3.5, i ona će predstavljati polaznu tačku u uspostavljanju korespodencije između fazi homomorfizama i fazi kongruencija na algebrama. Konačno, u Odeljku 3.6 se pokazuje da postoji veza između našeg koncepta uniformne fazi relacije i fazi preslikavanja, i nekih drugih poznatih koncepata fazi funkcija. Specijaalno, dati su komentari i primeri koji ukazuju na sličnosti i razlike između uniformnih fazi relacija i parcijalnih fazi funkcija, koje je izučavao Klawonn u [71], i perfektnih fazi funkcija, kojima se bavio Demirci u [31, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 52], kao i između naših fazi preslikavanja i fazi funkcija koje je izučavao Nemitz u [97].

Svi rezultati u ovoj glavi su originalni i tesno su povezani sa rezultatima do kojih su ranije došli Demirci [31, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41], Demirci i Recasens [52], Höhle [59, 62], Klawonn [71], Klawonn, Gebhardt i Kruse [70], Klawonn i Kruse [72, 73, 74], Nemitz [97] i drugi.

## 3.1. Jezgro i ko-jezgro fazi relacije

Za fazi relaciju $\varphi : A \to B$ definisaćemo *domen* od $\varphi$, u oznaci $\mathrm{Dom}\,\varphi$, sa

$$\mathrm{Dom}\,\varphi = \{x \in A \,|\, (\exists p \in B)\, \varphi(x,p) = 1\}, \tag{3.1}$$

i *sliku* od $\varphi$, u oznaci $\mathrm{Im}\,\varphi$, sa

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{p \in B \,|\, (\exists x \in A)\, \varphi(x,p) = 1\}. \tag{3.2}$$

Primetimo da je $\mathrm{Dom}\,\varphi$ neprazan skup ako i samo ako je $\mathrm{Im}\,\varphi$ neprazan, i to važi ako i samo ako je $\varphi$ normalizovana fazi relacija.

Za normalizovanu fazi relaciju $\varphi : A \to B$, fazi relacija $\ker\varphi$ na $\mathrm{Dom}\,\varphi$ definisana sa

$$(\ker\varphi)(x,y) = \bigwedge_{p \in \mathrm{Im}\,\varphi} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(y,p), \tag{3.3}$$

za sve $x, y \in \mathrm{Dom}\,\varphi$, i fazi relacija $\mathrm{cok}\,\varphi$ na $\mathrm{Im}\,\varphi$, definisana sa

$$(\mathrm{cok}\,\varphi)(p,q) = \bigwedge_{x \in \mathrm{Dom}\,\varphi} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q), \tag{3.4}$$

za sve $p, q \in \mathrm{Im}\,\varphi$, jesu fazi ekvivalencije. Fazi relaciju $\ker\varphi$ nazivamo *jezgro* od $\varphi$, a $\mathrm{cok}\,\varphi$ je *ko-jezgro* od $\varphi$.

Pored toga, za svako $x \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ možemo definisati fazi podskup $\varphi_x \in \mathscr{F}(\mathrm{Im}\,\varphi)$ sa

$$\varphi_x(p) = \varphi(x,p), \quad \text{za svako } p \in \mathrm{Im}\,\varphi, \tag{3.5}$$

i za svako $p \in \mathrm{Im}\,\varphi$možemo definisati fazi podskup $\varphi_p \in \mathscr{F}(\mathrm{Dom}\,\varphi)$ sa

$$\varphi_p(x) = \varphi(x,p), \quad \text{za svako } x \in \mathrm{Dom}\,\varphi. \tag{3.6}$$

Jasno, $\varphi_x$ i $\varphi_p$ su normalizovani fazi podskupovi, za sve elemente $x \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ i $p \in \mathrm{Im}\,\varphi$.

Ovde se prirodno nameće pitanje: Zašto su navedene fazi relacije i fazi podskupovi definisani na $\mathrm{Dom}\,\varphi$ i $\mathrm{Im}\,\varphi$, umesto na celim skupovima $A$ i $B$?

Kao što smo već ranije rekli, razmatraćemo slučaj kada svako $\varphi_p$ jeste klasa fazi ekvivalencije $\ker\varphi$, a svako $\varphi_x$ jeste klasa fazi ekvivalencije $\mathrm{cok}\,\varphi$. Jasno, to je moguće samo kada su ovi fazi podskupovi normalizovani, što važi samo onda kada su oni definisani nad podskupovima $\mathrm{Im}\,\varphi$ i $\mathrm{Dom}\,\varphi$, kao u (3.6) i (3.5).

Ovo ilustrujemo sledećim primerom:

**Primer 3.1.1.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka su dati skupovi $A = \{x_1, x_2\}$ i $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Razmotrimo fazi relaciju $\varphi : A \to B$ datu sledećom tablicom:

| $\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| $x_2$ | 0.4 | 0.1 | 1 | 0.3 |

Tada je $\mathrm{Dom}\,\varphi = \{x_1, x_2\} = A$ i $\mathrm{Im}\,\varphi = \{p_1, p_3\}$, a jezgro $\ker\varphi$ i ko-jezgro $\mathrm{cok}\,\varphi$ od $\varphi$ su predstavljeni sledećim tablicama:

| $\ker\varphi$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 |

| $\mathrm{cok}\,\varphi$ | $p_1$ | $p_3$ |
|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.4 |
| $p_3$ | 0.4 | 1 |

Jasno je da su $\{\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}\}$ i $\{\varphi_{p_1}, \varphi_{p_3}\}$ fazi particije skupova $\mathrm{Dom}\,\varphi$ i $\mathrm{Im}\,\varphi$, koje odgovaraju fazi relacjama $\ker\varphi$ i $\mathrm{cok}\,\varphi$, tim redom.

Ali, ako bi zamenili $\mathrm{Dom}\,\varphi$ sa $A$ i $\mathrm{Im}\,\varphi$ sa $B$ u definicijama fazi relacija $\ker\varphi$ i $\mathrm{cok}\,\varphi$, i fazi podskupova $\varphi_x$ i $\varphi_p$, dobili bi fazi relacije $E = \ker^*\varphi$ na $A$ i $F = \mathrm{cok}^*\varphi$ na $B$, i fazi podskupove $\varphi_x^*$ od $A$ i $\varphi_p^*$ od $B$, definisane sa

$$E(x,y) = \bigwedge_{p\in B} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(y,p) \quad \text{i} \quad F(p,q) = \bigwedge_{x\in A} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q), \tag{3.7}$$

$$\varphi_x^*(p) = \varphi(x,p) \quad \text{i} \quad \varphi_p^*(x) = \varphi(x,p), \quad \text{za sve } x \in A \text{ i } p \in B, \tag{3.8}$$

koji su predstavljeni sledećim tablicama:

| $E$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.2 |
| $x_2$ | 0.2 | 1 |

| $F$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| $p_2$ | 0.1 | 1 | 0.1 | 0.1 |
| $p_3$ | 0.4 | 0.1 | 1 | 0.2 |
| $p_4$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 1 |

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_{x_1}^*$ | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_{x_2}^*$ | 0.4 | 0.1 | 1 | 0.3 |

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_1}^*$ | 1 | 0.4 |

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_2}^*$ | 0.1 | 0.1 |

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_3}^*$ | 0.4 | 1 |

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_4}^*$ | 0.2 | 0.3 |

Vidimo da je $\varphi_{x_1}^* = F_{p_1}$, ali $\varphi_{x_2}^*$ nije klasa fazi ekvivalencije $F$. Osim toga, $\{\varphi_{x_1}^*, \varphi_{x_2}^*\}$ nije čak ni fazi semi-particija od $B$, jer je

$$\bigvee_{x\in A} \varphi_x^*(p_1) \otimes \varphi_x^*(p_4) = 0.3 > 0.2 = \bigwedge_{x\in A} \varphi_x^*(p_1) \leftrightarrow \varphi_x^*(p_4).$$

Jasno je i da $\{\varphi^*_{p_1}, \varphi^*_{p_2}, \varphi^*_{p_3}, \varphi^*_{p_4}\}$ nije fazi semi-particija od $A$, jer fazi podskupovi $\varphi^*_{p_2}$ i $\varphi^*_{p_4}$ nisu normalizovani. Ako eliminišemo $\varphi^*_{p_2}$ i $\varphi^*_{p_4}$ iz ove familije, onda je rezultujuća familija $\{\varphi^*_{p_1}, \varphi^*_{p_3}\}$ fazi particija od $A$, ali ta fazi particija odgovara fazi ekvivalenciji $\ker\varphi$, a ne relaciji $E$.

Ako je $\theta$ krisp relacija, onda je $\theta_x$ običan podskup od $\operatorname{Im}\theta$ definisan sa $\theta_x = \{p \in \operatorname{Im}\theta \,|\, (x,p) \in \theta\}$ za svako $x \in \operatorname{Dom}\theta$, dok je $\theta_p$ krisp podskup od $\operatorname{Dom}\theta$ dat sa $\theta_p = \{x \in \operatorname{Dom}\theta \,|\, (x,p) \in \theta\}$ za svako $p \in \operatorname{Im}\theta$. U ovom slučaju su $\ker\theta$ i $\operatorname{cok}\theta$ obične relacije ekvivalencije.

Naredna lema daje neke osobine fazi relacije između dva skupa, koje će biti korisne u daljem radu.

**Lema 3.1.1.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ normalizovana fazi relacija. Tada je*

(i) $\operatorname{Dom}\widehat{\varphi} = \operatorname{Dom}\varphi$ *i* $\operatorname{Im}\widehat{\varphi} = \operatorname{Im}\varphi$*;*

(ii) $\widehat{\varphi}_x = \widehat{\varphi_x}$ *i* $\widehat{\varphi}_p = \widehat{\varphi_p}$*, za svaki* $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ *i* $p \in \operatorname{Im}\varphi$*;*

(iii) $\widehat{\ker\varphi} \leqslant \ker\widehat{\varphi}$ *i* $\widehat{\operatorname{cok}\varphi} \leqslant \operatorname{cok}\widehat{\varphi}$*.*

*Dokaz.* (i) Ako je $\varphi : A \to B$ normalizovana fazi relacija između skupova $A$ i $B$, tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}\varphi &= \{x \in A \,|\, (\exists p \in B)\, \varphi(x,p) = 1\} \\ &= \{x \in A \,|\, (\exists p \in B)\, p = \widehat{\varphi}(x)\} \\ &= \operatorname{Dom}\widehat{\varphi}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\varphi &= \{p \in B \,|\, (\exists x \in A)\, \varphi(x,p) = 1\} \\ &= \{p \in B \,|\, (\exists x \in A)\, p = \widehat{\varphi}(x)\} \\ &= \operatorname{Im}\widehat{\varphi}\ . \end{aligned}$$

(ii) Za proizvoljne $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $p \in \operatorname{Im}\varphi$ važi

$$\widehat{\varphi}_x = \{p \in B \,|\, \varphi(x,p) = 1\} = \{p \in B \,|\, \varphi_x(p) = 1\} = \widehat{\varphi_x}\ ,$$

$$\widehat{\varphi}_p = \{x \in A \,|\, \varphi(x,p) = 1\} = \{x \in A \,|\, \varphi_p(x) = 1\} = \widehat{\varphi_p}\ .$$

(iii) Primetimo da je

$$\begin{aligned}
\widehat{\ker\varphi} &= \{(x,y)\in(\mathrm{Dom}\,\varphi)^2 \mid \ker\varphi(x,y)=1\}\\
&= \{(x,y)\in(\mathrm{Dom}\,\varphi)^2 \mid (\forall p\in B)\,\varphi(x,p)\leftrightarrow\varphi(y,p)=1\}\\
&= \{(x,y)\in(\mathrm{Dom}\,\varphi)^2 \mid (\forall p\in B)\,\varphi(x,p)=\varphi(y,p)\}\\
&\leqslant \{(x,y)\in(\mathrm{Dom}\,\varphi)^2 \mid (\forall p\in B)\,\varphi(x,p)=\varphi(y,p)=1\}\\
&= \{(x,y)\in(\mathrm{Dom}\,\varphi)^2 \mid \widehat{\varphi}(x)=\widehat{\varphi}(y)\} = \ker\widehat{\varphi}.
\end{aligned}$$

Takođe, za fazi relaciju $\psi : B \to A$ koja je definisana sa $\psi(p,x)=\varphi(x,p)$, za sve $x\in A$ i $p\in B$, prema prethodnom delu tvrđenja važi $\widehat{\ker\psi}\leqslant\ker\widehat{\psi}$. Kako je $\ker\psi=\mathrm{cok}\,\varphi$, jasno je da je $\widehat{\mathrm{cok}\,\varphi}\leqslant\mathrm{cok}\,\widehat{\varphi}$, što je i trebalo dokazati. □

Primetimo da jednakosti $\ker\widehat{\varphi}=\widehat{\ker\varphi}$ i $\mathrm{cok}\,\widehat{\varphi}=\widehat{\mathrm{cok}\,\varphi}$ ne moraju da važe, što pokazuje sledeći primer:

**Primer 3.1.2.** Neka je $\mathscr{L}=([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ Gödelova struktura, i neka su dati skupovi $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ i $B=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$.

Neka su fazi relacija $\varphi : A\to B$, kao i njeno jezgro $\ker\varphi$ i njen krisp deo $\widehat{\varphi}$, i krisp relacije $\widehat{\ker\varphi}$ i $\ker\widehat{\varphi}$, predstavljeni sledećim tabelama:

| $\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.4 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |

| $\ker\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.3 | 0.2 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.3 | 1 | 0.2 | 0.3 |
| $x_3$ | 0.2 | 0.2 | 1 | 0.2 |
| $x_4$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 1 |

| $\widehat{\varphi}$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

| $\widehat{\ker\varphi}$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

| $\ker\widehat{\varphi}$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

Jasno je da je $\ker \widehat{\varphi} \neq \widehat{\ker \varphi}$.

Iz ovoga takođe sledi da je $\operatorname{cok} \widehat{\psi} \neq \widehat{\operatorname{cok} \psi}$, gde je $\psi : B \to A$ fazi relacija definisana sa $\psi(p,x) = \varphi(x,p)$, za sve $x \in A$ i $p \in B$.

## 3.2. Uniformne fazi relacije

Vraćamo se ponovo na kolekcije $\{\varphi_p\}_{p\in \operatorname{Im}\varphi}$ i $\{\varphi_x\}_{x\in \operatorname{Dom}\varphi}$. Rekli smo da ćemo razmatrati slučaj kada te kolekcije jesu fazi particije od $\operatorname{Dom}\varphi$ i $\operatorname{Im}\varphi$, i to fazi particije koje odgovaraju fazi ekvivalencijama $\ker\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$, tim redom. U opštem slučaju, ove kolekcije nisu obavezno fazi particije, što ilustruje sledeći primer.

**Primer 3.2.1.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka su dati skupovi $A = \{x_1, x_2\}$ i $B = \{p_1, p_2\}$.

Razmotrimo fazi relaciju $\varphi : A \to B$ koja je data sledećom tablicom:

| $\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 |

Tada je $\operatorname{Dom}\varphi = A$ i $\operatorname{Im}\varphi = B$, i fazi podskupovi $\varphi_{p_1}$, $\varphi_{p_2}$, $\varphi_{x_1}$ i $\varphi_{x_2}$ su predstavljeni sledećim tablicama:

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_1}$ | 1 | 0.4 |

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{p_2}$ | 0.3 | 1 |

| | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{x_1}$ | 1 | 0.3 |

| | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_{x_2}$ | 0.4 | 1 |

Vidimo da kolekcija $\{\varphi_{p_1}, \varphi_{p_2}\}$ ne zadovoljava nejednakost (2.7) iz Teoreme 2.2.2, jer je

$$\bigvee_{p\in B} \varphi_p(x_1) \otimes \varphi_p(x_2) = 0.4 > 0.3 = \bigwedge_{p\in B} \varphi_p(x_1) \leftrightarrow \varphi_p(x_2),$$

odnosno nije fazi particija. Slično pokazujemo da $\{\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}\}$ nije fazi particija. Primetimo takođe da se fazi ekvivalencije $\ker\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$ date sledećim tablicama:

| $\ker\varphi$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.3 | 1 |

| $\operatorname{cok}\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.3 |
| $p_2$ | 0.3 | 1 |

Potrebni i dovoljni uslovi za fazi relaciju $\varphi : A \to B$ pod kojima kolekcije $\{\varphi_p\}_{p\in \mathrm{Im}\,\varphi}$ i $\{\varphi_x\}_{x\in \mathrm{Dom}\,\varphi}$ jesu fazi particije određeni su narednom teoremom:

**Teorema 3.2.1.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i $\varphi : A \to B$ je normalizovana fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\{\varphi_p\}_{p\in \mathrm{Im}\,\varphi}$ *je fazi particija od* $\mathrm{Dom}\,\varphi$;

(ii) $\{\varphi_x\}_{x\in \mathrm{Dom}\,\varphi}$ *je fazi particija od* $\mathrm{Im}\,\varphi$;

(iii) *za sve* $x, y \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ *važi*

$$\bigvee_{p\in \mathrm{Im}\,\varphi} \varphi(x,p) \otimes \varphi(y,p) \leqslant \bigwedge_{q\in \mathrm{Im}\,\varphi} \varphi(x,q) \leftrightarrow \varphi(y,q); \tag{3.9}$$

(iv) *za sve* $p, q \in \mathrm{Im}\,\varphi$ *važi*

$$\bigvee_{x\in \mathrm{Dom}\,\varphi} \varphi(x,p) \otimes \varphi(x,q) \leqslant \bigwedge_{y\in \mathrm{Dom}\,\varphi} \varphi(y,p) \leftrightarrow \varphi(y,q). \tag{3.10}$$

*Dokaz.* Prema Teoremi 2.2.2 uslovi (iii) i (iv) su ekvivalentni, i svaki od njih je ekvivalentan zahtevu da je $\{\varphi_p\}_{p\in \mathrm{Im}\,\varphi}$ fazi semi-particija od $\mathrm{Dom}\,\varphi$ i $\{\varphi_x\}_{x\in \mathrm{Dom}\,\varphi}$ fazi semi-particija od $\mathrm{Im}\,\varphi$. Dalje, na osnovu definicija za $\mathrm{Dom}\,\varphi$ i $\mathrm{Im}\,\varphi$, i prema Teoremi 2.2.4, obe kolekcije $\{\varphi_p\}_{p\in \mathrm{Im}\,\varphi}$ i $\{\varphi_x\}_{x\in \mathrm{Dom}\,\varphi}$ su fazi semi-particije ako i samo ako su fazi particije. Ovim je dokaz završen. □

Fazi relaciju $\varphi : A \to B$ koja zadovoljava uslove Teoreme 3.2.1 nazivaćemo *uniformna fazi relacija* iz $A$ u $B$. Razlog zbog čega koristimo ovakav naziv biće objašnjen kasnije. *Uniformna relacija* je uniformna fazi relacija, koja je istovremeno i krisp relacija.

Kao neposrednu posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeće:

**Posledica 3.2.1.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\theta : A \to B$ neprazna relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\theta$ *je uniformna relacija;*

(ii) $\{\theta_p\}_{p\in \mathrm{Im}\,\theta}$ *je particija od* $\mathrm{Dom}\,\theta$;

(iii) $\{\theta_x\}_{x\in \mathrm{Dom}\,\theta}$ *je particija od* $\mathrm{Im}\,\theta$.

**Posledica 3.2.2.** *Ako su $A$ i $B$ neprazni skupovi i $\varphi : A \to B$ je uniformna fazi relacija, onda njen krisp deo $\widehat{\varphi}$ jeste uniformna relacija.*

Ako je $\varphi : A \to B$ uniformna fazi relacija, tada prema (2.13) sledi da nejednakosti u (3.9) i (3.10) mogu da se zamene jednakostima.

Osim toga, ako je $\varphi$ uniformna fazi relacija, onda je $\{\varphi_p\}_{p\in \operatorname{Im}\varphi}$ upravo ona fazi particija od $\operatorname{Dom}\varphi$ koja odgovara fazi ekvivalenciji $\ker\varphi$, i može se predstaviti i na sledeći način:

$$(\ker\varphi)(x,y) = \bigvee_{p\in \operatorname{Im}\varphi} \varphi(x,p)\otimes\varphi(y,p), \tag{3.11}$$

za sve $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$.

Slično, $\{\varphi_x\}_{x\in \operatorname{Dom}\varphi}$ je upravo ona fazi particija od $\operatorname{Im}\varphi$ koja odgovara fazi ekvivalenciji $\operatorname{cok}\varphi$, i može se predstaviti i na sledeći način:

$$(\operatorname{cok}\varphi)(p,q) = \bigvee_{x\in \operatorname{Dom}\varphi} \varphi(x,p)\otimes\varphi(x,q), \tag{3.12}$$

za sve $p, q \in \operatorname{Im}\varphi$.

Narednom teoremom dajemo razne karakterizacije uniformnih fazi relacija.

**Teorema 3.2.2.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ normalizovana fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\varphi$ je uniformna fazi relacija;*

(ii) *$(\ker\varphi)(x,y) = \varphi(x,q)$, za sve $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$ i svaki $q \in \operatorname{Im}\varphi$ za koji je $\varphi(y,q) = 1$;*

(iii) *$(\operatorname{cok}\varphi)(p,q) = \varphi(x,q)$, za sve $p, q \in \operatorname{Im}\varphi$ i svaki $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ za koji je $\varphi(x,p) = 1$.*

*Dokaz.* (i)$\Rightarrow$(ii) i (i)$\Rightarrow$(iii). Neka je $\varphi$ uniformna fazi relacija. Razmotrimo proizvoljne $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $q \in \operatorname{Im}\varphi$ za koji je $\varphi(y,q) = 1$. Tada na osnovu jednakosti (3.3) imamo da je

$$(\ker\varphi)(x,y) = \bigwedge_{p\in\operatorname{Im}\varphi} \varphi(x,p)\leftrightarrow\varphi(y,p) \leqslant \varphi(x,q)\leftrightarrow\varphi(y,q) = \varphi(x,q),$$

dok iz jednakosti (3.11) dobijamo

$$(\ker\varphi)(x,y) = \bigvee_{p\in\operatorname{Im}\varphi} \varphi(x,p)\otimes\varphi(y,p) \geqslant \varphi(x,q)\otimes\varphi(y,q) = \varphi(x,q),$$

odakle sledi da je $(\ker\varphi)(x,y) = \varphi(x,q)$. Prema tome, važi (ii).

Na sličan način, koristeći (3.4) i (3.12), dokazujemo da važi (iii).

(ii)⇒(i) i (iii)⇒(i). Radi pojednostavljenja oznaka, stavimo da je $\ker\varphi = E$ i $\operatorname{cok}\varphi = F$.

Pretpostavimo da važi uslov (ii). Ako su $y \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $q \in \operatorname{Im}\varphi$ takvi da je $\varphi(y,q) = 1$, onda važi

$$\varphi_q(x) = \varphi(x,q) = E(x,y) = E_y(x),$$

za sve $x \in \operatorname{Dom}\varphi$, i prema tome $\varphi_q = E_y$. Iz ovoga sledi da je $\{\varphi_q\}_{q\in\operatorname{Im}\varphi} = \{E_y\}_{y\in\operatorname{Dom}\varphi}$, pa je $\{\varphi_q\}_{q\in\operatorname{Im}\varphi}$ fazi particija od $\operatorname{Dom}\varphi$ koja odgovara fazi ekvivalenciji $E$. Dakle, $\varphi$ je uniformna fazi relacija.

Ako važi uslov (iii), onda na sličan način pokazujemo da je $\{\varphi_x\}_{x\in\operatorname{Dom}\varphi} = \{F_p\}_{p\in\operatorname{Im}\varphi}$, odnosno da je $\{\varphi_x\}_{x\in\operatorname{Dom}\varphi}$ fazi particija od $\operatorname{Im}\varphi$ koja odgovara fazi ekvivalenciji $F$, i prema tome $\varphi$ je uniformna fazi relacija. □

**Posledica 3.2.3.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ uniformna fazi relacija. Tada je*

$$(\ker\varphi)(x,y) = (\operatorname{cok}\varphi)(p,q),$$

*za sve $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $p, q \in \operatorname{Im}\varphi$ za koje je je $\varphi(x,p) = \varphi(y,q) = 1$.*

*Dokaz.* Ovo sledi neposredno iz uslova (ii) i (iii) Teoreme 3.2.2. □

Narednom teoremom određujemo potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju uniformne fazi relacije sa datim domenom, slikom, jezgrom i ko-jezgrom.

**Teorema 3.2.3.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, i neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A'$ i $F$ fazi ekvivalencija na $B'$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *postoji uniformna fazi relacija $\varphi : A \to B$ za koju važi:*

$$A' = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi \quad i \quad F = \operatorname{cok}\varphi, \tag{3.13}$$

(ii) *postoji uniformna relacija $\theta : A \to B$ za koju je $\operatorname{Dom}\theta = A'$, $\operatorname{Im}\theta = B'$ i važi*

$$E(x,y) = F(p,q), \tag{3.14}$$

*za sve $x, y \in A'$ i $p, q \in B'$ takve da je $(x,p), (y,q) \in \theta$;*

(iii) *postoji preslikavanje* $\psi : A' \to B'$ *takvo da je* $\operatorname{Im}\psi$ *puni presek od* $\widehat{F}$ *i*

$$E(x,y) = F(\psi(x),\psi(y)), \quad \text{za sve } x,y \in A'; \tag{3.15}$$

(iv) *postoji bijektivno preslikavanje* $\phi : A'_E \to B'_F$ *takvo da je*

$$\widetilde{E}(E_x,E_y) = \widetilde{F}(\phi(E_x),\phi(E_y)), \quad \text{za sve } x,y \in A'. \tag{3.16}$$

*Dokaz.* (i)⇒(ii). Neka je $\varphi : A \to B$ uniformna fazi relacija koja ispunjava uslove iz (3.13). Uvedimo oznaku $\theta = \widehat{\varphi}$. Tada imamo da je $\theta$ uniformna relacija, $\operatorname{Dom}\theta = \operatorname{Dom}\varphi = A'$, $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Im}\varphi = B'$, i prema Posledici 3.2.3 sledi da važi jednakost (3.14).

(ii)⇒(iii). Neka je $\theta : A \to B$ uniformna relacija za koju je $\operatorname{Dom}\theta = A'$ i $\operatorname{Im}\theta = B'$, i koja pored toga zadovoljava (3.14). Kako je $\{\theta_x\}_{x\in A'}$ particija od $B$, prema Aksiomi izbora za svaki $x \in A'$ možemo izabrati jedan element $\psi(x) \in \theta_x \subseteq B'$, što određuje preslikavanje $\psi : A' \to B'$ dato sa $\psi : x \mapsto \psi(x)$. Za svako $p \in B'$ postoji $x \in A'$ tako da je $p \in \theta_x$, i kako je $(x,p),(x,\psi(x)) \in \theta$ i važi jednakost (3.14), to dobijamo da je

$$F(p,\psi(x)) = E(x,x) = 1,$$

odnosno $\psi(x) \in \widehat{F}_p$. Iz toga zaključujemo da je $\operatorname{Im}\psi$ pun presek od $\widehat{F}$. Prema definiciji preslikavanja $\psi$ i jednakosti (3.14), sledi da važi (3.15).

(iii)⇒(i). Neka je $\psi : A' \to B'$ preslikavanje za koje je $\operatorname{Im}\psi$ pun presek od $\widehat{F}$ i važi (3.15). Definišimo fazi relaciju $\varphi : A \to B$ sa

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} F(\psi(x),p) & \text{za } x \in A' \text{ i } p \in B', \\ 0 & \text{u protivnom.} \end{cases}$$

Jasno da je $\operatorname{Dom}\varphi \subseteq A'$ i $\operatorname{Im}\varphi \subseteq B'$. Sa druge strane, za svaki $x \in A'$ važi $\varphi(x,\psi(x)) = F(\psi(x),\psi(x)) = 1$, pa $x \in \operatorname{Dom}\varphi$, i za svaki $p \in B'$ postoji $x \in A'$ tako da je $(p,\psi(x)) \in \widehat{F}$, pa je $\varphi(x,p) = F(\psi(x),p) = 1$, i odatle $p \in \operatorname{Im}\varphi$. Time smo pokazali da je $A' = \operatorname{Dom}\varphi$ i $B' = \operatorname{Im}\varphi$.

Uočimo proizvoljne elemente $x,y \in A'$. Najpre imamo

$$\begin{aligned}(\ker\varphi)(x,y) &= \bigwedge_{p\in\operatorname{Im}\varphi} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(y,p) = \bigwedge_{p\in\operatorname{Im}\varphi} F(\psi(x),p) \leftrightarrow F(\psi(y),p) \\ &= \bigwedge_{p\in\operatorname{Im}\varphi} F_p(\psi(x)) \leftrightarrow F_p(\psi(y)) = F(\psi(x),\psi(y)) = E(x,y),\end{aligned}$$

odakle je $\ker\varphi = E$. Štaviše, ako je $q \in B'$ takav da je $\varphi(y,q) = 1$, onda je $F(\psi(y), q) = 1$, tj., $F_q = F_{\psi(y)}$, pa je

$$\begin{aligned}(\ker\varphi)(x,y) &= E(x,y) = F(\psi(x),\psi(y)) \\ &= F_{\psi(y)}(\psi(x)) = F_q(\psi(x)) = F(\psi(x), q) = \varphi(x,q).\end{aligned}$$

Dakle, prema Teoremi 3.2.2 dobijamo da je $\varphi$ uniformna fazi relacija.

Dalje, za proizvoljne $p, q \in B'$ važi

$$\begin{aligned}(\operatorname{cok}\varphi)(p,q) &= \bigwedge_{x\in A'} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q) = \bigwedge_{x\in A'} F(\psi(x),p) \leftrightarrow F(\psi(x),q) \\ &= \bigwedge_{r\in \operatorname{Im}\psi} F(r,p) \leftrightarrow F(r,q) = \bigwedge_{r\in \operatorname{Im}\psi} F_p(r) \leftrightarrow F_q(r) \\ &\geqslant \bigwedge_{r\in B'} F_r(p) \leftrightarrow F_r(q) = F(p,q),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{cok}\varphi)(p,q) &= \bigvee_{x\in A'} \varphi(x,p) \otimes \varphi(x,q) = \bigvee_{x\in A'} F(\psi(x),p) \otimes F(\psi(x),q) \\ &= \bigvee_{r\in \operatorname{Im}\psi} F(r,p) \otimes F(r,q) = \bigvee_{r\in \operatorname{Im}\psi} F(p,r) \otimes F(r,q) \\ &\leqslant \bigvee_{r\in B'} F(p,r) \otimes F(r,q) = F(p,q),\end{aligned}$$

pa je, prema tome, $\operatorname{cok}\varphi = F$.

(iii)⇒(iv). Neka je $\psi : A' \to B'$ preslikavanje takvo da je $\operatorname{Im}\psi$ pun presek od $\widehat{F}$ i da važi (3.15). Definišimo preslikavanje $\phi : A'_E \to B'_F$ sa

$$\phi(E_x) = F_{\psi(x)}, \quad \text{za svako } x \in A'.$$

Prema (3.15), za sve $x, y \in A'$ imamo

$$E_x = E_y \;\Leftrightarrow\; E(x,y) = 1 \;\Leftrightarrow\; F(\psi(x),\psi(y)) = 1 \;\Leftrightarrow\; F_{\psi(x)} = F_{\psi(y)},$$

odakle sledi da je $\phi$ dobro definisano i injektivno. Kako je $\operatorname{Im}\psi$ puni presek relacije $\widehat{F}$, za svako $p \in B'$ postoji $x \in A'$ tako da je $F(\psi(x), p) = 1$, što povlači $F_p = F_{\psi(x)} = \phi(E_x)$. Odatle zaključujemo da je $\phi$ surjektivno, a time i bijektivno preslikavanje.

Na kraju, za proizvoljne $x, y \in A'$ iz (3.15) sledi da je

$$\widetilde{E}(E_x, E_y) = E(x,y) = F(\psi(x),\psi(y)) = \widetilde{F}(F_{\psi(x)}, F_{\psi(y)}) = \widetilde{F}(\phi(E_x), \phi(E_y)),$$

pa prema tome, važi (3.16).

(iv)⇒(iii). Neka je $\phi : A'_E \to B'_F$ bijekcija za koju važi (3.16).

Definišimo preslikavanja $\phi_E : A' \to A'_E$, $\phi_F : B'_F \to B'$ i $\psi : A' \to B'$ na sledeći način: Za proizvoljan $x \in A'$ neka je $\phi_E(x) = E_x$, i za proizvoljan $\eta \in B'_F$ neka je $\phi_F(\eta)$ fiksni element iz $\eta$. Stavimo da je $\psi = \phi_E \circ \phi \circ \phi_F$. Zbog surjektivnosti preslikavanja $\phi$, za svaki $p \in B'$ postoji $x \in A'$ tako da je $\phi(E_x) = F_p$, i važi

$$\psi(x) = \phi_F(\phi(\phi_E(x)) = \phi_F(\phi(\phi(E_x))) = \phi_F(F_p) \in \widehat{F}_p.$$

Dakle, $\operatorname{Im}\psi$ je puni presek od $\widehat{F}$. Takođe, za proizvoljne $x, y \in A'$ imamo da je

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \widetilde{E}(E_x, E_y) = \widetilde{F}(\phi(E_x), \phi(E_y)) = \widetilde{F}(\phi(\phi_E(x)), \phi(\phi_E(y))) \\ &= F(\phi_F(\phi(\phi_E(x))), \phi_F(\phi(\phi_E(y)))) = F(\psi(x), \psi(y)), \end{aligned}$$

i prema tome, važi (3.15). $\square$

Primetimo da bijektivno preslikavanje iz uslova (iv) Teoreme 3.2.3 određuje neku vrstu "uniformnosti" između fazi particija koje odgovaraju relacijama fazi ekvivalencije $\ker\varphi$ i $\operatorname{cok}\varphi$, i iz tog razloga koristimo naziv uniformna fazi relacija.

Dalje navodimo dva načina za konstrukciju uniformnih fazi relacija.

