UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Dijana Mosić

UOPŠTENI INVERZI, FAKTORI USLOVLJENOSTI I PERTURBACIJE

Doktorska disertacija

Mentor
Prof. dr Dragan Djordjević

Niš, 2009.

Sadržaj

Predgovor

Moore-Penrose-ov inverz definisali su i ispitivali njegove osobine E. H. Moore 1920. godine i R. Penrose 1955. godine [55], pa je u njihovu čast i dobio ime. 1958. godine Drazin-ov inverz u semigrupi i asocijativnom prstenu prvi je predstavio M.P. Drazin [23].

Od sredine 50-ih godina prošlog veka publikovano je preko 2000 naučnih radova iz oblasti uopštenih inverza. Dajemo kratak pregled najvažnijih rezultata, relevantnih za ovu doktorsku disertaciju.

U radu [5], S.L. Campbell i C.D. Meyer istraživali su Drazin-ov inverz kompleksnih kvadratnih matrica 1979. godine.

R.E. Cline i T.N.E. Greville su proširili pojam Drazin-ovog inverza na pravougaone matrice definisanjem težinskog Drazin-ovog inverza u radu [11], 1980. godine. U radu [56], 1981. godine, S. Qiao proširuje pojam težinskog Drazin-ovog inverza u teoriji ograničenih linearnih operatora izmedju Banach-ovih prostora.

M.Z. Nashed i Y. Zhao su proširili pojam običnog Drazin-ovog inverza na zatvorene linearne operatore u radu [53], 1992. godine.

Generalisani Drazin-ov inverz u Banach-ovoj algebri je definisao i izučavao J.J. Koliha u [35], 1996. godine. J.J. Koliha i T.D. Tran su u radu [41] definisali generalisani Drazin-ov inverz zatvorenog operatora na Banach-ovom prostoru 2001. godine.

Uopštavanjem rezultata R.E. Cline-a i T.N.E. Greville-a u radu [11], V. Rakočević i Y. Wei su definisali i istraživali težinski Drazin-ov inverz ograničenih linearnih operatora izmedju Banach-ovih i Hilbert-ovih prostora [58], 2002. godine. U 2006. godini A. Dajić i J.J. Koliha [14] su definisali i izučavali težinski generalisani Drazin-ov inverz ograničenih linearnih operatora izmedju Banach-ovih prostora.

Drazin-ov inverz i generalisani Drazin-ov inverz imaju široku primenu, i to u teoriji linearnih jednačina, singularnim diferencijalnim i diferencnim jednačinama, kriptografiji, teoriji optimalne kontrole, lancima Markova, za odredjivanje rešenja sistema linearnih jednačina sa minimalnom normom, itd.

Ova doktorska disertacija se sastoji iz četiri glave, a svaka glava ima svoje odeljke.

U prvoj glavi, u odeljcima 1.1, 1.2 i 1.3, redom, dati su osnovni pojmovi i stavovi o uopštenim inverzima u prstenu, u teoriji operatora i teoriji kompleksnih matrica, koji se često koriste u ovom radu. U ovoj glavi su dati poznati rezultati. Preostale glave sadrže rezultate iz radova [46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

Druga glava se sastoji iz tri odeljka. Odeljci 2.1, 2.2 i 2.3 sadrže brojne karakterizacije EP elemenata, normalnih i hermitskih elemenata, redom, u prstenu sa involucijom u algebarskim terminima. Neke od ovih karakterizacija pokazane su u radovima S. Cheng-a i Y. Tian-a [10] ili O.M. Baksalary-a i G. Trenkler-a [1] za kompleksne matrice korišćenjem ranga matice ili odgovarajuće dekompozicije matrice. Analogni rezultati za ograničene linearne operatore na Hilbert-ovim prostorim dokazani su u radovima D.S. Djordjevića [17] i D.S. Djordjevića i J.J. Koliha-e [18] pomoću operatorskih matrica. Rezultati odeljka 2.1 dokazani su u zajedničkom radu sa D.S. Djordjevićem i J.J. Koliha-om [50], a odeljaka 2.2 i 2.3 u radu sa D.S. Djordjevićem [51].

U odeljku 3.1 definisani su težinski i težinski generalisani Drazin-ov inverz u prstenu i proučavane su njihove osobine, dokazana je glavna karakterizacija težinskog generalisanog Drazin-ovog inverza u prstenu. Data je matrična reprezentacija težinski generalisanog Drazin invertibilnog elementa u prstenu, pokazana u radu sa D.S. Djordjevićem [52]. Težinski Drazin-ov inverz su predstavili i istraživali V. Rakočević i Y. Wei u [58], a težinski generalisani Drazin-ov inverz A. Dajić i J. J. Koliha u [14]. Oba pomenuta rada razmatraju linearne ograničene operatore izmedju dva Banach-ova prostora. Sa malim izmenama nije teško videti da ti rezultati važe i u Banach-ovoj algebri takodje, što je napomenuto na kraju ovog odeljka. U odeljku 3.2 definisani su težinski EP elementi u prstenu sa involucijom i data je njihova glavna karakterizacija, koja je takodje rezultat iz rada [52].

Odeljak 3.3 sadrži aditivne osobine težinskog generalisanog Drazin-ovog inverza za ograničene linearne operatore izmedju Banach-ovih prostora. Data je eksplicitna formula za težinski generalisani Drazin-ov inverz $(A+B)^{d,W}$ u funkciji od $A, B, W, A^{d,W}, B^{d,W}$, pod odredjenim uslovima za operatore A, B i W. R.E. Hartwig, G. Wang i Y. Wei su proučavali izračunavanje Drazin-ovog inverza sume dve matrice u radu [33]. D.S. Djordjević i Y. Wei uopštili su te rezultate za ograničene linearne operatore na Banach-ovim prostorima [21]. N. Castro-Gonzalez i J.J. Koliha dokazali su aditivne rezultate za generalisani Drazin-ov inverz za elemente Banach-ove algebre [7]. Rezultati predstavljeni u ovom odeljku su pokazani u zajedničnom radu sa D.S. Djordjevićem [47].

U odeljku 4.1 razmatran je apsolutni faktor uslovljenosti operatora izmedju Hilbert-ovih prostora, koji je odredjen spoljašnjim inverzom datog operatora. H. Diao, M. Qin i Y. Wei su dali eksplicitnu formulu za izračunavanje faktora uslovljenosti spoljašnjeg $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja ograničenog linearnog sistema za kompleksne matrice u [15]. U radu [45] data je procena faktora uslovljenosti težinskog Drazin-ovog rešenja linearnog sistema za linearne ograničene operatore izmedju Hilbert-ovih prostora. U radu [46] proširili smo rezultate dokazane u [15] i [45] na linearne ograničene operatore izmedju Hilbert-ovih prostora, i te rezultate prikazujemo u odeljku 4.1.

Na početku odeljka 4.2 predstavljena je eksplicitna formula za izračunavanje faktora uslovljenosti W–težinskog Drazin-ovog inverza pravougaone matrice korišćenjem Schur-ove dekompozicije i spektralne norme. Pomoću spektralne norme i Frobenius-ove norme data je karakterizacija relativnog faktora uslovljenosti W–težinskog Drazin-ovog inverza i faktora uslovljenosti nivoa-2 W–težinskog Drazin-ovog inverza. Predstavljena je i osetljivost W–težinskog Drazin-ovog rešenja linearnog sistema. Na kraju ovog odeljka data je struktuirana perturbacija W–težinskog Drazin-ovog inverza. U radu [9], J. Chen i Z. Xu proučavali su faktor uslovljenosti Drazin-ovog inverza i singularnog linearnog sistema za matrice, pomoću Schur-ove dekompozicije i spektralne norme. Odeljak 4.2 sadrži rezultate koji su objavljeni u radu sa D.S. Djordjevićem [48] i oni predstavljaju uopštenje rezultata iz rada [9].

U odeljku 4.3 data je formula za izračunavanje faktora uslovljenosti kompleksne matrice, koji je odredjen spoljašnjim inverzom date matrice. Koristili smo Schur-ovu dekompoziciju matrice. Data je i karakterizacija spektralnom normom i Frobenius-ovom normom relativnog faktora uslovljenosti generalisanog inverza. Razmatrana je osetljivost uopštenog rešenja linearnog sistema, kao i struktuirana perturbacija generalisanog inverza. U radu [15], H. Diao, M. Qin, Y. Wei su izučavali faktor uslovljenosti generalisanog inverza i uopštenog rešenja linearnog sistema, korišćenjem Jordan-ovog kanonskog oblika i tzv. PQ-norme. Rezultati ovog odeljka su iz rada sa D.S. Djordjevićem [49], i oni proširuju rezultate iz radova [48] i [15].

Zadovoljstvo mi je i čast sa se zahvalim mentoru profesoru dr Draganu S. Djordjeviću na velikoj i svesrdnoj pomoći koju mi je pružio u naučnom radu, procenjujući rezultate do kojih smo dolazili, kao i na strpljenju i pomoći koju mi je pružio tokom izrade ove disertacije, dajući korisne primedbe i sugestije.

Glava 1

Uvod

1.1 Uopšteni inverzi u prstenu

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom 1. Element $x \in \mathcal{R}$ je inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ ako je $ax = xa = 1$ i tada kažemo da je element a invertibilan. Inverz elementa a je označen sa a^{-1}, a skup svih invertibilnih elementa prstena $\mathcal{R}$ sa $\mathcal{R}^{-1}$. Element $a \in \mathcal{R}$ je nilpotentan ako je $a^n = 0$ za neko $n \in N$. Najmanje takvo n je indeks nilpotentnosti elementa a. Skup svih nilpotentnih elementa u prstenu $\mathcal{R}$ označen je sa $\mathcal{R}^{nil}$. Element $p \in \mathcal{R}$ je idempotent ako je $p^2 = p$. Skup svih idempotenata u $\mathcal{R}$ označavamo sa $\mathcal{R}^{\bullet}$.

Definicija 1.1.1 *Element $a \in \mathcal{R}$ je regularan ako ima unutrašnji inverz x, tj. ako postoji $x \in \mathcal{R}$ tako da je $axa = a$.*

Proizvoljan unutršnji inverz elementa a označavamo sa a^-, a skup svih regularnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$ sa $\mathcal{R}^-$. Uočimo da je $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^-$.

Definicija 1.1.2 *Neka su $a, x \in \mathcal{R}$. Ako je $xax = x$, tada je x spoljašnji inverz od a.*

Definicija 1.1.3 *Ako je $x \in \mathcal{R}$ unutrašnji i spoljašnji inverz od $a \in \mathcal{R}$, tada se x naziva refleksivni generalisani inverz od a.*

Ako je x unutršnji inverz elementa $a \in \mathcal{R}$, lako se proverava da je tada xax refleksivni generalisani inverz od a. Prema tome regularni element u prstenu uvek ima refleksivni generalisani inverz.

Definicija 1.1.4 *Neka je $a \in \mathcal{R}$. Drazin-ov inverz od a je element $x \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava sledeće uslove:*

$$ax = xa, \qquad xax = x, \qquad a(ax-1) \in \mathcal{R}^{nil}.$$

Ako postoji Drazin-ov inverz x elementa a, onda je on jedinstven i označava se sa a^D i tada kažemo da je element a Drazin invertibilan. Skup svih Drazin invertibilnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$ označen je sa $\mathcal{R}^D$. Uslov $a(ax-1) \in \mathcal{R}^{nil}$ je ekvivalentan sa $a^{n+1}x = a^n$ za neki nenegativan ceo broj n. Najmanji nenegativan ceo broj n koji zadovoljava prethodni uslov je Drazin-ov indeks elementa a.

Za element $b \in \mathcal{R}$ skup komutativnih i skup dvostruko komutativnih elemenata sa b, respektivno, su definisani na sledeći način:

$$\mathrm{comm}(b) = \{x \in \mathcal{R} : bx = xb\},$$

$$\mathrm{comm}^2(b) = \{x \in \mathcal{R} : xy = yx \text{ za svako } y \in \mathrm{comm}(b)\}.$$

U radu [29], R.E. Harte je definisao kvazinilpotentne elemente u prstenu $\mathcal{R}$ sledeći način:

Definicija 1.1.5 *Element $a \in \mathcal{R}$ je kvazinilpotentan, ako je $1 + xa \in \mathcal{R}^{-1}$, za svako $x \in \mathrm{comm}(a)$.*

Koristićemo simbol $\mathcal{R}^{qnil}$ da označimo skup svih kvazinilpotentnih elemenata u $\mathcal{R}$.

U sledećoj definiciji predstavljeni su kvazipolarni elementi u prstenu.

Definicija 1.1.6 [39] *Element $a \in \mathcal{R}$ je kvazipolaran ako postoji element $p \in \mathcal{R}$ takav da je*

$$p^2 = p, \qquad p \in \mathrm{comm}^2(a), \qquad ap \in \mathcal{R}^{qnil}, \qquad a + p \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Ako je a kvazipolaran element i $ap \in \mathcal{R}^{nil}$ sa indeksom nilpotentnosti k, onda je a polaran element reda k. Element p, odredjen uslovima u prethodnoj definiciji, naziva se spektralni idempotent elementa a i označava se sa a^π.

Definicija 1.1.7 *Neka je $a \in \mathcal{R}$. Generalisani Drazin-ov inverz (ili g-Drazin-ov inverz) od a je element $x \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava sledeće uslove:*

$$x \in \mathrm{comm}^2(a), \quad xax = x, \quad a(ax-1) \in \mathcal{R}^{qnil}.$$

Ako generalisani Drazin-ov inverz od a postoji, onda je on jedinstven i označava se sa a^d, a element a je generalisani Drazin invertibilan (ili g-Drazin invertibilan). Ako je $a(ax-1) \in \mathcal{R}^{nil}$, onda je a Drazin invertibilan element i $a^d = a^D$. Ako je a polaran element u prstenu ili je element u Banach-ovoj algebri, onda je dovoljno pretpostaviti da je $x \in \mathrm{comm}(a)$ umesto da je $x \in \mathrm{comm}^2(a)$. Sa $\mathcal{R}^d$ označavamo skup svih generalisanih Drazin invertibilnih elementa u $\mathcal{R}$.

U sledećoj teoremi data je ekvivalencija izmedju kvazipolarnih elemenata i g-Drazin invertibilnih elemenata u prstenu $\mathcal{R}$.

Teorema 1.1.1 [39] *Element $a \in \mathcal{R}$ je generalisani Drazin invertibilan ako i samo ako je element a kvazipolaran. U ovom slučaju $a \in \mathcal{R}$ ima jedinstveni generalisani Drazin-ov inverz a^d dat pomoću jednakosti*

$$a^d = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi).$$

Na osnovu prethodne teoreme je a^π jedinstveni spektralni idempotent od a i $a^\pi = 1 - aa^d$.

g-Drazin-ov indeks $ind(a)$ kvazipolarnog elementa $a \in \mathcal{R}$ definisan je na sledeći način:

$$ind(a) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } a \in \mathcal{R}^{-1}, \\ k, & \textit{ako je } a(ax-1) \textit{ nilpotent indeksa } k \in N, \\ \infty, & \textit{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Ako je $ind(a) = 0$, onda je a invertibilan element i $a^d = a^{-1}$. Ako je $ind(a) = 1$, g-Drazin-ov inverz od a se naziva grupni inverz i označava sa $a^\#$. Skup svih elemenata koji imaju grupni inverz u $\mathcal{R}$ je označen sa $\mathcal{R}^\#$. Uočimo da je g-Drazin-ov indeks od $a \in \mathcal{R}$ konačan ako i samo ako je element a polaran. Dakle, svaki polaran element je g-Drazin invertibilan, ali kvazipolaran element ima Drazin-ov inverz ako i samo ako je njegov indeks konačan. Primetimo da je

$$\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^\# \subseteq \mathcal{R}^D \subseteq \mathcal{R}^d.$$

Operatorske matrice su korisna stvar u istraživanjima Drazin-ove invertibilnosti ograničenih linearnih operatora na Banach-ovim prostorima. U prstenima možemo koristiti idempotente kako bi predstavili elemente u matričnom obliku. Neka je $a \in \mathcal{R}$ i $p, q \in \mathcal{R}^\bullet$. Tada možemo zapisati

$$a = paq + pa(1-q) + (1-p)aq + (1-p)a(1-q)$$

i koristiti oznake

$$a_{11} = paq, \quad a_{12} = pa(1-q), \quad a_{21} = (1-p)aq, \quad a_{22} = (1-p)a(1-q).$$

Prema tome, elementi $p, q \in \mathcal{R}^\bullet$ indukuju reprezentaciju proizvoljnog elementa $a \in \mathcal{R}$, koja je data na sledeći način pomoću matrica:

$$a = \begin{bmatrix} paq & pa(1-q) \\ (1-p)aq & (1-p)a(1-q) \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{p,q}.$$

Poznato je da $a \in \mathcal{R}^d$ može biti predstavljen na sledeći način pomoću matrica

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p,p},$$

u odnosu na $p = aa^d = 1 - a^\pi$, gde je a^π spektralni idempotent od a. Tada je a_1 invertibilan u $p\mathcal{R}p$ i a_2 je kvazinilpotentan u $(1-p)\mathcal{R}(1-p)$. Sada je generalisani Drazin-ov inverz od a dat sa

$$a^d = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p,p}.$$

Involucija je preslikavanje $a \mapsto a^*$ u prstenu $\mathcal{R}$ za koje važi

$$(a^*)^* = a, \ (a+b)^* = a^* + b^*, \ (ab)^* = b^*a^*, \ 0^* = 0, \ 1^* = 1.$$

Element $a \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava jednakost $aa^* = a^*a$ naziva se normalan. Element $a \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava jednakost $a^* = a$ naziva se hermitski (ili simetričan).

Definicija 1.1.8 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijon i neka je $a \in \mathcal{R}$. Element $b \in \mathcal{R}$ je Moore-Penrose-ov inverz (ili MP-inverz) od a, ako zadovoljava sledeće jednakosti:*

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (ab)^* = ab, \quad (ba)^* = ba.$$

Ako postoji element b, onda je on jedinstven, ([13]), i označava se sa $a^\dagger$, a element a je Moore-Penrose invertibilan (ili MP-invertibilan). Skup svih Moore-Penrose invertibilnih elementa u $\mathcal{R}$ biće označen sa $\mathcal{R}^\dagger$.

Definicija 1.1.9 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom i neka su e, f dva invertibilna elementa u $\mathcal{R}$. Element $a \in \mathcal{R}$ ima težinski MP-inverz sa težinama e, f ako postoji element $b \in \mathcal{R}$ tako da je*

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (eba)^* = eba, \quad (fab)^* = fab.$$

Element $a \in \mathcal{R}$ može imati najviše jedan težinski MP-inverz sa težinama e, f [13]. Jedinstveni težinski MP-inverz sa težinama e, f, biće označen sa $a^\dagger_{e,f}$, ako postoji. Skup svih težinskih MP-invertibinih elemenata u $\mathcal{R}$ sa težinama e, f biće označen sa $\mathcal{R}^\dagger_{e,f}$.

Definicija 1.1.10 *Element $a \in \mathcal{R}$ je *-skrativ ako*

$$a^*ax = 0 \Rightarrow ax = 0 \quad \text{i} \quad xaa^* = 0 \Rightarrow xa = 0. \tag{1.1}$$

Primenom involucije na (1.1), uočavamo da je element a *-skrativ ako i samo ako je a^* *-skrativ. U C^*-algebri svi elementi su *-skrativi.

Teorema 1.1.2 [39] *Neka je $a \in \mathcal{R}$. Tada je $a \in \mathcal{R}^\dagger$ ako i samo ako je a *-skrativ i a^*a ima grupni inverz.*

Teorema 1.1.3 [39] *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom. Tada je a generalisani Drazin invertibilan element ako i samo ako je a^* generalisani Drazin invertibilan element. U ovom slučaju je $(a^*)^d = (a^d)^*$.*

Teorema 1.1.4 [20] *Za $a \in \mathcal{R}^\dagger$ sledeće jednakosti važe:*

(a) $(a^\dagger)^\dagger = a$;

(b) $(a^*)^\dagger = (a^\dagger)^*$;

(c) $(a^*a)^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*$;

(d) $(aa^*)^\dagger = (a^\dagger)^*a^\dagger$;

(f) $a^* = a^\dagger aa^* = a^*aa^\dagger$;

(g) $a^\dagger = (a^*a)^\dagger a^* = a^*(aa^*)^\dagger = (a^*a)^\# a^* = a^*(aa^*)^\#$;

(h) $(a^*)^\dagger = a(a^*a)^\dagger = (aa^*)^\dagger a$.

U nastavku koristićemo sledeću definiciju EP elementa [39].

Definicija 1.1.11 *Element a u prstenu $\mathcal{R}$ sa involucijom je EP ako je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$ i $a^\# = a^\dagger$.*

Sledeći rezultat je pokazan u radu [39].

Teorema 1.1.5 *Element $a \in \mathcal{R}$ je EP ako i samo ako za a postoji grupni inverz i jedan od sledećih ekvivalentnih uslova važi:*

(a) $a^\# a$ *je simetričan element;*

(b) $(a^\#)^* = aa^\#(a^\#)^*$;

(c) $(a^\#)^* = (a^\#)^* a^\# a$;

(d) $a^\#(a^\pi)^* = a^\pi(a^\#)^*$.

1.2 Uopšteni inverzi operatora

Neka su X i Y proizvoljni Banach-ovi prostori. Označimo sa $\mathcal{B}(X,Y)$ skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y, a sa $\mathcal{B}(X)$ skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u X. Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Nula prostor (nulti prostor ili jezgro) operatora A, označava se sa $N(A)$, i jeste $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Slika operatora A, označava se sa $R(A)$, i jeste $R(A) = \{Ax : x \in X\}$.

Definicija 1.2.1 *Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Ako postoji operator $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ tako da je $ABA = A$, onda je B unutrašnji inverz operatora A, a operator A je regularan.*

Ako je $BAB = B$ za neko $B \in \mathcal{B}(Y,X)$, $B \neq 0$, onda je B spoljašnji inverz operatora A.

Ako je $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ unutrašnji i spoljašnji inverz operatora A, tada je B refleksivni generalisani inverz od A.

Operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je regularan ako i samo ako su $N(A)$ i $R(A)$ zatvoreni i komplementarni potprostori od X i Y, respektivno. Ako su X i Y Hibert-ovi prostori, tada je A regularan ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren. Unutrašnji inverz operatora nije jedinstven ako fiksiramo sliku i jezgro kod unutrašnjeg inverza. Refleksivni generalisani inverz je jedinstveno odredjen svojom slikom i nula prostorom. Ovo je takodje osobina spoljašnjeg inverza.

Nenula operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ uvek ima nenula spoljašnji inverz $B \in \mathcal{B}(Y,X)$. Ako je $BAB = B$, $T = R(B)$ i $S = N(B)$, tada je B poznat kao $A^{(2)}_{T,S}$ generalisani inverz od A. Za date potprostore T od X i S od Y, postoji generalisani inverz $A^{(2)}_{T,S}$ od A ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi: T, S i $A(T)$ su zatvoreni komplementarni potprostori od X, Y i Y respektivno, restrikcija $A_1 = A|_T : T \to A(T)$ je invertibilan operator i $A(T) \oplus S = Y$. U tom slučaju generalisani inverz $A^{(2)}_{T,S}$ je jedinstveno odredjen i oznake su opravdane. Sledeća jednakost važi $T = R(A^{(2)}_{T,S}) = R(A^{(2)}_{T,S}A)$. Dakle, označavamo $T_1 = N(A^{(2)}_{T,S}A) \subset X$ i $S_1 = A(T) \subset Y$. Sada sledi da je

$$X = T \oplus T_1 \quad \text{and} \quad Y = S_1 \oplus S.$$

Matrična dekompozicija operatora A je sledećeg oblika:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ T_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} S_1 \\ S \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

pri čemu je $A_1 \in \mathcal{B}(T, S_1)$ invertibilan operator. Lako se proverava da je sada

$$A^{(2)}_{T,S} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} S_1 \\ S \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T \\ T_1 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Koristićemo simbol $\mathcal{B}(X,Y)_{T,S}$ da označimo skup svih operatora $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, takvih da $A^{(2)}_{T,S}$ postoji. Ovde pretpostavljamo da su T i S, respektivno, zatvoreni podskupovi od X i Y.

Teorema 1.2.1 [22] *Neka za operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i zatvorene potprostore $T \subset X$ i $S \subset Y$ postoji spoljašnji inverz $A^{(2)}_{T,S} \in \mathcal{B}(Y,X)$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(a) *Postoji spoljašnji inverz $B^{(2)}_{T,S} \in \mathcal{B}(Y,X)$, koji zadovoljava $AA^{(2)}_{T,S} = BB^{(2)}_{T,S}$ i $A^{(2)}_{T,S}A = B^{(2)}_{T,S}B$.*

(b) *$BA^{(2)}_{T,S}A = AA^{(2)}_{T,S}B$ i postoji spoljašnji inverz $(BA^{(2)}_{T,S}A)^{(2)}_{T,S}$.*

(c) *$BA^{(2)}_{T,S}A = AA^{(2)}_{T,S}B$ i $I + A^{(2)}_{T,S}(B-A)$ je invertibilan.*

Dalje, ako su prethodna tvrdjenja zadovoljena, tada je

$$B^{(2)}_{T,S} = [I + A^{(2)}_{T,S}(B-A)]^{-1}A^{(2)}_{T,S}.$$

Sa $\rho(A)$, $\sigma(A)$ i $r(A)$ označimo rezolventni skup, spektar i spektralni radijus operatora $A \in \mathcal{B}(X)$, respektivno. Skupove svih izolovanih tačaka i tačaka nagomilavanja spektra obeležavamo sa iso $\sigma(A)$ i acc $\sigma(A)$. Ako je $\lambda \in \rho(A)$, onda je $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ rezolventa od A.

Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Jednostavno je u algebri $\mathcal{A}$ preneti pojmove uopštene invertibilnosti, koje smo opisali u prstenima.

U Banach-ovoj algebri $\mathcal{A}$ važi sledeća karakterizacija kvazinilpotentnih elemenata [29]:

$$a \in \mathcal{A}^{qnil} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = 0.$$

Prema tome, u Banach-ovoj algebri $\mathcal{B}(X)$ je operator A kvazinilpotentan ako i samo ako je $r(A) = 0$, odnosno $\sigma(A) = 0$.

Lema 1.2.1 [28, 35] *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Tada je element $a \in \mathcal{A}$ kvazipolaran (polaran) ako i samo ako postoji $b \in \mathcal{A}$ tako da je*

$$ab = ba, \qquad bab = b, \qquad a - aba \in \mathcal{A}^{qnil} \ (a - aba \in \mathcal{A}^{nil}).$$

Element b, ako postoji, jeste jedinstven.

U tom slučaju, b je generalisani Drazin-ov inverz ili Koliha-Drazin-ov inverz od a u Banach-ovoj algebri $\mathcal{A}$ i označava sa a^d.

Operator $A \in \mathcal{B}(X)$ je g–Drazin invertibilan ako i samo je operator A kvazipolaran, odnosno, ako i samo ako $0 \notin acc\ \sigma(A)$.

Neka je $A \in \mathcal{B}(X)$. Uspon operatora A, označen sa $asc(A)$, je najmanji nenegativan ceo broj n takav da je $N(T^n) = N(T^{n+1})$, ili je $asc(A) = \infty$ ukoliko takav broj n ne postoji. Analogno, pad operatora A, označen sa $dsc(A)$, je najmanji nenegativan ceo broj n takav da je $R(T^n) = R(T^{n+1})$, ili je $dsc(A) = \infty$ ukoliko takav broj n ne postoji.

Operator $A \in \mathcal{B}(X)$ je Drazin invertibilan ako i samo ako su uspon i pad operatora A konačni brojevi. U tom slučaju je $n = ind(A) = asc(A) = dsc(A)$, potprostori $R(A^k)$ i $N(A^k)$ su zatvoreni i prostor X je njihova topološka direktna suma, tj. $X = R(A^k) \oplus N(A^k)$.

Definicija 1.2.2 *Neka su $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ nenula operatori. Ako postoji neki operator $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ koji zadovoljava jednakosti*

$$(AW)^{k+1}BW = (AW)^k, \qquad BWAWB = B, \qquad AWB = BWA,$$

za neki nenegativan ceo broj k, tada se B naziva W-težinski Drazin-ov inverz od A i označen je sa $B = A^{D,W}$.

Ako postoji $A^{D,W}$, tada je operator A W-Drazin invertibilan i $A^{D,W}$ mora biti jedinstven [58, 59, 61]. Ako je $X = Y$, $A \in \mathcal{B}(X)$ i $W = I$, tada je $B = A^D$, uobičajeni Drazin-ov inverz od A.

Neka je sa $\mathcal{B}_W(X,Y)$ označen prostor $\mathcal{B}(X,Y)$ sanbdeven množenjem $A * B = AWB$ i normom $\|A\|_W = \|A\|\|W\|$. Tada je $\mathcal{B}_W(X,Y)$ Banach-ova algebra [14]. $\mathcal{B}_W(X,Y)$ ima jedinicu ako i samo ako je operator W invertibilan, i u tom slučaju je W^{-1} jedinica.

Definicija 1.2.3 [14] *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ fiksirani nenula operator. Operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je Wg–Drazin invertibilan ako je A kvazipolaran u Banacho-voj algebri $\mathcal{B}_W(X,Y)$. Wg–Drazin-ov inverz (ili W-težinski g-Drazin-ov inverz) $A^{d,W}$ od A je tada definisan kao g–Drazin-ov inverz B od A u Banach-ovoj algebri $\mathcal{B}_W(X,Y)$. Polarni element u $B_W(X,Y)$ se naziva W-Drazin invertibilan, sa W-Drazin-ovim inverzom $A^{D,W} = B$.*

Wg-Drazin-ov inverz $A^{d,W}$ operatora $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je jedinstven, ako postoji, na osnovu jedinstvenosti g–Drazin-ovog inverza od A u Banach-ovoj algebri $\mathcal{B}_W(X,Y)$.

Podsetimo se da ako je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ fiksirani nenula operator i $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, onda su sledeći uslovi ekvivalentni [14]:

(1) A je Wg-Drazin invertibilan operator,

(2) AW je kvazipolaran operator u $\mathcal{B}(Y)$ i $(AW)^d = A^{d,W}W$,

(3) WA je kvazipolar operator u $\mathcal{B}(X)$ i $(WA)^d = WA^{d,W}$.

