

Sadržaj

1	Uvod i uvodna razmatranja	3
1.1	Osnovne osobine i klasifikacija strukturnih matrica	3
1.1.1	Značaj i primena	5
1.2	Uopšteni inverzi matrica	7
1.3	Pojam optimizacije	8
1.4	Organizacija doktorske disertacije	9
2	Uopšteni inverzi strukturnih matrica	11
2.1	Definicije i osnovna svojstva generalisanih inverza matrica	11
2.1.1	Moore-Penroseov, Drazin-ov i $\{i, j, \dots, k\}$ inverzi	13
2.2	Toeplitz-ove matrice	15
2.2.1	Direktni metodi za računanje inverza Toeplitz-ovih matrica	16
2.2.2	Cirkularne matrice, DFT i FFT	18
2.2.3	Operator razmeštanja matrice	20
2.2.4	Schultz-ov metod i odgovarajući operatori razmeštanja	22
2.2.5	Modifikacija SMS algoritma za računanje $\{2\}$ inverza Toeplitz-ove matrice	24
2.2.6	Numerički rezultati	31
3	Nelinearna optimizacija i strukturne matrice	37
3.1	Osnovni pojmovi i osobine nelinearne optimizacije	37
3.1.1	Tehnika nemonotonog linijskog pretraživanja	40
3.2	Ubrzani algoritam opadajućih gradijenata	42
3.2.1	Tehnike izračunavanja parametra ubrzanja	43
3.2.2	Analiza konvergencije SM metoda	46
3.2.3	Numerički rezultati	51
3.3	Gradijentni metod skalarne korekcije	53
3.3.1	Analiza konvergencije	57
3.3.2	Rezultati testiranja	59
3.4	Primena SC metoda za rešavanje operatorskih jednačina	61
3.4.1	Pojam Frèchet-ovog izvoda operatora	62
3.4.2	Rešavanje linearnih operatorskih jednačina	64
3.4.3	Izračunavanje uopštenih inverza matrica	67
3.4.4	Osobine konvergencije gradijentnih metoda	68
3.4.5	Numerički rezultati	72

4	Primene Toeplitz-ovih matrica	77
4.1	Uopšteni Fibonacci-jevi brojevi i odgovarajuće Toeplitz-ove matrice	77
4.1.1	Definicije i osnovni pojmovi	78
4.1.2	Konvolucija i odgovarajući kombinatorni identiteti	79
4.1.3	Inverzija matrica zasnovana na konvoluciji	83
4.2	Catalan-ovi brojevi i odgovarajuće Toeplitz-ove matrice	88
4.2.1	Definicije i osobine	89
4.2.2	Kombinatorni identiteti bazirani na matričnom inverzu	92
4.2.3	Kombinatorni identiteti bazirani na jediničnom vektoru	98
4.3	Restauracija oštećenih slika	99
4.3.1	Zamućenje usled linearnog kretanja i Toeplitz-ove matrice	100
4.3.2	Partitioning metod i restauracija slika	101
4.3.3	Uklanjanje zamućenja pomoću partitioning metoda	103
4.3.4	Rezultati testiranja	107
4.3.5	Restauracija bazirana na problemu matrične inverzije	110
5	Zaključak	113

Glava 1

Uvod i uvodna razmatranja

Jedan od prvih naučnika koji je počeo da se bavi izučavanjem *strukturnih matrica* (Structured matrices), i da primenjuje taj termin za klasu (grupu) već poznatih matrica je Georg Heing (1947-2005). Kao što je i sam više puta ponavljao on je bio usamljen u držanju naučnih predavanja na temu *strukturnih matrica* pre 20-ak godina na konferencijama kao što su IWOTA (International Workshop on Operator Theory and its Applications) i ILAS (International Linear Algebra Society).

Termin *strukturne matrice* prvi put se zvanično pojavio 1995. godine u naslovu konferencije, i to u sesiji "Algorithms for Structured Matrices" koja je održana u San Dijegu (SAD) kao i na sesiji "Minisymposium on Structured Matrices" u okviru ILAS konferencije održane u Atlanti (SAD). Ova iskustva dovela su do organizacije prve dve konferencije posebno posvećene strukturnim matricama "International Workshop on Numerical Methods for Structured Matrices in Filtering and Control" održan u Santa barbari (SAD) kao i "Toeplitz Matrices: Structures, Algorithms and Applications" održan u Kortoni (Italija). Danas je uobičajeno da posebne sesije i mini simpozijumi na temu *strukturnih matrica* budu uključene u programe mnogih konferencija, kao što su IWOTA, ILAS, MTNS (Mathematical Theory of Networks and Systems) i druge. Štaviše dosta konferencija posvećeno isključivo ovoj temi održano je do danas: dve u SAD u organizaciji AMS (American Mathematical Society), četiri u Italiji, zatim tri u Moskvi, kao i tri konferencije u Hong Kong-u.

Organizacija ovih specijalizovanih konferencija o *strukturnim matricama* otvorila je mogućnost susreta istraživača koji izučavaju teoretski i numerički aspekt sa istraživačima koji se bave njihovim primenama u različitim naučnim granama. Ova razmena znanja eksperata iz različitih oblasti i sa drugačijim pristupom, dovela je do veoma velikog interesovanja naučne zajednice za *strukturne matrice* i za njihove primene.

Da bismo mogli da se bavimo različitim izračunavanjima na strukturnim matricama na prirodan način, javlja se potreba za korišenjem i nekih drugih oblasti. U tom smislu u ovoj doktorskoj disertaciji korišćemo i na odgovarajući način povezati ovu oblast sa oblastima **uopštenih inverza matrica** i **nelinearne optimizacije**.

1.1 Osnovne osobine i klasifikacija strukturnih matrica

Pre nego što pređemo na objašnjenja osnovnih osobina strukturnih matrica navedimo najpre jednu od opštijih podela strukturnih matrica. Ova veoma važna klasa matrica, koje su sveprisutne u algebri i numeričkim izračunavanjima u različitim naučnim disciplinama kao što su

elektrotehnika, komunikacije i statistika, može se podeliti na [109]: **cirkularne, Toeplitz-ove, Hankel-ove, Vandermonde-ove, Cauchy-ove, Frobenius-ove, Sylvester-ove, Bezout-ove, Loewner-ove** i **Pick-ove** matrice.

Ono što je opšte poznato je to da ove matrice imaju veoma karakterističnu strukturu, pa otuda i sam naziv *strukturne matrice*. Ta specifična struktura sadržana je u njihovoj osnovnoj osobini a odnosi se na to da je za čuvanje ovih matrica dovoljno pamtiti mnogo manje elemenata od ukupnog broja elemenata. Recimo, u nekim slučajevima, dovoljno je pamtiti samo jedan niz koji se sastoji od $\mathcal{O}(n)$ elemenata gde je n dimenzija matrice (Toeplitz-ove, Hankel-ove, cirkularne, Vandermonde-ove) ili recimo dva niza kao što je slučaj kod Cauchy-evih matrica. U tom smislu dajemo sledeću definiciju.

Definicija 1.1.1. *Gustu matricu reda $n \times n$ zovemo strukturnom matricom ukoliko elementi te matrice zavise samo od $\mathcal{O}(n)$ parametara.*

Kao sledeću osobinu treba napomenuti i to da je u izučavanju ovih matrica veoma važno postizanje redukcije u izračunavanjima, i to posebno u množenju ovih matrica između sebe, kao i u njihovom množenju vektorima. Koristeći diskretnu Furijeovu transformaciju (Discrete Fourier Transform) kao i kosinusnu transformaciju (Cosine Transform) izgrađeni su veoma brzi algoritmi za množenje ovih matrica vektorima. Ovi algoritmi će detaljnije biti obrađeni u drugoj glavi ovog doktorata.

Izučavajući relacije (veze) i sličnosti između izračunavanja na polinomima i racionalnim funkcijama sa izračunavanjima na strukturnim matricama došlo se do poboljšanja na izračunavanjima i jednih i drugih. Naime, za operacije množenja, deljenja, interpolaciju i druga izračunavanja na polinomima rešenja koja se dobijaju uglavnom važe i za strukturne matrice ili su u tesnoj vezi sa njima. U nekim slučajevima, dva rezultujuća algoritma su zapravo identična. To znači, da se kao izlaz i kao srednje vrednosti dobijaju isti rezultati, ali imaju samo različite izvode i reprezentacije. Jedni su dati u terminima polinoma a drugi u terminima strukturnih matrica. Ovaj isti pristup za rešavanje različitih problema daje mogućnost nalaženja različitih poboljšanja, proširenja i uopštenja postavljenih problema. U mnogim slučajevima pri rešavanju zadatih problema algoritmi za izračunavanja na polinomima postaju brži, dok sa druge strane algoritmi za izračunavanja na strukturnim matricama pokazuju veću numeričku stabilnost. Kao zaključak dobijaju se dva povezana cilja u procesu dizajna algoritama:

- o Napraviti efektivan algoritam za polinome i racionalna izračunavanja
- o Napraviti efektan algoritam za izračunavanja na strukturnim matricama.

Izračunavanja na strukturnim matricama, ukoliko se *adekvatno izvode*, obavljaju se za veoma kratko vreme i zauzimaju dosta manje memorijskog prostora od izračunavanja na običnim matricama. Osnovni problem koji se ovde javlja je potreba da se ta izračunavanja izvode adekvatno. Da bi se izračunavanja izvodila adekvatno koristi se i istražuje pristup razmeštenog ranga matrica (displacement rank approach). Opšta ideja je opisivanje razmeštanja matrice M kao slike $L(M)$ razmeštenog linearnog operatora L primenjenog na matricu M . Ono što je bitno je da rang matrice $L(M)$ ostaje mali dok se dimenzija matrice M povećava. Kasnije imamo da se matrica M može predstaviti pomoću operatora L i matrice $L(M)$. Pristup razmeštenog ranga matrice će biti detaljnije objašnjen u drugoj glavi ove doktorske disertacije.

Na osnovu svega prethodno navedenog i osobina koje se mogu pronaći u širokoj literaturi za ovu klasu matrica naglašavamo sledeće. Strukturne matrice

- 1) mogu biti predstavljene pomoću malog broja parametara (elemenata)

- 2) njihovo množenje sa vektorom može se izvršiti veoma brzo, skoro u linearnom vremenu
- 3) imaju blisku algoritamsku korelaciju (vezu) sa izračunavanjima na polinomima i racionalnim funkcijama, posebno sa njihovim množenjima, deljenjima i interpolaciji
- 4) su u prirodnoj vezi sa linearnim razmeštenim operatorom L (displacement operator) i na jednostavan način mogu biti predstavljene pomoću operatora L i matrica $L(M)$ koje imaju mali razmešteni rang.

U sledećoj tabeli predstavljamo četiri najosnovnije klase strukturnih matrica i dajemo njihov opšti oblik kako bi vizuelno bile vidljive neke od pobrojanih osobina. Od svih gore navedenih klasa strukturnih matrica ove su najpoznatije, najčešće obrađivane i izučavane u naučnoj literaturi i imaju najširu primenu.

Tabela 1.1.1. Četiri najznačajnije klase strukturnih matrica

<p>Toeplitz-ove matrice $t_{i,j} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$</p> $T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix}$	<p>Hankel-ove matrice $h_{i,j} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$</p> $H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix}$
<p>Vandermonde-ove matrice $v_{i,j} = (v_i^j)_{i,j=0}^{n-1}$</p> $V = \begin{bmatrix} 1 & v_0 & \dots & v_0^{n-1} \\ 1 & v_1 & \dots & v_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_{n-1} & \dots & v_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$	<p>Cauchy-ove matrice $c_{i,j} = \left(\frac{1}{s_i-t_j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$</p> $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_0-t_0} & \frac{1}{s_0-t_1} & \dots & \frac{1}{s_0-t_{n-1}} \\ \frac{1}{s_1-t_0} & \frac{1}{s_1-t_1} & \dots & \frac{1}{s_1-t_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{s_{n-1}-t_0} & \frac{1}{s_{n-1}-t_1} & \dots & \frac{1}{s_{n-1}-t_{n-1}} \end{bmatrix}$

Ove klase matrica mogu se proširiti i uopštiti na neke druge klase strukturnih matrica kao što su f -cirkularne Toeplitz-ove matrice, trakaste Toeplitz-ove matrice (banded Toeplitz matrices), blok Toeplitz-ove matrice, Toeplitz plus Hankel-ove matrice, blok matrice sa Toeplitz, Hankel ili Vandermonde-ovim blokovima, kao i mnoge druge.

1.1.1 Značaj i primena

Strukturne matrice su izuzetno važne i imaju veliku primenu u nauci, tehnici kao i u komunikacijama. Mnogi važni problemi u primenjenoj matematici i tehnici mogu se svesti na neki matricni problem. Šta više, za potrebe različitih primena tih problema obično se uvode posebne strukture na odgovarajuće matrice, na način da se elementi tih matrica mogu opisati pomoću nekih pravila (formula). Klasični primeri obuhvataju Toeplitz-ove, Hankel-ove, Vandermonde-ove, Cauchy-ove, Pick-ove, Bezout-ove kao i druge strukturne matrice. Korišćenje ovih kao i nekih opštijih struktura obično dovodi do elegantnih rešenja matematičkih problema kao i do konstrukcije praktičnih i efikasnijih algoritama za mnoštvo različitih problema koji se javljaju u tehnici i nauci.

Već dugi niz godina, velika pažnja je posvećena izučavanju strukturnih matrica i to iz veoma različitih oblasti kao što su matematika, računarstvo i tehnika. Priličan napredak u svim ovim oblastima je načinjen i to posebno u pogledu izračunavanja na strukturnim matricama i u ispitivanju njihovih numeričkih karakteristika. U tom smislu strukturnim matricama se, na prirodan način, nameće pozicija mosta (veze) između nekih primena u nauci i tehnici, sa jedne strane, teorijske matematike, sa druge strane, kao i izračunavanja i numeričkih karakteristika sa treće strane. Mnoštvo prisutnih radova na ovu temu potvrđuje činjenicu da različiti metodi u tehnici, matematici i numeričkoj analizi dopunjuju jedni druge i svi oni doprinose razvoju objedinjene teorije strukturnih matrica.

Analiza teorijskih i numeričkih karakteristika struktura matrica je od fundamentalnog značaja za dizajn efikasnih algoritama za izračunavanja na matricama i polinomima. Neki opšti algoritmi za rešavanje mnogih problema, velikih dimenzija, postaju nekorisni zbog svoje kompleksnosti. Zbog toga specijalno dizajnirani algoritmi koji se oslanjaju na neke posebne osobine, zajedničke za neku klasu problema, ostaju efikasni i u slučaju problema velikih dimenzija. To zapravo znači da bogatstvo osobina mnogih klasa strukturnih matrica dozvoljava istraživačima da konstruišu i analiziraju brze algoritme za rešavanje problema koji su u vezi sa tim klasama matrica. Teorijska dostignuća su korišćena da bi se dobili efikasni numerički algoritmi za rešavanje različitih problema koji se tiču strukturnih matrica. Takođe, neki drugi problemi, koji su zapravo veoma daleko od strukturnih matrica, su preformulisani u terminima strukturnih matrica i efikasno rešeni pomoću odgovarajućih algoritama. Rezultati dobijeni na ovaj način su iskorišćeni za rešavanje i mnogih drugih problema iz različitih oblasti.

Kao najznačajniju i najviše izučavanu klasu izdvajamo klasu Toeplitz-ovih matrica. Ove matrice se pojavljuju i imaju primenu u obradi slika, obradi signala, digitalnom filtriranju, teoriji opsluživanja (queueing theory), kompjuterskoj algebri, kao i u oblasti nalaženja rešenja izvesnih diferencnih i diferencijalnih jednačina numeričkim putem. Druge klase strukturnih matrica imaju malo manju primenu u tehnici, ali isto tako su veoma važne za izučavanje kako sa teorijskog aspekta tako i sa aspekta primena. Frobenius-ove, Hankel-ove, Sylvester-ove i Bezoutians-ove matrice se pojavljuju u teoriji kontrola (control theory), teoriji stabilnosti i izračunavanjima na polinomima. Ove matrice poseduju mnoge važne osobine i predmet su mnogih naučnih istraživanja. Vandernomde-ove, Cauchy-ove, Loewner-ove i Pick-ove matrice se najviše primenjuju u okviru interpolacionih problema. Tridijagonalne matrice kao i neke druge opštije trakaste matrice i njihovi inverzi koji pripadaju polu-razdvojivim matricama (semiseparable matrices) su u veoma uskoj vezi sa numeričkom analizom. Proširenja ovih matrica na neke opštije klase i konstrukcija efikasnih algoritama, u prethodnim godinama, dobijaju veliku pažnju naučne zajednice. Takođe, neki više dimenzionalni problemi dovode do pojave matrica koje se mogu predstaviti pomoću strukturnih blok matrica, matrica čiji blokovi imaju karakterističnu strukturu.

Matrična algebra je primer još jedne oblasti kod koje strukturne matrice igraju veoma važnu ulogu. Cirkularne matrice i Hartley algebre su primeri trigonometrijskih algebra koje imaju veoma bogate algebarske i numeričke osobine. Njihove veze sa brzim diskretnim transformacijama, kao što je FFT (Fast Fourier Transform), čine ih korisnim oruđem za dizajn efikasnih algoritama kod matričnih izračunavanja.

1.2 Uopšteni inverzi matrica

Generalisani (uopšteni) inverzi matrica predstavljaju uopštenja pojma običnog matičnog inverza. Ako je A regularna kvadratna matrica, tj. ako je $\det A \neq 0$, tada postoji jedinstvena matrica X takva da je $AX = XA = I$, gde je I jedinična matrica. U tom slučaju X je inverzna matrica matrice A i označava se sa A^{-1} . Ukoliko je A singularna matrica (ili pravougaona matrica), tada matrica X sa pomenutim osobinama ne postoji. U tim slučajevima, korisno je odrediti neku vrstu "inverza" matrice A , tj matrice koja će zadržati što je moguće više svojstava inverzne matrice. To je dovelo do pojma *uopštenog inverza* matrice A . Pod uopštenim inverzom matrice A podrazumeva se matrica X koja je u izvesnom smislu pridružena matrici A tako da važi

- (1) Uopšteni inverz postoji za klasu matrica koja je šira od klase regularnih matrica (u nekim slučajevima za proizvoljnu matricu A);
- (2) Ima neka svojstva običnog inverza;
- (3) Svodi se na obični inverz kada je A nesingularna kvadratna matrica.

Ideja o generalisanim inverzima je implicitno sadržana još u radovima C. F. Gaussa iz 1809, i to u vezi sa uvođenjem principa metoda najmanjih kvadrata kod nekonzistentnih sistema. Nakon toga je I. Fredholm, 1903. godine definisao pseudoinverz linearnog integralnog operatora koji nije invertibilan u običnom smislu, a kojim se rešavaju integralne jednačine u slučajevima kada inverzni operator ne postoji. Pokazalo se da tako definisan uopšteni inverzni operator nije jedinstven. W. A. Hurwitz je 1912. godine, koristeći pojam pseudo-rezolvente, opisao čitavu klasu takvih operatora. Generalisani inverzi diferencijalnih operatora implicitno su sadržani u Hilbertovom razmatranju generalisane Greenove funkcije 1904. godine a kasnije su ih proučavali i drugi autori, npr. W. T. Reid 1931., itd.

E. H. Moore [102] je 1920. prvi definisao i proučio jedinstveni generalisani inverz proizvoljne matrice, nazvavši ga "uopštena recipročnost matrice". Moguće je da je do ovih rezultata Moore došao još 1906. godine, mada su prvi rezultati objavljeni tek 1920. godine. Međutim njegov rad malo je bio poznat širokoj javnosti, verovatno zbog specifičnosti terminologije i oznaka. Više o Mooreovom rezultatima može se pronaći npr. u [12]. Tek 1955. godine rad R. Penrosea [111] pobudio je pravi interes za izučavanje ove problematike. Penrose je dokazao da je Mooreov inverz zapravo rešenje sistema matičnih jednačina i zbog toga se ovaj inverz danas naziva Moore-Penroseov inverz. Penrose je takođe ukazao na ulogu ovog generalisanog inverza u rešavanju sistema linearnih jednačina.

Teorija, primene i metodi za izračunavanje generalisanih inverza razvijali su se veoma brzo u poslednjih 50 godina. Publikovan je veliki broj naučnih radova i nekoliko monografija, npr. Wang, Wei i Qiao [148], Ben-Izrael i Grevile [12] kao i Rao i Mitra [119]. Poznat je veći broj klasa generalisanih inverza (Moore-Penroseov inverz, Drazinov inverz, grupni inverz, težinski Moore-Penroseov inverz, $\{i, j, k\}$ inverzi, Bott-Duffinov inverz, itd...). Takođe, predmet intenzivnog proučavanja su, kako generalisani inverzi matrica, tako i generalisani inverzi operatora, elemenata C^* algebri i slično.

Ovde ćemo pomenuti samo neke od metoda za izračunavanje generalisanih inverza matrica. Reprzentacije generalisanih inverza pomoću Jordanove kanoničke forme matrica proučavane su npr. u radovima [24, 49, 54]. Takođe, reprzentacije pomoću faktorizacija potpunog ranga (full rank factorization) date su u radovima [118, 119, 132].

Generalisani inverzi se primenjuju u mnogim oblastima matematike a takode i u fizici i tehničkim naukama. U ovom doktoratu posebna pažnja biće usmerena ka izračunavanju uopštenih inverza strukturnih matrica na osnovu adaptacija već postojećih algoritama kao i konstrukciji novih efikasnih algoritama i njihovoj daljoj primeni.

1.3 Pojam optimizacije

Teorija optimizacije je relativno nova naučna grana koja pripada oblastima primenjene matematike i operacionih istraživanja i ima široku primenu u nauci, tehnici, poslovnom menadžmentu, vojnoj i kosmičkoj tehnologiji. Osnovni cilj jeste kako pronaći optimalno rešenje problema koji je definisan matematički, odnosno, kako dati praktično (najbolje) rešenje problema koristeći različite naučne metode i alate. U tom smislu potrebno je proučavati optimalne uslove problema, izgraditi model problema, odrediti algoritamske metode rešenja, ustanoviti konvergenciju teorije algoritama, i izvršiti numeričke eksperimente na uobičajenim problemima ili nekim drugim realnim problemima. Nakon formulacije modela, možemo upotrebiti optimizacioni algoritam za pronalaženje rešenja problema. Obično su i algoritam i model dovoljno komplikovani pa je potreban računar za implementaciju samog algoritma. Univerzalni algoritam za optimizaciju ne postoji. Umesto toga, postoje brojni algoritmi, od kojih je svaki prilagođen određenom tipu optimizacionog problema. Uglavnom je na korisniku da izabere algoritam koji je pogodan za rešavanje specifičnog problema koji se nalazi pred njim. Ovaj izbor je važan zato što može da odredi da li je problem rešen brzo ili sporo, odnosno, da pokaže da li uopšte algoritam pronalazi rešenje. Nakon primene optimizacionog algoritma na model, moramo biti u stanju da prepoznamo da li je algoritam uspeo u svom zadatku, pronalaženju rešenja. U mnogim slučajevima, postoje elegantni matematički izrazi poznatiji kao uslovi optimalnosti, koji služe za proveru da li je trenutni skup promenljivih zaista rešenje problema. Ako uslovi optimalnosti nisu ispunjeni, oni mogu da daju korisne informacije o tome kako trenutna aproksimacija rešenja može biti poboljšana. Konačno, model može biti poboljšan primenom tehnike kao što je analiza osetljivosti, koja otkriva osetljivost rešenja na izmene samog modela kao i na promene datih podataka.

Govoreći matematičkim terminima, optimizacija je minimizacija ili maksimizacija date funkcije (od n promenljivih) u odnosu na ograničenja koja su nametnuta tim promenljivama. Opštu formulaciju problema optimizacije, matematički možemo zapisati na sledeći način:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \text{pod ograničenjima} \quad \begin{cases} c_i(x) = 0, & i \in I_1 \\ c_i(x) \geq 0, & i \in I_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Problemi dati opštom formulacijom (1.1) mogu se klasifikovati u skladu sa prirodom funkcije cilja i nametnutim ograničenjima (linearni, nelinearni, konveksni), brojem promenljivih (veliki ili mali), glatkoćom funkcije (diferencijabilni ili nediferencijabilni) itd. Verovatno je najvažnija i najveća razlika između problema kod kojih postoje ograničenja i problema na kojima ne postoje ograničenja. U tom smislu i mnoge knjige i monografije su podeljene na oblasti *uslovne* (sa ograničenjima) i *bezuslovne* (bez ograničenja) optimizacije. Problemi bezuslovne optimizacije javljaju se, direktno, u mnogim praktičnim primenama. Ukoliko postoje prirodna ograničenja na promenljivama, ponekad je bezbednije zanemariti ih i pretpostaviti da nemaju uticaj na optimalno rešenje. Problemi bez ograničenja mogu nastati i kao reformulacija problema sa ograničenjima, u smislu da se zadata ograničenja pretvore u takozvane penalizacione izraze u funkciji cilja. Ukoliko su i funkcija cilja i sva ograničenja linearne funkcije od x , onda imamo

takozvani problem linearnog programiranja. Menadžment i operaciona istraživanja u velikoj meri koriste ovakav linearan model. Sa druge strane, problemi nelinearnog programiranja, kod kojih najmanje jedno ograničenje ili funkcija cilja nisu linearne funkcije, uglavnom se javljaju u fizici, tehnici i sve više imaju primenu u menadžmentu i ekonomiji.

Iako optimizacija datira iz davnih vremena, ona nije postala zasebna grana u nauci sve do kasnih 40-ih godina XX veka, kada je G.B.Dantzig predstavio poznati simplex algoritam za rešavanje problema linearnog programiranja. Posle 1950. godine kada su metodi konjugovanih gradijenata i quasi-Newton-ovi metodi predstavljeni, nelinearno programiranje počinje veoma brzo da se razvija. Danas različiti moderni optimizacioni metodi mogu da reše veoma složene probleme velikih dimenzija i postali su neizbežno oruđe u rešavanju problema iz različitih oblasti. Veoma veliki broj radova i monografija vezanih za ovu temu napisano je u poslednje vreme (na primer [94, 138]).

Na kraju treba reći i to da će u ovoj doktorskoj disertaciji posebna pažnja biti posvećena **nelinearnoj optimizaciji bez ograničenja** sa posebnim osvrtom na gradijentne metode kao i primeni ovih metoda za izračunavanja uopštenih inverza operatora, odnosno matrica.

1.4 Organizacija doktorske disertacije

Ova doktorska disertacija je podeljena u 5 glava, svaka glava je podeljena na nekoliko poglavlja a poglavlja će se sastojati od odeljaka.

- Rezultati sadržani u drugoj glavi odnosiće se na uopštene inverze strukturnih matrica i njihovo efikasno računanje.
 - U prvom poglavlju ove glave daćemo prikaz osnovnih definicija i pojmova generalisanih inverza proizvoljnih matrica sa posebnim osvrtom na Moore-Penroseov inverz kao i $\{i, j, \dots, k\}$ inverze.
 - Drugo poglavlje sadrži pregled poznatih direktnih metoda za računanje inverza Toeplitz-ovih matrica kao i rešavanja sistema linearnih jednačina čija je matrica, zapravo, Toeplitz-ova matrice. Pored toga biće definisani pojmovi operatora razmeštanja strukturnih matrica i ranga razmeštanja matrica, kao i iterativni metodi za računanje njihovih inverza i uopštenih inverza. Koristeći ove pojmove razmeštanja (displacement-a) predstavljeni iterativni metodi biće modifikovani kako bi na najbolji mogući način iskoristili strukturu samih matrica i time postali veoma efikasni (u smislu procesorskog vremena i broja potrebnih operacija) za računanje različitih inverza.
- Treća glava ovog doktorata posvećena je opštim metodama nelinearne optimizacije, kao i njihovim primenama za nalaženje uopštenih i običnih inverza operatora, a samim tim i matrica. Posebna pažnja biće posvećena inverzima strukturnih matrica.
 - U prvom poglavlju ove glave biće definisani osnovni pojmovi vezani za nelinearnu optimizaciju i pre svih opšti pregled gradijentnih metoda.
 - Drugo poglavlje je posvećeno poznatom ubrzanju metoda opadajućih gradijenata, kao i novom metodu kod koga je to ubrzanje poboljšano. Takođe su analizirane tehnike za izračunavanje parametra ubrzanja i utvrđena je linearna konvergencija ovih metoda. Kao potvrda poboljšanja predstavljeni su i numerički rezultati dobijeni na osnovu testiranja izvedenih na problemima velikih dimenzija.

- U trećem poglavlju biće prikazan i detaljno proučen metod sa dvotačkastom dužinom koraka, takozvani metod skalarne korekcije (SC metod). Na osnovu analize konvergencije i predstavljenih numeričkih podataka, ovaj metod ce se istaći kao konkurent veoma poznatom BB (Barzilai-Borwein) gradijentnom metodu kod koga je, takođe, dužina koraka dobijena na osnovu informacija iz dveju susednih tačaka.
- U četvrtom poglavlju prikazana je primena metoda skalarne korekcije za rešavanje operatorskih jednačina. Kao posledicu ovih primena, zapravo, dobićemo metod za računanje uopštenih inverza matrica gde će poseban akcenat biti na strukturnim matricama.
- U četvrtoj glavi disertacije prezentovaćemo neke od primena Toeplitz-ovih matrica, koje se tiču izvođenja različitih kombinatornih identiteta kao i metoda za restauraciju slika.
 - U prvom poglavlju biće, najpre, date osnovne definicije i svojstva uopštenih Fibonacci-jevih matrica kao specijalne vrste Toeplitz-ovih matrica. Koristeći konvolucionu formulu prikazaćemo opšti oblik Moore-Penroseovog inverza ovih matrica. Takođe, mnogi kombinatorni identiteti koji uključuju Fibonacci-jeve i Lucas-ove brojeve biće izvedeni na osnovu te konvolucione formule.
 - U drugom poglavlju ove glave prikazaćemo posebnu klasu Toeplitz-ovih matrica, čiji su elementi Catalan-ovi brojevi. Eksplicitna formula za nalaženje inverza ovih matrica biće data i kao njena posledica biće izvedeni mnogi interesantni kombinatorni identiteti.
 - Treće poglavlje ove glave biće posvećeno restauraciji slika kod kojih je zamućenje nastalo usled ravnomernog linearnog kretanja. To kretanje je u tesnoj vezi sa veoma karakterističnom Toeplitz-ovom matricom. Predstavićemo nov metod za nalaženje Moore-Penroseovog inverza ove matrice i samim tim za čitav proces restauracije degradirane slike. Takođe, biće predstavljen način na koji je moguće primeniti neki nelinearni optimizacioni metod za nalaženje $\{1, 3\}$ inverza ove matrice koji bi kasnije služio za dobijanje restaurirane slike boljeg kvaliteta.
- U petoj, zaključnoj, glavi biće izvršena sistematizacija svih predstavljenih rezultata; takođe, biće dato nekoliko predloga za dalja izučavanja i na taj način prikazane smer-nice za budući naučno-istraživački rad.

Glava 2

Uopšteni inverzi strukturnih matrica

U ovoj glavi ćemo dati definicije i osnovna svojstva generalisanih inverza matrica. Definisaćemo nekoliko klasa generalisanih inverza i proučiti njihova osnovna svojstva. Zbog jednostavnijeg referenciranja, u ovoj glavi su navedene činjenice, definicije i oznake koje ćemo koristiti u ovoj glavi i nastavku doktorke disertacije. Takođe, upoznaćemo se sa Toeplitz-ovim matricama kao najvažnijoj klasi strukturnih matrica kako sa numeričkog tako i sa teorijskog aspekta. Prikazaćemo i neke metode za izračunavanja inverza ovih matrica kao i njihovih uopštenih inverza.

2.1 Definicije i osnovna svojstva generalisanih inverza matrica

Označimo sa \mathbb{R} odnosno \mathbb{C} skup realnih odnosno kompleksnih brojeva. U daljem tekstu ćemo, radi jednostavnosti, navesti neke oznake na polju kompleksnih brojeva. Potpuno iste oznake mogu se primeniti i na polju realnih brojeva. Neka je $\mathbb{C}^{m \times n}$ skup svih matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem \mathbb{C} . Jediničnu matricu formata $n \times n$ označićemo sa I_n dok ćemo dijagonalnu matricu čiji su elementi na glavnoj dijagonali d_1, d_2, \dots, d_n označiti sa $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Nula matricu proizvoljnog formata označićemo sa \mathbb{O} . Matrica A^* predstavljaće konjugovano-transponovanu matricu matrici A .

U nastavku ćemo formulisati nekoliko osnovnih definicija i teorema iz linearne algebre koje ćemo koristiti u nastavku ovog rada. Ova teorija je preuzeta iz obimne i dobro poznate literature iz oblasti linearne algebre i teorije matrica (na primer [95, 137, 157]).

Najpre ćemo definisati nekoliko osnovnih klasa matrica.

Definicija 2.1.1. *Kvadratna matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) je*

- *Hermitska (simetrična) ako važi $A^* = A$ ($A^T = A$),*
- *normalna ako važi $A^*A = AA^*$ ($A^T A = AA^T$),*
- *unitarna (ortogonalna) ako važi $A^* = A^{-1}$ ($A^T = A^{-1}$)*
- *donje trougaona ako važi $a_{ij} = 0$ za $i > j$,*
- *gornje trougaona ako važi $a_{ij} = 0$ za $i < j$.*

- pozitivno semi-definitna ako je $\operatorname{Re}(x^*Ax) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Ako još važi $\operatorname{Re}(x^*Ax) > 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{\mathbb{O}\}$, matrica A je pozitivno definitna.