**Teorema 3.2.4.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, neka je $F$ fazi ekvivalencija na $B'$ i neka je $\psi : A' \to B'$ preslikavanje takvo da je* $\operatorname{Im}\psi$ *puni presek od $\widehat{F}$. Tada*

(a) *Fazi relacija $E$ na $A'$ definisana sa*

$$E(x,y) = F(\psi(x), \psi(y)), \quad \textit{za sve } x, y \in A', \tag{3.17}$$

*je fazi ekvivalencija na $A'$;*

(b) *Fazi relacija $\varphi : A \to B$ definisana sa*

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} F(\psi(x), p) & \textit{za sve } x \in A' \textit{ i } p \in B' \\ 0 & \textit{u suprotnom} \end{cases}, \tag{3.18}$$

*je uniformna fazi relacija za koju važi*

$$A' = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi \quad \textit{i} \quad F = \operatorname{cok}\varphi. \tag{3.19}$$

*Dokaz.* Jednostavno se dokazuje da je $E$ fazi ekvivalencija, i prema Teoremi 3.2.3 sledi da važi (b). $\square$

**Teorema 3.2.5.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A'$ i neka je $\theta : A \to B$ uniformna relacija za koju važi $A' = \mathrm{Dom}\,\theta$, $B' = \mathrm{Im}\,\theta$ i $\ker\theta = \widehat{E}$. Tada*

(a) *Fazi relacija $F$ na $B'$ definisana sa*

$$F(p,q) = E(x,y), \qquad \text{za } p,q \in B' \text{ i svako } x \in \theta_p \text{ i } y \in \theta_q, \tag{3.20}$$

*je fazi ekvivalencija na $B'$;*

(b) *Fazi relacija $\varphi : A \to B$ definisana sa*

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} E(x,y) & \text{za } x \in A',\ p \in B' \text{ i svako } y \in \theta_p \\ 0 & \text{u protivnom} \end{cases}, \tag{3.21}$$

*je uniformna fazi relacija za koju važi*

$$A' = \mathrm{Dom}\,\varphi, \quad B' = \mathrm{Im}\,\varphi, \quad E = \ker\varphi, \quad F = \mathrm{cok}\,\varphi \quad i \quad \widehat{\varphi} = \theta. \tag{3.22}$$

*Dokaz.* (a) Razmotrimo proizvoljne $p,q \in B'$, $x,x' \in \theta_p$ i $y,y' \in \theta_q$. Budući da su $\theta_p$ i $\theta_q$ klase ekvivalencije od $\ker\theta$, i da je $\ker\theta = \widehat{E}$, to dobijamo da je $E(x,x') = E(y,y') = 1$, tj., $E_x = E_{x'}$ i $E_y = E_{y'}$, pa je

$$E(x,y) = E_x(y) = E_{x'}(y) = E(x',y) = E_y(x') = E_{y'}(x') = E(x',y').$$

Odavde sledi da je fazi relacija $F$ dobro definisana.

Jednostavno se proverava da je $F$ fazi ekvivalencija.

(b) Uočimo proizvoljne $x \in A'$, $p \in B'$ i $y,y' \in \theta_p$. Kao u tvrđenju (a) dokazujemo da je $E(x,y) = E(x,y')$, i prema tome, $\varphi$ je dobro definisano.

Iz (3.21), a na osnovu činjenice da je $\{\theta_p\}_{p\in B'}$ particija od $A'$, za proizvoljne $x,y \in A'$ imamo da je

$$(\ker\varphi)(x,y) = \bigwedge_{p\in B'} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(y,p) = \bigwedge_{z\in A'} E(x,z) \leftrightarrow E(y,z) = E(x,y),$$

tj. $\ker\varphi = E$. Slično, za sve $p,q \in B'$, $x \in \theta_p$ i $y \in \theta_q$ važi

$$\begin{aligned}(\mathrm{cok}\,\varphi)(p,q) &= \bigwedge_{z\in A'} \varphi(z,p) \leftrightarrow \varphi(z,q) = \bigwedge_{z\in A'} E(z,x) \leftrightarrow E(z,y) \\ &= E(x,y) = F(p,q),\end{aligned}$$

pa je $\operatorname{cok}\varphi = F$.

Dalje, neka je $x \in A'$ i $p \in B'$. Ako je $(x,p) \in \theta$, tj., ako je $x \in \theta_p$, na osnovu (3.21) sledi da je $\varphi(x,p) = E(x,x) = 1$.

Obratno, neka je $\varphi(x,p) = 1$. Tada je $E(x,y) = 1$, za proizvoljan $y \in \theta_p$, i kako je $\ker\theta = \widehat{E}$, to dobijamo da $(x,y) \in \ker\theta$. Odavde i iz činjenice da je $\theta_p$ klasa ekvivalencije od $\ker\theta$ koja sadrži $y$, zaključujemo da je $x \in \theta_p$, odnosno, da je $(x,p) \in \theta$. Dakle, $\widehat{\varphi} = \theta$.

Na kraju, neka su $x, y \in A'$ i $q \in B'$ takvi da je $\varphi(y,q) = 1$. Tada je $y \in \widehat{\varphi}_q = \theta_q$, i prema (3.21) dobijamo

$$\varphi(x,q) = E(x,y) = (\ker\varphi)(x,y).$$

Dakle, na osnovu Teoreme 3.2.2 sledi da je $\varphi$ uniformna fazi relacija. $\square$

## 3.3. Parcijalna fazi preslikavanja i fazi preslikavanja

Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ uniformna fazi relacija. Ako je njeno ko-jezgro fazi jednakost, onda ćemo $\varphi$ nazivati *parcijalno fazi preslikavanje*, a ako je $\operatorname{Dom}\varphi = A$, govorićemo da je $\varphi$ *potpuna fazi relacija*. Uniformnu fazi relaciju koja je parcijalno fazi preslikavanje i potpuna je nazivaćemo *fazi preslikavanje*.

Neka je $\varphi : A \to B$ fazi preslikavanje. Ukoliko je njegovo jezgro fazi jednakost, onda ćemo za $\varphi$ govoriti da je *injektivno* ili *jedan-jedan*, a ukoliko je $\operatorname{Im}\varphi = B$, onda ćemo govoriti da je $\varphi$ *surjektivno* ili *na*. Fazi preslikavanje koje je istovremeno i injektivno i surjektivno nazivaćemo *bijektivno* fazi preslikavanje.

Primetimo da su u izučavanju fazi funkcija zasnovanih na fazi ekvivalencijama $E$ i $F$, u radovima Klawonna, Demircija i drugih, ili obe fazi relacije $E$ i $F$ uzimane tako da budu fazi ekvivalencije, ili su obe uzimane da budu fazi jednakosti, ali se nikada ranije nije uzimalo da je $E$ fazi ekvivalencija, a $F$ fazi jednakost, kao što se čini ovde.

Skoro svi ranije razmatrani tipovi fazi preslikavanja ili fazi funkcija imali su osobinu da njihov krisp deo jeste obično preslikavanje, ili eventualno parcijalno preslikavanje. Na primer, takozvane *F-funkcije*, koje je izučavao Novák u [98], definisane su upravo kao fazi relacije koje imaju ovu osobinu. Sledeća teorema pokazuje da je ova osobina potrebna i dovoljna da bi uniformna fazi relacija bila parcijalno fazi preslikavanje, kao i da bi potpuna uniformna fazi relacija bila fazi preslikavanje.

**Teorema 3.3.1.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i $\varphi : A \to B$ je uniformna fazi relacija. Tada je $\varphi$ parcijalno fazi preslikavanje (odn. fazi preslikavanje) ako i samo ako je $\widehat{\varphi}$ parcijalno preslikavanje (odn. preslikavanje).*

*Dokaz.* Neka je $\varphi$ parcijalno fazi preslikavanje, tj., $\operatorname{cok}\varphi$ je fazi jednakost, i neka su $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $p, q \in \operatorname{Im}\varphi$ takvi da je $\varphi(x, p) = \varphi(x, q) = 1$. Tada je $(\operatorname{cok}\varphi)(p, q) = \varphi(x, q) = 1$, što povlači $p = q$. Dakle, $\widehat{\varphi}$ je parcijalno preslikavanje.

Obratno, neka je $\widehat{\varphi}$ parcijalno preslikavanje. Razmotrimo proizvoljne $p, q \in \operatorname{Im}\varphi$ za koje je $(\operatorname{cok}\varphi)(p, q) = 1$. Uzmimo da je $\varphi(x, p) = 1$, za neki $x \in \operatorname{Dom}\varphi$. Tada prema Teoremi 3.2.2 sledi da je $\varphi(x, q) = (\operatorname{cok}\varphi)(p, q) = 1$, pa je $(x, p), (x, q) \in \widehat{\varphi}$, i kako je $\widehat{\varphi}$ parcijalno preslikavanje, to dobijamo da je $p = q$. Dakle, $\operatorname{cok}\varphi$ je fazi jednakost, tj. $\varphi$ je parcijalno fazi preslikavanje.

Kako je $\operatorname{Dom}\varphi = \operatorname{Dom}\widehat{\varphi}$, zaključujemo da je parcijalno fazi preslikavanje $\varphi$ potpuno ako i samo ako je $\widehat{\varphi}$ potpuno preslikavanje. □

Na osnovu karakterizacije uniformnih fazi relacija date Teoremom 3.2.2, dobijamo sledeću karakterizaciju parcijalnih fazi preslikavanja i fazi preslikavanja.

**Teorema 3.3.2.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\varphi$ je (parcijalno) fazi preslikavanje iz $A$ u $B$;*

(ii) *$\widehat{\varphi}$ je (parcijalno) preslikavanje iz $A$ u $B$, i za sve $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$ važi:*

$$(\ker\varphi)(x, y) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)).$$

(iii) *$\widehat{\varphi}$ je (parcijalno) preslikavanje iz $A$ u $B$, i za sve $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ i $q \in \operatorname{Im}\varphi$ važi:*

$$\varphi(x, q) = (\operatorname{cok}\varphi)(\widehat{\varphi}(y), q).$$

*Dokaz.* Ovo sledi neposredno iz Teoreme 3.2.2. □

**Posledica 3.3.1.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ (parcijalno) fazi preslikavanje. Tada za sve $x, y \in \operatorname{Dom}\varphi$ važi*

$$(\ker\varphi)(x, y) = (\operatorname{cok}\varphi)(\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(y)).$$

Potebni i dovoljni uslovi za egzistenciju parcijalnog fazi preslikavanja sa datim domenom, slikom, jezgrom i ko-jezgrom, slični onima koji su dati u Teoremi 3.2.3 za uniformne fazi relacije, utvrđeni su narednom teoremom:

**Teorema 3.3.3.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, i neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A'$ i $F$ je fazi jednakost na $B'$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Postoji parcijalno fazi preslikavanje $\varphi : A \to B$ za koje je*

$$A' = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi \quad i \quad F = \operatorname{cok}\varphi; \tag{3.23}$$

(ii) *Postoji surjektivno preslikavanje $\psi : A' \to B'$ takvo da važi*

$$E(x, y) = F(\psi(x), \psi(y)), \quad za\ sve\ x, y \in A'; \tag{3.24}$$

(iii) *Postoji bijektivno preslikavanje $\phi : A'_E \to B'$ takvo da važi*

$$\widetilde{E}(E_x, E_y) = F(\phi(E_x), \phi(E_y)), \quad za\ sve\ x, y \in A'. \tag{3.25}$$

*Dokaz.* Kako je $F$ fazi jednakost, preslikavanje $\psi : A' \to B'$ je puni presek od $\widehat{F}$ ako i samo ako je ono surjektivno, pa je (i)$\Leftrightarrow$(ii) neposredna posledica Teoreme 3.2.3.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Ako je $\psi : A' \to B'$ surjektivno preslikavanje za koje važi (3.24), slično kao u dokazu Teoreme 3.2.3, za $\phi : A'_E \to B'$ zadato sa $\phi(E_x) = \psi(x)$, za svaki $x \in A'$, pokazujemo da je dobro definisano, bijektivno preslikavanje koje zadovoljava (3.25).

Slično kao u dokazu Teoreme 3.2.3 dokazujemo i implikaciju (iii)$\Rightarrow$(ii). $\square$

Koristeći konstrukcije uniformnih fazi relacija koje su date u Teoremama 3.2.4 i 3.2.5, sada dajemo sledeće dve konstrukcije parcijalnih fazi preslikavanja.

**Teorema 3.3.4.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, neka je $F$ fazi jednakost na $B'$ i $\psi : A' \to B'$ je surjektivno preslikavanje. Tada*

(a) *Fazi relacija $E$ na $A'$ definisana sa*

$$E(x, y) = F(\psi(x), \psi(y)), \quad za\ proizvoljne\ x, y \in A', \tag{3.26}$$

*je fazi ekvivalencija na $A'$;*

(b) *Fazi relacija $\varphi : A \to B$ definisana sa*

$$\varphi(x, p) = \begin{cases} F(\psi(x), p) & za\ x \in A'\ i\ p \in B' \\ 0 & u\ suprotnom \end{cases}, \tag{3.27}$$

*je parcijalno fazi preslikavanje za koje važi*

$$A' = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi, \quad F = \operatorname{cok}\varphi \quad i \quad \widehat{\varphi} = \psi. \tag{3.28}$$

*Dokaz.* Ovo je neposredna posledica Teoreme 3.2.4. □

**Teorema 3.3.5.** *Neka su $A$, $B$, $A'$ i $B'$ neprazni skupovi takvi da je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$, neka je $E$ fazi ekvivalencija na $A'$ i $\psi : A' \to B'$ je surjektivno preslikavanje za koje važi* $\ker\psi = \widehat{E}$. *Tada*

(a) *Fazi relacija $F$ na $B'$ definisana sa*

$$F(p,q) = E(x,y), \qquad \text{za } p,q \in B' \text{ i proizvoljno } x \in \psi_p \text{ i } y \in \psi_q, \tag{3.29}$$

*je fazi jednakost na $B'$;*

(b) *Fazi relacija $\varphi : A \to B$ definisana sa*

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} F(\psi(x),p) & \text{za } x \in A' \text{ i } p \in B' \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases}, \tag{3.30}$$

*je parcijalno fazi preslikavanje za koje važi*

$$A' = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi, \quad F = \operatorname{cok}\varphi \quad i \quad \widehat{\varphi} = \psi. \tag{3.31}$$

*Dokaz.* U dokazu Teoreme 3.2.5 dobili smo da je $F$ fazi ekvivalencija.

Dalje, neka su $p,q \in B'$ takvi da je $F(p,q) = 1$. Tada za svako $x \in \psi_p$ i $y \in \psi_q$ važi $E(x,y) = F(p,q) = 1$, i prema tome $(x,y) \in \widehat{E} = \ker\psi$. Odavde sledi da je $p = \psi(x) = \psi(y) = q$, odnosno da je $F$ fazi jednakost.

Ostatak dokaza sledi neposredno iz Teoreme 3.3.4. □

Sledeća teorema pokazuje da su injektivnost ili surjektivnost fazi preslikavanja potpuno određeni injektivnošću ili surjektivnošću krisp dela tog preslikavanja.

**Teorema 3.3.6.** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka je $\varphi : A \to B$ fazi preslikavanje.*

*Tada je $\varphi$ injektivno (odn. surjektivno) fazi preslikavanje ako i samo ako je $\widehat{\varphi}$ injektivno (odn. surjektivno) preslikavanje.*

*Dokaz.* Neka je $\varphi$ injektivno fazi preslikavanje, odnosno neka je $\ker\varphi$ fazi jednakost. Ako su $x,y \in A$ takvi da je $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(y)$, onda je

$$(\ker\varphi)(x,y) = \varphi(x,\widehat{\varphi}(y)) = \varphi(x,\widehat{\varphi}(x)) = 1,$$

odakle sledi da je $x = y$. Time smo dokazali da je $\widehat{\varphi}$ injektivno preslikavanje.

Obratno, neka je $\widehat{\varphi}$ injektivno preslikavanje. Ako su $x, y \in A$ takvi da je $(\ker\varphi)(x, y) = 1$, onda je

$$\varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = (\ker\varphi)(x, y) = 1,$$

odnosno $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(y)$, budući da je $\widehat{\varphi}$ parcijalno preslikavanje. Međutim, iz $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(y)$ sledi $x = y$, čime smo dokazali da je $\ker\varphi$ fazi ekvivalencija, tj., $\varphi$ je injektivno fazi preslikavanje.

Tvrđenje koje se tiče surjektivnosti sledi neposredno iz $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\widehat{\varphi}$. □

## 3.4. Kompozicija fazi preslikavanja

U ovom odeljku ćemo razmatrati tri vrste kompozicija fazi preslikavanja. Videćemo u Primeru 3.4.1 da za fazi preslikavanja $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ njihova fazi relacijska kompozicija $\varphi_1 \circ \varphi_2$ ne mora biti fazi preslikavanje. Iz tog razloga, u narednoj teoremi uvodimo drugu vrstu kompozicije, za koju će se pokazati da je pogodnija za fazi preslikavanja.

**Teorema 3.4.1.** *Neka su $A$, $B$ i $C$ neprazni skupovi, neka su $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ fazi preslikavanja, i neka je fazi relacija $\varphi_1 \bullet \varphi_2 : A \to C$ definisana sa*

$$(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x, p) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x), p), \tag{3.32}$$

*za sve $x \in A$ i $p \in C$.*

*Tada je $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ fazi preslikavanje iz $A$ u $C$ i važi $\widehat{\varphi_1 \bullet \varphi_2} = \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\varphi}_2$, gde je $\circ$ uobičajena kompozicija preslikavanja.*

*Dokaz.* Radi pojednostavljenja oznaka, stavimo da je $\varphi_1 \bullet \varphi_2 = \varphi$.

Neka su $x \in A$ i $p, q \in C$ takvi da je $(x, p), (x, q) \in \widehat{\varphi}$, odnosno da je $\varphi(x, p) = \varphi(x, q) = 1$. Tada na osnovu (3.32) sledi da je

$$(\widehat{\varphi}_1(x), p), (\widehat{\varphi}_1(x), q) \in \widehat{\varphi}_2,$$

i kako je $\widehat{\varphi}_2$ parcijalno preslikavanje, to dobijamo da je $p = q$. Dakle, $\widehat{\varphi}$ je preslikavanje iz $A$ u $C$.

Osim toga, za svako $x \in A$ imamo da je

$$\varphi(x, \widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(x))) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(x))) = (\ker\varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(x)) = 1,$$

pa zaključujemo da je $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(x))$, što znači da je $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_1 \circ \widehat{\varphi}_2$.

Dalje, razmotrimo proizvoljne $x, y \in A$. Najpre imamo da je

$$\varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(y))) = (\ker \varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(y)). \tag{3.33}$$

Kako je $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Im} \varphi_2$, to na osnovu (3.3) dobijamo da je

$$\begin{aligned} (\ker \varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(y)) &= \bigwedge_{p \in \operatorname{Im} \varphi_2} \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x), p) \leftrightarrow \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(y), p) \\ &= \bigwedge_{p \in \operatorname{Im} \varphi_2} \varphi(x, p) \leftrightarrow \varphi(y, p) \\ &\leqslant \bigwedge_{p \in \operatorname{Im} \varphi} \varphi(x, p) \leftrightarrow \varphi(y, p) = (\ker \varphi)(x, y), \end{aligned} \tag{3.34}$$

dok iz (3.11) sledi

$$\begin{aligned} (\ker \varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(y)) &= \bigvee_{p \in \operatorname{Im} \varphi_2} \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x), p) \otimes \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(y), p) \\ &= \bigvee_{p \in \operatorname{Im} \varphi_2} \varphi(x, p) \otimes \varphi(y, p) \\ &\geqslant \bigvee_{p \in \operatorname{Im} \varphi} \varphi(x, p) \otimes \varphi(y, p) = (\ker \varphi)(x, y). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Sada iz (3.33), (3.34) i (3.35) dobijamo da je

$$(\ker \varphi)(x, y) = (\ker \varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(y)) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)),$$

i dakle, važi uslov (ii) Teoreme 3.3.2. Time je dokaz teoreme završen. $\square$

Fazi preslikavanje $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ nazivaćemo *kompozicija* fazi preslikavanja $\varphi_1$ i $\varphi_2$. Lako se proverava da je kompozicija fazi preslikavanja asocijativna, tj., ako su $\varphi_1 : A \mapsto B$, $\varphi_2 : B \mapsto C$ i $\varphi_3 : C \mapsto D$ fazi preslikavanja, onda je

$$(\varphi_1 \bullet \varphi_2) \bullet \varphi_3 = \varphi_1 \bullet (\varphi_2 \bullet \varphi_3).$$

Neka su $A$, $B$ i $C$ neprazni skupovi, i neka su $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ fazi relacije. Potsetimo se da se fazi relacijska kompozicija fazi relacija $\varphi_1$ i $\varphi_2$ definiše kao fazi relacija $\varphi_1 \circ \varphi_2 : A \to C$ zadata sa

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x, p) = \bigvee_{s \in B} \varphi_1(x, s) \otimes \varphi_2(s, p),$$

za sve $x \in A$ i $p \in C$. Pored ove kompozicije, razmatraćemo i fazi relaciju $\varphi_1 \star \varphi_2 : A \to C$ definisanu sa

$$(\varphi_1 \star \varphi_2)(x,p) = \bigvee_{s \in \operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p),$$

za sve $x \in A$ i $p \in C$.

Odnos između ove tri vrste kompozicija, primenjenih na fazi preslikavanja, prikazuje sledeća lema.

**Lema 3.4.1.** *Neka su $A$, $B$ i $C$ neprazni skupovi i neka su $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ fazi preslikavanja. Tada je*

$$\varphi_1 \bullet \varphi_2 \leqslant \varphi_1 \star \varphi_2 \leqslant \varphi_1 \circ \varphi_2. \tag{3.36}$$

*Dokaz.* Razmotrimo proizvoljne $x \in A$ i $p \in C$. Tada je

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x,p) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_2(x),p) &= \varphi_1(x,\widehat{\varphi}_1(x)) \otimes \varphi_2(\widehat{\varphi}_2(x),p) \\ &\leqslant \bigvee_{s \in \operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p) \\ &\leqslant \bigvee_{s \in B} \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x,p).\end{aligned}$$

Prema tome, važi (3.36). □

**Primer 3.4.1.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka su dati skupovi

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad C = \{p_1, p_2, p_3, p_4\},$$

i fazi relacije $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ zadate sledećim tablicama:

| $\varphi_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.2 | 1 | 0.4 |
| $x_2$ | 1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.2 | 0.1 |
| $x_4$ | 0.3 | 0.2 | 1 | 0.5 |

| $\varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0.1 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $s_2$ | 0.1 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $s_3$ | 1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| $s_4$ | 0.1 | 0.4 | 1 | 0.5 |

Tada su $\varphi_1$ i $\varphi_2$ fazi preslikavanja, pa su fazi relacije $\varphi_1 \bullet \varphi_2$, $\varphi_1 \star \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ date sa

| $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| $x_2$ | 0.1 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $x_3$ | 0.1 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

| $\varphi_1 \star \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |

| $\varphi_1 \circ \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.4 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |

Dakle, $\varphi_1 \bullet \varphi_2 < \varphi_1 \star \varphi_2 < \varphi_1 \circ \varphi_2$. Takođe smo dobili da $\varphi_1 \star \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ nisu uniformne fazi relacije, i prema tome, one nisu fazi preslikavanja.

Zanimljivu vezu između prve dve kompozicije u (3.36) utvrđuje sledeća teorema:

**Teorema 3.4.2.** *Neka su $A$, $B$ i $C$ neprazni skupovi, i neka su $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ fazi preslikavanja. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $(\operatorname{cok}\varphi_1)(s,t) \leqslant (\ker\varphi_2)(s,t)$, *za sve* $s,t \in \operatorname{Im}\varphi_1$;

(ii) $(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x,p) = (\varphi_1 \star \varphi_2)(x,p)$, *za sve* $x \in A$ *i* $p \in \operatorname{Im}(\varphi_1 \bullet \varphi_2)$.

*Dokaz.* Radi pojednostavljenja oznaka, stavimo da je $\varphi = \varphi_1 \bullet \varphi_2$.

(i)⇒(ii). Uzmimo da važi uslov (i). Neka su $x \in A$ i $p \in \operatorname{Im}\varphi$ proizvoljni elementi. Zaključujemo najpre da je $p = \widehat{\varphi}(z) = \widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(z))$, za neki $z \in A$. Dalje, razmotrimo proizvoljan $s \in \operatorname{Im}\varphi_1$. Tada je $s = \widehat{\varphi}_1(y)$, za neki $y \in A$. Sada, na osnovu pretpostavke i Teoreme 3.3.2 sledi da je

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p) &= \varphi_1(x,\widehat{\varphi}_1(y)) \otimes \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(y),\widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(z)))\\
&= (\operatorname{cok}\varphi_1)(\widehat{\varphi}_1(x),\widehat{\varphi}_1(y)) \otimes (\ker\varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(y),\widehat{\varphi}_1(z))\\
&\leqslant (\ker\varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x),\widehat{\varphi}_1(y)) \otimes (\ker\varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(y),\widehat{\varphi}_1(z))\\
&\leqslant (\ker\varphi_2)(\widehat{\varphi}_1(x),\widehat{\varphi}_1(z)) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x),\widehat{\varphi}_2(\widehat{\varphi}_1(z)))\\
&= \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x),p) = (\varphi_1 \bullet \varphi_2(x,p)).
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x,p) \geqslant \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p),$$

za svaki $s \in \operatorname{Im}\varphi_1$, odnosno

$$(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x,p) \geqslant \bigvee_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p) = (\varphi_1 \star \varphi_2)(x,p).$$

Odavde i iz (3.36) zaključujemo da važi (ii).

(ii)⇒(i). Neka važi (ii). Razmotrimo proizvoljne $s, t \in \operatorname{Im}\varphi_1$. Tada je $s = \widehat{\varphi}_1(x)$ i $t = \widehat{\varphi}_1(y)$, za neke $x, y \in A$, i prema Teoremi 3.3.2 važi

$$(\operatorname{cok}\varphi_1)(s,t) = (\operatorname{cok}\varphi_1)(\widehat{\varphi}_1(x), \widehat{\varphi}_1(y)) = (\ker\varphi_1)(x,y).$$

Sa druge strane, za svaki $p \in \operatorname{Im}\varphi$, na osnovu (1.55) i (1.51) imamo da je

$$\begin{aligned}
\varphi_2(s,p) \leftrightarrow \varphi_2(t,p) &= \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x),p) \leftrightarrow \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(y),p) = \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(y,p) \\
&= \Big[\bigvee_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p)\Big] \leftrightarrow \Big[\bigvee_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(y,s) \otimes \varphi_2(s,p)\Big] \\
&\geqslant \bigwedge_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \Big[\big(\varphi_1(x,s) \otimes \varphi_2(s,p)\big) \leftrightarrow \big(\varphi_1(y,s) \otimes \varphi_2(s,p)\big)\Big] \\
&\geqslant \bigwedge_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \Big[\big(\varphi_1(x,s) \leftrightarrow \varphi_1(y,s)\big) \otimes \big(\varphi_2(s,p) \leftrightarrow \varphi_2(s,p)\big)\Big] \\
&= \bigwedge_{s\in\operatorname{Im}\varphi_1} \varphi_1(x,s) \leftrightarrow \varphi_1(y,s) = (\ker\varphi_1)(x,y) = (\operatorname{cok}\varphi_1)(s,t).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\operatorname{cok}\varphi_1)(s,t) \leqslant \varphi_2(s,p) \leftrightarrow \varphi_2(t,p),$$

za svaki $p \in \operatorname{Im}\varphi$, pa je

$$(\operatorname{cok}\varphi_1)(s,t) \leqslant \bigwedge_{p\in\operatorname{Im}\varphi} \varphi_2(s,p) \leftrightarrow \varphi_2(t,p) = (\ker\varphi_2)(s,t).$$

Prema tome, dokazali smo da važi (i). □

U narednom primeru prikazan je slučaj kada se prve dve kompozicije iz (3.36) poklapaju, a razlikuju se od treće.

**Primer 3.4.2.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, neka su dati skupovi

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad C = \{p_1, p_2, p_3, p_4\},$$

i fazi relacije $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ zadate tablicama

| $\varphi_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.2 | 1 | 0.4 |
| $x_2$ | 1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.2 | 0.2 |
| $x_4$ | 0.3 | 0.2 | 1 | 0.5 |

| $\varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $s_2$ | 0.3 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $s_3$ | 1 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| $s_4$ | 0.3 | 0.4 | 1 | 0.5 |

Tada su $\varphi_1$ i $\varphi_2$ fazi preslikavanja, fazi relacije $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ su date tablicama

| $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1.0 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1.0 |
| $x_3$ | 0.3 | 1.0 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1.0 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |

| $\varphi_1 \circ \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.4 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 |
| $x_3$ | 0.3 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_4$ | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |

i imamo da je $\varphi_1 \bullet \varphi_2 = \varphi_1 \star \varphi_2 < \varphi_1 \circ \varphi_2$.

U ovom slučaju takođe dobijamo da $\varphi_1 \circ \varphi_2$ nije uniformna fazi relacija, i prema tome, nije fazi preslikavanje.

U narednom primeru imamo drugačiji slučaj, gde se druga i treća kompozicija u (3.36) poklapaju, a razlikuju se od prve. Takođe je zanimljivo da su i $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ fazi preslikavanja, iako se međusobno razlikuju.

**Primer 3.4.3.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ Gödelova struktura, neka su dati skupovi

$$A = \{x_1, x_2\}, \quad B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad C = \{p_1, p_2, p_3\},$$

i fazi relacije $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ su zadate sa

| $\varphi_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| $x_2$ | 0.4 | 0.1 | 1 | 0.3 |

| $\varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 0.1 | 0.2 |
| $s_2$ | 0.1 | 1 | 0.1 |
| $s_3$ | 0.2 | 0.1 | 1 |
| $s_4$ | 1 | 0.1 | 0.2 |

Tada su $\varphi_1$ i $\varphi_2$ fazi preslikavanja, fazi relacije $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ su date tablicama

| $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.1 | 0.2 |
| $x_2$ | 0.2 | 0.1 | 1 |

| $\varphi_1 \circ \varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.1 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.4 | 0.1 | 1 |

i obe fazi relacije $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ su fazi preslikavanja, pri čemu imamo da je $\varphi_1 \bullet \varphi_2 < \varphi_1 \star \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

## 3.5. Fazi preslikavanja i fazi ekvivalencije

U ovom odeljku ćemo uspostaviti uzajamnu korespodenciju između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija.

Najpre ćemo definisati prirodno fazi preslikavanje $E^\natural : A \to A_E$, koje odgovara fazi ekvivalenciji $E$ na skupu $A$, na sledeći način:

$$E^\natural(x, \xi) = \xi(x), \tag{3.37}$$

za svako $x \in A$ i $\xi \in A_E$. Drugim rečima,

$$E^\natural(x, E_y) = E_y(x) = E(x, y), \tag{3.38}$$

za sve $x, y \in A$.

Sledeća teorema pokazuje da je $E^\natural$ fazi preslikavanje i uspostavlja korespodenciju između fazi ekvivalencija i fazi preslikavanja.

**Teorema 3.5.1.** *Za svaku fazi ekvivalenciju $E$ na skupu $A$, fazi relacija $E^\natural$ je surjektivno fazi preslikavanje iz $A$ na $A_E$ i $\ker(E^\natural) = E$.*

*Dokaz.* Uvedimo oznaku $\varphi = E^\natural$. Za svaki $x \in A$ je

$$\varphi(x, E_x) = E_x(x) = 1,$$

odakle sledi da je $\operatorname{Dom}\varphi = A$ i $\operatorname{Im}\varphi = A_E$, tj., $\varphi$ je potpuno i surjektivno.

Dalje, za svaki $\xi \in A_E$ i $x \in A$ imamo

$$\varphi_\xi(x) = \varphi(x, \xi) = \xi(x),$$

što daje $\varphi_\xi = \xi$. Prema tome, $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in A_E}$ je fazi particija od $A$ koja odgovara fazi ekvivalenciji $E$, i prema Teoremi 3.2.1, dobijamo da je $\varphi$ uniformna fazi relcija i $\ker\varphi = E$.

Razmotrimo $\xi, \eta \in A_E$ za koje je $(\operatorname{cok}\varphi)(\xi, \eta) = 1$. Prema (3.4), za svaki $x \in A$ je

$$\xi(x) = \varphi(x, \xi) = \varphi(x, \eta) = \eta(x),$$

pa je $\xi = \eta$. Ovo znači da je $\operatorname{cok}\varphi$ fazi jednakost, pa je $\varphi$ fazi preslikavanje iz $A$ na $A_E$. $\square$

Fazi preslikavanje $E^\natural$ definisano sa (3.37) nazivaćemo *prirodno fazi preslikavanje* koje odgovara fazi ekvivalenciji $E$.

Potsetimo se da, ako je $\varphi$ surjektivno preslikavanje skupa $A$ na skup $B$, i $E$ jezgro od $\varphi$, onda postoji jedinstveno bijektivno preslikavanje $\psi$ faktor skupa $A_E$ na $B$ takvo da je $\varphi = E^\natural \circ \psi$. Drugim rečima, skupovi $A_E$ i $B$ se mogu smatrati jednakim i $\varphi$ može da se tretira kao prirodno preslikavanje u odnosu na njegovo jezgro.

Sledeća teorema pokazuje da fazi preslikavanja imaju sličnu osobinu.

**Teorema 3.5.2.** *Neka je $\varphi$ fazi preslikavanje iz skupa $A$ na skup $B$, i neka je $E = \ker\varphi$.*

*Tada postoji jedinstveno bijektivno fazi preslikavanje $\psi$ iz $A_E$ na $B$ takvo da je $\varphi = E^\natural \bullet \psi$.*

*Dokaz.* Definišimo fazi relaciju $\psi : A_E \to B$ sa

$$\psi(E_x, p) = \varphi(x, p), \qquad \text{za svaki } x \in A \text{ i } p \in B. \tag{3.39}$$

Neka su $x, y \in A$ takvi da je $E_x = E_y$. Ovo znači da je $E(x, y) = 1$, i prema (3.3) sledi da je $\varphi(x, p) = \varphi(y, p)$, za svako $p \in B$. To znači da je $\psi$ dobro definisana fazi relacija. Očito je da je $\operatorname{Dom}\psi = A_E$ i $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi = B$.

Neka su $x, y \in A$ i $p \in B$ takvi da je $\psi(E_x, p) = \psi(E_y, p) = 1$. To znači da je $\varphi(x, p) = \varphi(y, p) = 1$, odakle je $p = \widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(y)$. Sada je

$$E(x, y) = (\ker\varphi)(x, y) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(x)) = 1,$$

što daje $E_x = E_y$. Prema tome, $\widehat{\psi}$ je parcijalno preslikavanje, i odatle, preslkavanje iz $A$ na $B$. Takođe važi

$$\widehat{\psi}(E_x) = \widehat{\varphi}(x), \qquad \text{za svako } x \in A.$$

Dalje, za proizvoljne $x, y \in A$ imamo

$$\begin{aligned}(\ker\psi)(E_x, E_y) &= \bigwedge_{p\in B} \psi(E_x, p) \leftrightarrow \psi(E_y, p) = \bigwedge_{p\in B} \varphi(x, p) \leftrightarrow \varphi(y, p) \\ &= (\ker\varphi)(x, y) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = \psi(E_x, \widehat{\psi}(E_y)),\end{aligned} \tag{3.40}$$

pa zaključujemo da važi uslov (ii) Teoreme 3.3.2. Dakle, $\psi$ je fazi preslikavanje. Štaviše, na osnovu (4.14) dobijamo da iz $(\ker\psi)(E_x, E_y) = 1$ sledi da je $E(x, y) = (\ker\varphi)(x, y) = 1$, odnosno $E_x = E_y$, što znači da je $\psi$ bijektivno fazi preslikavanje.

Na kraju, za sve $x \in A$ i $p \in B$, na osnovu (3.39) sledi

$$(E^\natural \bullet \psi)(x, p) = \psi(\widehat{E^\natural}(x), p) = \psi(E_x, p) = \varphi(x, p),$$

što znači da je $E^\natural \bullet \psi = \varphi$.