Wg-Drazin-ov inverz $A^{d,W}$ od A onda zadovoljava

$$A^{d,W} = ((AW)^d)^2A = A((WA)^d)^2.$$

Na osnovu rada [14] poznata je sledeća dekompozicija W-težinskog g-Drazin-ovog inverza operatora.

Teorema 1.2.2 *Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i $W \in \mathcal{B}(Y,X)\backslash\{0\}$. Tada operator A je Wg-Drazin invertibilan ako i samo ako postoje direktne topološke sume $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$ tako da je*

$$A = A_1 \oplus A_2, \qquad W = W_1 \oplus W_2, \tag{1.4}$$

gde $A_i \in \mathcal{B}(X_i,Y_i)$, $W_i \in \mathcal{B}(Y_i,X_i)$, pri čemu su A_1, W_1 invertibilni, a W_2A_2 i A_2W_2 kvazinilpotentni u $\mathcal{B}(X_2)$ i $\mathcal{B}(Y_2)$, respektivno. Wg-Drazin-ov inverz operatora A je dat na sledeći način

$$A^{D,W} = (W_1A_1W_1)^{-1} \oplus 0 \tag{1.5}$$

gde $(W_1A_1W_1)^{-1} \in \mathcal{B}(X_1,Y_1)$ i $0 \in \mathcal{B}(X_2,Y_2)$.

U nastavku ovog odeljka su dati ranije dokazani aditivni rezultati koji će nam biti potrebni.

Lema 1.2.2 [21] *Ako su $A \in \mathcal{B}(X)$ i $B \in \mathcal{B}(Y)$ g–Drazin invertibilni, $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ i $D \in \mathcal{B}(X,Y)$, tada su*

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad i \quad N = \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}$$

takodje g–Drazin invertibilni i

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & S \\ 0 & B^d \end{bmatrix}, \quad N^d = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ R & B^d \end{bmatrix},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} S &= (A^d)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (A^d)^n C B^n \right] (I - BB^d) + \\ &+ (I - AA^d) \left[\sum_{n=0}^{\infty} A^n C (B^d)^n \right] (B^d)^2 - A^d C B^d \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} R &= (B^d)^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (B^d)^n D A^n \right] (I - AA^d) + \\ &+ (I - BB^d) \left[\sum_{n=0}^{\infty} B^n D (A^d)^n \right] (A^d)^2 - B^d D A^d. \end{aligned}$$

Lema 1.2.3 [21] *Ako su $P, Q \in \mathcal{B}(X)$ kvazinilpotentni i $PQ = 0$ ili $PQ = QP$, tada je $P+Q$ takodje kvazinilpotentan. Dakle, $(P+Q)^d = 0$.*

Lema 1.2.4 [21] *Ako je $P \in \mathcal{B}(X)$ g–Drazin invertibilan, $Q \in \mathcal{B}(X)$ kvazinilpotentan i $PQ = 0$, tada je $P + Q$ g–Drazin invertibilan i*

$$(P + Q)^d = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i (P^d)^{i+1}.$$

Lema 1.2.5 *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna Banach-ova algebra sa jedinicom 1 i neka je p idempotent u $\mathcal{A}$. Ako je $x \in p\mathcal{A}p$, tada je $\sigma_{p\mathcal{A}p}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, gde $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ označava spektar elementa x u algebri $\mathcal{A}$, a $\sigma_{p\mathcal{A}p}(x)$ označava spektar elementa x u algebri $p\mathcal{A}p$.*

Definicija 1.2.4 *Neka su X i Y Hilbert-ovi prostori i $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Moore-Penrose-ov inverz od A je jedinstven operator $A^\dagger \in \mathcal{B}(Y, X)$ koji zadovolja sledeće jednakosti:*

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger, \quad (AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \quad (A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$$

Moore-Penrose-ov inverz operatora $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ postoji ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren potrostor.

Teorema 1.2.3 *Neka su X i Y Hilbert-ovi prostori, i neka su operatori $E \in \mathcal{B}(Y)$ i $F \in \mathcal{B}(X)$ pozitivni (i invertibilni). Ako $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ima zatvorenu sliku, tada postoji jedinstven operator $A^{\dagger}_{E,F} \in \mathcal{B}(Y,X)$ koji zadovolja sledeće jednakosti:*

$$AA^{\dagger}_{E,F}A = A, \quad A^{\dagger}_{E,F}AA^{\dagger}_{E,F} = A^{\dagger}_{E,F},$$

$$(EAA^{\dagger}_{E,F})^* = EAA^{\dagger}_{E,F}, \quad (FA^{\dagger}_{E,F}A)^* = FA^{\dagger}_{E,F}A.$$

Operator $A^{\dagger}_{E,F}$ je težinski Moore-Penrose-ov inverz od A.

1.3 Uopšteni inverzi kompleksnih matrica

Neka je $\mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ skup $m \times n$ kompleksnih matrica. Sa $rank(A)$, $A^{\top}$, A^*, $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{N}(A)$ označavamo rang, transponovanu matricu, konjugovano transponovanu matricu, sliku (prostor kolona) i jezgro, respektivno, matrice $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$.

Neka je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$. Tada najmanji nenegativan ceo broj k, koji zadovoljava jedankost $rank(A^{k+1}) = rank(A^k)$, jeste indeks od A i označen je sa $ind(A)$.

Definicija 1.3.1 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$. Matrica $X \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$ koja zadovoljava jednakost $AXA = A$ je $\{1\}$–inverz od A i označava se sa $X = A^{(1)}$.*

Definicija 1.3.2 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ ranga r, neka je T potprostor od $\mathbf{C}^{\mathbf{n}}$ dimenzije $s \leq r$, i neka je S potprostor od $\mathbf{C}^{\mathbf{m}}$ dimenzije $m - s$. Ako matrica $X \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$ zadovoljava uslove*

$$XAX = X, \quad \mathcal{R}(X) = T, \quad \mathcal{N}(X) = S,$$

tada je X spoljašnji inverz ili generalisani inverz od A i označava sa $X = A^{(2)}_{T,S}$.

Glavna karakterizacija $A^{(2)}_{T,S}$-generalisanog inverza je data u sledećoj lemi.

Lema 1.3.1 [2] *Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$ ranga r, neka je T potprostor od $\mathbf{C^n}$ dimenzije $s \leq r$, i neka je S potprostor od $\mathbf{C^m}$ dimenzije $m - s$. Tada A ima spoljašnji inverz X takav da je $\mathcal{R}(X) = T$ i $\mathcal{N}(X) = S$ ako i samo ako je $AT \oplus S = \mathbf{C^m}$, u tom slučaju je $X = A^{(2)}_{T,S}$ jedinstven.*

Takodje su nam potrebni i naredni rezultati.

Lema 1.3.2 [62] *Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$ ranga r, neka je T potprostor od $\mathbf{C^n}$ dimenzije $s \leq r$, i neka je S potprostor od $\mathbf{C^m}$ dimenzije $m - s$. Dalje, pretpostavimo da za $G \in \mathbf{C^{n\times m}}$ važi $\mathcal{R}(G) = T$ i $\mathcal{N}(G) = S$. Ako A ima spoljašnji inverz $A^{(2)}_{T,S}$, tada je $ind(AG) = ind(GA) = 1$. Dalje, sledi da je*

$$A^{(2)}_{T,S} = (GA)^{\#}G = G(AG)^{\#}. \tag{1.6}$$

Lema 1.3.3 [44] *Ako A zadovoljava uslove Leme 1.3.2, tada je*

$$rank(AG) = rank(GA) = rank(G).$$

Definicija 1.3.3 *Neka je $A \in \mathbf{C^{n\times n}}$. Ako je $ind(A) = k$, tada postoji jedinstvena matrica $A^D \in \mathbf{C^{n\times n}}$ koja zadovoljava sledeće jednakosti:*

$$A^k A^D A = A^k, \quad A^D A A^D = A^D, \quad AA^D = A^D A,$$

i predstavlja Drazin-ov inverz matrice A.

Ako je $ind(A) = 1$, onda matrica A ima grupni inverz A^D koji označavamo sa $A^{\#}$. U tom slučaju, prva jednakost u Definiciji 1.3.1 je oblika $AA^{\#}A = A$. Dalje, $ind(A) = 0$ ako i samo ako je matrica A invertibilna, i u tom slučaju je $A^{-1} = A^D$. Primetimo da se u teoriji matrica generalisani Drazin-ov inverz svodi na običan Drazin-ov inverz.

Definicija 1.3.4 *Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$ i $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$. Ako je $k = ind(AW)$, tada je $A^{D,W} = X \in \mathbf{C^{m\times n}}$ jedinstven W-težinski Drazin-ov inverz od A ako je*

$$(AW)^{k+1}XW = (AW)^k, \quad XWAWX = X, \quad AWX = XWA.$$

Ako je $A \in \mathbf{C^{n\times n}}$ i $W = I_n$, onda je $X = A^D$običan Drazin-ov inverz od A.

Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$ i $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$. Tada težinski W-Drazin-ov inverz $A^{D,W}$ od A ima sledeće osobine:

$$A^{D,W} = [(AW)^D]^2 A = A[(WA)^D]^2,$$

$$\mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}((AW)^k), \quad \mathcal{N}(A^{D,W}) = \mathcal{N}((WA)^k),$$
$$rank((AW)^k) = rank((WA)^k),$$

gde je $k = \max\{ind(AW), ind(WA)\}$.

Definicija 1.3.5 *Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$. Moore-Penrose-ov inverz matrice A je jedinstvena matrica $A^\dagger \in \mathbf{C^{n\times m}}$ takva da je*

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad (AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \quad (A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$$

Moore-Penrose-ov inverz matrice uvek postoji.

Definicija 1.3.6 *Neka je $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$ i neka su E i F hermitske pozitivne matrice reda m i n, respektivno. Težinski Moore-Penrose-ov inverz matrice A je jedinstvena matrica $A^\dagger_{E,F} \in \mathbf{C^{n\times m}}$ takva da je*

$$AA^\dagger_{E,F}A = A, \quad A^\dagger_{E,F}AA^\dagger_{E,F} = A^\dagger_{E,F},$$

$$(EAA^\dagger_{E,F})^* = EAA^\dagger_{E,F}, \quad (FA^\dagger_{E,F}A)^* = FA^\dagger_{E,F}A.$$

Težinski Moore-Penrose-ov inverz $A^\dagger_{E,F}$ je generalizacija Moore-Penrose-ov inverz $A^\dagger$. Ako je $E = I_m$ i $N = I_n$, tada je $A^\dagger_{I_m,I_n} = A^\dagger$.

Glava 2

Hermitski, normalni i EP elementi

2.1 EP elementi u prstenu sa involucijom

EP matrice i EP linearni operatori na Banach-ovim ili Hilbert-ovim prostorima istraživani su od strane mnogih autora (videti, na primer, [1, 2, 3, 4, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 31, 37, 38, 42], EP znači "equal power"). U ovom odeljku koristimo osobine prstena sa involucijom da istražimo EP elemente, dokazujemo nove karakterizacije, i na drugi način dokazujemo već postojeće karakterizacije.

U ovom odeljku data je karakterizacija EP elemenata u prstenu sa involucijom pomoću uslova koji sadrže njihov grupni i Moore–Penrose-ov inverz. Neki od ovih rezultata su dokazani u radu S. Cheng-a i Y. Tian-a [10], ili u radu O.M. Baksalary-a i G. Trenkler-a [1] za kompleksne matrice, korišćenjem uglavnom ranga matrice ili druge konačno dimenzionalne metode. Analogni rezultati su dokazani u radovima D.S. Djordjevića [17] i D.S. Djordjevića i J.J. Kolihe [18] za linearne operatore na Hilbert-ovim prostorima, korišćenjem operatorskih matrica. U nastavku pokazujemo da ni rang (u konačno dimenzionalnom slučaju) ni osobine operatorskih matrica (u beskonačno dimenzionalnom slučaju) nisu neophodne za karakterizaciju EP elemenata. Rezultati ovog odeljka objavljeni su u zajedničkom radu sa D.S. Djordjevićem i J.J. Koliha-om [50].

EP elementi su vrlo važni jer njih karakteriše komutativnost sa Moore–Penrose-ovim inverzom. Sledeći rezultat je dobro poznat za matrice, operatore na Hilbert-ovom prostoru i elemente C^*-algebre, a takodje je tačan u prstenu sa involucijom:

Lema 2.1.1 *Element $a \in \mathcal{R}$ je EP ako i samo ako je $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i $aa^\dagger = a^\dagger a$.*

Primetimo da je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$ ako i samo ako je $a^* \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$, te je a EP ako i samo ako je a^* EP. Za ostale komentare u vezi sa definicijom EP elemenata videti poslednji deo ovog odeljka.

U sledećoj teoremi predstavljamo 34 potrebnih i dovoljnih uslova da element a u prstenu sa involucijom bude EP. Ovi uslovi su dobro poznati u specijalnim slučajevima kao što su matrice i operatori na Hilbert-ovim prostorima ([1], [10], [17] i [18]).

Teorema 2.1.1 *Element $a \in \mathcal{R}$ je EP ako i samo ako je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$ i jedan od sledećih ekvivalentnih uslova je zadovoljen:*

(i) $aa^\dagger a^\# = a^\dagger a^\# a$;

(ii) $aa^\dagger a^\# = a^\# aa^\dagger$;

(iii) $a^* aa^\# = a^*$;

(iv) $aa^\# a^* = a^* aa^\#$;

(v) $aa^\# a^\dagger = a^\dagger aa^\#$;

(vi) $aa^\# a^\dagger = a^\# a^\dagger a$;

(vii) $a^\dagger aa^\# = a^\# a^\dagger a$;

(viii) $(a^\dagger)^2 a^\# = a^\dagger a^\# a^\dagger$;

(ix) $a^\dagger a^\# a^\dagger = a^\# (a^\dagger)^2$;

(x) $a^\dagger (a^\#)^2 = a^\# a^\dagger a^\#$;

(xi) $a^\dagger (a^\#)^2 = (a^\#)^2 a^\dagger$;

(xii) $(a^{\#})^2a^\dagger = a^{\#}a^\dagger a^{\#}$;

(xiii) $a(a^\dagger)^2 = a^{\#}$;

(xiv) $a^*a^\dagger = a^*a^{\#}$;

(xv) $a^\dagger a^* = a^{\#}a^*$;

(xvi) $a^\dagger a^\dagger = a^{\#}a^\dagger$;

(xvii) $a^\dagger a^\dagger = a^\dagger a^{\#}$;

(xviii) $(a^\dagger)^2 = (a^{\#})^2$;

(xix) $aa^{\#}a^\dagger = a^{\#}$;

(xx) $a^{\#}a^\dagger = (a^{\#})^2$;

(xxi) $a^\dagger a^{\#} = (a^{\#})^2$;

(xxii) $a^\dagger aa^{\#} = a^\dagger$;

(xxiii) $a^{\#}a^\dagger a = a^\dagger$;

(xxiv) $aa^\dagger a^*a = a^*aaa^\dagger$;

(xxv) $a^\dagger aaa^* = aa^*a^\dagger a$;

(xxvi) $aa^\dagger(aa^* - a^*a) = (aa^* - a^*a)aa^\dagger$;

(xxvii) $a^\dagger a(aa^* - a^*a) = (aa^* - a^*a)a^\dagger a$;

(xxviii) $a^*a^{\#}a + aa^{\#}a^* = 2a^*$;

(xxix) $a^\dagger a^{\#}a + aa^{\#}a^\dagger = 2a^\dagger$;

(xxx) $aaa^\dagger + a^\dagger aa = 2a$;

(xxxi) $aaa^\dagger + (aaa^\dagger)^* = a + a^*$;

(xxxii) $a^\dagger aa + (a^\dagger aa)^* = a + a^*$;

(xxxiii) $aa^\dagger a^* = a^*aa^\dagger$;

(xxxiv) $a^*a^\dagger a = a^\dagger a a^*$.

Dokaz. Ako je element a EP, tada on komutira sa svojim Moore–Penrose-ovim inverzom i $a^\# = a^\dagger$. U tom slučaju nije teško proveriti da su uslovi (i)-(xxxiv) zadovoljeni.

U suprotnom, pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$. Znamo da je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$ ako i samo ako je $a^* \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$ i da je a EP element ako i samo ako je a^* EP element. Da bi zaključili da je element a EP, pokazaćemo da je jedan od uslova Teoreme 1.1.5 zadovoljen, ili da element a ili a^* zadovoljava jedan od prethodno već dokazanih uslova ove teoreme. Ako element a^* zadovoljava jedan od prethodno već dokazanih uslova ove teoreme, tada je a^* EP element, pa je takodje i a EP element.

(i) Iz pretpostavke $aa^\dagger a^\# = a^\dagger a^\# a$ sledi jednakost

$$aa^\# = aa^\dagger aa^\# = (aa^\dagger a^\#)a = (a^\dagger a^\# a)a = a^\dagger aa^\# a = a^\dagger a.$$

Kako je element $a^\dagger a$ simetričan, onda sledi da je i element $aa^\#$ takodje simetričan. Dakle, zadovoljen je uslov (i) Teoreme 1.1.5.

(ii) Na osnovu jednakosti $aa^\dagger a^\# = a^\# aa^\dagger$, sledi da je

$$\begin{aligned} aa^\# &= aa^\# aa^\# = a^2(a^\#)^2 = aaa^\dagger a(a^\#)^2 \\ &= a(aa^\dagger a^\#) = a(a^\# aa^\dagger) = aa^\dagger. \end{aligned}$$

Pošto je $aa^\dagger$ simetičan element, onda je i $aa^\#$ takodje simetričan element.

(iii) Ako je $a^*aa^\# = a^*$, tada je

$$(aa^\#)^* = (a^\#)^* a^* = (a^\#)^*(a^*aa^\#) = (aa^\#)^* aa^\#.$$

Kako je $(aa^\#)^* aa^\#$ simetričan element, onda je takav i element $aa^\#$.

(iv) Pretpostavimo da je $aa^\# a^* = a^*aa^\#$. Zatim proizilazi da je

$$\begin{aligned} a^* &= (aa^\dagger a)^* = a^\dagger aa^* = a^\dagger a(aa^\# a^*) \\ &= (a^\dagger a)^*(a^*aa^\#) = a^*aa^\#. \end{aligned}$$

Dakle, uslov (iii) je zadovoljen.

(v) Primenjujući jednakost $aa^\# a^\dagger = a^\dagger aa^\#$, sledi da je

$$a^\# a = a^\# aa^\dagger a = (aa^\# a^\dagger)a = (a^\dagger aa^\#)a = a^\dagger a.$$

Prema tome, $a^{\#}a$ je simetričan element.

(vi) Iz jednakosti $aa^{\#}a^{\dagger} = a^{\#}a^{\dagger}a$ sledi

$$a^{\#}a = a^{\#}aa^{\dagger}a = a(a^{\#}a^{\dagger}a) = a(aa^{\#}a^{\dagger}) = aa^{\#}aa^{\dagger} = aa^{\dagger}.$$

Uočavamo da je sada element $a^{\#}a$ simetričan.

(vii) Iz pretpostavke $a^{\dagger}aa^{\#} = a^{\#}a^{\dagger}a$ sledi jednakost

$$a^{\#}a = (a^{\#})^2a^2 = (a^{\#})^2aa^{\dagger}aa = (a^{\#}a^{\dagger}a)a = (a^{\dagger}aa^{\#})a = a^{\dagger}a.$$

Dakle, $a^{\#}a$ je simetričan element.

(viii) Na osnovu jednakost $(a^{\dagger})^2a^{\#} = a^{\dagger}a^{\#}a^{\dagger}$, važi

$$\begin{aligned}(a^{\dagger})^2a^{\#} &= ((a^{\dagger})^2a^{\#})aa^{\#} = (a^{\dagger}a^{\#}a^{\dagger})aa^{\#} = a^{\dagger}(a^{\#})^2aa^{\dagger}aa^{\#} \\ &= a^{\dagger}(a^{\#})^2aa^{\#} = a^{\dagger}(a^{\#})^2.\end{aligned}$$

Sada, iz prethodne jednakosti i uslova (viii), sledi da je

$$\begin{aligned}aa^{\#}a^{\dagger} &= aa(a^{\#})^2a^{\dagger} = aaa^{\dagger}a(a^{\#})^2a^{\dagger} = aaa^{\dagger}a^{\#}a^{\dagger} = aa((a^{\dagger})^2a^{\#}) \\ &= aa(a^{\dagger}(a^{\#})^2) = aaa^{\dagger}a(a^{\#})^2a^{\#} = aa(a^{\#})^2a^{\#} \\ &= a(a^{\#})^2 = a^{\#} = (a^{\#})^2a = (a^{\#})^2aa^{\dagger}a = a^{\#}a^{\dagger}a.\end{aligned}$$

Dakle, uslov (vi) je zadovoljen.

(ix) Pretpostavimo da je $a^{\dagger}a^{\#}a^{\dagger} = a^{\#}(a^{\dagger})^2$. Primenjujući involuciju na jednakost (ix), proizilazi

$$(a^{\dagger})^*(a^{\#})^*(a^{\dagger})^* = (a^{\dagger})^*(a^{\dagger})^*(a^{\#})^*.$$

Kako je, na osnovu Teoreme 1.1.4 i Teoreme 1.1.3, $(a^{\dagger})^* = (a^*)^{\dagger}$ i $(a^{\#})^* = (a^*)^{\#}$, onda je

$$(a^*)^{\dagger}(a^*)^{\#}(a^*)^{\dagger} = (a^*)^{\dagger}(a^*)^{\dagger}(a^*)^{\#}.$$

Prema tome, uslov (viii) važi za a^*.

(x) Korišćenjem jednakosti $a^{\dagger}(a^{\#})^2 = a^{\#}a^{\dagger}a^{\#}$, sledi da je

$$\begin{aligned}a^{\#}a &= (a^{\#})^2aa = (a^{\#})^2aa^{\dagger}aa = a^{\#}a^{\dagger}aa = (a^{\#}a^{\dagger}a^{\#})a^2a \\ &= (a^{\dagger}(a^{\#})^2)a^3 = a^{\dagger}a^{\#}a^2 = a^{\dagger}a.\end{aligned}$$

Dakle, element $a^{\#}a$ je simetričan.

(xi) Koristeći pretpostavku $a^\dagger(a^{\#})^2 = (a^{\#})^2 a^\dagger$, važi

$$\begin{aligned} a^{\#}a &= (a^{\#})^3 a^3 = (a^{\#})^3 a a^\dagger a a^2 = ((a^{\#})^2 a^\dagger) a^3 = (a^\dagger (a^{\#})^2) a^3 \\ &= a^\dagger a^{\#} a^2 = a^\dagger a. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je sada element $a^{\#}a$ simetričan.

(xii) Pretpostavimo da je $(a^{\#})^2 a^\dagger = a^{\#} a^\dagger a^{\#}$. Primenom involucije na jednakost (xii), sledi

$$(a^*)^\dagger (a^*)^{\#} (a^*)^{\#} = (a^*)^{\#} (a^*)^\dagger (a^*)^{\#}.$$

Dakle, uslov (x) važi za element a^*.

(xiii) Iz uslova $a(a^\dagger)^2 = a^{\#}$ sledi da je

$$aa^{\#} = aa(a^\dagger)^2 = aa(a^\dagger)^2 a a^\dagger = aa^{\#} a a^\dagger = aa^\dagger.$$

Prema tome, $aa^{\#}$ je simetričan element.

(xiv) Na osnovu jednakosti $a^* a^\dagger = a^* a^{\#}$, sledi da je

$$\begin{aligned} a(a^\dagger)^2 &= (aa^\dagger)^* a^\dagger = (a^\dagger)^* (a^* a^\dagger) = (a^\dagger)^* (a^* a^{\#}) \\ &= (aa^\dagger)^* a^{\#} = aa^\dagger a^{\#} = aa^\dagger a (a^{\#})^2 \\ &= a(a^{\#})^2 = a^{\#}, \end{aligned}$$

tj. uslov (xiii) je zadovoljen.

(xv) Primenjujući involuciju na jednakost $a^\dagger a^* = a^{\#} a^*$, sledi

$$(a^*)^* (a^*)^\dagger = (a^*)^* (a^*)^{\#},$$

odnosno, uslov (xiv) važi za a^*.

(xvi) Uslov $a^\dagger a^\dagger = a^{\#} a^\dagger$ implicira da je

$$\begin{aligned} a^\dagger a^* &= a^\dagger (aa^\dagger a)^* = a^\dagger (a^\dagger a)^* a^* = (a^\dagger a^\dagger) a a^* = (a^{\#} a^\dagger) a a^* \\ &= a^{\#} (a^\dagger a)^* a^* = a^{\#} (aa^\dagger a)^* = a^{\#} a^*, \end{aligned}$$

tj. jednakost (xv) je zadovoljena.

(xvii) Primenom involucije na uslov $a^\dagger a^\dagger = a^\dagger a^{\#}$, proizilazi da je

$$(a^*)^\dagger (a^*)^\dagger = (a^*)^{\#} (a^*)^\dagger.$$

Prema tome, jednakost (xvi) važi za a^*.

(xviii) Ako pretpostavimo da je $(a^\dagger)^2 = (a^\#)^2$, onda je

$$a(a^\dagger)^2 = a(a^\#)^2 = a^\#.$$

Dakle, uslov (xiii) je zadovoljen.

(xix) Korišćenjem uslova $aa^\# a^\dagger = a^\#$, proizilazi da važi jednakost

$$aa^\# = a(aa^\# a^\dagger) = aa^\dagger.$$

Sada zaključujemo da je element $aa^\#$ simetričan.

(xx) Pretpostavimo da je $a^\# a^\dagger = (a^\#)^2$. Zatim sledi da je

$$aa^\# a^\dagger = a(a^\#)^2 = a^\#.$$

Prema tome, uslov (xix) važi.

(xxi) Primenjujući involuciju na jednakost $a^\dagger a^\# = (a^\#)^2$ sledi da je

$$(a^*)^\#(a^*)^\dagger = (a^*)^\#(a^*)^\#.$$

Sada element a^* zadovoljava uslov (xx).

(xxii) Primenom jednakosti $a^\dagger aa^\# = a^\dagger$ sledi da je

$$aa^\# = a(a^\dagger aa^\#) = aa^\dagger.$$

Dakle, $aa^\#$ je simetričan element.

(xxiii) Jednakost $a^\# a^\dagger a = a^\dagger$ implicira

$$a^\# a = a^\# aa^\dagger a = a(a^\# a^\dagger a) = aa^\dagger.$$

Prema tome, element $a^\# a$ je simetričan.

(xxiv) Iz uslova $aa^\dagger a^* a = a^* aaa^\dagger$ sledi

$$a^* aaa^\# = (a^* aaa^\dagger)aa^\# = (aa^\dagger a^* a)aa^\# = aa^\dagger a^* a = a^* aaa^\dagger,$$

tj.

$$a^* a(aa^\# - aa^\dagger) = 0. \tag{2.1}$$

Koristeći pretpostavku da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, na osnovu Teoreme 1.1.2, znamo da je element a *-skrativ. Tada, na osnovu jednakosti (2.1) i *-skrativosti, sledi da je

$$a(aa^\# - aa^\dagger) = 0,$$

tj.

$$a = aaa^{\dagger}.$$

Sada je

$$a^{\#}a = a^{\#}(aaa^{\dagger}) = aa^{\dagger}.$$

Dakle, $a^{\#}a$ je simetričan element.

(xxv) Jednakosti $a^{\dagger}aaa^* = aa^*a^{\dagger}a$ implicira da je

$$a^{\#}aaa^* = a^{\#}a(a^{\dagger}aaa^*) = a^{\#}a(aa^*a^{\dagger}a) = aa^*a^{\dagger}a = a^{\dagger}aaa^*,$$

odnosno,

$$(a^{\#}a - a^{\dagger}a)aa^* = 0. \tag{2.2}$$

Kako je $a \in \mathcal{R}^{\dagger}$, onda je a *-skrativ prema Teoremi 1.1.2. Iz jednakosti (2.2) i *-skrativosti, proizilazi

$$(a^{\#}a - a^{\dagger}a)a = 0,$$

tj.

$$a = a^{\dagger}aa.$$

Korišćenjem prethodne jednakosti, sledi da je

$$aa^{\#} = (a^{\dagger}aa)a^{\#} = a^{\dagger}a.$$

Prema tome, element $a^{\#}a$ je simetričan.

(xxvi) Pretpostavka

$$aa^{\dagger}(aa^* - a^*a) = (aa^* - a^*a)aa^{\dagger}$$

je ekvivalentna sa

$$aa^* - aa^{\dagger}a^*a = aa^* - a^*aaa^{\dagger}.$$

Tada zaključujemo da je

$$aa^{\dagger}a^*a = a^*aaa^{\dagger},$$

tj. uslov (xxiv) je zadovoljen.

(xxvii) Jednakost

$$a^{\dagger}a(aa^* - a^*a) = (aa^* - a^*a)a^{\dagger}a$$

je ekvivalentna sa jednakošću

$$a^\dagger aaa^* - a^*a = aa^*a^\dagger a - a^*a$$

koja implicira jednakost

$$a^\dagger aaa^* = aa^*a^\dagger a.$$

Dakle, jednakost (xxv) važi.

(xxviii) Koristeći uslov $a^*a^\# a + aa^\# a^* = 2a^*$, proizilazi da je

$$\begin{aligned} 2a^* &= 2(aa^\dagger a)^* = 2(a^\dagger a)^* a^* = a^\dagger a(2a^*) \\ &= a^\dagger a(a^*a^\# a + aa^\# a^*) \\ &= a^*a^\# a + a^\dagger aa^* = a^*a^\# a + a^*. \end{aligned}$$

Sada je

$$a^* = a^*a^\# a = a^*aa^\#,$$

i tada a zadovoljava uslov (iii).

(xxix) Ako je $a^\dagger a^\# a + aa^\# a^\dagger = 2a^\dagger$, tada je

$$\begin{aligned} 2aa^\dagger &= a(2a^\dagger) = a(a^\dagger a^\# a + aa^\# a^\dagger) \\ &= aa^\dagger aa^\# + aa^\dagger = aa^\# + aa^\dagger, \end{aligned}$$

tj. $aa^\dagger = aa^\#$. Prema tome, $aa^\#$ je simetričan element.