Definicija 2.1.2. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Definisaćemo jezgro matrice A , u oznaci $\mathcal{N}(A)$, kao inverznu sliku nula vektora, tj.

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^{n \times 1} \mid Ax = \mathbb{O}\}.$$

Takodje, definisaćemo sliku matrice A , u oznaci $\mathcal{R}(A)$, kao skup svih slika svih vektora, tj.

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{C}^{m \times 1} \mid y = Ax, \text{ za neko } x \in \mathbb{C}^{n \times 1}\}.$$

Dimenzija slike $\mathcal{R}(A)$ naziva se *rang* matrice A i obeležava sa $\operatorname{rang}(A)$. Takodje, sa $\mathbb{C}_r^{m \times n}$ označićemo skup svih matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem \mathbb{C} čiji je rang jednak r , a sa $\operatorname{Tr}(A)$ označićemo trag matrice A . Osim ranga, druga važna karakteristika svake matrice je njen indeks.

Propozicija 2.1.1. Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ postoji prirodan broj k takav da je $\operatorname{rang}(A^{k+1}) = \operatorname{rang}(A^k)$.

Definicija 2.1.3. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ proizvoljna matrica. Najmanji ceo broj k takav da važi $\operatorname{rang}(A^{k+1}) = \operatorname{rang}(A^k)$ naziva se *indeks matrice* A i označava sa $\operatorname{ind}(A) = k$.

Primetimo da ako je A regularna, tada je $\operatorname{ind}(A) = 0$ dok je u suprotnom $\operatorname{ind}(A) \geq 1$. Indeks matrice ima veliku ulogu u proučavanju Drazinovog inverza.

Sledeće poznate dekompozicije (faktorizacije) matrica koristićemo u daljem izlaganju.

Teorema 2.1.1. (Singularno-vrednosna dekompozicija) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Postoje unitarne matrice $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kao i matrica

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n},$$

tako da važi $A = U^*\Sigma V$. Ova dekompozicija se naziva *singularno-vrednosna dekompozicija matrice* A .

Druge dve važne dekompozicije su LU dekompozicija i Cholesky faktorizacija. One su date u sledećoj teoremi.

Teorema 2.1.2. (LU i Cholesky faktorizacija) Za svaku regularnu kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ postoji donje trougaona matrica L i gornje trougaona matrica U tako da važi $A = LU$ kao i $l_{ii} = 1$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Ova dekompozicija se naziva *LU dekompozicija*. Štaviše, ako je A Hermitska i pozitivno definitna matrica, tada važi $U = L^*$ a dekompozicija $A = LL^*$ se naziva *Cholesky dekompozicija (faktorizacija)*.

Pomenućemo takođe i faktorizacije potpunog ranga.

Definicija 2.1.4. (Faktorizacija potpunog ranga) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Faktorizacija $A = FG$, gde je F matrica potpunog ranga kolona (rang ove matrice jednak je broju kolona) a G matrica potpunog ranga vrsta (rang ove matrice jednak je broju vrsta), naziva se *faktorizacija potpunog ranga matrice* A .

Teorema 2.1.3. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ takva da je A niti potpunog ranga kolona, niti potpunog ranga vrsta. Tada postoji bar jedna faktorizacija potpunog ranga $A = FG$ matrice A .

2.1.1 Moore-Penroseov, Drazin-ov i $\{i, j, \dots, k\}$ inverzi

Sledeću teoremu je dokazao Penrose 1955. godine i ona se najčešće uzima kao definicija Moore-Penroseovog (MP) inverza.

Teorema 2.1.4. [111] (Penrose 1955) *Za svaku matricu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sistem matičnih jednačina*

$$\begin{aligned} (1) \quad AXA &= A, & (3) \quad (AX)^* &= AX, \\ (2) \quad XAX &= X, & (4) \quad (XA)^* &= XA. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ima jedinstveno rešenje $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ovo rešenje je poznato kao Moore-Penroseov inverz (generalisani inverz, uopšteni inverz, pseudoinverz) matrice A i označava se sa A^\dagger .

Ako je A kvadratna regularna matrica, tada njena inverzna matrica A^{-1} trivijalno zadovoljava sistem (2.1). Iz predhodne teoreme sledi da je MP inverz regularne kvadratne matrice jednak njenoj inverznoj matrici, tj. $A^\dagger = A^{-1}$. Jednačine (2.1) se nazivaju *Penroseove jednačine* i koriste se za definiciju drugih klasa generalisanih inverza.

Definicija 2.1.5. *Neka je $A\{i, j, \dots, k\}$ skup matrica koje zadovoljavaju jednačine (i), (j), \dots , (k) među jednačinama (1), \dots , (4) iz (2.1). Ovakve matrice nazivaju se $\{i, j, \dots, k\}$ inverzi i označavaju sa $A^{(i,j,\dots,k)}$.*

Jedno od glavnih svojstava MP inverza je karakterizacija najmanjeg kvadratnog rešenja minimalne norme sistema linearnih jednačina $Ax = b$. Ovu karakterizaciju je dokazao Penrose 1955. godine u svom radu [111].

Definicija 2.1.6. *Najmanje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina $Ax = b$ gde je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $b \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ je vektor $u \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ takav da za svako $v \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ važi $\|Au - b\| \leq \|Av - b\|$. Kažemo da je najmanje kvadratno rešenje u minimalne norme (najbolje aproksimativno rešenje) ako za svako drugo najmanje kvadratno rešenje u' važi $\|u\| \leq \|u'\|$.*

Teorema 2.1.5. [111] (Penrose 1955) *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i neka je $b \in \mathbb{C}^{m \times 1}$. Najmanje kvadratno rešenje minimalne norme sistema $Ax = b$ dato je pomoću $x^* = A^\dagger b$. Sva ostala najmanja kvadratna rešenja data su sledećim izrazom*

$$x = A^\dagger b + (I_n - A^\dagger A)z, \quad z \in \mathbb{C}^{n \times 1}.$$

Primetimo da ukoliko je sistem $Ax = b$ konzistentan (tj. ima rešenje) tada je svako najmanje kvadratno rešenje ovog sistema ujedno i njegovo rešenje. Važi i obratno. Za konzistentne linearne sisteme $Ax = b$, minimalna (srednjekvadratna) rešenja su karakterisana sledećom teoremom.

Teorema 2.1.6. [12, 119, 148] *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Tada važi: Za svako $b \in \mathcal{R}(A)$, $AXb = b$ i $\|Xb\| < \|u\|$ za svako drugo rešenje $u \neq Xb$ sistema $Ax = b$, ako i samo ako je $X \in A\{1, 4\}$.*

Nasuprot tome, sva najmanja kvadratna rešenja nekonzistentnog sistema $Ax = b$ karakterisana su sledećom teoremom.

Teorema 2.1.7. [12, 148] *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Tada važi: Xb je najmanje kvadratno rešenje sistema $Ax = b$ za svako $b \notin \mathcal{R}(A)$, ako i samo ako je $X \in A\{1, 3\}$.*

Sledećom lemom su pobrojana osnovna svojstva MP i $\{1\}$ inverza

Lema 2.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica. Tada je*

- (1) $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$;
- (2) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, gde je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\lambda^\dagger = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$;
- (3) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$, $(A^*A)^\dagger = A^\dagger (A^*)^\dagger$;
- (4) $A^\dagger AA^* = A^* = A^* AA^\dagger$;
- (5) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$;
- (6) $\mathcal{N}(AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)$
- (7) $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(AA^{(1)}) = \mathcal{R}(A)$, $\text{rank}(AA^{(1)}) = \text{rank}(A^{(1)}A) = \text{rank}(A)$;
- (8) *Ako je $\text{rank}A = m$ tada je matrica A^*A regularna i važi $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$.*

Napomenimo da se još neka svojstva A^\dagger i $A^{(1)}$ koja nisu spomenuta u Lemi 2.1.1 mogu naći na primer u [12, 148].

U sledećim rezultatima pokazaćemo reprezentacije A^\dagger korišćenjem SVD dekompozicije (Teorema 2.1.1) kao i faktorizacije potpunog ranga.

Teorema 2.1.8. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica i neka je $A = U\Sigma V^*$ SVD dekompozicija matrice A . Ako je*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n},$$

onda važi

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \text{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_k) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}$$

i $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*$.

Teorema 2.1.9. [97] (**MacDuffe, 1956**) *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ proizvoljna matrica i $A = FG$ faktorizacija potpunog ranga matrice A . Tada je*

$$A^\dagger = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*.$$

Sada ćemo pokazati kako se $\{1\}$ inverzi mogu primeniti u rešavanju (tj. karakterizaciji rešenja) nekih matricnih jednačina.

Teorema 2.1.10. [111] (**Penrose 1955**) *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ i neka je $D \in \mathbb{C}^{m \times q}$. Tada je matricna jednačina*

$$AXB = D \tag{2.2}$$

konzistentna ako i samo ako za proizvoljne $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ važi

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D. \tag{2.3}$$

U tom slučaju, opšte rešenje je dato pomoću

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}. \tag{2.4}$$

Sledeću posledicu dobijamo direktno iz Teoreme 2.1.10 kada stavimo $B = I_p$.

Posledica 2.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{C}^{m \times p}$. Matrična jednačina $AX = D$ ima rešenja ako i samo ako važi $AA^{(1)}D = D$ za svaki $\{1\}$ inverz $A^{(1)}$ matrice A .*

U ovom poglavlju posmatrali smo MP inverz i ostale $\{i, j, \dots, k\}$ inverze koji imaju određena svojstva inverzne matrice. Inverzi tipa $\{i, j, \dots, k\}$ daju neka rešenja, ili najmanja kvadratna rešenja linearnih sistema jednačina baš kao što to čini inverzna matrica, u slučaju da postoji. Zato $\{i, j, \dots, k\}$ inverze nazivamo inverzima koji rešavaju jednačine.

Sa druge strane, neka druga svojstva inverzne matrice $\{i, j, \dots, k\}$ inverzi ne poseduju. Na primer $A^{-1}A = AA^{-1}$, $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$, itd. Drazinov inverz zadovoljava ova svojstva. Nažalost, ovaj generalisani inverz definisan je samo za kvadratne matrice, ali postoje neka uopštenja i za pravougaone (npr. [12]). Ovaj inverz je nazvan po M. Drazinu koji ga je uveo 1958. godine u radu [47].

Teorema 2.1.11. [47] (Drazin 1958)

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ proizvoljna matrica i $k = \text{ind}(A)$. Tada sledeći sistem matričnih jednačina

$$(1^k) A^k X A = A^k, \quad (2) X A X = X, \quad (5) A X = X A, \quad (2.5)$$

ima jedinstveno rešenje. Ovo rešenje se naziva Drazinov inverz matrice A i označava sa A^D .

Sledeća lema sadrži osnovna svojstva Drazinovog inverza.

Lema 2.1.2. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $k = \text{ind}(A)$. Tada važi*

$$(1) (A^*)^D = (A^D)^*, \quad (A^T)^D = (A^D)^T, \quad (A^n)^D = (A^D)^n \text{ za svako } n = 1, 2, \dots,$$

$$(2) ((A^D)^D)^D = A^D, \quad (A^D)^D = A \text{ ako i samo ako je } k = 1,$$

$$(3) \mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^l) \text{ i } \mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^l) \text{ za svako } l \geq k,$$

$$(4) \text{ Ako je } \lambda \text{ sopstvena vrednost matrice } A \text{ tada je } \lambda^\dagger \text{ sopstvena vrednost matrice } A^D.$$

Još neka svojstva Drazinovog inverza kao i definicije i svojstva ostalih spektralnih inverza mogu se naći na primer u [12, 119, 148].

2.2 Toeplitz-ove matrice

U ovom doktoratu posebna pažnja biće posvećena Toeplitz-ovim matricama, kao najširoj i najznačajnijoj klasi strukturnih matrica, i njihovoj primeni. Toeplitz-ove matrice su matrice čiji su elementi konstante duž paralela glavne dijagonale i definišu se na sledeći način.

Definicija 2.2.1. *Za matricu $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kažemo da je Toeplitz-ova matrica ukoliko za njene elemente važi $t_{i,j} = t_{i-j}$, $i, j = 1, \dots, n$, gde je t_k , $k \in \{-n+1, \dots, n-1\}$ unapred zadati niz kompleksnih brojeva.*

Na osnovu definicije zaključujemo da proizvoljna Toeplitz-ova matrica ima sledeću formu

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, svaka Toeplitz-ova matrica je u potpunosti određena nizom elemenata dužine $2n - 1$, odnosno pomoću dva vektora dužine n . Prvi vektor predstavlja prvu kolonu $c = (t_0, t_{-1}, \dots, t_{n-1})$, dok drugi vektor predstavlja prvu vrstu $r = (t_0, t_{-1}, \dots, t_{1-n})$ matrice T . Radi jednostavnijeg zapisa u nastavku ćemo koristiti sledeću oznaku $T = \text{toeplitz}[c, r]$ za Toeplitz-ovu matricu čija je prva kolona data vektorom c a prva vrsta vektorom r . Ukoliko su ta dva vektora identična ($c = r$), koristićemo oznaku $T = \text{toeplitz}[c]$.

Struktura samih matrica je veoma interesantna kako sa praktičnog tako i sa teorijskog aspekta. Ove matrice imaju veliku primenu u naučnim istraživanjima i tehnici, na primer u obradi slika, numeričkim diferencijalnim jednačinama, integralnim jednačinama, analizi vremenskih serija, teoriji kontrole i sl. Takođe ove matrice se na prirodan način javljaju u teoriji diskretnih slučajnih procesa. Kovarijansne matrice slabo stacionarnih procesa su Toeplitz-ove i trougaone Toeplitz-ove matrice. One su takođe u tesnoj vezi sa Fourier-ovim redovima. Najzad Toeplitz-ove matrice igraju značajnu ulogu u obradi signala, teoriji aproksimacija, sistemskoj teoriji kao i u mnogi drugim naučnim disciplinama. U nastavku ove doktorske disertacije ćemo koristiti neke od matrica koje su u tesnoj vezi sa Toeplitz-ovim matricama ili su izvedene od istih, pa zbog toga navodimo njihove definicije

Definicija 2.2.2. *Blokovsku matricu čiji su sami blokovi Toeplitz-ove matrice nazivamo Toeplitz blok matricom. U slučaju kada su blokovi duž paralela glavne dijagonalne Toeplitz blok matrice jednaki, takvu matricu zovemo Toeplitz blok Toeplitz matricom.*

Ove matrice koristićemo u četvrtoj glavi ovog doktorata i njihovi elementi biće na odgovarajući način izabrani uopšteni Fibonacci-jevi i Catalan-ovi brojevi. Kao posledica strukture ovih matrica brojni identiteti u vezi sa ovim dobro poznatim brojevima biće predstavljeni.

Primer 2.2.1. *Sledeće matrice*

$$TB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,n} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,n} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,n} \end{array} \right] \quad TBT = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_0 & B_{-1} & \dots & B_{1-n} \\ \hline B_1 & B_0 & \dots & B_{2-n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{n-1} & B_{n-2} & \dots & B_0 \end{array} \right]$$

predstavljaju, redom, Toeplitz blok matricu (gde su blokovi $B_{i,j}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sami po sebi Toeplitz-ove matrice) i blok Toeplitz blok matricu (za koju su blokovi B_i , $i \in \{1 - n, 2 - n, \dots, n - 1\}$ Toeplitz-ove matrice).

2.2.1 Direktni metodi za računanje inverza Toeplitz-ovih matrica

U ovom poglavlju biće razmatran problem izračunavanja uopštenih inverza kvadratne Toeplitz-ove matrice dimenzija $n \times n$. Opšte je poznato da je nalaženje inverza proizvoljne matrice T u tesnoj vezi sa rešavanjem sistema $Tx = b$. Problem rešavanja linearnih jednačina $Tx =$

b je veoma važan i ima veliku primenu u oblastima čiste i primenjene matematike kao što su: ortogonalni polinomi, obrada signala, linerno filtriranje, analiza vremenskih serija itd. U tom smislu opisaćemo u kratkim crtama najznačajnije metode za rešavanje ovih problema za proizvoljnu Toeplitz-ovu matricu.

Levinson-Durbinov algoritam prvi je predložio Norman Levinson 1947. godine, kasnije ga je usavrišio J. Durbin 1960. da bi ga konačno poboljšali na $4n^2$ i $3n^2$ operacija množenja W. F. Trench i S. Zohar, redom. Levinson-ova rekurzija ili Levinson-Durbinova rekurzija je procedura za rekurzivno rešavanje sistema linearnih jednačina, kod koga je matrica sistema zapravo Toeplitz-ova matrica. Algoritam se izvršava u $\mathcal{O}(n^2)$ vremenu, što je veliko poboljšanje u odnosu na klasičan algoritam Gauss-Jordanove eliminacije kome je potrebno $\mathcal{O}(n^3)$ vremena. Noviji algoritmi, koje zovemo još i asimptotski brzi algoritmi ili super brzi Toeplitz-ovi algoritmi mogu da reše ovaj problem u $\mathcal{O}(n \log^p n)$ (za različito $p = 2, 3$). Ovaj rekurzivni postupak ostao je do dan danas veoma prihvatljiv i popularan iz dva razloga. Prvi je taj što je lak za razumevanje i implementaciju, a drugi zato što može da radi brže od super brzih algoritama za malo n (obično $n < 256$).

Algoritam se sastoji iz dva koraka. U prvom koraku, formiraju se dva skupa vektora, prednji i zadnji (forward and backward vectors). Prednji vektori se koriste kao pomoćni vektori, da bi se izračunali zadnji vektori, i nakon toga mogu biti isključeni iz daljeg toka algoritma. Zadnji vektori se koriste u drugom koraku radi konstrukcije željenog rešenja. Levinson-Durbinova rekurzija definiše n -ti prednji vektor f^n i n -ti zadnji vektor b^n kao vektore dužine n koji zadovoljavaju jednačine:

$$Tf^n = e_1, \quad Tb^n = e_n.$$

Najpre se izračunava vektor $f^1 = b^1 = 1/t_0$, a kasnije i svi ostali vektori f^k i b^k pomoću sledećih rekurentnih formula

$$f^k = \frac{1}{1 - \alpha_k} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \begin{bmatrix} 0 \\ b^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$b^k = \frac{1}{1 - \alpha_k} \begin{bmatrix} 0 \\ b^{k-1} \end{bmatrix} - \frac{\gamma_k}{1 - \alpha_k} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$k = 2, 3, \dots, n.$

gde su $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 2, 3, \dots, n$ na odgovarajući način izračunati skalari. Potom se prelazi na drugi korak i nalazi rešenje Toeplitz-ovog sistema. Za detalje ovog algoritma pogledati radove [48, 86, 143].

Prvi metodi za nalaženje inverza proizvoljne regularne Toeplitz-ove matrice T pomoću $\mathcal{O}(n^2)$ operacija datiraju još iz 60-ih godina XX veka [143, 163]. U nekim posebnim slučajevima, recimo kada je T pozitivno definitna matrica, moguće je pronaći inverz pomoću $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ operacija. Osamdesetih godina se pojavljuje veoma poznata Gohberg-Semenculova formula koju opisujemo pomoću sledećeg rezultata.

Teorema 2.2.1. [55](Gohberg-Semencul 1972)

Neka je data matrica $T = \text{toeplitz}[c, r]$ gde je $c = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$, $r = (t_0, t_{-1}, \dots, t_{1-n})$, invertibilna. Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_1, \dots, y_n)$ rešenja sistema $Tx = e_1$ i $Ty = e_n$, redom. Ako su matrice A i B donje trougaone Toeplitz-ove matrice definisane kao

$$A = \text{toeplitz}[x, (x_1, 0, \dots, 0)], \quad B = \text{toeplitz}[(0, y_1, \dots, y_{n-1}), (0, 0, \dots, 0)],$$

i ako su C i D gornje trougaone Toeplitz-ove matrice definisane kao što sledi

$$C = \text{toeplitz}[(y_n, 0, \dots, 0), (y_n, y_{n-1}, \dots, y_1)], \quad D = \text{toeplitz}[(0, 0, \dots, 0), (0, x_n, x_{n-1}, \dots, x_2)]$$

onda imamo da se inverz početne matrice T može izračunati na sledeći način

$$T^{-1} = x_1^{-1}(AC - BD).$$

Ova formula je u tesnoj vezi sa kasnije definisanim pojmovima *ranga razmeštanja matrice* kao i *operatora razmeštanja matrice* koji se koriste radi konstruisanja super brzih algoritama za računanje inverza Toeplitz-ovih matrica kao i rešavanja Toeplitz-ovih sistema. Više o ovim pojmovima kao i samim algoritmima biće reči u odeljcima koji slede.

Na kraju treba reći i to da je pored izračunavanja običnog isto tako i nalaženje Moore-Penroseovog, group kao i Drazin-ovog inverza Toeplitz-ovih matrica veoma interesantan problem u teoriji matricnih izračunavanja [14, 15, 22, 150].

2.2.2 Cirkularne matrice, DFT i FFT

Zadatak množenja matrice vektorom javlja se u mnogim problemima u tehnici i primenjenoj matematici. Za gustu matricu A dimenzija $n \times n$, da bismo je pomnožili vektorom x , na standardan način potrebno je $\mathcal{O}(n^2)$ operacija. U mnogim situacijama, dimenzija matrice je veoma velika, šta više za istu matricu potrebno je više puta pomnožiti je različitim vektorima (npr. kod iterativnih metoda). U takvim slučajevima da bismo smanjili troškove izračunavanja i ubrzali sam proces, potrebno je posmatrati neke zajedničke osobine tih matrica. Cirkularne matrice kao klasa strukturalnih matrica imaju tu osobinu da prateći njihovu karakterističnu strukturu, množenje vektorom može biti urađeno znatno brže nego kod običnih matrica.

Definicija 2.2.3. Cirkularna $C^+(x)$ i anti-cirkularna $C^-(x)$ matrica zadate pomoću vektora $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ dimenzije n predstavljene su sledećom matricnom formom

$$C^+(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & x_{n-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_n & \dots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & x_n \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 \end{pmatrix}, \quad C^-(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_n & -x_{n-1} & \dots & -x_2 \\ x_2 & x_1 & -x_n & \dots & -x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & -x_n \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Nije teško primetiti da ove matrice pripadaju klasi Toeplitz-ovih matrica i shodno prethodno uvedenim oznakama mogu se predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} C^+(x) &= \text{toeplitz} [(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_n, \dots, x_2)], \\ C^-(x) &= \text{toeplitz} [(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, -x_n, \dots, -x_2)]. \end{aligned}$$

Pre nego što pređemo na razmatranje algoritama za brzo množenje cirkularnih i anticirkularnih matrica vektorom pogledajmo u samu definiciju Fourier-ovih matrica, kao najvažnije klase matrica za brze algoritme za manipulaciju sa matricama.

Definicija 2.2.4. Za kvadratnu matricu dimenzija $n \times n$ koja ima sledeći oblik

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix},$$

gde je

$$\omega_n = e^{-2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) - i \sin(2\pi/n)$$

n -ti koren jedinice, kažemo da je Fourier-ova matrica.

Ako malo bolje pogledamo ovu matricu i uzmemo u obzir definiciju četiri najvažnijih klasa strukturnih matrica datu tabelom 1.1.1 dolazimo do zaključka da Fourier-ova matrica zapravo pripada klasi Vandermonde-ovih matrica. Primetimo još i to da je Fourier-ova matrica unitarna.

Poznato je da se množenjem ove matrice proizvoljnim vektorom $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ kompleksnih brojeva dobija, takozvana, *diskretna Fourier-ova transformacija* (Discrete Fourier Transform ili DFT). Naime, problem izračunavanja DFT-a svodi se na problem izračunavanja niza $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ kompleksnih brojeva koji se računaju, pomoću zadatog niza x , koristeći formulu

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn}.$$

Za računanje DFT-a koristi se veoma efikasan i popularan algoritam, poznatiji pod nazivom *brza Fourier-ova transformacija* (Fast Fourier Transform, ili skraćeno FFT). U nastavku samo navodimo osnovne principe funkcionisanja FFT algoritma. Treba reći da je za računanje svakog X_k potrebno izvršiti N operacija množenja brojeva kao i $N - 1$ operacija sabiranja brojeva. Kao posledicu imamo da je za računanje celog niza potrebno N^2 operacija množenja i $N^2 - N$ operacija sabiranja.

Da bi se u potpunosti shvatila efiksnost ovog algoritma podimo od pretpostavke da je dimenzija početnog problema nalaženja DFT-a stepen broja 2, $N = 2^p$. Podelimo početni niz x na dva podniza, tako da jedan sadrži sve one elemente sa parnim indeksom, a drugi one da neparnim. Koristeći osobine periodičnosti i simetričnosti faktora ω_N

$$\omega_N^{k+N/2} = -\omega_N^k, \quad \omega_N^{k+N} = \omega_N^k,$$

može se pokazati da je za izračunavanje niza X potrebno $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$ operacija množenja. Dakle, u prvom koraku imamo smanjenje broja operacija množenja sa N^2 na $N^2/2 + N/2$, što je za dovoljno veliko N približno smanjenje od oko 2 puta. U sledećem koraku ta dva podniza opet delimo na po dva nova podniza, tako da zapravo dobijamo četiri podniza. Ovaj postupak nastavljamo sve dok podnizovi ne postanu dužine jedan. Takvih podela imamo ukupno $\log_2 N$. Na ovaj način ukupan broj operacija množenja postaje $(N/2) \log_2 N$ dok se broj operacija sabiranja svodi na $N \log_2 N$. Kao zaključak imamo da je za nalaženje DFT-a niza x dimenzije N , korišćenjem FFT algoritma, potrebno izvršiti $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ operacija.

Teorema 2.2.2. *Proizvoljna cirkularna i anticirkularna matrica mogu se dijagonalizovati pomoću Fourier-ove matrice F i dijagonalne matrice D , na sledeći način*

$$C^+(x) = F^* \text{diag}\left(\frac{1}{n}Fx\right)F, \quad C^-(x) = D^*F \text{diag}\left(\frac{1}{n}F^*Dx\right)F^*D, \quad (2.6)$$

gde je pomoćna matrica D definisana na sledeći način

$$D = \text{diag}(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}), \quad \theta = \cos(\pi/n) + i \sin(\pi/n).$$

Kao direktnu posledicu prethodne teoreme i činjenice da je za množenje Fourier-ove matrice proizvoljnim vektorom potrebno izvršiti $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ operacija zaključujemo sledeće.

Posledica 2.2.1. *Množenje cirkularne i anti-cirkularne matrice dimenzija n , koje su date definicijom 2.2.3, vektorom dimenzije n može se izvršiti pomoću $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ operacija, korišćenjem FFT algoritma.*

2.2.3 Operator razmeštanja matrice

Različiti operatori razmeštanja matrice su uvedeni i analizirani u literaturi [16, 67, 78]. Kailath i koautori u radovima [77, 80] uvode pojam *ranga razmeštanja matrice* kao i pojam *operatora razmeštanja matrice*. Ovi pojmovi kasnije bivaju analizirani i izučavani u mnogim drugim radovima (npr. [17, 67, 79]). Pokazano je da je rang razmeštanja veoma moćno oruđe za konstrukciju formula za nalaženje inverza strukturalnih matrica kao i veoma brzih algoritama za izračunavanje inverza ovih matrica, i to posebno Toeplitz-ovih i Hankel-ovih matrica. Veoma veliki broj operatora razmeštanja matrica je uveden i razmatran u široj naučnoj literaturi [14, 17, 67, 69, 77, 78, 79, 150]. Većina njih je veoma povezana sa formulama za reprezentaciju Toeplitz-like matrica kao i njihovih inverza i uopštenih inverza.

Originalna formulacija operatora razmeštanja matrice A , Stein-ovog tipa $\Delta(A) = A - ZAZ^T$, gde je matrica Z donja trougaona Toeplitz-ova matrica zadata kao

$$Z = \text{toeplitz}[(0, 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0)]$$

data je u [77, 80]. Dalje, u literaturi su poznati operatori tipa $\Delta_S(A) = AS - SA$, gde je $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ data matrica. Ukoliko se uzme $S = Z$ dobija se da je $\Delta_Z(A)$ nula matrica za proizvoljnu donje trougaonu matricu A , šta više imamo da važi $\text{rank}(\Delta_Z(A)) \leq 2$ za proizvoljnu Toeplitz-ovu matricu A . U nastavku navodimo sledeći rezultat

Teorema 2.2.3. [17] *Za operator razmeštanja Δ_Z i proizvoljne kvadratne matrice A i B važe sledeća svojstva*

$$\begin{aligned} \Delta_Z(AB) &= \Delta_Z(A)B + A\Delta_Z(B), \\ A &= L(Ae_1) + \sum_{i=1}^k L(u_i)L(Zv_i)^T \text{ akko } AZ - ZA = \sum_{i=1}^k u_i v_i^T, \\ \Delta_Z(A^{-1}) &= -A^{-1}\Delta_Z(A)A^{-1}, \\ A^{-1} &= L(A^{-1}e_1) - \sum_{i=1}^k L(A^{-1}u_i)L(ZA^{-T}v_i)^T \text{ akko} \\ AZ - ZA &= \sum_{i=1}^k u_i v_i^T, \quad \det(A) \neq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gde je $L(x) = \sum_{i=1}^n x_i Z^{i-1}$ donja trougaona Toeplitz-ova matrica koja za prvu kolonu ima vektor x .

Matrica koja se može zapisati kao suma k proizvoda donje i gornje trougaonih Toeplitz-ovih matrica se zove *Toeplitz-like* matrica ukoliko je k nezavisno od n . Iz prethodne teoreme vidimo da datu matricu A , kao i njen inverz, možemo predstaviti u terminima trougaonih Toeplitz-ovih matrica i to predstavljanje nazivamo *razmeštenom reprezentacijom* (displacement representation).

Definicija 2.2.5. Rang matrice $\Delta_Z(A)$ nazivamo rangom razmeštanja matrice A (displacement rank of A) i obeležavamo sa $\text{drk}(A)$.

Na ovaj način imamo da matrica (kao i njen inverz, ukoliko postoji) koja ima rang razmeštanja k može da se zapise kao suma od najviše $k + 1$ proizvoda donje i gornje trougaonih Toeplitz-ovih matrica. Podsetimo da u slučaju Toeplitz-ove matrice A važi $k = \text{drk}(A) \leq 2$. Radi jednostavnosti na dalje ćemo umesto $\Delta_Z(A)$ pisati $\Delta(A)$.

Definicija 2.2.6. [14] Za dati realan broj $\varepsilon > 0$, rang ε -razmeštanja matrice A je dat kao

$$\text{drk}_\varepsilon(A) = \min_{\|E\| \leq \varepsilon} \text{rang}(\Delta(A) + E).$$

Ako je $r = \text{drk}_\varepsilon(A)$ i ako $\Delta(A) = \sum_{i=1}^k u_i v_i^T + E$, gde je $\|E\| \leq \varepsilon$, posmatrajmo sledeću matricu

$$A_\varepsilon = L(Ae_1) + \sum_{i=1}^r L(u_i)L(Zv_i)^T. \quad (2.8)$$

Na osnovu gornje definicije i (2.7) dolazimo do zaključka da ova matrica zapravo predstavlja aproksimaciju matrice A . Matricu A_ε zovemo ε -razmeštena reprezentacija matrice A (ε -displacement representation of A) a vektore u_i i v_i , $i = 1, 2, \dots, r$ ε -razmeštenim generatorima matrice A .

Definicija 2.2.7. Neka je $\Delta(A) = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$) SVD za matricu $\Delta(A)$. Ortogonalna razmeštena reprezentacija (Ortogonal displacement representation, ili skraćeno odr) matrice A data je izrazom

$$A = L(Ae_1) + \sum_{i=1}^k \sigma_i L(u_i)L(Zv_i)^T.$$

Takođe, uređena četvorka (Ae_1, U, σ, V) , gde je $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ predstavlja ortogonalni razmešten generator (ortogonal displacement generator, ili skraćeno odg) matrice A .

Ortogonalna razmeštena reprezentacija matrice A je u tesnoj vezi sa ε -razmeštenom reprezentacijom matrice A . Sledeća teorema daje karakterizaciju ranga ε -razmeštanja matrice A u terminima SVD-a.

Teorema 2.2.4. [14] Neka je $\Delta(A) = U\Sigma V^T$ SVD matrice $\Delta(A)$ i neka su $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ singularne vrednosti matrice A . Ako je ε realan broj takav da važi $0 < \varepsilon < \sigma_1$, onda je $\text{drk}_\varepsilon(A) = r$ akko $\sigma_r > \varepsilon \geq \sigma_{r+1}$.

Za zadato ε , za koje važi $0 < \varepsilon < \sigma_1$, moguće je izračunati ε -razmeštenu reprezentaciju matrice A datu pomoću (2.8), gde je r izabrano tako da važi $\sigma_r > \varepsilon \geq \sigma_{r+1}$. Za tako izabrano ε i r , ε -razmeštenu reprezentaciju matrice A datu pomoću (2.8) zovemo *aproksimacija ortogonalne razmeštene reprezentacije* (approximate orthogonal displacement representation, ili skraćeno aodr) matrice A .