Dalje, neka je $\psi'$ proizvoljno fazi preslikavanje iz $A_E$ u $B$ za koje važi $E^\natural \bullet \psi' = \varphi = E^\natural \bullet \psi$. Tada za proizvoljne $x \in A$ i $p \in B$ imamo

$$\begin{aligned}\psi'(E_x, p) &= \psi'(\widehat{E^\natural}(x), p) = (E^\natural \bullet \psi')(x, p) = (E^\natural \bullet \psi)(x, p) \\ &= \psi(\widehat{E^\natural}(x), p) = \psi(E_x, p),\end{aligned}$$

i prema tome, $\psi' = \psi$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

## 3.6. Odnos sa rezultatima drugih autora

Pomenuli smo da su u brojnim radovima različite vrste fazi funkcija iz skupa $A$ u skup $B$ definisane polazeći od dve date fazi ekvivalencije $E$ na $A$ i $F$ na $B$. Ove fazi ekvivalencije uglavnom su bile unapred fiksirane, i nisu zavisile od razmatrane fazi relacije, za razliku od našeg pristupa, gde one proizilaze iz razmatrane fazi relacije. Takođe, u većini slučajeva se ili za obe fazi relacije $E$ i $F$ uzimalo da su fazi ekvivalencije, ili se za obe uzimalo da su fazi jednakosti, za razliku od naše definicije fazi preslikavanja, koja dozvoljava da jezgro bude proizvoljna fazi ekvivalencija, ali zahteva da ko-jezgro bude fazi jednakost.

Ovo su neke opšte razlike. Međutim, postoje i mnoge sličnosti između ovde dobijenih rezultata i rezultata drugih autora. Posebno, uniformne fazi relacije su veoma tesno povezane sa parcijalnim fazi funkcijama, koje je izučavao Klawonn u [71], i perfektnim fazi funkcijama, kojima se bavio Demirci u [33, 38, 39].

Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi, $E$ i $F$ fazi ekvivalencije na $A$ i $B$, tim redom, i neka je $\varphi : A \to B$ fazi relacija koja zadovoljava sledeće uslove:

(EX1) $\varphi(x, p) \otimes E(x, y) \leqslant \varphi(y, p)$, za sve $x, y \in A$ i $p \in B$ (*ekstenzionalnost u odnosu na* $E$);

(EX2) $\varphi(x, p) \otimes F(p, q) \leqslant \varphi(x, q)$, za sve $x \in A$ i $p, q \in B$ (*ekstenzionalnost u odnosu na* $F$);

(PFF) $\varphi(x, p) \otimes \varphi(x, q) \leqslant F(p, q)$, za sve $x \in A$ i $p, q \in B$.

Takve fazi relacije proučavali su Klawonn [71] i Demirci [33, 38, 39], pod nazivom *parcijalne fazi funkcije*. Parcijalne fazi funkcije iz $A$ u $B$ čiji je domen ceo skup $A$ se kod Demircija nazvaju *perfektne fazi funkije*.

Zbog svojstva adjunkcije i simetrije, uslov (EX2) može se napisati kao

(EX2') $F(p,q) \leqslant \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q)$, for all $x \in A$ and $p,q \in B$,

i (EX2') i (PFF) povlače

$$\varphi(x,p) \otimes \varphi(x,q) \leqslant F(p,q) \leqslant \varphi(y,p) \leftrightarrow \varphi(y,q), \tag{3.41}$$

za sve $x,y \in A$ i $p,q \in B$. Ako je, pored toga, $\varphi$ normalizovana fazi relacija, onda je $\operatorname{Dom}\varphi$ neprazan, i prema (3.41) imamo da važi:

$$\begin{aligned} \bigvee_{x\in \operatorname{Dom}\varphi} \varphi(x,p) \otimes \varphi(x,q) &\leqslant \bigvee_{x\in A} \varphi(x,p) \otimes \varphi(x,q) \leqslant F(p,q) \\ &\leqslant \bigwedge_{x\in A} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q) \leqslant \bigwedge_{x\in \operatorname{Dom}\varphi} \varphi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,q), \end{aligned} \tag{3.42}$$

za sve $p,q \in B$. Odavde i prema Teoremi 3.2.1 sledi da je $\varphi$ uniformna fazi relacija.

Dakle, svaka normalizovana parcijalna fazi funkcija u smislu Klawonna i Demircija je uniformna fazi relacija, pa i svaka perfektna fazi funkcija jeste uniformna fazi relacija. Obratno ne važi, što pokazuje sledeći primer.

**Primer 3.6.1.** Razmotrimo ponovo fazi relaciju $\varphi$ iz Primera 3.1.1.

Imamo da je $\varphi$ uniformna fazi relacija, ali nije parcijalna fazi funkcija u smislu Demircija, jer ne postoji fazi ekvivalencija $F$ na $B$ takva da važi (3.41). Zaista, imamo da je

$$\varphi(x_2,p_3) \otimes \varphi(x_2,p_4) = 0.3 > 0.2 = \varphi(x_1,p_3) \leftrightarrow \varphi(x_1,p_4).$$

Primetimo da je $\varphi$ i fazi preslikavanje u smislu naše definicije.

Iz (3.42) dobijamo da je $F(p,q) = (\operatorname{cok}\varphi)(p,q)$, za sve $p,q \in \operatorname{Im}\varphi$, što znači da je $F$ fazi ekvivalencija koja zadovoljava (EX2) i (PFF) jedinstvena do na svoje vrednosti na $\operatorname{Im}\varphi$.

Sa druge strene, postoje i izvesne sličnosti između našeg koncepta fazi preslikavanja i koncepta fazi funkcije koji je izučavao Nemitz u [97]. Dobro je poznato da se jezgro običnog preslikavanja $\varphi$ može predstaviti kao $\varphi\circ\varphi^{-1}$, gde je $\circ$ kompozicija običnih relacija. Motivisan ovom činjenicom, Nemitz je u [97] definisao fazi funkciju iz skupa $A$ u skup $B$ kao fazi relaciju $\varphi : A \to B$ koja ima svojstvo da je $\varphi \circ \varphi^{-1}$ fazi ekvivalencija na $A$, a $\varphi^{-1} \circ \varphi$ je krisp jednakost na $B$, pri čemu je $\circ$ kompozicija fazi relacija. Iako je očigledno razmišljao o tome, Nemitz nije uspeo da uspostavi međusobnu korespodenciju između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija, jer je drugi uslov u njegovoj definiciji fazi funkcije suviše jak. Doduše, Nemitz je uspeo da uspostavi međusobnu kopréspondenciju između njegovih fazi funkcija i specifične vrste fazi particija, ali je njegov koncept fazi particije takođe veoma jak i ne postoji međusobna korespodencija između tih fazi particija i fazi ekvivalencija, za razliku od fazi particija proučavanih u radovima [23, 29, 42, 73, 118, 119].

Zanimljivo je modifikovati Nemitzovu definiciju fazi preslikavanja zahtevajući da je $\varphi^{-1} \circ \varphi$ fazi jednakost, umesto krisp jednakost, što se zahteva u Nemitzovoj definiciji. Naime, ako je $\varphi$ surjektivno fazi preslikavanje u smislu naše definicije, onda je $\varphi \circ \varphi^{-1} = \ker \varphi$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi = \operatorname{cok} \varphi$, pa je $\varphi \circ \varphi^{-1}$ fazi ekvivalencija, a $\varphi^{-1} \circ \varphi$ je fazi jednakost. Međutim, sledeći primer pokazuje da ako je $\varphi$ fazi preslikavanje koje nije obavezno surjektivno, onda relacija $\varphi \circ \varphi^{-1}$ nije obavezno fazi ekvivalencija, a čak i ako jeste fazi ekvivalencija, ona se ne mora obavezno poklopiti sa jezgrom od $\varphi$, u smislu naše definicije. Pokazaćemo i da $\varphi \circ \varphi^{-1}$ može biti fazi ekvivalencija, a $\varphi^{-1} \circ \varphi$ fazi jednakost, čak i kada $\varphi$ nije fazi preslikavanje u smislu naže definicije.

**Primer 3.6.2.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka su dati skupovi $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ i $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

Razmotrimo fazi relacije $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : A \to B$ zadate sledećim tablicama:

| $\varphi_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.5 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 | 0.6 |
| $x_3$ | 1 | 0.4 | 0.7 |

| $\varphi_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.5 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 | 0.6 |
| $x_3$ | 1 | 0.4 | 0.5 |

| $\varphi_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.3 | 0.2 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 | 0.3 |
| $x_3$ | 0.4 | 0.4 | 1 |

(a) Lako se proverava da je $\varphi_1$ fazi preslikavanje, ali $\varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}$ nije fazi ekvivalencija, jer nije tranzitivna. Zaista, ako stavimo da je $R = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}$, onda je

$$R(x_1, x_3) \otimes R(x_3, x_2) = 1 \otimes 0.6 = 0.6 > 0.5 = R(x_1, x_2).$$

(b) Takođe se lako proverava da je $\varphi_2$ fazi preslikavanje, i da su fazi relacije $\ker \varphi_2$ i $\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$ date sa

| $\ker \varphi_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 1 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 | 0.4 |
| $x_3$ | 1 | 0.4 | 1 |

| $\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.5 | 1 |
| $x_2$ | 0.5 | 1 | 0.5 |
| $x_3$ | 1 | 0.5 | 1 |

pa je $\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$ fazi ekvivalencija, ali je $\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \neq \ker \varphi_2$.

(c) Ovde imamo da $\varphi_3$ nije uniformna fazi relacija, pa nije ni fazi preslikavanje, jer važi

$$\bigvee_{p\in B} \varphi_2(x_1,p)\otimes\varphi_2(x_2,p) = 0.4 > 0.2 = \bigwedge_{p\in B} \varphi_2(x_1,p)\otimes\varphi_2(x_2,p).$$

Sa druge strane, $\varphi_3 \circ \varphi_3^{-1}$ i $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_2$ su fazi jednakosti zadate tablicama

| $\varphi_3 \circ \varphi_3^{-1}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $x_2$ | 0.4 | 1 | 0.4 |
| $x_3$ | 0.4 | 0.4 | 1 |

| $\varphi_3^{-1} \circ \varphi_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.4 | 0.4 |
| $p_2$ | 0.4 | 1 | 0.4 |
| $p_3$ | 0.4 | 0.4 | 1 |

# Glava 4

# Fazi homomorfizmi i fazi kongruencije

Fazi pristup univerzalnim algebarskim konceptima započeo je sa dobro poznatim radom Rosenfelda [109] o fazi podgrupama grupe. Taj rad je doveo do intenzivnog izučavanja fazi podsistema raznih algebarskih struktura (vidi [91, 92, 90], i literaturu citiranu tamo), kao i do izučavanja srodnih koncepata, kao što su fazi kongruencije, razne vrste fazi homomorfizama, i drugi (vidi [18, 19, 21, 56, 76, 83, 85]). Kasnije su ti pojmovi uopšteni i na proizvoljne univerzalne algebre [55, 95, 96, 112, 115, 116]. Drugačiji fazi pristup univerzalnim algebrama iniciran je od strane Bělohláveka i Vychodila u [3, 4, 5, 7, 8, 121], gde su izučavane takozvane algebre sa fazi jednakostima i razvijena fazi jednakosne logika za takve algebre. Osim takvih razmatranja fazi koncepata na običnim algebarskim strukturama, Demirci je u [32, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52] radio sa fazi operacijama definisanim pomoću specifičnog koncepta fazi funkcije koji je razvijen u njegovim ranijim radovima, dok su Yuan i Lee u [124] radili sa fazi operacijama zasnovanim na definiciji fazi funkcije koju su dali Malik i Mordeson u [85].

Nasuprot fazi podsistemima i fazi kongruencijama, koji se definišu na sličan način u različitim algebarskim strukturama, postoji više različitih fazi pristupa homomorfizmima. U većini slučajeva, ulogu fazi homomorfizama igrali su obični homomorfizmi, koji su izučavani u vezi sa raznim fazi konceptima na algebarskim strukturama. Na primer, Bělohlávek i Vychodil su u [3, 4, 5, 7, 8, 121] izučavali obične homomorfizme algebri kompatibilne sa fazi jednakostima, dok su Demirci u [36, 37, 39, 52], i Yuan i Lee u [124], izučavali obična preslikavanja kompatibilna sa fazi operacijama. Drugi koncepti fazi homomorfizama definisani na sličan način mogu se sresti u [56, 76, 83].

Sa drugačije tačke gledišta, fazi homomorfizme su razmatrali Choudhury, Chakraborty i Khare u [21, 18, 19], i Malik i Mordeson u [85]. Njihovi koncepti fazi homomorfizama su bazirani na nekim specifičnim konceptima fazi funkcije, i na kompatibilnosti takvih fazi funkcija sa algebarskim operacijama. U ovoj glavi disertacije, fazi homomorfizmi će biti razmatrani sa slične tačke gledišta. Naime, oni će biti definisani uz pomoć koncepta fazi preslikavanja uvedenog u prethodnoj glavi. Naš glavni cilj je da ponudimo takav koncept fazi homomorfizma koji će omogućiti uspostavljanje međusobne korespondencije između fazi homomorfizama i fazi kongruencija, analogne onoj koja postoji u obišnom, krisp slučaju. Takva korespondencija biće uspostavljena Teoremom 4.1.2, korišćenjem analogne korespondencije između fazi preslikavanja i fazi ekvivalencija koja je uspostavljena u prethodnoj glavi. Potom dajemo karakterizacije fazi homomorfizama preko njihovih jezgara, ko-jezgara i krisp delova, dajemo izvesne konstrukcije fazi homomorfizama i dokazujemo teoreme o fazi homomorfizmu i fazi izomorfizmu.

Rezultati prikazani u ovoj glavi tesno su povezani sa rezultatima Muralia [95] i Samhana [112], kao i sa rezultatima Bělohláveka i Vychodila [3, 4, 5, 7, 8, 121], i na te veze će takođe biti ukazano u ovoj glavi.

## 4.1. Fazi homomorfizmi

Za definicije osnovnih algebarskih pojmova i oznaka koji će ovde biti korišćeni upućujemo na Odeljak 1.2. Koncepti fazi podalgebre, fazi kongruencije i fazi faktor algebre biće definisani na isti način kao u radovima Muralia [96, 95]i Samhana [112]. Jedina razlika je u tome što su Murali i Samhan koristili Gödelpvu strukturu kao strukturu istinitosnih vrednosti, dok mi ovde koristimo kompletne reziduirane mreže.

Ako je $\tau$ tip algebri i $n$ je nenegativan ceo broj, sa $\tau_n$ ćemo označavati skup svih $n$-arnih funkcijskih simbola iz $\tau$.

Neka su $A$ i $B$ algebre istog tipa $\tau$. Fazi preslikavanje $\varphi : A \to B$ se naziva *fazi homomorfizam* ako za svaki $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i $x_i \in A$, $p_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, va ži

$$\varphi(x_1, p_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_n, p_n) \leqslant \varphi\left(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(p_1, \ldots, p_n)\right), \qquad (4.1)$$

i za svako $f \in \tau_0$ imamo $\varphi(f^A, f^B) = 1$. Injektivni fazi homomorfizam naziva se *fazi monomorfizam*, surjektivni fazi homomorfizam je *fazi epimorfizam*, a bijektivni fazi homomorfizam nazivamo *fazi izomorfizam*.

Najpre razmatramo neka osnovna svojstva fazi homomorfizama.

**Lema 4.1.1.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$.*

*Ako je $\varphi$ fazi homomorfizam iz $A$ u $B$, onda je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam iz $A$ u $B$.*

*Dokaz.* Razmotrimo proizvoljan funkcijski simbol $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, kao i proizvoljne elemente $x_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Tada iz

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(x_1, \widehat{\varphi}(x_1)) \otimes \ldots \otimes \varphi(x_n, \widehat{\varphi}(x_n)) \\ &\leqslant \varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(\widehat{\varphi}(x_1), \ldots, \widehat{\varphi}(x_n))) \end{aligned}$$

dobijamo da je $\varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(\widehat{\varphi}(x_1), \ldots, \widehat{\varphi}(x_n))) = 1$, i odatle je

$$\widehat{\varphi}(f^A(x_1, \ldots, x_n)) = f^B(\widehat{\varphi}(x_1), \ldots, \widehat{\varphi}(x_n)).$$

Štaviše, za svaki $f \in \tau_0$, iz $\varphi(f^A, f^B) = 1$ sledi $\widehat{\varphi}(f^A) = f^B$. Time smo dokazali da je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam. $\square$

Obrat prethodne leme ne važi, što pokazuje sledeći primer:

**Primer 4.1.1.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ Gödelova struktura, neka su dati skupovi $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i $B = \{p_1, p_2, p_3\}$, i neka su binarne operacije na $A$ i $B$ zadate sledećim tablicama:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_1$ |
| $x_2$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ |
| $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_3$ |
| $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_1$ | $p_1$ | $p_1$ |
| $p_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_2$ |
| $p_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

U odnosu na ove dve operacije, $A$ i $B$ su polugrupe.

Definišimo sada fazi relaciju $\varphi : A \to B$ sa

| $\varphi$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.2 | 0.3 |
| $x_2$ | 1 | 0.2 | 0.3 |
| $x_3$ | 0.2 | 1 | 0.2 |
| $x_4$ | 0.3 | 0.2 | 1 |

Tada je $\varphi$ fazi preslikavanje i $\widehat{\varphi}$ je homomorfizam iz $A$ na $B$, ali je

$$\varphi(x_1, p_3) \otimes \varphi(x_3, p_2) = 0.3 \otimes 1 = 0.3 > 0.2 = \varphi(x_1, p_2) = \varphi(x_1 x_3, p_3 p_2),$$

što znači da $\varphi$ nije fazi homomorfizam.

**Lema 4.1.2.** *Kompozicija dva fazi homomorfizma je fazi homomorfizam.*

*Dokaz.* Neka su $A$, $B$ i $C$ algebre tipa $\tau$, i $\varphi_1 : A \to B$ i $\varphi_2 : B \to C$ su fazi homomorfizmi. Tada za sve $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i $x_1, \dots, x_n \in A$, $p_1, \dots p_n \in C$, imamo da je

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x_1, p_1) \otimes \cdots \otimes (\varphi_1 \bullet \varphi_2)(x_n, p_n) \\ &= \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x_1), p_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(x_n), p_n) \\ &\leqslant \varphi_2(f^B(\widehat{\varphi}_1(x_1), \dots, \widehat{\varphi}_1(x_n)), f^C(p_1, \dots, p_n)) \\ &= \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(f^A(x_1, \dots, x_n)), f^C(p_1, \dots, p_n)) \\ &= (\varphi_1 \bullet \varphi_2)(f^A(x_1, \dots, x_n), f^C(p_1, \dots, p_n)),\end{aligned}$$

i za svaki $f \in \tau_0$ je

$$(\varphi_1 \bullet \varphi_2)(f^A, f^C) = \varphi_2(\widehat{\varphi}_1(f^A), f^C) = \varphi_2(f^B, f^C) = 1.$$

Prema tome, $\varphi_1 \bullet \varphi_2$ je fazi homomorfizam. $\square$

Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi, neka su $U$ i $V$ fazi podskupovi od $A$ i $B$, tim redom, i neka je $\varphi : A \to B$ fazi preslikavanje. Tada fazi podskup $\varphi(U)$ od $B$ definisan sa

$$(\varphi(U))(p) = \bigvee_{x \in A} U(x) \otimes \varphi(x, p), \quad \text{za svako } p \in B,$$

nazivamo *slika* fazi podskupa $U$ u odnosu na $\varphi$.

Sa druge strane, fazi podskup $\varphi^{-1}(V)$ od $A$ definisan sa

$$(\varphi^{-1}(V))(x) = \bigvee_{p \in B} \varphi(x, p) \otimes V(p), \quad \text{za svako } x \in A,$$

nazivamo *inverzna slika* od $V$ u odnosu na $\varphi$.

Neka je $A$ algebra tipa $\tau$. Fazi podskup $U$ od $A$ nazivamo *fazi podalgebra* od $A$ ako za sve $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i $x_1, \dots, x_n \in A$ važi

$$U(x_1) \otimes \cdots \otimes U(x_n) \leqslant U(f^A(x_1, \dots, x_n)),$$

i ako za svaki $f \in \tau_0$ važi $U(f^A) = 1$ [96].

Narednom teoremom pokazujemo da se fazi podalgebre očuvavaju slikama i inverznim slikama fazi homomorfizama.

**Teorema 4.1.1.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$, i neka je $\varphi : A \to B$ fazi homomorfizam. Tada*

(a) *slika proizvoljne fazi podalgebre od $A$ u odnosu na $\varphi$ je fazi podalgebra od $B$;*

(b) *inverzna slika proizvoljne fazi podalgebre od $B$ u odnosu na $\varphi$ je fazi podalgebra od $A$.*

*Dokaz.* (a) Neka je $U$ fazi podalgebra od $A$. Jednostavnosti radi uvedimo oznaku $\varphi(U) = V$.

Uočimo proizvoljne $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i $p_1, \ldots, p_n \in B$. Tada je

$$\begin{aligned} V(p_1) \otimes \cdots \otimes V(p_n) &= \Big( \bigvee_{x_1 \in A} U(x_1) \otimes \varphi(x_1, p_1) \Big) \otimes \cdots \otimes \Big( \bigvee_{x_n \in A} U(x_n) \otimes \varphi(x_n, p_n) \Big) \\ &= \bigvee_{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n} \Big( U(x_1) \otimes \cdots \otimes U(x_n) \otimes \varphi(x_1, p_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_n, p_n) \Big) \\ &\leqslant \bigvee_{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n} \Big( U(f^A(x_1, \ldots, x_n)) \otimes \varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(p_1, \ldots, p_n)) \Big) \\ &\leqslant \bigvee_{x \in A} \Big( U(x) \otimes \varphi(x, f^B(p_1, \ldots, p_n)) \Big) = V(f^B(p_1, \ldots, p_n)). \end{aligned}$$

Štaviše, za svaki $f \in \tau_0$ imamo

$$V(f^B) = \bigvee_{x \in A} U(x) \otimes \varphi(x, f^B) \geqslant U(f^A) \otimes \varphi(f^A, f^B) = 1,$$

pa je $V(f^B) = 1$. Dakle, $V = \varphi(U)$ je fazi podalgebra od $A$.

(b) Ovo tvrđenje dokazuje se na sličan način kao (a). □

Neka je $A$ algebra tipa $\tau$. Fazi relacija $E$ na $A$ je *kompatibilna* ako za svaki $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i elemente $x_i, y_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, važi

$$E(x_1, y_1) \otimes \cdots \otimes E(x_n, y_n) \leqslant E\left(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^A(y_1, \ldots, y_n)\right). \tag{4.2}$$

Kompatibilna fazi ekvivalencija na $A$ naziva se *fazi kongruencija*.

Ako je $E$ fazi kongruencija na algebri $A$ tipa $\tau$, za svaki $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, definisaćemo $n$-arnu operaciju $f^{A_E}$ na faktor skupu $A_E$ sa

$$f^{A_E}(E_{x_1}, \ldots, E_{x_n}) = E_{f^A(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{4.3}$$

za sve $x_1, \ldots, x_n \in A$, dok za $f \in \tau_0$ stavljamo da je $f^{A_E} = E_{f^A}$. U odnosu na ovako definisane operacije, $A_E$ je takođe algebra tipa $\tau$, koju nazivamo *faktor algebra* ili *količnička algebra* algebre $A$ u odnosu na $E$ ([95, 112]).

Narednom teoremom uspostavićemo korespodenciju između fazi homomorfizama i fazi kongruencija, analognu onoj koja postoji u krisp slučaju.

**Teorema 4.1.2.** *Prirodno fazi preslikavanje koje odgovara proizvoljnoj fazi kongruenciji je fazi homomorfizam, i obratno, jezgro proizvoljnog fazi homomorfizma je fazi kongruencija.*

*Dokaz.* Neka je $E$ fazi kongruencija na algebri $A$ tipa $\tau$.

Razmotrimo $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i proizvoljne $x_i, y_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Tada je

$$\begin{aligned} E^\natural(x_1, E_{y_1}) \otimes \ldots \otimes E^\natural(x_n, E_{y_n}) &= E(x_1, y_1) \otimes \ldots \otimes E(x_n, y_n) \\ &\leqslant E(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^A(y_1, \ldots, y_n)) \\ &= E^\natural(f^A(x_1, \ldots, x_n), E_{f^A(y_1, \ldots, y_n)}) \\ &= E^\natural(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^{A_E}(E_{y_1}, \ldots, E_{y_n})). \end{aligned}$$

Osim toga, za svaki $f \in \tau_0$ važi

$$E^\natural(f^A, f^{A_E}) = E^\natural(f^A, E_{f^A}) = E(f^A, f^A) = 1.$$

Prema tome, $E^\natural$ jeste fazi homomorfizam.

Obratno, neka je $\varphi$ fazi homomorfizam iz algebre $A$ tipa $\tau$ u algebru $B$ istog tipa. Uvedimo oznaku $\ker\varphi = E$. Razmotrimo $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i proizvoljne $x_i, y_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Prema uslovu (2) Teoreme 3.3.2, prema definiciji fazi homomorfizma i Lemi 4.1.1 dobijamo

$$\begin{aligned} E(x_1, y_1) \otimes \cdots \otimes E(x_n, y_n) &= \varphi(x_1, \widehat{\varphi}(y_1)) \otimes \ldots \otimes \varphi(x_n, \widehat{\varphi}(y_n)) \\ &\leqslant \varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(\widehat{\varphi}(y_1), \ldots, \widehat{\varphi}(y_1))) \\ &= \varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), \widehat{\varphi}(f^A(y_1, \ldots, y_n))), \\ &= E(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^A(y_1, \ldots, y_n)). \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da je $E = \ker\varphi$ fazi kongruencija. $\square$

Takođe važi sledeće:

**Posledica 4.1.1.** *Ko-jezgro proizvoljnog fazi homomorfizma je fazi kongruencija.*

*Dokaz.* Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$ i neka je $\varphi : A \to B$ fazi homomorfizam. Tada imamo da je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam i $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\widehat{\varphi}$, pa je $\operatorname{Im}\varphi$ podalgebra od $B$. Uvedimo oznaku $\operatorname{cok}\varphi = F$, i razmotrimo proizvoljan funkcijski simbol $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i proizvoljne $p_i, q_i \in \operatorname{Im}\varphi$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Tada postoje $x_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, takvi da je $\widehat{\varphi}(x_i) = p_i$, i prema Teoremama 3.3.2 i 4.1.2 imamo da je

$$\begin{aligned} F(p_1,q_1) \otimes \cdots \otimes F(p_n,q_n) &= F(\widehat{\varphi}(x_1),q_1) \otimes \cdots \otimes F(\widehat{\varphi}(x_n),\widehat{\varphi}(y_n)) \\ &= \varphi(x_1,q_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_n,q_n) \\ &\leqslant \varphi(f^A(x_1,\ldots,x_n), f^B(q_1,\ldots,q_n)) \\ &= F(\widehat{\varphi}(f^A(x_1,\ldots,x_n)), f^B(q_1,\ldots,q_n)) \\ &= F(f^B(p_1,\ldots,p_n), f^B(q_1,\ldots,q_n)), \end{aligned}$$

odakle sledi da je $F$ fazi kongruencija na $\operatorname{Im}\varphi$. $\square$

Prethodna posledica ukazuje nam na zanimljivo svojstvo fazi jednakosti. Naime, u krisp slučaju je jednakost uvek kongruencija, dok fazi jednakost ne mora obavezno biti fazi kongruencija, što pokazuje sledeći primer.

**Primer 4.1.2.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka je $B$ polugrupa iz Primera 4.1.1. Fazi relacija $F$ na $B$ data sa

| $F$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.2 | 0.3 |
| $p_2$ | 0.2 | 1 | 0.2 |
| $p_3$ | 0.3 | 0.2 | 1 |

je fazi jednakost, ali nije fazi kongruencija, jer je

$$F(p_1,p_3) \otimes F(p_2,p_2) = 0.3 \otimes 1 = 0.3 > 0.2 = F(p_1,p_2) = F(p_1p_2, p_3p_2).$$

Primetimo da je $F = \operatorname{cok}\varphi$, gde je $\varphi$ fazi preslikavanje iz Primera 3.1.1.

Sledeća teorema daje karakterizaciju fazi homomorfizama u terminima njihovih krisp delova, jezgara i ko-jezgara.

**Teorema 4.1.3.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$ i neka je $\varphi : A \to B$ surjektivno fazi preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\varphi$ je fazi homomorfizam;*

(ii) $\widehat{\varphi}$ *je homomorfizam i* $\ker\varphi$ *je fazi kongruencija;*

(iii) $\widehat{\varphi}$ *je homomorfizam i* $\operatorname{cok}\varphi$ *je fazi kongruencija.*

*Dokaz.* Uvedimo oznake $\ker\varphi = E$ i $\operatorname{cok}\varphi = F$.

(i)⇒(iii). Ovo sledi prema Lemi 4.1.1 i Posledici 4.1.1.

(iii)⇒(ii). Razmotrimo proizvoljan funkcijski simbol $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i elemente $x_i, y_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prema pretpostavci i Posledici 3.3.1 imamo da je

$$\begin{aligned} E(x_1,y_1)\otimes\cdots\otimes E(x_n,y_n) &= F(\widehat{\varphi}(x_1),\widehat{\varphi}(y_1))\otimes\cdots\otimes F(\widehat{\varphi}(x_n),\widehat{\varphi}(y_n)) \\ &\leqslant F(f^B(\widehat{\varphi}(x_1),\dots,\widehat{\varphi}(x_n)), f^B(\widehat{\varphi}(y_1),\dots,\widehat{\varphi}(y_n))) \\ &= F(\widehat{\varphi}(f^A(x_1,\dots,x_n)),\widehat{\varphi}(f^A(y_1,\dots,y_n))) \\ &= E(f^A(x_1,\dots,x_n), f^A(y_1,\dots,y_n)), \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $E$ fazi kongruencija.

(ii)⇒(i). Razmotrimo proizvoljan $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i proizvoljne elemente $x_i \in A$, $p_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Kako je $\varphi$ surjektivno fazi preslikavanje, to postoji $y_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tako da je $p_i = \widehat{\varphi}(y_i)$, pa na osnovu pretpostavke i Teoreme 3.3.2 dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi(x_1,p_1)\otimes\cdots\otimes\varphi(x_n,p_n) &= \varphi(x_1,\widehat{\varphi}(y_1))\otimes\cdots\otimes\varphi(x_n,\widehat{\varphi}(y_n)) \\ &= E(x_1,y_1)\otimes\cdots\otimes E(x_n,y_n) \\ &\leqslant E(f^A(x_1,\dots,x_n), f^A(y_1,\dots,y_n)) \\ &= \varphi(f^A(x_1,\dots,x_n),\widehat{\varphi}(f^A(y_1,\dots,y_n))) \\ &= \varphi(f^A(x_1,\dots,x_n), f^B(\widehat{\varphi}(y_1),\dots,\widehat{\varphi}(y_n))) \\ &= \varphi(f^A(x_1,\dots,x_n), f^B(p_1,\dots,p_n)). \end{aligned}$$

Dakle, $\varphi$ je fazi homomorfizam. □

Narednom teoremom, analognom Teoremama 3.2.3 i 3.3.3, koje se tiču uniformnih fazi relacija i fazi preslikavanja, utvrđuju se potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju fazi homomorfizma sa datim domenom, slikom, jezgrom i ko-jezgrom.

**Teorema 4.1.4.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$, neka je $B'$ podalgebra od $B$, neka je $E$ fazi kongruencija na $A$ i $F$ je kompatibilna fazi jednakost na $B'$.*

*Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Postoji fazi homomorfizam $\varphi : A \to B$ za koji važi*

$$B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi \quad i \quad F = \operatorname{cok}\varphi; \tag{4.4}$$

(ii) *Postoji epimorfizam $\psi : A \to B'$ takav da je*

$$E(x, y) = F(\psi(x), \psi(y)), \quad \text{za sve } x, y \in A; \tag{4.5}$$

(iii) *Postoji izomorfizam $\phi : A_E \to B'$ takav da je*

$$\widetilde{E}(E_x, E_y) = F(\phi(E_x), \phi(E_y)), \quad \text{za sve } x, y \in A. \tag{4.6}$$

*Dokaz.* (i)⇒(ii). Ako je $\varphi : A \to B$ fazi homomorfizam za koji važi (4.4), tada prema Lemi 4.1.1 i Posledici 3.3.1 imamo da je $\psi = \widehat{\varphi}$ epimorfizam iz $A$ na $B'$ koji zadovoljava (4.5).

(ii)⇒(i). Neka je $\psi : A \to B'$ epimorfizam koji zadovoljava (4.5). Prema dokazu Teoreme 3.3.3, fazi relacija $\varphi : A \to B$ definisana sa

$$\varphi(x, p) = \begin{cases} F(\psi(x), p) & \text{za } x \in A \text{ i } p \in B', \\ 0 & \text{u suprotnom,} \end{cases}$$

je uniformna fazi relacija takva da je $A = \operatorname{Dom}\varphi$ i važi (4.4). Jasno, $\varphi$ je fazi preslikavanje i $\widehat{\varphi} = \psi$, i prema Teoremi 4.1.3 dobijamo da je $\varphi$ fazi homomorfizam.

(ii)⇒(iii). Ako je $\psi : A \to B'$ epimorfizam koji zadovoljava (4.5), onda je sa $\phi(E_x) = \psi(x)$, za svaki $x \in A$, definisan izomorfizam iz $A_E$ na $B'$ koji zadovoljava (4.6).

(iii)⇒(i). Ako je $\phi : A_E \to B'$ izomorfizam koji zadovoljava (4.6), onda je preslikavanje $\psi : A \to B'$ definisano sa $\psi(x) = \phi(E_x)$, za svaki $x \in A$, epimorfizam koji zadovoljava (4.5). □

Naredne dve teoreme pokazuju kako se može konstruisati fazi homomorfizam ako su dati njegov krisp deo i ko-jezgro, ili krisp deo i jezgro.