(xxx) Pretpostavimo da je $aaa^\dagger + a^\dagger aa = 2a$, onda je

$$\begin{aligned} 2aa^\# &= (aaa^\dagger + a^\dagger aa)a^\# = aaa^\dagger a(a^\#)^2 + a^\dagger a \\ &= aa(a^\#)^2 + a^\dagger a = aa^\# + a^\dagger a, \end{aligned}$$

odnosno, $aa^\# = a^\dagger a$. Dakle, element $aa^\#$ je simetričan.

(xxxi) Množenjem jednakosti $aaa^\dagger + (aaa^\dagger)^* = a + a^*$ elementom a sa desne strane, sledi da je

$$aa^\dagger a^*a = a^*a.$$

Prema tome, $aa^\dagger a^*a$ je simetričan element i

$$aa^\dagger a^*a = (aa^\dagger a^*a)^* = a^*aaa^\dagger.$$

Sada uslov (xxiv) važi.

(xxxii) Množenjem jednakosti $a^\dagger aa + (a^\dagger aa)^* = a + a^*$ elementom a sa leve strane, proizilazi da je

$$aa^*a^\dagger a = aa^*.$$

Dakle, $aa^*a^\dagger a$ je simetričan element i

$$aa^*a^\dagger a = (aa^*a^\dagger a)^* = a^\dagger aaa^*.$$

Prema tome, uslov (xxv) je zadovoljen.

(xxxiii) Iz uslova $aa^\dagger a^* = a^*aa^\dagger$, sledi

$$aa^\# a^* = aa^\#(a^*aa^\dagger) = aa^\#(aa^\dagger a^*) = aa^\dagger a^* = a^*aa^\dagger = a^*.$$

Tada, na osnovu prethodne jednakosti, sledi da je

$$(a^\# a)^* = a^*(a^\#)^* = aa^\# a^*(a^\#)^* = aa^\#(a^\# a)^* = aa^\#(aa^\#)^*.$$

Dakle, element $a^\# a$ je simetričan.

(xxxiv) Iz jednakosti $a^*a^\dagger a = a^\dagger aa^*$, sledi

$$a^*aa^\# = (a^\dagger aa^*)aa^\# = (a^*a^\dagger a)aa^\# = a^*a^\dagger a = a^\dagger aa^* = a^*.$$

Prema tome, a zadovoljava uslov (iii). $\square$

Sledeći rezultat je dobro poznat za kompleksne matrice i za linearne operatore na Hilbert-ovim prostorima ([1], [10], [17] i [18]). Medjutim, mi nismo u mogućnosti da dokažemo ovaj rezultat za elemente u prstenu sa involucijom, pa ga ostavljamo kao otvoren problem.

Otvoren problem. Element $a \in \mathcal{R}$ je EP ako i samo ako je $a \in \mathcal{R}^\# \cap \mathcal{R}^\dagger$, i jedan od sledećih ekvivalentnih uslova je zadovoljen:

(i) $(a^\dagger)^2 a^\# = a^\#(a^\dagger)^2$;

(ii) $aa^\dagger = a^2(a^\dagger)^2$;

(iii) $a^\dagger a = (a^\dagger)^2 a^2$.

Originalna definicija kompleksnih EP matrica A zahteva jednakost slika $R(A)$ i $R(A^*)$ (dakle, EP za "equal powers" na $R(A)$ i $R(A^*)$). Za kompleksne matrice ovo je ekvivalentno sa $A^\dagger = A^\#$.

U cilju pažljivog razlikovanja uslova za elemente prstena sa involucijom, P. Patrício i R. Puystjens u radu [54] uvode novu terminologiju. U [54], element je nazvan *-EP ako je $a^*\mathcal{R} = a\mathcal{R}$. Elementi koje mi nazivamo EP su nazvani *-gMP elementi u [54].

U skladu sa našom terminologijom, možemo reprodukovat neke od rezultata iz rada [54] na sledeći način:

Teorema 2.1.2 [54, Corollary 3] *Ako je a element u prstenu sa involucijom, tada*

$$a \text{ je } EP \Leftrightarrow (a\mathcal{R} = a^*\mathcal{R} \text{ i } a \in \mathcal{R}^\#) \Leftrightarrow (a\mathcal{R} = a^*\mathcal{R} \text{ i } a \in \mathcal{R}^\dagger).$$

P. Patrício i R. Puystjens u [54] dalje diskutuju potrebne i dovoljne uslove da regularan element a bude EP.

Teorema 2.1.3 [54, Theorem 4] *Regularan element a u $\mathcal{R}$ je EP ako i samo ako je $a^* = v^{-1}au$, gde su*

$$u = (aa^-)^*(aa^* - 1) + 1, \qquad v = (a^2 - 1)aa^- + 1$$

invertibilni za neki (svaki) unutrašnji inverz a^-.

E. Boasso je u radu [3] učinio sledeći korak u teoriji kada je dao definiciju EP elemenata Banach-ove algebre u odsustvu involucije. Njegova definicija zasniva se na karakterizaciji hermitskih elemenata korišćenjem topologije koja podleže algebri datoj u radu Palmer-a i Vidav-a. Medjutim, ne postoje očigledni kandidati za hermitske elemente u prstenu (ili algebri) bez involucije, i prema tome ovaj način ne izgleda pristupačan sa algebarske tačke gledišta.

2.2 Normalni elementi

Normalne i hermitske matrice, kao i normalni i hermitski linearni operatori na Banach-ovim ili Hilbert-ovim prostorima su istraživani od strane mnogih autora (videti, na primer, [1, 2, 10, 17, 18, 20, 25, 27, 32, 70]). U nastavku koristimo drugačiji pristup, pomoću osobina koje važe u prstenu sa involucijom, u proučavanju normalnih i hermitskih elemenata koji su Moore-Penrose invertibilni. Dokazujemo nove karakterizacije zasnovane samo na teoriji prstena.

U ovom odeljku data je karakterizacija MP-invertibilnih normalnih elementa u prstenu sa involucijom pomoću uslova koji sadrže njihov grupni i Moore–Penrose-ov inverz. Za kompleksne matrice ovi rezultati su pokazani u radu S. Cheng-a i Y. Tian-a [10], pomoću ranga matrice ili u radu O.M. Baksalary-a i G. Trenkler-a [1], gde je korišćena jedna elegantna reprezentacija matrica. Za ograničene linearne operatore na Hilbert-ovim prostorima analogni rezultati su dokazani u radu D.S. Djordjevića [17] i D.S. Djordjevića i J.J Koliha-e [18], pomoću operatorskih matrica. Izloženi rezultati su prikazani u radu sa D.S. Djordjevićem [51].

Sledeći rezultat je dobro poznat za matrice, operatore na Hilbert-ovom prostoru i elemente C^*-algebre, i takodje je tačan u prstenu sa involucijom:

Lema 2.2.1 *Neka je $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i $b \in \mathcal{R}$. Ako je $ab = ba$ i $a^*b = ba^*$, tada je $a^\dagger b = ba^\dagger$.*

Dokaz. Pretpostavimo da element b komutira sa a i a^*. Pošto je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, onda je $a^\dagger = a^*(aa^*)^\dagger = a^*(aa^*)^\#$. Element aa^* komutira sa b, a grupni inverz $(aa^*)^\#$ dvostruko komutira sa aa^*, pa $(aa^*)^\#$ komutira sa b. Na osnovu toga sledi da $a^\dagger$ komutira sa b. $\square$

Naredni reaultat je takodje dobro poznat za matrice, operatore na Hilbert-ovom prostoru i elemente C^*-algebre, i pokazaćemo da je tačan u prstenu sa involucijom:

Lema 2.2.2 *Neka je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada je a normalan element ako i samo ako je $aa^\dagger = a^\dagger a$ i $a^*a^\dagger = a^\dagger a^*$.*

Dokaz. Ako je a normalan element, onda, iz Leme 2.2.1, sledi da element $a^\dagger$ komutira sa a i sa a^*.

U suprotnom, pretpostavimo da je $aa^\dagger = a^\dagger a$ i $a^*a^\dagger = a^\dagger a^*$. Sada proizilazi da je

$$aa^* = aa^*(aa^\dagger) = a(a^*a^\dagger)a = (aa^\dagger)a^*a = a^\dagger aa^*a = a^*a.$$

Dakle, a je normalan element. $\square$

Na osnovu Leme 2.2.2, proizilazi sledeći rezultat.

Lema 2.2.3 *Ako je $a \in \mathcal{R}^\dagger$ normalan element, tada je a EP element.*

Naredni rezultat je posledica direktnog izračunavanja.

Lema 2.2.4 *Ako je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, tada je $aa^*a \in \mathcal{R}^\dagger$ i $(aa^*a)^\dagger = a^\dagger(a^*)^\dagger a^\dagger$.*

Počinjemo sa sledećim potrebnim i dovoljnim uslovima da element a u prstenu sa involucijom bude normalan.

Teorema 2.2.1 *Pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *a je normalan element;*

(ii) *$a(aa^*a)^\dagger = (aa^*a)^\dagger a$;*

(iii) *$a^\dagger(a + a^*) = (a + a^*)a^\dagger$.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ako je element a normalan, na osnovu Leme 2.2.2, sledi da je $aa^\dagger = a^\dagger a$ i $a^*a^\dagger = a^\dagger a^*$. Primenom involucije na drugu jednakost, proizilazi da je $(a^\dagger)^*a = a(a^\dagger)^*$. Tada je

$$aa^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger = a^\dagger a(a^\dagger)^*a^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*aa^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger a. \tag{2.3}$$

Prema Lemi 2.2.4, sledi da je $(aa^*a)^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger$. Koristeći ovu jednakost u (2.3), proizilazi da je $a(aa^*a)^\dagger = (aa^*a)^\dagger a$. Dakle, uslov (ii) je zadovoljen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Neka je $a(aa^*a)^\dagger = (aa^*a)^\dagger a$. Na osnovu Leme 2.2.4, znamo da jednakost $(aa^*a)^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger$ važi. Prema tome, pretpostavka (i) je ekvivalentna sa

$$aa^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*a^\dagger a,$$

što implicira, koristeći Teoremu 1.1.4,

$$(a^\dagger)^*a^\dagger = a^\dagger(a^\dagger)^*. \tag{2.4}$$

Množenjem jednakosti (2.4) elementom a^* sa leve i sa desne strane, sledi

$$a^\dagger a^* = a^*a^\dagger. \tag{2.5}$$

Sada, na osnovu jednakosti (2.4) i (2.5), sledi da je

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= a(a^\dagger a)^*a^\dagger = aa^*((a^\dagger)^*a^\dagger) = a(a^*a^\dagger)(a^\dagger)^* \\ &= aa^\dagger a^*(a^\dagger)^* = aa^\dagger a^\dagger a \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= a^\dagger(aa^\dagger)^*a = (a^\dagger(a^\dagger)^*)a^*a = (a^\dagger)^*(a^\dagger a^*)a \\ &= (a^\dagger)^*a^*a^\dagger a = aa^\dagger a^\dagger a. \end{aligned}$$

Dakle,

$$aa^\dagger = a^\dagger a. \tag{2.6}$$

Na osnovu jednakosti (2.5) i (2.6), zaključujemo da važi uslov (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Uslov $a^\dagger(a+a^*) = (a+a^*)a^\dagger$ možemo zapisati na sledeći način

$$a^\dagger a + a^\dagger a^* = aa^\dagger + a^*a^\dagger. \tag{2.7}$$

Množenjem jednakosti (2.7) elementom a sa leve i sa desne strane, proizilazi

$$aa + aa^\dagger a^*a = aa + aa^*a^\dagger a,$$

tj.

$$aa^\dagger a^*a = aa^*a^\dagger a.$$

Množenjem prethodne jednakosti elementom $a^\dagger$ sa leve i sa desne strane, sledi, pomoću Teoremu 1.1.4,

$$a^\dagger a^* = a^*a^\dagger. \tag{2.8}$$

Sada, iz jednakosti (2.7), proizilazi

$$a^\dagger a = aa^\dagger. \tag{2.9}$$

Prema tome, na osnovu jednakosti (2.9), (2.8) i Leme 2.2.2, element a je normalan. $\square$

U narednoj teoremi ponovo pretpostavljamo da je element a Moore–Penrose invertibilan i proučavamo 22 uslova koja uključuju $a^\dagger$, $a^\#$ i a^* da obezbede da je element a normalan. Sledeći rezultat je motivisan teoremama 2, 5 i 6 u radu [1].

Teorema 2.2.2 *Pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada je element a normalan ako i samo ako je $a \in \mathcal{R}^\#$ i jedan od sledećih ekvivalentnih uslova važi:*

(i) $aa^*a^\# = a^\#aa^*$;

(ii) $aa^\#a^* = a^\#a^*a$;

(iii) $a^*aa^\# = a^\#a^*a$;

(iv) $aa^*a^\# = a^*a^\#a$;

(v) $aaa^* = aa^*a$;

(vi) $aa^*a = a^*aa$;

(vii) $a^*a^\# = a^\#a^*$;

(viii) $a^*a^\dagger = a^\#a^*$;

(ix) $a^*a^\# = a^\dagger a^*$;

(x) $aa^*a^\dagger = a^*$;

(xi) $a^\dagger a^*a = a^*$;

(xii) $aa^*a^\# = a^*$;

(xiii) $a^\#a^*a = a^*$;

(xiv) $a^*a^\#a^\# = a^\#a^*a^\#$;

(xv) $a^{\#}a^*a^{\#} = a^{\#}a^{\#}a^*$;

(xvi) $a^*a^*a^{\#} = a^*a^{\#}a^*$;

(xvii) $a^*a^{\#}a^* = a^{\#}a^*a^*$;

(xviii) $a^*a^{\dagger}a^{\#} = a^{\#}a^*a^{\dagger}$;

(xix) $a^*a^{\#}a^{\dagger} = a^{\dagger}a^*a^{\#}$;

(xx) $a^{\dagger}a^*a^{\#} = a^{\#}a^{\dagger}a^*$;

(xxi) $a^{\dagger}a^{\#}a^* = a^{\#}a^*a^{\dagger}$;

(xxii) *Postoji neko $x \in \mathcal{R}$ tako da je $ax = a^*$ i $(a^{\dagger})^*x = a^{\dagger}$.*

Dokaz. Ako je element a normalan, tada on komutira sa $a^{\dagger}$ i a^* i $a^{\#} = a^{\dagger}$. Lako se proverava da uslovi (i)-(xxii) važe.

U suprotnom, pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^{\#}$. Da bi zaključili da je element a normalan, pokazaćemo da je jednakost $aa^* = a^*a$ zadovoljena, ili da element zadovoljava jedan od prethodnih već dokazanih uslova ove teoreme.

(i) Pretpostavimo da je $aa^*a^{\#} = a^{\#}aa^*$. Tada je

$$\begin{aligned} a^{\dagger}aaa^* &= a^{\dagger}aa(aa^{\dagger}a)^* = a^{\dagger}aaa^*aa^{\dagger} = a^{\dagger}aaa^*aa^{\#}aa^{\dagger} \\ &= a^{\dagger}a(aa^*a^{\#})aaa^{\dagger} = a^{\dagger}aa^{\#}aa^*aaa^{\dagger} \\ &= a^{\dagger}aa^*aaa^{\dagger} = a^*aaa^{\dagger}. \end{aligned}$$

Sada, iz prethodne jednakosti i uslova (i), sledi da je

$$\begin{aligned} a^*aa^{\dagger} &= a^* = a^{\dagger}aa^* = a^{\dagger}a(a^{\#}aa^*) = (a^{\dagger}aaa^*)a^{\#} \\ &= a^*aaa^{\dagger}a^{\#} = a^*aaa^{\dagger}a(a^{\#})^2 = a^*aa(a^{\#})^2 \\ &= a^*aa^{\#}, \end{aligned}$$

tj.

$$a^*a(a^{\dagger} - a^{\#}) = 0. \tag{2.10}$$

Kako je $a \in \mathcal{R}^{\dagger}$, onda je element a *-skrativ prema Teoremi 1.1.2. Na osnovu jedankosti (2.10) i *-skrativosti, proizilazi $a(a^{\dagger} - a^{\#}) = 0$, tj. $aa^{\dagger} = aa^{\#}$. Prema tome,

$$a^* = (aaa^{\#})^* = (aaa^{\dagger})^* = aa^{\dagger}a^* = aa^{\#}a^*. \tag{2.11}$$

Iz jednakosti (2.11), (i) i $a^* = a^*aa^\# = a^*a^\#a$, sledi da je

$$a^*a = aa^\#a^*a = (a^\#aa^*)a = a(a^*a^\#a) = aa^*.$$

(ii) Koristeći pretpostavku $aa^\#a^* = a^\#a^*a$, sledi da je

$$\begin{aligned} aa^*a^\# &= a(aa^\#a^*)a^\# = (aa^\#a^*)aa^\# = a^\#a^*aaa^\# \\ &= (a^\#a^*a) = aa^\#a^* = a^\#aa^*, \end{aligned}$$

tj. uslov (i) je zadovoljen.

(iii) Iz jednakosti $a^*aa^\# = a^\#a^*a$, sledi da je

$$\begin{aligned} a^\dagger aaa^* &= a^\dagger aaa^*aa^\dagger = a^\dagger aa(a^*aa^\#)aa^\dagger = a^\dagger aaa^\#a^*aaa^\dagger \\ &= a^\dagger aa^*aaa^\dagger = a^*aaa^\dagger. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodne jednakosti i uslova (iii), važi

$$\begin{aligned} a^\dagger aa^* &= a^* = a^*aa^\dagger = (a^*aa^\#)aa^\dagger = a^\#(a^*aaa^\dagger) \\ &= a^\#a^\dagger aaa^* = (a^\#)^2aa^\dagger aaa^* \\ &= (a^\#)^2aaa^* = a^\#aa^*, \end{aligned}$$

tj.

$$(a^\dagger - a^\#)aa^* = 0. \tag{2.12}$$

Iz uslova $a \in \mathcal{R}^\dagger$, prema Teoremi 1.1.2, znamo da je element a *-skrativ. Tada, na osnovu jednakosti (2.12) i *-skrativosti, sledi $(a^\dagger - a^\#)a = 0$, tj. $a^\dagger a = a^\#a$. Prema tome

$$a^* = (a^\#aa)^* = (a^\dagger aa)^* = a^*a^\dagger a = a^*a^\#a. \tag{2.13}$$

Dakle, iz $a^* = a^\#aa^* = aa^\#a^*$, (iii) i (2.13), sledi

$$a^*a = a(a^\#a^*a) = a(a^*aa^\#) = aa^*.$$

(iv) Jednakost $aa^*a^\# = a^*a^\#a$ implicira

$$\begin{aligned} a^*aa^\# &= (a^*a^\#a) = aa^*a^\# = a^\#a(aa^*a^\#) \\ &= a^\#(aa^*a^\#)a = a^\#a^*a^\#aa = a^\#a^*a. \end{aligned}$$

Dakle, uslov (iii) je zadovoljen.

(v) Ako je $aaa^* = aa^*a$, onda je

$$aa^\# a^* = a^\# a^\# (aaa^*) = a^\# a^\# aa^*a = a^\# a^* a.$$

Prema tome, uslov (ii) važi.

(vi) Pretpostavimo da je $aa^*a = a^*aa$. Tada je

$$aa^*a^\# = (aa^*a)a^\# a^\# = a^*aaa^\# a^\# = a^*aa^\# = a^*a^\# a.$$

Dakle, jednakost (iv) važi.

(vii) Iz jednakosti $a^*a^\# = a^\# a^*$, sledi

$$aa^*a^\# = aa^\# a^* = a^\# aa^*.$$

Sada zaključujemo da je uslov (i) zadovoljen.

(viii) Pretpostavka $a^*a^\dagger = a^\# a^*$ implicira da je

$$(a^\#)^2 aa^* = a^\# a^* = a^*a^\dagger = a^\dagger a(a^*a^\dagger) = a^\dagger aa^\# a^*,$$

odnosno da je

$$((a^\#)^2 - a^\dagger a^\#)aa^* = 0. \tag{2.14}$$

Na osnovu uslova $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i Teoreme 1.1.2, zaključujemo da je element a $*$-skrativ. Koristeći jednakost (2.14) i $*$-skrativost, sledi $((a^\#)^2 - a^\dagger a^\#)a = 0$, tj.

$$a^\# = a^\dagger a^\# a. \tag{2.15}$$

Iz poslednje jednakosti, sledi $a^\# a = a^\dagger a$ i

$$a^* = (a^\# aa)^* = (a^\dagger aa)^* = a^*a^\dagger a = a^*a^\# a. \tag{2.16}$$

Jednakosti (2.15), (viii) i (2.16) impliciraju

$$a^*a^\# = (a^*a^\dagger)a^\# a = a^\# (a^*a^\# a) = a^\# a^*.$$

Dakle, uslov (vii) je zadovoljen.

(ix) Pretpostavimo da je $a^*a^\# = a^\dagger a^*$. Sada, sledi da je

$$a^*a(a^\#)^2 = a^*a^\# = a^\dagger a^* = (a^\dagger a^*)aa^\dagger = a^*a^\# aa^\dagger,$$

tj.

$$a^*a((a^\#)^2 - a^\# a^\dagger) = 0. \tag{2.17}$$

Kako je $a \in \mathcal{R}^\dagger$, onda je a *-skrativ prema Teoremi 1.1.2. Iz jednakosti (2.17) i *-skrativosti, proizilazi da je $a((a^\#)^2 - a^\# a^\dagger) = 0$, odnosno da je

$$a^\# = aa^\# a^\dagger. \tag{2.18}$$

Na osnovu jednakosti (2.18), sledi $aa^\# = aa^\dagger$ i

$$a^* = (aaa^\#)^* = (aaa^\dagger)^* = aa^\dagger a^* = aa^\# a^*. \tag{2.19}$$

Zatim, iz (2.19), (ix) i (2.18), sledi

$$a^* a^\# = aa^\#(a^* a^\#) = (aa^\# a^\dagger)a^* = a^\# a^*.$$

Prema tome, uslov (vii) važi.

(x) Na osnovu jednakosti $aa^* a^\dagger = a^*$, sledi da je

$$a^* a^\dagger = aa^* a^\dagger a^\dagger = a^\# a(aa^* a^\dagger)a^\dagger = a^\#(aa^* a^\dagger) = a^\# a^*.$$

Prema tome, jednakost (viii) važi.

(xi) Iz uslova $a^\dagger a^* a = a^*$, sledi

$$a^* a^\# = a^\dagger a^* aa^\# = a^\dagger a^\dagger a^* aaa^\# = a^\dagger(a^\dagger a^* a) = a^\dagger a^*.$$

Pokazali smo da je uslov (ix) zadovoljen.

(xii) Uslov $aa^* a^\# = a^*$ implicira

$$a^* a^\# = a^\dagger(aa^* a^\#) = a^\dagger a^*,$$

tj. jednakost (ix) važi.

(xiii) Ako je $a^\# a^* a = a^*$, onda je

$$a^* a^\dagger = a^\# a^* aa^\dagger = a^\# a^*.$$

Dakle, jednakost (viii) je zadovoljena.

(xiv) Iz uslov $a^* a^\# a^\# = a^\# a^* a^\#$, proizilazi da je

$$a^* aa^\# = (a^* a^\# a^\#)aa = a^\# a^* a^\# aa = a^\# a^* a.$$

Sada važi uslov (iii).

(xv) Iz jednakosti $a^\# a^* a^\# = a^\# a^\# a^*$, sledi

$$aa^* a^\# = aa(a^\# a^* a^\#) = aaa^\# a^\# a^* = aa^\# a^* = a^\# aa^*.$$

Prema tome, jednakost (i) je zadovoljena.

(xvi) Pretpostavimo da je $a^*a^*a^\# = a^*a^\#a^*$. Tada sledi

$$\begin{aligned} a^*a(a^\#)^2a^* &= a^*a^\#a^* = a^*a^*a^\# = (a^*a^*a^\#)aa^\# \\ &= a^*a^\#a^*aa^\# = a^*a(a^\#)^2a^*aa^\#, \end{aligned}$$

odnosno

$$a^*a((a^\#)^2a^* - (a^\#)^2a^*aa^\#) = 0. \qquad (2.20)$$

Iz uslova $a \in \mathcal{R}^\dagger$, prema Teoremi 1.1.2, zaključujemo da je element a *-skrativ. Zatim, na osnovu jednakosti (2.20) i *-skrativosti, sledi

$$a((a^\#)^2a^* - (a^\#)^2a^*aa^\#) = 0,$$

tj.

$$a^\#a^* = a^\#a^*aa^\#.$$

Poslednja jednakost implicira

$$\begin{aligned} a^*aa^\dagger &= a^* = a^\dagger aa^* = a^\dagger a^2(a^\#a^*) = a^\dagger a^2a^\#a^*aa^\# \\ &= a^\dagger aa^*aa^\# = a^*aa^\#. \end{aligned}$$

Dakle, $a^*a(a^\dagger - a^\#) = 0$ i, pomoću *-skrativosti ponovo,

$$aa^\dagger = aa^\#. \qquad (2.21)$$

Množenjem jednakosti (2.21) elementom a sa leve strane, sledi

$$aaa^\dagger = aaa^\# = a. \qquad (2.22)$$

Na osnovu jednakosti (2.22) i (xvi), sledi

$$\begin{aligned} a^* &= (aaa^\dagger)^* = aa^\dagger a^* = aa^\dagger aa^\dagger a^* = aa^\dagger(aa^\dagger)^*a^*aa^\dagger \\ &= aa^\dagger(a^\dagger)^*(a^*a^*a^\#)a^2a^\dagger = aa^\dagger(a^\dagger)^*a^*a^\#a^*(a^2a^\dagger) \\ &= aa^\dagger aa^\dagger a^\#a^*a = aa^\dagger a^\#a^*a = aa^\dagger a(a^\#)^2a^*a \\ &= a(a^\#)^2a^*a = a^\#a^*a. \end{aligned}$$

Prema tome, zadovoljen je uslov (xiii).

(xvii) Pretpostavimo da je $a^*a^\#a^* = a^\#a^*a^*$. Tada sledi da je

$$\begin{aligned} a^*(a^\#)^2aa^* &= a^*a^\#a^* = a^\#a^*a^* = a^\#a(a^\#a^*a^*) \\ &= a^\#aa^*a^\#a^* = a^\#aa^*(a^\#)^2aa^*. \end{aligned}$$

Dakle,

$$(a^*(a^\#)^2 - a^\#aa^*(a^\#)^2)aa^* = 0. \tag{2.23}$$

Pretpostavka $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i Teorema 1.1.2 impliciraju da je element a *-skrativ. Sada, na osnovu jednakosti (2.23) i *-skrativosti, sledi da je

$$(a^*(a^\#)^2 - a^\#aa^*(a^\#)^2)a = 0,$$

tj.

$$a^*a^\# = a^\#aa^*a^\#.$$

Zatim, koristeći prethodnu jednakost, proizilazi

$$\begin{aligned} a^\dagger aa^* &= a^* = a^*aa^\dagger = (a^*a^\#)a^2a^\dagger = a^\#aa^*a^\#a^2a^\dagger \\ &= a^\#aa^*aa^\dagger = a^\#aa^*. \end{aligned}$$

Prema tome, $(a^\dagger - a^\#)aa^* = 0$ i, pomoću *-skrativosti,

$$a^\dagger a = a^\#a. \tag{2.24}$$

Množenjem jednakosti (2.24) elementom a sa desne strane, sledi da je

$$a^\dagger aa = a^\#aa = a. \tag{2.25}$$

Iz jednakosti (2.25) i (xvii), proizilazi

$$\begin{aligned} a^* &= (a^\dagger aa)^* = a^*a^\dagger a = a^\dagger aa^*a^\dagger aa^\dagger a = a^\dagger a^2(a^\#a^*a^*)(a^\dagger)^*a^\dagger a \\ &= (a^\dagger a^2)a^*a^\#a^*(a^\dagger)^*a^\dagger a = aa^*a^\#a^\dagger aa^\dagger a \\ &= aa^*a^\#a^\dagger a = aa^*(a^\#)^2aa^\dagger a = aa^*(a^\#)^2a \\ &= aa^*a^\#. \end{aligned}$$

Jednakost (xii) važi.

(xviii) Jednakost $a^*a^\dagger a^\# = a^\#a^*a^\dagger$ implicira

$$a^*a^\dagger = a^*a^\dagger aa^\dagger = (a^*a^\dagger a^\#)aaa^\dagger = a^\#a^*a^\dagger aaa^\dagger. \tag{2.26}$$

Na osnovu (xviii) i (2.26), sledi

$$\begin{aligned} a^{\#}a^{*}a^{\dagger} &= a^{*}a^{\dagger}a^{\#} = a^{\dagger}a(a^{*}a^{\dagger}a^{\#}) = a^{\dagger}aa^{\#}(a^{*}a^{\dagger}) \\ &= a^{\dagger}aa^{\#}a^{\#}a^{*}a^{\dagger}aaa^{\dagger} = a^{\dagger}(a^{\#}a^{*}a^{\dagger}aaa^{\dagger}) \\ &= a^{\dagger}a^{*}a^{\dagger}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Zatim, iz (2.27), proizilazi

$$\begin{aligned} aa^{*}a^{*} &= a^{2}a^{\#}a^{*}a^{*} = a^{2}(a^{\#}a^{*}a^{\dagger})aa^{*} \\ &= a^{2}a^{\dagger}a^{*}a^{\dagger}aa^{*} = aaa^{\dagger}a^{*}a^{*}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Na osnovu jednakosti (2.28), sledi

$$\begin{aligned} a^{\#}aa^{*} &= a^{\#}a^{\#}aaa^{*} = a^{\#}a^{\#}(aa^{*}a^{*})^{*} \\ &= a^{\#}a^{\#}(aaa^{\dagger}a^{*}a^{*})^{*} = a^{\#}a^{\#}aaaa^{\dagger}a^{*} \\ &= aa^{\dagger}a^{*} = aa^{\dagger}a^{\dagger}aa^{*} \end{aligned}$$

što povlači

$$(a^{\#} - aa^{\dagger}a^{\dagger})aa^{*} = 0. \tag{2.29}$$

Uslov $a \in \mathcal{R}^{\dagger}$ implicira da je a *-skrativ, prema Teoremi 1.1.2. Sada, na osnovu (2.29) i *-skrativosti, sledi da je $(a^{\#} - aa^{\dagger}a^{\dagger})a = 0$, tj.

$$a^{\#}a = aa^{\dagger}a^{\dagger}a. \tag{2.30}$$

Zatim, na osnovu (2.26) i (2.30),

$$a^{*}a^{\dagger} = a^{\#}a^{*}a^{\dagger}aaa^{\dagger} = a^{\#}(aa^{\dagger}a^{\dagger}aa)^{*} = a^{\#}(a^{\#}aa)^{*} = a^{\#}a^{*}.$$

Dakle, zadovoljen je uslov (viii).