Koncept *ranga ε -razmeštanja matrica* je korišćen u radu [110] za implementaciju algoritma za nalaženje inverza Toeplitz-ove matrice pomoću Newton-ovih iteracija. Sledeći rezultat daje procenu greške koju pravi ε -razmeštena reprezentacija matrice A u odnosu na samu matricu.

Teorema 2.2.5. [14] *Neka je $r = \text{drk}_\varepsilon(A) \leq \text{drk}(A) = k$, $A_\varepsilon = \text{aodr}(A)$, i neka su $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, ne nula singularne vrednosti matrice $\Delta(A)$. Tada važi*

$$\|A - A_\varepsilon\| \leq n \sum_{i=r+1}^k \sigma_i \leq n(k-r)\varepsilon. \quad (2.9)$$

2.2.4 Schultz-ov metod i odgovarajući operatori razmeštanja

Posmatrajmo klasičan Newton-ov iterativni metod

$$X_{i+1} = 2X_i - X_i A X_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

za nalaženje inverza matrice A koji je prvi predložio Schultz 1933. godine [126] i koji je detaljno izučavan u radu [108]. Poznato je da je Newton-ov metod lak za implementaciju i analiziranje i da je numerički stabilan. Početna iteracija se bira tako da ima mali rang razmeštanja. Granična vrednost X_∞ , koja predstavlja aproksimaciju inverza ili uopštenog inverza matrice A , ima takođe mali rang razmeštanja (pogledati [67, 69]). S druge strane, matrica X_i u Newton-ovoj iterativnoj metodi ne mora da ima mali rang razmeštanja. U najgorem slučaju rang razmeštanja matrice X_i može da raste eksponencijalno sve dok ne dostigne broj n , što predstavlja dimenziju matrice A . To znači da se troškovi izračunavanja u svakom koraku Newton-ovog metoda značajno povećavaju kako i raste. Da bi se dobio efikasan algoritam, rast ranga razmeštanja matrice X_i mora biti kontrolisan i u dovoljnoj meri smanjen. U tom smislu u svakom koraku matricu X_i bi trebalo aproksimirati odgovarajućom matricom malog ranga razmeštanja. Na taj način bi množenje matrica, dobijenih u toku iteracija, sa vektorom moglo da se obavi veoma efikasno i brzo, koristeći njihovu karakterističnu strukturu i rezultate date u prethodnom odeljku.

Mnogi autori su izgradili iterativne metode, bazirane na Newton-ovoj metodi, za nalaženje uopštenih inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice koristeći različite operatore razmeštanja kao i koncept *ortogonalne reprezentacije razmeštanja*, odnosno *ranga ε -razmeštanja matrice* [14, 15, 22, 143, 150]. Pokazano je da su ovi metodi veoma efikasni i da ne zahtevaju mnogo izračunavanja.

Bini i koautori u svom radu [14] uvode pojam invertibilnog *operatora razmeštanja* za kvadratnu matricu A na sledeći način

Definicija 2.2.8. [14] *Za proizvoljnu kvadratnu matricu A invertibilne operatore razmeštanja $\Delta^+(A)$ i $\Delta^-(A)$ definišemo kao*

$$\Delta^+(A) = C^+ A - A C^-, \quad \Delta^-(A) = C^- A - A C^+, \quad (2.11)$$

gde su C^+ i C^- Toeplitz-ove matrice za koje važi $C^+ = Z + e_1 e_n^T$, $C^- = Z - e_1 e_n^T$.

U nastavku navodimo rezultat koji kaže da ako znamo razmeštanje matrice A , $\Delta^+(A)$ ili $\Delta^-(A)$, onda matricu A možemo predstaviti pomoću sume proizvoda cirkularnih i anti-cirkularnih matrica.

Teorema 2.2.6. [14] *Za operatore Δ^+ i Δ^- imamo da važi:*

$$\begin{aligned}\Delta^+(A) &= \sum_{i=1}^k x_i y_i^T \iff A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k C^+(x_i) C^-(J y_i) \\ \Delta^-(A) &= \sum_{i=1}^k x_i y_i^T \iff A = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k C^-(x_i) C^+(J y_i), \\ \Delta^+(AB) &= \Delta^+(A)B + A\Delta^+(B) - 2Ae_1 e_n^T B, \\ \Delta^-(AB) &= \Delta^-(A)B + A\Delta^-(B) + 2Ae_1 e_n^T B,\end{aligned}$$

gde je J permutaciona matrica koja ima jedinice na anti dijagonali i gde su $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$.

Nadalje predstavljamo definiciju ranga ε -razmeštanja matrice i neke važnije rezultate koji su značajni za konstrukciju efikasnog algoritma za nalaženje inverza i Moore-Penroseovog inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice. Svi ovi rezultati su veoma slični rezultatima iz prethodnog poglavlja i radi jednostavnosti zapisa biće predstavljeni samo u terminima operatora Δ^- , dok analogni rezultati važe i za operator Δ^+ .

Definicija 2.2.9. [14] *Za dati realan broj $\varepsilon > 0$, rang ε -(-) razmeštanja matrice A je dat kao*

$$\text{drk}_\varepsilon^-(A) = \min_{\|E\| \leq \varepsilon} \text{rang}(\Delta^-(A) + E).$$

Propozicija 2.2.1. [14] *Neka je $\Delta^-(A) = U^- \Sigma^- (V^-)^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i^- u_i^- (v_i^-)^T$ ($\sigma_1^- \geq \sigma_2^- \geq \dots \geq \sigma_k^- > 0$) SVD matrice $\Delta^-(A)$ i neka je ε realan broj za koji važi $0 < \varepsilon < \sigma_1^-$. Tada je $\text{drk}_\varepsilon^-(A) = r$ akko $\sigma_r^- > \varepsilon \geq \sigma_{r+1}^-$.*

Nakon što je izračunat SVD od $\Delta^-(A)$, na osnovu Teoreme 2.2.6, matrica A može se predstaviti na sledeći način

$$A = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sigma_i^- C^-(u_i^-) C^+(J v_i^-). \quad (2.12)$$

Ova reprezentacija je zapravo *odr* matrice A u odnosu na Δ^- operator i odgovarajuća trojka (U^-, σ^-, V^-) , gde je $\sigma^- = (\sigma_1^-, \sigma_2^-, \dots, \sigma_k^-)$, predstavlja *odg* matrice A . Za dato ε , ako je $\text{drk}_\varepsilon^-(A) = r$ aproksimaciju A_ε matrice A možemo dobiti kao

$$A_\varepsilon^- = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sigma_i^- C^-(u_i^-) C^+(J v_i^-). \quad (2.13)$$

Više je nego očigledno da ova proksimacija zapravo predstavlja *aodr* matrice A i odgovarajući generator $(\hat{U}^-, \hat{\sigma}^-, \hat{V}^-)$ je *aodg* matrice A , gde je

$$\sigma^- = (\sigma_1^-, \sigma_2^-, \dots, \sigma_r^-), \quad \hat{U}^- = [u_1^-, u_2^-, \dots, u_r^-], \quad \hat{V}^- = [v_1^-, v_2^-, \dots, v_r^-].$$

Posmatrajći aproksimaciju matrice A datu sa (2.13), i pritom koristeći osobine FFT algoritma za množenje cirkularnih i anti-cirkularnih matrica vektorom, dobojamo sledeću

Napomena 2.2.1. *Aproksimaciju A_ε^- matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ datu pomoću aodg-a, možemo efikasno pomnožiti proizvoljnim vektorom koristeći $\mathcal{O}(rn \log_2 n)$ operacija, primenom FFT algoritma, gde je $r = \text{drk}_\varepsilon^-(A)$.*

Sledeći rezultat daje procenu greške aodr-a matrice A .

Teorema 2.2.7. [14, 22] *Neka je $r = \text{drk}_\varepsilon^-(A) \leq \text{drk}(A) = k$, $A_\varepsilon^- = \text{aodr}(A)$, i neka su $\sigma_1^-, \sigma_2^-, \dots, \sigma_k^-$, ne nula singularne vrednosti matrice $\Delta^-(A)$. Tada važi*

$$\|A - A_\varepsilon^-\| \leq \frac{1}{2}n \sum_{i=r+1}^k \sigma_i^- \leq \frac{1}{2}n(k-r)\varepsilon. \quad (2.14)$$

Najzad autori u svom radu [14] uvode pojam operatora $\text{trunc}_\varepsilon(\cdot)$ na skup *odg*-a na sledeći način

$$\text{trunc}_\varepsilon((U, \sigma, V)) = (\hat{U}, \hat{\sigma}, \hat{V}),$$

i proširuju $\text{trunc}_\varepsilon(\cdot)$, takođe, na skup matrica $A_\varepsilon = \text{trunc}_\varepsilon(A)$.

Na ovaj način uvedeni su svi pojmovi vezani za konstrukciju brzog i efikasnog algoritma za nalaženje inverza i Moore-Penroseovog inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice koristeći operatore Δ^+ i Δ^- . Naime, autori prave modifikaciju Newton-ovog iterativnog metoda kako bi ga prilagodili za što efikasnije i brže računanje spomenutih inverza. Jedna od najvažnijih stvari jeste izbor parametra ε , koji će doprineti da $r = \text{drk}_\varepsilon^-(X_i)$ bude što manje tokom iteracija. Konstrukciju samog algoritma i analizu njegovih performansi moguće je pronaći u samom radu [14].

2.2.5 Modifikacija SMS algoritma za računanje {2} inverza Toeplitz-ove matrice

U ovom odeljku biće opisan algoritam za nalaženje {2} inverza sa predefinisanom slikom i jezgrom proizvoljne Toeplitz-ove matrice. Algoritam je baziran na metodu *sukcesivnog kvadriranja matrice* (Successive matrix squaring, ili skraćeno SMS) koji je prezentovan u radu [131] kao i na konceptu *aproksimacije ortogonalne razmeštene reprezentacije* navedenom u prethodnom poglavlju kao i u radovima [14, 22].

Krenimo najpre od iterativne šeme za računanje {2} inverza sa predefinisanom slikom i jezgrom matrice $A \in \mathbb{C}_\rho^{n \times n}$ iz rada [131]

$$\begin{aligned} X_1 &= Q, \\ X_{k+1} &= PX_k + Q, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

gde je $P = I - \beta RA$, $Q = \beta R$, $R \in \mathbb{C}_s^{n \times n}$, $0 \leq s \leq \rho$ i gde je β parametar relaksacije. Originalnu ideja iterativne šeme (2.15), koju nazivamo *metod sukcesivnog kvadriranja matrice*, predložio je Chen sa svojim koautorima u radu [28] za slučaj $R = A^*$. Metoda koju je uveo Chen koristi se za računanje Moore-Penroseovog inverza proizvoljne matrice A . Umesto iterativne šeme (2.15) moguće je koristiti sledeću matricu dimenzija $2n \times 2n$

$$T = \begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Dalje, može se primetiti da je k -ti stepen matrice T dat kao

$$T^k = \begin{bmatrix} P^k & \sum_{i=0}^{k-1} P^i Q \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

gde $n \times n$ matični blok $\sum_{i=0}^{k-1} P^i Q$ zapravo predstavlja k -tu aproksimaciju X_k pseudoinverza matrice A dobijene iterativnom šemom (2.15), odnosno imamo da važi $X_k = \sum_{i=0}^{k-1} P^i Q$. Matrica T^k može se izračunati pomoću uzastopnog kvadriranja matrice T , tako da umesto korišćenja iterativne šeme na osnovu (2.15) možemo posmatrati sledeći iterativni proces.

$$\begin{aligned} T_0 &= T, \\ T_{k+1} &= T_k^2, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nakon toga, zaključujemo da je blok $\sum_i P^i Q$ dobijen posle k koraka uzastopnog kvadriranja datog sa (2.16) ekvivalentan sa aproksimacijom nastalom kao 2^k -ti korak iterativnog procesa (2.15). Naime, mi u nastavku razmatramo niz $\{Y_k\}$ dat na sledeći način $Y_k = X_{2^k} = \sum_i P^i Q$.

Autori su u svom radu [131] dokazali da iterativna šema data u terminima matičnih blokova (2.16) konvergira ka $\{2\}$ inverzu proizvoljne matrice A sa predefinisanim slikom i jezgrom, koji je određen pomoću, na odgovarajući način izabrane, matrice R .

Propozicija 2.2.2. [131] *Neka su $A \in \mathbb{C}_\rho^{n \times n}$ i $R \in \mathbb{C}_s^{n \times n}$, $0 \leq s \leq \rho$ dati tako da važi*

$$AR(R) \oplus \mathcal{N}(R) = \mathbb{C}^n. \tag{2.17}$$

Niz aproksimacija

$$Y_k = \sum_{i=0}^{2^k-1} (I - \beta RA)^i \beta R \tag{2.18}$$

konvergira, u matičnoj normi $\|\cdot\|$, ka $\{2\}$ inverzu $Y = A_{\mathcal{R}(R), \mathcal{N}(R)}^{(2)}$ matrice A , ako je β fiksiran realan parametar, takav da važi

$$\max_{1 \leq i \leq t} |1 - \beta \lambda_i| < 1,$$

gde je $\text{rang}(RA) = t$, λ_i , $i = 1, \dots, t$ su sopstvene vrednosti za RA , i $\|\cdot\|$ zadovoljava uslov (2.25) za matricu $M = I - \beta AR$.

Pošto izdvojena $2n \times 2n$ matrica u SMS šemi nije pogodna da se na njoj primeni operator razmeštanja, naša namera je da se izbegne takva situacija. U tom smislu, možemo primetiti da se niz aproksimacija (2.18) može drugačije zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= (S_k + I)Y_k, \\ S_{k+1} &= I - Y_{k+1}A, \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.19}$$

gde su inicijalne matrice $Y_0 = Q$, $S_0 = P$. Takođe, u [28] je pokazano da je SMS metod (2.19) ekvivalentan Shultz-ovom methodu (2.10).

Da bismo konstruisali brz i efikasan algoritam potrebno je da matrice u iterativnoj šemi imaju mali rang razmeštanja. S tim u vezi uvodimo sledeću modifikaciju metoda (2.19) za čije iteracije važi da njihov razmešteni rang, u najgorem slučaju raste eksponencijalno. Naime, koristeći koncept ortogonalne reprezentacije razmeštanja, predstavljamo modifikaciju

SMS metoda iz rada [131] na taj način što aproksimiramo matricu Y_{k+1} drugom matricom sa manjim (nižim) rangom razmeštanja. Definišimo niz Z_k na sledeći način

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= ((P_k + I)Z_k)^{-}_{\varepsilon_k} \\ P_{k+1} &= I - Z_{k+1}A, \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.20)$$

sa početnim vrednostima $Z_0 = Q$, $P_0 = P$. Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo sledeće oznake

$$Z_k' = (P_k + I)Z_k. \quad (2.21)$$

Posmatrajući razmešteni rang, dolazimo do sledećih nejednakosti $\text{drk}^-(Z_k') \leq \text{drk}^-(P_k) + \text{drk}^-(Z_k)$. Ukoliko koristimo *aodr* od matrice Z_k' imamo da rang razmeštanja niza $\{Z_k\}$ ostaje mali tokom iterativnog procesa. Takođe, imamo da rang razmeštanja niza matrica $\{P_k\}$ ostaje nizak, zato što važi $\text{drk}^-(P_k) \leq \text{drk}^-(Z_k) + m$, gde je $m = \text{drk}(A)$.

U nastavku predstavljamo algoritam za računanje $\{2\}$ inverza sa predefinisanim slikom i jezgrom proizvoljne Toeplitz-ove matrice. U ovoj modifikaciji SMS metoda mi izračunavamo i čuvamo SVD matrice $\Delta^-(Z_k)$ umesto Z_k i kasnije izračunavamo Z_k koristeći rezultat iz teoreme 2.2.6. Na osnovu (2.21) dobijamo

$$\Delta^-(Z_k') = \Delta^-(P_k)Z_k + P_k\Delta^-(Z_k) + \Delta^-(Z_k) + 2P_k e_1 e_n^T Z_k. \quad (2.22)$$

Ako SVD matrice $\Delta^-(Z_k)$ obeležimo sa $U_Z \Sigma_Z V_Z^T$, kao i SVD matrice $\Delta^-(P_k)$ sa $U_P \Sigma_P V_P^T$ onda $\Delta^-(Z_k')$ možemo zapisati u sledećoj razvijenoj matricnoj formi

$$\Delta^-(Z_k') = U_{Z'} \Sigma_{Z'} V_{Z'}^T = [U_P \quad (P_k + I)U_Z \quad P_k e_1] \begin{bmatrix} \Sigma_P & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_Z & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_P^T Z_k \\ V_Z^T \\ e_n^T Z_k \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

S druge strane, da bismo izračunali SVD matrice $\Delta^-(P_{k+1})$, koji nam je potreban za sledeću iteraciju imamo

$$\Delta^-(P_{k+1}) = \Delta^-(I) - \Delta^-(Z_{k+1})A - Z_{k+1}\Delta^-(A) - 2Z_{k+1}e_1 e_n^T A.$$

Označimo sVD matrice $\Delta^-(Z_{k+1})$ sa $U_Z \Sigma_Z V_Z^T$, kao i SVD od $\Delta^-(A)$ sa $U_A \Sigma_A V_A^T$. Prethodni identitet može biti predstavljen u razvijenoj formi kao

$$\Delta^-(P_{k+1}) = U_P \Sigma_P V_P^T = [-U_Z \quad -Z_{k+1}U_A \quad -Z_{k+1}e_1 \quad -e_1] \begin{bmatrix} \Sigma_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_Z^T A \\ V_A^T \\ e_n^T A \\ e_n^T \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Na taj način imamo da SVD matrice $\Delta^-(Z_{k+1})$ može da se izračuna pomoću sledećeg algoritma.

Algoritam 2.2.1 Nalazi odg od Z_{k+1} i odg od P_{k+1}

Ulaz: Odg od Z_k , odg od P_k , odg od A and parametar odsecanja ε .

- 1: Izračunati matrice $U_{Z'}$, $\Sigma_{Z'}$, $V_{Z'}^T$ na osnovu (2.23).
 - 2: Naći QR faktorizacije $U_{Z'} = Q_1 R_1$ i $V_{Z'} = Q_2 R_2$.
 - 3: Izračunati SVD od $R_1 \Sigma_{Z'} R_2^T = U \Sigma V$.
 - 4: Postaviti $\hat{\Sigma} = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, tako da r zadovoljava $\sigma_{r+1} \leq \varepsilon \sigma_1 < \sigma_r$.
 - 5: Postaviti $U_{Z_{k+1}} = Q_1 \hat{U}$, $\Sigma_{Z_{k+1}} = \hat{\Sigma}$ i $V_{Z_{k+1}} = Q_2 \hat{V}$, gde \hat{U} i \hat{V} predstavljaju prvih r kolona od U i V , redom.
 - 6: Pronaći matrice U_P , Σ_P , V_P^T na osnovu (2.24).
 - 7: Naći QR faktorizaciju $U_P = Q_3 R_3$ i $V_P = Q_4 R_4$.
 - 8: Izračunati SVD od $R_3 \Sigma_P R_4^T = U \Sigma V$.
 - 9: Postaviti $U_{P_{k+1}} = Q_3 U$, $\Sigma_{P_{k+1}} = \Sigma$ i $V_{P_{k+1}} = Q_4 V$.
-

Troškovi izvršavanja gornjeg algoritma su $\mathcal{O}(mh)$ FFT-a, gde je $h = \max_k drk(Z_k)$ i $m = drk(A)$. Ukoliko je h dovoljno malo, ili je nezavisno od n , onda algoritam zahteva $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ operacija po koraku.

Da bi kompletirali modifikovani SMS metod u nastavku predstavljamo algoritam za nalaženje $\{2\}$ inverza Toeplitz-ove matrice dat u terminima odr -a za aproksimaciju tog inverza u odnosu na operator Δ^- .

Algoritam 2.2.2 Modifikovani SMS algoritam

Ulaz: Toeplitz-ova matrica A , matrica R , parametar relaksacije β , veličina greške ξ .

- 1: Postaviti $k = 0$, $Z_k = \beta R$ i $P_k = I - \beta R A$
 - 2: Izračunati SVD od $\Delta^-(P_k) = U_{P_k} \Sigma_{P_k} V_{P_k}^T$, $\Delta^-(Z_k) = U_{Z_k} \Sigma_{Z_k} V_{Z_k}^T$ i $\Delta^-(A) = U_A \Sigma_A V_A^T$.
 - 3: Odrediti parametar odsecanja ε_k .
 - 4: Naći odg ($U_{Z_{k+1}}$, $\Sigma_{Z_{k+1}}$, $V_{Z_{k+1}}$) od Z_{k+1} i ($U_{P_{k+1}}$, $\Sigma_{P_{k+1}}$, $V_{P_{k+1}}$) of P_{k+1} na osnovu algoritma 2.2.1 sa ulazom (U_{Z_k} , Σ_{Z_k} , V_{Z_k}), (U_{P_k} , Σ_{P_k} , V_{P_k}), ($U_A \Sigma_A V_A^T$) i $\varepsilon = \varepsilon_k$.
 - 5: Naći normu $\|res(Z_{k+1})\|$. Ako je $\|res(Z_{k+1})\| < \xi$ ići na korak 7, u suprotnom nastaviti
 - 6: Postaviti $k = k + 1$, ići na korak 3
 - 7: Vratiti matricu Z_{k+1} .
-

U koraku 5 vrednost $\|res(Z_k)\|$ predstavlja normu ostatka $\|res(Z_k)\| = \|Z_k A Z_k - Z_k\|$.

Da bismo izveli naredni rezultat podsećamo na definiciju pojma q -Pochhammerovog simbola (q -Pochhammer symbol or q -rising factorial), koji je definisan kao

$$(a, q)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - aq^i).$$

Takođe, kompletnosti radi podsećamo na sledeću lemu

Lema 2.2.1. [75] *Neka su dati $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $\varepsilon > 0$. Postoji najmanje jedna matična norma $\|\cdot\|$ tako da važi*

$$\rho(M) \leq \|M\| \leq \rho(M) + \varepsilon, \quad (2.25)$$

gde $\rho(M)$ predstavlja spektralni radijus matrice M .

Sledeća teorema pokazuje kvadratnu konvergenciju niza aproksimacija Z_k datih sa (2.20) ka $\{2\}$ inverzu sa predefinisanom slikom i jezgrom pod određenim uslovima. Takođe je utvrđena gornja granica norme razlike $Z_k - Y_k$.

Teorema 2.2.8. *Neka su dati $A \in \mathbb{C}_\rho^{n \times n}$ i $R \in \mathbb{C}_s^{n \times n}$, $0 \leq s \leq \rho$ tako da je uslov (2.17) zadovoljen. Niz aproksimacija $\{Z_k\}$ dat pomoću (2.20) konvergira u odnosu na matičnu normu $\|\cdot\|$ ka $\{2\}$ inverzu $Z = A_{\mathcal{R}(R), \mathcal{N}(R)}^{(2)}$ matrice A ukoliko su sledeći uslovi zadovoljeni:*

1. *Realan parametar β je izabran tako da zadovoljava*

$$\max_{1 \leq i \leq t} |1 - \beta \lambda_i| < 1,$$

gde je $\text{rang}(RA) = t$, i gde su λ_i , $i = 1, \dots, t$ sopstvene vrednosti od RA .

2. *Parametri odsecanja ε_k , $k \in \mathbb{N}_0$ su izabrani na sledeći način*

$$\varepsilon_k = \frac{2}{n(h'_k - h_{k+1})} \theta_k, \quad (2.26)$$

gde je

$$h'_k = \text{drk}^-(Z'_k), \quad h_k = \text{drk}^-(Z_k), \quad k \geq 0, \quad \theta_0 = \min \left\{ \varepsilon, \frac{\delta^2 - \|P\|^2}{\|A\|} \right\}$$

i

$$\theta_k = \min \left\{ \varepsilon^{k+1}, \frac{\delta^{k+2}(1 - \delta^k)}{\|A\|} \right\}, \quad k \geq 1, \quad (2.27)$$

za $0 < \varepsilon \ll 1$ i $\delta = 1 - \varepsilon$.

3. *Matična norma $\|\cdot\|$ je izabrana tako da je uslov (2.25) iz leme 2.2.1 ispunjen za matricu $M = I - \beta AR$ i ε zadovoljava nejednakost $\|P\| \leq 1 - \varepsilon$.*

Pod ovim uslovima imamo kvadratnu konvergenciju iterativnog metoda, koja je definisana pravilom

$$\frac{\|Z - Z_k\|}{\|Z\|} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq t} |1 - \beta \lambda_i| \right)^{2^k} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.28)$$

kao i ocenu sledeće norme

$$\|R_k\| \leq \frac{(-1, \delta)_{k+1}}{2(1 + \delta)} \cdot \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^k)}{1 - \varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad k \geq 0, \quad (2.29)$$

gde $\{Y_k\}$ predstavlja niz generisan SMS algoritmom i gde je $R_k = Z_k - Y_k$.

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $\|I\| = 1$. U suprotnom, ako bi važiolo $\|I\| > 1$, umesto norme $\|\cdot\|$ koja zadovoljava uslov 3, mogli bi da koristimo indukovanu matičnu normu $N(A) = \sup_{\|E\|=1} \|AE\|$. Na osnovu teoreme 5.6.26 iz [75] imamo da nova norma zadovoljava $N(A) \leq \|A\|$ za svako $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $N(I) = 1$.

Matrica Z_{k+1} je *aodr* matrice Z'_k tako da možemo da zapišemo $Z_{k+1} = Z'_k + E_k$. Na osnovu (2.26) i (2.14) jasno je da važi $\|E_k\| \leq \theta_k$, $k \geq 0$. Dokažimo najpre pomoćni rezultat

$$\|P_k\| \leq \delta^{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Za slučaj kada je $k = 0$ imamo $\|P_0\| = \|P\| \leq \delta$. Identitet za slučaj $k = 1$ proizilazi iz

$$P_1 = I - Z_1 A = I - (P_0 + I) Z_0 A - E_0 A = I - Z_0 A - P_0 Z_0 A - E_0 A = P_0^2 - E_0 A,$$

što povlači

$$\|P_1\| \leq \|P_0\|^2 + \theta_0 \|A\| \leq \|P\|^2 + \frac{\delta^2 - \|P\|^2}{\|A\|} \|A\| = \delta^2.$$

Ako pretpostavimo da je $\|P_k\| \leq \delta^{k+1}$ i uzmemo u obzir $P_{k+1} = P_k^2 - E_k A$ i $\|E_k\| \leq \theta_k$ dobijamo da važi

$$\|P_{k+1}\| \leq \|P_k\|^2 + \theta_k \|A\| \leq \delta^{2k+2} + \frac{\delta^{k+2}(1 - \delta^k)}{\|A\|} \|A\| = \delta^{k+2}.$$

Sada pokazujemo da važi ocena (2.29) za normu $\|R_k\|$. Za slučaj $k = 0$ imamo da važi $\|R_0\| = 0$. Da bismo dokazali tvrđenje za $k \geq 1$ ponovo koristimo matematičku indukciju. Slučaj $k = 1$ sledi iz

$$Z_1 = (Z_0')_{\varepsilon_0}^- = (Y_1)_{\varepsilon_0}^- = Y_1 + E_0,$$

što povlači

$$\|R_1\| = \|E_0\| \leq \theta_0 \leq \varepsilon = \frac{(-1, \delta)_2}{2(1 + \delta)} \varepsilon.$$

Predpostavimo da nejednakost (2.29) važi za normu $\|R_k\|$. Onda induktivni korak sledi iz

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= ((P_k + I)Z_k)_{\varepsilon_k}^- = (P_k + I)(Y_k + R_k) + E_k \\ &= Y_{k+1} + (P_k + I)R_k + E_k, \end{aligned}$$

što zajedno sa (2.27) daje

$$\begin{aligned} \|R_{k+1}\| &\leq (\delta^{k+1} + 1)\|R_k\| + \theta_k \leq (\delta^{k+1} + 1) \frac{(-1, \delta)_{k+1}}{2(1 + \delta)} \cdot \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^k)}{1 - \varepsilon} + \theta_k \\ &\leq (\delta^{k+1} + 1) \sum_{s=1}^k \prod_{i=2}^k (\delta^i + 1) \varepsilon^s + \varepsilon^{k+1} \leq \sum_{s=1}^k \prod_{i=2}^{k+1} (\delta^i + 1) \varepsilon^s + \prod_{i=2}^{k+1} (\delta^i + 1) \varepsilon^{k+1} \\ &= \sum_{s=1}^{k+1} \prod_{i=2}^{k+1} (\delta^i + 1) \varepsilon^s. \end{aligned}$$

Nastavljajući prethodnu nejednakost, dobijamo

$$\|R_{k+1}\| \leq \frac{(-1, \delta)_{k+2}}{2(1 + \delta)} \sum_{s=1}^{k+1} \varepsilon^s = \frac{(-1, \delta)_{k+2}}{2(1 + \delta)} \cdot \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^{k+1})}{1 - \varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Na ovaj način dokazali smo da važi $\|R_k\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Uvedimo sledeće oznake $Y = \lim Y_k$, $Z = \lim Z_k$. Pošto je $\sum_{i=0}^{\infty} \delta^i < \infty$, imamo da $(-1, \delta)_k$ konvergira ka $(-1, \delta)_{\infty}$, odnosno da važi

$$\|Z - Y\| \leq \frac{(-1, \delta)_{\infty}}{2(2 - \varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Naime, pošto smo pokazali da (2.29) važi, moguće je koristiti $Z = Y$. Sada, kao posledicu osobina 1 i 3 imamo da važi

$$\frac{\|Y - Y_k\|}{\|Y\|} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq t} |1 - \beta \lambda_i| \right)^{2^k} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

(pogledati [131], teorema 2.1). S druge strane imamo ocenu za $\|R_k\|$, što implicira

$$\|Z - Z_k\| = \|Z - Y_k - R_k\| = \|Y - Y_k - R_k\| \leq \|Y - Y_k\| + \|R_k\|.$$

Konačno dobijamo

$$\frac{\|Z - Z_k\|}{\|Z\|} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq t} |1 - \beta \lambda_i| \right)^{2^k} + \mathcal{O}(\varepsilon) + \frac{(-1, \delta)_{k+1}}{2(1 + \delta)\|Z\|} \cdot \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^k)}{1 - \varepsilon},$$

što potvrđuje (2.28) a samim tim i kvadratnu konvergenciju iterativnog procesa (2.20). \square

Kao što smo ranije naglasili imamo da je izbor parametra ε_k veoma bitan za sam iterativni proces, jer on određuje vrednost ranga razmeštanja r , koji je zapravo balans između konvergencije i niskih troškova izvršavanja samog algoritma. Na osnovu nekih strategija može se izabrati da ε_k bude statičko (konstantno za vreme iteracija) ili da njegov izbor bude dinamičan (promenljiv, da zavisi od nekog promenljivog parametra). Najrealnija strategija izbora parametra ε je na osnovu neke odgovarajuće heuristike. Neke od heuristika biće korišćenje za računanje $\{2\}$ inverza u narednom odeljku.

U nastavku navodimo još neke rezultate koji su bitni za računanje inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Da bismo našli eksplicitnu reprezentaciju $\{2\}$ inverza matrice A , koja je zapravo granična vrednost niza aproksimacija (2.20) za dato A i R , mi posmatramo faktorizaciju potpunog ranga matrice R . U tom smislu navodimo sledeći rezultat

Posledica 2.2.2. *Za dato $A \in \mathbb{C}_\rho^{n \times n}$ izaberimo proizvoljnu matricu $R \in \mathbb{C}_s^{n \times n}$, $0 \leq s \leq \rho$, i njenu faktorizaciju potpunog ranga $R = FG$, $F \in \mathbb{C}_s^{n \times s}$, $G \in \mathbb{C}_s^{s \times n}$, tako da je GAF invertibilna. Pretpostavimo da je β realan broj koji zadovoljava $\max_{1 \leq i \leq s} |1 - \beta \lambda_i| < 1$, gde su λ_i sopstvene vrednosti od FGA . Pod pretpostavkama 2 and 3 iz teoreme 2.2.8 imamo da niz aproksimacija dat pomoću (2.20) konvergira u terminima matrice norme ka $\{2\}$ inverzu matrice A ,*

$$Z = F(GAF)^{-1}G = A_{\mathcal{R}(F), \mathcal{N}(G)}^{(2)} \in A\{2\}_s.$$

Dokaz. Sledi direktno na osnovu $Z = Y$, teoreme 2.3 iz [131] i teoreme 2.2.8. \square

Posledica 2.2.3. *Ako su zadovoljeni uslovi iz teoreme 2.2.8 onda imamo da važi sledeće:*

- (i) U slučaju $R = A^l$, imamo $l \geq \text{ind}(A)$, $Z = A^D$,
- (ii) U slučaju $R = A^*$, imamo $Z = A^\dagger$,
- (iii) U slučaju $R = A$, imamo $Z = A^\#$,
- (iv) Za $s = \rho$, imamo $Z \in A\{1, 2\}$.