**Teorema 4.1.5.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$, $B'$ je podalgebra od $B$, $F$ je kompatibilna fazi jednakost na $B'$ i $\psi : A \to B'$ je epimorfizam. Tada*

(a) *Fazi relacija $E$ na $A$ definisana sa*

$$E(x, y) = F(\psi(x), \psi(y)), \quad \text{za sve } x, y \in A, \tag{4.7}$$

*je fazi kongruencija na $A$;*

(b) *Fazi relacija* $\varphi : A \to B$ *definisana sa*

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} F(\psi(x),p) & \text{za } x \in A \text{ i } p \in B' \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases}, \tag{4.8}$$

*je fazi homomorfizam za koji važi*

$$A = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi, \quad F = \operatorname{cok}\varphi \quad i \quad \widehat{\varphi} = \psi. \tag{4.9}$$

*Dokaz.* Prema Teoremi 3.3.4 imamo da je $E$ fazi ekvivalencija i $\varphi$ je fazi preslikavanje za koje važi (4.9). Dakle, $\widehat{\varphi}$ je homomorfizam, i prema pretpostavci i Teoremi 4.1.3 dobijamo da je $\varphi$ fazi homomorfizam. Na kraju, prema Teoremi 4.1.2 sledi da je $E$ fazi kongruencija. □

**Teorema 4.1.6.** *Neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$, neka je $B'$ podalgebra od $B$, neka je $E$ fazi kongruencija na $A$ i neka je $\psi : A \to B$ epimorfizam takav da je* $\ker\psi = \widehat{E}$. *Tada*

(a) *Fazi relacija $F$ na $B'$ definisana sa*

$$F(p,q) = E(x,y), \quad \text{za } p,q \in B' \text{ i proizvoljne } x \in \psi_p \text{ i } y \in \psi_q, \tag{4.10}$$

*je kompatibilna fazi jednakost na $B'$;*

(b) *Fazi relacija* $\varphi : A \to B$ *definisana sa*

$$\varphi(x,p) = \begin{cases} F(\psi(x),p) & \text{za } x \in A \text{ i } p \in B' \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases}, \tag{4.11}$$

*je fazi homomorfizam za koji važi*

$$A = \operatorname{Dom}\varphi, \quad B' = \operatorname{Im}\varphi, \quad E = \ker\varphi, \quad F = \operatorname{cok}\varphi \quad i \quad \widehat{\varphi} = \psi. \tag{4.12}$$

*Dokaz.* Ovo može da se dokaže na sličan način kao Teorema 4.1.5, korišćenjem Teoreme 3.3.5. □

## 4.2. Teoreme o fazi homomorfizmu i izomorfizmu

U ovom odeljku dokazaćemo teoreme o homomorfizmu i izomorfizmu koje se tiču fazi homomorfizama i fazi kongruencija.

**Teorema 4.2.1. (Teorema o fazi homomorfizmu)** *Neka je $\varphi$ fazi homomorfizam iz algebre $A$ na algebru $B$, i neka je $E = \ker\varphi$. Tada postoji jedinstveni fazi izomorfizam $\psi$ iz $A_E$ na $B$ takav da je $\varphi = E^\natural \bullet \psi$.*

*D o k a z .* Definišimo fazi relaciju $\psi : A_E \to B$ sa

$$\psi(E_x, p) = \varphi(x, p), \qquad \text{za svako } x \in A \text{ i } p \in B. \tag{4.13}$$

Razmotrimo $x, y \in A$ za koje je $E_x = E_y$. To znači da je $E(x, y) = 1$, i na osnovu (3.3) sledi da je $\varphi(x, p) = \varphi(y, p)$, za svaki $p \in B$. Dakle, $\psi$ je dobro definisano. Jasno je da je $\operatorname{Dom}\psi = A_E$ i $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi = B$.

Neka su $x, y \in A$ i $p \in B$ takvi da je $\psi(E_x, p) = \psi(E_y, p) = 1$. Tada je $\varphi(x, p) = \varphi(y, p) = 1$, odakle je $p = \widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(y)$. Sada imamo da važi

$$E(x, y) = (\ker\varphi)(x, y) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(x)) = 1,$$

što povlači $E_x = E_y$. Dakle, $\widehat{\psi}$ je preslikavanje iz $A$ na $B$. Takođe važi

$$\widehat{\psi}(E_x) = \widehat{\varphi}(x), \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

Dalje, za proizvoljne $x, y \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned}(\ker\psi)(E_x, E_y) &= \bigwedge_{p\in B} \psi(E_x, p) \leftrightarrow \psi(E_y, p) = \bigwedge_{p\in B} \varphi(x, p) \leftrightarrow \varphi(y, p) \\ &= (\ker\varphi)(x, y) = \varphi(x, \widehat{\varphi}(y)) = \psi(E_x, \widehat{\psi}(E_y)),\end{aligned} \tag{4.14}$$

pa zaključujemo da važi uslov (ii) Teoreme 3.3.2. Prema tome, $\psi$ je fazi preslikavanje.

Pored toga, prema (4.14) imamo da $(\ker\psi)(E_x, E_y) = 1$ povlači

$$E(x, y) = (\ker\varphi)(x, y) = 1,$$

odnosno, $E_x = E_y$, odakle sledi da je $\psi$ bijektivno fazi preslikavanje.

Na kraju, za sve $x \in A$ i $p \in B$, iz (3.39) sledi

$$(E^\natural \bullet \psi)(x, p) = \psi(\widehat{E^\natural}(x), p) = \psi(E_x, p) = \varphi(x, p),$$

što znači da je $E^\natural \bullet \psi = \varphi$.

Dalje, neka je $\psi'$ proizvoljno fazi preslikavanje iz $A_E$ u $B$ za koje važi da je $E^\natural \bullet \psi' = \varphi = E^\natural \bullet \psi$. Tada za sve $x \in A$ i $p \in B$ imamo da je

$$\begin{aligned}\psi'(E_x, p) &= \psi'(\widehat{E^\natural}(x), p) = (E^\natural \bullet \psi')(x, p) \\ &= (E^\natural \bullet \psi)(x, p) = \psi(\widehat{E^\natural}(x), p) = \psi(E_x, p),\end{aligned}$$

što znači da je $\psi' = \psi$.

Ostalo je da pokažemo da je $\psi$ fazi homomorfizam.

Razmotrimo proizvoljan $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, proizvoljne $E_{x_1}, \ldots, E_{x_n} \in A_E$, gde su $x_1, \ldots, x_n \in A$, kao i proizvoljne $p_1, \ldots, p_n \in B$. Tada je

$$\begin{aligned}
\psi(E_{x_1}, p_1) \otimes \ldots \otimes \psi(E_{x_n}, p_n) &= \varphi(x_1, p_1) \otimes \ldots \otimes \varphi(x_n, p_n) \\
&\leqslant \varphi(f^A(x_1, \ldots, x_n), f^B(p_1, \ldots, p_n)) \\
&= \psi(E_{f^A(x_1,\ldots,x_n)}, f^B(p_1, \ldots, p_n)) \\
&= \psi(f^{A_E}(E_{x_1}, \ldots, E_{x_n}), f^B(p_1, \ldots, p_n)).
\end{aligned}$$

Osim toga, za proizvoljan $f \in \tau_0$ imamo da je

$$\psi(f^{A_E}, f^B) = \psi(E_{f^A}, f^B) = \varphi(f^A, f^B) = 1.$$

Time smo dokazali da je $\psi$ fazi homomorfizam. $\square$

**Teorema 4.2.2. (Druga Teorema o fazi izomorfizmu)** *Neka su $E$ i $F$ fazi kongruencije na algebri $A$ takve da je $E \leqslant F$. Tada postoji jedinstveni fazi epimorfizam $\varphi : A_E \to A_F$ takav da je $E^\natural \bullet \varphi = F^\natural$.*

*Dokaz.* Definišimo fazi relaciju $\varphi : A_E \to A_F$ sa

$$\varphi(E_x, F_y) = F^\natural(x, F_y) = F(x, y), \qquad \text{za sve } x, y \in A.$$

Uzmimo da je $E_{x_1} = E_{x_2}$ i $F_{y_1} = F_{y_2}$, za neke $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$. Iz $E \leqslant F$ sledi da je $1 = E(x_1, x_2) \leqslant F(x_1, x_2)$, odakle je $F(x_1, x_2) = 1$, što znači da je $F_{x_1} = F_{x_2}$. Sada iz

$$\begin{aligned}
F(x_1, y_1) = F_{x_1}(y_1) &= F_{x_2}(y_1) = F(x_2, y_1) \\
&= F_{y_1}(x_2) = F_{y_2}(x_2) = F(x_2, y_2),
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $\varphi$ dobro definisana fazi relacija.

Ako su $x, y_1, y_2 \in A$ elementi za koje je $\varphi(E_x, F_{y_1}) = \varphi(E_x, F_{y_2}) = 1$, tj., $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 1$, tada je $F_{y_1} = F_x = F_{y_2}$. Odavde sledi da je $\widehat{\varphi}$ parcijalno preslikavanje, odnosno preslikavanje. Pored toga, iz $\varphi(E_x, F_x) = F(x, x) = 1$, zaključujemo da je $\widehat{\varphi}(E_x) = F_x$, za svaki $x \in A$.

Dalje, za sve $x_1, x_2 \in A$, na osnovu (3.8) dobijamo da je

$$\begin{aligned}(\ker\varphi)(E_{x_1}, E_{x_2}) &= \bigwedge_{\xi\in A_F} \varphi(E_{x_1},\xi) \leftrightarrow \varphi(E_{x_2},\xi)\\ &= \bigwedge_{y\in A} \varphi(E_{x_1},F_y) \leftrightarrow \varphi(E_{x_2},F_y)\\ &= \bigwedge_{y\in A} F(x_1,y) \leftrightarrow F(x_2,y) = \bigwedge_{y\in A} F_y(x_1) \leftrightarrow F_y(x_2)\\ &= F(x_1,x_2) = \varphi(E_{x_1},F_{x_2}) = \varphi(E_{x_1},\widehat{\varphi}(E_{x_2})).\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali da je $\varphi$ fazi preslikavanje. Jasno je da je $\varphi$ surjektivno.

Razmotrimo proizvoljne $f \in \tau_n$, $n \geqslant 1$, i $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$. Tada je

$$\begin{aligned}&\varphi(E_{x_1},F_{y_1}) \otimes \cdots \otimes \varphi(E_{x_n},F_{y_n}) = F(x_1,y_1) \otimes \cdots \otimes F(x_n,y_n)\\ &\quad\leqslant F(f^A(x_1,\dots,x_n), f^A(y_1,\dots,y_n)) = \varphi(E_{f^A(x_1,\dots,x_n)}, F_{f^A(y_1,\dots,y_n)})\\ &\quad= \varphi(f^{A_E}(E_{x_1},\dots,E_{x_n}), f^{A_F}(F_{y_1},\dots,F_{y_n})).\end{aligned}$$

Takođe, za svaki $f \in \tau_0$ je

$$\varphi(f^{A_E}, f^{A_F}) = \varphi(E_{f^A}, F_{f^A}) = F(f^A, f^A) = 1.$$

Prema tome, $\varphi$ je fazi homomorfizam.

Dalje, za sve $x, y \in A$ imamo

$$(E^\natural \bullet \varphi)(x, F_y) = \varphi(\widehat{E^\natural}(x), F_y) = \varphi(E_x, F_y) = F(x,y) = F^\natural(x, F_y),$$

odnosno $E^\natural \bullet \varphi = F^\natural$.

Na kraju, pretpostavimo da postoji fazi epimorfizam $\varphi'$ iz $A_E$ na $A_F$ za koji je $E^\natural \bullet \varphi' = F^\natural$. Tada za proizvoljne $x, y \in A$ imamo da važi

$$\begin{aligned}\varphi'(E_x, F_y) &= \varphi'(\widehat{E^\natural}(x), F_y) = (E^\natural \bullet \varphi')(x, F_y)\\ &= F^\natural(x, F_y) = (E^\natural \bullet \varphi)(x, F_y) = \varphi(\widehat{E^\natural}(x), F_y) = \varphi(E_x, F_y),\end{aligned}$$

pa je $\varphi' = \varphi$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Za neke srodne rezultate upućujemo na radove Samhana [112] i Kurokija [76], kao i na tamo citirane radove (pogledati takođe knjigu Mordesona, Malika and Kurokija [92]).

## 4.3. Odnos prema rezultatima drugih autora

U ovom odeljku ukazaćemo na veze koje postoje između ovde uvedenih fazi homomorfizama i homomorfizama algebri sa fazi jednakostima, kojima su se bavili Bělohlávek i Vychodil u [3, 4, 5, 7, 8, 121], i daćemo nekoliko komentara vezanih za koncepte koje su izučavali Murali u [95] i Samhan u [112].

Grubo govoreći, tip algebri sa fazi jednakošću je skup $\tau \cup \{E\}$, gde je $\tau$ običan tip algebri, a $E$ je dodatni binarni fazi relacijski simbol. *Algebra sa fazi jednakošću* tipa $\tau \cup \{E\}$ je obična algebra $A$ tipa $\tau$, takva da se fazi relacijski simbol $E$ realizuje kao kompatibilna fazi jednakost $E_A$ na $A$. Za stroge definicije algebri sa fazi jednakošću i srodnih koncepata upućujemo na [7, 8].

Ako je $A$ algebra sa fazi jednakošću tipa $\tau \cup \{E\}$, tada se *kongruencija* (*algebre sa fazi jednakošću*) na $A$ definiše kao fazi kongruencija $E$ na $A$ koja sadrži fazi jednakost $E_A$ (tj., $E_A \leqslant E$). Dalje, ako su $A$ i $B$ algebre sa fazi jednakošću tipa $\tau \cup \{E\}$, tada se *homomorfizam* (*algebre sa fazi jednakošću*) iz $A$ u $B$ definiše kao običan homomorfizam $\psi : A \to B$ za koji važi

$$E_A(x, y) \leqslant E_B(\psi(x), \psi(y)), \tag{4.15}$$

za sve $x, y \in A$. U tom slučaju, fazi relacija $\theta_\psi$ na $A$ definisana sa

$$\theta_\psi(x, y) = E_B(\psi(x), \psi(y)), \tag{4.16}$$

za sve $x, y \in A$, je kongruencija (algebre sa fazi jednakošću) na $A$, i naziva se *jezgro* od $\psi$. Prema Teoremi 4.1.5 sledi da se može konstruisati takav fazi homomorfizam $\varphi : A \to B$ da važi $\widehat{\varphi} = \psi$, $\ker \varphi = \theta_\psi$, i $\operatorname{cok} \varphi$ je restrikcija od $E_B$ na $\operatorname{Im} \psi$. Prema tome, svaki homomorfizam algebri sa fazi jednakošću je krisp deo nekog fazi homomorfizma u smislu naše definicije.

Sa druge strane, neka su $A$ i $B$ algebre tipa $\tau$, i neka je $\varphi : A \to B$ fazi homomorfizam. Ako se kompatibilne fazi jednakosti $E_A$ na $A$ i $E_B$ na $B$ izaberu tako da je $E_A \leqslant \ker \varphi$ i $(\operatorname{cok} \varphi)(p, q) \leqslant E_B(p, q)$, za sve $p, q \in \operatorname{Im} \varphi$, tada na osnovu Posledice 3.3.1 dobijamo da je $\widehat{\varphi}$ homomorfizam algebri sa fazi jednakošću, u smislu Bělohláveka i Vychodila.

Međutim, kompatibilne fazi jednakosti $E_A$ i $E_B$ mogu biti izabrane i tako da $\widehat{\varphi}$ ne bude homomorfizam algebri sa fazi jednakošću, kao što pokazuje sledeći primer.

**Primer 4.3.1.** Neka je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ Gödelova struktura, i neka su $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ polugrupe iz Primera 4.1.1.

Neka je $\psi : A \to B$ preslikavanje zadato sa

$$\psi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

i neka su $E_A$ i $E_B$ fazi relacije na $A$ i $B$, tim redom, zadata sa

| $E_A$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0.8 | 0.5 | 0.3 |
| $x_2$ | 0.8 | 1 | 0.5 | 0.3 |
| $x_3$ | 0.5 | 0.5 | 1 | 0.3 |
| $x_4$ | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 1 |

| $E_B$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 1 | 0.3 | 0.2 |
| $p_2$ | 0.3 | 1 | 0.2 |
| $p_3$ | 0.2 | 0.2 | 1 |

Nije teško proveriti da je $\psi$ homomorfizam običnih polugrupa, a da su $E_A$ i $E_B$ kompatibilna fazi jednakosti.

Definišimo sada fazi relaciju $\varphi : A \to B$ sa

$$\varphi(x, p) = E_B(\psi(x), p),$$

za sve $x \in A$ i $p \in B$. Prema Teoremi 4.1.5 imamo da je $\varphi$ fazi homomorfizam iz $A$ u $B$ i $\psi = \widehat{\varphi}$. Međutim,

$$E_A(x_1, x_3) = 0.5 > 0.3 = E_B(\psi(x_1), \psi(x_3)),$$

pa $\psi$ nije homomorfizam algebri sa fazi jednakošću, za ovako izabrane fazi jednakosti na $A$ i $B$.

Sumirajući sve napred izloženo, možemo reći da homomorfizmi algebri sa fazi jednakošću jesu krisp delovi fazi homomorfizama, ali da fiksiranjem fazi jednakosti na algebrama krisp delove nekih fazi homomorfizama onemogućavamo da budu homomorfizmi algebri sa fazi jednakošću. Međutim, algebre sa fazi jednakošću, njihovi homomorfizmi i kongruencije, pokazali su se kao veoma efikasni u istraživanjima u okviru fazi jednakosne logike, koja su sproveli Bělohlávek i Vychodil u [3, 4, 5, 7, 8, 121].

Istaknimo na kraju da su Bělohlávek i Vychodil u [7, 8] izvršili upoređenje svojih algebri sa fazi jednakošću, njihovih podalgebri, kongruencija, homomorfizama i faktor algebri, sa konceptima fazi podalgebre, fazi kongruencije i fazi faktor algebre, kojima su se bavili Murali u [95] i Samhan u [112]. Tom prilikom, Bělohlávek i Vychodil su ukazali na dva nedostatka Muralijevog i Samhanovog pristupa. Prvi je to što su Murali i Samhan koristili Gödelovu strukturu kao strukturu istinitosnih vrednosti, a ne neku opštiju strukturu, poput kompletnih reziduiranih mreža. Kao što smo ovde videli, svi koncepti sa kojima su radili Murali i Samhan mogu se bez ikakvih problema prevesti u odgovarajuće koncepte definisane nad kompletnim reziduiranim mrežama. Kao drugi nedostatak, Bělohlávek i Vychodil su istakli odsustvo takvog koncepta fazi homomorfizma koji će biti u prirodnoj korespondenciji sa konceptom fazi kongruencije. U ovoj disertaciji smo dali upravo takav koncept fazi homomorfizma, i ne samo da smo otklonili pomenuti nedostatak, već smo pokazali i to da pristupi Bělohláveka i Vychodila, sa jedne strane, i Muralija i Samhana, sa drige strane, i nisu tako različiti kako je to ranije izgledalo.

## 4.4. Fazi kongruencije na polugrupi

U prvom odeljku ove glave definisali smo koncepte fazi kongruencije na proizvoljnoj algebri. Kod polugrupa je, osim tog koncepta, moguće razmatrati i njegove leve i desne analogone, tj. leve i desne fazi kongruencije. U narednoj glavi videćemo da se desne fazi kongruencije, zajedno sa fazi kongruencijama, mogu veoma uspešno iskoristiti u izučavanju fazi automata i fazi jezika.

Neka je $S$ polugrupa. Za fazi relaciju $E$ na $S$ kažemo da je

(i) *levo kompatibilna*, ako je $E(a,b) \leqslant E(xa,xb)$, za sve $a,b,x \in S$,

(ii) *desno kompatibilna*, ako je $E(a,b) \leqslant E(ax,bx)$, za sve $a,b,x \in S$,

(iii) *kompatibilna*, ako je $E(a,b) \leqslant E(xay,xby)$, za sve $a,b \in S$ i $x,y \in S^1$, tj. ako je i levo i desno kompatibilna.

Ovde $S^1$ označava polugrupu dobijenu kada se polugrupa $S$ proširi jedinicom.

Levo kompatibilnu fazi ekvivalenciju na polugrupi $S$ nazivamo *leva fazi kongruencija*, desno kompatibilnu fazi ekvivalenciju nazivamo *desna fazi kongruencija*, dok kompatibilnu fazi ekvivalenciju nazivamo *fazi kongruencija* na $S$. Nije teško dokazati da je ovakva definicija fazi kongruencije na polugrupi ekvivalentna definiciji fazi kongruencije datoj u prvom odeljku ove glave, tj., gornji uslov (iii), zajedno sa tranzitivnošću, je ekvivalentan uslovu

$$E(x_1,y_1) \otimes E(x_2,y_2) \leqslant E(x_1x_2,y_1y_2),$$

za sve $x_1,x_2,y_1,y_2 \in S$.

Neka je $E$ fazi ekvivalencije na polugrupi $S$, i neka su fazi relacije $E_l^0$,

$E_r^0$ i $E^0$ na $S$ definisane sa

$$E_l^0(a,b) = \bigwedge_{x\in S^1} E(xa,xb),$$
$$E_r^0(a,b) = \bigwedge_{x\in S^1} E(ax,bx),$$
$$E^0(a,b) = \bigwedge_{x,y\in S^1} E(xay,xby),$$

za sve $a,b \in S$. Tada imamo sledeće:

**Teorema 4.4.1.** *Neka je $S$ polugrupa i $E$ je fazi ekvivalencija na $S$. Tada*

(a) *$E_l^0$ je najveća leva fazi kongruencija na $S$ sadržana u $E$;*
(b) *$E_r^0$ je najveća desna fazi kongruencija na $S$ sadržana u $E$;*
(c) *$E^0$ je najveća fazi kongruencija na $S$ sadržana u $E$;*
(d) *Ako je $E$ fazi desna (resp. leva) kongruencija na $S$, onda je $E^0 = E_l^0$ (resp. $E^0 = E_r^0$).*

*Dokaz.* (a) Jednostavno se dokazuje da je $E_l^0$ fazi ekvivalencija, jer to sledi direktno iz svojstava fazi ekvivalencije $E$. Takođe, za proizvoljne $a,b,y \in S$ važi

$$E_l^0(a,b) = \bigwedge_{x\in S^1} E(xa,xb) \leqslant E_l^0(ya,yb),$$

što znači da je $E_l^0$ leva fazi kongruencija. Neka je $F$ proizvoljna leva fazi kongruencija na polugrupi $S$ sadržana u $E$. Tada je

$$F(a,b) \leqslant F(xa,xb) \leqslant E(xa,xb),$$

za svaki $x \in S^1$, odnosno $F(a,b) \leqslant E_l^0(a,b)$.

(b) se dokazuje dualno, dok se (c) i (d) dobijaju neposredno iz tvrđenja pod (a) i (b). □

Drugim rečima, ova teorema tvrdi da su preslikavanja $E \mapsto E_l^0$, $E \mapsto E_r^0$ i $E \mapsto E^0$ operatori otvorenja na mreži fazi ekvivalencija na polugrupi $S$, pa se $E_l^0$ naziva *levo fazi kongruencijsko otvorenje*, $E_r^0$ je *desno fazi kongruencijsko otvorenje*, i $E^0$ je *fazi kongruencijsko otvorenje* od $E$.

Proizvoljnom fazi podskupu $f$ pridružujemo fazi relaciju $R_f$ na $S$ definisanu na sledeći način:

$$R_f(a,b) = \bigwedge_{x\in S^1} f(ax) \leftrightarrow f(bx) = \bigwedge_{x\in S^1} E_f(ax,bx),$$

za proizvoljne $a,b \in S$.

**Teorema 4.4.2.** *Neka je $f$ fazi podskup polugrupe $S$. Tada je $R_f$ najveća fazi desna kongruencija u odnosu na koju je $f$ ekstenzionalan.*

*D o k a z .* Iz Teoreme 4.4.1 sledi da je $R_f$ desno fazi kongruencijsko otvorenje fazi ekvivlencije $E_f$ i za sve $a, b \in S$ važi

$$R_f(a,b) = \bigwedge_{x \in S^1} f(ax) \leftrightarrow f(bx) \leqslant f(a) \leftrightarrow f(b),$$

što znači da je fazi skup $f$ ekstenzionalan u odnosu na $R_f$.

Neka je $R$ proizvoljna fazi desna kongruencija polugrupe $S$ u odnosu na koju je $f$ ekstenzionalan. Tada je

$$R(a,b) \leqslant R(ax,bx) \leqslant f(ax) \leftrightarrow f(bx),$$

za sve $a, b \in S$ i $x \in S^1$. Odatle je $R \leqslant R_f$, čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Fazi relaciju $R_f$ nazivamo *glavnom desnom fazi kongruencijom* na $S$ *određenom fazi skupom* $f$.

Slično, fazi podskupu $f$ pridružujemo i fazi relaciju $P_f$ na $S$ definisanu na sledeći način:

$$P_f(a,b) = \bigwedge_{x,y \in S^1} f(xay) \leftrightarrow f(xby) = \bigwedge_{x,y \in S^1} E_f(xay, xby),$$

za proizvoljne $a, b \in S$.

**Teorema 4.4.3.** *Neka je $f$ fazi podskup polugrupe $S$. Tada je $P_f$ najveća fazi kongruencija u odnosu na koju je $f$ ekstenzionalan.*

*D o k a z .* Ovo tvrđenje sledi direktno iz prethodne teoreme i njoj dualnog tvrđenja. $\square$

Fazi relaciju $P_f$ nazivamo *glavna fazi kongruencija* na $S$ *određena fazi skupom* $f$.

# Glava 5

# Teorija Myhill-Nerodeovog tipa

Poznato je da veoma značajnu ulogu u izučanju klasičnih jezika i automata ima Myhill-Nerode-ova teorija, u kojoj se raspoznatljivost jezika konačnim automatima izučava pomoću desnih kongruencija i kongruencija na slobodnim monoidima, kao i preko drugih koncepata teorije polugrupa. U teoriji fazi jezika slične koncepte koristili su Shen u [113], Malik, Mordeson i Sen u [86], kao i Mordeson i Malik u [89]. U pomenutim izvorima razmatrane su sintaksičke desne kongruencije i izvodi (razlomci) fazi jezika, ali nije razvijena kompletna teorija zasnovana na fazi desnim kongruencijama i fazi kongruencijama na slobodnim monoidima. Zbog toga glavni zadatak ove doktorske disertacije predstavlja upravo izvođenje kompletne teorije Myhill-Nerodovog tipa za fazi jezike i automate, uz korišćenje fazi desnih kongruencija i fazi kongruencija na slobodnim monoidima, kao i raspoznavanje fazi jezika konačnim monoidima.

Myhill-Nerodeova teorija za obične determinističke automate tesno je povezana sa jednim od najznačajnijih pitanja teorije automata, sa pitanjem minimizacije automata. Pitanje minimizacije fazi automata razmatrano je u brojnim radovima [2, 20, 78, 87, 89, 101]. Međutim, problem minimizacije je kod fazi automata znatno složeniji, i ni u jednom od pomenutih radova se nije zaista radilo sa pravom minimizacijom, koja će kao rezultat dati minimalni fazi automat određenog tipa, na primer, minimalni fazi automat koji raspoznaje dati fazi jezik. Naime, metodi koji su razvijani u tim radovima bili su zapravo metodi za redukciju fazi automata, tj. za nalaženje fazi automata sa manjim brojem stanja koji raspoznaju isti jezik kao polazni automat, bez obaveznog određivanja minimalnog automata sa tim svojstvom. U ovoj disertaciji pokazaćemo da se minimalnost može postići kod determinističkih fazi raspoznavača, tj. da za svaki fazi jezik postoji deterministički fazi raspoznavač minimalne kardinalnosti koji ga raspoznaje.

Pokazaćemo, takođe, da je i problem determinizacije fazi automata tesno povezan sa konceptom Nerodove fazi desne kongruencije fazi automata. Koncept fazi automata je prirodno uopštenje koncepta nedeterminističkih automata, kao što je i koncept fazi skupova i fazi relacija uopštenje klasičnog koncepta skupova i relacija. Veze između fazi nedeterminističkih i determinističkih automata proučavali su Močkoř [88], Bělohlávek [4] i Li i Pedrycz [81]. Močkoř je u [88] predstavio fazi automate kao ugnježdene sisteme nedeterminističkih automata, dok je Bělohlávek u [4] determinističke fazi raspoznavače predstavio kao ugnježdene sisteme determinističkih raspoznavača. Pored toga, Bělohlávek je proučavao fazi automate nad lokalno konačnim, kompletnim mrežama i dokazao da proizvoljan fazi jezik raspoznatljiv konačnim fazi raspoznavačem može da se raspozna i konačnim determinističkim fazi raspoznavačem. Opštiji rezultat su dali Li i Pedrycz u [81]. Oni su proučavali fazi automate nad mrežno uređenim monoidom $\mathscr{L}$, i pokazali su da svaki fazi jezik koji se može raspoznati konačnim fazi raspoznavačem može biti raspoznat i konačnim determinističkim fazi raspoznavačem ako i samo ako je redukt od $\mathscr{L}$, u odnosu na uniju i množenje, lokalno konačan poluprsten. Metode determinizacije fazi automata koje su koristili Bělohlávek u [4] i Li i Pedrycz u [81] analogne su dobro poznatim metodama konstrukcije podskupova, koje se koriste u determinizaciji krisp nedeterminističkih automata (cf. [77]) i ovde ćemo ih zvati *konstrukcije fazi podskupova* (engl. fuzzy subset construction). Ovakva konstrukcija, međutim ima isti nedostatak koji se javlja i u krisp slučaju: neka stanja dobijenog determinističkog fazi raspoznavača mogu biti suvišna. Zato ćemo ovde proučavati drugu vrstu konstrukcije, tzv. *dostižnu* (engl. accessible) konstrukciju fazi podskupova, analognu dobro poznatoj dostižnoj konstrukciji krisp podskupova koja se koristi u determinizaciji nedeterminističkih automata.

U prvom odeljku ove glave biće uvedeni pojmovi fazi automata, fazi jezika i biće definisana raspoznatljivost fazi jezika fazi automatom. Prema klasičnom rezultatu Teorije automata, proizvoljan dostižan automat može da se konstruiše polazeći od desne kongruencije na njegovom ulaznom monoidu. Pomenuta desna kongruencija je Nerodeova desna kongruencija ovog automata. Motivisani ovom činjenicom, u Odeljku 5.2 ćemo krenuti od proizvoljne fazi desne kongruencije $E$ na slobodnom monoidu, konstruisati inicijalni fazi automat $\mathscr{A}_E$ određen njome koji se naziva automat fazi desne kongruencije i naći potreban i dovoljan uslov da ovaj fazi automat raspoznaje dati fazi jezik. Pokazaćemo, takođe da je krisp deo fazi automata $\mathscr{A}_E$ deterministički automat koji raspoznaje svaki jezik koji raspoznaje i

$\mathscr{A}_E$. (Teorema 5.2.3) U Odeljku 5.3 proizvoljnom fazi automatu $\mathscr{A}$ će biti pridružena fazi desnu kongruenciju $N_{\mathscr{A}}$ definisana na ulaznom monoidu tog automata, koju ćemo nazvati Nerodeova fazi desna kongruencija. Pokazaémo da odgovarajući Nerodeov fazi automat $\mathscr{A}_{N_{\mathscr{A}}}$, kao i njegov krisp deo $\mathscr{A}_{\widehat{N}_{\mathscr{A}}}$ raspoznaju svaki fazi jezik koji je raspoznatljiv automatom $\mathscr{A}$ (Teoreme 5.3.1 i 5.3.2). U Odeljku 5.4 ćemo konstruisati, plazeći od datog fazi automata $\mathscr{A}$, deterministički fazi automat $\mathscr{A}_\sigma$ koji raspoznaje isti fazi jezik kao $\mathscr{A}$ i daćemo algoritam za determinizaciju fazi automata $\mathscr{A}$ konstrukcijom stabla prelaza fazi automata $\mathscr{A}_\sigma$. Biće definisani potrebni uslovi da krisp deo fazi automata, koji odgovara Nerodeovoj fazi desnoj kongruenciji inicijalnog fazi automata $\mathscr{A}$, bude deterministički automat izomorfan automatu dobijenom determinizacijom od $\mathscr{A}$ metodom konstrukcije dostižnih fazi podskupova. U Odeljku 5.5 biće definisan minimalni deterministički fazi raspoznavač koji raspoznaje dati fazi jezik i određeni neophodni uslovi koje treba da zadovolji fazi automat $\mathscr{A}$ da bi Nerodeova fazi desna kongruencija imala konačan indeks. Naime, Nerodeova fazi desna kongruencija proizvoljnog, konačnog fazi automata nad kompletnom reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$ ima konačan indeks ako i samo ako je redukt od $\mathscr{L}$ lokalno konačan poluprsten (Teorema **??**). U Odeljku 5.6. će, prirodno uslediti definicija *izvoda* (ili *desnih razlomaka*) fazi jezika i automata $\mathscr{A}_f$ čija su stanja desni razlomci datog fazi jezika, i koji je izomorfan faktor automatu $\mathscr{A}_{\widehat{R_f}}$. Odeljak 5.7 pokazaće da se postupak minimizacije deterministčkih fazi raspoznavača svodi na postupak nalaženja niza kongruencija determinističkog automata. Zatim će, u Odeljku 5.8 biti uveden pojam fazi homomorfizma na polugrupi (monoidu) i pokazaćemo da monoid M raspoznaje dati fazi jezik pomoću nekog fazi homomorfizma ako i samo ako je f ekstenzionalan u odnosu na jezgro tog fazi homomorfizma. Takođe ćemo pokazati da je monoid prelaza proizvoljnog fazi automata A izomorfan faktor monoidu određenom Myhillovom fazi kongruencijom na X*.

Primetimo da se rezultati predstavljeni u Odeljcima 5.2 i 5.4 mogu dokazati i u opštijem slučaju, kada je $\mathscr{L}$ mrežno uređeni monoid. Međutim, za rezultate dobijene u odeljku 5.2, gde se uvodi Nerodeova fazi desna kongruencija, neophodno je da $\mathscr{L}$ bude reziduirana mreža, zbog čega je i u ovoj glavi struktura istinitosnih vrednosti kompletna reziduirana mreža.

Kao što je navedeno, Nerodeov fazi automat $\mathscr{A}_{N_{\mathscr{A}}}$ i njegov krisp deo $\mathscr{A}_{\widehat{N}_{\mathscr{A}}}$ nisu obavezno konačni, čak i kada je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat. Na primer, ovo važi ako je $\mathscr{L}$ Heytingova algebra, ili ako je
$\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ struktura u kojoj je $\otimes$ Łukasiewiczeva ili Gödelova operacija, ali ne važi ako je $\mathscr{L} = ([0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ struktura sa proizvod operacijom $\otimes$ .

## 5.1. Fazi automati i jezici

*Fazi automat nad* $\mathscr{L}$, ili, jednostavno, *fazi automat*, je uređena trojka $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$, gde su $A$ i $X$ skupovi, koji se nazivaju, redom, *skup stanja* i *ulazni alfabet*, a $\delta : A \times X \times A \to L$ je fazi podskup od $A \times X \times A$, koji se naziva *funkcija fazi prelaza*. Pretpostavićemo da je ulazni alfabet $X$ uvek konačan, ali ćemo, iz metodoloških razloga dozvoliti da skup stanja $A$ bude beskonačan. Fazi automat $\mathscr{A}$ koji ima konačan skup stanja naziva se *konačan fazi automat*.