(xix) Ako je $a^{*}a^{\#}a^{\dagger} = a^{\dagger}a^{*}a^{\#}$, onda je

$$\begin{aligned} a^{*}a(a^{\#})^{2}a^{\#} &= a^{*}(a^{\#})^{2}aa^{\dagger}aa^{\#} = (a^{*}a^{\#}a^{\dagger})aa^{\#} = a^{\dagger}a^{*}a^{\#}aa^{\#} \\ &= a^{\dagger}a^{*}a^{\#} = a^{*}a^{\#}a^{\dagger} = a^{*}a(a^{\#})^{2}a^{\dagger} \end{aligned}$$

odakle je

$$a^{*}a((a^{\#})^{2}a^{\#} - (a^{\#})^{2}a^{\dagger}) = 0. \tag{2.31}$$

Iz $a \in \mathcal{R}^\dagger$, na osnovu Teoreme 1.1.2, proizilazi da je a *-skrativ element. Zatim, iz jednakosti (2.31) i *-skrativosti, sledi $a((a^\#)^2a^\# - (a^\#)^2a^\dagger) = 0$, odnosno

$$a^\# a^\# = a^\# a^\dagger. \tag{2.32}$$

Iz jednakosti (2.32), sledi

$$a^* a a^\# = a^* a^2 (a^\# a^\#) = a^* a^2 a^\# a^\dagger = a^* a a^\dagger = a^*. \tag{2.33}$$

Sada, na osnovu (xix) i (2.33), proizilazi

$$\begin{aligned} a^* a^\# &= a^*(a^\#)^2 a = a^*(a^\#)^2 a a^\dagger a = (a^* a^\# a^\dagger)a \\ &= a^\dagger a^* a^\# a = a^\dagger(a^* a a^\#) = a^\dagger a^*, \end{aligned}$$

tj. uslov (ix) važi.

(xx) Kako je $a^\dagger a^* a^\# = a^\# a^\dagger a^*$, tada je

$$a^\dagger a^* = a^\dagger a a^\dagger a^* = a^\dagger a a (a^\# a^\dagger a^*) = a^\dagger a a a^\dagger a^* a^\#. \tag{2.34}$$

Na osnovu (xx) i (2.34), sledi

$$\begin{aligned} a^\dagger a^* a^\# &= a^\# a^\dagger a^* = (a^\# a^\dagger a^*) a a^\dagger = (a^\dagger a^*) a^\# a a^\dagger \\ &= a^\dagger a a a^\dagger a^* a^\# a^\# a a^\dagger = (a^\dagger a a a^\dagger a^* a^\#) a^\dagger \\ &= a^\dagger a^* a^\dagger. \end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti, proizilazi

$$a^* a^* a = a^* a^* a^\# a^2 = a^* a (a^\dagger a^* a^\#) a^2 = a^* a a^\dagger a^* a^\dagger a^2 = a^* a^* a^\dagger a a. \tag{2.35}$$

Na osnovu (2.35), sledi

$$\begin{aligned} a^* a a^\# &= a^* a a a^\# a^\# = (a^* a^* a)^* a^\# a^\# = (a^* a^* a^\dagger a a)^* a^\# a^\# \\ &= a^* a^\dagger a a a a^\# a^\# = a^* a^\dagger a = a^* a a^\dagger a^\dagger a, \end{aligned}$$

što implicira

$$a^* a (a^\# - a^\dagger a^\dagger a) = 0. \tag{2.36}$$

Zatim je element a *-skrativ, prema uslovu $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i Teoremi 1.1.2, i onda, na osnovu (2.36),

$$a a^\# = a a^\dagger a^\dagger a. \tag{2.37}$$

Primenom (2.37) i (2.34), proizilazi

$$a^*a^\# = (aaa^\#)^*a^\# = (aaa^\dagger a^\dagger a)^*a^\# = a^\dagger aaa^\dagger a^*a^\# = a^\dagger a^*.$$

Dakle uslov (ix) je zadovoljen.

(xxi) Pretpostavimo da je $a^\dagger a^\# a^* = a^\# a^* a^\dagger$. Tada je

$$\begin{aligned} a^\#(a^\#)^2aa^* &= a^\# aa^\dagger a(a^\#)^2a^* = a^\# a(a^\dagger a^\# a^*) = a^\# aa^\# a^*a^\dagger \\ &= a^\# a^* a^\dagger = a^\dagger a^\# a^* = a^\dagger(a^\#)^2aa^* \end{aligned}$$

tako da je

$$(a^\#(a^\#)^2 - a^\dagger(a^\#)^2)aa^* = 0. \tag{2.38}$$

Na osnovu uslova $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i Teoreme 1.1.2, element a je *-skrativ i dakle, prema (2.38),

$$(a^\#(a^\#)^2 - a^\dagger(a^\#)^2)a = 0,$$

tj.

$$a^\# a^\# = a^\dagger a^\#. \tag{2.39}$$

Iz jednakosti (2.39), proizilazi

$$a^\# aa^* = (a^\# a^\#)a^2a^* = a^\dagger a^\# a^2a^* = a^\dagger aa^* = a^*. \tag{2.40}$$

Dakle, iz (2.40) i (xxi), sledi

$$\begin{aligned} a^*a^\dagger &= a^\# aa^*a^\dagger = a(a^\# a^*a^\dagger) = aa^\dagger a^\# a^* \\ &= aa^\dagger a(a^\#)^2a^* = a(a^\#)^2a^* = a^\# a^*. \end{aligned}$$

Prema tome, uslov (xxi) implicira jednakost (viii).

(xxii) Pretpostavimo da postoji neko $x \in \mathcal{R}$ tako da je $ax = a^*$ i $(a^\dagger)^*x = a^\dagger$. Prema Teoremi 1.1.4, važi

$$(a^\dagger)^* = (a^*)^\dagger = (aa^*)^\dagger a = (a^\dagger)^*a^\dagger a.$$

Sada, na osnovu $ax = a^*$ i $(a^\dagger)^*x = a^\dagger$, sledi

$$a^\dagger = (a^\dagger)^*x = (a^\dagger)^*a^\dagger(ax) = (a^\dagger)^*a^\dagger a^*.$$

Zatim ova jednakost implicira

$$a^*a^\dagger = a^*(a^\dagger)^*a^\dagger a^* = a^\dagger aa^\dagger a^* = a^\dagger a^* \tag{2.41}$$

i

$$a^\dagger = (a^\dagger)^*(a^\dagger a^*) = (a^\dagger)^* a^* a^\dagger = a a^\dagger a^\dagger. \tag{2.42}$$

Koristeći (2.42), proizilazi da važi

$$a^\# a a^* = a^\# a a^\dagger a a^* = a^\# a a a^\dagger a^\dagger a a^* = (a a^\dagger a^\dagger) a a^* = a^\dagger a a^*. \tag{2.43}$$

i

$$(a^\dagger - a^\#) a a^* = 0. \tag{2.44}$$

Iz uslova $a \in \mathcal{R}^\dagger$ i Teoreme 1.1.2, a je *-skrativ element i onda je, na osnovu (2.44),

$$a^\dagger a = a^\# a.$$

Dakle, na osnovu poslednje jednakosti i (2.41),

$$a^* a^\dagger = a^\dagger a^* = a^\dagger (a^\dagger a) a^* = a^\dagger a^\# a a^* = (a^\dagger a) a^\# a^* = a^\# a a^\# a^* = a^\# a^*.$$

Uslov (viii) važi. □

Na kraju, formulišemo neke otvorene probleme za karakterizaciju normalnih elemenata u prstenu sa involutcijom. Primetimo da sledeći rezultat važi za linearne ograničene operatore na Hilbert-ovim prostorima.

Otvoren problem. Neka je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada je a normalan element ako i samo ako jedan od sledećih uslova važi:

(i) $a(a^* + a^\dagger) = (a^* + a^\dagger)a$;

(ii) $a \in \mathcal{R}^\#$ i $a^* a (a a^*)^\dagger a^* a = a a^*$;

(iii) $a \in \mathcal{R}^\#$ i $a a^* (a^* a)^\dagger a a^* = a^* a$;

(iv) postoji neko $x \in \mathcal{R}$ tako da je $a a^* x = a^* a$ i $a^* a x = a a^*$;

(v) $a a^\dagger a^* a a a^\dagger = a a^*$.

2.3 Hermitski elementi

U ovom odeljku data je karakterizacija hermitskih elemenata koji su Moore-Penrose invertibilni u prstenu sa involucijom u algebarskim terminima. Rezultati ovog odeljka su iz rada sa D.S. Djordjevićem [51], i takodje predstavljaju uopštenje rezultata [1, 18] za matrice i operatore iz ranije pomenutih razloga. U narednoj teoremi predstavljamo neke ekvivalentne uslove pod kojima je element a u prstenu sa involucijom hermitski.

Teorema 2.3.1 *Pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada je element a hermitski ako i samo ako je jedan od sledećih ekvivalentnih uslova zadovoljen:*

(i) $aaa^\dagger = a^*$;

(ii) $aa = a^*a$;

(iii) $aa^\dagger = a^*a^\dagger$.

Dokaz. Ako je element a hermitski, onda on komutira sa svojim Moore–Penrose inverzom i $a^* = a$. Nije teško proveriti da uslovi (i)-(iii) važe.

Obrnuto, da zaključimo da je element a hermitski, pokazaćemo da je uslov $a = a^*$ zadovoljen, ili da taj element zadovoljava jedan od prethodno već dokazanih uslova ove teorema.

(i) Pretpostavimo da je $aaa^\dagger = a^*$. Tada je

$$a = (a^*)^* = (aaa^\dagger)^* = aa^\dagger a^* = aa^\dagger aaa^\dagger = aaa^\dagger = a^*.$$

(ii) Na osnovu jednakosti $aa = a^*a$, proizilazi

$$aaa^\dagger = a^*aa^\dagger = a^*.$$

Dakle, uslov (i) je zadovoljen.

(iii) Množenjem jednakost $aa^\dagger = a^*a^\dagger$ elementom a sa desne strane, proizilazi $a = a^*a^\dagger a$. Prema tome,

$$a^* = (a^*a^\dagger a)^* = a^\dagger aa = a^\dagger aa^*a^\dagger a = a^*a^\dagger a = a. \ \square$$

Sledeća teorema implicira da se za hermitski element u prstenu sa involucijom može dati karakterizacija pomoću nekih jednakosti koje sadrže Moore-Penrose-ov inverz i grupni inverz.

Teorema 2.3.2 *Pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\dagger$. Tada je element a hermitski ako i samo ako je $a \in \mathcal{R}^\#$ i jedan od sledećih ekvivalentnih uslova važi:*

(i) $aa^\# = a^*a^\dagger$;

(ii) $aa^\# = a^*a^\#$;

(iii) $aa^\# = a^\dagger a^*$;

(iv) $a^\dagger a = a^\# a^*$;

(v) $a^*aa^\# = a$;

(vi) $a^*a^*a^\# = a^*$;

(vii) $a^*a^\dagger a^\dagger = a^\#$;

(viii) $a^*a^\dagger a^\# = a^\dagger$;

(ix) $a^*a^\dagger a^\# = a^\#$;

(x) $a^*a^\# a^\# = a^\#$;

(xi) $a^\# a^* a^\# = a^\dagger$;

(xii) $aa^*a^\dagger = a$.

Dokaz. Ako je a hermitski element, onda on komutira sa svojim Moore–Penrose-ovim inverzom, i $a^\# = a^\dagger$. Lako se proverava da su uslovi (i)-(xii) zadovoljeni.

Sa druge strane, pretpostavimo da je $a \in \mathcal{R}^\#$, i pokazaćemo da a zadovoljava jednakost $a = a^*$, ili jedan od uslova Teoreme 2.3.1, ili jedan od prethodnih već dokazanih uslova ove teoreme.

(i) Iz uslova $aa^\# = a^*a^\dagger$, sledi

$$aa^\dagger = (aa^\#)aa^\dagger = a^*a^\dagger aa^\dagger = a^*a^\dagger.$$

Prema tome, element a zadovoljava uslov (iii) Teoreme 2.3.1.

(ii) Ako je $aa^\# = a^*a^\#$, onda je

$$aa = (aa^\#)aa = a^*a^\# aa = a^*a.$$

Uslov (ii) Teoreme 2.3.1 je zadovoljen.

(iii) Množenjem jednakost $aa^\# = a^\dagger a^*$ elementom a sa leve strane, proizilazi $a = aa^\dagger a^*$. Sada je

$$a^* = (aa^\dagger a^*)^* = aaa^\dagger.$$

Dakle, uslov (i) Teoreme 2.3.1 važi.

(iv) Na osnovu jednakosti $a^\dagger a = a^\# a^*$, sledi

$$a^\dagger aa = a^\dagger aa(a^\dagger a) = a^\dagger aaa^\# a^* = a^\dagger aa^* = a^*$$

i

$$a = a(a^\dagger a) = aa^\# a^*.$$

Zatim, na osnovu ovih jednakosti, sledi

$$a^* = (a^\dagger a)a = a^\# a^* a = a^\#(aa^\# a^*)a = a^\# aa = a.$$

(v) Pretpostavka $a^* aa^\# = a$ implicira

$$aa = a^* aa^\# a = a^* a.$$

Uslov (ii) Teoreme 2.3.1 je zadovoljen.

(vi) Neka je $a^* a^* a^\# = a^*$. Sada je

$$aa^\dagger = (a^\dagger)^* a^* = (a^\dagger)^* a^* a^* a^\# = aa^\dagger a^* a^\#. \tag{2.45}$$

Na osnovu jednakosti (2.45), važi

$$aa^\# = (aa^\dagger)aa^\# = aa^\dagger a^* a^\# aa^\# = aa^\dagger a^* a^\#. \tag{2.46}$$

Iz (2.45) i (2.46), sledi da je $aa^\# = aa^\dagger$. Kako je $aa^\dagger$ simetričan element, onda je i element $aa^\#$ takodje simetričan. Sada je, prema Teoremi 1.1.5, element a EP i $aa^\dagger = a^\dagger a$. Prema tome,

$$a = (aa^\#)a = (aa^\dagger)a^*(a^\# a) = a^\dagger aa^* aa^\dagger = a^*.$$

(vii) Jednakost $a^* a^\dagger a^\dagger = a^\#$ implicira

$$aa^\# = aa^* a^\dagger a^\dagger = a(a^* a^\dagger a^\dagger)aa^\dagger = aa^\# aa^\dagger = aa^\dagger.$$

Sada, zaključujemo da je element $aa^{\#}$ simetričan. Zatim je, na osnovu Teoreme 1.1.5, a EP i $a^{\#} = a^{\dagger}$, prema definiciji. Dakle, iz prethodne jednakosti i uslova (vii), sledi uslov (v):

$$a = a^{\#}aa = a^*a^{\dagger}a^{\dagger}aa = a^*a^{\#}a^{\#}aa = a^*aa^{\#}.$$

(viii) Iz jednakosti $a^*a^{\dagger}a^{\#} = a^{\dagger}$, sledi

$$aa^{\#} = aa^{\dagger}aa^{\#} = aa^*a^{\dagger}a^{\#}aa^{\#} = a(a^*a^{\dagger}a^{\#}) = aa^{\dagger}.$$

Dakle, $aa^{\#}$ je simetričan element i, prema Teoremi 1.1.5, element a je EP. Zatim, iz jednakosti $a^{\#} = a^{\dagger}$ i (viii), proizilazi

$$aa^{\#} = a^{\#}a = a^{\dagger}a = a^*a^{\dagger}a^{\#}a = a^*a^{\#}a^{\#}a = a^*a^{\#}.$$

Uslov (ii) važi.

(ix) Iz jednakosti $a^*a^{\dagger}a^{\#} = a^{\#}$, sledi

$$aa^{\dagger} = a^{\#}aaa^{\dagger} = a^*a^{\dagger}a^{\#}aaa^{\dagger} = a^*a^{\dagger}aa^{\dagger} = a^*a^{\dagger}.$$

Prema tome, a zadovoljava uslov (iii) Teoreme 2.3.1.

(x) Ako je $a^*a^{\#}a^{\#} = a^{\#}$, onda je

$$aa^{\#} = a^{\#}a = a^*a^{\#}a^{\#}a = a^*a^{\#}.$$

Jednakost (ii) je zadovoljena.

(xi) Neka je $a^{\#}a^*a^{\#} = a^{\dagger}$. Tada je

$$a^{\#}a = a^{\#}aa^{\dagger}a = a^{\#}aa^{\#}a^*a^{\#}a = (a^{\#}a^*a^{\#})a = a^{\dagger}a.$$

Kako je element $a^{\#}a$ simetričan, onda je element a EP, prema Teoremi 1.1.5. Dakle, $a^{\#} = a^{\dagger}$, na osnovu definicije EP elementa. Iz ove jednakosti i (xi), proizilazi

$$a^{\dagger}a = a^{\#}a^*a^{\#}a = a^{\#}a^*aa^{\#} = a^{\#}a^*aa^{\dagger} = a^{\#}a^*.$$

Dakle, uslov (iv) je zadovoljen.

(xii) Koristeći jedankost $aa^*a^{\dagger} = a$, proizilazi

$$a = aa^*a^{\dagger} = (aa^*a^{\dagger})aa^{\dagger} = aaa^{\dagger}.$$

Zatim je

$$a^{\#}a = a^{\#}aaa^{\dagger} = aa^{\dagger},$$

i stoga je element $a^{\#}a$ simetričan. Dakle, a je EP, na osnovu Teoreme 1.1.5 i $aa^{\dagger} = a^{\dagger}a$. Na osnovu poslednje jednakosti i (xii), sledi

$$aa^{\dagger} = a^{\dagger}a = a^{\dagger}aa^{*}a^{\dagger} = a^{*}a^{\dagger}.$$

Prema tome, uslov (iii) Teoreme 2.3.1 važi. □

Napomenimo da Teoreme 3.1 i 3.2 u ovom poglavlju generalizuju zapažanje O.M. Baksalary-a i G. Trenkler-a, koje sledi posle Theorem 6 u [1].

Glava 3

Težinski uopšteni inverzi i perturbacije

3.1 Težinski generalisani Drazin-ov inverz

R.E. Cline i T.N.E. Greville su proširili pojam Drazin-ovog inverza na pravougaone matrice definisanjem težinskog Drazin-ovog inverza i proučavli su njegove osobine u radu [11]. V. Rakočević i Y. Wei su u radu [58] definisali i istraživali težinski Drazin-ov inverz ograničenih linearnih operatora izmedju Banach-ovih prostora. U radu [14], A. Dajić i J.J. Koliha su definisali i izučavali težinski generalisani Drazin-ov inverz ograničenih linearnih operatora izmedju Banach-ovih prostora, pokazali su glavnu karakterizaciju težinskog generalisanog Drazin-ovog inverza operatora, i dokazali su njegovu reprezentaciju pomoću matrica, što predstavlja motivaciju za rezultate u ovom odeljku. U ovom odeljku definisan je težinski generalisani Drazin-ov inverz za elemente u prstenu, proučavane su neke njegove osobine, data je glavna karakterizacija i matrična reprezentacija težinskog generalisanog Drazin-ovog inverza, dokazana u radu sa D.S. Djordjevićem [52].

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom 1 i neka je $w \in \mathcal{R}$. Neka je $\mathcal{R}_w$ prsten $\mathcal{R}$ snabdeven w-proizvodom: $a * b = awb$, za $a, b \in \mathcal{R}$. Ako je w invertibilan element, tada je $1_w = w^{-1}$ jedinica u prstenu $\mathcal{R}_w$. U ovom odeljku pretpostavimo da je $w \in \mathcal{R}^{-1}$. Lako se može proveriti da, sa ovom pretpostavkom, jednakost $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_w^{-1}$ važi.

U radu [52] definisani su težinski i težinski generalisani Drazin-ov inverz u prstenu.

Definicija 3.1.1 *Neka je* $w \in \mathcal{R}^{-1}$.

Element $a \in \mathcal{R}$ *je težinski generalisani Drazin invertibilan, ili* wg*–Drazin invertibilan, ako je* a *generalisani Drazin invertibilan u prstenu* $\mathcal{R}_w$. *Tada je* wg*–Drazin-ov inverz* $a^{d,w}$ *od* a *definisan kao generalisani Drazin-ov inverz od* a *u prstenu* $\mathcal{R}_w$, *tj.* $a^{d,w} = a^d_{\mathcal{R}_w}$.

Element $a \in \mathcal{R}$ *je težinski Drazin invertibilan, ili* w*–Drazin invertibilan, ako je* a *Drazin invertibilan u prstenu* $\mathcal{R}_w$. *Tada je* w*–Drazin-ov inverz* $a^{D,w}$ *od* a *definisan kao Drazin-ov inverz od* a *u prstenu* $\mathcal{R}_w$, *tj.* $a^{D,w} = a^D_{\mathcal{R}_w}$.

Skup svih wg–Drazin invertibilnih elemenata u $\mathcal{R}$ je označen sa $\mathcal{R}^{d,w}$, a skup svih w–Drazin invertibilnih elemenata u $\mathcal{R}$ sa $\mathcal{R}^{D,w}$. Na osnovu Teoreme 1.1.1, sledi da je wg–Drazin-ov inverz jedinstven, ako postoji.

Sledeći rezultat je dokazan razmatrajući kvazinilpotentne elemente u $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}_w$.

Teorema 3.1.1 *Neka je* $\mathcal{R}$ *prsten sa jedinicom* 1 *i neka je* $w \in \mathcal{R}^{-1}$. *Za element* $a \in \mathcal{R}$ *sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) $a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$;

(b) $aw \in \mathcal{R}^{qnil}$;

(c) $wa \in \mathcal{R}^{qnil}$.

Dokaz. (a)⇒(b): Neka je $a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$. Pretpostavimo da $y \in \mathcal{R}$ zadovoljava jednakost $awy = yaw$. Označimo sa $x = yw^{-1}$. Tada je

$$a * x = awx = awyw^{-1} = yaww^{-1} = ya,$$

i

$$x * a = xwa = yw^{-1}wa = ya.$$

Dakle, x komuira sa a u $\mathcal{R}_w$. Sada je $w^{-1} + a * x \in \mathcal{R}_w^{-1}$, pa postoji $b \in \mathcal{R}_w^{-1}$ tako da je $b * (w^{-1} + a * x) = w^{-1}$, što je ekvivalentno sa $bw(w^{-1} + awx) = w^{-1}$ ili $bw(1 + awy) = 1$. Znamo da je $b \in \mathcal{R}^{-1}$ takodje, pa sledi da je $1 + awy \in \mathcal{R}^{-1}$. Upravo smo dokazali da je $aw \in \mathcal{R}^{qnil}$, tj. uslov (b) je zadovoljen.

(b)$\Rightarrow$ (a): Neka je $aw \in \mathcal{R}^{qnil}$. Pretpostavimo da $x \in \mathcal{R}$ zadovoljava jednakost $a * x = x * a$. Sledi da je $awx = xwa$ i $awxw = xwaw$. Neka je $y = xw$. Sada važi da element aw komutira sa y. Prema tome, $1 + yaw \in \mathcal{R}^{-1}$, pa postoji neko $c \in \mathcal{R}^{-1}$ tako da je $c(1 + yaw) = 1$, što je ekvivalentno sa $c(w^{-1} + x*a)w = 1$. Dakle, $w^{-1} + x*a \in \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_w^{-1}$, odnosno, uslov (a) važi.

Ekvivalencija (a) $\Longleftrightarrow$ (c) može biti dokazana slično. $\square$

U narednoj teoremi dokazana je glavna karakterizacija wg–Drazin invertibilnih elemenata u prstenu.

Teorema 3.1.2 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom 1 i neka je $w \in \mathcal{R}^{-1}$. Za element $a \in \mathcal{R}$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) *a je wg-Drazin invertibilan i njegov wg-Drazin-ov inverz je $a^{d,w} = b \in \mathcal{R}$.*

(b) *aw je generalisani Drazin invertibilan u $\mathcal{R}$ sa $(aw)^d = bw$.*

(c) *wa je generalisani Drazin invertibilan u $\mathcal{R}$ sa $(wa)^d = wb$.*

Tada wg–Drazin-ov inverz $a^{d,w}$ od a zadovoljava

$$a^{d,w} = ((aw)^d)^2 a = a((wa)^d)^2. \tag{3.1}$$

Dokaz. (a)$\Rightarrow$(b): Pretpostavimo da a ima wg-Drazin-ov inverz, koji je označen sa b. Tada je

$$b \in \mathrm{comm}_w^2(a), \qquad b * a * b = b, \qquad a * b * a - a \in \mathcal{R}_w^{qnil}.$$

Pretpostavimo da $y \in \mathcal{R}$ zadovoljava jednakost $awy = yaw$. Neka je $x = yw^{-1}$. Sada je

$$a * x = awx = awyw^{-1} = yaww^{-1} = ya,$$

i

$$x * a = xwa = yw^{-1}wa = ya.$$

Dakle, $a * x = x * a$. Kako je $b \in \mathrm{comm}_w^2(a)$, onda je $b * x = x * b$, tj.

$$bwyw^{-1} = yw^{-1}wb.$$

Prema tome, $bwy = ybw$. Zaključujemo da je $c = bw \in \mathrm{comm}^2(aw)$.

Pošto je $b * a * b = b$, tada je $(bw)^2 a = b$ i

$$c^2(aw) = (bw)^2 aw = bw = c.$$

Iz $a*b*a-a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$, sledi da je $(aw)^2 b - a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$. Zatim je $(aw)^2 bw - aw \in \mathcal{R}^{qnil}$, na osnovu Teoreme 3.1.1. Dakle, element $(aw)^2 c - aw$ je kvazinilpotentan u $\mathcal{R}$. Tvrdjenje (b) je dokazano i

$$(aw)^d = c = bw.$$

(b)$\Rightarrow$(a): Pretpostavimo da $aw \in \mathcal{R}$ ima g-Drazin-ov inverz c. Tada je

$$c \in \mathrm{comm}^2(aw), \qquad c^2(aw) = c, \qquad c(aw)^2 - aw \in \mathcal{R}^{qnil}.$$

Označimo sa $b = c^2 a$. Pretpostavimo da $x \in \mathcal{R}$ zadovoljava jednakost $a * x = x * a$. Neka je $y = xw$. Sada je

$$awy = awxw = xwaw = yaw.$$

Kako je $c \in \mathrm{comm}^2(aw)$, sledi $cy = yc$. Iz

$$bwy = c^2 awy = c^2 yaw = yc^2 aw = ybw,$$

tj.

$$bwxw = xwbw,$$

proizilazi

$$b * x = bwx = bwxww^{-1} = xwbww^{-1} = xwb = x * b.$$

Dakle, $b \in \mathrm{comm}_w^2(a)$. Iz jednakosti $c^2(aw) = c$ sledi

$$b * a * b = (c^2 aw)(awc^2)a = c^2 a = b.$$

Pošto je element $c(aw)^2 - aw$ kvazinilpotentan u $\mathcal{R}$, sledi da je

$$a * b * a - a = (awc^2)awa - a = cawa - a$$

kvazinilpotentan u $\mathcal{R}_w$, prema Teoremi 3.1.1. Dakle, a je wg-Drazin invertibilan element i $a^{d,w} = c^2 a$.

Ekvivalencija (a) $\iff$ (c) može biti dokazana na sličan način. $\square$

Sledeći rezultat je dokazan razmatrajući matričnu formu elementa $a \in \mathcal{R}^{d,w}$.

Teorema 3.1.3 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom 1 i neka je $w \in \mathcal{R}^{-1}$. Tada je $a \in \mathcal{R}$ wg-Drazin invertibilan element ako i samo ako postoje $p, q \in \mathcal{R}^\bullet$ takvi da je $p \in comm^2(aw)$, $q \in comm^2(wa)$, i*

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p,q}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}_{q,p},$$

gde je $a_1w_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $w_1a_1 \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$, $a_2w_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{qnil}$ i $w_2a_2 \in ((1-q)\mathcal{R}(1-q))^{qnil}$. Tada je wg–Drazin-ov inverz od a dat sa

$$a^{d,w} = \begin{bmatrix} a_1((w_1a_1)^{-1})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} ((a_1w_1)^{-1})^2a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.2}$$

Dokaz. Ako je $a \in \mathcal{R}$ wg-Drazin invertibilan element, tada su aw i wa generalisani Drazin invertibini elementi, na osnovu Teoreme 3.1.2. Tada važi sledeća matrična reprezentacija elemenata aw i wa u odnosu na idempotente $p = aw(aw)^d$ i $q = wa(wa)^d$:

$$aw = \begin{bmatrix} (aw)_1 & 0 \\ 0 & (aw)_2 \end{bmatrix}_{p,p}, \quad wa = \begin{bmatrix} (wa)_1 & 0 \\ 0 & (wa)_2 \end{bmatrix}_{q,q},$$

pri čemu je $(aw)_1 = (aw)^2(aw)^d \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $(aw)_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{qnil}$, $(wa)_1 = (wa)^2(wa)^d \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$, $(wa)_2 \in ((1-q)\mathcal{R}(1-q))^{qnil}$.