Dokaz. Dovoljno je samo navesti sledeće reprezentacije i dokaz sledi direktno:

$$A^D = A_{\mathcal{R}(A^l), \mathcal{N}(A^l)}^{(2)}, \quad l \geq \text{ind}(A), \quad A^\dagger = A_{\mathcal{R}(A^*), \mathcal{N}(A^*)}^{(2)}, \quad A^\# = A_{\mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A)}^{(2)},$$

$$A\{1, 2\} = A\{2\}_\rho.$$

\square

Napomena 2.2.2. *Restriktivan uslov $\|P\| \leq 1 - \varepsilon$ iz teoreme 2.2.8 je uvek zadovoljen u slučaju računanja običnog inverza, Moore-Penroseovog inverza i Drazin-ovog inverza. Za prva dva slučaja imamo $R = A^*$, što daje $P = P^*$, odnosno $\rho(P) = \|P\|$, a za slučaj Drazin-ovog inverza imamo $R = A^l$, $l \geq \text{ind}(A)$ odakle dobijamo $P = M$.*

2.2.6 Numerički rezultati

U ovom odeljku prikazujemo nemičke rezultate koji su dobijeni testiranjem modifikovanog SMS metoda za računanje $\{2\}$ inverza Toelitz-ove matrice. u te svrhe izabrali smo 5 različitih tipova Toeplitz-ovih matrica. Za vreme izvršavanja algoritma posmatrali smo i kasnije prikazali tri različita indikatora: Broj iteracija (No of iter), maksimalni rang razmeštenja (Mdrk), kao i sumu ranga razmeštenja (Sdrk). Kod za ovaj algoritam je pisan u programskom paketu MATLAB a testiranja su vršena na računaru Intel Celeron 2.0 GHz. Kriterijum za izlazak iz algoritma 2.2.2 je $\|res(Z_k)\| \leq \xi = 10^{-6}$. Takođe, vrednosti polaznog parametra β je $\beta = 1/\|RA\|$, gde je R matrica izabrana u skladu sa teoremom 2.2.8 i posledicom 2.2.3.

Da bismo imali jedinstveni pristup u odabiru parametra odsecanja ε za sve test matrice, koristićemo statički izbor $\varepsilon = 10^{-8}$, što zapravo predstavlja kvadratni koren dvostruke preciznosti aritmetike pokretnog zarezca. Za potrebe računanja inverza i group inverza matrice, predstavljamo strategiju izbora ε na osnovu određene heuristike. Ova heuristika doprinosi poboljšanju karakteristika algoritma, kao što su manji Mdrk kao i manji Sdrk što značajno umanjuje broj operacija po koraku kao i ukupne troškove izvršavanja algoritma.

Napomena 2.2.3. Na osnovu teoreme 2.2.8, slično kao u [131], moguće je unapred odrediti broj koraka potreban za dostizanje željene tačnosti algoritma. Očigledno je da je broj koraka kod SMS i modifikovanog SMS metoda identičan.

Sa $A[p|q]$ označićemo podmatricu matrice A dobijenu pomoću vrste označene kao p i kolone označene sa q . Ukoliko je $q = \{1, 2, \dots, n\}$, onda $A[p|q]$ obeležavamo sa $A[p| :]$, a u slučaju $p = \{1, 2, \dots, n\}$, $A[p|q]$ obeležavamo sa $A[: |q]$. Takođe niz $\{1, \dots, s\}$ prosto obeležavamo sa $1 : s$.

Primer 2.2.2. U ovom primeru razmatramo Toeplitz-ove matrice $A \in \mathbb{R}_\rho^{n \times n}$ and $R \in \mathbb{R}_s^{n \times n}$ (n je neparan broj) date kao

$$A = \text{toeplitz}[(1, 0, \dots, 0, 1)], \quad R = \text{toeplitz}[(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)],$$

gde je $s = (n - 1)/2 < \rho = n - 1$. Vektor koji reprezentuje matricu R ima element 1 u sredini. Jedna od mogućih faktorizacija potpunog ranga $R = FG$ je $F = R[: |1 : s]$, $G = R[1 : s | :]$. Za slučaj $n = 7$ imamo matični zapis faktorizacije

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu posledice 2.2.2, imamo da je eksplicitna reprezentacija $\{2\}$ inverza

$$A_{\mathcal{R}(F), \mathcal{N}(G)}^{(2)} = F(GAF)^{-1}G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Niz aproksimacija $\{Z_k\}$ dat algoritmom 2.2.2 takođe konvergira ka $\{2\}$ inverzu koji je dat ovom eksplicitnom reprezentacijom. U tabeli 2.2.1 predstavljamo numeričke rezultate dobijene prilikom računanja $\{2\}$ inverza matrice A na osnovu algoritma 2.2.2 posmatrajući nekoliko različitih dimenzija matrice A . Poređenja radi i broj iteracija originalnog SMS metoda je prikazan.

Tabela 2.2.1. Numerički rezultati dobijeni prilikom nalaženja $\{2\}$ inverza od A

Dim	Modifikovani SMS			SMS
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
17	5	3	15	5
33	5	3	15	5
65	5	3	15	5
129	5	3	15	5
257	5	3	15	5
513	5	3	15	5
1025	5	3	15	5
2049	5	3	15	5

Iz tabele 2.2.1 možemo uočiti da je broj iteracija originalnog SMS metoda isti kao i broj iteracija modifikovanog SMS metoda. Ističemo i to da je Mdrk veoma mali za sve dimenzije matrice A , naime $Mdrk = 3$.

U nastavku ovog odeljka, za svaku test matricu, razmatramo 8 različitih numeričkih eksperimenata sa sledećim dimenzijama: 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048.

Primer 2.2.3. Računamo inverze sledećih matrica

$$A_1 = \text{toeplitz} [(1, 1/2, \dots, 1/n)], \quad A_2 = \text{toeplitz} [(4, 1, 0, \dots, 0)],$$

uzetih iz [14], za slučaj $R = A^*$. Numerički rezultati dobijeni na osnovu računanja inverza matrica A_1 i A_2 su predstavljeni u tabelama 2.2.2 i 2.2.3. Pored statičkog izbora za parametar odsecanja $\varepsilon = 10^{-8}$, razmatramo i rezultate dobijene primenom heuristike $\varepsilon = \max(\text{res}/\|A\|, 10^{-8})$.

Tabela 2.2.2. Numerički rezultati računanja inverza matrice A_1

Dim	Modifikovani SMS						SMS
	$\varepsilon = \max(\text{res}/\ A\ , 10^{-8})$			$\varepsilon = 10^{-8}$			
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
16	11	2	15	11	13	105	11
32	11	2	17	12	16	129	12
64	12	2	20	13	16	148	13
128	13	2	25	13	16	158	13
256	13	3	27	14	16	171	14
512	14	4	35	14	16	176	14
1024	14	4	38	14	16	180	14
2048	14	4	42	15	16	189	15

Tabela 2.2.3. Numerički rezultati dobijeni nakon izračunavanja inverza matrice A_2

Dim	Modifikovani SMS						SMS
	$\varepsilon = \max(\text{res}/\ A\ , 10^{-8})$			$\varepsilon = 10^{-8}$			
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
16	7	2	11	7	13	65	7
32	7	2	11	7	13	69	7
64	7	3	16	7	13	69	7
128	7	3	18	7	13	69	7
256	7	3	18	7	13	69	7
512	7	4	20	7	13	69	7
1024	7	4	21	7	13	69	7
2048	7	4	21	7	13	69	7

Ono što prvo uočavamo je da je broj iteracija gotovo identičan, posmatrajući različite heuristike. S druge strane, očigledno je da je veliko poboljšanje postignuto, posmatrajući ostale indikatore (Mdrk i Sdrk), primenom heuristike $\varepsilon = \max(\text{res}/\|A\|, 10^{-8})$ u odnosu na statički izbor $\varepsilon = 10^{-8}$, kako za matricu A_1 tako i za matricu A_2 .

Primer 2.2.4. Test matrica za ovaj primer

$$A = \text{toeplitz}[(1, 1/2, \dots, 1/(n-1), 1), (1, 1/(n-1), \dots, 1/2, 1)]$$

preuzeta je iz rada [22]. Tabele 2.2.4 i 2.2.5 prikazuju numeričke rezultate dobijene za vrene izračunavanja group inverza (koji se dobija za slučaj $R = A$), kao i Moore-Penroseovog inverza ($R = A^*$) Toeplitz-ove matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Tabela 2.2.4. Numerički rezultati računanja group inverza

Dim	Modifikovani SMS						SMS
	$\varepsilon = \min((1 + 10^{-6} - \ P_k\ ^2)/\ A\ , 10^{-6})$			$\varepsilon = 10^{-8}$			
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
16	9	9	60	9	9	66	9
32	10	10	66	10	10	76	10
64	10	10	68	10	11	81	10
128	10	9	72	10	12	87	10
256	11	9	77	11	11	92	11
512	11	9	80	11	11	91	11
1024	11	9	82	11	11	93	11
2048	11	9	82	11	11	95	11

Napomenimo da je jedna nova promenljiva heuristika korišćena za računanje group inverza, koja se razlikuje od one korišćene u primeru 2.2.3. Jasno je da ova heuristika donosi značajna poboljšanja posmatranih indikatora (pre svih Sdrk) u odnosu na statički izbor $\varepsilon = 10^{-8}$.

Tabela 2.2.5. Numerički rezultati dobijeni prilikom izračunavanja Moore-Penroseovog inverza

Dim	Modifikovani SMS			SMS
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
16	9	13	84	9
32	10	14	98	10
64	10	15	107	10
128	10	15	112	10
256	11	15	119	11
512	11	15	122	11
1024	11	15	124	11
2048	11	16	128	11

Ovde treba naglasiti da su prikazani rezultati u tabelama 2.2.4 i 2.2.5 dobijeni za istu polaznu matricu A kao i to da su group i MP inverzi ove matrice zapravo isti. Iz tabela se može primetiti da iako je broj iteracija isti, imamo da su Mdrk i Sdrk potrebni za izvršenje algoritma značajno manji u slučaju izračunavanja group inverza nego u slučaju računanja MP inverza i to za isti odabir parametra odsecanja $\varepsilon = 10^{-8}$.

Primer 2.2.5. U ovom primeru razmatramo matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ datu kao

$$A = \text{toeplitz}[(0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0, 1, 1)].$$

Drazinov inverz matrice A računamo tako što uzimamo $R = A^l$, $l \geq 2$, jer imamo da važi $\text{ind}(A) = 2$. Za tako izabranu matricu R imamo da je $\text{rang}(R) = 6$. Na osnovu posledice 2.2.3, imamo da iterativni proces modifikovanog SMS metoda konvergira ka Drazin-ovom inverzu, pa dobijamo sledeće rezultate.

Tabela 2.2.6. Numerički rezultati za nalaženje Drazin-ovog inverza matrice A

Dim	Modifikovani SMS			SMS
	No of iter	Mdrk	Sdrk	No of iter
16	8	6	48	8
32	8	6	48	8
64	8	6	48	8
128	8	6	48	8
256	8	6	48	8
512	8	6	48	8
1024	8	6	48	8
2048	8	6	48	8

Iz tabele 2.2.6 vidimo da je $\text{Mdrk} = 6$, što je dobar rezultat imajući u vidu da je $\text{drk}^-(Z_0) = \text{drk}^-(\beta R) = 4$.

Numerički rezultati i dokazana kvadratna konvergencija pokazuju da je ova modifikacija SMS metoda dobra koliko i sam SMS metod u pogledu broja iteracija. Šta više, ostvarene male vrednosti za Mdrk i Sdrk očigledno smanjuju troškove isvršavanja algoritma po koraku, uzimajući u obzir strategije FFT-a i konvolucije koje su korišćene za množenje matrica vektorom. Treba reći još i to da su tri različite heuristike za promenljivi izbor parametra odsecanja korišćene. Na taj način dobijamo značajna poboljšanja u karakteristikama algoritma posmatrajući taj promenljivi izbor u odnosu na statički.

Na kraju kao zaključak imamo da izloženi algoritam predstavlja univerzalni algoritam za izračunavanje $\{2\}$ -inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice. Kako je opšte poznato da su $\{2\}$ -inverzi veoma široka klasa uopštenih inverza dobijamo da se kao posebni slučajevi ove metode mogu računati Moore-Penroseov, group i Drazin-ov inverz odgovarajuće kvadratne Toeplitz-ove matrice. Na taj način naš modifikovani SMS algoritam obuhvata algoritme iz [14, 22] kao posebne slučajeve. Zatim, u slučaju $m = n$ ovim algoritmom dajemo alternativu za računanje Moore-Penroseovog inverza u odnosu na algoritme iz [15, 150], koristeći cirkularne i anti-cirkularne matrice i posmatrajući drugačiji operator razmeštanja.

Glava 3

Nelinearna optimizacija i strukturne matrice

U ovoj glavi ćemo dati opšti pregled kao i definicije i osobine metoda za rešavanje nelinearnog problema optimizacije bez ograničenja. Odnosno, razmatraćemo sledeći problem

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna data funkcija za koju imamo da je dva puta neprekidno diferencijabilna. Najčešće korišćena uopštena iterativna šema za rešavanje problema bezuslovne minimizacije datog pomoću (3.1) je

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

gde je x_{k+1} nova iterativna tačka, x_k prethodna iterativna tačka, $t_k > 0$ *dužina koraka* (steplength) i d_k *smer pretrage* (search direction) [94, 138]. Osnovni problem kod ovakvih metoda jeste kako pronaći povoljan vektor opadajućeg pravca d_k i odgovarajuću dužinu koraka t_k što će i biti naš osnovni zadatak u ovoj glavi.

Pored predstavljanja nekoliko poznatih metoda kao i dva nova metoda koji su dati opštom šemom (3.2) u nastavku ove glave pokazaćemo kako je moguće koristiti ove optimizacione metode za rešavanje operatorskih jednačina. Kao posledicu rešavanja ovih jednačina videćemo kako je moguće efikasno izračunati obične i uopštene inverze proizvoljnih matrica, a samim tim i strukturnih matrica što je zapravo polje našeg interesovanja. U tom smislu biće data veza između oblasti nelinearne optimizacije i uopštenih inverza matrica.

3.1 Osnovni pojmovi i osobine nelinearne optimizacije

Najpre uvodimo sledeće oznake radi jednostavnijeg zapisa:

$$g(x) = \nabla f(x), \quad G(x) = \nabla^2 f(x), \quad g_k = \nabla f(x_k), \quad G_k = \nabla^2 f(x_k),$$

gde sa $\nabla f(x)$ označavamo gradijent funkcije f i sa $\nabla^2 f(x)$ označavamo Hessian za f .

Kao najznačajnija klasa metoda prvog reda za rešavanje optimizacionih problema bez ograničenja izdvaja se klasa *metoda opadajućih gradijenata* (gradient descent methods) ili jednostavnije *gradijentni metodi*. Ovi iterativni metodi u svakom koraku kreću od tekuće tačke x_k duž pravca negativnog gradijenta $d_k = -g_k$. Jedan od najvećih nedostataka ove klase metoda

je često pojavljivanje takozvanog cik-cak fenomena, koji uzrokuje veoma sporu konvergenciju ka optimalnoj tački, ili čak dovodi do divergencije [106].

Što se tiče metoda drugog reda, treba pre svega izdvojiti Newton-ov metod kod koga je smer pretrage $d_k = -G_k^{-1}g_k$ izveden na osnovu Taylor-ovog razvoja funkcije u red do drugog stepena. Jedna od pretpostavki je da je Hessian G_k pozitivno definitan. Ukoliko je pravac pretrage d_k iterativnog metoda (3.2) definisan kao $d_k = -B_k g_k$, gde je B_k matrica dimenzija $n \times n$ koja predstavlja aproksimaciju inverza Hessian-a onda takav metod nazivamo *quasi-Newtonovim metodom* [106]. Quasi-Newtonovi metodi važe za jedne od efektivnijih metoda za rešavanje optimizacionih problema bez ograničenja. Metod polazi od zadate početne tačke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i simetrične pozitivno definitne matrice B_0 . U svakoj iteraciji na odgovarajući način računa se simetrična pozitivno definitna matrica B_k koja aproksimira inverz Hessian-a G_k radi nalaženja smera pretrage d_k . Kada se izračuna matrica B_k , za nalaženje matrice B_{k+1} potrebne za narednu iteraciju koristimo quasi-Newtonovu osobinu ili sekantnu jednačinu

$$B_{k+1}y_k = s_k, \quad \text{gde je } s_k = x_{k+1} - x_k, \quad y_k = g_{k+1} - g_k. \quad (3.3)$$

Za vektor pravca d_k obično se zahteva da zadovoljava takozvan *uslov opadanja* (descent condition)

$$g_k^T d_k < 0, \quad (3.4)$$

koji garantuje da je d_k opadajući pravac funkcije $f(x)$ u tački x_k [7, 106]. Da bi se postigla globalna konvergencija metoda (3.2) ponekad se zahteva da vektor pravca d_k zadovoljava *dovoljan uslov opadanja* (sufficient descent condition)

$$g_k^T d_k \leq -c_1 \|g_k\|^2, \quad (3.5)$$

kao i sledeću nejednakost

$$\|d_k\| \leq c_2 \|g_k\|, \quad (3.6)$$

gde su c_1 i c_2 zadate pozitivne konstante [62].

Dalje, kao veoma važnu klasu izdvajamo klasu *metoda konjugovanih gradijenata* (conjugate gradient methods) kod kojih se vektor pravca koriguje prema sledećem opštem pravilu

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0; \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 1, \end{cases}$$

gde skalar β_k biramo zavisno od metoda. Tako, na primer, imamo sledeće poznate metode:

$$\begin{aligned} \beta_k^{FR} &= \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}}, & (\text{Fletcher-Reeves metod [50]}) \\ \beta_k^{PRP} &= \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T g_{k-1}}, & (\text{Polak-Ribière-Polyak metod [114, 115]}). \end{aligned}$$

Sa druge strane, za računanje dužine koraka literatura poznaje mnoge različite tehnike. Postoji klasa algoritama poznata kao *algoritmi linijskog pretraživanja* (line search algorithms) koji koriste opštu strategiju izbora parametra t_k na taj način da se vrednost ciljne funkcije smanjuje posle svake iteracije, tj. imamo da važi $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$. Poznate su dve osnovne strategije kod algoritama linijskog traženja: *tačno linijsko pretraživanje* (exact line search) i *netačno linijsko pretraživanje* (inexact line search). Tehnika tačnog linijskog traženja bazirana je na veoma poznatoj formuli za jednodomenzionalnu optimizaciju (videti [127, 138])

$$f(x_k + t_k d_k) = \min_{t > 0} f(x_k + t d_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Iz teorije je poznato da se u opštem slučaju optimalna dužina koraka, koja se dobija kao rešenje prethodne jednačine, ne može naći praktičnim izračunavanjima. Takođe, obično imamo da je za računanje skoro tačne dužine koraka potrebno utrošiti dosta vremena i novca. Tako se došlo do zaključka da je u praksi najbolje koristiti tehniku netačnog linijskog pretraživanja, kod koje pokušavamo da *dovoljno* smanjimo vrednost funkcije f duž pravca $x_k + td_k$, $t \geq 0$ u svakoj iteraciji. Neki od metoda netačnog linijskog traženja predloženi su i opisani u sledećim radovima [8, 50, 56, 93, 103, 116, 117, 127, 153].

Postoji dosta interesantnih načina za nalaženje optimalne dužine koraka t_k u iterativnom postupku koji koristi pravac negativnog gradijenta. Optimalnost tog izbora sastoji se u tome da rezultujući algoritam da što bolje rezultate u smislu konvergencije prema minimumu tražene funkcije. U nastavku navodimo one najpoznatije i najviše izučavane.

Kod klasičnog *metoda najstrmijeg pada* (steepest descent method) predloženog od strane Cauchy-a u radu [25] dužina koraka je dobijena na osnovu jednodimezionalne optimizacije (3.7). Pokazano je da je metod efikasan za veoma dobro uslovljene funkcije. U nekim specijalnim slučajevima (na primer za kvadratne funkcije) moguće je izračunati dužinu koraka pomoću formule (3.7) analitički, ali obično se računa na način da približno minimizira vrednost funkcije f duž pravca $\{x_k + td_k : t > 0\}$. S druge strane, uprkos optimalnoj osobini (3.7) metod najstrmijeg pada konvergira veoma sporo i nije primenjiv na loše uslovljene test funkcije, pa samim tim nije od velikog praktičnog značaja. Čak se i za kvadratne funkcije metod najstrmijeg pada ponaša veoma loše kako se kondicioni broj (conditioning number) pogoršava (povećava). Autori u svom radu [123] naglašavaju da loše ponašanje metoda najstrmijeg pada dolazi na osnovu "lošeg" izbora dužine koraka, a ne na osnovu izbora pravca pretrage. U ovoj doktorskoj disertaciji posebna pažnja biće posvećena upravo nalaženju odgovarajuće dužine koraka t_k krećući se duž pravca negativnog gradijenta $d_k = -g_k$, odnosno bavićemo se uglavnom gradijentnim metodama.

Pošto je tačna minimizacija u (3.7) veoma skupa i pošto smo zaključili da metod najstrmijeg pada nema praktični značaj, imamo da su algoritmi netačnog linijskog trženja poželjniji. Pre svih izdvajamo monotone metode linijskog pretraživanja kod kojih važi $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Mnogi algoritmi ove klase postoje u literaturi a mi navodimo samo neke od njih, kao što su pravila: Armijo, Goldstein, Wolfe, Powell, Fletcher i ostali (pogledati [8, 33, 56, 127, 153]). Među njima najpopularniji i najjednostavniji za razumevanje i implementaciju je backtracking algoritam, poznatiji kao Armijo linijsko pretraživanje [8].

Algoritam 3.1.1 Backtracking algoritam linijskog pretraživanja (Armijo pravilo)

Ulaz: Ciljna funkcija $f(x)$, vektor pravca d_k kao i realni brojevi $0 < \sigma < 0.5$ i $\beta \in (\sigma, 1)$.

- 1: Postaviti $t = 1$.
 - 2: Dokle god je $f(x_k + td_k) > f(x_k) + \sigma tg_k^T d_k$, računati $t := t\beta$.
 - 3: Vratiti $t_k = t$.
-

Jedan od najznačajnijih izbora za parametar t_k predložili su Barzilai and Borwein u svom radu [10]. Algoritam koji su oni predložili (dobro poznat kao BB algoritam) računa dužinu koraka duž pravca negativnog gradijenta na osnovu dvotačkaste aproksimacije pomoću sekantne jednačine iz kvazi-Njutnovog metoda (quasi-Newton method). Koristeći prostu aproksimaciju $B_k = t_k I$ za inverz Hessian-a funkcije $f(x)$ Barzilai i Borwein računaju dužinu koraka t_k tako što nalaze minimum

$$t_k = \arg \min_t \|t^{-1} s_{k-1} - y_{k-1}\|^2,$$

iz kog proizilazi

$$t_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}}. \quad (3.8)$$

Vektori s_k i y_k definisani su formulom (3.3). Rezultat koji su objavili Barzilai i Borwein izučavan je u mnogim radovima i mnoge modifikacije tog algoritma su predložene, na primer, pogledati [37, 38, 39, 40, 41, 42, 53, 121, 122, 146, 156]. Takođe, oni predlažu i simetričan izbor za nalaženje parametra dužine koraka t_k

$$t_k = \frac{s_{k-1}^T y_{k-1}}{y_{k-1}^T y_{k-1}}. \quad (3.9)$$

Poznato je da je ovaj dvotačkasti gradijenti metod daleko efiksniji i samim tim prihvatljiviji u odnosu na klasični metod najstrmijeg pada kako u teorijskim izučavanjima tako i u pogledu realnih izračunavanja. Šta više za BB metod je pokazana R -super linearna konvergencija za slučaj dvodimenzionalnih striktno konveksnih kvadratnih funkcija i stopa konvergencije raste kako se povećava kondicioni broj Hessian-a funkcije [10]. Za striktno konveksnu kvadratnu funkciju proizvoljne dimenzije autori su u svom radu dokazali R -linearnu konvergenciju [43]. Dvotačkasti gradijentni (BB) metod je zapravo nemonotoni metod linijskog pretraživanja [121, 122]. Koristeći strategiju metoda nemonotonog linijskog pretraživanja uvedenu u radu [62], koju ćemo opisati nešto kasnije, Raydan je dokazao globalnu konvergenciju BB metoda za ne kvadratne funkcije [122]. Numerički rezultati predstavljeni u [122] pokazuju da je rezultujući algoritam uporediv sa nekolicinom najpoznatijih algoritama za optimizaciju problema velikih dimenzija bez ograničenja koji pripadaju klasi konjugovanih gradijenata. Zbog jednostavnosti i numeričke efikasnosti BB metod je privukao veliku pažnju naučne javnosti i izučavan je u mnogim radovima (pogledati na primer [18, 43, 121, 122]).

Opšta iterativna šema za implementaciju metoda linijskog pretraživanja je data sledećim algoritmom (videti [138])

Algoritam 3.1.2 Opšta šema za metode linijskog pretraživanja.

Ulaz: Ciljna funkcija $f(x)$, početna tačka $x_0 \in R^n$ i veličina greške $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

- 1: Postaviti $k = 0$.
 - 2: Ako je $\|g_k\| \leq \varepsilon$ onda vratiti x_k , $f(x_k)$ i zaustaviti algoritam
 - 3: Naći vektor opadajućeg pravca d_k .
 - 4: Naći dužinu korka t_k tako da važi $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$.
 - 5: Izračunati $x_{k+1} := x_k + t_k d_k$.
 - 6: Postaviti $k := k + 1$ i ići na korak 2.
-

3.1.1 Tehnika nemonotonog linijskog pretraživanja

Da bi se izračunala dužinu koraka tradicionalni algoritmi linijskog pretraživanja zahtevaju da se u svakoj iteraciji smanjuje vrednost ciljne funkcije, odnosno trži se da bude uslov monotonosti

$$f(x_{k+1}) < f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

zadovoljen. Sa druge strane metodima nemonotonog linijskog pretraživanja se ne nemaće ovaj uslov i na taj način moguće je prevazići problem koji nastaje kada se niz iteracija kreće po dnu zakrivljenih uskih površi.

Originalna strategija nemonotonog linijskog pretraživanja je izložena u radu [62]. Za vrednost funkcije, autori zahtevaju da zadovoljava Armijo uslov u odnosu, ne samo na vrednost funkcije u prethodnoj tački, već na maksimalnu vrednost funkcije dostignutu u unapred zadatom broju prethodnih tačaka. Na taj način imamo da ova procedura linijskog pretraživanja predstavlja uopštenje Armijovog pravila (backtracking algoritma) [8]. Autori daju uopštenje Armijo-ovog linijskog pretraživanja na taj način što uvode celobrojnu pozitivnu konstantu M i nameću za dužinu koraka u svakoj iteraciji sledeći uslov

$$f(x_k + td_k) \leq \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}) + \sigma t g_k^T d_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.10)$$

gde je $m(0) = 0$, $0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, M - 1\}$, i σ je parametar preuzet iz Armijo pravila [8].

Upoređujući sa Newton-ovim metodom autori u [62] predlažu da je najbolje koristiti Armijo pravilo u prvih N koraka, a tek kasnije u implementaciji koristiti tehnike nemonotonog linijskog pretraživanja. Za različit izbor celobrojnih parametara M i N ispitivali su brzinu i stabilnost konvergencije i predstavili dobijene rezultate testirajući ih na nekolicini funkcija.

Takođe ovaj metod dozvoljava povećanje vrednosti funkcije u nekoj iteraciji, a pritom i dalje zadržava svojstvo konvergencije ka optimalnoj tački. Tehnika nemonotonog pretraživanja je primenjena na mnoge metode i mnogi predloženi algoritmi nemonotonog linijskog pretraživanja bazirani su upravo na ovom gore izloženom principu i njegovim modifikacijama (pogledati, recimo [139, 142]). U nastavku navodimo neke od primena i modifikacija.

Koristeći tehniku nemonotonog linijskog pretraživanja Raydan je u svom radu dokazao globalnu konvergenciju BB metoda za funkcije koje uopšte uzev ne moraju da budu kvadratne [122]. Rezultujući algoritam opšte je poznat kao GBB (global Barzilai Borwein) metod. Raydan je takođe pokazao da numeričke performanse GBB metoda u mnogome zavise od izbora parametra M , čak i za loše uslovljene funkcije. Da bi izbegli taj problem autori su u [42] razvili adaptivni nemonotoni algoritam linijskog pretraživanja tako što uvode još jednu konstantu L uz uslov $L < M$ i koriste ideju koju je predložio Ph.L.Toint u [142]. Predstavljeni numerički rezultati pokazuju izvesna poboljšanja u odnosu na klasično nemonotono linijsko pretraživanje. Autori u [44] bave se analizom globalne konvergencije nemonotonog linijskog pretraživanja duž različitih pravaca pretraživanja na skupu nekonveksnih funkcija. Dai i koautori u svom radu [43] pokazuju globalnu R -linearnu konvergenciju GBB metoda za strogo konveksnu kvadratnu funkciju proizvoljne dimenzije. Pored toga pokazana je i lokalna R -linearna konvergencija za proizvoljnu test funkciju. Takođe, zbog svog praktičnog i teorijskog značaja analiza globalne konvergencije GBB metoda privukla je veliku pažnju prethodnih godina i dalje je u žiži interesovanja (pogledati [18, 51]).

Na osnovu izloženih ideja o primeni metoda nemonotonog linijskog pretraživanja predstavljamo algoritam koji će poslužiti kao metod linijskog pretraživanja za pisanje globalno konvergentnih metoda: GBB metoda kao i metoda skalarne korekcije koji će biti objašnjen nešto kasnije u ovom poglavlju.

Algoritam 3.1.3 Metod nemonotonog linijskog pretraživanja.

Ulaz: Test funkcija $f(x)$, smer pretrage d_k , realni brojevi $0 < \sigma < 0.5$, $\beta \in (0, 1)$, $a \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}_0$.

1: Postaviti $t = a$.

2: Dokle god je $f(x_k + td_k) > \max_{0 \leq j \leq m} f(x_{k-j}) + \sigma t g_k^T d_k$, izračunaj $t := t\beta$.

3: Vratiti $t_k = t$.

Ukoliko je $m \equiv 0$, gore naveden metod nemonotonog linijskog pretraživanja redukuje se na Armijo metod linijskog pretraživanja. Parametar a u algoritmu, je početna probna vrednost dužine koraka (prior trial step-size) koju dobijamo zavisno od metoda, recimo kod BB metoda to je parametar dobijen pomoću (3.8) ili (3.9).

U sledećem poglavlju uočavamo klasu algoritama opadajućih gradijenata baziranih na tehnici množenja parametra t_k (koji je izračunat pomoću procedure linijskog traženja) odgovarajućim parametrom ubrzanja. Za tu klasu metoda koristićemo izraz *ubrzani metodi opadajućih gradijenata sa linijskim pretraživanjem* (accelerated gradient descent algorithms with the line search).

3.2 Ubrzani algoritam opadajućih gradijenata

Andrei u svom radu [4] uvodi ubrzanu iterativnu šemu opadajućih gradijenata posmatrajući iteracije

$$x_{k+1} = x_k - \theta_k t_k g_k. \quad (3.11)$$

Iterativni proces (3.11) pored dužine koraka t_k koristi i parametar ubrzanja $\theta_k > 0$ koji zapravo poboljšava karakteristike ovog metoda opadajućih gradijenata.

S druge strane poznato je da je Newton-ov metod sa linijskim pretraživanjem, koji se može predstaviti pomoću iterativne šeme

$$x_{k+1} = x_k - t_k G_k^{-1} g_k,$$

veoma efikasan zato jer nosi korisne informacije koristići Hessian funkcije. Poznato je da je izračunavanje Hessian-a matrice a pre svega njegovog inverza u svakom iterativnom koraku, za mnoge praktične probleme, veoma skupo ili ga nije moguće izraziti analitički. Zbog ovih poteškoća uvedena je klasa metoda koji koriste samo vrednosti funkcije i njihovih gradijenata a koji su u tesnoj vezi sa Newton-ovim metodom. Ovi takozvani Quasi-Newtonovi metodi ne računaju Hessian već generišu niz aproksimacija inverza Hessian-a i na taj navčin zadržavaju osobine svojstvene Newton-ovim metodama kao što su brza konvergencija a takođe nisu skupi metodi i njihovo izvršavanje ne iziskuje mnogo vremena. Opšte je poznato da Quasi-Newtonovi metodi zadovoljavaju Quasi-Newtonovu jednačinu

$$S_{k+1} y_k = s_k,$$

gde je

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \quad y_k = g_{k+1} - g_k,$$

i S_k je simtrčna $n \times n$ matrica, koja zapravo predstavlja aproksimaciju inverza Hessian-a.

S tim u vezi posmatrajmo sledeću opštu iterativnu šemu

$$x_{k+1} = x_k - t_k S_k g_k, \quad (3.12)$$

gde imamo da je S_k pozitivno definitna matrica za koju nije obavezujuće da zadovoljava Quasi-Newtonovu jednačinu. Ovakve metode nazivamo *modifikovanim Newton-ovim metodama* (modified Newton methods) [138].

U nastavku ćemo posmatrati osobine opšte šeme (3.11) tako što ćemo birati parametar ubrzanja koristeći osnovne osobine modifikovane Newton-ove iterativne metode (3.12). Naime, ako izaberemo sledeću dijagonalnu aproksimaciju inverza Hessiana

$$S_k = \gamma_k^{-1} I, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

imamo da se modifikovana Newton-ova šema redukuje na iterativni metod

$$x_{k+1} = x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k. \quad (3.14)$$

Ova šema zapravo predstavlja tehniku za izračunavanje dužine koraka kod metoda opadajućih gradijenata. Na taj način dolazi do kombinovanja ideje o ubrzanju metoda opadajućih gradijenata koju je izložio Andrei u [4] i modifikovane Newton-ove iterativne metode date pomoću (3.14).