Označimo sa $X^*$ slobodan monoid nad alfabetom $X$. Preslikavanje $\delta$ može se proširiti do preslikavanja $\delta^* : A \times X^* \times A \to L$ na sledeći način: Za stanja $a, b \in A$ i praznu reč $e \in X^*$, stavljamo da je

$$\delta^*(a, e, b) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } a = b \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases}, \tag{5.1}$$

a ako su $a, b \in A$, $u \in X^*$ i $x \in X$, onda stavljamo da je

$$\delta^*(a, ux, b) = \bigvee_{c \in A} \delta^*(a, u, c) \otimes \delta(c, x, b). \tag{5.2}$$

Prema (1.25) i Teoremi 3.1 [81], imamo da je

$$\delta^*(a, uv, b) = \bigvee_{c \in A} \delta^*(a, u, c) \otimes \delta^*(c, v, b), \tag{5.3}$$

za sve $a, b \in A$ i $u, v \in X^*$, odnosno, ako je $w = x_1 \cdots x_n$, za $x_1, \ldots, x_n \in X$, onda je

$$\delta^*(a, w, b) = \bigvee_{(c_1, \ldots, c_{n-1}) \in A^{n-1}} \delta(a, x_1, c_1) \otimes \delta(c_1, x_2, c_2) \otimes \cdots \cdots \otimes \delta(c_{n-1}, x_n, b). \tag{5.4}$$

Bez opasnosti od zabune, i funkciju prelaza $\delta$ i njeno proširenje $\delta^*$ označavaćemo u daljem radu istim simbolom $\delta$.

Za proizvoljno $u \in X^*$ definisaćemo fazi relaciju $\delta_u$ na $A$ sa

$$\delta_u(a, b) = \delta(a, u, b), \tag{5.5}$$

za sve $a, b \in A$, koju ćemo nazvati *relacija prelaza* određena sa $u$. Tada jednakost (5.6) može biti zapisana i u obliku:

$$\delta_{uv} = \delta_u \circ \delta_v, \tag{5.6}$$

za sve $u, v \in X^*$. Jednakost (5.6) zapravo znači da u odnosu na kompoziciju fazi relacija, relacije prelaza fazi automata $\mathscr{A}$ čine polugrupu. Tu polugrupu nazivaćemo *polugrupa prelaza* fazi automata $\mathscr{A}$.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ fazi automat. Tada je $\widehat{\delta}$, krisp deo od $\delta$, običan podskup od $A \times X \times A$, i $\widehat{\mathscr{A}} = (A, X, \widehat{\delta})$ je nedeterministički automat, koji se naziva *krisp deo* fazi automata $\mathscr{A}$.

Ako je $\delta$ krisp podskup od $A \times X \times A$, tj., $\delta : A \times X \times A \to \{0, 1\}$, onda je $\mathscr{A}$ običan krisp nedeterministički automat, a ako je $\delta$ preslikavanje iz $A \times X$ u $A$, onda je $\mathscr{A}$ običan deterministički automat. Očigledno je, da je u oba slučaja, proširenje preslikavanja $\delta$ takođe krisp podskup od $A \times X^* \times A$, i preslikavanje iz $A \times X^*$ u $A$, tim redom. Za deterministički automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$, $a \in A$ i $u \in X^*$, stanje $\delta(a, u)$ ćemo označavati kraće sa $au$.

*Inicijalni fazi automat* definišemo kao uređenu četvorku $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$, gde je $(A, X, \delta)$ fazi automat i $\sigma$ je fazi podskup od $A$, koji nazivamo fazi skup *inicijalnih stanja*, a *fazi raspoznavač* je uređena petorka $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$, gde je $(A, \sigma, X, \delta)$ inicijalni fazi automat, a $\tau$ je fazi podskup od $A$, koji nazivamo fazi skup *završnih* (*terminalnih*) *stanja*

*Fazi jezik* u $X^*$ nad $\mathscr{L}$, ili kraće samo *fazi jezik*, je proizvoljan fazi podskup slobodnog monoida $X^*$, tj., svako preslikavanje iz $X^*$ u $L$. Fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ *raspoznaje* fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ ako za svaku reč $u \in X^*$ važi

$$f(u) = \bigvee_{a,b \in A} \sigma(a) \otimes \delta(a, u, b) \otimes \tau(b). \tag{5.7}$$

Koristeći oznake iz (1.58), i drugu jednakost u (1.60), možemo (5.7) predstaviti na sledeći način:

$$f(u) = \sigma \circ \delta_u \circ \tau. \tag{5.8}$$

Fazi jezik raspoznat fazi raspoznavačem $\mathscr{A}$ označićemo sa $L(\mathscr{A})$. Za inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ kažemo da *može raspoznati* fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ ako postoji fazi skup $\tau \in \mathscr{F}(A)$ tako da fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ raspoznaje $f$.

Uređenu četvorku $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$, gde je $(A, X, \delta)$ deterministički automat i $a_0 \in A$, nazivamo *inicijalni deterministički automat*, a uređenu petorku $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$, gde je $(A, a_0, X, \delta)$ inicijalni deterministički automat i $\tau$ je fazi podskup od $A$ nazivaćemo *deterministički fazi raspoznavač*. Za deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ kažemo da raspoznaje fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ ako za proizvoljnu reč $u \in X^*$ važi

$$f(u) = \tau(\delta(a_0, u)) = \tau(a_0 u). \tag{5.9}$$

Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$ inicijalni deterministički automat, ili deterministički fazi raspoznavač, u kom slučaju je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$. Za $a \in A$ kažemo da je *dostižno stanje* ako postoji $u \in X^*$ tako da je $\delta(a_0, u) = a$, i ako je svako njegovo stanje dostižno, za $\mathscr{A}$ kažemo da je *dostižan automat* (raspoznavač).

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ običan deterministički automat. Za fazi ekvivalenciju $P$ na skupu stanja $A$ kažemo da je *fazi kongruencija* $\mathscr{A}$ ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ i svako slovo $x \in X$, važi

$$P(a, b) \leqslant P(ax, bx).$$

Indukcijom po dužini reči jednostavno se pokazuje da tada za svaka dva stanja $a, b \in A$ i za svaku reč $u \in X^*$ važi

$$P(a, b) \leqslant P(au, bu).$$

Setimo se da relaciju ekvivalencije $\pi$ na $A$ nazivamo *kongruencija* na $\mathscr{A}$ ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ i svako slovo $x \in X$, važi

$$(a, b) \in \pi \;\Rightarrow\; (ax, bx) \in \pi,$$

ili, ekvivalentno, ako za svaka dva stanja $a, b \in A$ i svaku reč $u \in X$, važi

$$(a, b) \in \pi \;\Rightarrow\; (au, bu) \in \pi.$$

Nije teško proveriti da krisp deo proizvoljne fazi kongruencije na $\mathscr{A}$ jeste kongruencija na $\mathscr{A}$.

Ako su $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ i $\mathscr{A}' = (A', X, \delta')$ deterministički automati, i ako je $\varphi : A \to A'$ je preslikavanje takvo da za sve $a \in A$ i $x \in X$ važi

$$\varphi(\delta(a, x)) = \delta'(\varphi(a), x'),$$

tada preslikavanje $\varphi$ nazivamo *homomorfizmom* automata $\mathscr{A}$ u $\mathscr{A}'$.

U slučaju kada su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}'$ inicijalni deterministički automati, onda *homomorfizmom inicijalnih automata* nazivamo homomorfizam iz $\mathscr{A}$ u $\mathscr{A}'$, koji inicijalno stanje automata $\mathscr{A}$ slika u inicijalno stanje od $\mathscr{A}'$. Bijektivni homomorfizam automata nazivamo *izomorfizmom* automata.

Prethodne definicije ticale su se determinističkih automata. Međutim, daćemo i definiciju izomorfizma fazi automata. Naime, neka su $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ i $\mathscr{A}' = (A', X, \delta')$ fazi automati, i $\varphi : A \to A'$ je bijektivno preslikavanje takvo da za sve $a, b \in A$ i $x \in X$ važi

$$\delta(a, x, b) = \delta'(\varphi(a), x, \varphi(b)),$$

tada preslikavanje $\varphi$ nazivamo *izomorfizam* fazi automata $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}'$.

## 5.2. Automati fazi desnih kongruencija

Podsetimo da se, kod klasičnih automata, mogu uspostaviti međusobno inverzne bijekcije iz skupa svih desnih kongruencija na slobodnom monoidu $X^*$ na skup svih automata sa ulaznim alfabetom $X$ i obratno.

Tako, desnoj kongruenciji $\pi$ na slobodnom monoidu $X^*$ možemo pridružiti krisp deterministički automat $\mathscr{A}_\pi = (A_\pi, X, \lambda_\pi)$, gde je $A_\pi = X^*/\pi$ i preslikavanje $\lambda_\pi : A_\pi \times X \to A_\pi$ je definisano sa

$$\lambda_\pi(\pi_u, x) = \pi_{ux}, \tag{5.10}$$

za sve $u \in X^*$ i $x \in X$. Preslikavanje $\lambda_\pi$ možemo proširiti do preslikavanja $\lambda_\pi^* : A_\pi \times X^* \to A_\pi$, tako da je

$$\lambda_\pi^*(\pi_u, v) = \pi_{uv}, \tag{5.11}$$

za sve $u, v \in X^*$, koje ćemo jednostavnosti radi, označavati sa $\lambda_\pi$.

Dobro je poznato da se zbog ove korespodencije problem raspoznavanja jezika automatima može razmatrati sa aspekta desnih kongruencija na slobodnom monoidu.

Rukovođeni time, ovde razmatramo fazi desne kongruencije na slobodnom monoidu i definišemo odgovarajuće fazi automate.

Neka je $E$ fazi desna kongruencijan na slobodnom monoidu $X^*$ i neka je $A_E = X^*/E$. Definišimo preslikavanje $\delta_E : A_E \times X \times A_E \to L$ sa

$$\delta_E(E_u, x, E_v) = E_{ux}(v), \tag{5.12}$$

za sve $u, v \in X^*$ i $x \in X$.

**Teorema 5.2.1.** *Neka je $E$ fazi desna kongruencija na slobodnom monoidu $X^*$. Tada*

(a) *$\delta_E$ je dobro definisano preslikavanje i $\mathscr{A}_E = (A_E, X, \delta_E)$ je fazi automat;*

(b) *za sve $u, v \in X^*$ i $p \in X^* \setminus \{e\}$ imamo*

$$\delta_E(E_u, p, E_v) = E_{up}(v) = E(up, v). \tag{5.13}$$

*Dokaz.* (a) Neka je $E_u = E_p$ i $E_v = E_q$, za neke $u, v, p, q \in X^*$, i neka je $x \in X$. Tada je

$$E(ux, px) \geqslant E(u, p) = 1,$$

i otuda je $E_{ux} = E_{px}$. Sada imamo

$$\delta_E(E_u, x, E_v) = E_{ux}(v) = E_{px}(v) = E_v(px)$$

$$= E_q(px) = E_{px}(q) = \delta_E(E_p, x, E_q).$$

Prema tome, $\delta_E$ je dobro definisano i $\mathscr{A}_E = (A_E, X, \delta_E)$ je fazi automat.

(b) Jednakost (5.13) dokazujemo indukcijom po dužini reči $p \in X^* \setminus \{e\}$. Prema (5.12), ovo važi za $p \in X^*$ dužine 1. Dalje, pretpostavimo da (5.13) važi za svaki $p \in X^*$ dužine $k \geqslant 1$, i uzmimo proizvoljan $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned}
\delta_E(E_u, px, E_v) &= \bigvee_{\xi \in A_E} \big[\, \delta_E(E_u, p, \xi) \otimes \delta_E(\xi, x, E_v)\big] \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \big[\, \delta_E(E_u, p, E_w) \otimes \delta_E(E_w, x, E_v)\big] \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \big[\, E(up, w) \otimes E(wx, v)\big] \\
&\leqslant \bigvee_{w \in X^*} \big[\, E(upx, wx) \otimes E(wx, v)\big] \leqslant E(upx, v) = E_{upx}(v),
\end{aligned}$$

i, takođe,

$$\begin{aligned}
\delta_E(E_u, px, E_v) &= \bigvee_{\xi \in A_E} \big[\, \delta_E(E_u, p, \xi) \otimes \delta_E(\xi, x, E_v)\big] \\
&\geqslant \delta_E(E_u, p, E_{up}) \otimes \delta_E(E_{up}, x, E_v) \\
&= E_{up}(up) \otimes E_{upx}(v) = E_{upx}(v).
\end{aligned}$$

Dakle, $\delta_E(E_u, px, E_v) = E_{upx}(v)$, tj. zaključujemo da (5.13) važi za svaki $p \in X^* \setminus \{e\}$. $\square$

Automat $\mathscr{A}_E = (A_E, X, \delta_E)$ je fazi automat, koji se naziva *automat fazi desne kongruencije* $E$, ili fazi automat određen sa $E$. Na osnovu (2.9) imamo da se $\delta_E$ može predstaviti i na sledeći način:

$$\delta_E(E_u, p, E_v) = \bigwedge_{w \in X^*} E_w(up) \leftrightarrow E_w(v) \tag{5.14}$$

$$= \bigwedge_{w \in X^*} E_{up}(w) \leftrightarrow E_v(w) \tag{5.15}$$

$$= \bigvee_{w \in X^*} E_w(up) \otimes E_w(v), \tag{5.16}$$

za sve $u, v, p \in X^*$. Primetimo da se (5.15) može protumačiti na sledeći način: "stepen prelaza $\delta_E(E_u, p, E_v)$ jednak je stepenu jednakosti klasa $E_{up}$ i $E_v$".

Obično $\mathscr{A}_E$ razmatramo kao fazi automat sa krisp inicijalnim stanjem $E_e$, i pišemo $\mathscr{A}_E = (A_E, E_e, X, \delta_E)$. Specijalno, kada govorimo o raspoznavanju fazi jezika sa $\mathscr{A}_E$ uvek pretpostavljamo da fazi automat $\mathscr{A}_E$ kreće iz krisp inicijalnog stanja $E_e$.

Drugim rečima, kažemo da automat $\mathscr{A}_E$ *raspoznaje fazi jezik* $f \in \mathscr{F}(X^*)$ fazi skupom završnih stanja $\tau \in \mathscr{F}(A_E)$ ako je

$$
\begin{aligned}
f(u) &= \bigvee_{\xi \in A_E} \delta_E(E_e, u, \xi) \otimes \tau(\xi) \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w) \\
&= \bigvee_{w \in X^*} E(u, w) \otimes \tau(E_w),
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

za svako $u \in X^*$.

Naredna teorema je jedna od glavnih teorema ove glave. Njome se raspoznavanje fazi jezika fazi automatom dovodi u vezu sa veoma značajnim konceptom teorije fazi skupova, konceptom ekstenzionalnosti u odnosu na fazi ekvivalenciju.

**Teorema 5.2.2.** *Neka je $E$ fazi desna kongruencija na slobodnom monoidu $X^*$. Fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ se može raspoznati automatom $\mathscr{A}_E$ ako i samo ako je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $E$.*

*Dokaz.* Uzmimo da automat $\mathscr{A}_E$ raspoznaje fazi jezik $f$ fazi skupom završnih stanja $\tau \in \mathscr{F}(A_E)$. Tada, za $u, v \in X^*$, prema (1.25) imamo

$$
\begin{aligned}
f(u) \otimes E(u, v) &= \Big[ \bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w) \Big] \otimes E(u, v) \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \big[ \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes E(u, v) \otimes \tau(E_w) \big] \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \big[ E(u, w) \otimes E(u, v) \otimes \tau(E_w) \big] \\
&\leqslant \bigvee_{w \in X^*} \big[ E(v, w) \otimes \tau(E_w) \big] \\
&= \bigvee_{w \in X^*} \big[ \delta_E(E_e, v, E_w) \otimes \tau(E_w) \big] = f(v).
\end{aligned}
$$

Dakle, fazi jezik $f$ je ekstenzionalan u odnosu na $E$.

Obratno, neka je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $E$. Za svaki $u \in X^*$ neka je $\tau(E_u) = f(u)$. Ako su $u, v \in X^*$ takvi da je $E_u = E_v$, onda je $E(u, v) = 1$, odakle je $f(u) = f(u) \otimes E(u, v) \leqslant f(v)$, i slično, $f(v) \leqslant f(u)$, tj. $f(u) = f(v)$. Ovim smo dokazali da je $\tau$ dobro definisan fazi podskup od $A_E$.

Sada, za proizvoljno $u \in X^*$, zbog refleksivnosti fazi relacije $E$ sledi

$$f(u) = E(u,u) \otimes f(u) \leqslant \bigvee_{w \in X^*} E(u,w) \otimes f(w) = \bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w),$$

i pošto je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $E$ imamo

$$\bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w) = \bigvee_{w \in X^*} E(u,w) \otimes f(w) \leqslant f(u).$$

Prema tome,

$$f(u) = \bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w),$$

što znači da $\mathscr{A}_E$ raspoznaje fazi jezik $f$ fazi skupom $\tau$. $\square$

Naredna teorema pokazuje da svaki fazi jezik koji se može raspoznati nekim fazi automatom može biti raspoznat determinističkim automatom.

**Teorema 5.2.3.** *Neka je $E$ fazi desna kongruencija na $X^*$ i $\widehat{E}$ njen krisp deo. Tada je*

(a) *Krisp deo fazi automata $\mathscr{A}_E$ je deterministički automat izomorfan sa $\mathscr{A}_{\widehat{E}}$ ;*
(b) *svaki fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ raspoznatljiv fazi automatom $\mathscr{A}_E$ može se raspoznati i sa $\mathscr{A}_{\widehat{E}}$.*

*Dokaz.* Za proizvoljne $u, v, p \in X^*$ imamo

$$\delta_E(E_u, p, E_v) = 1 \;\Leftrightarrow\; E(up, v) = 1 \;\Leftrightarrow\; E_{up} = E_v$$

$$\Leftrightarrow\; \widehat{E}_{up} = \widehat{E}_v \;\Leftrightarrow\; \lambda_{\widehat{E}}(\widehat{E}_u, p) = \widehat{E}_v.$$

Ovo znači da je $\widehat{\delta}_E$ preslikavanje iz $A_E \times X^*$ u $A_E$, i da se poklapa sa $\lambda_{\widehat{E}}$. Dakle, preslikavanje $E_u \mapsto \widehat{E}_u$ je izomorfizam determinističkog automata $\widehat{\mathscr{A}_E} = (A_E, X, \widehat{\delta}_E)$ na deterministički automat $\mathscr{A}_{\widehat{E}} = (A_{\widehat{E}}, X, \lambda_{\widehat{E}})$, i prema tome, važi (a).

(b) Pretpostavimo da $\mathscr{A}_E$ raspoznaje fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ fazi skupom završnih stanja $\tau \in \mathscr{F}(A_E)$, odnosno

$$f(u) = \bigvee_{w \in X^*} \delta_E(E_e, u, E_w) \otimes \tau(E_w) = \bigvee_{w \in X^*} E(u,w) \otimes \tau(E_w),$$

za svaku reč $u \in X^*$.

Sada, definišimo $\theta : A_{\widehat{E}} \to L$ sa $\theta(\widehat{E}_u) = f(u)$, za proizvoljno $u \in X^*$. Razmotrimo $u, v \in X^*$ takve da je $\widehat{E}_u = \widehat{E}_v$. Tada je $E_u = E_v$, tj., $E(u,v) = E(v,u) = 1$, što povlači

$$\begin{aligned} f(u) = \bigvee_{w \in X^*} E(u,w) \otimes \tau(E_w) &= \bigvee_{w \in X^*} E(v,u) \otimes E(u,w) \otimes \tau(E_w) \\ &\leqslant \bigvee_{w \in X^*} E(v,w) \otimes \tau(E_w) = f(v). \end{aligned}$$

Prema tome je $f(u) \leqslant f(v)$. Na sličan način pokazujemo da je $f(v) \leqslant f(u)$, odnosno $f(u) = f(v)$. Dakle, $\theta$ je dobro definisano. Štaviše, za svako $u \in X^*$ važi

$$f(u) = \theta(\widehat{E}_u) = \theta(\lambda_{\widehat{E}}(\widehat{E}_e, u)),$$

i zaključujemo da automat $\mathscr{A}_{\widehat{E}}$ raspoznaje fazi jezik $f$ fazi skupom finalnih statnja $\theta$. $\square$

## 5.3. Nerodeove i Myhillove fazi relacije

Motivisani činjenicom da proizvoljnom inicijalnom determinističkom automatu možemo pridružiti tzv. Nerodeovu desnu kongruenciju, kao i Myhillovu kongruenciju, u ovom odeljku uvodimo koncepte Nerodeove fazi desne kongruencije i Myhillove fazi kongruencije pridružene inicijalnom fazi automatu.

Neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ inicijalni fazi automat. Za proizvoljno $u \in X^*$, fazi skup $\sigma_u \in \mathscr{F}(A)$ definišemo sa

$$\sigma_u(a) = \bigvee_{b \in A} \sigma(b) \otimes \delta(b, u, a) = (\sigma \circ \delta_u)(a),$$

za svako $a \in A$. Istom formulom možemo definisati i fazi jezik $\sigma_a \in \mathscr{F}(X^*)$, za svaki $a \in A$, tj., za proizvoljan $u \in X^*$ stavljamo $\sigma_a(u) = \sigma_u(a)$.

Sada, fazi relaciju $N_{\mathscr{A}}$ na slobodnom monoidu $X^*$ definišemo sa:

$$N_{\mathscr{A}}(u,v) = \bigwedge_{a \in A} \sigma_u(a) \leftrightarrow \sigma_v(a) = \bigwedge_{a \in A} \sigma_a(u) \leftrightarrow \sigma_a(v), \tag{5.18}$$

za sve $u, v \in X^*$, i nazivamo je *Nerodeova fazi relacija* fazi automata $\mathscr{A}$. Važi sledeća

**Teorema 5.3.1.** *Za proizvoljan inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$, Nerodeova fazi relacija $N_{\mathscr{A}}$ je fazi desna kongruencija na $X^*$.*

*Dokaz.* Prema Valverdeovoj Teoremi Reprezentacije [120] (videti i [23]), $N_{\mathscr{A}}$ je fazi ekvivalencija. Dalje, razmotrimo proizvoljne $u, v, w \in X^*$. Tada za stanja $a, b \in A$, prema (5.22) i (1.20) sledi da je

$$\begin{aligned} N_{\mathscr{A}}(u,v) &\leqslant \sigma_u(a) \leftrightarrow \sigma_v(a) \\ &= (\sigma \circ \delta_u)(a) \leftrightarrow (\sigma \circ \delta_v)(a) \\ &\leqslant (\sigma \circ \delta_u)(a) \otimes \delta_w(a,b) \leftrightarrow (\sigma \circ \delta_v)(a) \otimes \delta_w(a,b), \end{aligned}$$

pa odatle, i iz (1.55) i (1.60) imamo da je

$$\begin{aligned} N_{\mathscr{A}}(u,v) &\leqslant \bigwedge_{a \in A} \big[(\sigma \circ \delta_u)(a) \otimes \delta_w(a,b) \leftrightarrow (\sigma \circ \delta_v)(a) \otimes \delta_w(a,b)\big] \\ &\leqslant \Big[\bigvee_{a \in A} (\sigma \circ \delta_u)(a) \otimes \delta_w(a,b)\Big] \leftrightarrow \Big[\bigvee_{a \in A} (\sigma \circ \delta_v)(a) \otimes \delta_w(a,b)\Big] \\ &= (\sigma \circ \delta_u \circ \delta_w)(b) \leftrightarrow (\sigma \circ \delta_v \circ \delta_w)(b) \\ &= (\sigma \circ \delta_{uw})(b) \leftrightarrow (\sigma \circ \delta_{vw})(b) \\ &= \sigma_{uw}(b) \leftrightarrow \sigma_{vw}(b), \end{aligned}$$

za svaki $b \in A$. Dakle

$$N_{\mathscr{A}}(u,v) \leqslant \bigwedge_{b \in A} \sigma_{uw}(b) \leftrightarrow \sigma_{vw}(b) = N_{\mathscr{A}}(uw, vw),$$

što znači da je $N_a$ fazi desna kongruencija na $X^*$. □

Dalje, neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ fazi raspoznavač, neka je $N_{\mathscr{A}}$ Nerodeova fazi desna kongruencija od $\mathscr{A}$, i uvedimo oznaku $N = N_{\mathscr{A}}$. Tada možemo definisati $\tau_N : A_N \to L$ sa

$$\tau_N(N_u) = \sigma_u \circ \tau = L(\mathscr{A})(u), \tag{5.19}$$

za svaki $u \in X^*$. Tada imamo da važi sledeća

**Teorema 5.3.2.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ fazi raspoznavač i $N = N_{\mathscr{A}}$ Nerodeova fazi desna kongruencija na $\mathscr{A}$.*

*Tada je $\tau_N$ dobro definisano preslikavanje i $\mathscr{A}_N = (A_N, N_e, X, \delta_N, \tau_N)$ je fazi raspoznavač, takav da je $L(\mathscr{A}_N) = L(\mathscr{A})$.*

*Dokaz.* Neka su $u, v \in X^*$ takvi da je $N_u = N_v$, tj., $N(u,v) = 1$. Prema (5.22) imamo da je $\sigma_u(a) = \sigma_v(a)$, za svako $a \in A$, što znači da je $\sigma_u = \sigma_v$, odnosno
$$\tau_N(N_u) = \sigma_u \circ \tau = \sigma_v \circ \tau = \tau_N(N_v).$$
Odatle je $\tau_N$ dobro definisano preslikavanje i $\mathscr{A}_N = (A_N, N_e, X, \delta_N, \tau_N)$ je fazi raspoznavač.

Dalje, za proizvoljne $u, v \in X^*$, iz (1.20) i (1.55) sledi da je
$$\begin{aligned}
N(u,w) &= \bigwedge_{a\in A} \sigma_u(a) \leftrightarrow \sigma_v(a) \\
&\leqslant \bigwedge_{a\in A} \Big[\sigma_u(a)\otimes\tau(a) \leftrightarrow \sigma_v(a)\otimes\tau(a)\Big] \\
&\leqslant \Big[\bigvee_{a\in A} \sigma_u(a)\otimes\tau(a)\Big] \leftrightarrow \Big[\bigvee_{a\in A} \sigma_v(a)\otimes\tau(a)\Big] \\
&= \sigma_u\circ\tau \leftrightarrow \sigma_v\circ\tau \\
&= \tau_N(N_u) \leftrightarrow \tau_N(N_v) \\
&\leqslant \tau_N(N_v) \to \tau_N(N_u),
\end{aligned}$$
i zbog osobine adjunkcije dobijamo
$$N(u,v)\otimes\tau_N(N_v) \leqslant \tau_N(N_u).$$
Ova nejednakost važi za svaku reč $v \in X^*$, te imamo
$$\begin{aligned}
L(\mathscr{A}_N)(u) &= \bigvee_{v\in X^*} \delta_N(N_e,u,N_v)\otimes\tau_N(N_v) = \bigvee_{v\in X^*} N(u,v)\otimes\tau_N(N_v) \\
&\leqslant \tau_N(N_u) = L(\mathscr{A})(u).
\end{aligned} \tag{5.20}$$
Sa druge strane je
$$\begin{aligned}
L(\mathscr{A}_N)(u) &= \bigvee_{v\in X^*} \delta_N(N_e,u,N_v)\otimes\tau_N(N_v) = \bigvee_{v\in X^*} N(u,v)\otimes\tau_N(N_v) \\
&\geqslant N(u,u)\otimes\tau_N(N_u) = \tau_N(N_u) = L(\mathscr{A})(u).
\end{aligned} \tag{5.21}$$
Prema tome, $L(\mathscr{A})(u) = L(\mathscr{A}_N)(u)$, za svaki $u \in X^*$, i odatle je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}_N)$. $\square$

Primetimo da, kada je $\sigma$ jednoelementan krisp podskup od $A$, odnosno $\sigma = \{a\}$, za neki $a \in A$, onda odgovarajuću Nerodeovu fazi desnu kongruenciju označavamo sa $N_a$ i možemo je predstaviti na sledeći način:

$$N_a(u,v) = \bigwedge_{b\in A} \delta(a,u,b) \leftrightarrow \delta(a,v,b), \tag{5.22}$$

Fazi automatu $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$, možemo takođe pridružiti fazi relaciju $M_{\mathscr{A}}$ na slobodnom monoidu $X^*$ definisanu sa

$$M_{\mathscr{A}}(u,v) = \bigwedge_{a,b\in A} \delta(a,u,b) \leftrightarrow \delta(a,v,b) = \bigwedge_{a\in A} N_a(u,v), \tag{5.23}$$

za sve $u, v \in X^*$, koju nazivamo *Myhillova fazi relacija* fazi automata $\mathscr{A}$.

**Teorema 5.3.3.** *Za proizvoljan fazi automat $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$, Myhillova fazi relacija $M_{\mathscr{A}}$ je fazi kongruencija na $X^*$.*

*Dokaz.* Kao presek svih fazi desnih kongruencija, $M_{\mathscr{A}}$ je takođe fazi desna kongruencija. Da bi dokazali levu kompatibilnost fazi relacije $M_{\mathscr{A}}$, razmotrimo proizvoljne $u, v, w \in X^*$. Tada za sva stanja $a, b, c \in A$, prema (1.20) i prema (1.55) imamo

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{A}}(u,v) &\leqslant \bigwedge_{b\in A} \big[\, \delta(a,w,b)\otimes\delta(b,u,c) \leftrightarrow \delta(a,w,b)\otimes\delta(b,v,c)\big] \\ &\leqslant \Big[\bigvee_{b\in A} \delta(a,w,b)\otimes\delta(b,u,c)\Big] \leftrightarrow \Big[\bigvee_{d\in A} \delta(a,w,d)\otimes\delta(d,v,c)\Big] \\ &= \delta(a,wu,c) \leftrightarrow \delta(a,wv,c), \end{aligned}$$

za sve $a, c \in A$, odakle je

$$M_{\mathscr{A}}(u,v) \leqslant \bigwedge_{a,c\in A} \big[\, \delta(a,wu,c) \leftrightarrow \delta(a,wv,c)\big] = M_{\mathscr{A}}(wu,wv).$$

Dakle, $M_{\mathscr{A}}$ je leva fazi kongruencija, pa je i fazi kongruencija na $X^*$. □

Naredna teorema pokazuje da je proizvoljna fazi desna kongruencija na slobodnom monoidu $X^*$ jednaka Nerodeovoj fazi relaciji faktor fazi automata koji odgovara toj relaciji.

**Teorema 5.3.4.** *Neka je $E$ fazi desna kongruencija na $X^*$. Tada važi*

(a) *Nerodeova fazi desna kongruencija fazi automata $\mathscr{A}_E$ poklapa se sa $E$;*

(b) *Muhillova fazi kongruencija fazi automata $\mathscr{A}_E$ je fazi kongruencijsko otvorenje od $E$.*

*Dokaz.* Prema jednakosti (18) iz [23], i njenoj posledici koja je, takođe data u [23], za proizvoljne $u, v \in X^*$ važi

$$\begin{aligned} N_{\mathscr{A}_E}(u,v) &= \bigwedge_{w\in X^*} \delta_E(E_e,u,E_w) \leftrightarrow \delta_E(E_e,v,E_w) \\ &= \bigwedge_{w\in X^*} E(u,w) \leftrightarrow E(v,w) \\ &= \bigwedge_{w\in X^*} E_u(w) \leftrightarrow E_v(w) = E(u,v), \end{aligned}$$

i odatle je $N_{\mathscr{A}_E} = E$. Sa druge strane, za proizvoljan $p \in X^*$, jednakost (18) iz [23] daje

$$\begin{aligned} N_{E_p}(u,v) &= \bigwedge_{w\in X^*} \delta_E(E_p,u,E_w) \leftrightarrow \delta_E(E_p,v,E_w) \\ &= \bigwedge_{w\in X^*} E(pu,w) \leftrightarrow E(pv,w) \\ &= \bigwedge_{w\in X^*} E_w(pu) \leftrightarrow E_w(pv) = E(pu,pv), \end{aligned}$$

iz čega sledi

$$M_{\mathscr{A}_E}(u,v) = \bigwedge_{p\in X^*} R_{E_p}(u,v) = \bigwedge_{p\in X^*} E(pu,pv) = E^0(u,v).$$

Dakle, $M_{\mathscr{A}_E} = E^0$. $\square$

## 5.4. Determinizacija fazi automata

Neka je $\mathscr{A} = (A,\sigma,X,\delta,\tau)$ fazi raspoznavač. Po analogiji sa nedeterminističkim automatima, možemo formirati deterministički fazi raspoznavač

$$\mathscr{A}_{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}(A),\sigma,X,\lambda_{\mathscr{F}},\tau_{\mathscr{F}}),$$

gde su $\lambda_{\mathscr{F}} : \mathscr{F}(A)\times X \to \mathscr{F}(A)$ i $\tau_{\mathscr{F}} : \mathscr{F}(A) \to L$ definisani sa

$$(\lambda_{\mathscr{F}}(\mu,x))(a) = \bigvee_{b\in A} \mu(b)\otimes\delta(b,x,a), \quad \tau_{\mathscr{F}}(\mu) = \bigvee_{b\in A} \mu(b)\otimes\tau(b), \tag{5.24}$$

za proizvoljne $\mu \in \mathscr{F}(A)$, $a \in A$ i $x \in X$, ili ekvivalentno,

$$\lambda_{\mathscr{F}}(\mu,x) = \mu\circ\delta_x, \quad \tau_{\mathscr{F}}(\mu) = \mu\circ\tau. \tag{5.25}$$

Jednostavno se dokazuje da je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}_{\mathscr{F}})$. Međutim, ova konstrukcija ima očigledan nedostatak: u većini slučajeva, struktura $\mathscr{L}$ istinitosnih vrednosti je beskonačna, i prema tome, $\mathscr{F}(A)$ je, takođe, beskonačan skup. Ovu činjenicu primetili su Bělohlávek u [4] i Li i Pedrycz u [81]. Takođe su primetili da se sve istinitosne vrednosti iz $\mathscr{L}$ ne koriste pri radu fazi raspoznavača $\mathscr{A}$, i predstavili su drugi način za determinizaciju fazi automata.

Ako je $\mathscr{A}$ konačan fazi raspoznavač i $\mathscr{S}$ je lokalno konačan poluprsten, onda su $L_{\mathscr{A}}$ i $L_{\mathscr{A}}^{A}$ konačni skupovi, i Bělohlávek in [4] i Li i Pedrycz u [81] su pokazali da je

$$\mathscr{A}_{\mathscr{F}} = (L_{\mathscr{A}}^{A}, \sigma, X, \lambda_{\mathscr{F}}, \tau_{\mathscr{F}}),$$

sa $\lambda_{\mathscr{F}}$ i $\tau_{\mathscr{F}}$ definisanim u (5.24) ili (5.25), konačan deterministički fazi raspoznavač, takav da je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}_{\mathscr{F}})$. Štaviše, Li i Pedrycz su dokazali da za svaki konačan fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ postoji konačan deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}'$ takav da je $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}')$ ako i samo ako je poluprsten $\mathscr{S}$ lokalno konačan.