Idempotenti $p = aw(aw)^d$, $q = wa(wa)^d$ indukuju reprezentactiju elementa a datu sa

$$a = \begin{bmatrix} paq & pa(1-q) \\ (1-p)aq & (1-p)a(1-q) \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{bmatrix}_{p,q}.$$

Lako proveravamo da je $a_{12} = pa(1-q) = 0$ i $a_{21} = (1-p)aq = 0$. Dakle,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p,q}.$$

Slično, idempotenti q, p indukuju sledeću reprezentactiju elementa w:

$$w = \begin{bmatrix} qwp & qw(1-p) \\ (1-q)wp & (1-q)w(1-p) \end{bmatrix}_{q,p} = \begin{bmatrix} w_1 & w_{12} \\ w_{21} & w_2 \end{bmatrix}_{q,p}.$$

Kako je $w_{12} = qw(1-p) = 0$ i $w_{21} = (1-q)wp = 0$, sledi da je

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}_{q,p}.$$

Prema tome

$$aw = \begin{bmatrix} a_1w_1 & 0 \\ 0 & a_2w_2 \end{bmatrix}_{p,p}, \quad wa = \begin{bmatrix} w_1a_1 & 0 \\ 0 & w_2a_2 \end{bmatrix}_{q,q},$$

pri čemu je $a_1w_1 = (aw)_1 = (aw)^2(aw)^d \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$, $a_2w_2 = (aw)_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{qnil}$, $w_1a_1 = (wa)_1 = (wa)^2(wa)^d \in (q\mathcal{R}q)^{-1}$, $w_2a_2 = (wa)_2 \in ((1-q)\mathcal{R}(1-q))^{qnil}$.

Sada je wg–Drazin-ov inverz od a jednak, prema formuli (3.1),

$$\begin{aligned} a^{d,w} &= a((wa)^d)^2 \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} (w_1a_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2_{q,q} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} ((w_1a_1)^{-1})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q,q} \\ &= \begin{bmatrix} a_1((w_1a_1)^{-1})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p,q}. \end{aligned}$$

Druga jednakost u (3.2) može biti dokazana na osnovu jednakosti $a^{d,w} = ((aw)^d)^2a$.

U suprotnom smeru, ako dekompozicija sa navedenim osobinama postoji, tada je

$$aw = \begin{bmatrix} a_1w_1 & 0 \\ 0 & a_2w_2 \end{bmatrix}_{p,p}.$$

Pošto je $a_1w_1 \in (p\mathcal{R}p)^{-1}$ i $a_2w_2 \in ((1-p)\mathcal{R}(1-p))^{qnil}$, sledi da je element aw generalisani Drazin invertibilan. Tada je a wg–Drazin invertibilan. $\square$

Sada posmatramo prsten sa involucijom i dokazujemo sledeći rezultat.

Teorema 3.1.4 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom. Tada je $a \in \mathcal{R}$ wg-Drazin invertibilan element ako i samo ako je a^* w^*g-Drazin invertibilan element. U ovom slučaju je $(a^*)^{d,w^*} = (a^{d,w})^*$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.1.3, aw je generalisani Drazin invertibilan element ako i samo ako je $(aw)^* = w^*a^*$ generalisani Drazin invertibilan element. Tada je a wg–Drazin invertibilan element ako i samo ako je a^* w^*g–Drazin invertibilan element, prema Teoremi 3.1.2. □

Na kraju, ako je $\mathcal{R}$ kompleksna Banach-ova algebra, tada možemo pretpostaviti uopštenije uslove. Tačnije, nije nam neophodna jedinica u $\mathcal{R}$, i kao posledica toga w ne mora biti invertibilan element. Koristićemo normu $\|\cdot\|_w$ u $\mathcal{R}_w$ na sledeći način: ako je $a \in \mathcal{R}$, tada je $\|a\|_w = \|a\|\|w\|$. Dakle, $\mathcal{R}_w$ postaje kompleksna Banach-ova algebra. Pridružićemo jedinicu 1 u $\mathcal{R}_w$. Prema tome, koncept spektra i spektralnog poluprečnika je dostupan. Vrlo je važan, za razmatranje težinske Drazin invertibilnosti, sledeći rezultat.

Lema 3.1.1 *Neka je $\mathcal{R}$ kompleksna Banach-ova algebra i $a, w \in \mathcal{R}$. Tada je $r_w(a) = r(aw) = r(wa)$, gde $r(\cdot)$ označava spektralni poluprečnik u $\mathcal{R}$, a $r_w(\cdot)$ označava spektralni poluprečnik u $\mathcal{R}_w$. Dalje, $a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$ ako i samo ako je $aw \in \mathcal{R}^{qnil}$ ako i samo ako je $wa \in \mathcal{R}^{qnil}$.*

Radi kompletnosti, dajemo kratak dokaz sledećeg rezultata u Banach-ovoj algebri.

Teorema 3.1.5 *Neka je $\mathcal{R}$ kompleksna Banach-ova algebra i neka je $w \in \mathcal{R}$, $w \neq 0$. Tada su za $a \in \mathcal{R}$ sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(a) $a \in \mathcal{R}_w^d$ *i* $a^{d,w} = b \in \mathcal{R}$.

(b) $aw \in \mathcal{R}^d$ *i* $(aw)^d = bw$.

(c) $wa \in \mathcal{R}^d$ *i* $(wa)^d = wb$.

Tada wg-Drazin-ov inverz $a^{d,w}$ od a zadovoljava

$$a^{d,w} = ((aw)^d)^2 a = a((wa)^d)^2. \tag{3.3}$$

Dokaz. (a)⇒(b): Pretpostaivmo da je $a^{d,w} = b$. Uslove $a * b = b * a$, $b*a*b = b$ i $a*b*a-a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$, napišimo u obliku $awb = bwa$, $(bw)^2a = b$ i $t = (aw)^2b - a \in \mathcal{R}_w^{qnil}$. Neka je $c = bw$. Tada je $(aw)c = c(aw)$ i

$c^2(aw) = c$. Prema Lemi 3.1.1, proizilazi da je $r(tw) = r_w(t) = 0$. Prema tome, $(aw)^2c - aw = tw$ je kvazinilpotentan element u $\mathcal{R}$ i (b) je dokazano, pri čemu je $(aw)^d = c = bw$.

(b)⇒(a): Pretpostavimo da je $(aw)^d = c$. Neka je $b = c^2a$. Iz jednakosti $(aw)c = c(aw)$ i $c^2(aw) = c$ sledi da je $a * b = awc^2a = c^2awa = b * a$ i $b * a * b = (c^2aw)(awc^2)a = c^2a = b$. Označimo $a * b * a - a = (awc^2)awa - a = cawa - a = s$. Kako je element $sw = c(aw)^2 - aw$ kvazinilpotentan u $\mathcal{R}$, onda je $r_w(s) = r(sw) = 0$ i element s je kvazinilpotentan u $\mathcal{R}_w$. Dakle, a je wg-Drazin invertibilan element i $a^{d,w} = c^2a$. □

Napomenimo da Teorema 3.1.3 takodje važi ako pretpostavimo da je $\mathcal{R}$ Banach-ova algebra, bez pretpostavke da je $w \in \mathcal{R}^{-1}$.

Prethodna dva rezultata su dokazana za slučaj $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ u [14].

3.2 Težinski EP elementi u prstenu

Kao što se iz samog naslova zaključuje, cilj ovog odeljka je da definišemo težinske EP elemente u prstenu sa involjucijom i dokažemo njihovu glavnu karakterizaciju. Rezultati ovog odeljka su takodje iz rada sa D.S. Djordjevićem [52].

Najpre uvodimo definiciju težinskog EP i težinskog generalisanog EP elementa u prstenu.

Definicija 3.2.1 *Element a u prstenu $\mathcal{R}$ sa involucijom je težinski EP ako je $a \in \mathcal{R}_w^d \cap \mathcal{R}_w^\dagger$ i $a^{d,w} = a^\dagger_{\mathcal{R}_w}$. Element a je težinski generalisani EP (ili wgEP kraće) ako postoji $k \in N$ tako da je a^k težinski EP.*

Sada dokazujemo glavnu karakterizaciju težinskih EP elemenata u prstenu.

Teorema 3.2.1 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom i jedinicom 1 i neka je $w \in \mathcal{R}^{-1}$. Za element $a \in \mathcal{R}$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) *a je težinski EP.*

(b) *$aw \in \mathcal{R}^d \cap \mathcal{R}^\dagger_{w^*,w^*}$ i $(aw)^d = (aw)^\dagger_{w^*,w^*}$.*

(c) $wa \in \mathcal{R}^d \cap \mathcal{R}^\dagger_{w^{-1},w^{-1}}$ *i* $(wa)^d = (wa)^\dagger_{w^{-1},w^{-1}}$.

Dokaz. (a)⇒(b): Pretpostavimo da je a težinski EP element, tj. $a \in \mathcal{R}^d_w \cap \mathcal{R}^\dagger_w$ i $a^{d,w} = a^\dagger_{\mathcal{R}_w} \equiv b$. Na osnovu uslova $a \in \mathcal{R}^d_w$ i Teoreme 3.1.2, proizilazi da je $aw \in \mathcal{R}^d$ i $(aw)^d = bw$. Kako je $a \in \mathcal{R}^\dagger_w$ i $a^\dagger_{\mathcal{R}_w} = b$, prema definiciji, sledi

$$a * b * a = a, \quad b * a * b = b, \quad (a * b)^* = a * b, \quad (b * a)^* = b * a,$$

odnosno,

$$awbwa = a, \quad bwawb = b, \quad (awb)^* = awb, \quad (bwa)^* = bwa.$$

Zatim, važi

$$awbwaw = aw,$$

$$bwawbw = bw,$$

$$(w^*awbw)^* = w^*(awb)^*w = w^*awbw,$$

$$(w^*bwaw)^* = w^*(bwa)^*w = w^*bwaw.$$

Dakle, $aw \in \mathcal{R}^\dagger_{w^*,w^*}$ i $(aw)^\dagger_{w^*,w^*} = bw = (aw)^d$.

(b)⇒(a): Neka je $aw \in \mathcal{R}^d \cap \mathcal{R}^\dagger_{w^*,w^*}$ i $(aw)^d = (aw)^\dagger_{w^*,w^*}$. Prema Teoremi 3.1.2 i $aw \in \mathcal{R}^d$, sledi $a \in \mathcal{R}^d_w$ i $b = a^{d,w}$. Pošto je $bw = (aw)^d = (aw)^\dagger_{w^*,w^*}$, na osnovu definicije težnskog MP-inverza, proizilazi

$$awbwaw = aw, \quad bwawbw = bw,$$

$$(w^*awbw)^* = w^*awbw, \quad (w^*bwaw)^* = w^*bwaw.$$

Sada je

$$a * b * a = awbwaww^{-1} = aww^{-1} = a,$$

$$b * a * b = bwawbww^{-1} = bww^{-1} = b,$$

$$(a * b)^* = ((w^*)^{-1}w^*awbww^{-1})^* = (w^*)^{-1}w^*awbww^{-1} = a * b,$$

$$(b * a)^* = ((w^*)^{-1}w^*bwaww^{-1})^* = (w^*)^{-1}w^*bwaww^{-1} = b * a.$$

Prema tome, $a \in \mathcal{R}^d_w$ i $a^\dagger_{\mathcal{R}_w} = b = a^{d,w}$. Dakle, a je težinski EP element.

(a)⇒(c): Ako je a težinski EP element, tada je $a \in \mathcal{R}_w^d \cap \mathcal{R}_w^\dagger$ i $a^{d,w} = a_{\mathcal{R}_w}^\dagger \equiv b$. Iz uslova $a \in \mathcal{R}_w^d$ i Teoreme 3.1.2, sledi da je $wa \in \mathcal{R}^d$ i $(wa)^d = wb$. Kako je $a \in \mathcal{R}_w^\dagger$, onda je

$$a * b * a = a, \quad b * a * b = b, \quad (a * b)^* = a * b, \quad (b * a)^* = b * a,$$

tj.

$$awbwa = a, \quad bwawb = b, \quad (awb)^* = awb, \quad (bwa)^* = bwa.$$

Sada proizilazi

$$wawbwa = wa,$$

$$wbwawb = wb,$$

$$(w^{-1}wawb)^* = (awb)^* = awb = w^{-1}wawb,$$

$$(w^{-1}wbwa)^* = (bwa)^* = bwa = w^{-1}wbwa.$$

Prema tome, $wa \in \mathcal{R}_{w^{-1},w^{-1}}^\dagger$ i $(wa)_{w^{-1},w^{-1}}^\dagger = wb = (wa)^d$.

(c)⇒(a): Pretpostavimo da je $wa \in \mathcal{R}^d \cap \mathcal{R}_{w^{-1},w^{-1}}^\dagger$ i $(wa)^d = (wa)_{w^{-1},w^{-1}}^\dagger$. Na osnovu Teoreme 3.1.2 i $wa \in \mathcal{R}^d$, sledi $a \in \mathcal{R}_w^d$ i $b = a^{d,w}$. Pošto je $wb = (wa)^d = (wa)_{w^{-1},w^{-1}}^\dagger$, važi

$$wawbwa = wa, \quad wbwawb = wb,$$

$$(w^{-1}wawb)^* = w^{-1}wawb, \quad (w^{-1}wbwa)^* = w^{-1}wbwa.$$

Zatim je

$$a * b * a = w^{-1}wawbwa = w^{-1}wa = a,$$

$$b * a * b = w^{-1}wbwawb = w^{-1}wb = b,$$

$$(a * b)^* = (w^{-1}wawb)^* = w^{-1}wawb = a * b,$$

$$(b * a)^* = (w^{-1}wbwa)^* = w^{-1}wbwa = b * a.$$

Dakle, $a \in \mathcal{R}_w^\dagger$ i $a_{\mathcal{R}_w}^\dagger = b = a^{d,w}$. Zaključujemo da je a težinski EP element. □

3.3 Wg–Drazin-ov inverz sume dva operatora

Neka su X i Y proizvoljni Banach-ovi prostori i $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$. Podsetimo se da ako Drazin-ovi inverzi A^D i B^D postoje, ne mora da znači da i Drazin-ov inverz $(A+B)^D$ postoji. Zatim, ako $(A+B)^D$ postoji, onda ne znamo uvek kako da izračunamo $(A+B)^D$ u zavisnosti od A, B, A^D, B^D. U radu [33], R.E. Hartwig, G. Wang i Y. Wei su dokazali formulu za izračunavanje Drazin-ovog inverza sume dve matrice, kada je jedan od proizvoda ovih matrica nula. D.S. Djordjević i Y. Wei generalisali su njihove rezultate na ograničene linearne operatore na Banach-ovim prostorima [21]. U radu [6], N. Castro Gonzalez je proširila ove aditivne rezultate na kompleksne matrice koristeći slabije uslove. Na kraju, N. Castro-Gonzalez i J.J. Koliha su uopštili rezultate za generalisani Drazin-ov inverz elemenata Banach-ovih algebri [7]. U ovoj sekciji data je formula za izračunavanje težinskog generalisanog Drazin-ovog inverza sume dva ograničena linearna operatora na Banach-ovim prostorima. Izloženi rezultati su dokazani u radu sa D.S. Djordjevićem [47].

Počinjemo teoremom koja predstavlja poseban slučaj glavne teoreme.

Teorema 3.3.1 *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$, neka je $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilan i $N \in \mathcal{B}(X,Y)$ takav da je $WN \in \mathcal{B}(X)$ kvazinilpotentan. Ako je $NWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WNWB = 0$, tada je*

$$(WN + WB)^d = (WB)^d + ((WB)^d)^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} ((WB)^d)^i WNS(i) \right) \quad (3.4)$$

i, za svako $i \geq 0$,

$$(I - WBWB^{d,W})(WN + WB)^i = S(i), \quad (3.5)$$

gde je

$$S(i) = (I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{j=0}^{i} (WB)^{i-j} (WN)^j \right).$$

Dalje, za svako $i \geq l$, je

$$S(i) = (WB)^{i-l+1}S(l-1) = S(l-1)(WN)^{i-l+1}.$$

Dokaz. Pošto je B Wg–Drazin invertibilan, onda operatori B i W imaju sledeće matrične reprezentacije:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu su B_1, W_1 invertibilni, a W_2B_2 je kvazinilpotentan. Sada iz jednakosti $NWB^{d,W} = 0$ sledi da N ima matričnu formu

$$N = \begin{bmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}.$$

Kako je operator $WN = \begin{bmatrix} 0 & W_1N_1 \\ 0 & W_2N_2 \end{bmatrix}$ kvazinilpotentan, na osnovu Lemme 1.2.5, zaključujemo da je W_2N_2 kvazinilpotentan. Iz jednakosti $(I - WBWB^{d,W})WNWB = 0$ sledi da je $W_2N_2W_2B_2 = 0$. Dakle, za $i \geq 0$,

$$(W_2N_2 + W_2B_2)^i = \sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^{i-j}(W_2N_2)^j = \sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^j(W_2N_2)^{i-j}.$$

Prema Lemmi 1.2.3, sledi da je $W_2N_2 + W_2B_2$ kvazinilpotentan. Sada, na osnovu Lemme 1.2.2, proizilazi

$$\begin{aligned}
&(WN + WB)^d \\
&= \left(\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \right)^d \\
&= \begin{bmatrix} W_1B_1 & W_1N_1 \\ 0 & W_2N_2 + W_2B_2 \end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix} (W_1B_1)^{-1} & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$X = \left((W_1B_1)^{-1}\right)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left((W_1B_1)^{-1}\right)^i W_1N_1(W_2N_2 + W_2B_2)^i\right]$$

$$= \left((W_1B_1)^{-1}\right)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left((W_1B_1)^{-1}\right)^i W_1N_1 \left(\sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^{i-j}(W_2N_2)^j\right)\right].$$

Neka je $S(i) = (I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{j=0}^{i}(WB)^{i-j}(WN)^j\right)$, za svako $i \geq 0$. Zatim, za svako $i \geq 1$, važi

$$S(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2B_2)^i \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2B_2)^{i-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W_1N_1(W_2N_2)^{j-1} \\ 0 & (W_2N_2)^j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^{i-j}(W_2N_2)^j \end{bmatrix}.$$

Prema tome,

$$(WB)^d + ((WB)^d)^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty}((WB)^d)^i WNS(i)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} (W_1B_1)^{-1} & \sum_{i=0}^{\infty} ((W_1B_1)^{-1})^{i+2} W_1N_1 \left(\sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^{i-j}(W_2N_2)^j\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (W_1B_1)^{-1} & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (WN + WB)^d.$$

Jednakost (3.5) i drugo tvrdjenje teoreme se lako proveravaju. □

Kao posledice prethodne teoreme proizilaze sledeći rezultati.

Posledica 3.3.1 *Neka operatori $B, N \in \mathcal{B}(X, Y)$ zadovoljavaju uslove Teoreme* 3.3.1. *Tada je*

$$(WN+WB)^d(WN+WB) = (WB)^dWB + \left(\sum_{i=0}^{\infty}((WB)^d)^{i+1}WNS(i)\right),$$

pri čemu je $S(i)$ definisano u (3.5).

Posledica 3.3.2 *Neka je $W \in B(Y,X)$, neka je $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilan i $N \in \mathcal{B}(X,Y)$ takav da je $WN \in \mathcal{B}(X)$ kvazinilpotentan. Neka je $NWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WNWB = 0$.*

(i) *Ako je $(WN)^2 = 0$, tada je*

$$\begin{aligned}&(WN + WB)^d \\ &= (WB)^d + ((WB)^d)^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty}((WB)^d)^i WN(WB)^i\right) \\ &+ ((WB)^d)^3 \left(\sum_{i=1}^{\infty}((WB)^d)^i WN(WB)^i\right) WN.\end{aligned}$$

(ii) *Ako je $WNWR = 0$, tada je*

$$\begin{aligned}&(WN + WB)^d WR \\ &= (WB)^d WR + ((WB)^d)^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty}((WB)^d)^i WN(WB)^i\right) WR.\end{aligned}$$

(iii) *Ako je $(WB)^2 = WB$, tada je*

$$(WN + WB)^d = (I - WN)^{-1} WB.$$

Dokaz. Svaki od ovih slučajeva sledi direktno iz Teoreme 3.3.1 i sledećih pojednostavljenja.

Neka je $S(i) = (I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{j=0}^{i}(WB)^{i-j}(WN)^j\right)$, za svako $i \geq 0$.

(i) Kako je $(WN)^2 = 0$, onda je, za svako $i \geq 1$,

$$WNS(i) = WN(WB)^i + WN(WB)^{i-1}WN.$$

(ii) Pošto je $WNWR = 0$, tada je $WNS(i)WR = WN(WB)^i WR$.

(iii) Kako je $(WB)^2 = WB$, onda je $(WB)^d = WB$ i iz pretpostavke $NWB^{d,W} = 0$ sledi $NWB = N(WB)^d = NWB^{d,W} = 0$. Tada iz Lemme 1.2.4 sledi

$$\begin{aligned}(WN+WB)^d &= \sum_{i=0}^{\infty}(WN)^i((WB)^d)^{i+1}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(WN)^i(WB)^{i+1}\\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(WN)^i\right)WB\\ &= (I-WN)^{-1}WB.\end{aligned}$$

□

Sada predstavljamo i dokazujmo glavni rezultat.

Teorema 3.3.2 *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ i neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilni. Ako je $A^{d,W}WB = 0$, $AWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WAWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$, tada je $A + B$ Wg-Drazin invertibilan i*

$$\begin{aligned}&(A+B)^{d,W} =\\ &= (A+B)\times\\ &\times\left[(WB)^d\left(I+\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1}WAZ(i)\right)(I-WAWA^{d,W})\right]^2\\ &+(A+B)(I-WBWB^{d,W})\left(I+\sum_{i=0}^{\infty}Z(i)WB\left((WA)^d\right)^{i+1}\right)\times\\ &\times\left((WA)^d\right)^2\\ &-(A+B)\left((WB)^d\right)^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^iWAZ(i)WB\right)\left((WA)^d\right)^2\\ &-(A+B)(WB)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}WAZ(i)WB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3\\ &-(A+B)\left((WB)^d\right)^2\times\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left((WB)^d\right)^i WAZ(i+k+1)WB \left((WA)^d\right)^k \right) \left((WA)^d\right)^3 \\
&- (A+B) \times \\
&\times \left[(WB)^d \left(I + \sum_{i=0}^{\infty} \left((WB)^d\right)^{i+1} WAZ(i) \right) (I - WAWA^{d,W}) \right]^2 \times \\
&\times WB(WA)^d
\end{aligned} \tag{3.6}$$

gde je

$$Z(i) = (I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{j=0}^{i} (WB)^{i-j} (WA)^j \right) (I - WAWA^{d,W}). \tag{3.7}$$

Dalje, za svako $i \geq l$, je

$$Z(i) = (WB)^{i-l+1} Z(l-1) = Z(l-1)(WA)^{i-l+1}.$$

Dokaz. Pošto je A Wg–Drazin invertibilan, onda operatori A i W imaju sledeću matričnu formu:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu su A_1, W_1 invertibilni i $W_2 A_2$ je kvazinilpotentan. Tada iz jednakosti $A^{d,W} WB = 0$ sledi da B može biti zapisano u obliku

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Zatim, pomoću Lemme 1.2.2, izračunavamo $(WB)^d (= WB^{d,W})$. Prema $AWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WAWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$, sledi da je $A_2 W_2 B_2^{d,W_2} = 0$ i $(I - W_2 B_2 W_2 B_2^{d,W_2}) W_2 A_2 W_2 B_2 = 0$. Sada su uslovi Teoreme 3.3.1 zadovoljeni za: B_2, W_2, A_2, redom, umesto B, W, N.

Na osnovu Lemme 1.2.2, sledi

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W}\\
&=(A+B)((W(A+B))^d)^2=(A+B)((WA+WB)^d)^2\\
&=(A+B)\left(\begin{bmatrix} W_1A_1 & 0\\ W_2B_1 & W_2A_2+W_2B_2\end{bmatrix}^d\right)^2\\
&=(A+B)\begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & 0\\ X & (W_2A_2+W_2B_2)^d\end{bmatrix}^2\\
&=\begin{bmatrix} A_1 & 0\\ B_1 & A_2+B_2\end{bmatrix}\times\\
&\times\begin{bmatrix} ((W_1A_1)^{-1})^2 & 0\\ X(W_1A_1)^{-1}+(W_2A_2+W_2B_2)^dX & ((W_2A_2+W_2B_2)^d)^2\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A_1((W_1A_1)^{-1})^2 & 0\\ X' & (A_2+B_2)((W_2A_2+W_2B_2)^d)^2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
X &= (I-(W_2A_2+W_2B_2)(W_2A_2+W_2B_2)^d)\times\\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}(W_2A_2+W_2B_2)^iW_2B_1((W_1A_1)^{-1})^i\right)((W_1A_1)^{-1})^2\\
&- (W_2A_2+W_2B_2)^dW_2B_1(W_1A_1)^{-1}
\end{aligned}
$$

i

$$X'=B_1((W_1A_1)^{-1})^2+(A_2+B_2)[X(W_1A_1)^{-1}+(W_2A_2+W_2B_2)^dX].$$

Iz Teoreme 3.3.1 sledi

$$(W_2A_2+W_2B_2)^d=(W_2B_2)^d+((W_2B_2)^d)^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}((W_2B_2)^d)^iW_2A_2S(i)\right)$$

gde je $S(i)=(I-W_2B_2W_2B_2^{d,W_2})\left(\sum_{j=0}^{i}(W_2B_2)^j(W_2A_2)^{i-j}\right)$, za svako $i\geq 0$. Zatim je

$$
\begin{aligned}
&I-(W_2A_2+W_2B_2)(W_2A_2+W_2B_2)^d\\
&=I-W_2B_2(W_2B_2)^d-(W_2B_2)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}((W_2B_2)^d)^iW_2A_2S(i)\right).
\end{aligned}
$$

Kako je

$$(W_2A_2+W_2B_2)^dX=-\left((W_2A_2+W_2B_2)^d\right)^2W_2B_1(W_1A_1)^{-1}$$

onda je

$$\begin{aligned}
X' &= B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2+(A_2+B_2)\Bigg[\Bigg(I-W_2B_2(W_2B_2)^d\\
&- (W_2B_2)^d\sum_{i=0}^{\infty}((W_2B_2)^d)^iW_2A_2S(i)\Bigg)\times\\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}(W_2A_2+W_2B_2)^iW_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{i+3}\right)\\
&- (W_2A_2+W_2B_2)^dW_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2\\
&- \left((W_2A_2+W_2B_2)^d\right)^2W_2B_1(W_1A_1)^{-1}\Bigg]\\
&= B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2+X_1+X_2+X_3+X_4
\end{aligned}$$

pri čemu su X_1, X_2, X_3 i X_4 sledeći izrazi:

$$\begin{aligned}
X_1 &= (A_2+B_2)(I-W_2B_2(W_2B_2)^d)\times\\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}(W_2A_2+W_2B_2)^iW_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^i\right)\left((W_1A_1)^{-1}\right)^3\\
&= (A_2+B_2)(I-W_2B_2(W_2B_2)^d)\times\\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^i\right)\left((W_1A_1)^{-1}\right)^3,
\end{aligned}$$

i poslednja jednakost sledi iz jednakosti (3.5) u Teoremi 3.3.1. Dalje,

$$\begin{aligned}
&X_2\\
&=-(A_2+B_2)(W_2B_2)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((W_2B_2)^d\right)^iW_2A_2S(i)\right)\times\\
&\times\left(\sum_{i=0}^{\infty}(W_2A_2+W_2B_2)^iW_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^i\right)\left((W_1A_1)^{-1}\right)^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(A_2+B_2)(W_2B_2)^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_2A_2S(k)W_2B_1 \left((W_1A_1)^{-1}\right)^{k+3} \right) \\
&- (A_2+B_2)(W_2B_2)^d \times \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left((W_2B_2)^d\right)^{i+1} W_2A_2S(i+k+1)W_2B_1 \left((W_1A_1)^{-1}\right)^{k+3} \right)
\end{aligned}
$$

gde poslednja jednakost sledi iz jednakosti (3.5), na osnovu koje je $S(i)(W_2A_2+W_2B_2)^k = (I-W_2B_2W_2B_2^{d,W})(W_2A_2+W_2B_2)^{i+k} = S(i+k)$ i posle zamene i sa $i-1$ u poslednjoj sumi. Takodje

$$
\begin{aligned}
X_3 &= -(A_2+B_2)(W_2A_2+W_2B_2)^d W_2B_1 \left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 \\
&= -(A_2+B_2)(W_2B_2)^d W_2B_1 \left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 \\
&- (A_2+B_2)\left((W_2B_2)^d\right)^2 \times \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left((W_2B_2)^d\right)^i W_2A_2S(i)W_2B_1 \right) \left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Konačno,

$$
X_4 = -(A_2+B_2)\left((W_2A_2+W_2B_2)^d\right)^2 W_2B_1(W_1A_1)^{-1}.
$$

Neka je

$$
Z(i) = (I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{j=0}^{i} (WB)^{i-j}(WA)^j \right) (I - WAWA^{d,W}).
$$

Direktnim izračunavanjem, za svako $i \geq 1$, važi

$$
\begin{aligned}
Z(i) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(W_2B_2)^dW_2B_1 & I - W_2B_2(W_2B_2)^d \end{bmatrix} \times \\
&\times \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (W_2B_2)^{i-j-1}W_2B_1 & (W_2B_2)^{i-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2A_2)^j \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2A_2)^i \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I - W_2B_2(W_2B_2)^d) \sum_{j=0}^{i} (W_2B_2)^{i-j}(W_2A_2)^j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S(i) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

i

$$
WAZ(i)WB\left((WA)^d\right)^q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_2A_2S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^q & 0 \end{bmatrix},
$$

za svako $q \geq 1$.