Direktnim upoređivanjem iterativnih metoda (3.14) i (3.11) dolazimo do zaključka da metod (3.14) zahteva izračunavanje realnog broja γ_k u odnosu na pronalaženje parametra ubrzanja θ_k kod metoda (3.11). Dužina koraka t_k je zajednički parametar koji se pojavljuje kod oba iterativna procesa.

Posmatrajući ove dve iterativne šeme imamo da (3.11) ima za cilj da ubrza osnovni gradientni metod dok metod (3.14) predstavlja neku vrstu uprošćenja opšte forme modifikovanog Newton-ovog metoda (3.12). Pošto za glavni cilj kod metoda (3.14) i (3.11) imamo ubrzanje metoda opadajućih gradijenata i pošto se kod oba iterativna procesa parametar t_k izračunava pomoću nekog od algoritma linijskog pretraživanja (recimo backtracking algoritma) onda koristimo sledeći naziv *ubrzanje algoritmi opadajućih gradijenata sa linijskim pretraživanjem* (accelerated gradient descent methods with line search) za sve ovakve metode.

U narednom odeljku biće predstavljen u kratkim crtama način izračunavanja parametra ubrzanja θ_k iz rada [4] kao i detaljan opis tehnike za nalaženje istog parametra bazirane na iterativnom procesu (3.14).

In this paper we introduce a technique of taking the length of the acceleration parameter γ_k in the descent method (3.14) for the unconstrained optimization. Algorithm is developed using the approximation of the Hessian by means of the diagonal matrix whose entries are appropriately computed.

3.2.1 Tehnike izračunavanja parametra ubrzanja

Na osnovu Taylor-ovog razvoja ciljne funkcije f u sledećim tačkama

$$f(x_k - t_k g_k) = f(x_k) - t_k g_k^T g_k + \frac{1}{2} t_k^2 g_k^T \nabla^2 f(x_k) g_k + \mathcal{O}(\|t_k g_k\|^2),$$

i

$$f(x_k - \theta t_k g_k) = f(x_k) - \theta t_k g_k^T g_k + \frac{1}{2} \theta^2 t_k^2 g_k^T \nabla^2 f(x_k) g_k + \mathcal{O}(\|\theta t_k g_k\|^2),$$

Andrei u svom radu [4] posmatra sledeću realnu funkciju koja zavisi od parametra ubrzanja θ

$$\Psi(\theta) = f(x_k - \theta t_k g_k) - f(x_k - t_k g_k).$$

Dalje, posle uvođenja sledećih oznaka $z = x_k - t_k g_k$, $g_z = \nabla f(z)$, $y_k = g_z - g_k$, $a_k = t_k g_k^T g_k$ i $b_k = -t_k y_k^T g_k$ dobija sledeću ocenu za θ , $\theta_k = a_k/b_k$, koja zapravo predstavlja tačku u kojoj funkcija $\Psi(\theta)$ dostiže minimum. Takođe imamo da važi $\Psi(\theta_k) < 0$ i na taj način autor ovog metoda obezbeđuje da u svakoj narednoj iteraciji dobije tačku koja je bliža minimumu funkcije u odnosu na tačku dobijenu metodom opadajućih gradijenata. Za očekivati je bilo da ta metoda da bolje rezultate (u smislu broja iteracija i CPU vremena) u odnosu na metodu opadajućih gradijenata što je i potvrđeno testiranjima na funkcijama za nelinearnu optimizaciju i prikazano u radu [4].

U nastavku izvodimo algoritam zasnovan na opštoj iterativnoj šemi (3.14) gde realan broj $\gamma_k = \gamma(x_k, x_{k-1})$ opisuje na odgovarajući način izračunatu aproksimaciju $\gamma_k I$ Hessian-a G_k i gde je t_k realan parametar dobijen pomoću backtracking algoritma linijskog pretraživanja.

Da bismo na pravi način odredili aproksimaciju Hessian-a a samim tim i izabrali parametar $\gamma_k = \gamma(x_k, x_{k-1})$ pođimo od Taylor-ovog razvoja funkcije f u tački x_{k+1} koju računamo na osnovu (3.14). Dakle, imamo sledeće

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) - t_k g_k^T \gamma_k^{-1} g_k + \frac{1}{2} t_k^2 (\gamma_k^{-1} g_k)^T \nabla^2 f(\xi) \gamma_k^{-1} g_k, \quad (3.15)$$

gde je $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$ dat kao

$$\xi = x_k + \alpha(x_{k+1} - x_k) = x_k - \alpha t_k \gamma_k^{-1} g_k, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.16)$$

Imajući u vidu da je rastojanje između tačaka x_k i x_{k+1} dovoljno malo (posmatrajući njihov lokalni karakter) možemo napraviti sledeći izbor $\alpha = 1$ i na taj način dobiti $\xi = x_{k+1}$. Odatle imamo

$$\nabla^2 f(\xi) \approx \gamma_{k+1} I. \quad (3.17)$$

Na osnovu (3.15) i (3.17) nije teško izvesti sledeće

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) - t_k \gamma_k^{-1} \|g_k\|^2 + \frac{1}{2} t_k^2 \gamma_{k+1} \gamma_k^{-2} \|g_k\|^2. \quad (3.18)$$

Sada kao direktnu posledicu jednačine (3.18) za izbor parametra ubrzanja dobijamo

$$\gamma_{k+1} = 2\gamma_k \frac{\gamma_k [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + t_k \|g_k\|^2}{t_k^2 \|g_k\|^2}. \quad (3.19)$$

Poznato je da ukoliko je tačka x_k lokalni minimum glatke funkcije onda gradijent g_k funkcije iščezava i Hessian je pozitivno semidefinitan (potreban uslov drugog reda); i suprotno, ukoliko gradijent nestaje u nekoj tački i Hessian je pozitivno definitan, onda funkcija dostiže lokalni minimum u toj tački (dovoljan uslov drugog reda) [138]. Dakle, važno je očuvati uslov zati $\gamma_{k+1} > 0$. U slučaju kada dobijemo $\gamma_{k+1} < 0$ možemo, recimo, napraviti izbor $\gamma_{k+1} = 1$. Motivaciju za ovakav izbor nalazimo u tome da kada se desi slučaj $\gamma_{k+1} < 0$ imamo da sledeću tačku računamo pomoću uobičajene metode opadajućih gradijenata $\gamma_{k+1} = 1$.

Kada smo odredili parametar γ_{k+1} potrebno je izračunati i parametar t_{k+1} kako bismo mogli da pronađemo sledeću tačku $x_{k+2} = x_{k+1} - t_{k+1} \gamma_{k+1}^{-1} g_{k+1}$. Za tu svrhu koristimo backtracking algoritam linijskog pretraživanja (Armijo rule). Da bismo odredili gornju granicu za backtracking odnosno njegovu početnu tačku, posmatrajmo funkciju

$$\Phi_{k+1}(t) = f(x_{k+1}) - t g_{k+1}^T \gamma_{k+1}^{-1} g_{k+1} + \frac{1}{2} t^2 (\gamma_{k+1}^{-1} g_{k+1})^T \nabla^2 f(\xi) \gamma_{k+1}^{-1} g_{k+1},$$

gde važi $\xi \in [x_{k+1}, x_{k+2}]$, $t \geq 0$ i $\gamma_{k+1} > 0$. Ukoliko se primeni aproksimacija $\xi \approx x_{k+1}$ dobijamo

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(t) &= f(x_{k+1}) - t\gamma_{k+1}^{-1}\|g_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}t^2\gamma_{k+1}\gamma_{k+1}^{-2}\|g_{k+1}\|^2 \\ &= f(x_{k+1}) - t\gamma_{k+1}^{-1}\|g_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}t^2\gamma_{k+1}^{-1}\|g_{k+1}\|^2.\end{aligned}$$

Jasno je da je u slučaju $\gamma_{k+1} > 0$ funkcija Φ konveksna, takođe očigledno je da važi $\Phi_{k+1}(0) = f(x_{k+1})$ kao i $\Phi'_{k+1}(t) = (t-1)\gamma_{k+1}^{-1}\|g_{k+1}\|^2$. Funkcija Φ je opadajuća kada je $\Phi'_{k+1}(t) < 0$ što je zadovoljeno za $t \in (0, 1)$. Takođe imamo da važi

$$\Phi'_{k+1}(t) = 0 \Leftrightarrow \bar{t}_{k+1} = 1, \quad (3.20)$$

odakle dobijamo da je funkcije Φ_{k+1} dostiže minimum u tački $t = 1$. Šta više, na osnovu (3.18) imamo da je ciljna funkcija opadajuća ukoliko je ispunjen uslov $\gamma_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Parametar t_{k+1} predstavlja dužinu koraka i njega, kao što smo ranije napomenuli, izračunavamo koristeći backtracking algoritam linijskog pretraživanja. Na osnovu (3.20) zaključujemo da je za početnu vrednost algoritma 3.1.1 najbolji izbor $t = 1$.

Opisali smo postupak računanja dužine koraka tako da u nastavku navodimo algoritam koji zovemo SM (Stanimirović-Miladinović) metod za nalaženje minimuma proizvoljne nelinearne funkcije što predstavlja i glavni rezultat ovog poglavlja.

Algoritam 3.2.1 Metod opadajućih gradijenata definisan pomoću (3.14) i (3.19).

Ulaz: Ciljna funkcija $f(x)$ i početna tačka $x_0 \in \text{dom}(f)$.

- 1: Postaviti $k = 0$, izračunati $f(x_0)$, $g_0 = \nabla f(x_0)$ i uzeti $\gamma_0 = 1$.
 - 2: Ako je test kriterijum ispunjen onda zaustaviti iteracije; u suprotnom, preći na naredni korak.
 - 3: (Backtracking) Naći dužinu koraka $t_k \in (0, 1]$ koristeći Algoritam 3.1.1 za $d_k = -\gamma_k^{-1}g_k$.
 - 4: Izračunati $x_{k+1} = x_k - t_k\gamma_k^{-1}g_k$, $f(x_{k+1})$ i $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$.
 - 5: Izračunati skalarnu aproksimaciju $\gamma_{k+1}I$ Hessian-a funkcije f u tački x_{k+1} na osnovu (3.19).
 - 6: Ukoliko je $\gamma_{k+1} < 0$, onda postaviti $\gamma_{k+1} = 1$.
 - 7: Postaviti $k := k + 1$, i preći na korak 2.
 - 8: Vratiti x_{k+1} i $f(x_{k+1})$.
-

Da bismo u nastavku mogli da napravimo poređenje između AGD (accelerated gradient descent) algoritma izloženog u [4] i SM metoda podsetimo na suštinsku razliku između ovih metoda koja se ogleda u izračunavanju parametra ubrzanja θ_k odnosno γ_k . Dakle, na osnovu početne priče iz ove sekcije imamo da se algoritam AGD razlikuje od prethodno navedenog algoritma u tom smislu što korak 4 treba zameniti sledećim koracima

- 4: Izračunati: $z = x_k - t_k g_k$, $g_z = \nabla f(z)$ i $y_k = g_z - g_k$.
- 5: Izračunati: $a_k = t_k g_k^T g_k$, $b_k = -t_k y_k^T g_k$ i $\theta_k = a_k / b_k$.

Predstavićemo glavne razlike između ova dva metoda: AGD algoritam je baziran na izračunavanju parametra ubrzanja θ_k na osnovu navedenih koraka 4 i 5, dok SM metod koristi daleko jednostavnije računanje parametra γ_k na osnovu formule (3.19). Jasno je da računanje parametra γ_k zahteva manje operacija od izračunavanja parametra ubrzanja θ_k i samim tim je i brže. Takođe, kao veoma bitnu razliku ova dva metoda navodimo i to da AGD metod računa dužinu koraka t_k pomoću backtracking algoritma sa ulaznim parametrom $d_k = -g_k$, pa tek kasnije nalazi parametar ubrzanja θ_k na osnovu gore navedenih koraka 4 i 5; sa druge strane, kod SM metoda prvo računamo parametar ubrzanja γ_k i kasnije koristeći njegovu vrednost pozivamo backtracking algoritam sa ulazom $d_k = -\gamma_k^{-1}g_k$ da bismo izračunali dužinu koraka t_k .

3.2.2 Analiza konvergencije SM metoda

Najpre ćemo posmatrati skup uniformo konveksnih funkcija a kasnije i podskup striktno konveksnih kvadratnih funkcija i na njima ispitati osobine konvergencije ovog gradijentnog metoda.

U narednoj propoziciji i lemi navodimo neke osnovne stavove koje ćemo nadalje koristiti da bismo analizirali i dokazali konvergenciju metoda opisanog pomoću Algoritma 3.2.1 za uniformno konveksne funkcije. Za dokaz ovih rezultata pogledati [107, 124].

Propozicija 3.2.1. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna i uniformno konveksna na \mathbb{R}^n onda je:*

- 1) *funkcija f dole ograničena na skupu $L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$, gde je tačka $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dostupna;*
- 2) *gradijent g ove funkcije Lipschitz neprekidan na otvorenom konveksnom skupu B koji sadrži L_0 , to jest, postoji $L > 0$ tako da važi*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B.$$

Lema 3.2.1. *Ukoliko važe pretpostavke iz Propozicije 3.2.1 onda postoje realni brojevi m, M koji zadovoljavaju*

$$0 < m \leq 1 \leq M, \quad (3.21)$$

$f(x)$ ima jedinstveni minimum x^ i imamo da važi*

$$m\|y\|^2 \leq y^T \nabla^2 f(x)y \leq M\|y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n; \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{2}m\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}M\|x - x^*\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad (3.23)$$

$$m\|x - y\|^2 \leq (g(x) - g(y))^T(x - y) \leq M\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.24)$$

Dokaz. Sledi direktno na osnovu rezultata iz [107, 124]. \square

Sledeća lema nam daje informaciju za koliko će se najmanje smanjiti vrednost uniformno konveksne funkcije u svakoj od iteracija.

Lema 3.2.2. *Za dva puta neprekidno diferencijabilnu i uniformno konveksnu funkciju f definisanu na \mathbb{R}^n i za niz $\{x_k\}$ generisan iterativnim procesom datim Algoritmom 3.2.1 imamo da važi*

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \mu\|g_k\|^2, \quad (3.25)$$

gde je

$$\mu = \min \left\{ \frac{\sigma}{M}, \frac{\sigma(1-\sigma)}{L}\beta \right\}. \quad (3.26)$$

Dokaz. Uočimo najpre da je backtracking algoritam 3.1.1 linijskog traženja u tesnoj vezi sa backtracking procedurom opisanom u [4] za slučaj $s_k = 1$. Stoga imamo da važi sledeća nejednakost

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq -\sigma t_k g_k^T d_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

U nastavku dokaza razmatramo sledeća dva slučaja $t_k < 1$ i $t_k = 1$.

Za slučaj $t_k < 1$, slično kao u [127] imamo da važi

$$t_k > -\frac{\beta(1-\sigma)}{L} \frac{g_k^T d_k}{\|d_k\|^2}.$$

Ukoliko primenimo $d_k = -\gamma_k^{-1} g_k$ dobijamo

$$t_k > \frac{\beta(1-\sigma)\gamma_k}{L}. \quad (3.28)$$

Posle zamene (3.28) u (3.27) konačno dobijamo

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k+1}) &\geq -\sigma t_k g_k^T d_k \\ &> \frac{-\sigma(1-\sigma)\beta\gamma_k}{L} \cdot \frac{-g_k^T g_k}{\gamma_k} \\ &> \frac{\sigma(1-\sigma)\beta}{L} \|g_k\|^2. \end{aligned}$$

S druge strane za slučaj $t_k = 1$, nakon korišćenja činjenice da je $\gamma_k < M$ (sledi iz (3.22) (3.21), imajući u vidu način na koji računamo γ_k) imamo da važi

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq -\sigma g_k^T d_k \geq \frac{\sigma}{M} \|g_k\|^2.$$

Konačno iz poslednje dve nejednakosti dobijamo

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \min \left\{ \frac{\sigma}{M}, \frac{\sigma(1-\sigma)}{L} \beta \right\} \|g_k\|^2 \quad (3.29)$$

čime je dokaz završen. \square

U sledećoj teoremi izložen je dokaz linearne konvergencije SM metoda za uniformno konveksne funkcije.

Teorema 3.2.1. *Neka je ciljna funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna i uniformno konveksna na skupu \mathbb{R}^n , i neka je niz $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 3.2.1 onda*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0, \quad (3.30)$$

i niz $\{x_k\}$ konvergira ka tački lokalnog minimuma x^ najmanje linearno.*

Dokaz. Pošto je ciljna funkcija f dole ograničena i pošto je niz $f(x_k)$ opadajući imamo da važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) - f(x_{k+1})) = 0,$$

što zajedno sa (3.25) i (3.26) povlači

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

Ukoliko u (3.24) uvedemo zamenu $x^* = y$ i primenimo teoremu o srednjoj vrednosti kao i Cauchy-Schwartzovu nejednakost, dobijamo (videti na primer [107, 124])

$$m\|x - x^*\| \leq \|g(x)\| \leq M\|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.31)$$

Dalje, primenom nejednakosti (3.31) i (3.23) dobijamo sledeće nejednakosti

$$\mu \|g_k\|^2 \geq \mu m^2 \|x_k - x^*\|^2 \geq 2\mu \frac{m^2}{M} (f(x_k) - f(x^*)).$$

Odavde zaključujemo da $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0$ što dokazuje da niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^* .

Da bismo dokazali linearnu konvergenciju potrebno je dokazati da važi

$$\rho = \sqrt{2\mu \frac{m^2}{M}} < 1,$$

gde je μ dato pomoću (3.26).

Za slučaj $\mu = \sigma/M$ imamo da važi

$$\rho^2 = 2\mu \frac{m^2}{M} = 2\frac{\sigma m^2}{M^2} \leq 2\sigma < 1.$$

U suprotnom, kada je $\mu = \sigma(1 - \sigma)\beta/L$ dobijamo

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 2\mu \frac{m^2}{M} = 2\beta \frac{\sigma(1 - \sigma)}{L} \frac{m^2}{M} \\ &< \frac{m^2}{ML} < 1, \end{aligned}$$

zato što na osnovu (3.24) važi da je $m \leq L$.

Na kraju nakon primene Theorem 4.1 iz [127] dobijamo

$$\|x_k - x^*\| \leq \sqrt{\frac{2(f(x_0) - f(x^*))}{m}} \sqrt{1 - \rho^2}^k$$

čime je završen dokaz o linearnoj konvergenciji niza $\{x_k\}$. \square

Posmatrajmo u nastavku striktno konveksne kvadratne funkcije date sledećom reprezentacijom

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \quad (3.32)$$

gde je A realna $n \times n$ simetrična pozitivno definitna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$. Sa $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ označićemo sopstvene vrednosti matrice A .

Poznato je da za neke gradijentne metode nije lako pokazati konvergenciju za proizvoljnu funkciju, pa je čest slučaj nametanja izvesnih ograničenja. Kod BB metoda za koji je pokazana kvadratna konvergencija posmatra se slučaj konveksnih kvadratnih funkcija [10, 43]. Kasnije Molina i Raydan u [101] pokazuju Q -linearnu konvergenciju BB metoda namećući dodatni uslov $\lambda_n < 2\lambda_1$. U nastavku i dalje ispitujemo konvergenciju SM metoda dodajući slična ograničenja kao u [101].

Lema 3.2.3. *Za striktno konveksnu kvadratnu funkciju f datu izrazom (3.32) gde je matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna i za metod opadajućih gradijenata (3.14) gde su parametri γ_k i t_k izračunati na osnovu (3.19) i algoritma 3.1.1, imamo da važi*

$$\lambda_1 \leq \frac{\gamma_{k+1}}{t_{k+1}} \leq \frac{2\lambda_n}{\sigma}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.33)$$

gde su λ_1 i λ_n najmanja i najveća sopstvena vrednost matrice A .

Dokaz. Posmatrajmo najpre jednačinu

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \frac{1}{2}x_{k+1}^T A x_{k+1} - b^T x_{k+1} - \frac{1}{2}x_k^T A x_k + b^T x_k.$$

Posle zamene $x_{k+1} = x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k$ dobijamo

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &= \frac{1}{2}(x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k)^T A (x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k) - b^T (x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k) - \frac{1}{2}x_k^T A x_k + b^T x_k \\ &= \frac{1}{2}x_k^T A x_k - \frac{1}{2}t_k \gamma_k^{-1} g_k^T A x_k - \frac{1}{2}t_k \gamma_k^{-1} x_k^T A g_k + \frac{1}{2}t_k^2 \gamma_k^{-2} g_k^T A g_k \\ &\quad - b^T x_k + t_k \gamma_k^{-1} b^T g_k - \frac{1}{2}x_k^T A x_k + b^T x_k. \end{aligned}$$

Nakon korišćenja identiteta $g_k = Ax_k - b$, direktno proizilazi sledeće

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &= t_k \gamma_k^{-1} (b^T g_k - x_k^T A g_k) + \frac{1}{2}t_k^2 \gamma_k^{-2} g_k^T A g_k \\ &= -t_k \gamma_k^{-1} g_k^T g_k + \frac{1}{2}t_k^2 \gamma_k^{-2} g_k^T A g_k. \end{aligned}$$

Ukoliko zadnju jednakost zamenimo u (3.19) dobijamo

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= 2\gamma_k \frac{-t_k \|g_k\|^2 + \frac{1}{2}t_k^2 \gamma_k^{-1} g_k^T A g_k + t_k \|g_k\|^2}{t_k^2 \|g_k\|^2} \\ &= \frac{g_k^T A g_k}{g_k^T g_k}. \end{aligned}$$

Dakle, imamo da γ_{k+1} predstavlja Rayleigh-ov količnik (Rayleigh quotient) realne simetrične matrice A u odnosu na vektor g_k , što znači da važi

$$\lambda_1 \leq \gamma_{k+1} \leq \lambda_n, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.34)$$

Odavde direktno sledi leva nejednakost iz (3.33) zato što je $0 < t_{k+1} \leq 1$. Da bismo dokazali desnu nejednakost iz (3.33) posmatrajmo sledeću nejednakost

$$\frac{\gamma_{k+1}}{t_{k+1}} < \frac{L}{\beta(1-\sigma)}, \quad (3.35)$$

koja jasno proizilazi iz (3.28). Uzimajući u obzir da je $g(x) = A(x) - b$, i činjenicu da je realna matrica A simetrična, imamo da važi

$$\|g(x) - g(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\| = \lambda_n \|x - y\|. \quad (3.36)$$

Jasno je da za Lipschitz-ovu konstant L iz (3.35) možemo uzeti najveću sopstvenu vrednost λ_n matrice A . Uzimajući ovu činjenicu u obzir, zajedno sa načinom izbora parametara $0 < \sigma < 0.5$ i $\beta \in (\sigma, 1)$ iz backtracking algoritma, imamo da važi

$$\frac{\gamma_{k+1}}{t_{k+1}} < \frac{L}{\beta(1-\sigma)} = \frac{\lambda_n}{\beta(1-\sigma)} < \frac{2\lambda_n}{\sigma},$$

što kompletira dokaz ove leme. \square

Neka je $\{x_k\}$ niz generisan algoritmom 3.2.1. Predpostavimo da su $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortonormalni sopstveni vektori matrice A . Tada za proizvoljan vektor x_k , koristeći identitet $g_k = Ax_k - b$, imamo da postoje realne konstante $d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k$ tako da važi

$$g_k = \sum_{i=1}^n d_i^k v_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

Naime koristeći (3.14) kao i činjenicu da je $g_k = Ax_k - b$, može se veoma jednostavno pokazati sledeće

$$g_{k+1} = A(x_k - t_k \gamma_k^{-1} g_k) - b = (I - t_k \gamma_k^{-1} A)g_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.38)$$

Dakle, koristeći običnu linearnu reprezentaciju za g_{k+1} koja je data izrazom (3.37), dobijamo

$$g_{k+1} = \sum_{i=1}^n d_i^{k+1} v_i = \sum_{i=1}^n (1 - t_k \gamma_k^{-1} \lambda_i) d_i^k v_i, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.39)$$

Teorema 3.2.2. *Neka je f striktno konveksna kvadratna funkcija data izrazom (3.32) gde je matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna i neka je pomoću (3.14) definisan metod opadajućih gradijenata. Pod pretpostavkom da je za sopstvene vrednosti matrice A zadovoljeno $\lambda_n < 2\lambda_1$, imamo da važi*

$$(d_i^{k+1})^2 \leq \delta^2 (d_i^k)^2, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.40)$$

gde je

$$\delta = \max \left\{ 1 - \frac{\sigma \lambda_1}{2\lambda_n}, \frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1 \right\}.$$

Takođe, imamo da važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (3.41)$$

Dokaz. Da bismo pokazali (3.40) dovoljno je dokazati $|1 - \lambda_i / \gamma_k t_k^{-1}| \leq \delta$. U nastavku posmatramo dva različita slučaja. Za slučaj $\lambda_i \leq \gamma_k / t_k$ kao direktnu posledicu iz (3.33) dobijamo

$$1 > \frac{\lambda_i}{\gamma_k t_k^{-1}} \geq \frac{\sigma \lambda_1}{2\lambda_n} \implies 1 - \frac{\lambda_i}{\gamma_k t_k^{-1}} \leq 1 - \frac{\sigma \lambda_1}{2\lambda_n} \leq \delta.$$

U slučaju kada važi $\gamma_k / t_k < \lambda_i$, imamo

$$1 < \frac{\lambda_i}{\gamma_k t_k^{-1}} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \implies \left| 1 - \frac{\lambda_i}{\gamma_k t_k^{-1}} \right| \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1 \leq \delta.$$

Na kraju da bismo dokazali $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$, koristimo ortonormalnost sopstvenih vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i identitet (3.37), i tako dobijamo

$$\|g_k\|^2 = \sum_{i=1}^n (d_i^k)^2.$$

Pošto smo pokazali (3.40) i imamo da važi $0 < \delta < 1$ dobijamo $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$, što kompletira dokaz ove teoreme. \square

3.2.3 Numerički rezultati

U ovom odeljku predstavljamo numeričke rezultate dobijene testiranjem SM metoda i upoređujemo ih sa ranije pomenutim AGD metodom kao i metodom opadajućig gradijenata (gradient descent ili skraćeno GD metod). Kod svih ovih metoda za nalaženje dužine koraka t_k koristili smo metod linijskog pretraživanja (backtracking metod) dat algoritmom 3.1.1. Kao test funkcije za testiranje optimizacionih metoda velikih dimenzija izabrali smo 30 funkcija iz [5] koje su date u uopštenoj ili razvijenoj formi. Za svaki od test problema posmatrali smo sledeće dimenzije 100, 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 7000, 8000, 10000 and 15000 i na taj način vršili po 10 različitih za svaku test funkciju. Kriterijumi za izlazak iz programa za algoritam 3.2.1 (SM metod) kao i za druga dva algoritma (AGD i GD metod) su:

$$\|g_k\| \leq 10^{-6} \quad \text{i} \quad \frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{1 + |f(x_k)|} \leq 10^{-16}.$$

Ulazni parametri za backtracking algoritam kod sva tri metoda su $\sigma = 0.0001$ i $\beta = 0.8$, što znači da time prihvatamo malo umanjeње vrednosti ciljne funkcije podrazumevajući linearnu aproksimaciju u zadatoj tački.

Za vreme izvršavanje ovih algoritama posmatrali smo i kasnije prikazali tri različita indikatora: broj iteracija, vreme izvršavanja algoritama (CPU vreme) kao i ukupan broj izračunavanja vrednosti funkcija u različitim tačkama. Kod je pisan u programskom jeziku C++ i kasnije je izvršavan na Intel Celeron 2.0 GHz procesoru.

Rezultati u tabeli koja sledi predstavljaju ukupan broj iterativnih koraka, ukupno CPU vreme (dato u sekundama) i ukupan broj izračunavanja vrednosti funkcija, koji su dobijeni na osnovu gore spomenutih 10 različitih numeričkih eksperimenata izvedenih za svaku test funkciju.

Tabela 3.2.1. Zbirni numerički rezultati za SM, AGD i GD metod testirani na 30 test funkcija

Test funkcija	Br. iteracija			CPU vreme			Br. izrač. vrednosti f-je		
	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD
Extended Rosenbrock	1735	86574	205737	15.1	3161.5	5942.0	14183	2323901	6003899
Extended Penalty	547	276	1196	5.1	10.0	58.6	2872	7643	44104
Perturbed quadratic	79429	351987	384579	681.1	17132.7	29539.9	445587	13882174	16610440
Raydan-1	15117	21718	54183	50.2	190.1	895.0	82001	432311	1471691
Raydan-2	90	40	60	0.2	0.2	0.2	190	90	130
Diagonal 1	7557	38454	35025	29.2	881.3	866.5	40502	1319921	1327459
Diagonal 3	8664	107944	55385	56.3	4485.0	2679.3	47165	3855094	2083028
Hager	729	2410	3055	3.2	31.4	39.4	3474	36465	54374
Generalized Tridiagonal - 1	278	570	662	1.6	10.9	15.2	952	7835	10948
Extended Tridiagonal - 1	4320	3322	1250746	40.4	18.7	6910.9	38446	13318	6372398
Extended Three Expon	141	398	1874	0.6	2.4	12.0	700	3324	19117
Diagonal 4	80	100	8892	0.4	0.8	117.6	530	1110	173914
Diagonal 5	60	30	40	0.3	0.2	0.2	130	70	90
Extended Himmelblau	164	335	1355	1.0	7.9	32.9	558	5835	24705
Quadr. Diag. Perturbed	31157	2005445	891082	238.5	63203.8	31549.2	316264	72179199	35601182
Quadratic QF1	43601	261485	211981	287.3	47169.1	33466.7	245060	9213885	7997891
Extended Quad. Penalty QP1	235	191	567	5.9	4.4	18.2	2398	2305	10748
Extended Quad. Penalty QP2	2232	247742	134484	19.7	12493.2	3281.2	16179	6172728	3878140
Quadratic QF2	62988	99547	309459	796.9	7164.1	31029.3	347920	3976538	13972221
Extended EP1	63	40	501	0.8	1.0	15.1	584	816	13776

Test funkcija	Br. iteracija			CPU vreme			Br. izrač. vrednosti f-je		
	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD
Extended Tridiagonal - 2	438	1433	1153	2.3	5.2	5.7	2429	7058	9504
Arwhead	256	684	43224	7.9	16.0	5646.4	4325	17997	1920203
Almost Perturbed Quadratic	43229	253483	200957	291.4	49128.1	36337.1	244132	9689916	8201237
Engvall	319	701	573	6.0	13.1	15.6	2601	6300	8724
Quartc	244	144	478799	0.6	0.5	1306.1	538	338	957648
Diagonal 6	90	40	60	0.2	0.1	0.1	216	90	130
Generalized quartic	157	158	1377	1.0	1.7	42.1	423	715	17683
Diagonal 7	90	60	544	0.3	0.4	3.6	223	284	3313
Diagonal 8	98	50	584	0.4	0.4	4.7	303	256	3840
Diagonal 9	12556	312344	211607	28.0	4814.4	1716.6	77830	12519797	9152384

Iz prethodne tabele nije teško uočiti da SM metod pokazuje bolje performanse u odnosu na preostala dva metoda. Za 20 test funkcija SM metod pokazuje bolje rezultate posmatrajući broj iteracija potrebnih za dostizanje zahtevane preciznosti, dok AGD daje najbolje rezultate za preostalih 10 funkcija. Sa druge strane, posmatrajući CPU vreme i broj izračunavanja vrednosti funkcija, imamo da je SM metod najbolji za tačno 23 test problema.

Pored toga izabrali smo dodatnih 5 test funkcija preuzetih iz [5] i testirali gore spomenuta tri metoda izvođeci numeričke eksperimente sledećih dimenzija 100, 200, ..., 1000. Kod ovih test funkcija vidimo da su odabrane dimenzije značajno manje u odnosu na prethodna testiranja. Razlog za takav odabir leži u činjenici da je za ove funkcije potreban daleko veći broj iteracija kao i duže vreme za izvršenje algoritama u odnosu na prethodne test funkcije. Numerički rezultati ovih testiranja prikazani su u tabeli koja sledi.

Tabela 3.2.2. Numerički rezultati za dodatnih 5 test problema

Test funkcija	Br. iteracija			CPU vreme			Br. izrač. vrednosti f-je		
	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD	SM	AGD	GD
Extended White & Holst	2962	621538	574171	3.1	1953.6	1918.3	26321	18638690	18808384
Tridia	56309	447900	346994	24.0	1629.1	1381.0	264738	17073495	14102900
LIARWHD	3841	64754	166334	7.1	423.6	1485.6	28819	2139319	6193310
DIXON3DQ	1123659	6543592	6493407	656.2	4032.8	5019.3	6544136	39261562	53196428
BIGGSB1	1015243	6001285	5959373	582.8	3659.1	4833.6	5917974	36007720	48821414

Jasno je da je SM metod superioran u broju iteracija, CPU vremenu kao i u broju izračunavanja vrednosti test funkcije za svaki od 5 posmatranih test problema. Šta više rezultati iz prethodne tabele pokazuju ogromnu nadmoć SM metoda u odnosu na prednosti prikazane u tabeli 3.2.1.