Dalje, neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ inicijalni fazi automat nad $\mathscr{L}$. Setimo se da smo za svaku reč $u \in X^*$ definisali fazi skup $\sigma_u \in \mathscr{F}(A)$ sa

$$\sigma_u(a) = \bigvee_{b\in A} \sigma(b) \otimes \delta(b, u, a), \tag{5.26}$$

za proizvoljno $a \in A$, ili ekvivalentno,

$$\sigma_u = \sigma \circ \delta_u. \tag{5.27}$$

Neka je $A_\sigma = \{\sigma_u \mid u \in X^*\}$, i neka je $\lambda_\sigma : A_\sigma \times X \to A_\sigma$ definisano sa:

$$\lambda_\sigma(\sigma_u, x) = \sigma_{ux},$$

za svako $u \in X^*$ i $x \in X$. Ako je uz to, $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ fazi raspoznavač, onda možemo definisati fazi skup $\tau_\sigma \in \mathscr{F}(A_\sigma)$ sa

$$\tau_\sigma(\sigma_u) = \sigma_u \circ \tau, \tag{5.28}$$

za svako $u \in X^*$. Imamo da važi sledeće:

**Teorema 5.4.1.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ inicijalni fazi automat. Tada*

(a) *$\lambda_\sigma$ je dobro definisano preslikavanje i $\mathscr{A}_\sigma = (A_\sigma, \sigma_e, X, \lambda_\sigma)$ je inicijalni deterministički automat;*

(b) *Ako je pored toga,* $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ *i fazi raspoznavač, onda je* $\mathscr{A}_\sigma = (A_\sigma, \sigma_e, X, \lambda_\sigma, \tau_\sigma)$ *deterministički fazi raspoznavač i* $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}_\sigma)$*;*

(c) $A_\sigma \subseteq L_{\mathscr{A}}^A$.

*Dokaz.* (a) Neka su $u, v \in X^*$ takvi da je $\sigma_u = \sigma_v$. Tada, za proizvoljan $x \in X$ važi da je

$$\sigma_{ux} = \sigma \circ \delta_{ux} = \sigma \circ \delta_u \circ \delta_x = \sigma \circ \delta_v \circ \delta_x = \sigma \circ \delta_{vx} = \sigma_{vx},$$

i odatle je $\lambda_\sigma$ dobro definisano preslikavanje, i $\mathscr{A}_\sigma = (A_\sigma, \sigma_e, X, \lambda_\sigma)$ je deterministički automat sa inicijalnim stanjem $\sigma_e = \sigma$.

(b) Za svako $u \in X^*$ imamo da je

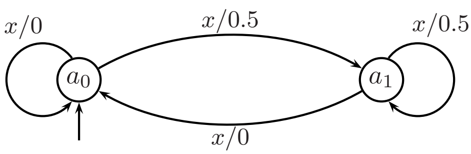
$$L(\mathscr{A})(u) = \sigma \circ \delta_u \circ \tau = \sigma_u \circ \tau = \tau_\sigma(\sigma_u) = \tau_\sigma(\lambda_\sigma(\sigma_e, u)) = L(\mathscr{A}_\sigma)(u),$$

i prema tome, $L(\mathscr{A}) = L(\mathscr{A}_\sigma)$.

(c) Evidentno je da je proizvoljan član fazi automata $A_\sigma$ preslikavanje iz $A$ u $L_{\mathscr{A}}$, i važi $A_\sigma \subseteq L_{\mathscr{A}}^A$. $\square$

Ako je $\mathscr{A}$ konačan fazi automat, onda deterministički automat $\mathscr{A}_\sigma$ nije obavezno konačan, što pokazuje sledeći primer.

**Primer 5.4.1.** Neka je $\mathscr{L}$ proizvod struktura, i neka je inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ nad $\mathscr{L}$, gde je $A = \{a_0, a_1\}$, $\sigma = \{a_0\}$ krisp inicijalno stanje, i $X$ neki konačan alfabet, dat sledećim grafikom prelaza:




za savko $x \in X$. Tada za svaku reč $u \in X^*$ i svako stanje $a \in A$ imamo

$$\sigma_u(a) = \delta(a_0, u, a) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a = a_0 \\ \frac{1}{2^{|u|}} & \text{ako je } a = a_1 \end{cases}.$$

gde $|u|$ označava dužinu reči $u$. Dakle, ima beskonačno mnogo fazi skupova oblika $\sigma_u$, odnosno $\mathscr{A}_\sigma$ je beskonačan.

Iz prethodnog primera se prirodno nameće pitanje: Pod kojim uslovima je deterministički automat $\mathscr{A}_\sigma$ konačan? Najpre razmatramo uslove na strukturi istinitosnih vrednosti $\mathscr{L}$, pod kojima je automat $\mathscr{A}_\sigma$ sigurno konačan. Li i Pedrycz su dokazali u [81] da je svaki konačan fazi raspoznavač nad $\mathscr{L}$ ekvivalentan konačnom deterministčkom fazi raspoznavač ako i samo ako je redukt $\mathscr{S}$ od $\mathscr{L}$ lokalno konačan poluprsten. Slično, imamo sledeće

**Teorema 5.4.2.** *Za svaki konačan inicijalni fazi automat $\mathscr{A}$ nad $\mathscr{L}$, sa fazi skupom $\sigma$ inicijalnih stanja, deterministički automat $\mathscr{A}_\sigma$ je konačan ako i samo ako je redukt $\mathscr{S}$ od $\mathscr{L}$ lokalno konačan poluprsten.*

*Dokaz.* Najpre, neka je $\mathscr{S}$ lokalno konačan poluprsten. Razmotrimo proizvoljan konačan fazi automat $\mathscr{A}$ sa fazi skupom $\sigma$ inicijalnih stanja. Tada je podpoluprsten $L_\mathscr{A}$ od $\mathscr{S}$ konačan, budući da je generisan konačnim skupom $\delta(A \times X \times A) \cup \sigma(A)$, i prema Teoremi 5.4.1 zaključujemo da je $\mathscr{A}_\sigma$ konačan deterministički automat.

Obratno, pretpostavimo da je deterministički automat $\mathscr{A}_\sigma$ konačan, za svaki konačan fazi automat $\mathscr{A}$ nad $\mathscr{L}$, sa fazi skupom $\sigma$ inicijalnih stanja. Neka je $\mathscr{S}' = (L', \vee, \otimes, 0, 1)$ podpoluprsten od $\mathscr{S}$ generisan konačnim skupom $\{l_1, \dots, l_k\} \subseteq L \setminus \{0\}$.

Definišimo inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$ nad $\mathscr{L}$ na sledeći način: $A = \{a_0, a_1\}$, $\sigma = \{a_0\}$ je krisp inicijalno stanje, $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ i $\delta : A \times X \times A \to L$ je data sa

$$\delta(a_0, x_i, a_0) = 0, \quad \delta(a_1, x_i, a_0) = 0, \quad \delta(a_0, x_i, a_1) = l_i, \quad \delta(a_1, x_i, a_1) = l_i,$$

za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$. Tada za proizvoljno $u = x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in X^*$, pri čemu su $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X$, i proizvoljno $a \in A$ važi

$$\sigma_u(a) = \delta(a_0, u, a) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a = a_0 \\ l_{i_1} \otimes \cdots \otimes l_{i_n} & \text{ako je } a = a_1 \end{cases}.$$

Prema pretpostavci, $\mathscr{A}_\sigma$ je konačan, tj., ima konačno mnogo različitih fazi skupova oblika $\sigma_u$, za $u \in X^*$. Međutim, ovo znači da postoji konačno mnogo različitih proizvoda oblika $l_{i_1} \otimes \cdots \otimes l_{i_n}$, odnosno, monoid $(L', \otimes, 1)$ je konačan, što znači da je i podpoluprsten $\mathscr{S}'$ takođe konačan. Prema tome, $\mathscr{S}$ je lokalno konačan poluprsten. $\square$

Primetimo da, ako je $\mathscr{L}$ Heytingova algebra, Łukasiewiczeva ili Gödelova struktura, onda je $\mathscr{S}$ lokalno konačan poluprsten, ali ako je $\mathscr{L}$ proizvod struktura, onda $\mathscr{S}$ nije lokalno konačan, i Primer 5.4.1 pokazuje da, u ovom slučaju postoji konačan inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ za koji je $\mathscr{A}_\sigma$ beskonačan.

U slučaju kada je dat fazi automat nad kompletnom, reziduiranom mrežom $\mathscr{L}$, čiji je redukt $\mathscr{S}$ lokalno konačan poluprsten, dajemo sledeći algoritam za determinizaciju, analogno dobro poznatoj *konstrukciji dostižnih podskupova* (engl. accessible subset construction ili accessible powerset construction), koja se koristi u determinizaciji nedeterminističkih krisp automata.

**Algoritam 5.4.1.** Konstrukcija dostižnih fazi podskupova Ulaz ovog algoritma je inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$, a izlaz je deterministički inicijalni automat $\mathscr{A}_\sigma = (A_\sigma, \sigma_e, X, \lambda_\sigma)$. Postupak se odnosi na konstrukciju *stabla prelaza* determinističkog fazi automata $\mathscr{A}_\sigma$ direktno iz $\mathscr{A}$. Stablo prelaza se konstruiše induktivno na sledeći način:

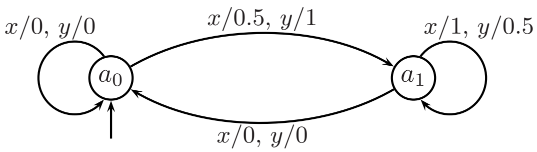
(1) Koren stabla je fazi skup $\sigma_e = \sigma$, i označimo sa $T_0 = \{\sigma_e\}$.

(2) Posle $i$-tog koraka, pretpostavimo da je stablo $T_i$ konstruisano, i da su čvorovi u $T_i$ označeni ili sa 'zatvoren' ili sa 'ne-zatvoren'. Značenje ova dva termina razjasnićemo kasnije.

(3) U narednom koraku pravimo stablo $T_{i+1}$ tako što formiramo, za svaki ne-zatvoren list $\sigma \in T_i$ i svaki $x \in X$, čvor $\sigma \circ \delta_x$ i granu iz $\sigma$ u $\sigma \circ \delta_x$ označenu sa $x$. Ako uz to, čvor $\sigma \circ \delta_x$ predstavlja ponovo neko stanje koje je već bilo konstruisano, kažemo da je *zatvoren* i obeležavamo ga sa $\times$. Postupak se završava kada su svi listovi označeni kao zatvoreni.

(4) Kada je stablo prelaza $\mathscr{A}_\sigma$ konstruisano, brišemo sve $\times$ oznake i lepimo listove sa unutrašnjim čvorovima sa istom oznakom. Rezultujući dijagram je graf prelaza determinističkog fazi automata $\mathscr{A}_\sigma$.

**Primer 5.4.2.** Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura, i neka je inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$ nad $\mathscr{L}$, gde je $A = \{a_0, a_1\}$ i $X = \{x, y\}$, predstavljen sledećim grafom prelaza:



Ako predstavimo $\sigma_e$, $\delta_x$ i $\delta_y$ kao fazi matrice nad $\mathscr{L}$, tj.,

$$\sigma_e = [\,1 \quad 0\,], \quad \delta_x = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

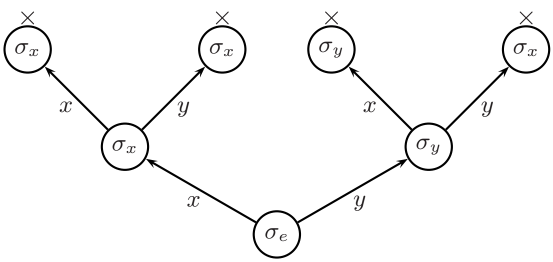
imamo da je

$$\sigma_x = \sigma_e \circ \delta_x = [\,1 \quad 0\,] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0 \quad 0.5\,],$$

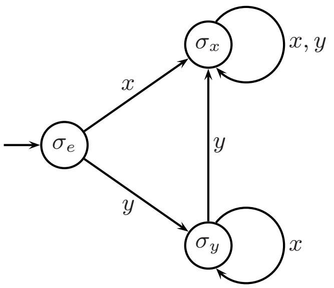
$$\sigma_y = \sigma_e \circ \delta_y = [\,1 \quad 0\,] \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [\,0 \quad 1\,],$$

$$\sigma_x \circ \delta_x = \sigma_x, \quad \sigma_x \circ \delta_y = \sigma_x, \quad \sigma_y \circ \delta_x = \sigma_y, \quad \sigma_y \circ \delta_y = \sigma_x,$$

i dobijamo stablo prelaza fazi automata $\mathscr{A}_\sigma$ predstavljeno Slikom 1. Brisanjem $\times$ oznaka i spajanjem listova sa unutrašnjim čvorovima sa istom oznakom dobijamo graf prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$ predstavljen Slikom 2.

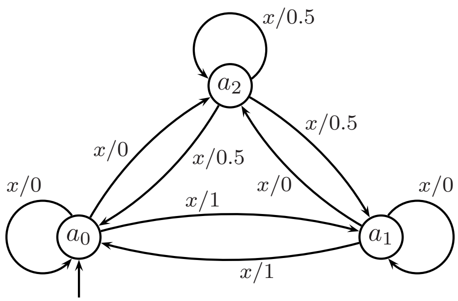



Slika 1. Stablo prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$




Slika 2. Graf prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$

**Primer 5.4.3.** Neka je $\mathscr{L}$ proizvod struktura, i neka je inicijalni fazi automat $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ nad $\mathscr{L}$, gde je $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\sigma = \{a_0\}$ je krisp inicijalno stanje, i $X$ je neki konačan alfabet, dat sledećim grafom prelaza:



za svako $x \in X$. Tada $\sigma_e$, i $\delta_x$, za svaki $x \in X$, mogu da se predstave matricama

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

i važi

$$\sigma_x = \sigma_e \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_x \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_e,$$

za sve $x \in X$. Dakle, $A_\sigma = \{\sigma_e, \sigma_x\}$ je konačan skup, dok je podpoluprsten $\mathscr{S}_{\mathscr{A}}$ od $\mathscr{L}$ generisan skupom $\{0, 0.5, 1\}$ beskonačan (sadrži $1/2^n$, za svako $n \in \mathbb{N}$), tj. $L_{\mathscr{A}}^A$ je takođe beskonačan. To znači da, u nekim slučajevima konstrukcija fazi podskupova može da rezultuje beskonačnim automatom, dok konstrukcija dostižnih fazi podskupova rezultuje konačnim automatom.

Dokazali smo, u Teoremi 5.2.3 da je krisp deo fazi automata svake fazi desne kongruencije deterministički automat. U slučaju kada je ovaj automat određen Nerodeovom fazi desnom kongruencijom, imamo sledeću:

**Teorema 5.4.3.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ inicijalni fazi automat i neka je $N_{\mathscr{A}}$ Nerodeova fazi desna kongruencija fazi automata $\mathscr{A}$.*

*Tada je krisp deo fazi automata $\mathscr{A}_{N_{\mathscr{A}}}$ izomorfan sa $\mathscr{A}_\sigma$.*

*Dokaz.* Označimo Nerodeovu fazi desnu kongruenciju $N_{\mathscr{A}}$ kraće sa $N$. Prema Teoremi 5.2.3, krisp deo od $\mathscr{A}_N$ je deterministički automat izomorfan sa $\mathscr{A}_{\widehat{N}}$, pa treba da pokažemo da je $\mathscr{A}_{\widehat{N}}$ izomorfan (kao deterministički automat) sa $\mathscr{A}_\sigma$.

Definišimo preslikavanje $\varphi : A_{\widehat{N}} \to A_\sigma$ sa $\varphi(\widehat{N}_u) = \sigma_u$, za svaki $u \in X^*$. Tada je

$$\widehat{N}_u = \widehat{N}_u \;\Leftrightarrow\; N(u,v) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\forall a \in A)\, \sigma_u(a) = \sigma_v(a) \;\Leftrightarrow\; \sigma_u = \sigma_v,$$

za sve $u, v \in X^*$, tj. $\varphi$ je dobro definisano, injektivno preslikavanje. Takođe je očigledo da je $\varphi$ sirjektivno. Na kraju, za svaki $u \in X^*$ i $x \in X$ važi

$$\varphi(\lambda_{\widehat{N}}(\widehat{N}_u, x)) = \varphi(\widehat{N}_{ux}) = \sigma_{ux} = \lambda_\sigma(\sigma_u, x) = \lambda_\sigma(\varphi(\widehat{N}_u), x),$$

i odatle je $\varphi$ izomorfizam iz $\mathscr{A}_{\widehat{N}}$ na $\mathscr{A}_\sigma$. $\square$

Sada smo spremni da odredimo potrebne uslove na fazi automatu $\mathscr{A}$ u odnosu na koje odgovarajuća Nerodeova fazi desna kongruencija ima konačan indeks, ili ekvivalentno, u odnosu na koje je automat $\mathscr{A}_\sigma$ konačan.

**Teorema 5.4.4.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ konačan inicijalni fazi automat. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Nerodeova fazi desna kongruencija $N_{\mathscr{A}}$ ima konačan indeks;*

(ii) *Automat $\mathscr{A}_\sigma$ je konačan;*

(iii) *Fazi jezik $\sigma_a$ ima konačan rang, za svako $a \in A$;*

(iv) *Svaki fazi jezik raspoznatljiv sa $\mathscr{A}$ može biti raspoznat konačnim determinističkim fazi raspoznavačem.*

*Dokaz.* (i)⇔(ii). Ovo sledi neposredno iz Teoreme 5.4.3.

(ii)⇒(iv). Ovo sledi iz Teoreme **??**.

(iv)⇒(iii). Razmotrimo proizvoljno stanje $a \in A$. Lako se proverava da $\mathscr{A}$ raspoznaje fazi jezik $\sigma_a$ krisp terminalnim stanjem $\{a\}$, i prema pretpostavci (iv), dobijamo da se $\sigma_a$ može raspoznati konačnim, determinističkim fazi raspoznavačem $\mathscr{B} = (B, b_0, X, \lambda, \theta)$, tj., $\sigma_a(u) = \theta(\lambda(b_0, u))$, za svako $u \in X^*$. Odavde sledi da je

$$\mathrm{ran}\,(\sigma_a) \leqslant \mathrm{ran}\,(\theta) \leqslant |B|,$$

odnosno da $\sigma_a$ ima konačan rang.

(iii)⇒(i). Pretpostavimo da važi (iii). Neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definišimo relaciju fazi ekvivalencije $N^i$ na $X^*$ sa

$$N^i(u, v) = \sigma_{a_i}(u) \leftrightarrow \sigma_{a_i}(v),$$

za sve $u, v \in X^*$. Tada je $N^i(u, v) = 1$ ako i samo ako je $\sigma_{a_i}(u) = \sigma_{a_i}(v)$, što znači da je $\widehat{N}^i = \ker(\sigma_{a_i})$, odakle je

$$\mathrm{ind}(N^i) = \mathrm{ind}(\widehat{N}^i) = \mathrm{ind}(\ker(\sigma_{a_i})) = \mathrm{ran}\,(\sigma_{a_i}),$$

i prema pretpostavci $N^i$ ima konačan indeks.

Označimo Nerodeovu fazi desnu kongruenciju $N_{\mathscr{A}}$ kraće sa $N$. Tada je

$$N(u, v) = \bigwedge_{a \in A} \sigma_a(u) \leftrightarrow \sigma_a(v) = \bigwedge_{i=1}^{n} N^i(u, v),$$

za sve $u, v \in X^*$, i za proizvoljno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $u \in X^*$ važi da je

$$N_u = \bigwedge_{i=1}^{n} N_u^i.$$

Odavde sledi

$$\mathrm{ind}(N) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(N^i) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ran}\,(\sigma_{a_i}),$$

i stoga, $N_{\mathscr{A}}$ ima konačan indeks. $\square$

**Primer 5.4.4.** U Primeru 5.4.1 je $\sigma_{a_0}(u) = 0$, za svaku reč $u \in X^*$, odakle je $\mathrm{ran}\,(\sigma_{a_0}) = 1$, ali je $\sigma_{a_1}(u) = 1/2^{|u|}$, za svaki $u \in X^*$, te $\sigma_{a_1}$ ima beskonačan rang.

Sa druge strane, u Primeru 5.4.3 imamo

$$\sigma_{a_0}(u) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } |u| \text{ neparan broj} \\ 1 & \text{ako je } |u| \text{ paran broj} \end{cases}, \quad \sigma_{a_1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } |u| \text{ neparan broj} \\ 0 & \text{ako je } |u| \text{ paran broj} \end{cases},$$

i $\sigma_{a_2}(u) = 0$, za svaki $u \in X^*$. Prema tome $\mathrm{ran}\,(\sigma_{a_0}) = \mathrm{ran}\,(\sigma_{a_1}) = 2$ i $\mathrm{ran}\,(\sigma_{a_2}) = 1$.

## 5.5. Minimalni deterministički fazi raspoznavač

Razni metodi za "minimizaciju" fazi automata razmatrani su u brojnim radovima [2, 20, 78, 87, 89, 101]. Međutim, iako je korišćen termin "minimizacija", ni u jednom od tih radova se nije radilo sa pravom minimizacijom, koja će kao rezultat dati minimalni fazi automat određenog tipa, na primer, minimalni fazi automat koji raspoznaje dati fazi jezik. Naime, metodi koji su razvijani u tim radovima bili su zapravo metodi za redukciju fazi automata, tj. za nalaženje fazi automata sa manjim brojem stanja koji raspoznaju isti jezik kao polazni automat, bez obaveznog određivanja minimalnog automata sa tim svojstvom.

U ovom odeljku pokazaćemo da se minimalnost može postići kod determinističkih fazi raspoznavača, tj. da za svaki fazi jezik postoji deterministički fazi raspoznavač minimalne kardinalnosti koji ga raspoznaje.

Za fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ i $u \in X^*$, fazi jezik $f_u \in \mathscr{F}(X^*)$ definisan sa

$$f_u(v) = f(uv),$$

za svako $v \in X^*$, nazivamo *izvod* (ili *desni razlomak*) fazi jezika $f$ u odnosu na $u$. Neka je $A_f$ skup svih izvoda od $f$, tj., $A_f = \{f_u \mid u \in X^*\}$, i definišimo $\delta_f : A_f \times X \times A_f \to L$ sa

$$\delta_f(f_u, x, f_v) = \bigwedge_{w \in X^*} f_{ux}(w) \leftrightarrow f_v(w), \tag{5.29}$$

za sve $u, v \in X^*$ i $x \in X$.

Pre no što pređemo na formulaciju i dokaz naredne teoreme, setimo se da smo u poslednjem odeljku prethodne glave svakom fazi podskupu $f$ polugrupe $S$ pridružili fazi relaciju $R_f$ definisanu sa

$$R_f(a, b) = \bigwedge_{x \in S^1} f(ax) \leftrightarrow f(bx) = \bigwedge_{x \in S^1} E_f(ax, bx),$$

za sve $a, b \in S$, i pokazali da je $R_f$ najveća fazi desna kongruencija u odnosu na koju je $f$ ekstenzionalan. U našim daljim razmatranjima takve fazi desne kongruencije na slobodnom monoidu $X^*$ biće pridruživane fazi jezicima.

**Teorema 5.5.1.** *Za svaki fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$, preslikavanje $\delta_f$ je dobro definisano i $\mathscr{A}_f = (A_f, X, \delta_f)$ je fazi automat izomorfan sa $\mathscr{A}_{R_f}$.*

*D o k a z.* Neka je $f_u = f_p$ i $f_v = f_q$, za neke $u, v, p, q \in X^*$, i neka je $x \in X$. Tada je

$$\begin{aligned}
\delta_f(f_u, x, f_v) &= \bigwedge_{w \in X^*} f_{ux}(w) \leftrightarrow f_v(w) = \bigwedge_{w \in X^*} f_u(xw) \leftrightarrow f_v(w) \\
&= \bigwedge_{w \in X^*} f_p(xw) \leftrightarrow f_q(w) = \bigwedge_{w \in X^*} f_{px}(w) \leftrightarrow f_q(w) = \delta_f(f_p, x, f_q),
\end{aligned}$$

i odatle, $\delta_f$ je dobro definisano i $\mathscr{A}_f$ je fazi automat.

Definišimo sada fazi preslikavanje $\phi : A_f \to A_R$ sa $\phi(f_u) = R_u$, za svaki $u \in X^*$, pri čemu je $R$ oznaka za glavnu desnu fazi kongruenciju $R_f$. Za proizvoljne $u, v \in X^*$ važi da je $f_u = f_v$ ako i samo ako je $R(u, v) = 1$, tj., ako i samo ako je $R_u = R_v$. Dakle, $\phi$ je dobro definisano, bijektivno preslikavanje.

Za sve $u, v \in X^*$ i $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned}
\delta_f(f_u, x, f_v) &= \bigwedge_{w \in X^*} f_{ux}(w) \leftrightarrow f_v(w) = \bigwedge_{w \in X^*} f(uxw) \leftrightarrow f(vw) = R(ux, v) \\
&= R_{ux}(v) = \delta_R(R_u, x, R_v) = \delta_R(\phi(f_u), x, \phi(f_v)),
\end{aligned}$$

i prema tome, $\phi$ je izomorfizam fazi automata. $\square$

Za fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$, definišimo preslikavanje $\lambda_f : A_f \times X \to A_f$ sa

$$\lambda_f(f_u, x) = f_{ux}, \tag{5.30}$$

za svako $u \in X^*$ i $x \in X$.

Očigledno, $\lambda_f$ se može proširiti do preslikavanja $\lambda_f^* : A_f \times X^* \to A_f$ tako da je

$$\lambda_f^*(f_u, v) = f_{uv}, \tag{5.31}$$

za sve $u, v \in X^*$, koje, bez opasnosti od zabune, kraće označavamo sa $\lambda_f$.

**Teorema 5.5.2.** *Za svaki jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$, preslikavanje $\lambda_f$ je dobro definisano i $(A_f, X, \lambda_f)$ je deterministički automat izomorfan sa $\mathscr{A}_{\widehat{R}_f}$.*

*Štaviše, $(A_f, X, \lambda_f)$ je krisp deo fazi automata $\mathscr{A}_f$.*

*Dokaz.* Neka je $f_u = f_v$, za neke $u, v \in X^*$, i neka je $x \in X$. Tada, za svaki $w \in X^*$ važi $f_{ux}(w) = f_u(xw) = f_v(xw) = f_{vx}(w)$, pa je $f_{ux} = f_{vx}$. Prema tome, $\lambda_f$ je dobro definisano. Jednostavnosti radi, uvedimo oznaku $\mathscr{A} = (A_f, X, \lambda_f)$

Definisaćemo preslikavanje $\psi : A_f \to A_{\widehat{R}}$ sa $\psi(f_u) = \widehat{R}_u$, za svaki $u \in X^*$, gde smo sa $R$ kraće označili fazi relaciju $R_f$. Kao u dokazu Teoreme 5.5.1 dobijamo da je $\psi$ dobro definisano bijektivno preslikavanje, i jednostavno se pokazuje da je $\psi$ izomorfizam automata, tj., $\psi(\lambda_f(f_u, x)) = \lambda_{\widehat{R}}(\psi(f_u), x)$, za sve $u \in X^*$ i $x \in X$.

Dakle, dokazali smo da su $\widehat{\mathscr{A}}$ i $\mathscr{A}_{\widehat{R}_f}$ izomorfni deterministički automati. Na osnovu ovoga i prema Teoremi 5.2.3 sledi da je $\widehat{\mathscr{A}}$ krisp deo od $\mathscr{A}_f$, , tj. $\mathscr{A} = \widehat{\mathscr{A}_f}$. $\square$

**Teorema 5.5.3.** *Za svaki fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$, oba fazi automata $\mathscr{A}_f$ i $\widehat{\mathscr{A}_f}$ raspoznaju $f$ krisp inicijalnim stanjem $f$ i fazi skupom završnih stanja $\tau_f \in \mathscr{F}(A_f)$ koji je definisan sa*

$$\tau_f(g) = g(e), \tag{5.32}$$

*za svako $g \in A_f$.*

*Dokaz.* Prema Teoremi 5.5.1, imamo

$$\delta_f(f_u, p, f_v) = \delta_R(R_u, p, R_v) = R(up, v),$$

za sve $u, v, p \in X^*$ ($R$ je kraća oznaka za $R_f$). Štaviše, za svako $v \in X^*$ je $\tau_f(f_v) = f_v(e) = f(v)$, i važi

$$\begin{aligned}\bigvee_{g\in A_f} \delta_f(f,u,g)\otimes\tau_f(g) &= \bigvee_{v\in X^*}\delta_f(f,u,f_v)\otimes\tau_f(f_v)\\ &= \bigvee_{v\in X^*} R(u,v)\otimes f(v) = f(u),\end{aligned}$$

za svaku reč $u \in X^*$. Osim toga je

$$\tau_f(\lambda_f(f,u)) = \tau_f(\lambda_f(f_e,u)) = \tau_f(f_u) = f_u(e) = f(u).$$

što znači da i $\mathscr{A}_f$ i $\widehat{\mathscr{A}_f}$ raspoznaju fazi jezik $f$ fazi skupom $\tau_f$. $\square$

Sada smo spremni da dokažemo da je $\widehat{\mathscr{A}_f}$ minimalni deterministički fazi raspoznavač fazi jezika $f$, odnosno, da ima najmanju kardinalnost među svim determinističkim fazi raspoznavačima koji raspoznaju $f$.

**Teorema 5.5.4.** *Neka je $f \in \mathscr{F}(X^*)$ proizvoljan fazi jezik.*

*Tada je $\widehat{\mathscr{A}_f} = (A_f, f, X, \lambda_f, \tau_f)$ minimalni deterministički fazi raspoznavač fazi jezika $f$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ proizvoljan deterministički fazi raspoznavač fazi jezika $f$, tj. $f(u) = \tau(a_0)$, za svako $u \in X^*$.

Pretpostavićemo najpre da je $\mathscr{A}$ dostižan deterministički fazi raspoznavač. U tom slučaju, definisaćemo preslikavanje $\varphi : A \to A_f$ sa:

$$\varphi(a) = f_u \quad \Leftrightarrow \quad a = a_0u,$$

za svako stanje $a \in A$. Dokazaćemo da je $\varphi$ dobro definisano. Razmotrimo $u, v \in X^*$ za koje je $a_0u = a_0v$. Tada je

$$\begin{aligned}f_u(w) = f(uw) = \tau(a_0(uw)) &= \tau((a_0u)w) = \tau((a_0v)w)\\ = \tau(a_0(vw)) &= f(vw) = f_v(w),\end{aligned}$$

za svaki $w \in X^*$. Dakle, $f_u = f_v$, pa je $\varphi$ dobro definisano preslikavanje.

Očito je $\varphi$ surjektivno preslikavanje. Dokazaćemo da je $\varphi$ i homomorfizam. Zaista, za proizvoljan $a \in A$ je $a = a_0u$, za neki $u \in X^*$, pa je

$$\begin{aligned}\varphi(av) = \varphi((a_0u)v) &= \varphi(a_0(uv)) = f_{uv}\\ &= \lambda_f(f_u, v) = \lambda_f(\varphi(a), v),\end{aligned}$$

za proizvoljnu reč $v \in X^*$. Prema tome, deterministički fazi raspoznavač $\widehat{\mathscr{A}_f}$ je homomorfna slika od $\mathscr{A}$, pa je $|A_f| \leqslant |A|$.

Sa druge strane, ako $\mathscr{A}$ nije dostižan, onda razmatramo deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}' = (A', a_0, X, \delta', \tau')$, gde je $A'$ sa označen skup svih dostižnih stanja od $\mathscr{A}$, $\delta'$ je restrikcija od $\delta$ na $A' \times X$, i $\tau'$ je restrikcija od $\tau$ na $A'$, koji je dostižan i raspoznaje isti jezik $f$. Tada na osnovu napred dokazanog imamo da je $|A_f| \leqslant |A'| \leqslant |A|$.

Dakle, u oba slučaja smo dobili da je $\widehat{\mathscr{A}_f}$ manje kardinalnosti od $\mathscr{A}$, čime smo dokazali da je to minimalni deterministički fazi raspoznavač koji raspoznaje $f$. $\square$

U opštem slučaju, skup $A_f$ svih izvoda fazi jezika $f$, odnosno skup stanja minimalnog fazi raspoznavača tog fazi jezika, ne mora biti konačan. Međutim, ako je taj skup konačan, onda se do njega može doći postupkom koji utvrđuje sledeća teorema.

**Teorema 5.5.5.** *Neka je $f \in \mathscr{F}(X^*)$ proizvoljan fazi jezik. Definišimo induktivno niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ podskupova od $A_f$ sa:*

$$\begin{aligned} A_0 &= \{f\}, \\ A_{k+1} &= A_k \cup \{ f_{ux} \mid f_u \in A_k,\, x \in X) \} \qquad k \in \mathbb{N}^0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

*Tada:*

**(a)** *Niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ je rastući.*

**(b)** *Ako postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_{k+1}$, tada je $A_k = A_f$.*

**(c)** *Ako je $A_f$ konačan skup, tada postoji $k \in \mathbb{N}^0$ takav da je $A_k = A_f$.*

*Dokaz.* (a) Tvrđenje (a) sledi neposredno iz 5.33.

(b) Podskup $A' \subseteq A_f$ koji sadrži $f$ zvaćemo zatvorenim za reč $u \in X^*$ ako je $g_u \in A'$, za svaki element $g \in A_f$. Kako je svaki element iz $A_f$ oblika $f_v$, za neku reč $v \in X^*$ i $A'$ sadrži $f$, to je $A'$ zatvoren za sve reči iz $X^*$ ako samo ako je $A' = A_f$. Dakle, ne postoji pravi podskup od $A_f$ zatvoren za sve reči iz $X^*$. Sa druge strane, nije teško pokazati da je $A'$ zatvoren za sve reči iz $X^*$ ako i samo ako je zatvoren za sva slova iz $X$. Kako jednakost $A_k = A_{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$ u stvari znači da je

$$\{f_{ux} \mid f_u \in A_k,\, x \in X)\} \subseteq A_k,$$

odnosno da je $A_k$ zatvoren za sva slova iz $X$, to prema napred ustanovljenom imamo da je $A_k = A_f$, što je i trebalo dokazati.

(c) Kako je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući, to je

$$|A_0| \leqslant |A_1| \leqslant \cdots \leqslant |A_k| \leqslant |A_{k+1}| \leqslant \cdots \leqslant |A_f|,$$

pa u slučaju da je $A_f$ konačan skup dobijamo da je $|A_k| = |A_{k+1}|$, za neki $k \in \mathbb{N}^0$, i u tom slučaju je $A_k = A_{k+1}$, jer je niz $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ rastući. Prema tome, tada je $A_k = A_f$. $\square$

## 5.6. Minimizacija determinističkih fazi raspoznavača

U prethodnom odeljku razmatrali smo pitanje kako konstruisati minimalni deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}_f$ datog fazi jezika $f$, polazeći od tog fazi jezika. Međutim, u praksi se često sreće i drugačiji problem, kada fazi jezik $f$ nije dat eksplicitno, već je dat neki deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}$ koji ga raspoznaje, i u tom slučaju minimalni deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}_f$ treba konstruisati polazeći od tog datog determinističkog fazi raspoznavača $\mathscr{A}$. Takav postupak naziva se *minimizacija determinističkog fazi raspoznavača $\mathscr{A}$*. U ovom odeljku bavićeno se upravo pitanjem minimizacije determinističkih fazi raspoznavača.