Sada, izračunavamo izraze u jednakosti (3.6) za $(A+B)^{d,W}$ koristeći blok dekompoziciju:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= (A+B) \times \\
&\times \left[(WB)^d\left(I + \sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1} WAZ(i)\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2 \\
&= (A+B)\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2B_2)^d \end{bmatrix}\right. \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left((W_2B_2)^d\right)^{i+3} W_2B_1 & \left((W_2B_2)^d\right)^{i+2} \end{bmatrix} \times \\
&\times \left.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2A_2S(i) \end{bmatrix}\right\}^2 \\
&= (A+B)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (W_2B_2)^d + \sum_{i=0}^{\infty}\left((W_2B_2)^d\right)^{i+2} W_2A_2S(i) \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & A_2 + B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left((W_2A_2 + W_2B_2)^d\right)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_2+B_2)\left((W_2A_2 + W_2B_2)^d\right)^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma_2 = (A+B)(I - WBWB^{d,W}) \times
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \quad \left(I+\sum_{k=0}^{\infty} Z(k)WB\left((WA)^d\right)^{k+1}\right)\left((WA)^d\right)^2 \\
&= \quad \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & A_2+B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -(W_2B_2)^dW_2B_1 & I-W_2B_2(W_2B_2)^d \end{bmatrix}\times \\
&\times \quad \begin{bmatrix} \left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 & 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} S(k)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{k+3} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \quad \begin{bmatrix} A_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 & 0 \\ X'' & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
X'' \quad &= \quad B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 \\
&- \quad (A_2+B_2)\Bigg[(W_2B_2)^dW_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 \\
&+ \quad (I-W_2B_2(W_2B_2)^d)\left(\sum_{k=0}^{\infty} S(k)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{k+3}\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma_3 = -(A+B)\left((WB)^d\right)^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i WAZ(i)WB\right)\left((WA)^d\right)^2
$$

$$
= -(A+B)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}\left((W_2B_2)^d\right)^{i+2} W_2A_2S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (A_2+B_2)\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left((W_2B_2)^d\right)^{i+2} W_2A_2S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^2 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\Sigma_4 = -(A+B)(WB)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty} WAZ(i)WB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3
$$

$$
= -(A+B)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (W_2B_2)^d\sum\limits_{i=0}^{\infty} W_2A_2S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{i+3} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (A_2+B_2)(W_2B_2)^d \sum\limits_{i=0}^{\infty} W_2A_2S(i)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{i+3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_5 = -(A+B)\left((WB)^d\right)^2 \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i WAZ(i+k+1)WB\left((WA)^d\right)^k\right)\left((WA)^d\right)^3$$

$$= -\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & A_2+B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X''' & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (A_2+B_2)X''' & 0 \end{bmatrix},$$

gde je

$$X''' = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((W_2B_2)^d\right)^{i+2} W_2A_2S(i+k+1)W_2B_1\left((W_1A_1)^{-1}\right)^{k+3},$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_6 &= -(A+B)\times \\
&\times \left[(WB)^d\left(I+\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1} WAZ(i)\right)(I-WAWA^{d,W})\right]^2 \\
&\times WB(WA)^d \\
&= -(A+B)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left((W_2A_2+W_2B_2)^d\right)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_2B_1(W_1A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (A_2+B_2)\left((W_2A_2+W_2B_2)^d\right)^2 W_2B_1(W_1A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6 \\
&= \begin{bmatrix} A_1((W_1A_1)^{-1})^2 & 0 \\ X' & (A_2+B_2)((W_2A_2+W_2B_2)^d)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

čime je kompletiran dokaz jednakosti (3.6). Drugo tvrdjenje teoreme može se lako proveriti. □

U nastavku slede dokazane posledice prethodne teoreme.

Posledica 3.3.3 *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ i neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilni. Ako je $A^{d,W}WB = 0$ i $AWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$, tada je*

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W} \\
&= (A+B)\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1}(WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2 \\
&+ (A+B)(I - WBWB^{d,W})\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WB)^i\left((WA)^d\right)^{i+2}\right. \\
&\left.+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(WB)^{i-j}(WA)^jWB\left((WA)^d\right)^{i+3}\right) \\
&- (A+B)\left((WB)^d\right)^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i(WA)^{i+1}WB\right)\left((WA)^d\right)^2 \\
&- (A+B)(WB)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^{i+1}WB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3 \\
&- (A+B)\left((WB)^d\right)^2 \times \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i(WA)^{i+k+2}WB\left((WA)^d\right)^k\right)\left((WA)^d\right)^3 \\
&- (A+B)\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1}(WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2 \times \\
&\times WB(WA)^d.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz pretpostavki $A^{d,W}WB = 0$ i $AWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$ sledi da je

$$
\begin{aligned}
A(WB)^2 &= AWB(I - WAWA^{d,W})WB + AWBWAWA^{d,W}WB \\
&= AWBWAWA^{d,W}WB \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

i onda je

$$
AWB^{d,W} = A(WB)^d = AWB\left((WB)^d\right)^2 = A(WB)^2\left((WB)^d\right)^3 = 0.
$$

Zatim na osnovu Teoreme 3.3.2, zajedno sa pojednostavljenjem $WAZ(i) = (WA)^{i+1}(I - WAWA^{d,W})$, za svako $i \geq 0$, sledi tvrdjenje ove posledice. □

Posledica 3.3.4 *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ i neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilni. Pretpostavimo da je $A^{d,W}WB = 0$ i $AWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$.*

(i) *Ako je $(WB)^2 = WB$, onda je*

$$\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W}\\
&= (A+B)\left[\left(WB\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2\\
&+ (A+B)(I - WB)\times\\
&\times\left(\left((WA)^d\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(WA)^iWB\left((WA)^d\right)^{i+3}\right)\\
&- (A+B)WB\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^{i+1}WB\right)\left((WA)^d\right)^2\\
&- (A+B)WB\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^{i+1}WB(\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3\\
&- (A+B)WB\times\\
&\times\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(WA)^{i+k+2}WB(\left((WA)^d\right)^k\right)\left((WA)^d\right)^3\\
&- (A+B)\left[\left(WB\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2\times\\
&\times WB(WA)^d.
\end{aligned}$$

(ii) *Ako je WB kvazinilpotentan, onda je*

$$\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W} = (A+B)\left[\left((WA)^d\right)^2\right.\\
&+\left.\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(WB)^{i-j}(WA)^jWB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3\right].
\end{aligned}$$

(iii) *Ako je* $(WB)^2 = 0$, *onda je*

$$\begin{aligned}(A+B)^{d,W} &= (A+B)\Bigg[\left((WA)^d\right)^2 \\ &+ WB\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^iWB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^4 \\ &+ \left(\sum_{i=0}^{\infty}(WA)^iWB\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3\Bigg].\end{aligned}$$

Dokaz. Svaki od ovih slučajeva sledi direktno iz Posledice 3.3.3 i sledećih pojednostavljenja:

(i) Kako je $(WB)^2 = WB$, važi da je $WB^{d,W} = (WB)^d = WB$ i $(I - WBWB^{d,W})WB = 0$.

(ii) Pošto je WB kvazinilpotentan, onda je $(WB)^d = 0$.

(iii) Iz $(WB)^2 = 0$, sledi da je

$$(WB)^d = WB\left((WB)^d\right)^2 = (WB)^2\left((WB)^d\right)^3 = 0. \qquad \square$$

Posledica 3.3.5 *Neka je* $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ *i neka su* $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ *Wg–Drazin invertibilni. Ako je* $AWB^{d,W} = 0$ *i* $(I - WBWB^{d,W})WAWB = 0$, *tada je*

$$\begin{aligned}&(A+B)^{d,W} \\ &= (A+B)\Bigg[\Bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1}(WA)^i \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\left((WB)^d\right)^{i+2}WA(WB)^j(WA)^{i-j}\Bigg)(I - WAWA^{d,W})\Bigg]^2 \\ &+ (A+B)(I - WBWB^{d,W})\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WB)^i\left((WA)^d\right)^{i+2}\right) \\ &- (A+B)\left((WB)^d\right)^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^iWA(WB)^{i+1}\right)\left((WA)^d\right)^2 \\ &- (A+B)(WB)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}WA(WB)^{i+1}\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (A+B)\left((WB)^d\right)^2 \times \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i WA(WB)^{i+k+2}\left((WA)^d\right)^{k+3}\right) \\
&- (A+B)\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+1}(WA)^i\right.\right. \\
&\left.\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\left((WB)^d\right)^{i+2} WA(WB)^j(WA)^{i-j}\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2 \\
&\times WB(WA)^d.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz $AWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WAWB = 0$, sledi da je

$$
\begin{aligned}
(AW)^2B &= A(I - WBWB^{d,W})WAWB + AWBWB^{d,W}WAWB \\
&= AWB^{d,W}WBWAWB \\
&= 0
\end{aligned}
$$

i onda je

$$
A^{d,W}WB = (AW)^dB = \left((AW)^d\right)^2 AWB = \left((AW)^d\right)^3 (AW)^2B = 0.
$$

Zatim primenom Teoreme 3.3.2, zajedno sa pojednostavljenjem $Z(i)WB = (I - WBWB^{d,W})(WB)^{i+1}$, za svako $i \geq 0$, proizilazi kao rezultat tvrdjenje ove posledice. □

Posledica 3.3.6 *Neka je $W \in \mathcal{B}(Y,X)$ i neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilni. Pretpostavimo da je $AWB^{d,W} = 0$ i $(I - WBWB^{d,W})WAWB = 0$.*

(i) *Ako je $(WA)^2 = WA$, onda je*

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W} \\
&= (A+B) \times \\
&\times \left[\left((WB)^d + \sum_{i=1}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+2} WA(WB)^i\right)(I - WA)\right]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (A+B)(I - WBWB^{d,W}) \left(\sum_{i=0}^{\infty}(WB)^i\right) WA \\
&- (A+B)\left((WB)^d\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i WA(WB)^{i+1}\right) WA \\
&- (A+B)(WB)^d \left(\sum_{i=0}^{\infty} WA(WB)^{i+1}\right) WA \\
&- (A+B)\left((WB)^d\right)^2 \times \\
&\times \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i WA(WB)^{i+k+2}\right) WA \\
&- (A+B) \times \\
&\times \left[\left((WB)^d + \sum_{i=1}^{\infty}\left((WB)^d\right)^{i+2} WA(WB)^i\right)(I - WA)\right]^2 \\
&\times WB(WA)^d.
\end{aligned}
$$

(ii) *Ako je WA kvazinilpotentan, onda je*

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W} \\
&= (A+B) \times \\
&\times \left[(WB)^d + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\left((WB)^d\right)^{i+2} WA(WB)^j(WA)^{i-j}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Primenom Posledice 3.3.5 i sledećih pojednostavljenja:

(i) Pošto je $(WA)^2 = WA$, važi da je $WA^{d,W} = (WA)^d = WA$ i $(WA)^j(I - WAWA^{d,W}) = 0$, za svako $j \geq 1$.

(ii) Kako je WA kvazinilpotentan, onda je $(WA)^d = 0$. $\square$

Posledica 3.3.7 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$ Wg–Drazin invertibilni. Ako je $AWB = 0$, tada je*

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^{d,W} \\
&= (A+B)\left[(WB)^d \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i (WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (A+B)(I - WBWB^{d,W})\left(\sum_{i=0}^{\infty}(WB)^i\left((WA)^d\right)^i\right)\left((WA)^d\right)^2 \\
&- (A+B)\left[(WB)^d\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left((WB)^d\right)^i(WA)^i\right)(I - WAWA^{d,W})\right]^2 \\
&\times WB(WA)^d.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz pretpostavke $AWB = 0$, sledi da je

$$A^{d,W}WB = A^{d,W}WAWA^{d,W}WB = (A^{d,W}W)^2AWB = 0,$$

$(I - WBWB^{d,W})WAWB = 0$, $AWB(I - WAWA^{d,W}) = 0$ i onda je $A^{d,W}WB = 0$. Dakle, primenimo Posledicu 3.3.3, ili Posledicu 3.3.5, da dokažemo gornji rezultat. $\square$

Glava 4

Faktori uslovljenosti

4.1 Faktor uslovljenosti operatora

Neka su prostori X i Y proizvoljni Hilbert-ovi prostori snabdeveni normama $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$. Neka su P-norma za vektor $x \in X$, Q-norma za vektor $y \in Y$ i QP-norma za operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, respektivno, definisane na sledeći način (videti [45]):

$$\|x\|_P = \sqrt{\|x_1\|_X^2 + \|x_2\|_X^2},$$

$$\|y\|_Q = \sqrt{\|y_1\|_Y^2 + \|y_2\|_Y^2},$$

$$\|A\|_{QP} = \sup_{\|x\|_P \leq 1} \|Ax\|_Q$$

gde je

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in T,\ x_2 \in T_1,$$

$$y = y_1 + y_2,\ y_1 \in S_1,\ y_2 \in S.$$

Primetimo da možemo takodje definisati skalarni proizvod u X na sledeći način:

$$\langle x, y\rangle_P = \langle x_1, y_1\rangle_X + \langle x_2, y_2\rangle_X$$

gde je

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ x_1,\ y_1 \in T,\ x_2,\ y_2 \in T_1.$$

Uočimo da je norma $\|\cdot\|_P$ indukovana skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$. Slično važi za skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ i normu $\|\cdot\|_Q$ u Y.

Generalisani inverzi se često povezuju sa sistemom jednačina

$$Ax = b,$$

pri čemu su A i b dati, a x je nepoznat vektor. Ako je A invertibilan operator, tada je faktor uslovljenosti od A definisan sa

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Ako je A singularan operator, tada možemo koristiti neki uopšteni inverz A^- od A umesto A^{-1} i definisanti uopšteni faktor uslovljenosti na sledeći način:

$$k^-(A) = \|A\|\|A^-\|.$$

Prema tome, uopšteni faktor uslovljenosti od A odredjen generalisanim inverzom $A^{(2)}_{T,S}$, u slučaju kada on postoji, označen je sa

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{(2)}_{T,S}\|.$$

Drugi način definisanja faktora uslovljenosti linearnog sistema $Ax = b$ je povezan sa diferencijabilnim funkcijama. Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)_{T,S}$ i $b \in Y$. Definišimo preslikavanje

$$F : \mathcal{B}(X,Y)_{T,S} \times Y \to X$$

na sledeći način:

$$F(A,b) = A^{(2)}_{T,S}b.$$

Preslikavanje F je diferencijabilno, ako granična vrednost

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(A+\epsilon E, b+\epsilon f) - F(A,b)}{\epsilon} = F'(A,b)|_{(E,f)}$$

postoji za neke perturbacije $E \in \mathcal{B}(X,Y)$ od A i $f \in Y$ od b. Pretpostavimo da je $A + \epsilon E \in \mathcal{B}(X,Y)_{T,S}$ za male vrednost $\epsilon \in \mathbf{C}$. Ako imamo ovu vrstu diferencijabilnosti, tada je

$$C(A,b) = \|F'(A,b)|_{(E,f)}\|$$

apsolutni faktor uslovljenosti linearnog sistem $Ax = b$, odredjen generalisanim inverzom $A^{(2)}_{T,S}$ i perturbacijama E od A i f od b.

D.J. Higham [34] je razmatrao različite faktore uslovljenosti običnog inverza i nesinglarnog linearnog sistema. Za uopštene inverze i singularne linearne sisteme postoje slični rezultati. Radovi [64, 65, 43, 8, 68] sadrže neke rezultate u kojima je korišćen kao uopšteni inverz Moore-Penrose-ov inverz, Drazin-ov inverz i generalisani Bott-Duffin inverz, respektiveno. U radu [63], Y. Wei i H. Diao su proučavali faktor uslovljenosti Drazin-ovog inverza i Drazin-ovog rešenja singularnog linearnog sistema. X. Cui i H. Diao su generalisali rezultate iz rada [63] i dokazali rezultate o faktoru uslovljenosti W-težinskog Drazin-ovog inverza i W-težinskog Drazin-ovog rešenja linearnog sistema u radu [12]. U radu [45] prošireni su rezultati iz rada [12] na linearne ograničene operatore izmedju Hilbert-ovih prostora. Zato što svi pomenuti uopšteni inverzi predstavljaju spoljašnji inverz $A^{(2)}_{T,S}$ sa odredjenom slikom T i jezgrom S, veoma smo zainteresovani za faktor uslovljenosti odredjen spoljašnjim inverzom $A^{(2)}_{T,S}$. U radu [15], H. Diao, M. Qin i Y. Wei su istraživali faktor uslovljenosti spoljašnjeg inverza $A^{(2)}_{T,S}$ i spoljašnjeg $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja ograničenog linearnog sistema, i poboljšali rezultate iz radova [63, 12]. Oni su dali eksplicitnu formulu za izračunavanje faktora uslovljenosti spoljašnjeg $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja ograničenog linearnog sistema. U radu [46] proširujemo rezultate dokazane u [15] na linearne ograničene operatore izmedju Hilbert-ovih prostora, i njih predstavljamo u ovom odeljku.

Možemo lako dokazati sledeći koristan rezultat.

Teorema 4.1.1 *Pretpostavimo da za operator $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ i zatvorene potprostore $T \subset X$ i $S \subset Y$, postoji spoljašnji inverz $A^{(2)}_{T,S} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Neka je $B = A + E$, $R(E) \subseteq A(T)$ i $N(E) \supseteq T_1$. Ako je $\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\|E\|_{QP} < 1$, tada $B^{(2)}_{T,S}$ postoji i*

$$B^{(2)}_{T,S} = [I + A^{(2)}_{T,S}E]^{-1}A^{(2)}_{T,S} = A^{(2)}_{T,S}[I + EA^{(2)}_{T,S}]^{-1}. \tag{4.1}$$

Dokaz. Ovaj rezultat je analogan rezultatu u radu [69] za kompleksne matrice. □

Sada dokazujemo da je preslikavanje F direrencijabilno pod odredjenim uslovima.

Teorema 4.1.2 *Preslikavanje $F : \mathcal{B}(X,Y) \times Y \to X$ je diferencijabilna funkcija, ako perturbacija (E,f) od (A,b) zadovoljava sledeće uslove:*

$$AA^{(2)}_{T,S}E = E, \quad EA^{(2)}_{T,S}A = E, \quad \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\|E\|_{QP} < 1. \tag{4.2}$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 4.1.1 sledi da $(A+\epsilon E)^{(2)}_{T,S}$ postoji i da je

$$\begin{aligned}(A+\epsilon E)^{(2)}_{T,S} &= [I + A^{(2)}_{T,S}\epsilon E]^{-1}A^{(2)}_{T,S} \\ &= [I - \epsilon A^{(2)}_{T,S}E + \epsilon^2(A^{(2)}_{T,S}E)^2 - ...]^{-1}A^{(2)}_{T,S} \\ &= A^{(2)}_{T,S} - \epsilon A^{(2)}_{T,S}EA^{(2)}_{T,S} + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Razmotrimo postojanje granične vrednosti

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(A+\epsilon E, b+\epsilon f) - F(A,b)}{\epsilon} \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(A+\epsilon E)^{(2)}_{T,S}(b+\epsilon f) - A^{(2)}_{T,S}b}{\epsilon} \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(A^{(2)}_{T,S} - \epsilon A^{(2)}_{T,S}EA^{(2)}_{T,S} + O(\epsilon^2))(b+\epsilon f) - A^{(2)}_{T,S}b}{\epsilon} \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon A^{(2)}_{T,S}f - \epsilon A^{(2)}_{T,S}EA^{(2)}_{T,S}(b+\epsilon f)}{\epsilon} \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}(A^{(2)}_{T,S}f - A^{(2)}_{T,S}EA^{(2)}_{T,S}b - \epsilon A^{(2)}_{T,S}EA^{(2)}_{T,S}f) \\ = & -A^{(2)}_{T,S}Ex + A^{(2)}_{T,S}f.\end{aligned}$$

Dakle,

$$F'(A,b)|_{(E,f)} = -A^{(2)}_{T,S}Ex + A^{(2)}_{T,S}f. \qquad \square$$

Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $b \in A(T)$ i posmatrajmo jednačinu

$$Ax = b, \qquad x \in T. \tag{4.3}$$

Ako je $A \in \mathcal{B}(X,Y)_{T,S}$, tada jednačina (4.3) ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je $b \in A(T)$ i $T \cap N(A) = \{0\}$. U tom slučaju je jedinstveno rešenje jednačine (4.3) dato sa

$$x = A^{(2)}_{T,S} b. \tag{4.4}$$

Norma na zadatim podacima je norma u $\mathcal{B}(X,Y) \times Y$ definisana na sledeći način

$$(A, b) \longmapsto \|[\alpha A, \beta b]\| = \sqrt{\alpha^2 \|A\|^2_{QP} + \beta^2 \|b\|^2_Q}.$$

Dokazujemo procenu apsolutnog faktora uslovljenosti linearnog sistema u odnosu na spoljašnji inverz $A^{(2)}_{T,S}$. Sledeći rezultat je uopštenje rezultata iz [15] i [45].

Teorema 4.1.3 *Ako perturbacija E od A zadovoljava uslov* (4.2)*, tada apsolutni faktor uslovljenosti $C(A,b)$ spoljašnjeg $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja linearnog sistema, sa normom*

$$\|[\alpha A, \beta b]\| = \sqrt{\alpha^2 \|A\|^2_{QP} + \beta^2 \|b\|^2_Q}$$

na zadatim podacima (A, b) i normom $\|x\|_P$ rešenja, zadovoljava

$$C(A, b) \leq \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\|x\|^2_P}{\alpha^2}}.$$

Neka je $(E_n)_n$ niz perturbacija od A koje zadovoljavaju uslov (4.2) *i neka je $(f_n)_n$ niz perturbacija od b. Ako je $C(E_n, f_n)$ odgovarajući apsolutni faktor uslovljenosti i $\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} < \alpha$, tada je*

$$C(E_n, f_n) \to \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\|x\|^2_P}{\alpha^2}}, \qquad n \to \infty.$$

Dakle, $\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\|x\|^2_P}{\alpha^2}}$ je oštra granica.

Dokaz. Znamo da je $F(A,b) = A^{(2)}_{T,S}b$. Pod uslovom (4.2), F je diferencijabilna funkcija i F' je definisan na sledeći način

$$F'(A,b)|_{(E,f)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(A+\epsilon E)^{(2)}_{T,S}(b+\epsilon f) - A^{(2)}_{T,S}b}{\epsilon},$$

gde je E perturbacija od A i f perturbacija od b.

Pošto E zadovoljava uslov (4.2), važi

$$(A+\epsilon E)^{(2)}_{T,S} = A^{(2)}_{T,S} - \epsilon A^{(2)}_{T,S} E A^{(2)}_{T,S} + O(\epsilon^2),$$

i zatim se može lako proveriti da je

$$F'(A,b)|_{(E,f)} = -A^{(2)}_{T,S}Ex + A^{(2)}_{T,S}f.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_P &= \|A^{(2)}_{T,S}(Ex - f)\|_P \\ &\leq \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}(\|E\|_{QP}\|x\|_P + \|f\|_Q). \end{aligned}$$

Norma linearnog preslikavanja $(E,f) \mapsto F'(A,b)|_{(E,f)}$ je supremum od $\|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_P$ na jediničnoj lopti u $\mathcal{B}(X,Y) \times Y$. Kako je

$$\|[\alpha E, \beta f]\|^2 = \alpha^2\|E\|^2_{QP} + \beta^2\|f\|^2_Q,$$

važi

$$\begin{aligned} &\|F'(A,b)|_{(E,f)}\| \\ &\leq \sup_{\alpha^2\|E\|^2_{QP}+\beta^2\|f\|^2_Q \leq 1} \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}(\|E\|_{QP}\|x\|_P + \|f\|_Q) \\ &= \sup_{\alpha^2\|E\|^2_{QP}+\beta^2\|f\|^2_Q \leq 1} \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\left(\alpha\|E\|_{QP}\frac{\|x\|_P}{\alpha} + \beta\|f\|_Q\frac{1}{\beta}\right) \\ &= \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} \sup_{\alpha^2\|E\|^2_{QP}+\beta^2\|f\|^2_Q \leq 1} (\alpha\|E\|_{QP}, \beta\|f\|_Q) \cdot \left(\frac{\|x\|_P}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

gde $(\alpha\|E\|_{QP}, \beta\|f\|_Q)$ i $\left(\frac{\|x\|_P}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ mogu biti posmatrani kao vektori u R^2, a u prethodnoj liniji je sadržan skalarni proizvod u R^2.

Zatim, na osnovu Cauchy–Schwarz-ove nejednakosti, važi:

$$\|F'(A,b)|_{(E,f)}\| \leq \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\sqrt{\frac{\|x\|_P^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}.$$

U nastavku dokazujemo drugi deo teoreme. Podsetimo se matričnih oblika (1.2) i (1.3). Postoji niz $(u_n)_n$ u S_1 koji zadovoljava $\|u_n\| = 1$ i $\lim_{n\to\infty} \|A_1^{-1}u_n\| = \|A_1^{-1}\|$. Zatim postoji niz $(v_n)_n$ in T, $\left(v_n = \frac{A_1^{-1}}{\|A_1^{-1}\|}u_n\right)$, tako da je $\|v_n\| \leq 1$, $\lim_{n\to\infty}\|v_n\| = 1$ i, za svako $n \in N$,

$$A_1^{-1}u_n = \|A_1^{-1}\|v_n = \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}v_n.$$

Poslednja jednakost sledi iz

$$\begin{aligned}
\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ} &= \sup_{\|x\|_Q\leq 1}\|A^{(2)}_{T,S}x\|_P \\
&= \sup_{\sqrt{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2}\leq 1}\left\|\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}\right\|_P \\
&= \sup_{\|x_1\|\leq 1}\left\|\begin{bmatrix} A_1^{-1}x_1 \\ 0\end{bmatrix}\right\|_P \\
&= \sup_{\|x_1\|\leq 1}\|A_1^{-1}x_1\| \\
&= \|A_1^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Uzimajući, za svako $n \in N$,

$$\hat{u}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ 0\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} S_1 \\ S\end{bmatrix}, \quad \hat{v}_n = \begin{bmatrix} v_n \\ 0\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} T \\ T_1\end{bmatrix},$$

sledi da je

$$\begin{aligned}
A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n &= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_n \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1}u_n \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \|A_1^{-1}\|v_n \\ 0\end{bmatrix} = \|A_1^{-1}\|\begin{bmatrix} v_n \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\hat{v}_n.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da je $\|\hat{u}_n\|_Q = 1$ i $\|\hat{v}_n\|_P \leq 1$, za svako $n \in N$.

Neka je $u \in S_1$ i $v \in T$. Definišimo $S_{u,v} \in \mathcal{B}(T, S_1)$ na sledeći način: ako je $x \in T$, tada je

$$S_{u,v}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, v \rangle u.$$

Za svako $T \in \mathcal{B}(S_1, T)$ važi:

$$TS_{u,v}(x) = T(u)\langle x, v \rangle.$$

Sada izaberimo, za $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\eta = \sqrt{\frac{\|x\|_P^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}, \quad f_n = \frac{1}{\beta^2 \eta} \hat{u}_n,$$

$$E_n = -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada, za fiksirano n, može se proveriti da E_n zadovoljava prvu jednakost u uslovu (4.2):

$$\begin{aligned} AA^{(2)}_{T,S} E_n &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= E_n. \end{aligned}$$

Na isti način, važi

$$\begin{aligned} E_n A^{(2)}_{T,S} A &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha^2 \eta} \begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= E_n \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\|E_n\|_{QP} &= \left\|\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_{PQ} \left\|-\frac{1}{\alpha^2\eta}\begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_{QP} \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|A_1^{-1}\|\|S_{u_n,x}\| \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|A_1^{-1}\| \sup_{\|z\|\le 1}\|S_{u_n,x}z\| \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|A_1^{-1}\| \sup_{\|z\|\le 1}\|u_n\langle z, x\rangle\| \\
&\le \frac{1}{\alpha^2\eta}\|A_1^{-1}\|\|u_n\|\|x\| \\
&= \frac{\|x\|}{\alpha^2\eta}\|A_1^{-1}\| \\
&< \frac{\|A_1^{-1}\|}{\alpha} \\
&= \frac{\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}}{\alpha} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Prema tome, E_n zadovoljava uslov (4.2), za svako $n \in N$. Sada želimo da proverimo da li perturbacija (E_n, f_n) zadovoljava nejednakost $\alpha^2\|E_n\|^2_{QP} + \beta^2\|f_n\|^2_Q \le 1$,

$$\begin{aligned}
\alpha^2\|E_n\|^2_{QP} + \beta^2\|f_n\|^2_Q &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\left\|\begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|^2_{QP} + \frac{1}{\beta^2\eta^2}\|\hat{u}_n\|^2_Q \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|S_{u_n,x}\|^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\
&\le \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|u_n\|^2\|x\|^2_P + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\
&= \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\|x\|^2_P}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ u T je isti kao skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dakle, za $x = A^{(2)}_{T,S}b$, važi

$$\begin{aligned}
F'(A,b)|_{(E_n,f_n)} &= -A^{(2)}_{T,S}E_n x + A^{(2)}_{T,S}f_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\begin{bmatrix} A_1^{-1}S_{u_n,x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\begin{bmatrix} A_1^{-1}\langle x,x\rangle u_n \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\begin{bmatrix} \|x\|_P^2 A_1^{-1}u_n \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|x\|_P^2\begin{bmatrix} \|A_1^{-1}\|v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|x\|_P^2\|A_1^{-1}\|\begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta^2\eta}\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\hat{v}_n \\
&= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|x\|_P^2\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\hat{v}_n + \frac{1}{\beta^2\eta}\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\hat{v}_n \\
&= \frac{\|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}}{\eta}\left(\frac{\|x\|_P^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\hat{v}_n \\
&= \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\eta\hat{v}_n.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\|F'(A,b)|_{(E_n,f_n)}\|_P \to \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\sqrt{\frac{\|x\|_P^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}, \qquad (n \to \infty).$$

Znajući da je $\alpha^2\|E_n\|_{QP}^2 + \beta^2\|f_n\|_Q^2 \leq 1$, sledi

$$\|F'(A,b)|_{(E_n,f_n)}\| \to \|A^{(2)}_{T,S}\|_{PQ}\sqrt{\frac{\|x\|_P^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}, \qquad (n \to \infty,$$

i dokaz je kompletan. □

U radu [15], Teorema 4.1.3 je pokazana za kompleksne matrice. U radu [45], dokazana je Teorema 4.1.3 razmatranjem težinskog Drazin-ovog inverza ograničenih linearnih operatora na Hilbert-ovim prostorima.

4.2 Faktori uslovljenosti za težinski Drazin-ov inverz

J. Chen i Z. Xu su u radu [9] dokazali karakterizaciju faktora uslovljenosti Drazin-ovog inverza i singularnog linearnog sistema za matrice, pomoću Schur-ove dekompozicije i spektralne norme umesto P-norme, pri čemu je P transformaciona matrica Jordan-ovog kanonskog oblika matrice A. Primetimo da je, uopšteno, izračunavanje Jordan-ovog kanonskog oblika komplikovano. U radovima [12, 43, 60] dokazani su rezultati u vezi sa faktorom uslovljenosti W–težinskog Drazin-ovog inverza i W–težinskog Drazin-ovog rešenja linearnog sistema, koristeći PQ-normu. Definicija PQ-norme zavisi od Jordan-ovog kanonskog oblika matrice A. U ovom odeljku proučavamo faktor uslovljenosti W–težinskog Drazin-ovog inverza pravougaone matrice koristeći Schur-ovu dekompoziciju i 2-normu umesto PQ-norme u [12]. Rezultati ovog odeljka su objavljeni u radu sa D.S. Djordjevićem [48] i oni uopštavaju rezultate iz [9, 12].