Važno je napomenuti da je razlika u posmatranim indikatorima u slučaju kada AGD pokazuje bolje rezultate od SM metoda veoma mala u odnosu na razliku u obrnutom slučaju. Kao potvrdu za ovu tvrdnju dajemo sledeću tabelu u kojoj prikazujemo prosečne vrednosti tri posmatrana indikatora za svih 350 izvršenih numeričkih eksperimenata.

Tabela 3.2.3. Prosečne numeričke vrednosti za 35 test funkcije testirane za 10 različitih dimenzija.

Prosečne performanse	SM	AGD	GD
Broj iteracija	7196.22	49933.64	51514.34
CPU vreme (sec)	10.99	633.28	589.10
Broj izračunavanja vrednosti f-je	42059.15	710851.71	734478.16

Na osnovu prikazanih rezultata zaključujemo da SM metod u proseku ima oko 7 puta bolje karakteristike kada se posmatra broj iteracija i približno 16 puta manji broj izračunavanja vrednosti funkcija u odnosu na AGD i GD metode. Takođposmatrajući CPU vreme zaključujemo da je SMS metod skoro 60 puta brži od AGD i GD metoda

Na kraju treba još reći da je ukupan broj iteracija SM metoda za svih 350 numeričkih eksperimenata 2518678 dok je broj slučajeva u kojima se javlja korekcija parametra ubrzanja gamma iz negativne vrednosti u pozitivnu u algoritmu 3.2.1 716. To znači da se, zapravo, SM metod ponaša kao GD metod u samo 0.03% slučajeva.

3.3 Gradijentni metod skalarne korekcije

U ovom poglavlju predstavljamo novi metod opadajućih gradijenata na osnovu opšte iterativne šeme quasi-Newtonovog tipa, kod koje za aproksimaciju inverza Hessian-a koristimo skalarnu matricu. Početnu dužinu koraka dobijamo iz sekantne jednačine za inverz Hessian-a na osnovu dve susedne tačke iterativnog metoda. U tom smislu ovaj novi metod zapravo pripada klasi metoda opadajućih gradijenata sa dvotačastom dužinom koraka. U nastavku ćemo ovaj metod nazivati *metodom skalarne korekcije* (scalar correction method) ili skraćeno SC metodom. U nastavku ćemo pokazati da je novi algoritam, na kojem je primenjena tehnika nemonotonog linijskog pretraživanja uporediv sa favorizovanim GBB metodom.

Najpre, krenimo od opštog algoritma gradijentnog metoda sa dvotačastom dužinom koraka kome pridružujemo metod nemonotonog linijskog pretraživanja, za nalaženje minimuma funkcije sa velikim brojem promenljivih. Ovaj algoritam, takođe, pripada klasi quasi-Newtonovih metoda sa nemonotonim linijskim pretraživanjem kod koga je inverz Hessian-a aproksimiran odgovarajućom skalarnom matricom.

Algoritam 3.3.1 Opšti gradijentni metod sa nemonotonim linijskim pretraživanjem

Ulaz: Test funkcija $f(x)$, početna tačka $x_0 \in \text{dom}(f)$, ceo broj $M > 0$ i realne konstante $0 < \xi_1 < \xi_2$.

- 1: Postaviti $k = 0$, izračunati $f(x_0)$, $g_0 = \nabla f(x_0)$ i postaviti $\gamma_0 = 1$, $m(0) = 0$.
 - 2: Ukoliko je zadovoljen uslov izlaska zaustaviti iteracije; u suprotnom, preći na sledeći korak.
 - 3: Naći t_k pomoću algoritma 3.1.3 sa ulazom $d_k = -g_k$, $m = m(k)$ i $a = \gamma_k$.
 - 4: Izračunati $x_{k+1} = x_k - t_k g_k$, $f(x_{k+1})$, g_{k+1} , $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = g_{k+1} - g_k$.
 - 5: Naći početnu probnu vrednost γ_{k+1} na osnovu datog metoda. Ako je $\gamma_{k+1} > \xi_2$ ili $\gamma_{k+1} < \xi_1$, postaviti $\gamma_{k+1} = 1$.
 - 6: Postaviti $k := k + 1$, $m(k) := \min\{m(k-1) + 1, M - 1\}$, i preći na korak 2.
 - 7: Vratiti x_{k+1} i $f(x_{k+1})$.
-

Test kriterijum u koraku 5 je korišćen da bismo obezbedili da niz γ_k bude ograničen.

Ukoliko želimo da u algoritmu 3.4.1 primenimo BB metod onda u koraku 5 početnu dužinu koraka γ_{k+1} računamo na osnovu formula (3.8) ili (3.9). Za implementaciju GBB metoda dužinu koraka računamo na osnovu (3.8) zbog poznate činjenice da se u praktičnim izračunavanjima izbor (3.9) ponaša lošije u odnosu na (3.8) [43], tako da dobijamo

$$\gamma_{k+1}^{BB} = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T y_k}. \quad (3.42)$$

Dakle, imamo sledeći algoritam

Algoritam 3.3.2 Globalni Barzilai Borwein metod

Step 5: Izračunati početnu probnu vrednost dužine koraka γ_{k+1} koristeći (3.42). Ako je $\gamma_{k+1} > \xi_2$ ili $\gamma_{k+1} < \xi_1$, postaviti $\gamma_{k+1} = 1$.

Ostali koraci su isti kao i u opštem algoritmu 3.4.1.

Predstavimo sada novi metod opadajućih gradijenata sa dvotačkastom dužinom koraka. Posmatrajmo, najpre, opštu iterativnu šemu quasi-Newtonovog tipa

$$x_{k+1} = x_k - B_k g_k, \quad (3.43)$$

gde je B_k odgovarajuća aproksimacija inverza Hessian-a. Kao tri moguće alternative matrice B_k izdvajaju se: skalarna matrica, za koju važi $B_k = \lambda_k I$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$; dijagonalna matrica, koja zadovoljava $B_k = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i potpuna matrica (full matrix) [21]. Dobro je poznato da Newton-like metodi kod kojih je potrebno pa se u svakoj iteraciji čuvaju i izračunavaju potpune matrice B_k (na primer BFGS metod, DFP metod, simetrični rang-1 update metod) nisu pogodni za nalaženje optimuma problema velikih dimenzija. Naime, imamo da su aproksimacije Hessian-a ili njegovog inverza obično guste matrice, pa samim tim potrebna memorija za njihovo pamćenje i kompleksnost izračunavanja na njima rastu srazmerno sa n^2 što postaje veoma problematično za velike vrednosti parametra n . U tom smislu potrebno je modifikovati ih i prilagoditi da bi bili primenljivi i za rašavanje problema velikih dimenzija [106]. Na osnovu gore navedenog za potrebe novog metoda koristićemo najjednostavniju, odnosno, skalarnu aproksimaciju inverza Hessian-a

$$B_k = \gamma_k I \approx G_k^{-1}, \quad \gamma_k > 0. \quad (3.44)$$

Na taj način se quasi-Newtonov metod (3.43) redukuje na gradijentnu iterativnu šemu

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k g_k.$$

Početnu probnu vrednost dužine koraka γ_{k+1} ćemo izračunati nakon korekcije inverza Hessian-a B_k u svakoj iteraciji na osnovu formule

$$B_{k+1} = B_k + a_k I = (\gamma_k + a_k) I = \gamma_{k+1} I.$$

U tom smislu dobijamo sledeću skalarnu korekciju početne probne dužine koraka na osnovu vrednosti prethodne dužine koraka

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + a_k. \quad (3.45)$$

Vidimo da parametar $a_k = a_k(s_k, y_k) \in \mathbb{R}$ zavisi od dve susedne iterativne tačke x_k , x_{k+1} i odgovarajućih gradijenata g_k , g_{k+1} . Dakle, ukoliko primenimo sekantnu jednačinu na dobijene aproksimacije x_k i x_{k+1} , naš cilj bi bio nalaženje skalara γ_{k+1} koji zadovoljava

$$s_k = \gamma_{k+1} y_k. \quad (3.46)$$

Odavde imamo da je vektor s_k jednak vektoru y_k pomnoženom sa skalarom, što bi zapravo bio idealan slučaj koji u praksi nije uvek zadovoljen. Iz jednačina (3.45) i (3.46) dobijamo sledeći zapis

$$s_k - \gamma_k y_k - a_k y_k = 0.$$

Pošto smo rekli da idealan slučaj nije uvek ispunjen u nastavku želimo da se što je više moguće približimo tom slučaju. U tom smislu minimizujemo sledeću funkciju

$$\min_a \|a^{-1}(s_k - \gamma_k y_k) - y_k\|^2, \quad (3.47)$$

što daje

$$a_k = \frac{(s_k - \gamma_k y_k)^T (s_k - \gamma_k y_k)}{(s_k - \gamma_k y_k)^T y_k}, \quad (3.48)$$

za slučaj kada je $(s_k - \gamma_k y_k)^T y_k \neq 0$. U suprotnom pravimo sledeći izbor $a_k = 0$. Posle zamene (3.48) u (3.45) dobijamo

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \frac{(s_k - \gamma_k y_k)^T (s_k - \gamma_k y_k)}{(s_k - \gamma_k y_k)^T y_k} = \gamma_k + \frac{\|s_k - \gamma_k y_k\|^2}{(s_k - \gamma_k y_k)^T y_k}, \quad (3.49)$$

kada je $(s_k - \gamma_k y_k)^T y_k \neq 0$ i $\gamma_{k+1} = \gamma_k$ u protivnom. Definišimo sada pomoćni vektor kao što sledi

$$r_k = s_k - \gamma_k y_k. \quad (3.50)$$

Posle zamene u (3.49) dobijamo

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k} = \frac{s_k^T r_k}{y_k^T r_k}, \quad (3.51)$$

za slučaj $y_k^T r_k \neq 0$; druga jednakost sledi nakon par algebarskih transformacija.

Napomena 3.3.1. Nakon minimizacije date izrazom (3.47), skalarna korekcija je iskorišćena za izračunavanje parametra γ_{k+1} a samim tim i odgovarajuće skalarnе matrice $B_{k+1} = \gamma_{k+1} I$. Ove činjenice služe kao motivacija za uvođenje termina "skalarna korekcija" za predloženu metod

Osnovna ideja za odabir početne probne dužine koraka u svakoj iteraciji je da probamo da taj izbor relaksiramo što je više moguće, na način da izračunati parametar bude što veći. U te svrhe, posmatramo još dve poznate formule za računanje početne probne dužine koraka.

$$\gamma_{k+1}^{BB} = \frac{s_k^T y_k}{y_k^T y_k}, \quad (3.52)$$

$$\gamma_{k+1}^{SS} = \frac{\|s_k\|}{\|y_k\|}. \quad (3.53)$$

Početna dužina koraka γ_{k+1}^{BB} se računa na osnovu (3.9), dok γ_{k+1}^{SS} proizilazi direktno iz sekantne jednačine (3.3) nakon izjednačavanja normi sa leve i desne strane (pogledati takođe [128]). Ističemo i to da je svaka od formula (3.51) – (3.53) izvedena iz dvotačkaste aproksimacije sekantne jednačine quasi-Newtonovog metoda. Sledeća lema pokazuje odnos između vrednosti ovih dužine koraka i na taj način nam daje smernice za pravi odabir između njih.

Lema 3.3.1. *Za početne probne vrednosti dužina koraka izračunatih na osnovu (3.51)-(3.53) važe sledeće nejednakosti:*

$$\gamma_{k+1}^{BB} \leq \gamma_{k+1}^{SS} \leq \gamma_{k+1}, \quad y_k^T r_k > 0, \quad (3.54)$$

$$\gamma_{k+1} \leq \gamma_{k+1}^{BB} \leq \gamma_{k+1}^{SS}, \quad y_k^T r_k \leq 0. \quad (3.55)$$

Dokaz. Ako je $y_k^T r_k > 0$, nakon nekoliko transformacija, dobijamo

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= \gamma_k + \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k} \\ &\geq \gamma_k + \frac{\|r_k\|}{\|y_k\|} \\ &= \gamma_k + \frac{\|s_k - \gamma_k y_k\|}{\|y_k\|} \\ &\geq \gamma_k + \frac{\|s_k\| - \gamma_k \|y_k\|}{\|y_k\|} \\ &= \gamma_{k+1}^{SS} \\ &\geq \frac{s_k^T y_k}{y_k^T y_k} = \gamma_{k+1}^{BB}. \end{aligned}$$

S druge strane, kada je $y_k^T r_k < 0$ imamo

$$\frac{y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} \geq \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= \gamma_k + \frac{y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} + \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k} - \frac{y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} \\ &= \frac{\gamma_k \|y_k\|^2 + y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} + \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k} - \frac{y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} \\ &= \frac{y_k^T (\gamma_k y_k + r_k)}{\|y_k\|^2} + \frac{\|r_k\|^2}{y_k^T r_k} - \frac{y_k^T r_k}{\|y_k\|^2} \\ &\leq \frac{y_k^T s_k}{y_k^T y_k} = \gamma_{k+1}^{BB} \\ &\leq \gamma_{k+1}^{SS}. \end{aligned}$$

Na kraju za slučaj $y_k^T r_k = 0$, uzimajući u obzir (3.50) lako je proveriti da važi

$$\gamma_k = \frac{y_k^T s_k}{\|y_k\|^2} = \gamma_{k+1}^{BB}.$$

Sada, pošto je $a_k = 0$ imamo

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k = \gamma_{k+1}^{BB} \leq \gamma_{k+1}^{SS},$$

čime je dokaz završen. \square

Na osnovu rezultata iz leme 3.3.1, za početnu probnu vrednost dužine koraka u našem metodu, imajući na umu odabir najveće vrednosti, pravimo izbor kao u dva posmatrana slučaja (3.54) i (3.55). Dakle, imamo

$$\gamma_{k+1}^{SC} = \begin{cases} \frac{s_k^T r_k}{y_k^T r_k}, & y_k^T r_k > 0 \\ \frac{\|s_k\|}{\|y_k\|}, & y_k^T r_k \leq 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Kada smo napravili izbor za početnu probnu dužinu koraka u poziciji smo da predstavimo gradijentni metod sa nemonotonim linearnim pretraživanjem koji predstavlja samo poseban slučaj algoritma 3.4.1, i koji se razlikuje samo u koraku 5 gde izračunavamo tu dužinu koraka.

Algoritam 3.3.3 SC gradijentni metod sa nemonotonim linijskim pretraživanjem

Require: Test funkcija $f(x)$, početna tačka $x_0 \in \text{dom}(f)$, celobrojna konstanta $M > 0$ i realne konstante $0 < \xi_1 < \xi_2$.

Step 5: Izračunati početnu probnu vrednost dužine koraka γ_{k+1} koristeći (3.56). Ukoliko je $\gamma_{k+1} > \xi_2$ ili $\gamma_{k+1} < \xi_1$, postaviti $\gamma_{k+1} = 1$.

Ostali koraci su isti kao i u opštem algoritmu 3.4.1.

U nastavku ove doktorske disertacije za SC metod sa nemonotonim linijskim pretraživanjem koristićemo oznaku GSC (global scalar correction).

Napomena 3.3.2. *Kao i kod BB metoda u svakoj iteraciji SC metoda potreban broj izračunavanja gradijenata i operacija sa pokretnim zarezom je reda $O(n)$. U tom smislu su kompleksnost izračunavanja kao i potreba za memorijskim prostorom kod BB i SC metoda ekvivalentni.*

3.3.1 Analiza konvergencije

Autori su u svom radu [62] za neprekidno diferencijabilne funkcije dokazali globalnu konvergenciju nemonotonog linijskog pretraživanja kod kojih pravac pretrage zadovoljava uslove (3.5) i (3.6). Kasnije Y. H. Dai uzimajući u obzir iste uslove pod dodatnom pretpostavkom o Lipschitz neprekidnosti ciljne funkcije, daje drugačiji dokaz takođe globalne konvergencije metoda nemonotonog linijskog pretraživanja [44]. Šta više Dai je pokazao da je moguće čak oslabiti uslove (3.5) i/ili (3.6) za pravac pretrage d_k i pritom i dalje zadržati globalnu konvergenciju metoda.

Kao pomoćni rezultat koji ćemo koristiti za dokazivanje globalne konvergencije novog metoda navodimo sledeću lemu koja nam određuje donju granicu dužine koraka t_k .

Lema 3.3.2. *Pretpostavimo da je gradijent funkcije $f(x)$ Lipschitz neprekidan; odnosno, neka postoji $L > 0$ tako da važi*

$$\|g(y) - g(z)\| \leq L\|y - z\|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n. \quad (3.57)$$

Za iterativni metod (3.2) kod koga je $d_k = -g_k$ i gde je t_k dobijeno pomoću nemonotonog linijskog pretraživanja (3.10) nakon što je probna početna vrednost izračunata na osnovu (3.56) (koraci 3 i 5 algoritma 3.4.1) imamo da važi sledeća nejednakost

$$t_k \geq \min \left\{ \xi_1, \frac{\beta(1 - \sigma)}{L} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

Dokaz. Posmatrajmo najpre slučaj kada početna probna vrednost dužine koraka $t_k = \gamma_k$ ne zadovoljava uslov nemonotonosti (3.10). Tada imamo sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned} f\left(x_k + \frac{t_k}{\beta}d_k\right) &> \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}) + \sigma \frac{t_k}{\beta} g_k^T d_k \\ &\geq f(x_k) + \sigma \frac{t_k}{\beta} g_k^T d_k, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$f\left(x_k + \frac{t_k}{\beta}d_k\right) - f(x_k) > \sigma \frac{t_k}{\beta} g_k^T d_k.$$

Dalje, kada primenimo teoremu o srednjoj vrednosti na levu stranu prethodne nejednakosti, dobijamo da postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da važi

$$\frac{t_k}{\beta} g\left(x_k + \theta \frac{t_k}{\beta}d_k\right)^T d_k > \sigma \frac{t_k}{\beta} g_k^T d_k,$$

odnosno

$$g\left(x_k + \theta \frac{t_k}{\beta}d_k\right)^T d_k > \sigma g_k^T d_k.$$

Ukoliko od obe strane oduzmemo $g_k^T d_k$ i primenimo Cauchy-Schwartzovu nejednakost kao i Lipschitz-ov uslov (3.57), imamo

$$-(1 - \sigma)g_k^T d_k < \left(g\left(x_k + \theta \frac{t_k}{\beta}d_k\right) - g_k\right)^T d_k \leq \frac{L}{\beta} t_k \|d_k\|^2,$$

posle čega nakon zamene $d_k = -g_k$ dobijamo

$$t_k > -\frac{\beta(1 - \sigma)}{L} \frac{g_k^T d_k}{\|d_k\|^2} = \frac{\beta(1 - \sigma)}{L}.$$

Na kraju uzimajući u obzir da važi $\gamma_k > \xi_1$ imamo da je (3.58) zadovoljeno i time je dokaz završen. \square

Za dokaz globalne konvergencije koristimo neke rezultate iz teorema preuzetih iz radova [44, 62].

Teorema 3.3.1. *Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ dole ograničena na skupu $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ i da je njen gradijent Lipschitz neprekidan na otvorenom skupu C koji sadrži $L(x_0)$. Za iterativni metod (3.2), gde je $d_k = -g_k$ opadajući gradijent i t_k je dobijen na osnovu algoritma 3.3.3 imamo da važi*

a)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (3.59)$$

b) *Ukoliko je broj stacionarnih tačaka funkcije $f(x)$ na $L(x_0)$ konačan, onda niz $\{x_k\}$ konvergira.*

Dokaz. Najpre, navedimo rezultat iz rada [44] gde su autori u teoremi 2.1 (koja zadovoljava iste uslove) koristeći Lipschitz neprekidnost, dokazali da postoji realna konstanta

$$c_3 = 1 + c_2 \xi_2 L > 1$$

tako da važi

$$\|g_{k+1}\| \leq c_3 \|g_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.60)$$

Neka je $l(k)$ pozitivan ceo broj takav da je

$$\begin{aligned} k - m(k) &\leq l(k) \leq k, \\ f(x_{l(k)}) &= \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Autori su u svom radu [62] pokazali da je niz $\{f(x_{l(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$ nerastući. Takođe pokazali su sledeće tvrđenje

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{l(k)-1} g_{l(k)-1}^T d_{l(k)-1} = 0.$$

Ako zamenimo $d_k = -g_k$ i iskoristimo (3.58) imamo da važi $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_{l(k)-1}\| = 0$. Kao direktnu posledicu dobijemo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_{l(kM)-1}\| = 0. \quad (3.62)$$

Dalje, na osnovu (3.60) imamo

$$\|g_{kM+i}\| \leq c_3^{2M+1} \|g_{l(kM)-1}\|, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (3.63)$$

što, konačno, zajedno sa (3.62) implicira (3.59) čime je dokaz pod a) završen.

Da bismo pokazali tvrđenje pod b) polazimo od činjenice da je svaka tačka nagomilavanja niza $\{x_k\}$ zapravo stacionarna tačka funkcije $\{f(x)\}$ što sledi direktno iz (3.59) i činjenice da je skup $L(x_0)$ ograničen. Pošto je broj stacionarnih tačaka ograničen, imamo sledeću relaciju

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_k \|d_k\| \leq \xi_2 \|g_k\| \rightarrow 0$$

iz koje proizolazi da niz $\{x_k\}$ konvergira. \square

Teorema 3.3.2. *Za glatku i uniformno konveksnu funkciju $f(x)$ iterativni metod (3.2), kod koga je $d_k = -g_k$ pravac pretrage i t_k je izračunat pomoću algoritma 3.3.3, je R -linearno konvergentan.*

Dokaz. Sledi direktno iz teoreme 3.1 rada [44]. \square

3.3.2 Rezultati testiranja

U ovom odeljku predstavljamo numeričke rezultate koje smo dobili nakon testiranja novog metoda opadajućih gradijenata sa nemonotonim linijskim pretraživanjem (GCS metoda) kao i GBB metoda. Kod je pisan u programskom jeziku C++ na osnovu algoritama 3.3.2 and 3.3.3 i kasnije testiran na Intel-ovom Core duo 1.6 GHz procesoru. Kao ulazni parametri metoda nemonotonog linijskog pretraživanja korišćeni su $\sigma = 0.0001$ i $\beta = 0.8$. Dodatni parametri za oba algoritma su izabrani na sledeći način $\xi_1 = 10^{-5}$, $\xi_2 = 10^5$ i $M = 10$.

Kao test probleme velikih dimenzija izabrali smo 40 funkcija iz [5] koje su date u razvijenoj ili opštoj formi. Za svaku test funkciju razmatrali smo 10 različitih dimenzija (broja promenljivih) $n = 100, 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 7000, 8000, 10000$ and 15000 . Kriterijumi za zaustavljanje iteracija su:

$$\|g_k\| \leq 10^{-6} \quad \text{i} \quad \frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{1 + |f(x_k)|} \leq 10^{-16}.$$

U sledećoj tabeli prikazujemo zbirni broj iteracija, ukupno CPU vreme i zbirni broj izračunavanja vrednosti funkcija za svaku test funkciju, testiranu za gore spomenutih 10 različitih dimenzija.

Tabela 3.3.1. Zbirni numerički rezultati za GBB i GSC metode testirani na 40 test funkcija.

Test funkcija	Br. iteracija		CPU vreme		Br. izrač. vrednosti f-ja	
	GBB	GSC	GBB	GSC	GBB	GSC
Extended Freud. and Roth	417	590	2.98	3.653	1734	1970
Extended Rosenbrock	858	440	8.995	3.621	4253	1430
Extended White and Holst	619	580	5.026	5.088	1998	1840
Extended Beale	444	693	5.322	8.261	1028	1676
Extended Penalty	506	501	6.792	7.058	2066	2056
Perturbed Quadratic	18072	6893	155.231	45.182	62401	18899
Raydan 1	8197	3894	52.089	20.557	27040	10556
Raydan 2	75	75	0.387	0.307	160	160
Diagonal 1	7066	3313	43.479	21.855	15798	8874
Diagonal 2	10525	4871	111.168	37.292	41163	13778
Diagonal 3	8397	3457	83.809	29.903	28014	9501
Hager	950	887	6.808	6.228	2523	2059
Generalized Tridiagonal 1	280	276	2.169	2.387	640	632
Extended Tridiagonal 1	372	359	1.683	2.074	864	808
Extended Three Exponential Terms	100	90	0.996	0.715	300	280
Diagonal 4	70	65	0.543	0.48	330	320
Diagonal 5	50	50	0.59	0.495	110	110
Extended Himmelblau function	135	120	1.481	1.324	410	380
Generalized PSC1	7344	4688	193.87	105.322	26099	13002
Extended PSC1	150	160	2.293	2.447	460	480
Extended Powell	10	10	0.03	0.015	30	30
Extended Block Diagonal BD1	178	166	1.918	1.854	416	392
Extended Maratos	200	305	2.058	2.965	730	1000
Quadratic Diagonal Perturbed	5891	5494	51.934	39.652	23921	17054
Quadratic QF1	18175	7407	145.512	45.121	61728	20355
Extended Quadratic Penalty QP1	171	189	3.714	4.09	740	776
Quadratic QF2	13383	7504	140.136	74.198	45740	20972
Extended EP1	48	48	1.152	1.215	356	356
Extended Tridiagonal-2	401	485	1.51	1.808	892	1112
ARWHEAD	140	170	4.119	4.293	710	797
Almost Perturbed Quadratic	20336	7131	170.088	41.511	69489	19472
ENGVAL1	333	392	4.963	5.309	836	956
QUARTC	212	212	1.09	1.12	474	474
Diagonal 6	75	75	0.371	0.262	160	160
LIARWHD	579	677	12.104	11.465	2615	2425
Generalized Quartic GQ1	216	223	2.995	2.714	525	538
Diagonal 7	70	70	0.497	0.465	160	160
Diagonal 8	70	70	0.729	0.589	190	190
Diagonal 9	6553	5329	32.528	29.37	22417	14986
HIMMELH	20	20	0.121	0.091	60	60

Na osnovu tabele 3.3.1 nije teško uočiti da GSC metod pokazuje bolje performanse od GBB metoda, posmatrajući broj iteracija, za 21 test funkciju, GBB metod je bolji za posmatranih 10 funkcija, dok su metodi jednaki za testiranih 9 problema. Slično, upoređujući ih po broju izračunavanja vrednosti funkcija, imamo da je GSC bolji za 22 test funkcije, dok je GBB bolji u 9 slučajeva. Oba algoritma dostižu isti broj izračunavanja vrednosti funkcija za preostalih 9 test primera.

Pored toga predstavljamo još jednu tabelu koja prikazuje broj numeričkih eksperimenata, od posmatranih četiristo, za koje GSC, odnosno GBB postiže manji broj iteracija, kraće CPU vreme i manji broj izračunavanja vrednosti funkcija, redom.

Tabela 3.3.2. Uporedne performanse GSC i GBB metoda za 400 numeričkih eksperimenata.

Posmatrani indikatori	GSC	GBB	jednaki
Br. iteracija	199	102	99
CPU vreme (sec)	186	84	130
Br. izrač. vrednosti f-ja	208	100	92

Poslednja kolona koju smo nazvali *jednaki*, prikazuje broj eksperimenata za koje posmatrani indikatori imaju jednake vrednosti za oba testirana metoda. Više je nego očigledno da je postignuto veliko poboljšanje našeg metoda u odnosu na GBB metod, posmatrajući sva tri parametra.

Ne samo da je broj eksperimenata u kojima GSC pokazuje bolje performanse od GBB metoda veći nego u obrnutom slučaju, nego je i razlika u tim brojevima daleko veća u slučaju dominacije GSC metoda i to za sve posmatrane indikatore. Kao potvrdu ove činjenice pogledajmo rezultate iz tabele 3.3.1 za funkcije kao što su recimo "Perturbed Quadratic", "Raydan 1", "Diagonal 1, 2, 3", "Quadratic QF2" and "Almost Perturbed Quadratic". Lako je uočiti ogromnu razliku u korist GSC metoda za sve posmatrane indikatore. Ukupno gledano, GCS metod je skoro 2 puta bolji u pogledu broja iteracija kao i oko 2.2 puta bolji od GBB metoda posmatrajući CPU vreme i broj izračunavanja vrednosti funkcija. Kao potvrdu navedenih činjenica predstavljamo sledeću tabelu koja prikazuje prosečne performanse za oba algoritma, po svim posmatrnim parametrima, testiranim na 400 test problema.

Tabela 3.3.3. Prosečni numerički rezultati za 40 test funkcija testiranih za 10 različitih dimenzija.

Prosečne performanse	GSC	GBB
Br. iteracija	169.9	329.2
CPU vreme (sec)	1.43	3.16
Br. izrač. vrednosti f-ja	477.7	1123.9

3.4 Primena SC metoda za rešavanje operatorskih jednačina

O ovom poglavlju videćemo kako je moguće koristiti optimizacione metode, u ovom slučaju SC metod, za rešavanje operatorskih jednačina, a samim tim i izračunavanje uopštenih inverza proizvoljnih matrica.

Rešavanje sistema linearnih operatorskih jednačina, odnosno nalaženje uopštenih inverza datog operatora $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, gde sa $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ označavamo prostor linearnih ograničenih operatora između Hilbertovih prostora \mathcal{H} i \mathcal{K} je veoma interesantan problem. Različite tehnike su razvijene u svrhu rešavanja ovog problema. Jedna od najinteresantnijih ideja je kako upotrebiti optimizacione metode u svrhu nalaženja uopštenih inverza. Mnogi algoritmi ovog tipa mogu se pronaći u sledećim radovima [12, 46, 72, 100, 104, 140].

Jednačina $Ax = b$, $b \in \mathcal{K}$ može ili ne mora imati rešenje, što zavisi od toga da li $b \in \mathcal{R}(A)$ ili ne. Čak i kada je $b \in \mathcal{R}(A)$ rešenje ne mora biti jedinstveno. U slučaju kad $b \notin \mathcal{R}(A)$ ili kada rešenje nije jedinstveno, moguće je naći rešenja najmanjih kvadrata koja minimiziraju kvadratni funkcional $q(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$.

Da bi našao rešenje operatorske jednačine $Ax = b$, gde je operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ takav da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren, Nashed u svom radu [104] minimizira funkcional $q(x)$. U te svrhe autor je koristio sledeću iterativnu šemu

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k r_k, \quad (3.64)$$

gde je

$$r_k = A^*Ax_k - A^*b \quad \text{and} \quad \alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{\|Ar_k\|^2}.$$

Ukoliko malo bolje pogledamo vidimo da se zapravo radi o metodu najstrmijeg pada o kome je bilo reči u trećoj glavi ove doktorske disertacije. Nashed je još i pokazao da ovaj metod linearno konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$, kao i to da konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata minimalne norme, to jest $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b$, ako i samo ako imamo da za početnu tačku važi $x_0 \in \mathcal{R}(A^*)$.

Inspirisani Nashed-ovim metodom najstrmijeg pada autori u svom radu [46] razmatraju iterativnu šemu iste forme u opštijim prostorima, \mathcal{C}^* algebrama. Dokaz o linearnoj konvergenciji ovog metoda koji su autori izneli se razlikuje od dokaza u radu [104] ne samo u pogledu posmatranih prostora nego i u pogledu normi. Naime, teorema o konvergenciji metoda koju su predstavili autori u [46] je data u terminima operatorske norme, dok je konvergencija Nashed-ovog metoda najstrmijeg pada data u terminima Frobenius-ove norme

U trećoj glavi videli smo kako je moguće aproksimirati Hessian odgovarajućom skalarnom matricom i dobiti veoma efikasan gradijentni metod (SM i SC metod) za nalaženje minimuma proizvoljne nelinearne funkcije. Da bismo dobili algoritam sa boljim performansama od Nashed-ovod metoda najstrmijeg pada u nastavku ćemo koristiti metode sa dvotačkastom dužinom koraka (BB i SC metod) za nalaženje rešenja najmanjih kvadrata date operatorske jednačine $Ax = b$. O performansama ovih metoda i njihovoj dominaciji u odnosu na metod najstrmijeg pada bilo je reči u trećoj glavi ovog doktorata. U nastavku, slično kao u [46], pomoću iterativnog procesa

$$X_{k+1} = X_k - \gamma_k A^*(AX_k - I), \quad k \geq 0, \quad (3.65)$$

biće računat Moore-Penroseov inverz proizvoljne date matrice, koristeći SC i BB metod za nalaženje dužine koraka.

3.4.1 Pojam Frèchet-ovog izvoda operatora

Kompletnosti i potpunosti radi navodimo poznate definicije i rezultate koje se tiču Frèchet-ovih izvoda operatora na proizvoljnom Hilbert-ovom prostoru [34, 85].