Postupak za minimizaciju determinističkih fazi raspoznavača, koji ćemo ovde predstaviti, veoma je sličan dobro poznatom postupku za minimizaciju običnih determinističkih raspoznavača pomoću kongruencija determinističkih automata. Videćemo da je jedina razlika u tome što se minimizacija običnog determinističkog raspoznavača svodi na nalaženje najveće kongruencije sadržane u glavnoj kongruenciji određenoj skupom završnih stanja, dok se minimizacija determinističkog fazi raspoznavača svodi na nalaženje najveće kongruencije sadržane u jezgru fazi skupa završnih stanja. Napomenimo da, kako se fazi podskup skupa $A$ definiše kao preslikavanje iz $A$ u $L$, jezgro fazi skupa definišemo kao jezgro tog preslikavanja. Treba voditi računa o tome da se u nekim izvorima jezgrom fazi skupa naziva ono što mi ovde nazivamo krisp delom fazi skupa.

Pre no što krenemo na razmatranje kongruencija na determinističkim fazi raspoznavačima, najpre uvodimo pojam izvoda fazi skupa njegovih završnih stanja. Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač. Proizvoljnom stanju $a \in A$ pridružićemo fazi jezik $\tau_a \in \mathscr{F}(X^*)$ definisan sa sa

$$\tau_a(u) = \tau(au), \tag{5.34}$$

za svaku reč $u \in X^*$. Fazi jezik $\tau_a$ nazivaćemo *izvodom fazi skupa* $\tau$ u odnosu na $a$. Skup svih izvoda fazi skupa $\tau$ označavaćemo sa $A_\tau$, odnosno $A_\tau = \{\tau_a \,|\, a \in A\}$.

Glavna svojstva izvoda fazi skupova stanja, kao i njihov odnos sa izvodima fazi jezika, prikazani su u sledećoj teoremi.

**Teorema 5.6.1.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač. Tada za proizvoljne $a \in A$ i $u, v \in X^*$ važi*

$$\tau_{au}(v) = \tau_a(uv). \tag{5.35}$$

*Osim toga, ako je $\mathscr{A}$ dostižan raspoznavač i $f = \mathscr{L}(\mathscr{A})$, tada je $A_f = A_\tau$, tj., skup svih izvoda fazi jezika $f$ jednak je skupu svih izvoda fazi skupa $\tau$.*

*Dokaz.* Razmotrimo proizvoljne $a \in A$ i $u, v \in X^*$. Tada imamo da je

$$\tau_{au}(v) = \tau((au)v) = \tau(a(uv)) = \tau_a(uv).$$

Dalje, imamo da je $f = \tau_{a_0}$, i za proizvoljne reči $u, v \in X^*$ je

$$f_u(v) = f(uv) = \tau_{a_0}(uv) = \tau_{a_0 u}(v),$$

što znači da je $f_u = \tau_{a_0 u}$, pa je $A_f \subseteq A_\tau$.

Obratno, proizvoljno stanje $a \in A$ je dostižno, pa je $a = a_0 u$, za neku reč $u \in X^*$, odakle dobijamo da je

$$\tau_a(v) = \tau_{a_0 u}(v) = \tau_{a_0}(uv) = f(uv) = f_u(v),$$

za svako $v \in X^*$, tj. $\tau_a = f_u$, i dakle, $A_\tau \subseteq A_f$.

Ovim je dokaz teoreme upotpunjen. $\square$

Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač. Pod kongruencijom na $\mathscr{A}$ podrazumevamo svaku kongruenciju na determinističkom automatu $(A, X, \delta)$. Sa $\varepsilon_\tau$ označavaćemo *jezgro* fazi skupa $\tau$, odnosno relaciju ekvivalencije na $A$ definisanu sa

$$(a, b) \in \varepsilon_\tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau(a) = \tau(b),$$

za sve $a, b \in A$. Pored ove relacije, fazi skupu $\tau$ pridružićemo i relaciju $\pi_\tau$ na $A$ definisanu sa

$$(a, b) \in \pi_\tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau_a = \tau_b,$$

za sve $a, b \in A$. Imamo da važi sledeće

**Teorema 5.6.2.** *Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač. Relacija $\pi_\tau$ je najveća kongruencija na $\mathscr{A}$ sadržana u $\varepsilon_\tau$.*

*Dokaz.* Neka je $(a, b) \in \pi_\tau$, za neke $a, b \in A$, i neka je $x \in X$. Tada je $\tau_a = \tau_b$, i za proizvoljno $u \in X^*$ imamo da je

$$\tau_{ax}(u) = \tau_a(xu) = \tau_b(xu) = \tau_{bx}(u),$$

što znači da je $\tau_{ax} = \tau_{bx}$. Prema tome, $(ax, bx) \in \pi_\tau$, čime smo dokazali da je $\pi_\tau$ kongruencija na $\mathscr{A}$.

Dalje, ako je $(a, b) \in \pi_\tau$, tj. $\tau_a = \tau_b$, tada imamo da je $\tau(a) = \tau_a(e) = \tau_b(e) = \tau(b)$, pa je $(a, b) \in \varepsilon_\tau$. Prema tome, $\pi_\tau \subseteq \varepsilon_\tau$.

Konačno, neka je $\pi$ proizvoljna kongruencija na $\mathscr{A}$ takva da je $\pi \subseteq \varepsilon_\tau$. Ako je $(a, b) \in \pi$, za neke $a, b \in A$, tada za proizvoljno $u \in X^*$ imamo da je $(au, bu) \in \pi \subseteq \varepsilon_\tau$, odakle dobijamo da je $\tau(au) = \tau(bu)$. To znači da je

$$\tau_a(u) = \tau(au) = \tau(bu) = \tau_b(u),$$

i dakle, $\tau_a = \tau_b$, odakle dobijamo da je $(a, b) \in \pi_\tau$. Prema tome, $\pi \subseteq \pi_\tau$, čime smo dokazali da je $\pi_\tau$ najveća kongruencija na $\mathscr{A}$ sadržana u $\varepsilon_\tau$. $\square$

Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač i $\pi$ je kongruencija na $\mathscr{A}$. Tada možemo definisati preslikavanje $\delta_\pi : A_\pi \times X \to A_\pi$ sa

$$\delta_\pi(\pi_a, x) = \pi_{ax}, \tag{5.36}$$

i tada $(A_\pi, \pi_{a_0}, X, \delta_\pi)$ jeste inicijalni deterministički automat. Međutim, da bi pomoću fazi skupa $\tau$ mogli definisati odgovarajući fazi podskup od $A_\pi$, kao fazi skup završnih stanja gornjeg automata, potrebno je i da kongruencija $\pi$ bude sadržana u $\varepsilon_\tau$. Naime, važi sledeće

**Teorema 5.6.3.** *Neka je* $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ *deterministički fazi raspoznavač, i neka je* $\pi$ *kongruencija na* $\mathscr{A}$ *sadržana u* $\varepsilon_\tau$*. Ako za proizvoljno* $a \in A$ *stavimo da je*

$$\tau_\pi(\pi_a) = \tau(a), \tag{5.37}$$

*tada je* $\tau_\pi$ *dobro definisan fazi podskup od* $A_\pi$ *i* $\mathscr{A}_\pi = (A_\pi, \pi_{a_0}, X, \delta_\pi, \tau_\pi)$ *je deterministički fazi raspoznavač takav da je* $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}_\pi)$*.*

*Dokaz.* Ako je $\pi_a = \pi_b$, za neke $a, b \in A$, tada je $(a, b) \in \pi \subseteq \varepsilon_\tau$, pa je $\tau(a) = \tau(b)$. Prema tome, $\tau_\pi$ je dobro definisano preslikavanje iz $A_\pi$ u $L$.

Dalje, za proizvoljnu reč $u \in X^*$ imamo da je

$$(\mathscr{L}(\mathscr{A}))(u) = \tau(a_0u) = \tau_\pi(\pi_{a_0u}) = \tau_\pi(\pi_{a_0}u) = (\mathscr{L}(\mathscr{A}_\pi))(u),$$

i dakle, $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}_\pi)$. $\square$

**Teorema 5.6.4.** *Neka je* $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ *dostižni deterministički fazi raspoznavač koji raspoznaje fazi jezik* $f \in \mathscr{F}(X^*)$ *i stavimo da je* $\pi = \pi_\tau$*.*

*Tada je deterministički fazi raspoznavač* $\mathscr{A}_\pi$ *izomorfan minimalnom determinističkom fazi raspoznavaču* $\mathscr{A}_f$ *fazi jezika* $f$*.*

*Dokaz.* Prema Teoremi 5.6.1 imamo da je $A_f = A_\tau$, pa možemo definisati preslikavanje $\varphi : A \mapsto A_f$ sa

$$\varphi(a) = \tau_a,$$

za svaki $a \in A$. Jasno je da je $\ker \varphi = \pi$, pa je prema Teoremi o homomorfizmu (za obične automate), $\mathscr{A}_\pi$ izomorfan sa $\mathscr{A}_f$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Iz prethodne teoreme se vidi da se postupak minimizacije determinističkog fazi raspoznavača $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ svodi na minimizaciju običnih determinističkih raspoznavača, konstrukcijom najveće kongruencije $\pi_\tau$ sadržane u $\varepsilon_\tau$. Preciznije, taj postupak ima dve etape. U prvoj etapi nalazimo dostižni deo od $\mathscr{A}$, odnosno deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}' = (A', a_0, X, \delta', \tau')$, gde je $A'$ skup dostižnih stanja iz $A$, $\delta'$ je restrikcija od $\delta$ na $A' \times X$ i $\tau'$ je restrikcija od $\tau$ na $A'$. Jasno je da $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}'$ raspoznaju isti fazi jezik.

U drugoj etapi ovog postupka nalazi se najveća kongruencije $\pi_{\tau'}$ na $\mathscr{A}'$ sadržana u $\varepsilon_{\tau'}$ i deterministički fazi raspoznavač određen tom kongruencijom. Pri tome se nalaženje najveće kongruencije $\pi_{\tau'}$ sadržane u $\varepsilon_{\tau'}$ svodi na dobro poznat postupak konstrukcije najveće kongruencije sadržane u datoj relaciji ekvivalencije pomoću opadajućeg niza relacija ekvivalencije.

Ovaj postupak opisan je narednom teoremom.

**Teorema 5.6.5.** *Neka je* $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ *fazi raspoznavač i* $\{\pi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *je niz relacija na* $A$ *definisanih sa:*

$$\pi^{(0)} = \varepsilon_\tau \quad i \quad \pi^{(k+1)} = \{(a,b) \in \pi^{(k)} \mid (\forall x \in X)\, (\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \pi^{(k)}\}.$$

*Tada važi sledeće:*

**(a)** *Svaki član niza* $\{\pi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^0}$ *je relacija ekvivalencije na* $A$ *i važi*

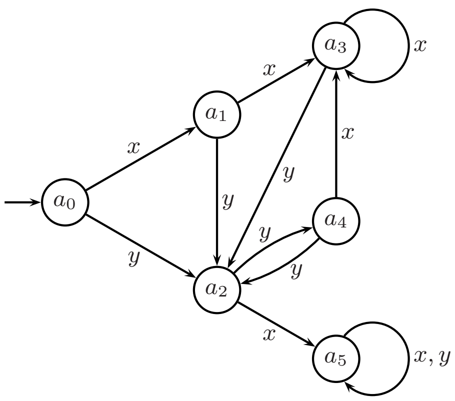
$$\varepsilon_\tau = \pi^{(0)} \supseteq \pi^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \pi^{(k)} \supseteq \pi^{(k+1)} \supseteq \cdots \supseteq \pi_\tau.$$

**(b)** *Ako je* $\pi^{(k)} = \pi^{(k+1)}$*, za neki* $k \in \mathbb{N}^0$*, tada je* $\pi^{(k)} = \pi^{(k+m)} = \pi_\tau$*, za svaki* $m \in \mathbb{N}^0$*.*

**(c)** *Ako je* $A$ *konačan, tada postoji* $k \in \mathbb{N}^0$ *tako da je* $\pi^{(k)} = \pi_\tau$*.*

Tako smo dobili postupak za konstrukciju minimalnog determinističkog fazi raspoznavača datog fazi jezika. Ovo ilustrujemo sledećim primerom:

**Primer 5.6.1.** Neka je deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ predstavljen grafom




Slika 1. Graf prelaza od $\mathscr{A}$

i neka je fazi skup završnih stanja

$$\tau = [\,0.5 \quad 0.8 \quad 0.8 \quad 0.8 \quad 0.8 \quad 0.9\,].$$

Primenom opisanog postupka za minimizaciju dobijamo da $\pi^{(0)}$ ima tri klase ekvivalencije

$$\pi^{(0)} : \{a_0\},\ \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \ \text{ i } \ \{a_5\}.$$

Proveravamo parove koji su u prethodnom koraku bili u istoj klasi:

$$
\begin{aligned}
a_1x &= a_3; \quad a_1y = a_2;\\
a_2x &= a_5; \quad a_2y = a_4;\\
a_3x &= a_3; \quad a_3y = a_2;\\
a_4x &= a_3; \quad a_4y = a_2;
\end{aligned}
$$

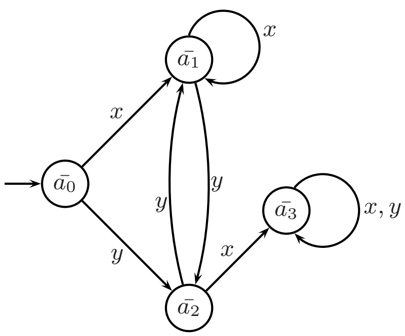
Vidimo da $a_2$ ne ostaje u istoj klasi sa $a_2$, $a_3$ i $a_4$, pa relacija $\pi^{(1)}$ ima četiri klase

$$\pi^{(1)} : \{a_0\},\ \{a_1, a_3, a_4\},\ \ \{a_2\}\ \text{ i }\ \{a_5\},$$

dok već u narednom koraku imamo:

$$
\begin{aligned}
a_1x &= a_3; \quad a_1y = a_2;\\
a_3x &= a_3; \quad a_3y = a_2;\\
a_4x &= a_3; \quad a_4y = a_2;
\end{aligned}
$$

i niz se zaustavlja, tj. $\pi^{(2)} = \pi^{(1)} = \pi_\tau = \pi$. Tako dobijamo minimalni deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}_\pi = (A_\pi, \bar{a_0}, X, \tau_\pi)$, sa skupom stanja $A_\pi = \{\bar{a_0}, \bar{a_1}, \bar{a_2}, \bar{a_3}\}$.



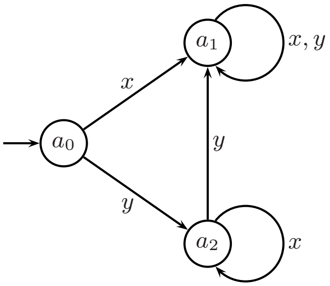

Slika 2. Graf prelaza minimalnog raspoznavača $\mathscr{A}$

i fazi skupom završnih stanja

$$\tau_\pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Na sledećem jednostavnom primeru pokazaćemo da minimalnost inicijalnog determnističkog raspoznavača zavisi od fazi jezika, tj. od fazi skupa završnih stanja.

**Primer 5.6.2.** Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta)$ fazi jezika $f$, gde je $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ i $X = \{x, y\}$ dat grafom




Ako fazi skup završnih stanja $\tau$ predstavimo fazi matricom nad $\mathscr{L}$, tj.

$$\tau = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

imamo dve klase relacije $\pi^{(0)}$

$$\pi^{(0)} : \{\{a_0\},\ \{a_1, a_2\}\}.$$

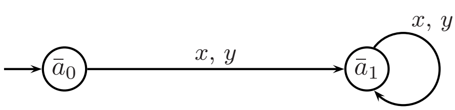
U narednom koraku proveravamo elemente $a_1$ i $a_2$ koji su u relaciji $\pi^{(0)}$:

$$a_1x = a_1; \quad a_1y = a_1;$$
$$a_2x = a_2; \quad a_2y = a_1;$$

pa elementi $a_1$ i $a_2$ ostaju u istoj klasi, tj.

$$\pi^{(1)} : \{\{a_0\},\ \{a_1, a_2\},$$

odakle je $\pi_\tau = P^{(1)}$. Na ovaj način smo dobili minimalni deterministički fazi raspoznavač fazi jezika $f$, čija su stanja $\bar{a}_0 = \{a_0\}$ i $\bar{a}_1 = \{a_1, a_2\}$ i koji se može predstaviti grafom




Fazi skup završnih stanja je, prema Teoremi 5.6.3, zadat sa

$$\tau_{\pi_\tau} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako je pak, fazi skup završnih stanja raspoznavača $\mathscr{A}$ dat matricom

$$\tau = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

klase ekvivalencije $\pi^{(0)}$ su

$$\pi^{(0)} : \{\{a_0, a_1\},\ \{a_2\}.$$

Proveravamo, sada, elemente koji su pripadali istoj klasi:

$$\begin{aligned} a_0x &= a_1; \quad a_0y = a_2; \\ a_1x &= a_1; \quad a_1y = a_1; \end{aligned}$$

pa je jasno da $a_0$ i $a_1$ više nisu u relaciji, odnosno

$$\pi^{(1)} : \{a_0\},\ \{a_1\},\ \{a_2\}.$$

U ovom slučaju je $\pi_\tau = \pi^{(1)}$, pa je $\mathscr{A}$ minimalni fazi raspoznavač koji raspoznaje taj fazi jezik.

Naredni primeri pokazuju da deterministički fazi raspoznavač $\mathscr{A}_\sigma$ fazi jezika $f$, definisan u Odeljku 4.5 ne mora biti i minimalni raspoznavač tog fazi jezika.

**Primer 5.6.3.** Neka je $\mathscr{L}$ Gödelova struktura i neka je $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač fazi jezika $f$, gde je $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $X = \{x, y\}$ dok fazi prelaze $\delta_x$ i $\delta_y$ fazi skup inicijalnih stanja i fazi skup završnih stanja predstavljamo fazi matricama:

$$\delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \\ 0.8 & 0.9 & 1 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix},$$

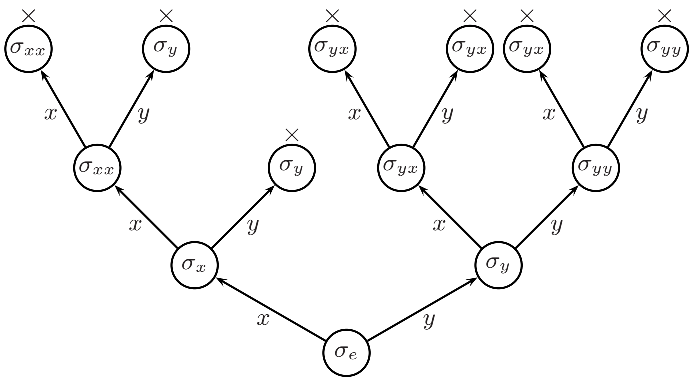
$$\sigma = \sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \tau = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Tada imamo da je

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_e \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_e \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_x \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_x \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_y, \\ \sigma_{yx} &= \sigma_y \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_y \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

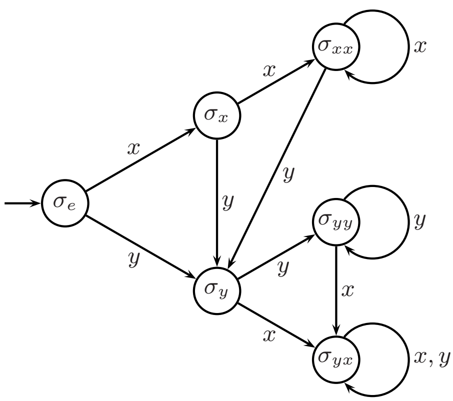
$$
\begin{aligned}
\sigma_{xxx} &= \sigma_{xx} \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} = \sigma_{xx}, \\
\sigma_{xxy} &= \sigma_{xx} \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{y}, \\
\sigma_{yxx} &= \sigma_{yx} \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} = \sigma_{yx}, \\
\sigma_{yxy} &= \sigma_{xx} \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} = \sigma_{yx}, \\
\sigma_{yyx} &= \sigma_{yy} \circ \delta_x = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} = \sigma_{yx}, \\
\sigma_{yyy} &= \sigma_{xx} \circ \delta_y = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} = \sigma_{yy},
\end{aligned}
$$

i dobijamo stablo prelaza fazi raspoznavača $\mathscr{A}_\sigma$ predstavljeno Slikom 1.




Slika 1. Stablo prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$

Brisanjem oznaka $\times$ i spajanjem listova sa unutrašnjim čvorovima koji imaju istu oznaku dobijamo graf prelaza




Slika 2. Graf prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$

i fazi skup završnih stanja $\tau_\sigma(\sigma_u) = \sigma_u \circ \tau$, $u \in X^*$ koji ćemo predstaviti matricom

$$\tau_\sigma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Dalje prelazimo na postupak minimizacije dobijenog determinističkog fazi raspoznavača $\mathscr{A}_\sigma$, formiranjem niza ekvivalencija:

Vidimo da je $P^{(0)}$ ekvivalencija sa tri klase:

$$\pi^{(0)} : \{\sigma_e\},\ \{\sigma_x, \sigma_{xx}, \sigma_{yx}\},\ \{\sigma_y, \sigma_{yy}\}.$$

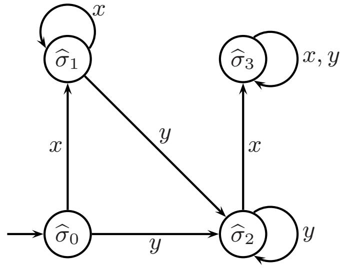
U narednom koraku formiramo klase ekvivalencije $\pi^{(1)}$, pri čemu istoj klasi pripadaju elementi $\sigma_u, \sigma_v$, $u, v \in \{e, x, y, xx, yx, yy\}$, koji su bili u relaciji $\pi^{(0)}$ i za koje su $(\sigma_u x, \sigma_v x) \in \pi^{(0)}$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}
\sigma_x x &= \sigma_{xx}; & \sigma_x y &= \sigma_y;\\
\sigma_{xx} x &= \sigma_{xx}; & \sigma_{xx} y &= \sigma_y;\\
\sigma_{yx} x &= \sigma_{yx}; & \sigma_{yx} y &= \sigma_{yx};\\
\sigma_y x &= \sigma_{yx}; & \sigma_y y &= \sigma_{yy};\\
\sigma_{yy} x &= \sigma_{yx}; & \sigma_{yy} y &= \sigma_{yy};
\end{aligned}$$

i vidimo da $\sigma_{yx}$ nije u relaciji sa $\sigma_x$ i $\sigma_{xx}$, odnosno imamo četiri klase

$$\pi^{(1)} : \{\sigma_e\},\ \{\sigma_x, \sigma_{xx}\},\ \{\sigma_{yx}\},\ \{\sigma_y, \sigma_{yy}\}.$$

Takođe je jasno da će se u narednom koraku dobti ekvivalencija $\pi^{(2)}$ koja se poklapa sa $\pi^{(1)}$. Dakle, niz se zaustavio i dobijena relacija je najveća kongruencija na $\mathscr{A}_\sigma$ sadržana u $\varepsilon_{\tau_\sigma}$. Na ovaj način smo dobili minimalni automat $\mathscr{A}_{\pi_\tau}$ čija su stanja $\widehat{\sigma}_0 = \{\sigma_e\}$, $\widehat{\sigma}_1 = \{\sigma_x, \sigma_{xx}\}$, $\widehat{\sigma}_2 = \{\sigma_y, \sigma_{yy}\}$ i $\widehat{\sigma}_3 = \{\sigma_{yx}\}$ i čiji je graf prelaza dat sa




Slika 3. Minimalni deterministički raspoznavač

Fazi skup završnih stanja kojim ovaj deterministički fazi raspoznavač raspoznaje isti fazi jezik predstavljamo fazi matricom

$$\tau_\pi = [\,0.5 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 0.8\,].$$

Ipak, deterministički automat $\mathscr{A}_\sigma = (A_\sigma, \sigma, X, \lambda_\sigma)$ na neki način možemo smatrati minimalnim. Naredna teorema pokazuje da je $\mathscr{A}_\sigma$ minimalni automat koji raspoznaje određenu familiju jezika.

**Teorema 5.6.6.** *Neka je* $\mathscr{A} = (A, \sigma, X, \delta)$ *inicijalni fazi automat. Tada važi:*

(a) $\mathscr{A}_\sigma$ *je minimalni deterministički automat koji raspoznaje svaki fazi jezik koji raspoznaje fazi automat* $\mathscr{A}$*.*

(b) $\mathscr{A}_\sigma$ *je minimalni deterministički automat koji raspoznaje svaki od fazi jezika* $\sigma_a$*, za* $a \in A$*.*

*Dokaz.* Dokazaćemo najpre tvrđenje (b). Neka deterministički automat $\mathscr{B} = (B, b_0, X, \lambda)$ raspoznaje svaki fazi jezik koji raspoznaje $\mathscr{A}$. Označimo sa $B'$ dostižni deo od $B$ i neka je $\lambda'$ restrikcija od $\lambda$ na $B' \times X$, tj. $\lambda' : B' \times X \to B'$. Naravno $b_0 \in B'$ i $\mathscr{B}' = (B', b_0, X, \lambda')$ je inicijalni deterministički automat, čija su sva stanja dostižna. Definisaćemo preslikavanje $\phi : B' \to A_\sigma$ na sledeći način:

Kako za svako stanje $b \in B'$ postoji $u \in X^*$ tako da je $b = \lambda'(b_0, u) = b_0u$ stavljamo da je

$$\phi(b) = \sigma_u.$$

Treba proveriti dobru definisanost preslikavanja $\phi$. Ako je $b = b_0v$, za neko $v \in X^*$ dokazujemo da je $\sigma_u = \sigma_v$, odnosno da je $\sigma_u(a) = \sigma_v(a)$ ili, ekvivalentno da je $\sigma_a(u) = \sigma_a(v)$, za svaki $a \in A$. U tom cilju, uzmimo proizvoljan $a \in A$. Tada $\mathscr{A}$ raspoznaje fazi jezik $\sigma_a$, pa ga raspoznaje i $\mathscr{B}$ nekim fazi skupom završnih stanja $\theta$. To znači da je

$$\sigma_a(u) = \theta(b_0u) = \theta(b_0v) = \sigma_a(v),$$

tj. $\sigma_u(a) = \sigma_v(a)$ i kako to važi za svaki $a \in A$ to je $\sigma_u = \sigma_v$. Prema tome, $\phi$ je dobro definisano. Takođe, za svaki $\sigma_u \in A_\sigma$ je $\sigma_u = \phi(b_0u)$, pa je $\phi$ surjektivno preslikavanje. Pokazaćemo da je $\phi$ homomorfizam. Neka je $b = b_0u$, $u \in X^*$ proizvoljno stanje iz $B'$ i $x \in X$. Tada je

$$\phi(bx) = \phi((b_0u)x) = \phi(b_0(ux)) = \sigma_{ux} = \sigma_u x = \phi(b)x,$$

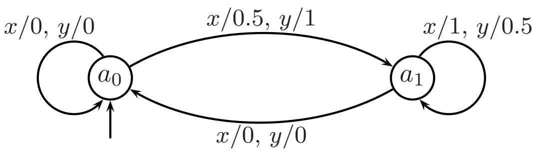
što je i trebalo dokazati.

Dakle $\mathscr{A}_\sigma$ je homomorfna slika od $\mathscr{B}'$, pa je manje kardinalnsti od $\mathscr{B}'$, a time je manje kardinalnosti i od $\mathscr{B}$. Ovim smo dokazali da je $\mathscr{A}_\sigma$ minimalni automat koji raspoznaje svaki od jezika $\sigma_a$, za $a \in A$.

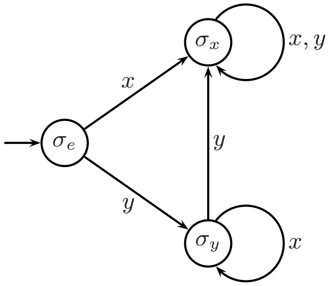
(a) Prema (5.4.1), automat $\mathscr{A}_\sigma$ raspoznaje svaki fazi jezik $f$ koji se može raspoznati sa $\mathscr{A}$. Svaki od jezika $\sigma_a$, $a \in A$, može se raspoznati sa $\mathscr{A}$ i istovremeno, $\mathscr{A}_\sigma$ je minimalni automat koji raspoznaje familiju jezika $\{\sigma_a, \mid a \in A\}$, pa je $\mathscr{A}_\sigma$ minimalni automat koji raspoznaje sve jezike raspoznatljive sa $\mathscr{A}$. Time je teorema dokazana. $\square$

Naredni primer pokazuje da postoji fazi jezik koji se može raspoznati sa $\mathscr{A}_\sigma$, ali ne i sa $\mathscr{A}$.

**Primer 5.6.4.** Razmatraćemo automat $\mathscr{A}$ i njemu odgovarajući $\mathscr{A}_\sigma$ iz primera 5.4.2




Slika 1. Graf prelaza od $\mathscr{A}$




Slika 2. Graf prelaza od $\mathscr{A}_\sigma$

Razmatramo fazi jezik $f$ nad ulaznim alfabetom $X = \{x, y\}$ zadat sa

$$f(u) = \begin{cases} 0.5, & \text{ako je } u = e \\ 0, & \text{ako je } u \in \{yx^*\} \\ 1, & \text{u protivnom .} \end{cases}$$

Jednostavno se pokazuje da $\mathscr{A}_\sigma$ raspoznaje $f$ fazi skupom završnih stanja

$$\tau_\sigma = [\,0.5 \quad 1 \quad 0\,].$$

Međutim, da bi automat $\mathscr{A}$ raspoznao $f$ moralo bi da važi

$$f(x) = \delta_x \circ \tau = \bigvee_{a \in A} \delta_x(a_0, a) \otimes \tau(a) = 1,$$

što je nemoguće jer je $\delta_x(a_0, a) < 1$ za $a \in \{a_0, a_1\}$. Dakle, $\mathscr{A}$ ne raspoznaje $f$.

Definisaćemo, dalje najveću fazi kongruenciju na determinističkom automatu $\mathscr{A} = (A, X, \delta)$ sadržanu u nekoj fazi ekvivalenciji na $\mathscr{A}$.

**Teorema 5.6.7.** *Neka je $E$ fazi ekvivalencija na determinističkom fazi automatu $\mathscr{A}$. Fazi relacija*

$$E^\flat(a,b) = \bigwedge_{u\in X^*} E(au,bu),$$

*za stanja $a, b \in A$ je najveća fazi kongruencija na $\mathscr{A}$ za koju važi $E^\flat \leqslant E$.*

*Dokaz.* Jednostavno se proverava da je $E^\flat$ fazi ekvivalencija na $\mathscr{A}$. Takođe važi

$$\begin{aligned} E^\flat(ax,bx) &= \bigwedge_{u\in X^*} E((ax)u,(bx)u) = \bigwedge_{u\in X^*} E(a(xu),b(xu)) \\ &= \bigwedge_{w=xu} E(aw,bw) \geqslant \bigwedge_{w\in X^*} E(aw,bw) = E^\flat(a,b), \end{aligned}$$

Razmotrimo proizvoljnu fazi kongruenciju $F \leqslant E$ na $\mathscr{A}$. Tada za $a, b \in A$ važi

$$F(a,b) \leqslant E(a,b),$$

pa imamo da je

$$F(a,b) \leqslant F(au,bu) \leqslant E(au,bu),$$

za svaku reč $u \in X^*$, odnosno $F(a,b) \leqslant E^\flat(a,b)$, što je i trebalo dokazati. □

Odavde direktno dobijamo da je $\widehat{E_\tau}^\flat$ najveća krisp kongruencija sadržana u ekvivalenciji $\widehat{E_\tau} = \varepsilon_\tau$, i, jasno $\varepsilon_\tau{}^\flat = \pi_\tau$. Osim toga važi naredna

**Teorema 5.6.8.** *Ako je $P$ fazi kongruencija na automatu $\mathscr{A}$ onda su faktor automati $\mathscr{A}_P$ i $\mathscr{A}_{\widehat{P}}$ izomorfni.*

*Dokaz.* Definišimo preslikavanje $\varphi : A_P \to A_{\widehat{P}}$ sa

$$\varphi(P_a) = \widehat{P}_a,$$

za stanje $a \in A$. Da bi proverili dobru definisanost i injektivnost ovog preslikavanja razmotrimo $a, b \in A$ za koje je $P_a = P_b$. Tada je $P(a,b) = 1$, što je ekvivalentno sa $(a,b) \in \widehat{P}$, tj. $\widehat{P}_a = \widehat{P}_b$. Dakle važi $\varphi(P_a) = \varphi(P_b)$. Za proizvoljno $\widehat{P}_a \in A_{\widehat{P}}$ je $\varphi(P_a) = \widehat{P}_a$, pa je preslikavanje surjektivno. Ostalo je još da pokažemo da je $\varphi$ homomorfizam. Za $P_a \in A_P$ i $x \in X$ važi

$$\varphi(P_a x) = \varphi(P_{ax}) = \widehat{P}_{ax} = (\widehat{P}_a)x = (\varphi P_a)x,$$

čime je teorema dokazana. □

Neka je $\mathscr{A} = (A, a_0, X, \delta, \tau)$ deterministički fazi raspoznavač i neka je $P$ fazi kongruencija na $\mathscr{A}$, odnosno fazi kongruencija na determinističkom automatu $(A, X, \delta)$, sadržana u fazi ekvivalenciji $E_\tau$. Tada se mogu definisati preslikavanja $\delta_P : A_P \times X \to A_P$ i $\tau_P : A_P \to L$ sa

$$\delta_P(P_a, x) = P_{ax}, \qquad \tau_P(P_a) = \tau(a),$$

za proizvoljne $a \in A$ i $x \in X$, i $\mathscr{A}_P = (A_P, P_{a_0}, X, \delta_P, \tau_P)$ je takođe deterministički fazi raspoznavač koji raspoznaje isti jezik kao i $\mathscr{A}$. Međutim, može se jednostavno dokazati da je $\mathscr{A}_P$ izomorfan determinističkom fazi raspoznavaču $\mathscr{A}_\pi$, gde je $\pi$ kongruencija na $\mathscr{A}$ koja je krisp deo fazi kongruencije $P$, pa korišćenje fazi kongruencija, umesto kongruencija, u minimizaciji determinističkih fazi raspoznavača ne bi donelo ništa novo.

Međutim, ovo važi samo za determinističke fazi raspoznavače. U opštem slučaju, pri redukciji broja stanja fazi raspoznavača upotrebom fazi ekvivalencija dobijaju se bolji rezultati nego upotrebom običnih krisp ekvivalencija, što je pokazano u radu [25].

## 5.7. Raspoznavanje fazi jezika fazi monoidom

Neka su $A$ i $B$ polugrupe i neka je $\varphi : A \to B$ fazi preslikavanje. Prema opštoj definiciji datoj u Glavi 4, $\varphi$ je fazi homomorfizam ako za sve $u, v \in A$ i $a, b \in B$ važi

$$\varphi(u, a) \otimes \varphi(v, b) \leqslant \varphi(uv, ab).$$

Razmotrimo fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$. Kažemo da monoid $S$ raspoznaje $f$ fazi epimorfizmom $\varphi \in \mathscr{F}(X^* \times S)$ pomoću fazi podskupa $\tau \in \mathscr{F}(S)$ ako važi sledeća jednakost:

$$f(u) = \bigvee_{a \in S} \varphi(u, a) \otimes \tau(a) = \varphi \circ \tau(u).$$

Možemo reći da par $(S, \varphi)$ raspoznaje $f$ fazi podskupom $\tau \in \mathscr{F}(S)$.