Podsetimo se na početku sledećeg rezultata.

Lema 4.2.1 (Schur-ova dekompozicija)[26] *Ako je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$, tada postoji unitarna matrica $U \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ tako da je*

$$U^*AU = T = D + N,$$

pri čemu je $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, a matrica $N \in C^{n\times n}$ je strogo gornje trougaona.

Dalje, matrica U može biti izabran tako da se sopstvene vrednosti λ_i pojavljuju u nekom nizu duž dijagonale.

Neka matrica $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ zadovoljava sledeće uslove:

$$rank(A^k) = r, \quad ind(A) = k, \quad \mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}((A^k)^*). \tag{4.5}$$

Tada Schur-ova dekompozicija matrice A može biti zapisana na sledeći način:

$$A = U \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix} U^*, \tag{4.6}$$

pri čemu je U unitarna matrica, B je $r \times r$ gornje trougaona i nesingularna matrica, a $C = [c_{i,j}]$ je strogo gornje trougaona matrica, tj. $c_{i,j} = 0$ kada je $1 \leq j \leq i \leq n - r$.

U radu [9], J. Chen i Z. Xu su koristili Schur-ovu dekompoziciju matrice A da dokažu izraz za Drazin-ov inverz u sledećoj teoremi.

Teorema 4.2.1 [9] *Neka je* $A \in \mathbf{C^{n \times n}}$. *Ako matrica* A *zadovoljava uslov* (4.5)*, tada Schur-ova dekompozicija matrice* A *ima sledeći oblik*

$$A = U \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} U^*, \tag{4.7}$$

pri čemu je U *unitarna matrica,* B *je* $r \times r$ *gornje trougaona i nesingularna matrica,* C *je strogo gornje trougaona matrica. Tada je*

$$A^D = U \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{4.8}$$

Na osnovu prethodne teoreme, dokazujemo sledeći rezultat.

Teorema 4.2.2 *Neka je* $A \in \mathbf{C^{m \times n}}$, $W \in \mathbf{C^{n \times m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Tada je*

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^*, \qquad W = V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*$$

$$A^{D,W} = U \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{4.9}$$

pri čemu su $U \in \mathbf{C^{m \times m}}$ *i* $V \in \mathbf{C^{n \times n}}$ *unitarne matrice,* A_1 *i* W_1 *nesingularne matrice,* $A_2 W_2$ *i* $W_2 A_2$ *strogo gornje trougaone matrice.*

Dokaz. Kako je $rank((WA)^k) = rank((AW)^k) = r$, na osnovu Teoreme 4.2.1, sledi Schur-ova dekompozicija matrica AW i WA:

$$AW = U \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} U^*, \qquad WA = V \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} V^*, \tag{4.10}$$

pri čemu su $U \in \mathbf{C^{m\times m}}$ i $V \in \mathbf{C^{n\times n}}$ unitarne matrice, B i D su $r \times r$ gornje trougaone i nesingularne matrice, C i F su strogo gornje trougaone matrice.

Matrice A i W možemo predstaviti na sledeći način:

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} V^*, \qquad W = V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} U^*.$$

Pošto su C i F strogo gornje trougaone matrice, onda je $C^k = 0$ i $F^k = 0$. Sada je

$$\begin{aligned} (AW)^k A &= U \begin{bmatrix} B^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} B^k A_1 & B^k A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} A(WA)^k &= U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} D^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1 D^k & 0 \\ A_{21} D^k & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Koristeći jednakost $(AW)^k A = A(WA)^k$, zaključujemo da je $B^k A_{12} = 0$ i $A_{21} D^k = 0$. Kako su B i D nesingularne matrice, onda je $A_{12} = 0$ i $A_{21} = 0$, tj.

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^*.$$

Iz jednakosti

$$\begin{aligned} AW &= U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1 W_1 & A_1 W_{12} \\ A_2 W_{21} & A_2 W_2 \end{bmatrix} U^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WA &= V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= V \begin{bmatrix} W_1 A_1 & W_{12} A_2 \\ W_{21} A_1 & W_2 A_2 \end{bmatrix} V^* \end{aligned}$$

i (4.10), proizilazi $A_1W_1 = B$, $W_1A_1 = D$, $A_2W_2 = C$, $W_2A_2 = F$, $A_1W_{12} = 0$ i $W_{21}A_1 = 0$. Prema tome, A_1 i W_1 su invertibilne matrice, A_2W_2 i W_2A_2 su strogo gornje trougaone matrice, $W_{12} = 0$ i $W_{21} = 0$. Dakle,

$$W = V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*.$$

Na kraju, na osnovu jednakosti $A^{D,W} = [(AW)^D]^2A = A[(WA)^D]^2$, sledi

$$A^{D,W} = U \begin{bmatrix} B^{-2}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = U \begin{bmatrix} A_1D^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

tj. $B^{-2}A_1 = A_1D^{-2}$. Prema tome,

$$A^{D,W} = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

Na ovaj način smo kompletirali dokaz. $\Box$

U nastavku odeljka posmatraćemo sledeći linearan sistem

$$WAWx = b,$$

gde je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $ind(AW) = k_1$, $ind(WA) = k_2$, $b \in \mathcal{R}((WA)^{k_2})$ i $x \in \mathcal{R}((AW)^{k_1})$. Tada je W-težinsko Drazin-ovo rešenje x oblika

$$x = A^{D,W}b.$$

Operator F definisan sa:

$$F : \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} \times \mathbf{C}^{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{m}}$$

$$(A, b) \longmapsto F(A, b) = A^{D,W}b = x,$$

je diferencijabilna funkcija, ako perturbacija E od A zadovoljava sledeće uslove:

$$\mathcal{R}(EW) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k), \quad \mathcal{N}((WA)^k) \subseteq \mathcal{N}(WE), \tag{4.11}$$

gde je $k = \max\{k_1, k_2\}$. Lako se proverava da je (4.11) ekvivalentno sa

$$A^{D,W}(WAW)EW = EW, \quad WE(WAW)A^{D,W} = WE. \tag{4.12}$$

Definicija apsolutnog faktora uslovljenosti je predstavljena od strane J.R. Rice-a u radu [57]. Ako je F neprekidno diferencijabilna funkcija, $F : \mathbf{C^{m\times n}} \times \mathbf{C^{n}} \longrightarrow \mathbf{C^{m}}$, $x \longmapsto F(x)$, apsolutni faktor uslovljenosti funkcije F u x je skalar $\|F'(x)\|$. Relativni faktor uslovljenosti funkcije F u x je

$$\frac{\|F'(x)\|\|x\|}{\|y\|}.$$

Navodimo naredni rezultat koji koristimo u nastavku.

Lema 4.2.2 [67] *Neka je* $A, E \in \mathbf{C^{m\times n}}$, $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$, $k = \max\{ind(AW), ind(WA)\}$. *Ako* E *zadovoljava uslov* (4.11) *i* $\|A^{D,W}WEW\|_2 < 1$, *tada je*

$$(A+E)^{D,W} = (I + A^{D,W}WEW)^{-1}A^{D,W} = A^{D,W}(I + WEWA^{D,W})^{-1}.$$

Izabraćemo parametarsku težinsku Frobenius-ovu normu $\|[\alpha WAW, \beta b]\|_{U,Q}^{(F)}$, gde je U ista matrica kao u (4.9) i $Q = diag(U, 1)$, zato što možemo izabrati različite parametre α, β za različite perturbacije.

U sledećoj teoremi dokazana je eksplicitna formula za faktor uslovljenosti W-težinskog Drazin-ovog rešenja pomoću 2-norme i Frobenius-ove norme što predstavlja uopštenje glavnog rezultata iz rada [12].

Teorema 4.2.3 *Neka je* $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$, $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11), *tada apsolutni faktor uslovljenosti* W*-težinskog Drazin-ovog rešenja linearnog sistema, sa normom*

$$\|[\alpha WAW, \beta b]\|_{U,Q}^{(F)} = \sqrt{\alpha^2\|WAW\|_F^2 + \beta^2\|b\|_2^2}$$

na zadatim podacima (A, b) *i normom* $\|x\|_2$ *rešenja, zadovoljava*

$$C = \|A^{D,W}\|_2\sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2}},$$

gde je $Q = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i* U *je ista matrica kao u* (4.9).

Dokaz. Znamo da je $F(A,b) = A^{D,W}b$. Pod uslovom (4.11), F je diferencijabilna funkcija i F' je definisan na sledeći način

$$F'(A,b)|_{(E,f)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(A+\epsilon E)^{D,W}(b+\epsilon f) - A^{D,W}b}{\epsilon},$$

pri čemu je E perturbacija od A i f je perturbacija od b.

Pošto E zadovoljava uslov (4.11), onda je (videti [58])

$$(A+\epsilon E)^{D,W} = A^{D,W} - \epsilon A^{D,W}WEWA^{D,W} + O(\epsilon^2),$$

i onda se lako proverava da je

$$F'(A,b)|_{(E,f)} = -A^{D,W}WEWx + A^{D,W}f.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_2 &= \|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_F \\
&= \|A^{D,W}(WEWx - f)\|_F \\
&\le \|A^{D,W}\|_2(\|WEW\|_F\|x\|_2 + \|f\|_2).
\end{aligned}$$

Norma linearnog preslikavanja $F'(A,b)$ je supremum od $\|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_F$ na jediničnoj lopti u $\mathbf{C^{m\times n}} \times \mathbf{C^n}$. Kako je

$$(\|[\alpha WEW, \beta f]\|_{U,Q}^{(F)})^2 = \alpha^2\|WEW\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2$$

sledi

$$\begin{aligned}
&\|F'(A,b)\| = \\
&= \sup_{\alpha^2\|WEW\|_F^2+\beta^2\|f\|_2^2=1} \|A^{D,W}(WEWx - f)\|_F \\
&\le \sup_{\alpha^2\|WEW\|_F^2+\beta^2\|f\|_2^2=1} \|A^{D,W}\|_2(\|WEW\|_F\|x\|_2 + \|f\|_2) \\
&= \sup_{\alpha^2\|WEW\|_F^2+\beta^2\|f\|_2^2=1} \|A^{D,W}\|_2\left(\alpha\|WEW\|_F\frac{\|x\|_2}{\alpha} + \beta\|f\|_2\frac{1}{\beta}\right) \\
&= \|A^{D,W}\|_2 \sup_{\alpha^2\|WEW\|_F^2+\beta^2\|f\|_2^2=1} (\alpha\|WEW\|_F, \beta\|f\|_2)\cdot\left(\frac{\|x\|_2}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

gde $(\alpha\|WEW\|_F, \beta\|f\|_2)$ i $\left(\frac{\|x\|_2}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ mogu biti posmatrani kao vektori u R^2.

Zatim, na osnovu Cauchy–Schwarz-ove nejednakosti, sledi

$$\|F'(A,b)\| \leq \|A^{D,W}\|_2 \sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}.$$

Sada ćemo pokazati da je ova gornja granica dostižna. Postoje vektori u i v takvi da je

$$(W_1A_1W_1)^{-1}u = \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 v = \|A^{D,W}\|_2 v,$$

gde je $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Neka je

$$\hat{u} = V \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{v} = U \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se proverava da je

$$\|\hat{u}\|_2 = \|\hat{v}\|_2 = 1.$$

Tada je

$$\begin{aligned} A^{D,W}\hat{u} &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1}u \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 U \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \|A^{D,W}\|_2 \hat{v}. \end{aligned}$$

Neka je

$$\eta = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}, \qquad f = \frac{1}{\beta^2\eta}\hat{u},$$

$$E=-\frac{1}{\alpha^2\eta}U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*.$$

Sada je

$$\begin{aligned} EW &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\times\\ &\times\ V\begin{bmatrix} W_1 & 0\\ 0 & W_2\end{bmatrix}U^*\\ &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*. \end{aligned}$$

Kako je

$$A^{D,W}(WAW)=U\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*,$$

možemo proveriti da E zadovoljava prvu jednakost u uslovu (4.12)

$$\begin{aligned} &A^{D,W}(WAW)EW=\\ &=-\frac{1}{\alpha^2\eta}U\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\ &=-\frac{1}{\alpha^2\eta}U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\ &=EW. \end{aligned}$$

Na isti način, važi

$$\begin{aligned} WE &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}V\begin{bmatrix} W_1 & 0\\ 0 & W_2\end{bmatrix}U^*\times\\ &\times\ U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\\ &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}V\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ 0\end{bmatrix}x^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*\\ &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^*. \end{aligned}$$

Pošto je

$$(WAW)A^{D,W} = V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

onda je

$$\begin{aligned} WE(WAW)A^{D,W} &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}\hat{u}x^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= -\frac{1}{\alpha^2\eta}\hat{u}x^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= WE. \end{aligned}$$

Dakle, E zadovoljava uslov (4.12). Sada želimo da proverimo da li je perturbacija (E, f) odgovarajuća, tj. da li je $\alpha^2\|WEW\|_F^2+\beta^2\|f\|_2^2 = 1$. Primetimo da je

$$x = A^{D,W}b = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*b,$$

i onda je

$$\begin{aligned} &\alpha^2\|WEW\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\left\|V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}x^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \right. \\ &\times \left. \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*\right\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2}\|\hat{u}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\left\|\hat{u}x^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\left\|\hat{u}b^*V \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\left\|\hat{u}b^*V \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|\hat{u}x^*\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|\hat{u}\|_2^2\|x^*\|_2^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zatim je

$$\begin{aligned} F'(A,b)|_{(E,f)} &= -A^{D,W}WEWx + A^{D,W}f \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta}A^{D,W}\hat{u}x^*U\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*x + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{D,W}\hat{u} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta}A^{D,W}\hat{u}x^*x + \frac{1}{\beta^2\eta}\|A^{D,W}\|_2\hat{v} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|x\|_2^2\|A^{D,W}\|_2\hat{v} + \frac{1}{\beta^2\eta}\|A^{D,W}\|_2\hat{v} \\ &= \|A^{D,W}\|_2\eta\hat{v}. \end{aligned}$$

Tada

$$\|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_2 = \|A^{D,W}\|_2\sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}},$$

zajedno sa $\alpha^2\|WEW\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2 = 1$, implicira

$$\|F'(A,b)\| \geq \|A^{D,W}\|_2\sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}},$$

i dokaz je potpun. $\Box$

Ako E zadovoljava uslov (4.11), tada je relativni faktor uslovljenosti u odnosu na 2-normu W–težinskog Drazin-ovog inverza definisan sa

$$Cond(A) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\|WEW\|_2\leq\epsilon\|WAW\|_2} \frac{\|(A+E)^{D,W} - A^{D,W}\|_2}{\epsilon\|A^{D,W}\|_2}$$

i odgovarajući faktor uslovljenosti za linearan sistem $WAWx = b$ je definisan sa

$$Cond(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\substack{\|WEW\|_2\leq\epsilon\|WAW\|_2 \\ \|f\|_2\leq\epsilon\|b\|_2}} \frac{\|(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W}b\|_2}{\epsilon\|A^{D,W}b\|_2}.$$

Faktor uslovljenosti nivoa-2 W–težinskog Drazin-ovog inverza je definisan na sledeći način:

$$Cond^{[2]}(A) = \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\|WEW\|_2\le\epsilon\|WAW\|_2} \frac{|Cond(A+E) - Cond(A)|}{\epsilon\, Cond(A)}$$

i odgovarajući faktor uslovljenosti nivoa-2 je definisan sa

$$Cond^{[2]}(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{\substack{\|WEW\|_2\le\epsilon\|WAW\|_2\\ \|f\|_2\le\epsilon\|b\|_2}} \frac{|Cond(A+E,b+f) - Cond(A,b)|}{\epsilon\, Cond(A,b)}.$$

Teorema 4.2.4 *Neka je* $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$*,* $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$*,* $k_1 = ind(AW)$*,* $k_2 = ind(WA)$*,* $k = \max\{k_1,k_2\}$*,* $r = rank((AW)^k)$*,* $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}((AW)^{k_1{}^*})$*,* $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}((WA)^{k_2{}^*})$*. Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11)*, tada faktor uslovljenosti*

$$Cond(A) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\|WEW\|_2\le\epsilon\|WAW\|_2} \frac{\|(A+E)^{D,W} - A^{D,W}\|_2}{\epsilon\|A^{D,W}\|_2}, \tag{4.13}$$

zadovoljava

$$Cond(A) = \|WAW\|_2\|A^{D,W}\|_2. \tag{4.14}$$

Dokaz. Zanemarivanjem izraza $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ u standardnom razvijanju, iz Leme 4.2.2, sledi da je

$$(A+E)^{D,W} - A^{D,W} = -A^{D,W}WEWA^{D,W}.$$

Neka je $E = \epsilon\|WAW\|_2\hat{E}$, korišćenjem $\|WEW\|_2 \le \epsilon\|WAW\|_2$, proizilazi da je $\|W\hat{E}W\|_2 \le 1$. Tada je

$$\|A^{D,W}W\hat{E}WA^{D,W}\|_2 \le \|A^{D,W}\|_2\|W\hat{E}W\|_2\|A^{D,W}\|_2 \le \|A^{D,W}\|_2^2.$$

Rezultat je dokazan ako pokažemo da je

$$\sup_{\|W\hat{E}W\|_2\le 1} \|A^{D,W}W\hat{E}WA^{D,W}\|_2 = \|A^{D,W}\|_2^2.$$

Postoje vektori x i y takvi da je $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$

$$\|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2 = \|x^*(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 = \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2.$$

Izaberimo da je

$$\hat{E} = U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

Možemo proveriti da je

$$\begin{aligned}
\|W\hat{E}W\|_2 &= \left\| V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\times \left. \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \left\| V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \left\| V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \|yx^*\|_2 \\
&= \|y\|_2 \|x\|_2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\|A^{D,W} W\hat{E}W A^{D,W}\|_2 \\
&= \left\| U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \right. \\
&\times \left. \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right\|_2 \\
&= \left\| U \begin{bmatrix} ((W_1A_1W_1)^{-1}y)(x^*(W_1A_1W_1)^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right\|_2 \\
&= \|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2 \|x^*(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 \\
&= \|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2^2 \\
&= \|A^{D,W}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da je

$$\hat{E}W = U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
&\times \quad \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^* \\
&= \quad U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
W\hat{E} &= V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.
\end{aligned}$$

Sada iz jednakosti

$$\begin{aligned}
A^{D,W}(WAW)\hat{E}W &= U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= \hat{E}W
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
W\hat{E}(WAW)A^{D,W} &= V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= W\hat{E}
\end{aligned}$$

sledi da $\hat{E}$ zadovoljava uslov (4.11). Dokaz je kompletan. $\Box$

Sada razmatramo faktor uslovljenosti sa Frobenius-ovom normom.

Teorema 4.2.5 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) =$

$\mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. Ako perturbacija E od A zadovoljava uslov (4.11)*, tada faktor uslovljenosti*

$$Cond_F(A) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\|WEW\|_F \le \epsilon \|WAW\|_F} \frac{\|(A+E)^{D,W} - A^{D,W}\|_F}{\epsilon \|A^{D,W}\|_F}, \quad (4.15)$$

zadovoljava

$$Cond_F(A) = \frac{\|WAW\|_F \|A^{D,W}\|_2^2}{\|A^{D,W}\|_F}. \quad (4.16)$$

Dokaz. Analogno kao u dokazu Teoreme 4.2.4, potrebno je dokazati da je

$$\sup_{\|W\hat{E}W\|_2 \le 1} \|A^{D,W} W \hat{E} W A^{D,W}\|_F = \|A^{D,W}\|_2^2.$$

Neka je

$$\hat{E} = U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

gde je $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ i $\|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2 = \|x^*(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 = \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
&\|A^{D,W} W \hat{E} W A^{D,W}\|_F \\
&= \left\| U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} yx^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \right. \\
&\times \left. \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right\|_F \\
&= \left\| U \begin{bmatrix} ((W_1A_1W_1)^{-1}y)(x^*(W_1A_1W_1)^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right\|_F \\
&= \left\| \begin{bmatrix} ((W_1A_1W_1)^{-1}y)(x^*(W_1A_1W_1)^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2 \|x^*(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2 \\
&= \|(W_1A_1W_1)^{-1}y\|_2^2 \\
&= \|A^{D,W}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Na taj način dokaz je kompletan. □

Sada predstavljamo karakterizaciju faktora uslovljenosti linearnog sistema pomoću 2-norme.

Teorema 4.2.6 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11), *tada faktor uslovljenosti singularnog linearnog sistema* $WAWx = b$

$$Cond(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup_{\substack{\|WEW\|_2 \le \epsilon \|WAW\|_2 \\ \|f\|_2 \le \epsilon \|b\|_2}} \frac{\|(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W}b\|_2}{\epsilon \|A^{D,W}b\|_2}, \tag{4.17}$$

zadovoljava

$$Cond(A,b) = \|WAW\|_2 \|A^{D,W}\|_2 + \frac{\|A^{D,W}\|_2 \|b\|_2}{\|A^{D,W}b\|_2}. \tag{4.18}$$

Dokaz. Iz jednakosti

$$\begin{aligned}
&(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W}b \\
&= [(A+E)^{D,W} - A^{D,W}]b + (A+E)^{D,W}f \\
&= -A^{D,W}WEWA^{D,W}b + (A+E)^{D,W}f \\
&= -A^{D,W}WEWx + A^{D,W}f + \mathcal{O}(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned}
&\|(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W}b\|_2 \\
&\le \|A^{D,W}\|_2 \|WEW\|_2 \|x\|_2 + \|A^{D,W}\|_2 \|f\|_2 \\
&\le \epsilon \|A^{D,W}\|_2 (\|WAW\|_2 \|x\|_2 + \|b\|_2).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$Cond(A,b) \le \|WAW\|_2 \|A^{D,W}\|_2 + \frac{\|A^{D,W}\|_2 \|b\|_2}{\|A^{D,W}b\|_2}.$$

Sada, pretpostavimo da je $y = V \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$, gde je $\|z\|_2 = 1$, $\|(W_1A_1W_1)^{-1}z\|_2 = \|(W_1A_1W_1)^{-1}\|_2$. Tada je $\|y\|_2 = 1$ i

$$\begin{aligned}
\|A^{D,W}y\|_2 &= \left\| U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \\
&= \|(W_1A_1W_1)^{-1}z\|_2 \\
&= \|A^{D,W}\|_2.
\end{aligned}$$

Neka je $f = \epsilon y \|b\|_2$ i

$$E = -\frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* y x^* U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

Lako se proverava da je $A^{D,W}(WAW)EW = EW$ i $WE(WAW)A^{D,W} = WE$, tj. proizilazi da E zadovoljava uslov (4.11). Tada je

$$\|f\|_2 = \epsilon \|b\|_2 \|y\|_2 = \epsilon \|b\|_2$$

i

$$\begin{aligned}
&\|WEW\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \left\| V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* y x^* U \right. \\
&\times \left. \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \left\| V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} (A^{D,W} b)^* U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \times \\
&\times \left\| V \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} b^* V \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \left\| y b^* V \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \|y x^*\|_2 \\
&= \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} \|y\|_2 \|x\|_2 \\
&= \epsilon \|WAW\|_2.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
&\|(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W} b\|_2 \\
&= \| - A^{D,W} WEWx + A^{D,W} f\|_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\epsilon \|WAW\|_2}{\|x\|_2} A^{D,W} y x^* x + \epsilon \|b\|_2 A^{D,W} y \right\|_2 \\
&= \epsilon(\|WAW\|_2 \|x\|_2 + \|b\|_2) \|A^{D,W}\|_2
\end{aligned}
$$

Sada je dokaz kompletan. □

Na sličan način, možemo dokazati narednu teoremu sa Frobenius-ovom normom.

Teorema 4.2.7 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11), *tada faktor uslovljenosti singularnog linearnog sistema* $WAWx = b$

$$
Cond_F(A, b) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sup_{\substack{\|WEW\|_F \le \epsilon \|WAW\|_F \\ \|f\|_F \le \epsilon \|b\|_F}} \frac{\|(A+E)^{D,W}(b+f) - A^{D,W} b\|_F}{\epsilon \|A^{D,W} b\|_F}, \tag{4.19}
$$

zadovoljava

$$
Cond_F(A, b) = \|WAW\|_F \|A^{D,W}\|_2 + \frac{\|A^{D,W}\|_2 \|b\|_2}{\|A^{D,W} b\|_2}. \tag{4.20}
$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 4.2.6, možemo pokazati i ovu teoremu. □

Sledeći rezultat pokazuje da je za W–težinski Drazin-ov inverz, ili za rešavanje linearnog sistema, faktor uslovljenosti aproksimativno dat njegovim faktorom uslovljenosti.

Prvo su nam potrebne sledeće leme.

Lema 4.2.3 *Za* $\hat{u}, \hat{v}$ *u Teoremi 4.2.3, postoji matrica* $S \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ *tako da je*

$$
WSW\hat{v} = -\hat{u}, \quad \|WSW\|_2 = 1,
$$

pri čemu S *zadovoljava uslov* (4.11).

Dokaz. Neka je

$$
S = -U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \hat{u} \hat{v}^* U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.
$$

Tada je

$$\begin{aligned}
WSW\hat{v} &= -V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \\
&\times \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*\hat{v} \\
&= -V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v}^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -\hat{u}\hat{v}^*\hat{v} \\
&= -\hat{u}\|\hat{v}\|_2^2 \\
&= -\hat{u}.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada 2-normu matrice WSW:

$$\begin{aligned}
\|WSW\|_2 &= \left\| \hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \left\| \hat{u} \begin{bmatrix} v^* & 0 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right\|_2 \\
&= \|\hat{u}\hat{v}^*\|_2 \\
&= \|\hat{u}\|_2\|\hat{v}\|_2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Proverimo da li matrica S zadovoljava uslov (4.11). Prvo uočimo da je

$$\begin{aligned}
SW &= -U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^* \\
&= -U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
A^{D,W}(WAW)SW &= -U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\
&\times\ V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= -U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= SW.
\end{aligned}$$

Na isti način, važi

$$\begin{aligned} WS &= -V \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= -V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Zatim je

$$\begin{aligned} WS(WAW)A^{D,W} &= -V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*\hat{u}\hat{v}^*U \times \\ &\times \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= WS. \end{aligned}$$

Prema tome, S zadovoljava uslov (4.11). $\square$

Lema 4.2.4 *Neka je* $A \in \mathbf{C^{m\times n}}$, $W \in \mathbf{C^{n\times m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Kada* $\epsilon \to 0$, *onda je*

$$\max_{\|WEW\|_2 \le \epsilon \|WAW\|_2} \Big| \|(A+E)^{D,W}\|_2 - \|A^{D,W}\|_2 \Big|$$

$$= \epsilon \|A^{D,W}\|_2 Cond(A) + O(\epsilon^2),$$

pri čemu E *zadovoljava uslov* (4.11).

Dokaz. Pošto E zadovoljava uslov (4.11), onda je

$$(A+E)^{D,W} = A^{D,W} - A^{D,W}WEWA^{D,W} + O(\epsilon^2).$$

Sada je

$$\max_{\|WEW\|_2 \le \epsilon \|WAW\|_2} \Big| \|(A+E)^{D,W}\|_2 - \|A^{D,W}\|_2 \Big|$$

$$\le \epsilon \|A^{D,W}\|_2 Cond(A) + O(\epsilon^2).$$

Neka je $E = \epsilon\|WAW\|_2 S$, pri čemu je matrica S definisana u Lemi 4.2.3. Tada je

$$\begin{aligned}
&\|A^{D,W} - A^{D,W}WEWA^{D,W}\|_2\\
&\geq \|(A^{D,W} - A^{D,W}WEWA^{D,W})\hat{u}\|_2\\
&= \|A^{D,W}\hat{u} - A^{D,W}WEWA^{D,W}\hat{u}\|_2\\
&= \|A^{D,W}\hat{u} - \epsilon\|WAW\|_2 A^{D,W}WSWA^{D,W}\hat{u}\|_2\\
&= \Big\|\|A^{D,W}\|_2\hat{v} - \epsilon\|WAW\|_2\|A^{D,W}\|_2 A^{D,W}WSW\hat{v}\Big\|_2\\
&= \|A^{D,W}\|_2\Big\|\hat{v} + \epsilon\|WAW\|_2 A^{D,W}\hat{u}\Big\|_2\\
&= \|A^{D,W}\|_2\Big\|\hat{v} + \epsilon\|WAW\|_2\|A^{D,W}\|_2\hat{v}\Big\|_2\\
&= \|A^{D,W}\|_2\Big(1 + \epsilon\|WAW\|_2\|A^{D,W}\|_2\Big).
\end{aligned}$$

□

Sada možemo lako dokazati sledeće rezultate.

Teorema 4.2.8 [12] *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11), *tada faktor uslovljenosti nivoa-2*

$$Cond^{[2]}(A) = \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{\|WEW\|_2\leq\epsilon\|WAW\|_2}\frac{|Cond(A+E) - Cond(A)|}{\epsilon Cond(A)} \tag{4.21}$$

zadovoljava

$$|Cond^{[2]}(A) - Cond(A)| \leq 1. \tag{4.22}$$

Teorema 4.2.9 [12] *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.11), *tada faktor uslovljenosti nivoa-2 singularnog linearnog sistema* $WAWx = b$

$$Cond^{[2]}(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{\substack{\|WEW\|_2\leq\epsilon\|WAW\|_2\\ \|f\|_2\leq\epsilon\|b\|_2}}\frac{|Cond(A+E, b+f) - Cond(A,b)|}{\epsilon Cond(A,b)} \tag{4.23}$$

zadovoljava

$$\frac{Cond(A,b)}{4} - \frac{1}{2} \leq Cond^{[2]}(A,b) \leq 3Cond(A,b) + 2. \qquad (4.24)$$

U nastavku, predstavljamo struktuiranu perturbaciju W–težinskog Drazin-ovog inverza pomoću 2–norme. Oznaka $|A| \leq |B|$ znači da je $|a_{i,j}| \leq |b_{i,j}|$ za $A = (a_{i,j})$ i $B = (b_{i,j})$.