Definicija 3.4.1. Neka su \mathcal{H} i \mathcal{K} Hilbert-ovi prostori i $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ otvoren skup. Neka je $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}$ operator i $x \in \mathcal{U}$. Ukoliko postoji ograničene linearan operator $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ takav da je

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - g(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

$h \in \mathcal{H}$, onda kažemo da je f Fréchet diferencijabilan u x , ili jednostavnije diferencijabilan u x ; g je (Fréchet-ov) izvod od f u x i označavamo ga sa $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Definicija 3.4.2. Operator f je $(n+1)$ -put diferencijabilan na \mathcal{U} ukoliko je n puta diferencijabilan na \mathcal{U} i ako za svako x iz \mathcal{U} postoji neprekidan multilinearan operator g koje se sastoji od $(n+1)$ argumenata tako da limes

$$\lim_{\|h_{n+1}\| \rightarrow 0} \frac{\|D^n f(x+h_{n+1})(h_1, \dots, h_n) - D^n f(x)(h_1, \dots, h_n) - g(h_1, \dots, h_{n+1})\|}{\|h_{n+1}\|} = 0 \quad (3.66)$$

postoji ravnomerno za neke h_1, h_2, \dots, h_n koji pripadaju ograničenim podskupovima skupa \mathcal{H} . U tom slučaju je kažemo da je g $(n+1)$ -vi izvod od f u x .

Propozicija 3.4.1. Neka je D konveksni podskup skupa \mathcal{H} i f $(n+1)$ -puta Frechet diferencijabilan operator na D . Ako su x i $x+p$ dati elementi iz D imamo da je

$$f(x+p) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^{(k)} f(x) \underbrace{(p, p, \dots, p)}_{k \text{ times}} + w(x, p)$$

gde je

$$\|w(x, p)\| \leq \frac{1}{(n+1)} \sup_{t \in [0,1]} \|D^{(n+1)} f(x+tp)\| \|p\|^{n+1}.$$

Definicija 3.4.3. [98] Neka je \mathcal{H} Hilbert-ov prostor, $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ otvoren skup i $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ dat diferencijabilan funkcional. Gradijent funkcionala f je linearan operator

$$\nabla f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{such that} \quad \langle \nabla f(x), h \rangle = Df(x)(h),$$

gde pod $Df(x)(h)$ podrazumevamo linearan funkcional $Df(x)$ primenjen na vektor $h \in \mathcal{H}$.

Postojanje i jedinstvenost ovog linearnog operatora proizilazi direktno iz primene Riesz-ove teoreme o reprezentaciji na linearan ograničen funkcional $Df(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicija 3.4.4. Neka je \mathcal{H} Hilbert-ov prostor, $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ otvoren skup i $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ dat dva puta neprekidno diferencijabilan funkcional. Hessian funkcionala f je linear operator

$$\nabla^2 f \in \mathcal{L}(\mathcal{U} \times \mathcal{H}, \mathcal{H}) \quad \text{such that} \quad \langle \nabla^2 f(x, p), h \rangle = D^2 f(x)(p, h),$$

gde sa $D^2 f(x)(p, h)$ označavamo linearan funkcional $D^2 f(x)(p)$ primenjen na vektor $h \in \mathcal{H}$.

Postojanje i jedinstvenost ovog linearnog operatora proizilazi direktno iz primene Riesz-ove teoreme o reprezentaciji na linearan ograničen funkcional $D^2 f(x)(p) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.4.2 Rešavanje linearnih operatorskih jednačina

U trećoj glavi videli simo kako se Hessian (odnosno njegov inverz) može aproksimirati odgovarajućom skalarnom matricom (SM i SC metod) kod opšte quasi-Newtonove iterativne šeme. Na taj način iterativnu šemu

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla q(x_k), \quad k \geq 0, \quad (3.67)$$

posmatramo kao varijantu quasi-Newtonovog metoda, koji je pojednostavljen u tom smislu što je simetrična pozitivno definitna matrica koja aproksimira Hessian uzeta kao skalarna matrica.

Neka su \mathcal{H} i \mathcal{K} dati Hilbert-ovi prostori i neka je $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dat operator takav da važi da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren skup. Želimo da minimiziramo funkcional $q : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ definisan na sledeći način

$$q(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2} \langle Ax - b, Ax - b \rangle, \quad (3.68)$$

gde je $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ otvoren skup. U te svrhe posmatramo gradijentnu iterativnu šemu (3.67) kod koje parametar γ_k predstavlja na odgovarajući način izračutu dužinu koraka. Uzimajući u obzir da je $g_k = \nabla q(x_k) = A^*(Ax_k - b)$, što nije teško pokazati iz (3.68), dobijamo sledeći iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k A^*(Ax_k - b), \quad (3.69)$$

koji ćemo u nastavku koristiti za nalaženje rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$. Da bismo dobili konvergenciju kao i dobre numeričke osobine ovog procesa, očigledno je da je veoma važno kako biramo (računamo) samu dužinu koraka.

Da bismo mogli da dužinu koraka računamo na osnovu dvotačkaste aproksimacije iz sekantne jednačine, najpre trebamo izvesti odgovarajuću sekantnu jednačinu za operator na Hilbert-ovom prostoru. Na osnovu propozicije 3.4.1 o razvoju operatora Dq u Taylor-ov red prvog reda dobijamo

$$Dq(x) = Dq(x_{k+1}) + D^2q(x_{k+1})(x - x_{k+1}) + w(x, x - x_{k+1}), \quad (3.70)$$

što je ekvivalentno sa

$$Dq(x)(h) = Dq(x_{k+1})(h) + D^2q(x_{k+1})(x - x_{k+1}, h) + w(x, x - x_{k+1})(h) \quad \text{for all } h \in \mathcal{H}.$$

Na osnovu definicije 3.4.3 i 3.4.4 imamo

$$\langle \nabla q(x) - \nabla q(x_{k+1}), h \rangle - \langle \nabla^2 q(x_{k+1}, x - x_{k+1}), h \rangle = w(x, x - x_{k+1})(h) \quad \text{for all } h \in \mathcal{H}.$$

Uzimajući $h = \nabla q(x) - \nabla q(x_{k+1}) - \nabla^2 q(x_{k+1}, x - x_{k+1})$ i imajući u vidu da je $w(x, x - x_{k+1})$ ostatak drugog reda dobijamo

$$\nabla q(x) - \nabla q(x_{k+1}) \approx \nabla^2 q(x_{k+1})(x - x_{k+1}).$$

Konačno, stavljajući $x = x_k$ i uvodeći oznake $g_k = \nabla q(x_k)$, $H_k = \nabla^2 q(x_k)$, $s_k = x_{k+1} - x_k$ i $y_k = g_{k+1} - g_k$, dobijamo

$$H_{k+1}(s_k) \approx y_k. \quad (3.71)$$

Pošto smo izveli analognu sekantnu jednačinu za Hilbertove prostore u nastavku ćemo koristiti dužinu koraka dobijenu na osnovu metoda skalarne korekcije. U tom smislu potrebno je

aproximirati H_{k+1} identičnim operatorom $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pomnoženim realnim parametrom $\frac{1}{\gamma_{k+1}}$, to jest treba da važi $H_{k+1}(h) = \frac{1}{\gamma_{k+1}}h$, za svako $h \in \mathcal{H}$.

Za izbor parametra γ_k imamo dobro poznat izbor iz treće glave ove doktorske disertacije dobijen metodom skalarne korekcije

$$\gamma_{k+1}^{SC} = \begin{cases} \frac{\langle s_k, r_k \rangle}{\langle y_k, r_k \rangle}, & \langle y_k, r_k \rangle > 0 \\ \frac{\|s_k\|}{\|y_k\|}, & \langle y_k, r_k \rangle \leq 0 \end{cases}, \quad k \geq 0. \quad (3.72)$$

Na osnovu svega navedenog, predstavljamo sledeći algoritam

Algoritam 3.4.1 SC metod za nalaženje rešenja najmanjih kvadrata

Ulaz: Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ takav da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren skup, početna tačka $x_0 \in \mathcal{H}$ i realne pozitivne konstante $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \xi_1 \ll \frac{2(1-\varepsilon)}{\|A\|^2}$.

- 1: Postaviti $k = 0$, izračunati $q(x_0)$, g_0 i uzeti $\gamma_0 = 1$.
 - 2: Ukoliko je zadovoljen uslov izlaska ići na korak 7; u suprotnom, preći na sledeći korak.
 - 3: Izračunati x_{k+1} koristeći (3.69), $q(x_{k+1})$, g_{k+1} , $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = g_{k+1} - g_k$.
 - 4: Izračunati $\xi_2^{(k+1)} = 2(1 - \varepsilon) \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|Ag_{k+1}\|^2}$.
 - 5: Izračunati dužinu koraka γ_{k+1} koristeći (3.72). Ukoliko je $\gamma_{k+1} < \xi_1$ ili $\gamma_{k+1} > \xi_2^{(k+1)}$, postaviti $\gamma_{k+1} = \xi_2^{(k+1)}$.
 - 6: Postaviti $k = k + 1$ i ići na korak 2.
 - 7: Vratiti x_{k+1} i $q(x_{k+1})$.
-

Propozicija 3.4.2. *Algoritam 3.4.1 je dobro definisan, to jest imamo da je interval $(\xi_1, \xi_2^{(k)})$, $k \geq 1$ neprazan, za odabranu realnu konstantu ξ_1 . Pored toga, niz dužina koraka $(\gamma_k)_k$ je pozitivan i ograničen realnim konstantama.*

Dokaz. Pošto je

$$\xi_2^{(k)} = 2(1 - \varepsilon) \frac{\|g_k\|^2}{\|Ag_k\|^2} \geq \frac{2(1 - \varepsilon)}{\|A\|^2}$$

uvek možemo izabrati konstantu ξ_1 tako da važi

$$0 < \xi_1 \ll \frac{2(1 - \varepsilon)}{\|A\|^2} \leq \xi_2^{(k)}.$$

Dakle, imamo da je interval $(\xi_1, \xi_2^{(k)})$ neprazan u svakoj iteraciji.

Uzimajući u obzir da je $\|Ax\| \geq j(A) \cdot \|x\|$, gde je $j(A) = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|$, nije teško pokazati da važi $\xi_2^{(k)} \leq 2 \cdot j(A)^{-2}$, $k \geq 1$. Dakle, imamo sledeći niz nejednakosti

$$0 < \xi_1 \leq \gamma_k \leq \xi_2^{(k)} \leq 2 \cdot j(A)^{-2}, \quad k \geq 1,$$

čime je pokazan drugi deo tvrđenja. \square

Naredna teorema pokazuje konvergenciju metoda datog algoritmom 3.4.1 i takođe predstavlja karakterizaciju skupa rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$. Jedan pomoćni rezultat koristimo za dokaz ove teoreme.

Propozicija 3.4.3. [104, 105] *Ako je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren onda je skup S svih rešenja najmanjih kvadrata sistema $Ax = b$ dat kao*

$$S = A^\dagger b \oplus \mathcal{N}(A) = \{A^\dagger b + (I - A^\dagger A)y \mid y \in \mathcal{H}\},$$

gde sa $\mathcal{N}(A)$ označavamo jezgro operatora A .

Teorema 3.4.1. *Neka su \mathcal{H} i \mathcal{K} dati Hilbert-ovi prostori i $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operator takav da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren. Niz $(x_k)_k$ određen algoritmom 3.4.1 konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$.*

Za proizvoljnu početnu aproksimaciju $x_0 \in \mathcal{H}$, granična vrednosti $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ zadovoljava

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)x_0.$$

Pored toga, $x_0 \in \mathcal{R}(A^)$ ako i samo ako $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b$.*

Dokaz. Za $x_{k+1} = x_k - \gamma_k A^*(Ax_k - b)$, računamo sledeće

$$\begin{aligned} q(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} \|Ax_{k+1} - b\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\langle Ax_k - b, Ax_k - b \rangle - 2\langle Ax_k - b, \gamma_k Ag_k \rangle + \langle \gamma_k Ag_k, \gamma_k Ag_k \rangle) \\ &= q(x_k) - \gamma_k \|g_k\|^2 + \frac{1}{2} \gamma_k^2 \|Ag_k\|^2 \\ &= q(x_k) - \gamma_k \|g_k\|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\|Ag_k\|^2}{\|g_k\|^2} \right). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Na osnovu koraka 4 i 5 iz algoritma 3.4.1 imamo da važi

$$\gamma_k \leq 2(1 - \varepsilon) \frac{\|g_k\|^2}{\|Ag_k\|^2}, \quad k \geq 1,$$

tako da dobijamo sledeću nejednakost

$$1 - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\|Ag_k\|^2}{\|g_k\|^2} \geq \varepsilon > 0, \quad k \geq 1. \tag{3.74}$$

Prema tome, jasno je da je funkcional q striktno monotono opadajući i da je dole ograničen nulom. Dakle, kao zaključak imamo da niz $q(x_k)$ konvergira ka svom minimumu.

Uzimajući u obzir da je

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |q(x_{k+1}) - q(x_k)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k \|g_k\|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\|Ag_k\|^2}{\|g_k\|^2} \right), \end{aligned}$$

kao i činjenicu da su nizovi (γ_k) i $\left(1 - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\|Ag_k\|^2}{\|g_k\|^2} \right)$ ograničeni realnim konstantama, zaključujemo da važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|^2 = 0.$$

Na osnovu $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$ imamo da važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^* A x_k = A^* b.$$

Koristeći poznatu činjenicu da je u rešenje najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$ ako i samo ako je u rešenje "normalne" jednačine $A^* A x_k = A^* b$ (pogledati [99]), zaključujemo da niz x_k konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$.

Drugi deo dokaza je isti kao u teoremi o konvergenciji metoda najstrmijeg pada iz [104] pa ga ovde izostavljamo. \square

3.4.3 Izračunavanje uopštenih inverza matrica

U ovom odeljku iskoristićemo SC metod kako bismo izračunali $\{1, 3\}$ -inverz proizvoljne matrice. Osnovnu motivaciju nalazimo u sledećem rezultatu iz [12] koji govori o relaciji između $\{1, 3\}$ -inverza i rešenja najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$.

Propozicija 3.4.4. [12] *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. Norma $\|Ax - b\|$ je najmanja kada je $x = A^{(1,3)}b$. Suprotno, ako $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ima osobinu da je $\|Ax - b\|$ najmanja za svako b , gde je $x = Xb$, onda je $X \in A\{1, 3\}$.*

Pored ovog, kao dodatnu motivaciju, koristimo i sledeći rezultat (videti na primer [12]): $X \in A\{1, 3\}$ ako i samo ako je X rešenje najmanjih kvadrata matrice jednačine $AX = I_m$, to jest, imamo da X minimizira normu $\|AX - I\|_F$.

Posmatrajmo $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{n \times m}$ i $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{m \times m}$ kao Hilbert-ove prostore. Na prostoru kompleksnih matrica razmatraćemo Frobeniusov skalarni proizvod, $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B)$, i Frobeniusovu normu $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle}$. Jasno je da svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ definiše preslikavanje iz \mathcal{H} u \mathcal{K} kao $A(X) = AX$.

Na osnovu rezultata iz prethodnog poglavlja a pritom posmatrajući funkcional $Q(X) = \frac{1}{2} \|AX - I\|_F^2$ izvodimo sledeći iterativni proces

$$X_{k+1} = X_k - \gamma_k G_k = X_k - \gamma_k A^*(AX_k - I), \quad k \geq 0. \quad (3.75)$$

Očigledno je da ovaj metod analogan iterativnom metodu (3.69). Ukoliko primenjujemo SC metod za računanje dužine koraka imamo da važi

$$\gamma_{k+1}^{SC} = \begin{cases} \frac{\langle S_k, R_k \rangle}{\langle Y_k, R_k \rangle}, & \langle Y_k, R_k \rangle > 0 \\ \frac{\|S_k\|}{\|Y_k\|}, & \langle Y_k, R_k \rangle \leq 0 \end{cases}, \quad k \geq 0, \quad (3.76)$$

gde je $S_k = X_{k+1} - X_k$, $Y_k = G_{k+1} - G_k$ i $R_k = S_k - \gamma_k Y_k$.

U nastavku prikazujemo algoritam za računanje $\{1, 3\}$ -inverza (odnosno Moore-Penroseovog inverza kao poseban slučaj) proizvoljne kompleksne matrice.

Algoritam 3.4.2 SC metod za računanje $\{1, 3\}$ -inverza matrice A

Ulaz: Kompleksna matrica $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, početna aproksimacija $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ i realne pozitivne konstante $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \xi_1 \ll \frac{2(1-\varepsilon)}{\|A\|^2}$.

- 1: Postaviti $k = 0$, izračunati $Q(X_0)$, G_0 i uzeti $\gamma_0 = 1$.
- 2: Ukoliko je zadovoljen uslov izlaska ići na korak 7; u suprotnom, preći na sledeći korak.
- 3: Izračunati X_{k+1} na osnovu (3.75), $Q(X_{k+1})$, G_{k+1} , $S_k = X_{k+1} - X_k$, $Y_k = G_{k+1} - G_k$.
- 4: Izračunati $\xi_2^{(k+1)} = 2(1 - \varepsilon) \frac{\|G_{k+1}\|^2}{\|AG_{k+1}\|^2}$.
- 5: Izračunati dužinu koraka γ_{k+1} koristeći (3.76). Ukoliko je $\gamma_{k+1} < \xi_1$ ili $\gamma_{k+1} > \xi_2^{(k+1)}$, postaviti $\gamma_{k+1} = \xi_2^{(k+1)}$.
- 6: Postaviti $k = k + 1$ i preći na korak 2.
- 7: Vratiti X_{k+1} i $Q(X_{k+1})$.

Jasno je da iteracije (3.75) mogu da se posmatraju kao opšti gradijentni metod za računanje $\{1, 3\}$ -inverza date matrice. Moguće je primeniti metod najstrmijeg pada za računanje dužine koraka kao i BB metod koji direktno proizilazi iz jednačine (3.71). Formule za računanje ovih dužina koraka date su u nastavku

$$\gamma_{k+1}^{BB} = \frac{\langle Y_k, S_k \rangle}{\langle Y_k, Y_k \rangle} \quad \text{i} \quad \gamma_k^{SD} = \frac{\|G_k\|^2}{\|AG_k\|^2} \quad k \geq 0. \quad (3.77)$$

Poznato je da je BB metod R -linearno konvergentan za proizvoljno dimenzionalnu kvadratnu funkciju [43] kao i da metod najstrmijeg pada konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata matricne jednačine $AX = I$ [104].

Algoritmi (BB i najstrmijeg pada) za računanje $\{1, 3\}$ -inverza i Moore-Penroseovog inverza matrice su skoro identični sa algoritmom 3.4.2. Jedina razlika je u tome što SC metod nameće restrikciju za računanje parametra γ_k u koraku 5, dok takve restrikcije ne postoje kod BB metoda i metoda najstrmijeg pada. Ukažimo na još jednu bitnu razliku između algoritma 3.4.2 i odgovarajućeg BB metoda za računanje uopštenih inverza. BB metod je zapravo ne striktno monotoni gradijentni metod (nije nametnut uslov pozitivnosti dužine koraka), dok sa druge strane imamo SC metod koji je striktno monoton metod opadajućih gradijenata (slično kao i metod najstrmijeg pada).

3.4.4 Osobine konvergencije gradijentnih metoda

Sledeća propozicija predstavlja karakterizaciju rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$ koje je dobijeno pomoću proizvoljnog gradijentnog metoda čija je opšta šema data pomoću (3.69) i koji konvergira ka minimumu funkcionala koji je definisan sa (3.68).

Propozicija 3.4.5. [104] *Neka su \mathcal{H} i \mathcal{K} dati Hilbert-ovi prostori i $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operator takav da važi da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren skup. Neka iterativni proces (3.69) konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$. Dobijeno rešenje je u potpunosti određeno proizvoljno izabranom početnom aproksimacijom $x_0 \in \mathcal{H}$ i ima sledeću reprezentaciju*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)x_0, \quad (3.78)$$

gde je $I \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ identični operator. Otuda $x_0 \in \mathcal{R}(A^*)$ ako i samo ako

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b. \quad (3.79)$$

Slična reprezentacija rešenja najmanjih kvadrata u C^* algebrama, koja se dobijaju pomoću procesa (3.69), je predstavljena u radu [46].

Uvedimo sledeću oznaku za graničnu vrednost iterativnog procesa (3.69) čiji je početni vektor x_0

$$L(x_0) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)x_0.$$

Problem 3.4.1. *Interesantno bi bilo naći eksplicitno rešenje sledećeg problema: za proizvoljno odabrano rešenje najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$, naći odgovarajući vektor $x_0 \in \mathcal{H}$ takav da granična vrednost $L(x_0)$ iterativnog procesa (3.69) bude upravo to rešenje. U nastavku ovog poglavlja dajemo rešenje ovog problema.*

Sledeći rezultat ćemo koristiti da bismo dobili odgovor na postavljeni problem.

Lema 3.4.1. *Neka je slika operatora $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ zatvoren skup, gde su \mathcal{H} i \mathcal{K} Hilbert-ovi prostori. Tada imamo da važi*

a) $A^\dagger AA^{(1,3)} = A^\dagger.$

b) *Neka $b \in \mathcal{K}$. Tada je norma $\|Ax - b\|$ najmanja kada je $x = A^{(1,3)}b$. Obrnuto, ako za $X \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ važi da je za svako b norma $\|Ax - b\|$ najmanja gde je $x = Xb$, onda $X \in A\{1, 3\}$.*

Dokaz. Operator A možemo predstaviti pomoću sledeće forme:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je A_1 invertibilan operator. Dakle,

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(1,3)} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ U & V \end{bmatrix},$$

gde su U, V proizvoljni linearni i ograničeni operatori.

a) Odavde je lako proveriti da važi $A^\dagger AA^{(1,3)} = A^\dagger.$

b) Neka su

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}$$

proizvoljni elementi iz \mathcal{H} i \mathcal{K} redom. Vidimo da je minimum

$$\min \|Ax - b\|^2 = \min \|A_1 x_1 - b_1\|^2 + \|b_2\|^2 = \|b_2\|^2$$

dostignut za $x_1 = A_1^{-1}b_1$. Dakle, sva rešenja najmanjih kvadrata jednačine $Ax = b$ imaju formu $\begin{bmatrix} A_1^{-1}b_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, što je i dokazano u [45]. Neka je x oblika

$$x = A^{(1,3)}b = \begin{bmatrix} A_1^{-1}b_1 \\ Ub_1 + Vb_2 \end{bmatrix},$$

dakle imamo da je x rešenje najmanjih kvadrata. Obrnuto, za svako b važi

$$x = Xb = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 b_1 + X_2 b_2 \\ X_3 b_1 + X_4 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1}b_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Pošto je x rešenje najmanjih kvadrata, odakle imamo da je $X_1 = A_1^{-1}$ i $X_2 = 0$, dobijamo $X \in A\{1, 3\}$.

□

Lema 3.4.2. *Neka su $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{M}$ Hilbert-ovi prostori. Ukoliko je slika operatora $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ zatvoren skup i ukoliko $F \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{H})$ zadovoljava $\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$, onda postoji neko $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ tako da važi $FG = I - A^\dagger A$.*

Dokaz. Zadržaćemo oznake iz leme 3.4.1. Pošto je $\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$, zaključujemo da F ima sledeću formu:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \end{bmatrix} : \mathcal{M} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix},$$

gde je preslikavanje $F_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}(A)$ na, pa je, dakle, desno invertibilno. Postoji neko $G_1 : \mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{M}$, tako da je $F_1 G_1 = I$. Dalje, posmatrajmo operator

$$G = \begin{bmatrix} 0 & G_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{M}.$$

Imamo da važi

$$FG = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I - A^\dagger A,$$

što je i trebalo dokazati. □

Najpre izvedimo pojedinačno rešenje problema 3.4.1.

Teorema 3.4.2. *Za proizvoljan operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ čija je slika zatvoren skup i proizvoljno izabrano rešenje najmanjih kvadrata s operatorske jednačine $Ax = b$ imamo da važi sledeće*

$$s = L(s - A^\dagger b). \quad (3.80)$$

Dokaz. Lema 3.4.1, pod **b**), nam daje karakterizaciju skupa svih rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$ pomoću $\{A^{(1,3)}b + (I - A^{(1,3)}A)y \mid y \in \mathcal{H}\}$, gde je $A^{(1,3)}$ proizvoljan ali fiksiran element. Na primer, moguće je izabrati $A^{(1,3)} = A^\dagger$. Neka je $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ takav da važi $\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$ (recimo možemo uzeti $F = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{N}(A)}$). Pošto je $\mathcal{R}(I - A^\dagger A) = \mathcal{N}(A)$, na osnovu leme 3.4.2 imamo da postoji operator $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ takav da je $FG = I - A^\dagger A$. Jasno je da se karakterizacioni skup može predstaviti na sledeći način

$$\{A^\dagger b + Fy \mid y = Gz, z \in \mathcal{H}\}.$$

Dakle imamo

$$s = A^\dagger b + FGz = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)z.$$

Može se pokazati sledeće

$$s = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)(s - A^\dagger b),$$

uzimajući u obzir da je $s = Sb$ gde je S neki $\{1, 3\}$ -inverz od A . Dakle, moguće je uzeti $z = s - A^\dagger b$, što povlači

$$x_0 = s - A^\dagger b,$$

čime je dokaz završen. □

Sledeća teorema nam daje opšte rešenje navedenog problema.

Teorema 3.4.3. *Za proizvoljno izabran operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i proizvoljno rešenje najmanjih kvadrata s jednačine $Ax = b$ imamo da važi*

$$s = L(s - A^\dagger b + A^\dagger Ay), \quad y \in \mathcal{H}. \quad (3.81)$$

Dokaz. Pođimo najpre od rešenja najmanjih kvadrata s jednačine $Ax = b$, dobijenog pomoću (3.69)

$$s = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)x_0.$$

Da bismo predstavili vektor x_0 u terminima vektora s razmatramo sledeću operatorsku jednačinu

$$Cx_0 = d, \quad (3.82)$$

gde je $C = I - A^\dagger A$ i $d = s - A^\dagger b$. Pošto je operator C idempotent i Hermitski (odnosno ortogonalni projektor), imamo da važi $C = C^\dagger C$. Na osnovu teoreme 3.4.2 zaključujemo da jednačina $Cx_0 = d$ ima rešenje. Prateći opštu formu rešenja najmanjih kvadrata (koje je ujedno i samo rešenje) jednačine $Cx_0 = d$ (videti [105]), zaključujemo da važi

$$x_0 = C^\dagger d + (I - C^\dagger C)y, \quad y \in \mathcal{H}. \quad (3.83)$$

Nakon primena jednakosti $A^\dagger As = A^\dagger b$ i $I - C^\dagger C = A^\dagger A$ dobijamo

$$\begin{aligned} x_0 &= (I - A^\dagger A)(s - A^\dagger b) + A^\dagger Ay \\ &= s - A^\dagger b - A^\dagger As + A^\dagger b + A^\dagger Ay \\ &= s - A^\dagger b + A^\dagger Ay, \end{aligned} \quad (3.84)$$

čime je dokaz kompletiran. \square

Napomena 3.4.1. *Posmatrajmo SC metod, BB metod i metod najstrmijeg pada kao gradijentne metode za nalaženje rešenja najmanjih kvadrata matrice jednačine $AX = I$ kao i iterativni proces predstavljen u radu [46]. Za proizvoljnu aproksimaciju X_0 ovi metodi konvergiraju ka $A^{(1,3)}$ koji se može predstaviti kao $A^\dagger + (I - A^\dagger A)X_0$. U slučaju kada je $X_0 \in \mathcal{R}(A^*)$ imamo da ovi metodi konvergiraju ka A^\dagger .*

U tom smislu, realno je očekivati da i za opštu iterativnu šemu (3.75) važe iste osobine za konvergenciju.

Posledica 3.4.1. *Neka je matrica $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ proizvoljna inicijalna aproksimacija, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ data matrica i $I \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Ukoliko niz $(X_k)_k$ formiran gradijentnom metodom (3.75) konvergira ka rešenju najmanjih kvadrata matrice jednačine $AX = I$, onda to rešenje ima sledeći oblik*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A^\dagger + (I - A^\dagger A)X_0. \quad (3.85)$$

Kao poseban slučaj imamo, $X_0 \in \mathcal{R}(A^)$ ako i samo ako*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A^\dagger. \quad (3.86)$$

Dokaz. Sledi direktno iz propozicije 3.4.5. \square

Napomena 3.4.2. Na osnovu posledice 3.4.1, zaključujemo da je $\{1, 3\}$ -inverz koji je dostignut pomoću iterativnog procesa (3.75) (kao rešenje nejavnijih kvadrata) u potpunosti određen početnom aproksimacijom X_0 , i da je dat kao $A^\dagger + (I - A^\dagger A)X_0$. Graničnu vrednost iterativnog procesa (3.75) određenu tačkom X_0 označavaćemo sa $L(X_0)$.

Razmatrajmo sada algebarske osobine skupa $\{L(X_0) \mid X_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}\}$.

Posledica 3.4.2. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ data kompleksna matrica, tada imamo da važi

$$L = \{L(X_0) \mid X_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}\} = A\{1, 3\}. \quad (3.87)$$

Dokaz. Koristimo sledeću karakterizaciju skupa $A\{1, 3\}$ iz [12]:

$$A\{1, 3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)}A)Z : Z \in \mathbb{C}^{n \times m}\},$$

za proizvoljan ali fiksiran $A^{(1,3)} \in A\{1, 3\}$. Recimo, moguće je koristiti $A^{(1,3)} = A^\dagger$. U tom slučaju inkluzija $L \subseteq A\{1, 3\}$ je očigledna. Da bismo pokazali obrnutu inkluziju uzmimo proizvoljan $A^{(1,3)} \in A\{1, 3\}$. Imamo da važi $A^{(1,3)} = A^\dagger + (I - A^\dagger A)Z$, $Z \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ukoliko je početna aproksimacija u (3.75) uzeta kao $X_0 = Z$ dobijamo $A^{(1,3)} = L(X_0)$, što povlači $A\{1, 3\} \subseteq L$. \square

Posmatrajmo sada analogan problem problemu 3.4.1 za matrice jednačine $AX = I$; za proizvoljno izabran $\{1, 3\}$ -inverz $A^{(1,3)}$ treba naći odgovarajuću matricu X_0 tako da granična vrednost $L(X_0)$ iterativnog procesa (3.85) bude jednaka $A^{(1,3)}$.

Sledeća posledica daje opšto rešenje ovog problema.

Posledica 3.4.3. Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $S \in A\{1, 3\}$ imamo da važi

$$S = L(S - A^\dagger + A^\dagger AY), \quad Y \in \mathbb{C}^{n \times m}. \quad (3.88)$$

3.4.5 Numerički rezultati

Na osnovu osobina konvergencije gradijentnih metoda (koji uključuju metod najstrmijeg pada, SC i BB metod), za računanje inverza, MP inverza i različitih $\{1, 3\}$ -inverza, koje su izučavane u prethodnom odeljku čini se logičnim i upoređivanje njihovih numeričkih osobina. Kod za ova tri metoda (najstrmiji pad, BB i SC metod) pisan je u programskom paketu MATLAB i testiran na Intel-ovom Core duo 1.6 GHz procesoru.

Za test probleme izabrane su 5 različite vrste matrica. Za svaku test matricu posmatrali smo 5 različitih dimenzija koje su izabrane na osnovu same prirode test problema. Tokom testiranja posmatrali smo dva indikatora: broj iteracija i tačnost dobijenog rezultata; to jest, razliku između tačnog generalisanog inverza i njegove aproksimacije (dobijene pomoću algoritma) datu u terminima matrice norme. Kriterijumi za zaustavljanje iteracija su:

$$\|X_{k+1} - X_k\|_F \leq \varepsilon = 10^{-8} \quad \text{i} \quad |f_{k+1} - f_k| \leq \varepsilon = 10^{-8}.$$

Primer 3.4.1. U ovom primeru računamo inverz regularne simetrične matrice Z_n reda $n = 2, 4, 6, \dots$, koja je uzeta iz [162]

$$z_{i,j} = \begin{cases} a - 1, & i = j, \quad i \text{ even} \\ a + 1, & i = j, \quad i \text{ odd} \\ a, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.89)$$

Za računanje inverza parametarske matrice Z_n uzeli smo $a = 2$.

Tabela 3.4.1. Numerički rezultati za računanje inverza matrice Z_n , za slučaj $a = 2$

Dim	Br. iteracija			$\ Z^{-1} - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
10	5	8	5	1.4e-11	6.9e-07	2.9e-09
20	5	13	5	4.6e-10	1.9e-09	3.4e-06
30	5	13	5	3.2e-09	6.6e-09	3.4e-05
40	5	13	5	6.6e-09	9.2e-08	2.7e-04
50	7	8	5	3.9e-08	3.5e-05	7.9e-04

Na osnovu tabele 3.4.1 jasno je da SC metod kao i metod najstrmijeg pada nadmašuju BB metod približno dvaput, u pogledu broja iteracija. Takođe, posmatrajući tačnost SC metod se izdvaja kao najbolji. Važno je istaći i to da je matrica Z_n dobro uslovljena matrica, pa je samim tim i metod najstrmijeg pada uporediv sa metodama dvotačkaste dužine koraka.

Primer 3.4.2. *Strukturna (Toeplitz-ova) test matrica*

$$A_n = \text{toeplitz}[(1, 1/2, \dots, 1/(n-1), 1/n)]$$

je uzeta iz [14]. Predstavljamo numeričke rezultate za računanje njenog inverza.