**Teorema 5.7.1.** *Uređeni par $(S, \varphi)$ raspoznaje fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ fazi podskupom $\tau \in \mathscr{F}(S)$ ako i samo ako je $f$ ekstenzionalan u odnosu na jezgro* $\ker \varphi$ *fazi epimorfizma $\varphi$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je fazi jezik $f$ raspoznatljiv parom $(S, \varphi)$ i $\tau \in \mathscr{F}(S)$. To znači da je

$$f(u) = \bigvee_{a \in S} \varphi(u, a) \otimes \tau(a).$$

Dokazaćemo da je $f$ ekstenzionalan u odnosu na $\ker\varphi$. Naime, važi

$$\begin{aligned}
\ker\varphi(u,v) &= \bigwedge_{a\in S} \varphi(u,a) \leftrightarrow \varphi(v,a)\\
&\leqslant \bigwedge_{a\in S} [\varphi(u,a)\otimes\tau(a)] \leftrightarrow [\varphi(v,a)\otimes\tau(a)]\\
&\leqslant [\bigvee_{a\in S} \varphi(u,a)\otimes\tau(a)] \leftrightarrow [\bigvee_{a\in S} \varphi(v,a)\otimes\tau(a)]\\
&\leqslant f(u) \leftrightarrow f(v),
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sa druge strane, neka je fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ ekstenzionalan u odnosu na fazi jezgro fazi homomorfizma $\varphi$ iz $X^*$ na $S$. Dokazaćemo da $(S,\varphi)$ raspoznaje $f$ nekim fazi podskupom $\tau \in \mathscr{F}(S)$. Za proizvoljan element $a \in S$, stavimo

$$\tau(a) = \bigvee_{v\in X^*} f(v)\otimes\varphi(v,a) = f\circ\varphi(a).$$

Očito je da je fazi podskup $\tau$ dobro definisano, zbog dobre definisanosti fazi jezika $f$ i i fazi homomorfizma $\varphi$. Tada imamo da važi

$$\begin{aligned}
f(u) &= \bigvee_{v\in X^*} f(v)\otimes\ker\varphi(u,v)\\
&= \bigvee_{v\in X^*} f(v)\otimes[\bigvee_{a\in S}\varphi(u,a)\otimes\varphi(v,a)]\\
&= \bigvee_{v\in X^*}\bigvee_{a\in S} f(v)\otimes\varphi(u,a)\otimes\varphi(v,a)\\
&= \bigvee_{a\in S}\varphi(u,a)\otimes[\bigvee_{v\in X^*}\varphi(v,a)\otimes f(v)]\\
&= \bigvee_{a\in S}\varphi(u,a)\otimes\tau(a),
\end{aligned}$$

čime je dokaz teoreme završen. □

**Posledica 5.7.1.** *Svaki fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ može biti raspoznat nekim monoidom.*

*Dokaz.* Proizvoljan fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$ je ekstenzionalan u odnosu na sintaksičku fazi kongruenciju $P_f \in \mathscr{F}(X^*\times X^*)$, jer važi

$$P_f(u,v) = \bigwedge_{p,q\in X^*} f(puq)\leftrightarrow f(pvq) \leqslant E_f(u,v) = f(u)\leftrightarrow f(v).$$

Dokazaćemo da uređeni par $(X^*/P_f, P_f{}^\natural)$ raspoznaje $f$. Dovoljno je da dokažemo da je $\ker\varphi = P_f$. Jednostavnosti radi pišemo $P = P_f$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\ker\varphi(u,v) &= \bigvee_{w\in X^*} P^\natural(u,P_w)\otimes P^\natural(v,P_w)\\ &= \bigvee_{w\in X^*} P(u,w)\otimes P(v,w) = P(u,v),\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. $\square$

Monoid $X^*/P_f$ nazivamo *sintaksički monoid fazi jezika* $f$.

Neka je $\mathscr{A} = (A, X, a_0, \delta)$ fazi automat sa krisp inicijalnim stanjem $a_0$. Svakoj reči $u \in X^*$ pridružujemo fazi relaciju $\delta_u$ definisanu u (5.5). Označimo sa $S(A) = \{\delta_u \mid u \in X^*\}$.

**Propozicija 5.7.1.** *Skup $S(A)$ je zatvoren za operaciju "$\circ$" kompozicije fazi relacija.*

*Dokaz.* Neka su $a, b \in A$ proizvoljni elementi i $u, v \in X^*$. Tada je

$$\delta_u \circ \delta_v(a,b) = \bigvee_{c\in A} \delta_u(a,c)\otimes\delta_v(c,b) = \delta_{uv}(a,b),$$

čime smo dokazali ovo tvrđenje. $\square$

Prema prethodnom $(S(A), \circ)$ je monoid sa jedinicom $\delta_e$ koji ćemo nazvati *monoid prelaza fazi automata* $\mathscr{A}$.

**Teorema 5.7.2.** *Monoid prelaza datog fazi automata $\mathscr{A}$ izomorfan je monoidu $X^*/M_{\mathscr{A}}$.*

*Dokaz.* Definišimo preslikavanje $\psi : S(A) \mapsto X^*/M$ sa $\psi(\delta_u) = M_u$, pri čemu smo sa $M$ kraće označili Myhillovu fazi kongruenciju $M_{\mathscr{A}}$. Najpre ćemo dokazati da je $\psi$ dobro definisano i injektivno. Uzmimo reči $u, v \in X^*$ takve da je $\delta_u = \delta_v$. To znači da, za svako $a, b \in A$ važi $\delta_u(a,b) = \delta_v(a,b)$, ili ekvivalentno,

$$\bigwedge_{a,b\in A} \delta_u(a,b) \leftrightarrow \delta_v(a,b) = \bigwedge_{a,b\in A} \delta(a,u,b) \leftrightarrow \delta(a,v,b) = 1$$

Dakle, $M(u,v) = 1$, tj. $M_u = M_v$. Kako je $\psi$ očito surjektivno fazi preslikavanje, ostalo je samo da pokažemo da je homomorfizam. Imamo da važi

$$\psi(\delta_u\circ\delta_v) = \psi(\delta_{uv}) = M_{uv} = M_u \circ M_v = \psi(\delta_u)\circ\psi(\delta_v).$$

Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

**Posledica 5.7.2.** *Neka je $E$ relacija fazi kongruencuije na $X^*$. Tada je $S(A_E) \cong X^*/E^0$.*

*Dokaz.* Prema Teoremi 5.3.4 imamo da je $E^0 = M_{\mathscr{A}_E}$, dok je prema prethodnoj teoremi

$$S(A_E) \cong X^*/M_{\mathscr{A}_E}.$$

Dakle važi $S(A_E) \cong X^*/E^0$. □

U narednim tvrđenjima ćemo, radi lakšeg zapisivanja koristiti oznake $R = R_f$, $P = P_f$ i $\mathscr{A}' = \mathscr{A}_{R_f}$.

**Posledica 5.7.3.** *Neka je $f \in \mathscr{F}(X^*)$ fazi jezik. Sintaksički monoid $X^*/P$ izomorfan je monoidu prelaza $S(A')$ automata $\mathscr{A}'$.*

*Dokaz.* Prema prethodnoj posledici sledi da je

$$S(A') \cong X^*/M_{\mathscr{A}'}\,,$$

pa je dovoljno da dokažemo da je $M_{\mathscr{A}'} = P$. Naime, za sve $u, v \in X^*$ važi

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{A}'}(u,v) &= \bigwedge_{p,q\in X^*} \delta^*(R_p,u,R_q) \leftrightarrow \delta^*(R_p,v,R_q) \\ &= \bigwedge_{p,q\in X^*} R(pu,q) \leftrightarrow R(pv,q) = \bigwedge_{p\in X^*} R(pu,pv) \\ &= \bigwedge_{p\in X^*} [\bigwedge_{w\in X^*} f(puw) \leftrightarrow f(pvw)] \\ &= \bigwedge_{p,w\in X^*} f(puw) \leftrightarrow f(pvw) = P(u,v). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen. □

**Posledica 5.7.4.** *Neka je $E$ fazi ekvivalencija fazi automata $\mathscr{A}$. Monoid prelaza $S(A_{\widehat{E}})$ faktor automata $\mathscr{A}_{\widehat{E}}$ izomorfan je monoidu prelaza $S(A_E)$.*

*Dokaz.* Na osnovu Posledica 5.7.2 i 5.7.3 direktno sledi da je $S(A_E) \cong X^*/E^0 \cong X^*/\widehat{E^0} \cong S(A_{\widehat{E}})$. □

**Teorema 5.7.3.** *Neka je $f \in \mathscr{F}(X^*)$ fazi jezik. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$f$ je raspoznatljiv konačnim fazi automatom;*

(ii) *$f$ je raspoznatljiv konačnim monoidom;*

(iii) *Sintaksička fazi kongruencija $P$ ima konačan indeks.*

*Dokaz.* (i)⇒(ii) Pretpostavimo da fazi jezik $f$ može biti raspoznat konačnim fazi automatom $\mathscr{A}$. Tada je, prema Teoremi **??** $f$ raspoznatljiv automatom $\mathscr{A}'$, odnosno $R$ je konačnog indeksa. Pošto važi $P \leqslant R$ fazi jezik $f$ je ekstenzionalan i u odnosu na $P$ odakle sledi da je $f$ raspoznatljiv i monoidom $X^*/M_{\mathscr{A}'}$.

(ii)⇒(iii) Raspoznatljivost fazi jezika $f$ konačnim monoidom znači da je sintaksički fazi monoid konačan, tj. $ind(P)$ je konačan.

(iii)⇒(i) Pretpostavimo da je sintaksička fazi kongruencija $P$ konačnog indeksa. Kako je $P \leqslant R$, odnosno $|X^*/R| \leqslant |X^*/P|$ automat $\mathscr{A}'$ je konačan fazi automat koji raspoznaje fazi jezik $f$. Ovim je dokaz teoreme završen. □

**Teorema 5.7.4.** *Neka je $E \in \mathscr{F}(X^* \times X^*)$ fazi kongruencija na $X^*$ i $f \in \mathscr{F}(X^*)$ je fazi jezik.*

*Ako uređeni par $(X^*/E, E^\natural)$ raspoznaje $f$, onda i monoid $X^*/\widehat{E}$ raspoznaje $f$ prirodnim homomorfizmom $\widehat{E}^\natural$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da $(X^*/E, E^\natural)$ raspoznaje $f \in \mathscr{F}(X^*)$ nekim fazi podskupom $\tau \in \mathscr{F}(X^*/E)$, tj.

$$f(u) = \bigvee_{v \in X^*} E^\natural(u, E_v) \otimes \tau(E_v) = \bigvee_{v \in X^*} E(v, u) \otimes \tau(E_v).$$

Monoid $X^*/\widehat{E}$ raspoznaje $f$ ako postoji fazi podskup $\alpha \in \mathscr{F}(X^*/\widehat{E})$, takav da je

$$f = \widehat{E}^\natural \alpha.$$

Za proizvoljno $u \in X^*$ je $\widehat{E}^\natural(u) = \widehat{E}_u$. Definišimo

$$\alpha(\widehat{E}_u) = \bigvee_{v \in X^*} E^\natural(u, E_v) \otimes \tau(E_v) = f(u) \ , \text{ za svako } u \in X^*.$$

Proverimo da li je $\alpha$ dobro definisan. Razmotrimo proizvoljne $u, v \in X^*$ za koje je $\widehat{E}_u = \widehat{E}_v$. Tada je $(u, v) \in \widehat{E}$, tj. $E(u, v) = 1$ ili, ekvivalentno

$E_u = E_v$. Zbog dobre definisanosti fazi podskupa $\tau$ imamo

$$\begin{aligned}\alpha(\widehat{E}_u) &= \bigvee_{w\in X^*} E(w,u)\otimes\tau(E_w) = \bigvee_{w\in X^*} E(u,w)\otimes\tau(E_w)\\ &= \bigvee_{w\in X^*} E_u(w)\otimes\tau(E_w) = \bigvee_{w\in X^*} E_v(w)\otimes\tau(E_w)\\ &= \bigvee_{w\in X^*} E(w,v)\otimes\tau(E_w) = \alpha(\widehat{E}_v).\end{aligned}$$

Na ovaj način smo pokazali da je $\alpha$ dobro definisan fazi podskup i da za ovako izabrano $\alpha$ važi $f = \widehat{E}^{\natural}\alpha$, čime je dokaz završen. □

Setimo se da se za fazi jezik $f$ kaže da je *raspoznatljiv* ako postoji konačan fazi raspoznavač koji ga raspoznaje. Sumirajući napred izložene rezultate dolazimo do sledeće teoreme:

**Teorema 5.7.5.** *Za fazi jezik $f \in \mathscr{F}(X^*)$, sledeći uslovi su ekvivalentni ako i samo ako je poluprsten $\mathscr{S} = (L, \vee, \otimes, 0, 1)$ lokalno konačan:*

(i) *$f$ je raspoznatljiv fazi jezik;*

(ii) *$f$ je ekstenzionalan u odnosu na neku fazi desnu kongruenciju konačnog indeksa;*

(iii) *$f$ je ekstenzionalan u odnosu na neku fazi kongruenciju konačnog indeksa;*

(iv) *sintaksička fazi desna kongruencija $R_f$ ima konačan indeks;*

(v) *sintaksička fazi kongruencija $P_f$ ima konačan indeks.*

*Dokaz.* (i)⇒(iv) Pretpostavimo da fazi jezik $f$ može biti raspoznat konačnim fazi automatom $\mathscr{A}$. Tada on, prema Teoremi 5.3.2 može biti raspoznat i fazi automatom $\mathscr{A}_{N_{\mathscr{A}}}$, što znači da $N_{\mathscr{A}}$ ima konačan indeks, tj. indeks sintaksičke fazi desne kongruencije $R_f$ je konačan.

(iv)⇒(ii) Ovo sledi neposredno.

(ii)⇒(i) Ako je fazi jezik $f$ ekstenzionalan u odnosu na neku fazi desnu kongruenciju $E$ konačnog indeksa, onda prema Teoremi 5.2.2 on može biti raspoznat fazi automatom $\mathscr{A}_E$.

(i)⇒(v) Sledi direktno iz Teoreme 5.7.3.

(v)⇒(iii) Ovo sledi neposredno.

(iii)⇒(i) Ako je $f$ ekstenzionalan u odnosu na neku fazi kongruenciju konačnog indeksa, onda je i indeks sintaksičke fazi kongruencije $P_f$ konačan, pa je fazi jezik $f$, prema Teoremi 5.7.3 raspoznatljiv nekim fazi automatom. □

# Literatura


[1] P. R. J. Asveld, *Algebraic aspects of families of fuzzy languages*, Theoretical Computer Science 293 (2003), 417–445.

[2] N. C. Basak and A. Gupta, *On quotient machines of a fuzzy automaton and the minimal machine*, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002), 223–229.

[3] R. Bělohlávek, *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*, Kluwer, New York, 2002.

[4] R. Bělohlávek, *Determinism and fuzzy automata*, Information Sciences 143 (2002), 205–209.

[5] R. Bělohlávek, *Fuzzy closure operators induced by similarity*, Fundamenta Informaticae 58 (2003) 79–91.

[6] R. Bělohlávek, *Birkhoff variety theorem and fuzzy logic*, Arch. Math. Logic 42 (2003) 781–790.

[7] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Fuzzy Equational Logic*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2005.

[8] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Algebras with fuzzy equalities*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 161–201.

[9] K. Blount and C. Tsinakis, *The structure of residuated lattices*, International Journal of Algebra and Computation 13 (4) (2003) 437–461.

[10] S. Bogdanović and M. Ćirić, *Polugrupe*, Prosveta, Niš, 1993.

[11] D. Boixader, J. Jacas and J. Recasens, *Fuzzy equivalence relations: advanced material*, in: P. Dubois (ed.), Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer, Dordrecht, 2000, 261–290.

[12] D. Boixader, J. Jacas and J. Recasens, *Transitive closure and betweenness relations*, Fuzzy Sets and Systems 120 (2001), 415–422.

[13] S. Bozapalidis and O. Louscou-Bozapalidou, *On the recognizability of fuzzy languages* I, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), 2394–2402.

[14] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[15] D. Butnariu, *Additive fuzzy measures and integrals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 93 (1983), 436–452.

[16] U. Cerruti and U. Höhle, *An approach to uncertainty using algebras over a monoidal closed category*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 12 (1986), 47–63.

[17] M. K. Chakraborty and M. Das, *On fuzzy equivalences* I, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983), 185-193.

[18] A. B. Chakraborty and S. S. Khare, *Fuzzy homomorphism and algebraic structures*, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993), 211–221.

[19] A. B. Chakraborty and S. S. Khare, *Fuzzy homomorphism and f-fuzzy subgroups generated by a fuzzy subset*, Fuzzy Sets and Systems 74 (1995), 259–268.

[20] W. Cheng and Z. Mo, *Minimization algorithm of fuzzy finite automata*, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004), 439–448.

[21] F. P. Choudhury, A. B. Chakraborty and S. S. Khare, *A note on fuzzy subgroups and fuzzy homomorphism*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 131 (1988), 537–553.

[22] M. Ćirić, T. Petković and S. Bogdanović, *Jezici i automati*, Prosveta, Niš, 2000.

[23] M. Ćirić, J. Ignjatović and S. Bogdanović, *Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 1295–1313.

[24] M. Ćirić, J. Ignjatović and S. Bogdanović, *Uniform fuzzy relations and fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems (submitted for publication).

[25] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović and T. Petković, *Factorization of Fuzzy Automata*, Lecture Notes in Computer Science (accepted for publication).

[26] B. De Baets, *A note of Mamdani controllers*, in: Intelligent Systems and Soft Computing for Nuclear Science and Industry (D. Ruan, P. D'hondt, P. Govaerts and E. Kerre, eds.), World Scientific, Singapore, 1996, pp. 22-28.

[27] B. De Baets, G. De Cooman and E. Kerre, *The constructing of possibility measures from samples on T'semi'partitions*, Information Sciences 106 (1998), 3-24.

[28] B. De Baets, M. Mareš and R. Mesiar, *$\mathscr{T}$-partitions of the real line generated by idempotent shapes*, Fuzzy sets and sistems 91 (1997), 177-184

[29] B. De Baets and R. Mesiar, *$\mathscr{T}$-partitions*, Fuzzy Sets and Systems 97 (1998), 211–223.

[30] B. De Baets and R. Mesiar, *Metrics and $\mathscr{T}$-equalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 267 (2002), 531–547.

[31] M. Demirci, *Fuzzy functions and their fundamental properties*, Fuzzy Sets and Systems 106 (1999), 239–246.

[32] M. Demirci, *Vague groups*, J. Math. Anal. Appl. 230 (1999), 142–156.

[33] M. Demirci, *Fuzzy functions and their applications*, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 495–517.

[34] M. Demirci, *Gradation of being fuzzy function*, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001), 383–392.

[35] M. Demirci, *Smooth groups*, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 431–437.

[36] M. Demirci, *Smooth subgroups and smooth homomorphisms*, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 439–446.

[37] M. Demirci, *Fundamentals of M-vague algebra and M-vague arithmetic operations*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems 10 (1) (2002) 25–75.

[38] M. Demirci, *Construction of fuzzy functions based on fuzzy equalities*, Soft Computing 7 (2003), 199–207.

[39] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part I: Fuzzy functions and their applications*, Int. J. General Systems 32 (2003), 123–155.

[40] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part II: Vague algebraic notions*, Int. J. General Systems 32 (2003), 157–175.

[41] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part III: Constructions of vague algebraic notions and vague arithmetic operations*, Int. J. General Systems 32 (2003), 177–201.

[42] M. Demirci, *On many-valued partitions and many valued equivalence relations*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 11 (2003), 235–253.

[43] M. Demirci, *Representations of the extensions of many-valued equivalence relations*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 11 (2003), 319–341.

[44] M. Demirci, *Indistinguishability operators in measurement theory, Part I: Conversions of indistinguishability operators with respect to scales*, Int. J. General Systems 32 (2003), 415–430.

[45] M. Demirci, *Indistinguishability operators in measurement theory, Part II: Construction of indistinguishability operators based on probability distributions*, Int. J. General Systems 32 (2003), 431–458.

[46] M. Demirci, *A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations – I: general representation results*, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 437–472.

[47] M. Demirci, *A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations – II: complete lattices*, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 473–489.

[48] M. Demirci, *Products of elements in vague semigroups and their implementations in vague arithmetic*, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005) 93–123.

[49] M. Demirci, *The generalized associative law in smooth groups*, Information Sciences 169 (2005) 227–244.

[50] M. Demirci, *The generalized associative law in vague groups and its applications – I*, Information Sciences 176 (2006) 900–936.

[51] M. Demirci, *The generalized associative law in vague groups and its applications – I*, Information Sciences 176 (2006) 1488–1530.

[52] M. Demirci and J. Recasens, *Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations*, Fuzzy Sets and Systems 144 (2004), 441–458.

[53] J.-P. Doignon and J. Mitas, *Dimension of valued relations*, European Journal of Operational Research 125 (2000),441-458.

[54] M. Droste and P. Gastin, *Weighted automata and weighted logics*, in: Automata, languages and programming (32nd ICALP Lisbon, Portugal, 2005) Lect. Notes Comput. Sci. 3580 (2005), 513–525.

[55] A. Di Nola, G. Gerla, *Lattice valued algebras*, Stochastica 11 (1987) 137–150.

[56] J. X. Fang, *Fuzzy homomorphism and fuzzy isomorphism*, Fuzzy Sets and Systems 63 (1994), 237–242.

[57] J. A. Goguen, *L-fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967), 145–174.

[58] J. B. Hart, L. Rafter and C. Tsinakis, *The structure of commutative residuated lattices*, International Journal of Algebra and Computation 12 (4) (2002), 509–524.

[59] U. Höhle, *Qutients with respect to similarity relations*, Fuzzy Sets and Systems 27 (1988), 31-44.

[60] U. Höhle, *Fuzzy equalities and indistinguishability*, in: Proc. EUFIT'93, 1993, pp. 358–363.

[61] U. Höhle, *Commutative,residuated $\ell$-monoids*, in: U. Höhle and E. P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, 1995, pp. 53-106.

[62] U. Höhle, *On the fundamentals of fuzzy set theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 201 (1996), 786–826.

[63] U. Höhle, *Many-valued equalities, singletons and fuzzy partitions*, Soft Computing 2 (1998), 134–140.

[64] J. Ignjatović, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Determinization of fuzzy automata*, Information Sciences (submitted for publication).

[65] J. Ignjatović, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Fuzzy homomorphisms of algebras*, Fuzzy Sets and Systems (submitted for publication).

[66] J. Ignjatović, M. Ćirić and S. Bogdanović, *Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata*, Fuzzy Sets and Systems (submitted for publication).

[67] J. Jacas, *Similarity relations. The calculation of minimal generating families*, Fuzzy Sets and Systems 35 (1990), 151–162.

[68] J. Jacas and J. Recasens, *Fuzzy T-transitive relations: eigenvectors and generators*, Fuzzy Sets and Systems 72 (1995), 147–154.

[69] J. Jacas and J. Recasens, *Maps and isometries between indistinguishability operators*, Soft Computing 6 (2002), 14–20.

[70] F. Klawonn, J. Gebhard and R. Kruse, *Fuzzy control on the basis of equality relations-with an example from idle speed control*, IEEE Trans. Fuzzy Systems 3 (1995), 336-350.

[71] F. Klawonn, *Fuzzy points, fuzzy relations and fuzzy functions*, in: V. Novâk and I. Perfilieva (Eds.), Discovering World with Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 431-453.

[72] F. Klawonn and R. Kruse, *Equality relations as a basis for fuzzy control*, Fuzzy Sets and Systems 54 (1993), 147-156.

[73] F. Klawonn and R. Kruse, *From fuzzy sets to indistinguishability and back*, in: N. Steele (ed.), Proc. First ICSC Internat. Symp. on Fuzzy Logic, Zürich, Switzerland, 1995, ICSC Academic Press, Millet, 1995, A57-A59.

[74] F. Klawonn and R. Kruse, *The inherent indistinguishability in fuzzy systems*, in: W. Lenski (ed.): Logic versus Approximation, Lect. Notes in Comput. Sci. 3075 (2004), 6-17.

[75] R. Kruse, J. Gebhardt and F. Klawonn, *Foundations of Fuzzy Systems*, Wiley, Chichester, 1994.

[76] N. Kuroki, *Fuzzy congruences on inverse semigroups*, Fuzzy Sets and Systems 87 (1997), 335–340.

[77] M. V. Lawson, *Finite Automata*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 2004.

[78] H. X. Lei and Y. M. Li, *Minimization of states in automata theory based on finite lattice-ordered monoids*, Information Sciences 177 (2007), 1413–1421.

[79] P. Li and Y. M. Li, *Algebraic properties of LA-languages*, Information Sciences 176 (2006), 3232–3255.

[80] Y. M. Li, *A categorical approach to lattice-valued fuzzy automata*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), 855–864.

[81] Y. M. Li and W. Pedrycz, *Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice ordered monoids*, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005), 68–92.

[82] Y. M. Li and W. Pedrycz, *The equivalence between fuzzy Mealy and fuzzy Moore machines*, Soft Computing 10 (2006), 953–959.

[83] S. Y. Li, D. G. Chen, W. X. Gu, H. Wang, *Fuzzy homomorphisms*, Fuzzy Sets and Systems 79 (1996) 235–238.

[84] Z. H. Li, P. Li and Y. M. Li, *The relationships among several types of fuzzy automata*, Information Sciences 176 (2006), 2208–2226.

[85] D. S. Malik and J. N. Mordeson, *Fuzzy homomorphisms of rings*, Fuzzy Sets and Systems Volume 46 (1992), 139–146.

[86] D. S. Malik, J. N. Mordeson and M. K. Sen, *On fuzzy regular languages*, Information Sciences 88 (1996), 263–273.

[87] D. S. Malik, J. N. Mordeson and M. K. Sen, *Minimization of fuzzy finite automata*, Information Sciences 113 (1999), 323–330.

[88] J. Močkoř, *Fuzzy and non-deterministic automata*, Soft Computing 3 (1999), 221–226

[89] J. N. Mordeson and D. S. Malik, *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[90] J. N. Mordeson and P. S. Nair, *Fuzzy Mathematics*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2001.

[91] J. N. Mordeson, K. R. Bhutani, A. Rosenfeld, *Fuzzy Group Theory*, Springer, 2005.

[92] J. N. Mordeson, D. S. Malik and N. Kuroki, *Fuzzy Semigroups*, Springer, 2003.

[93] B. Moser and R. Winkler, *A relationship between equality relations and the T-redundancy of fuzzy partitions and its applications to Sugeno controllers*, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000), 455–467.

[94] V. Murali, *Fuzzy equivalence relations*, Fuzzy Sets and Systems 30 (1989), 155–163.

[95] V. Murali, *Fuzzy congruence relations*, Fuzzy Sets and Systems 41 (1991), 359–369.

[96] V. Murali, *Lattice of fuzzy subalgebras and closure systems on $I^X$*, Fuzzy Sets and Systems 41 (1991), 101–111.

[97] W. C. Nemitz, *Fuzzy relations and fuzzy functions*, Fuzzy Sets and Systems 19 (1986), 177-191.

[98] V. Novăk, *Fuzzy Sets and Their Applications*, Adam Hilger, Bristol, 1986.

[99] S. Ovchinnikov, *Representations of transitive fuzzy relations*, in: H. J. Skala, et all (eds.), Aspect of Vagueness, Reidel Publ., 1984, pp. 105–118.

[100] S. Ovchinnikov, *Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings*, Fuzzy Sets and Systems 40 (1991), 107–126.

[101] T. Petković, *Congruences and homomorphisms of fuzzy automata*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), 444–458.

[102] D. W. Qiu, *Automata theory based on completed residuated lattice-valued logic* (I), Science in China, Ser. F, 44 (6) (2001), 419–429.

[103] D. W. Qiu, *Automata theory based on completed residuated lattice-valued logic* (II), Science in China, Ser. F, 45 (6) (2002) 442452.

[104] D. W. Qiu, *Automata theory based on quantum logic: some characterizations*, Information and Computation 190 (2004), 179–195.

[105] D. W. Qiu, *Characterizations of fuzzy ”nite automata*, Fuzzy Sets and Systems 141 (2004), 391–414.

[106] D. W. Qiu, *Pumping lemma in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: A note*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), 2128–2138.

[107] D. W. Qiu and H. Q. Wang, *A probabilistic model of computing with words*, Journal of Computer and System Sciences 70 (2005), 176–200.

[108] D. W. Qiu and M. S. Ying, *Characterizations of quantum automata*, Theoretical Computer Science 312 (2004), 479–489.

[109] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl. 35 (3) (1971) 512–517.

[110] E. Ruspini, *A new approach to clustering*, Information and Control 15 (1969), 22–32.

[111] M. Samhan, *Fuzzy congruences on semigroups*, Inform. Sci. 74 (1993), 165-175.

[112] M. A. Samhan, *Fuzzy quotient algebras and fuzzy factor congruences*, Fuzzy Sets and Systems 73 (1991), 269–277.

[113] J. Shen, *Fuzzy language on free monoid*, Information Sciences 88 (1996), 149–168.

[114] L. Sheng and Y. M. Li, *Regular grammars with truth values in lattice-ordered monoid and their languages*, Soft Computing 10 (2006), 79–86.

[115] B. Šešelja, *Homomorphisms of poset-valued algebras*, Fuzzy Sets and Systems 121 (2001) 333–340.

[116] B. Šešelja, A. Tepavčević, *On a generalization of fuzzy algebras and congruences*, Fuzzy Sets and Systems 65 (1994) 85-94.

[117] Y. Tan, *Fuzzy congruences on a regular semigroup*, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001), 447–453.

[118] H. Thiele, *On the mutual defineability of fuzzy tolerance relations and fuzzy tolerance coverings*, Proc. 25th Intern. Symp. on Multiple-Valued Logic, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, 1995, pp. 140-145.

[119] H. Thiele and N. Schmechel, *The mutual defineability of fuzzy equivalence relations and fuzzy partitions*, Proc. Inter. Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the Second International Fuzzy Engineering Symposium, Yokohama, 1995, pp. 1383-1390.

[120] L. Valverde, *On the structure of F-indistinguishability operators*, Fuzzy Sets and Systems 17 (1985), 313–328.

[121] V. Vychodil, *A note on congruence permutability and fuzzy logic*, Soft Comput. 10 (2006) 279–284.

[122] X. Yuan, E. S. Lee, Fuzzy group based on fuzzy binary operation, Comput. Math. Appl. 47 (2004) 631–641.

[123] H. G. Xing, D. W. Qiu, F. C. Liu and Z. J. Fan, *Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic*, Fuzzy Sets and Systems (2007), doi:10.1016/j.fss.2007.01.008

[124] X. Yuan and E. S. Lee, *Fuzzy group based on fuzzy binary operation*, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004), 631–641.

[125] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inf. Control 8 (3)(1965), 338–353.

[126] L. A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*, Information Sciences 3 (1971) 177–200.

# Indeks

Прилог **5/1**

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

| | |
|---|---|
| Редни број, **РБР**: | |
| Идентификациони број, **ИБР**: | |
| Тип документације, **ТД**: | монографска |
| Тип записа, **ТЗ**: | текстуални / графички |
| Врста рада, **ВР**: | Докторска дисертација |
| Аутор, **АУ**: | Јелена М. Игњатовић |
| Ментор, **МН**: | Мирослав Д. Ћирић |
| Наслов рада, **НР**: | **Фази релације, аутомати и језици** |
| Језик публикације, **ЈП**: | српски |
| Језик извода, **ЈИ**: | енглески |
| Земља публиковања, **ЗП**: | Србија |
| Уже географско подручје, **УГП**: | Србија |
| Година, **ГО**: | 2007. |
| Издавач, **ИЗ**: | ауторски репринт |
| Место и адреса, **МА**: | Ниш, Вишеградска 33 |
| Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога) | 163 стр., граф. прикази |
| Научна област, **НО**: | рачунарске науке |
| Научна дисциплина, **НД**: | теорија израчунавања |
| Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**: | фази аутомати и језици, фази релације |
| **УДК** | 519.71, 519.713, 519.76 |
| Чува се, Ч**У**: | библиотека |
| Важна напомена, **ВН**: | |
| Извод, **ИЗ**: | У дисертацији је изведена комплетна теорија Myhill-Nerode-овог типа за фази језике и аутомате, уз коришћење десних фази конгруенција и фази конгруенција на слободном моноиду, која је доведена у везу са проблемима распознатљивости, минимизације и детерминизације фази аутомата. Поред тога, изучаване су и фази еквиваленције, фази семи-партиције и фази партиције над комплетним резидуираним мрежама, уведени су концепти униформне фази релације, фази пресликавања и фази хомоморфизма, итд. |
| Датум прихватања теме, **ДП**: | 6. 12. 2006. године |
| Датум одбране, **ДО**: | |
| Чланови комисије, **КО**: Председник: | |
| Члан: | |
| Члан: | |
| Члан: | |
| Члан, ментор: | |

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
NIŠ

# KEY WORDS DOCUMENTATION

| | |
|---|---|
| Accession number, **ANO**: | |
| Identification number, **INO**: | |
| Document type, **DT**: | monograph |
| Type of record, **TR**: | textual / graphic |
| Contents code, **CC**: | doctoral dissertation |
| Author, **AU**: | Jelena M. Ignjatović |
| Mentor, **MN**: | Miroslav D. Ćirić |
| Title, **TI**: | **Fuzzy Relations, Automata and Languages** |
| Language of text, **LT**: | Serbian |
| Language of abstract, **LA**: | English |
| Country of publication, **CP**: | Serbia |
| Locality of publication, **LP**: | Serbia |
| Publication year, **PY**: | 2007 |
| Publisher, **PB**: | author's reprint |
| Publication place, **PP**: | Niš, Višegradska 33 |
| Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes) | 163 p. ; graphic representations |
| Scientific field, **SF**: | computer science |
| Scientific discipline, **SD**: | theory of computing |
| Subject/Key words, **S**/**KW**: | fuzzy automata and languages |
| **UC** | 519.71, 519.713, 519.76 |
| Holding data, **HD**: | library |
| Note, **N**: | |
| Abstract, **AB**: | In this thesis we give a complete theory of Myhill-Nerode's type for fuzzy languages and automata, by means of right fuzzy congruences and fuzzy congruences on free monoids, which is connected with the problems of recognizability, minimization and determinization of fuzzy automata. In addition, we study fuzzy equivalences, fuzzy semi-partitions and fuzzy partitions over a complete residuated lattice, we introduce the concepts of a uniform fuzzy relation, fuzzy mapping, fuzzy homomorphism etc. |
| Accepted by the Scientific Board on, **ASB**: | 6. 12. 2006. |
| Defended on, **DE**: | |
| Defended Board, **DB**: President: | |
| Member: | |
| Member: | |
| Member: | |
| Member, Mentor: | |