Teorema 4.2.10 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $W \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$, $k_1 = ind(AW)$, $k_2 = ind(WA)$, $k = \max\{k_1, k_2\}$, $r = rank((AW)^k)$, $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(((AW)^{k_1})^*)$, $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{R}(((WA)^{k_2})^*)$. *Ako je* $|U^*EWU| \leq |U^*AWU|$, $|V^*WEV| \leq |V^*WAV|$ *i* $\|A^{D,W}\|_2 \|WEW\|_2 < 1$, *tada je*

$$(A+E)^{D,W} = (I + A^{D,W}WEW)^{-1}A^{D,W},$$

gde su U *i* V *iste matrice kao u* (4.9).

Dokaz. Posmatrajmo reprezentaciju $E = U \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_2 \end{bmatrix} V^*$. Na osnovu Teoreme 4.2.2 i uslova $|U^*EWU| \leq |U^*AWU|$, sledi

$$\left| \begin{bmatrix} E_1W_1 & E_{12}W_2 \\ E_{21}W_1 & E_2W_2 \end{bmatrix} \right| \leq \left| \begin{bmatrix} A_1W_1 & 0 \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \right|.$$

Očigledno je $E_{21}W_1 = 0$ i $|E_2W_2| \leq |A_2W_2|$. Kako je W_1 invertibilna i A_2W_2 strogo gornje trougaona matrica, onda je $E_{21} = 0$ i E_2W_2 je strogo gornje trougaona matrica.

Slično iz $|V^*WEV| \leq |V^*WAV|$, sledi da je $E_{12} = 0$ i W_2E_2 je strogo gornje trougaona matrica.

Sada, iz $E = U \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} V^*$, lako proizilazi struktura matrice $A + E$:

$$A + E = U \begin{bmatrix} A_1 + E_1 & 0 \\ 0 & A_2 + E_2 \end{bmatrix} V^*,$$

i

$$(A+E)W = U \begin{bmatrix} (A_1 + E_1)W_1 & 0 \\ 0 & (A_2 + E_2)W_2 \end{bmatrix} U^*.$$

Pošto je $\|A^{D,W}\|_2\|WEW\|_2 < 1$, onda je $I + A^{D,W}WEW$ nesingularna matrica, tj.

$$I + A^{D,W}WEW = U \begin{bmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1}(A_1 + E_1)W_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U^*$$

je nesingularna. Prema tome, $W_1^{-1}A_1^{-1}(A_1 + E_1)W_1$ je nesingularna i $A_1 + E_1$ je nesingularna takodje, i $(A_2 + E_2)W_2$ je strogo gornje trougaona matrica. Dakle,

$$\begin{aligned} (A + E)^{D,W} &= \left([(A + E)W]^D\right)^2 (A + E) \\ &= U \begin{bmatrix} W_1^{-1}(A_1 + E_1)^{-1}W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= (I + A^{D,W}WEW)^{-1}A^{D,W}. \quad \Box \end{aligned}$$

4.3 Faktori uslovljenosti za spoljašnji inverz

U prethodnom odeljku, odnosno u radu [48], data je karakterizacija faktora uslovljenosti u odnosu na W-Drazin-ov inverz i singularni linearan sistem matrica, pomoću Schur-ove dekompozicije i spektralne norme. Radovi [15, 69] sadrže rezultate dokazane o faktoru uslovljenosti generalisanog inverza i generalisanog rešenja linearnog sistema, korišćenjem ranije pomenute PQ-norme. U ovom odeljku razmatramo faktor uslovljenosti generalisanog inverza pravougaone matrice pomoću Schur-ove dekompozicije i 2-norme umesto PQ-norme u [15]. Izloženi rezultati su iz rada sa D.S. Djordjevićem [49] i predstavljaju uopštenje rezultata iz radova [15] i [48].

Na osnovu Schur-ove dekompozicije predstavljene u prethodnom odeljku, dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 4.3.1 *Neka su A, G, T i S isti kao u Lemi 1.3.2, $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ i $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. Tada važi*

$$A = V \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} U^*, \qquad G = U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

$$A_{T,S}^{(2)} = U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{4.25}$$

gde su U i V unitarne matrice, A_1 i G_1 nesingularne matrice.

Dokaz. Iz Leme 1.3.2 i Leme 1.3.3, sledi da je $ind(AG) = ind(GA) = 1$ i $rank(GA) = rank(AG) = p$. Na osnovu Teoreme 4.2.1, postoji Schur-ova dekompozicija matrica AG i GA:

$$AG = V \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \qquad GA = U \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.26}$$

gde su $V \in \mathbf{C^{m\times m}}$ i $U \in \mathbf{C^{n\times n}}$ unitarne matrice, C i D su $p \times p$ gornje trougaone i nesingularne matrice.

Matrice A i W možemo predstaviti na sledeći način:

$$A = V \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} U^*, \qquad G = U \begin{bmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{bmatrix} V^*.$$

Zatim sledi

$$\begin{aligned} (GA)^{\#}G &= U \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} C^{-1}G_1 & C^{-1}G_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} G(AG)^{\#} &= U \begin{bmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} G_1D^{-1} & 0 \\ G_{21}D^{-1} & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Koristeći jednakost $A_{T,S}^{(2)} = (GA)^{\#}G = G(AG)^{\#}$, zaključujemo da je $C^{-1}G_{12} = 0$ i $G_{21}D^{-1} = 0$. Kako su matrice C i D nesingularne, onda je $G_{12} = G_{21} = 0$, tj.

$$G = U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} V^*.$$

Iz jednakosti

$$AG = V \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} V^* = V \begin{bmatrix} A_1 G_1 & A_{12} G_2 \\ A_{21} G_1 & A_2 G_2 \end{bmatrix} V^*,$$

$$GA = U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} G_1 A_1 & G_1 A_{12} \\ G_2 A_{21} & G_2 A_2 \end{bmatrix} U^*$$

i (4.26), sledi da je $A_1G_1 = D$, $G_1A_1 = C$, $G_1A_{12} = 0$ i $A_{21}G_1 = 0$. Dakle, matrice A_1 i G_1 su invertibilne, $A_{12} = 0$ i $A_{21} = 0$. Prema tome,

$$A = V \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} U^*.$$

Pošto je $G = GAA^{(2)}_{T,S} = A^{(2)}_{T,S}AG$ i $AA^{(2)}_{T,S} = AG(AG)^{\#}$, sa $A^{(2)}_{T,S}A = (GA)^{\#}GA$, onda je

$$\begin{aligned} G &= U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} V^* = U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned}$$

tj. $G_2 = 0$.

Na kraju, sledi da je

$$A^{(2)}_{T,S} = (GA)^{\#}G = U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

Na ovaj način smo kompletirali dokaz.□

U ovom odeljku posmatraćemo linearan sistem (4.3), pri čemu je $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$, $b \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}}$. Generalisano $A^{(2)}_{T,S}$-rešenje x je oblika $x = A^{(2)}_{T,S}b$.

Operator:

$$F : \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} \times \mathbf{C}^{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{n}}$$

$$(A, b) \longmapsto F(A, b) = A^{(2)}_{T,S}b = x,$$

je diferencijabilna funkcija, ako perturbacija E od A zadovoljava sledeće uslove:

$$\mathcal{R}(E) \subseteq AT, \quad \mathcal{R}(E^*) \subseteq A^*S^\top. \tag{4.27}$$

Lako se proverava da je uslov (4.27) ekvivalentan sa

$$AA^{(2)}_{T,S}E = E, \quad EA^{(2)}_{T,S}A = E. \tag{4.28}$$

Potreban nam je sledeći rezultat.

Lema 4.3.1 [66] *Neka su* $A, E \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ *i neka su* T, S *potprostori od* $\mathbf{C}^{\mathbf{n}}$ *i* $\mathbf{C}^{\mathbf{m}}$, *respektivno, tako da je* $AT \oplus S = \mathbf{C}^{\mathbf{m}}$. *Ako* E *zadovoljava uslov* (4.27) *i* $\|EA^{(2)}_{T,S}\|_2 < 1$, *tada je*

$$(A+E)^{(2)}_{T,S} = (I + A^{(2)}_{T,S}E)^{-1}A^{(2)}_{T,S} = A^{(2)}_{T,S}(I + EA^{(2)}_{T,S})^{-1}.$$

Sada biramo parametarsku težinsku Frobenius-ovu normu $\|[\alpha A, \beta b]\|^{(F)}_{U,Q}$, gde je U definisan kao u (4.25) i $Q = diag(U, 1)$, i dokazaćemo eksplicitnu formulu za faktor uslovljenosti generalisanog $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja u odnosu na 2-normu i Frobenius-ovu normu.

Teorema 4.3.2 *Neka su* A, G, T *i* S *isti kao u Lemi 1.3.2,* $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ *i* $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. *Ako perturbacija* E *od* A *zadovoljava uslov* (4.27), *tada apsolutni faktor uslovljenosti generalisanog* $A^{(2)}_{T,S}$*-rešenja linearnog sistema, sa normom*

$$\|[\alpha A, \beta b]\|^{(F)}_{U,Q} = \sqrt{\alpha^2\|A\|_F^2 + \beta^2\|b\|_2^2}$$

na zadatim podacima (A, b) *i normom* $\|x\|_2$ *rešenja, zadovoljava*

$$C = \|A^{(2)}_{T,S}\|_2\sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2}},$$

gde je $Q = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i* U *je ista matrica kao u* (4.25).

Dokaz. Analogno kao u dokazu Teoreme 4.1.3 i Teoreme 4.2.3 sledi da je:

$$\|F'(A, b)\| \le \|A^{(2)}_{T,S}\|_2\sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}.$$

U nastavku ćemo pokazati da je ova gornja granica dostignuta. Postoje vektori u i v tako da je

$$A_1^{-1}u = \|A_1^{-1}\|_2 v = \|A_{T,S}^{(2)}\|_2 v,$$

pri čemu je $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Neka je

$$\hat{u} = V \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{v} = U \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se proverava da je $\|\hat{u}\|_2 = \|\hat{v}\|_2 = 1$.

Zatim je

$$\begin{aligned} A_{T,S}^{(2)}\hat{u} &= U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A_1^{-1}u \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} \|A_1^{-1}\|_2 v \\ 0 \end{bmatrix} = \|A_1^{-1}\|_2 U \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \|A_{T,S}^{(2)}\|_2 \hat{v}. \end{aligned}$$

Neka je

$$\eta = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}, \qquad E = -\frac{1}{\alpha^2\eta}\hat{u}x^*, \qquad f = \frac{1}{\beta^2\eta}\hat{u}.$$

Lako se proverava da je $AA_{T,S}^{(2)}E = E$ i $EA_{T,S}^{(2)}A = E$, tj, da matrica E zadovoljava uslov (4.27). Sada proveravamo da li je perturbacija (E, f) odgovarajuća, tj. da li je $\alpha^2\|E\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2 = 1$. Primetimo da je

$$x = A_{T,S}^{(2)}b = U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* b,$$

i onda je

$$\begin{aligned} &\alpha^2\|E\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|\hat{u}x^*\|_F^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2}\|\hat{u}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta^2}\|\hat{u}\|_2^2\|x^*\|_2^2 + \frac{1}{\beta^2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} F'(A,b)|_{(E,f)} &= -A^{(2)}_{T,S}Ex + A^{(2)}_{T,S}f \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u}x^*x + \frac{1}{\beta^2\eta}A^{(2)}_{T,S}\hat{u} \\ &= \frac{1}{\alpha^2\eta}\|A^{(2)}_{T,S}\|_2\hat{v}\|x\|_2^2 + \frac{1}{\beta^2\eta}\|A^{(2)}_{T,S}\|_2\hat{v} \\ &= \|A^{(2)}_{T,S}\|_2\eta\hat{v}. \end{aligned}$$

Zatim

$$\|F'(A,b)|_{(E,f)}\|_2 = \|A^{(2)}_{T,S}\|_2\sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}},$$

zajedno sa $\alpha^2\|E\|_F^2 + \beta^2\|f\|_2^2 = 1$, implicira

$$\|F'(A,b)\| \geq \|A^{(2)}_{T,S}\|_2\sqrt{\frac{\|x\|_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}},$$

i dokaz je kompletan. □

Ako E zadovoljava uslov (4.27), tada je relativni faktor uslovljenosti u odnosu na 2-normu generalisanog inverza $A^{(2)}_{T,S}$ definisan na sledeći način

$$Cond(A) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\sup_{\|E\|_2\leq\epsilon\|A\|_2}\frac{\|(A+E)^{(2)}_{T,S} - A^{(2)}_{T,S}\|_2}{\epsilon\|A^{(2)}_{T,S}\|_2}$$

i odgovarajući faktor uslovljenosti za linearan sistem $Ax = b$ je definisan kao

$$Cond(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\sup_{\substack{\|E\|_2\leq\epsilon\|A\|_2 \\ \|f\|_2\leq\epsilon\|b\|_2}}\frac{\|(A+E)^{(2)}_{T,S}(b+f) - A^{(2)}_{T,S}b\|_2}{\epsilon\|A^{(2)}_{T,S}b\|_2}.$$

Faktor uslovljenosti nivoa-2 generalisanog $A^{(2)}_{T,S}$-inverza je definisan sa

$$Cond^{[2]}(A) = \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{\|E\|_2\leq\epsilon\|A\|_2}\frac{|Cond(A+E) - Cond(A)|}{\epsilon Cond(A)}$$

i odgovarajući faktor uslovljenosti nivoa-2 je definisan na sledeći način

$$Cond^{[2]}(A,b) = \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{\substack{\|E\|_2\leq\epsilon\|A\|_2 \\ \|f\|_2\leq\epsilon\|b\|_2}}\frac{|Cond(A+E,b+f) - Cond(A,b)|}{\epsilon Cond(A,b)}.$$

U radu [71], N. Zhang i Y. Wei su odredili izraz za faktor uslovljenosti u odnosu na 2-normu generalisanog inverza $A^{(2)}_{T,S}$ i generalisanog $A^{(2)}_{T,S}$-rešenja, respektivno,

$$Cond(A) = \|A\|_2 \|A^{(2)}_{T,S}\|_2. \tag{4.29}$$

$$Cond(A, b) = \|A\|_2 \|A^{(2)}_{T,S}\|_2 + \frac{\|A^{(2)}_{T,S}\|_2 \|b\|_2}{\|A^{(2)}_{T,S} b\|_2}. \tag{4.30}$$

Sledećim rezultatom se pokazuje da je za generalisani $A^{(2)}_{T,S}$-inverz u rešavanju linearnog sistema, faktor uslovljenosti aproksimativno dat njegovim faktorom uslovljenosti.

Prvo su nam potrebne naredne leme.

Lema 4.3.2 *Za $\hat{u}, \hat{v}$ u Teoremi 4.3.2, postoji $S \in \mathbf{C^{m\times n}}$ tako da je*

$$S\hat{v} = -\hat{u}, \quad \|S\|_2 = 1,$$

pri čemu S zadovoljava uslov (4.27).

Dokaz. Neka je $S = -\hat{u}\hat{v}^*$, tada je $S\hat{v} = -\hat{u}\hat{v}^*\hat{v} = -\hat{u}\|\hat{v}\|_2^2 = -\hat{u}$. Posmatrajmo sada 2-normu od S:

$$\|S\|_2 = \|\hat{u}\hat{v}^*\|_2 = \|\hat{u}\|_2 \|\hat{v}\|_2 = 1.$$

Lako se proverava da je $AA^{(2)}_{T,S}S = S$ i $SA^{(2)}_{T,S}A = S$. Prema tome, S zadovoljava uslov (4.27). □

Lema 4.3.3 *Neka su A, G, T i S isti kao u Lemi 1.3.2, $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ i $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. Ako $\epsilon \to 0$, onda je*

$$\max_{\|E\|_2 \le \epsilon \|A\|_2} \left| \|(A+E)^{(2)}_{T,S}\|_2 - \|A^{(2)}_{T,S}\|_2 \right| = \epsilon \|A^{(2)}_{T,S}\|_2 Cond(A) + O(\epsilon^2),$$

pri čemu E zadovoljava uslov (4.27).

Dokaz. Analogno dokazu Leme 4.2.4, možemo pokazati i ovu lemu □

Sada možemo lako dokazati sledeće rezultate iz [15].

Posledica 4.3.1 [15] *Neka su A, G, T i S isti kao u Lemi 1.3.2, $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ i $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. Ako perturbacija E u A zadovoljava uslov* (4.27)*, tada faktor uslovljenosti nivoa-2*

$$Cond^{[2]}(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\|E\|_2 \le \epsilon \|A\|_2} \frac{|Cond(A+E) - Cond(A)|}{\epsilon Cond(A)} \tag{4.31}$$

zadovoljava

$$|Cond^{[2]}(A) - Cond(A)| \le 1. \tag{4.32}$$

Posledica 4.3.2 [15] *Neka su A, G, T i S isti kao u Lemi 1.3.2, $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ i $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. Ako perturbacija E u A zadovoljava uslov* (4.27)*, tada faktor uslovljenosti nivoa-2 linearnog sistema $Ax = b$, $x \in T$,*

$$Cond^{[2]}(A,b) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\substack{\|E\|_2 \le \epsilon \|A\|_2 \\ \|f\|_2 \le \epsilon \|b\|_2}} \frac{|Cond(A+E, b+f) - Cond(A,b)|}{\epsilon Cond(A,b)} \tag{4.33}$$

zadovoljava

$$\frac{Cond(A,b)}{(1+\zeta)^2} - \frac{1}{1+\zeta} \le Cond^{[2]}(A,b) \le 3Cond(A,b) + 2, \tag{4.34}$$

gde je $\zeta = \frac{\|b\|_2}{\|AA^{(2)}_{T,S} b\|_2}$.

U nastavku sekcije predstavljamo struktuiranu perturbaciju generalisanog inverza $A^{(2)}_{T,S}$ u terminima 2–norme. Ponovo sa $|A| \le |B|$ označavamo da je $|a_{i,j}| \le |b_{i,j}|$ za $A = (a_{i,j})$ i $B = (b_{i,j})$.

Teorema 4.3.3 *Neka su A, G, T i S isti kao u Lemi 1.3.2, $p = rank(AG)$, $\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}((AG)^*)$ i $\mathcal{R}(GA) = \mathcal{R}((GA)^*)$. Ako je $|V^*EU| \le |V^*AU|$ i $\|A^{(2)}_{T,S}E\|_2 < 1$, onda je*

$$(A+E)^{(2)}_{T,S} = (I + A^{(2)}_{T,S}E)^{-1} A^{(2)}_{T,S},$$

pri čemu su U i V iste matrice kao u (4.25).

Dokaz. Razmatraćemo reprezentaciju $E = V \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_2 \end{bmatrix} U^*$. Iz Teoreme 4.3.1 i uslova $|V^*EU| \leq |V^*AU|$, sledi da je

$$\left| \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_2 \end{bmatrix} \right| \leq \left| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right|.$$

Sada je očigledno $E_{21} = 0$, $E_{12} = 0$ i $|E_2| \leq |A_2|$. Zatim, iz $E = V \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} U^*$, lako proizilazi struktura matrice $A+E$:

$$A + E = V \begin{bmatrix} A_1 + E_1 & 0 \\ 0 & A_2 + E_2 \end{bmatrix} U^*.$$

Kako je $\|A^{(2)}_{T,S} E\|_2 < 1$, onda je $I + A^{(2)}_{T,S} E$ nesingularna matrica, tj.

$$I + A^{(2)}_{T,S} E = U \begin{bmatrix} A_1^{-1}(A_1 + E_1) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U^*$$

je nesingularan. Prema tome, matrica $A_1^{-1}(A_1 + E_1)$ je nesingularna, pa je i $A_1 + E_1$ takodje nesingularna matrica. Nije teško proveriti da je $(A+E)\mathcal{R}(G) \oplus \mathcal{N}(G) = \mathbf{C^m}$. Dakle, $(A+E)^{(2)}_{T,S}$ postoji i

$$\begin{aligned}
(A+E)^{(2)}_{T,S} &= G[(A+E)G]^{\#} \\
&= U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \left(V \begin{bmatrix} (A_1 + E_1)G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right)^{\#} \\
&= U \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* V \begin{bmatrix} G_1^{-1}(A_1 + E_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= U \begin{bmatrix} (A_1 + E_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= U \begin{bmatrix} (I + A_1^{-1}E_1)^{-1} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
&= (I + A^{(2)}_{T,S} E)^{-1} A^{(2)}_{T,S}. \quad \square
\end{aligned}$$

Literatura

[1] O.M. Baksalary, G. Trenkler, *Characterizations of EP, normal and Hermitian matrices*, Linear Multilinear Algebra 56 (2006) 299–304.

[2] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2nd ed., Springer, New York, 2003.

[3] E. Boasso, *On the Moore–Penrose inverse, EP Banach space operators, and EP Banach algebra elements*, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 1003–1014.

[4] S.L. Campbell, C.D. Meyer Jr., *EP operators and generalized inverses*, Canad. Math. Bull. 18 (1975) 327–333.

[5] S.L. Campbell, C.D. Meyer Jr., *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Pitman, London, (1979); Dover, New York, (1991).

[6] N. Castro Gonzalez, *Additive perturbation results for the Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. 397 (2005) 279–297.

[7] N. Castro Gonzalez, J. J. Koliha, *New additive results for the g-Drazin inverse*, Proc. R. Soc. Edinburgh 134A (2004) 1085–1097.

[8] G. Chen, G. Liu, Y. Xue, *Perturbation theory for the generalized Bott-Duffin inverse and its applications*, Appl. Math. Comput. 129 (2002) 145–155.

[9] J. Chen, Z. Xu, *Comment on "Condition Number of Drazin Inverse and their Condition Numbers of Singular Linear Systems"*, Appl. Math. Comput. 199 (2008) 512–526.

[10] S. Cheng, Y. Tian, *Two sets of new characterizations for normal and EP matrices*, Linear Algebra Appl. 375 (2003) 181–195.

[11] R.E. Cline, T.N.E. Grevile, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. 29 (1980) 53–62.

[12] X. Cui, H. Diao, *Condition number for the W–weighted Drazin inverse and its applications in the solution of rectangular linear system*, J. Appl. Math. Comput. 20 (2006) 35–59.

[13] D. Cvetković, D.S. Djordjević, J.J. Koliha, *Moore-Penrose inverse in rings with involution*, Linear Algebra Appl. 426 (2007) 371-381.

[14] A. Dajić, J.J. Koliha, *The weighted g–Drazin inverse for operators*, J. Australian Math. Soc. 82 (2007) 163–181.

[15] H. Diao, M. Qin, Y. Wei, *Condition numbers for the outer inverse and constrained singular linear system*, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 588–612.

[16] D.S. Djordjević, *Products of EP operators on Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (6) (2000) 1727-1731.

[17] D.S. Djordjević, *Characterization of normal, hyponormal and EP operators*, J. Math. Anal. Appl. 329 (2) (2007) 1181-1190.

[18] D.S. Djordjević, J.J. Koliha, *Characterizing hermitian, normal and EP operators*, Filomat 21:1 (2007) 39–54.

[19] D.S. Djordjević, J.J. Koliha, I. Straškraba, *Factorization of EP elements in C^*-algebras*, Linear Multilinear Algebra (prihvaćen za štampu).

[20] D.S. Djordjević, V. Rakočević, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, 2008.

[21] D. Djordjević, Y. Wei, *Additive results for the generalized Drazin inverse*, J. Austral. Math. Soc. 73(1) (2002) 115–126.

[22] D. Djordjević, Y. Wei, *Operators with equal projections related to their generalized inverses*, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 655–664.

[23] M.P. Drazin, *Pseudoinverse in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65 (1958) 506-514.

[24] D. Drivaliaris, S. Karanasios, D. Pappas, *Factorizations of EP operators*, Liner Algebra Appl. 429 (7) (2008) 1555-1567.

[25] L. Elsner and K. D. Ikramov, *Normal matrices: an update*, Linear Algebra Appl. 285 (1998) 291-303.

[26] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd Edition, Johns Hopkins University, Baltimore, 1996.

[27] R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa, H. Wolkowicz, *Normal matrices*, Linear Algebra Appl. 87 (1987) 213-225.

[28] R.E. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, New York, Marcel Dekker, 1988.

[29] R.E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, Panamer. Math. J. 1 (1991) 10-16.

[30] R.E. Harte, M. Mbekhta, *On generalized inverses in C^*-algebras*, Studia Math. 103 (1992) 71–77.

[31] R.E. Hartwig, I.J. Katz, *On products of EP matrices*, Linear Algebra Appl. 252 (1997) 339-345.

[32] R.E. Hartwig, K. Spindelböck, *Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute*, Linear and Multilinear Algebra 14 (1984) 241–256.

[33] R.E. Hartwig, G. Wang, Y. Wei, *Some additive results on Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. 322 (2001) 207–217.

[34] D.J. Higham, *Condition numbers and their condition numbers*, Linear Algebra Appl. 214 (1995) 193–213.

[35] J.J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. 38 (1996) 367–381.

[36] J.J. Koliha, *The Drazin and Moore–Penrose inverse in C*-algebras*, Math. Proc. Royal Irish Acad. 99A (1999) 17–27.

[37] J.J. Koliha, *A simple proof of the product theorem for EP matrices*, Linear Algebra Appl. 294 (1999) 213–215.

[38] J.J. Koliha, *Elements of C*-algebras commuting with their Moore–Penrose inverse*, Studia Math. 139 (2000) 81–90.

[39] J.J. Koliha, P. Patricio *Elements of rings with equal spectral idempotents*, J. Australian Math. Soc. 72 (2002) 137–152.

[40] J.J. Koliha, V. Rakočević, *Range projections and the Moore–Penrose inverse in rings with involution*, Linear Multilinear Algebra 55 (2) (2007) 103–112.

[41] J.J. Koliha, T.D. Tran, *The Drazin inverse for closed linear operators and the asymptotic convergence of C_0–semigroups*, J. Operator Theory 46 (2001) 323–336.

[42] G. Lesnjak, *Semigroups of EP linear transformations*, Linear Algebra Appl. 304 (1-3) (2000) 109–118.

[43] T. Lei, Y. Wei, C.W. Woo, *Condition numbers and strucured perturbation of the W–weighted Drazin inverse*, J. Appl. Math. Comput. 165 (2005) 185–194.

[44] Y. Liu, M. Wei, *Rank equalities related to the generalized inverses $A^{(2)}_{T,S}$, $B^{(2)}_{T_1,S_1}$ of two matrices A and B*, Appl. Math. Comput. 159 (2004) 19–28.

[45] D. Mosić, *Estimation of a condition number related to the weighted Drazin inverse*, Novi Sad J. Math. (prihvaćen za štampu).

[46] D. Mosić, *Estimation of a condition number related to $A^{(2)}_{T,S}$*, (preprint).

[47] D. Mosić, D.S. Djordjević, *Additive results for the Wg-Drazin inverse*, (preprint).

[48] D. Mosić, D.S. Djordjević, *Condition number of the W–weighted Drazin inverse*, Appl. Math. Comput. 203 (2008) 308-318.

[49] D. Mosić, D.S. Djordjević, *Condition number related to the outer inverse of a complex matrix*, (preprint).

[50] D. Mosić, D.S. Djordjević, J.J. Koliha *EP elements in rings*, Linear Algebra Appl. (prihvaćen za štampu).

[51] D. Mosić, D.S. Djordjević, *Moore-Penrose-invertible normal and Hermitian elements in rings*, Linear Algebra Appl. (prihvaćen za štampu).

[52] D. Mosić, D.S. Djordjević, *Weighted generalized Drazin inverse in rings*, (preprint).

[53] M.Z. Nashed, Y. Zhao, *The Drazin inverse for singular evolution equations and partial differential operators*, World Sci. Ser. Appl. Anal. 1 (1992) 441–456.

[54] P. Patrício, R. Puystjens, *Drazin–Moore–Penrose invertibility in rings*, Linear Algebra Appl. 389 (2004) 159–173.

[55] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 406–413.

[56] S.Z. Qiao, *The weighted Drazin inverse of a linear operator on a Banach space and its approximations*, (Chinese), Numer. Math. J. Chinese Univ. 3 (1981) 296–305.

[57] J.R. Rice, *A theory of condition*, SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966) 287–310.

[58] V. Rakočević, Y. Wei, *A weighted Drazin inverse and applications*, Linear Algebra Appl. 350 (2002) 25–39.

[59] V. Rakočević, Y. Wei, *The Representation and Approximation of the W-weighted Drazin inverse of Linear Operators in Hilbert Space*, Appl. Math. Comput. 141 (2003) 455–470.

[60] G. Wang, C. Gu, *Condition number related with W–weighted Drazin inverse and singular linear systems*, Appl. Math. Comput. 162 (2005) 435–446.

[61] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized inverses: Theory and Computations* Science Press, Beijing 2004.

[62] Y. Wei, *A characterization and representation of the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and its applications*, Linear Algebra Appl. 280 (1998) 87–96.

[63] Y. Wei, H. Diao, *Condition number for the Drazin inverse and the Drazin inverse solution of singular linear systems with their condition numbers*, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005) 270–289.

[64] Y. Wei, D. Wang, *Condition numbers and perturbation of the weighted Moore-Penrose inverse and weighted linear least squares problem*, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 45–58.

[65] Y. Wei, G. Wang, D. Wang, *Condition number of Drazin inverse and their condition numbers of singular linear systems*, Appl. Math. Comput. 146 (2003) 455–467.

[66] Y. Wei, H. Wu, *On the perturbation and subproper splittings for the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ of rectangular matix A*, J. Comput. Appl. Math. 137 (2001) 317–329.

[67] Y. Wei, C.W. Woo, T. Lei, *A note on the perturbation of the W–weighted Drazin inverse*, Appl. Math. Comput. 149 (2004) 423–430.

[68] Y. Wei, W. Xu, *Condition number of Bott-Duffin inverse and their condition numbers*, Appl. Math. Comput. 142 (2003) 79–97.

[69] Y. Wei, N. Zhang, *Condition number related with generalized inverse* $A^{(2)}_{T,S}$ *and constrained linear system*, J. Comput. Appl. Math. 157 (2003) 57–72.

[70] F. Zhang, *Matrix Theory. Basic results and techniques*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[71] N. Zhang, Y. Wei, *Perturbation bounds for the generalized inverses* $A^{(2)}_{T,S}$ *with application to constrained linear systems*, Appl. Math. Comput. 142 (2003) 63–78.