Tabela 3.4.2. Numerički rezultati za računanje inverza Toeplitz-ove matrice A_n

Dim	Br. iteracija			$\ A^{-1} - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
10	83	72	618	4.6e-07	2.2e-08	2.8e-07
20	117	108	903	2.4e-07	1.9e-08	5.1e-07
30	124	127	1237	4.1e-07	1.4e-07	7.1e-07
40	150	137	1533	5.6e-07	1.4e-06	8.5e-07
50	168	162	1789	6.9e-07	6.5e-07	9.8e-07

Na osnovu prikazanih rezultata za računanje inverza dobro uslovljene matrice A_n zaključujemo da metod najstrmijeg pada nije konkurentan sa metodima dvotačkaste dužine koraka posmatrjući broj iteracija. Pored toga, imamo da BB metod ima malu prednost u odnosu na SC metod. Treba reći i to da ne postoji značajna razlika u dobijenoj tačnosti za ova tri posmatrana metoda.

Primer 3.4.3. *U ovom primeru razmatramo simetričnu test matricu S_n reda $n = 3, 5, 7, \dots$ i ranga $n - 1$, preuzetu iz [162], koja je definisana na sledeći način*

$$s_{i,j} = \begin{cases} a - 1, & i = j, \text{ } i \text{ even} \\ a + 1, & i = j, \text{ } i \text{ odd} \\ a + 1, & |i - j| = n - 1 \\ a, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.90)$$

Za ovu loše uslovljenu matricu čiji je kondicioni broj $\text{cond}_F(S_n) \approx |a|^2(n^2 - 3n/2)$, $|a| \gg 2$, računamo Moore-Penroseov inverz. Predstavljamo numeričke rezultate koji su dobijeni nakon izbora $a = 2$.

Tabela 3.4.3. Numerički rezultati za računanje Moore-Penrose-ovog inverza matrice S_n

Dim	Br. iteracija			$\ S^\dagger - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
9	12	17	216941	1.6e-04	1.8e-06	2.6e-04
11	12	17	315545	4.6e-05	2.9e-06	4.9e-04
13	9	17	449687	1.9e-05	3.0e-05	8.7e-04
15	9	17	629469	1.0e-05	1.2e-04	0.0014
17	9	17	863949	6.3e-06	4.1e-04	0.0022

Na osnovu tabele 3.4.3 jasno je da se metodi sa dvotačkastom dužinom koraka ponašaju značajno bolje u odnosu na metod najstrmijeg pada ne samo u pogledu broja iteracija već i u pogledu preciznosti. Ogroman broj iteracija kod metoda najstrmijeg pada potvrđuje činjenicu da lošvoljeni problemi veoma mnogo, negativno, utiču na konvergenciju kod ovog metoda. Pored toga, imamo da je SC metod skoro dva puta bolji od BB metoda posmatrajući broj iteracija.

Primer 3.4.4. Razmatramo tridiagonalnu kvadratnu matricu B_n reda n , $\text{rang}(B_n) = n - 1$ koja je preuzeta iz [162]

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{0} & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Predstavljamo numeričke rezultate za računanje Moore-Penroseovog inverza B_n^\dagger kao i $(1, 3)$ -inverza. Matrica B_n je loše uslovljena matrica čiji je spektralni kondicioni broj $\text{cond}_2(B_n) = 4n^2/\pi^2$.

Tabela 3.4.4. Numerički rezultati za računanje Moore-Penroseovog inverza matrice B_n

Dim	Br. iteracija			$\ B^\dagger - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
5	71	42	585	7.7e-07	4.6e-07	3.3e-07
10	340	170	11369	5.8e-06	1.8e-07	5.8e-06
15	924	671	55215	1.7e-05	1.5e-05	2.9e-05
20	2130	2058	168083	2.3e-04	8.6e-07	9.5e-05
30	3125	4669	801031	7.4e-04	2.1e-07	4.8e-04

Da bismo izračunali $\{1, 3\}$ -inverz matrice B_n , za početnu iteraciju napravili smo sledeći izbor $X_0 = I$. Svaki od posmatranih metoda konvergira ka matrici $B^\dagger + I - B^\dagger B$, koja je u potpunosti određena pomoću matrice $X_0 = I$.

Tabela 3.4.5. Numerički rezultati za računanje matrice $B^{(1,3)}$.

Dim	Br. iteracija			$\ B^{(1,3)} - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
5	63	44	629	6.3e-08	3.5e-10	3.3e-07
10	365	413	11253	2.2e-06	1.1e-05	5.8e-06
15	847	517	54843	6.7e-05	3.4e-06	3.0e-05
20	2254	1813	167147	2.5e-04	2.3e-04	9.6e-05
30	4096	3716	797241	1.0e-03	1.3e-03	4.9e-04

SC i BB metod pokazuju značajno bolje performanse u odnosu na metod najstrmijeg pada kako za računanje Moore-Penroseovog inverza, tako i za računanje $\{1, 3\}$ inverza matrice B_n , što je i za očekivati. Iako BB metod za većinu različitih dimenzija daje bolje rezultate od SC metoda, posmatrajući broj iteracija, u nekim slučajevima kao na primet za $n = 30$ iz tabele 3.4.4 vidimo veliku razliku u broju iteracija koja ide u korist SC metoda.

Primer 3.4.5. *Test matrice A_n su konstruisane pomoću "Matrix Market" generatora. Matrice A_n su nesimetrične kvadratne retke matrice (40% elemenata su nule) sa slučajno odabranim elementima koji imaju uniformnu raspodelu na intervalu $[0, 5]$.*

Tabela 3.4.6. Numerički rezultati za računanje Moore-Penroseovog inverza matrice A_n

Dim	Br. iteracija			$\ A^\dagger - X\ _F$		
	SC	BB	Steepest	SC	BB	Steepest
5	57	42	253	4.5e-07	1.5e-07	2.6e-07
10	478	485	23763	3.7e-05	1.5e-06	2.4e-05
15	445	419	13567	8.9e-06	3.0e-05	1.2e-05
20	384	300	8955	1.7e-05	1.4e-05	9.0e-06
30	1532	1305	137873	2.0e-04	1.4e-04	1.7e-04

Za računanje MP inverza slučajnih retkih matrica A_n ponovo uočavamo dominaciju metoda sa dvotačkastom dužinom koraka u odnosu na metod najstrmijeg pada. Takođe izdvajamo malo bolje performanse BB metoda u odnosu na SC metod u pogledu broja iteracija.

Glava 4

Primene Toeplitz-ovih matrica

U ovoj glavi ćemo predstaviti neke od primena Toeplitz-ovih matrica. Najpre ćemo uvesti definicije Catalan-ovih i uopštenih Fibonacci-jevih matrica. Elementi tih matrica će biti Fibonacci-jevi i Catalan-ovi brojevi a one će biti uređene tako da budu Toeplitz-ove matrice, što znači da će biti konstante duž paralela glavne dijagonale. Koristeći konvoluciju izvešćemo fomule za računanje običnih i uopštenih inverza Fibonacci-jevih i Catalan-ovih matrica. Kao posledicu ovih izvođenja i formula dobićemo puno interesantnih novih kombinatornih identiteta koji uključuju kako Catalan-ove tako i uopštene Fibonacci-jeve brojeve.

U poslednjem poglavlju ove glave prikazaćemo neke tehnike za restauraciju slika kod kojih je zamućenje nastalo usled ravnomernog linearnog kretanja. Naime, u procesu obnavljanja oštećene slike glavni problem biće izračunavanje MP inverza jedne veoma karakteristične Toeplitz-ove matrice. Videćemo na koji je način moguće efikasno izračunati njen MP inverz. Na taj način daćemo vezu između oblasti strukturnih matrica i njihovih primena i uopštenih inverza matrica.

4.1 Uopšteni Fibonacci-jevi brojevi i odgovarajuće Toeplitz-ove matrice

Fibonacci-jevi brojevi $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ su elementi niza $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ kod koga je svaki član dobijen kao suma prethodna dva elementa. Početne vrednosti ovog niza su $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Jedna od definicija uopštenih Fibonacci-jevih brojeva kaže da se oni mogu generisati kao rešenje sledeće linearne diferencne jednačine

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = AF_{n+1} + BF_n \quad (n \in \mathbb{N}_0; A, B \in \mathbb{R}). \quad (4.1)$$

gde su A, B dati brojevi.

Rešenje jednačine (4.1) očigledno ima sledeću funkciju generatrisu niza uopštenih Fibonacci-jevih brojeva

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = \frac{x}{1 - Ax - Bx^2} \quad (A, B \in \mathbb{R}). \quad (4.2)$$

Međutim, nije dovoljno posmatrati uopštene Fibonacci-jeve brojeve date pomoću (4.1). Naime, u literaturi su veoma poznati i takozvani Lucas-ovi brojevi koji su dobili ime po Francuskom matematičaru Francois Edouard Anatole Lucas-u (1842-1891), koji zadovoljavaju istu

rekurzivnu formulu kao i Fibonacci-jevi brojevi, ali startuju sa drugačijim početnim vrednostima. Lucas-ovi brojevi su elementi niza 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... što žnaci da za njih važi

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.3)$$

Uzimajući za početne vrednosti proizvoljne realne brojeve, to jest stavljajući $G_0 = a$ i $G_1 = b$ i prateći istu rekurzivnu šemu kao u (4.1) i (4.3) dolazimo do još opštije iterativne formule za uopštene Fibonacci-jeve brojeve (videti, na primer [74], [83], [89]-glava 7, [147]).

$$G_0 = a, \quad G_1 = b, \quad G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \in \mathbb{N}_0; a, b, A, B \in \mathbb{R}). \quad (4.4)$$

Primer 4.1.1. Niz generalisanih Fibonacci-jevih brojeva predstavlja uopštenje sledećih nizova:

- (1) Fibonacci-jevi brojevi odgovaraju slučaju $a = 0, b = 1, A = B = 1$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...;
- (2) Lucas-ovi brojevi odgovaraju slučaju $a = 2, b = 1, A = B = 1$: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...;
- (3) Jacobsthal-ovi brojevi odgovaraju slučaju $a = 0, b = 1, A = 1, B = 2$: 0, 1, 1, 3, 5, 11, ...;
- (4) Pell-ovi brojevi odgovaraju slučaju $a = 0, b = 1, A = 2, B = 1$: 0, 1, 2, 5, 12, 29, ...

4.1.1 Definicije i osnovni pojmovi

U ovom poglavlju doktorske disertacije posebna pažnja biće posvećena brojevima koji se dobijaju za slučaj $A = B = 1$ i Toeplitz-ovim matricama čiji su elementi ovi uopšteni Fibonacci-jevi brojevi.

Definicija 4.1.1. [91] *Kvadratnu matricu $\mathcal{F}_n = [f_{i,j}]$ ($i, j = 1, \dots, n$) dimenzija $n \times n$ čiji su elementi Fibonacci-jevi brojevi i koja je definisana na sledeći način*

$$f_{i,j} = \begin{cases} F_{i-j+1}, & i - j + 1 \geq 0, \\ 0, & i - j + 1 < 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

nazivamo Fibonacci-jevom matricom.

Autori u svom radu prikazuju Cholesky faktorizaciju i inverz Fibonacci-jeve matrice [91]. Zatim, odnos između Pascal-ove matrice i Fibonacci-jeve matrice je izučavan u [92], i kao posledica tih relacija izvedeni su odgovarajući kombinatorni identiteti. Analogno Fibonacci-jevoj matrici definisana je i Lucas-ova matrica.

Definicija 4.1.2. [159] *Kvadratnu matricu $\mathcal{L}_n = [l_{i,j}]$ ($i, j = 1, \dots, n$) dimenzija $n \times n$ čiji su elementi Lucas-ovi brojevi i koja je definisana na sledeći način*

$$l_{i,j} = \begin{cases} L_{i-j+1}, & i - j \geq 0, \\ 0, & i - j < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

nazivamo Lucas-ovom matricom.

Primer 4.1.2. *Fibonacci-jeva i Lucas-ova matrica dimenzija 7, redom.*

$$\mathcal{F}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 11 & 7 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 27 & 18 & 11 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

U svom radu autori istražuju inverz i Cholesky faktorizaciju matrice \mathcal{U}_n koja je definisana na sledeći način

$$u_{i,j} = \begin{cases} U_{i-j+1}, & i - j + 1 \geq 0, \\ 0, & i - j + 1 < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

gde je niz U_n dat pomoću rekurentne relacije $U_{n+1} = AU_n + BU_{n-1}$, $\delta = \sqrt{A^2 + 4B} \in \mathbb{R}$, $A, B, U_1 \in \mathbb{Z}$ i $U_0 = 0$ [130]. Autori takođe posmatraju i opštiji slučaj tako što generišu niz U_n na osnovu rekurentne relacije reda r , uzimajući za početne vrednosti $U_0 = U_{-1} = \dots = U_{2-r} = 0$, U_1 proizvoljno.

Na osnovu prethodnih definicija i primera nije teško uočiti da su Fibonacci-jeve i Lucas-ove matrice definisane pomoću (4.5), (4.6) i (4.7) zapravo donje trougaone Toeplitz-ove matrice.

Gore pomenuti radovi će nam poslužiti kao motivacija za dobijanje novih rezultata. To je najpre drugačiji pristup u izračunavanju inverza matrica definisanih na osnovu (4.5) i (4.6) baziran na konvoluciji. Zatim ćemo definisati klasu Toeplitz blok matrica koje predstavljaju uopštenje definicija 4.1.1 i 4.1.2 i računati njihove inverze kao i Moore-Penroseove inverze. Kao posledice tih izračunavanja izvešćemo nekoliko interesantnih kombinatornih identiteta.

Konvolucija je pojam koji je u tesnoj vezi sa Toeplitz-ovim matricama. Naime, imamo da u opštem slučaju vektor koji se dobija kao proizvod donje trougaone Toeplitz-ove matrice i proizvoljnog vektora

$$y = \mathcal{T}_n x = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & t_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

čiji su elementi dati kao

$$y_k = \sum_{i=0}^k t_{k-i} x_i, \quad (4.8)$$

zapravo, predstavlja konvoluciju.

Osnovna ideja kod *konvolucije* jeste da se kombinuje jezgro(lista) za sukcesivnom podlistom podataka koji su uzeti iz neke liste.

Definicija 4.1.3. *Konvolucija \star između dve liste sa istim brojem elemenata data je kao sledeća suma*

$$\{K_0, K_1, \dots, K_r\} \star \{u_0, u_1, \dots, u_r\} = \sum_{i=0}^r K_i u_{r-i}.$$

Specijalno, konvolucija između jezgra, koje se sastoji od samo dva elementa $\{a, b\}$, i proizvoljne liste elemenata $u = \{u_0, u_1, \dots, u_r\}$, $r \geq 2$ jednaka je

$$\{a, b\} \star \{u_0, u_1, \dots, u_r\} = \{au_1 + bu_0, au_2 + bu_1, \dots\}.$$

4.1.2 Konvolucija i odgovarajući kombinatorni identiteti

Kao što smo ranije i napomenuli posebna pažnja biće posvećena uopštenim Fibonacci-jevim brojevima za slučaj $A = B = 1$, odnosno posmatraćemo sledeće brojeve

$$G_0 = a, \quad G_1 = b, \quad G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \quad (n \in \mathbb{N}_0; a, b \in \mathbb{R}), \quad (4.9)$$

koje ćemo u nastavku zvati prosto uopštenim (generalisanim) Fibonacci-jevim brojevima.

Najpre uočimo kako je moguće iskoristiti konvoluciju radi predstavljanja (generisanja) uopštenih Fibonacci-jevih brojeva. Naime, imamo da je rekurentna formula $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ diferencna jednačina drugog reda pa je njeno op vsto rešenje moguće predstaviti kao linearnu kombinaciju dva fundamentalna rešenja.

$$\{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\} \quad \text{i} \quad \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}.$$

Jasno je daje drugo fundamentalno rešenje bas niz Fibonacci-jevih brojeva. Takođe, imamo da prvo fundamentalno rešenje predstavlja opet niz Fibonacci-jevih brojeva; ali koji počinje sa brojem $F_{-1} = 1$. Dakle, zaključujemo da se n -ti generalisani Fibonacci-jev broj može predstaviti pomoću sledeće veoma jednostavne konvolucije

$$G_n = a \cdot F_{n-1} + b \cdot F_n = \{b, a\} \star \{F_{n-1}, F_n\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.10)$$

Na taj način imamo da se skup uopštenih Fibonacci-jevih brojeva može generisati pomoću sledeće konvolucije, čije je jezgro dato kao lista $\{b, a\}$:

$$\{G_0, G_1, \dots\} = \{aF_{-1} + bF_0, aF_0 + bF_1, \dots\} = \{b, a\} \star \{F_{-1}, F_0, F_1, \dots\}. \quad (4.11)$$

Sledeća lema predstavlja veoma koristan kombinatorni identitet i daje vezu između uopštenih i običnih Fibonacci-jevih brojeva.

Lema 4.1.1. *Za proizvoljne cele brojeve $m \geq 0$ i $k > 0$, imamo da važi sledeći identitet*

$$f(m, k) := G_m G_{m+k} - G_{m+1} G_{m+k-1} = (-1)^m F_{k-1} (a^2 + ab - b^2), \quad (4.12)$$

koga čine obični i uopšteni Fibonacci-jevi brojevi.

Dokaz. Za dokaz ove leme koristićemo sledeci identitet sa Fibonacci-jevim brojevima koga je veoma lako proveriti:

$$F_p F_{p+k} - F_{p+1} F_{p+k-1} = (-1)^{p+1} F_{k-1}, \quad p \geq 0, k > 0. \quad (4.13)$$

Koristeći jednostavnu reprezentaciju (4.10) za brojeve G_n , imamo da važi

$$\begin{aligned} f(m, k) &= (aF_{m-1} + bF_m)(aF_{m+k-1} + bF_{m+k}) - (aF_m + bF_{m+1})(aF_{m+k-2} + bF_{m+k-1}) \\ &= a^2(F_{m-1}F_{m+k-1} - F_m F_{m+k-2}) + b^2(F_m F_{m+k} - F_{m+1} F_{m+k-1}) + \\ &\quad ab(F_{m-1}F_{m+k} - F_{m+1}F_{m+k-2}) \end{aligned}$$

Dalje, primenjujući pomoćni rezultat (4.13) i

$$F_{m-1}F_{m+k} - F_{m+1}F_{m+k-2} = -(F_m F_{m+k} - F_{m+1}F_{m+k-1})$$

dobijamo (4.12). \square

Napomena 4.1.1. *Na osnovu prethodne leme, nije teško uočiti da identitet (4.12) koji se tiče uopštenih i običnih Fibonacci-jevih brojeva zapravo predstavlja uopštenje relacije (4.13) koja se odnosi samo na obične Fibonacci-jeve brojeve.*

U narednoj teoremi prikazujemo konvolucionu formulu između liste, koja se sastoji od uopštenih Fibonacci-jevih brojeva, i odgovarajućih stepena količnika

$$\frac{-G_m}{G_{m+1}}, \quad m \geq 0, \quad G_{m+1} \neq 0.$$

Radi jednostavnostavnijeg zapisa koristimo sledeću oznaku

$$\begin{aligned} \text{Con}(r, m) &:= \{G_{m+1}, \dots, G_{m+r-1}\} \star \left\{ 1, \frac{-G_m}{G_{m+1}}, \dots, \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-2} \right\} \\ &= \sum_{k=2}^r G_{k+m-1} \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Teorema 4.1.1. *Za uopštene Fibonacci-jeve brojeve imamo da važi sledeća konvolucionna formula*

$$\text{Con}(r, m) = F_{r-1} G_{m+1}. \quad (4.15)$$

Celi brojevi r, m zadovoljavaju sledeće uslove $r \geq 2, m \geq 0$ i $G_{m+1} \neq 0$.

Dokaz. Nije teško pokazati da važi sledeće uopštenje Binet-ove formule za Fibonacci-jeve brojeve:

$$G_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

gde je

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{5a + \sqrt{5}a - 2\sqrt{5}b}{10}, \quad c_2 = \frac{5a - \sqrt{5}a + 2\sqrt{5}b}{10}, \\ \alpha &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Odavde se lako proverava da važi

$$\alpha\beta = -1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha - \beta = -\sqrt{5}. \quad (4.17)$$

Nakon primene (4.16) i prostih transformacija imamo da važi:

$$\begin{aligned} \text{Con}(r, m) &= \sum_{k=0}^{r-2} (c_1 \alpha^{k+m+1} + c_2 \beta^{k+m+1}) \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-k-2} \\ &= c_1 \alpha^{m+1} \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-2} \cdot \sum_{k=0}^{r-2} \left(\frac{-\alpha G_{m+1}}{G_m}\right)^k + c_2 \beta^{m+1} \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-2} \cdot \sum_{k=0}^{r-2} \left(\frac{-\beta G_{m+1}}{G_m}\right)^k. \end{aligned}$$

Nakon par izračunavanja i sređivanja, dobijamo

$$\text{Con}(r, m) = G_m \left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-2} \left[c_1 \alpha^{m+1} \frac{1 - \left(\frac{-\alpha G_{m+1}}{G_m}\right)^{r-1}}{G_m + \alpha G_{m+1}} + c_2 \beta^{m+1} \frac{1 - \left(\frac{-\beta G_{m+1}}{G_m}\right)^{r-1}}{G_m + \beta G_{m+1}} \right].$$

Ukoliko primenimo identitet

$$(G_m + \alpha G_{m+1})(G_m + \beta G_{m+1}) = G_m G_{m+2} - G_{m+1}^2,$$

zatim jednakosti (4.17) i grupišemo slične članove, imamo da važi:

$$\begin{aligned} \text{Con}(r, m) = & \frac{c_1 \left((-1)^{r-2} \alpha^{m+1} \frac{G_m^{r-1}}{G_{m+1}^{r-2}} + \alpha^{m+r} G_{m+1} \right) (G_m + \beta G_{m+1})}{G_m G_{m+2} - G_{m+1}^2} \\ & + \frac{c_2 \left((-1)^{r-2} \beta^{m+1} \frac{G_m^{r-1}}{G_{m+1}^{r-2}} + \beta^{m+r} G_{m+1} \right) (G_m + \alpha G_{m+1})}{G_m G_{m+2} - G_{m+1}^2}. \end{aligned}$$

Imenilac od $\text{Con}(r, m)$ može se transformisati u sledeću formu nakon par elementarnih algebarskih transformacija

$$\begin{aligned} & (-1)^{r-2} c_1 \alpha^{m+1} \left(\frac{G_m^r}{G_{m+1}^{r-2}} + \beta \frac{G_m^{r-1}}{G_{m+1}^{r-3}} \right) + c_1 \alpha^{m+r} (G_{m+1} G_m + \beta G_{m+1}^2) \\ & + (-1)^{r-2} c_2 \beta^{m+1} \left(\frac{G_m^r}{G_{m+1}^{r-2}} + \alpha \frac{G_m^{r-1}}{G_{m+1}^{r-3}} \right) + c_2 \beta^{m+r} (G_{m+1} G_m + \alpha G_{m+1}^2). \end{aligned}$$

Primenom Binet-ove formule (4.16) dobijamo

$$\text{Con}(r, m) = \frac{(-1)^{r-2} \left(G_{m+1} \frac{G_m^r}{G_{m+1}^{r-2}} - G_m \frac{G_m^{r-1}}{G_{m+1}^{r-3}} \right) + G_{m+r} G_{m+1} G_m - G_{m+r-1} G_{m+1}^2}{G_m G_{m+2} - G_{m+1}^2}.$$

Lako se može proveriti sledeće

$$\text{Con}(r, m) = G_{m+1} \frac{G_m G_{m+r} - G_{m+1} G_{m+r-1}}{G_m G_{m+2} - G_{m+1}^2}, \quad (4.18)$$

pa nakon primene (4.12) konačno dobijamo

$$\text{Con}(r, m) = G_{m+1} \frac{f(m, r)}{f(m, 2)} = F_{r-1} G_{m+1},$$

čime je završen dokaz. \square

Uzimajući određene vrednosti za parametre a , b a kasnije i m kao posledice teoreme 4.1.1 dobijamo sledeće kombinatorne identitete.

U slučaju $a = 0$, $b = 1$ predstavljamo kombinatorni identitet koji nam govori o korelaciji između običnih Fibonacci-jevih brojeva.

Posledica 4.1.1. *Za Fibonacci-jeve brojeve F_n , proizvoljne cele brojeve $r \geq 2$ i $m \geq 0$ imamo sledeću konvolucionu formulu:*

$$\sum_{l=2}^r F_{l+m-1} \left(\frac{-F_m}{F_{m+1}} \right)^{r-l} = F_{r-1} F_{m+1}. \quad (4.19)$$

Slično, za slučaj $a = 2$, $b = 1$ imamo analogan kombinatorni identitet koji obuhvata Fibonacci-jeve i Lucas-ove brojeve.

Posledica 4.1.2. Za Lucas-ove brojeve L_n , proizvoljne cele brojeve $r \geq 2$, $m \geq 0$ imamo da važi sledeća konvoluciona formula:

$$\sum_{l=2}^r L_{l+m-1} \left(\frac{-L_m}{L_{m+1}} \right)^{r-l} = F_{r-1} L_{m+1}. \quad (4.20)$$

Ukoliko stavimo $m = 0$ izvodimo kombinatorni identitet koji predstavlja specijalni slučaj konvolucije koja obuhvata uopštene Fibonacci-jeve brojeve.

Posledica 4.1.3. Parcijalna suma proizvoda uopštenih Fibonacci-jevih brojeva sa stepenima izraza $-\frac{b}{a}$ može se izraziti preko Fibonacci-jevog broja na sledeći način:

$$\sum_{l=1}^{r-1} G_l \left(-\frac{b}{a} \right)^l = b \left(-\frac{b}{a} \right)^{r-1} F_{r-1}. \quad (4.21)$$

4.1.3 Inverzija matrica zasnovana na konvoluciji

U ovom odeljuku ćemo najpre predstaviti donje trouganu matricu $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$, čiji su elementi uopšteni Fibonacci-jevi brojevi, počevši od $G_{k+1} \neq 0$ (gde je k proizvoljan ceo broj takav da je $k \geq 0$). Sa druge strane imamo da ne pozitivan ceo broj s zapravo predstavlja broj paralela glavne dijagonale koje su jednake nuli (računajući glavnu dijagonalu i dijagonale ispod nje). Ova matrica predstavlja uopštenje predhodno definisanih matrica pomoću (4.5) i (4.6).

Definicija 4.1.4. Neka je $\{G_l\}_{l \geq 0}$ niz uopštenih Fibonacci-jevih brojeva. Za proizvoljne cele brojeve s, k za koje važi $s \leq 0$ i $k \geq 0$, uopštena Fibonacci-jeva matrica tipa (s, k) i reda n , koju obeležavamo sa $\mathcal{G}_n^{(s,k)} = [g_{ij}^{(s,k)}]$, je definisana na sledeći način

$$g_{i,j}^{(s,k)} = \begin{cases} G_{i-j+s+k+1}, & i - j + s \geq 0 \\ 0, & i - j + s < 0 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

U slučaju kada je $s = 0$ ili $k = 0$ bez gubitka ikakvih informacija možemo iz oznake matrice izostaviti s ili k , redom. To znači da ćemo u nastavku koristiti sledeće oznake $\mathcal{G}_n^{(k)} = \mathcal{G}_n^{(0,k)}$ i $\mathcal{G}_n^{(s)} = \mathcal{G}_n^{(s,0)}$.

Uzevši u obzir ovaj zapis kao i samu specifičnu strukturu matrice, imamo da se $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$, data gornjom definicijom, može jednostavnije zapisati, uočavajući blokove, na sledeći način

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{(s,k)} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{(-s) \times (n+s)} & \mathcal{O}_{(-s) \times (-s)} \\ \mathcal{G}_{n+s}^{(k)} & \mathcal{O}_{(n+s) \times (-s)} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{O}_{(-s) \times (n+s)} & & & \mathcal{O}_{(-s) \times (-s)} \\ G_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ G_{k+2} & G_{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ G_{k+n+s} & G_{k+n+s-1} & \dots & G_{k+1} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

gde je $\mathcal{O}_{p \times q}$ nula matrica dimenzija $p \times q$.

Napomena 4.1.2. Za slučaj $s = 0$ imamo da je $\mathcal{G}_n^{(k)}$ regularna donje trougaona Toeplitz-ova matrica. Sa druge strane, matricu $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$, $s < 0$ možemo posmatrati kao 2×2 Toeplitz blok matricu čiji su u opštem slučaju gornji-levi i donji-desni blokovi pravougaoni. Specijalno, kada je $n = -2s$ matrica $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$ postaje 2×2 Toeplitz blok Toeplitz matrica.

Primer 4.1.3. Uopštena Fibonacci-jeva matrica tipa $(-2, 2)$ i dimenzija 7×7 je sledećeg oblika

$$\mathcal{G}_7^{(-2,2)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{2 \times (n-2)} & \mathcal{O}_{2 \times 2} \\ \hline \mathcal{G}_{n-2}^{(2)} & \mathcal{O}_{(n-2) \times 2} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a+2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a+3b & a+2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a+5b & 2a+3b & a+2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5a+8b & 3a+5b & 2a+3b & a+2b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8a+13b & 5a+8b & 3a+5b & 2a+3b & a+2b & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nakon uopštavanja konvolucionih formula (4.10) i (4.11) i primenom na gore definisane matrice dobijamo sledeće tvrđenje.

Propozicija 4.1.1. Za proizvoljne cele brojeve za koje važi $s \leq 0$ i $k \geq 0$ matricu $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$ možemo predstaviti pomoću sledeće konvolucije

$$\mathcal{G}_n^{(s,k)} = \{b, a\} \star \{ \mathcal{F}_n^{(s,k-1)}, \mathcal{F}_n^{(s,k)} \}, \quad n \geq 1, \quad (4.24)$$

gde je $\mathcal{F}_n^{(s,k)}$ Fibonacci-jeva matrica tipa (s, k) (izvedena za slučaj $(a, b) = (0, 1)$ od matrice $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$). Takođe, moguće je uopštiti konvoluciju (4.11) u sledeći matični oblik

$$\{ \mathcal{G}_n^{(s,0)}, \mathcal{G}_n^{(s,1)}, \dots \} = \{b, a\} \star \{ \mathcal{F}_n^{(s,-1)}, \mathcal{F}_n^{(s,0)}, \mathcal{F}_n^{(s,1)}, \dots \}. \quad (4.25)$$

Primer 4.1.4. Matricu $\mathcal{G}_7^{(-2,2)}$ iz primera 4.1.3 opisujemo koristeći sledeću matičnu konvoluciju

$$\mathcal{G}_7^{(-2,2)} = \{b, a\} \star \left\{ \mathcal{F}_7^{(-2,1)}, \mathcal{F}_7^{(-2,2)} \right\}$$

$$= \{b, a\} \star \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}.$$

Razmotrimo sada $n \times n$ donju trougaonu Toeplitz blok matricu $\mathcal{Q}_n^{(k)}$ (k je proizvoljan ceo broj za koji važi $0 \leq k < n$) za koju imamo sledeću reprezentaciju

$$\mathcal{Q}_n^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{k \times (n-k)} & \mathcal{O}_{k \times k} \\ \hline \mathcal{T}_{n-k} & \mathcal{O}_{(n-k) \times k} \end{array} \right], \quad (4.26)$$

gde je blok \mathcal{T}_{n-k} donja trougaona Toeplitz-ova matrica određena realnim brojevima $t_0, t_1, \dots, t_{n-k-1}$ za koje važi $t_0 \neq 0$. Na primer, ukoliko je $n = 7$, $k = 2$ imamo

$$\mathcal{T}_5 = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & 0 & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & 0 \\ t_4 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_7^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{2 \times 5} & \mathcal{O}_{2 \times 2} \\ \hline \mathcal{T}_5 & \mathcal{O}_{5 \times 2} \end{array} \right].$$

Da bismo videli strukturu Moore-Penroseovog inverza singularne matrice date pomoću (4.26) dajemo sledeću propoziciju.

Propozicija 4.1.2. Moore-Penrose inverz matrice $\mathcal{Q}_n^{(k)}$ date pomoću (4.26) ima sledeću blok matičnu formu

$$\left(\mathcal{Q}_n^{(k)}\right)^\dagger = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{(n-k) \times k} & \mathcal{T}_{n-k}^{-1} \\ \hline \mathcal{O}_{k \times k} & \mathcal{O}_{k \times (n-k)} \end{array} \right]. \quad (4.27)$$

Dokaz. Pošto su blokovi početne matrice nula i invertibilne matrice, dokaz je očigledan pa ćemo ga izostaviti. \square

Posledica 4.1.4. Moore-Penroseov inverz matrice $\mathcal{Q}_n^{(k)}$ predstavljen pomoću (4.27) je $n \times n$ gornja trougaona Toeplitz blok matrica sa nulama u prvih k kolona i zadnjih k vrsta.

Dokaz. Proizilazi direktno iz poznate činjenice da je inverz regularne donje trougaone Toeplitz-ove matrice i dalje donja trougaona Toeplitz matrica [96]. \square

Primer 4.1.5. Moore-Penroseov inverz matrice $\mathcal{Q}_7^{(2)}$ je 2×2 Toeplitz blok matrica

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{5 \times 2} & \mathcal{T}_5^{-1} \\ \hline \mathcal{O}_{2 \times 2} & \mathcal{O}_{2 \times 5} \end{array} \right].$$

U nastavku, koristeći veoma jednostavnu i preglednu konvolucionu formulu (4.15) u poziciji smo da odredimo inverz donje trougaone Toeplitz-ove matrice $\mathcal{G}_n^{(k)}$ ($s = 0$) date definicijom 4.1.4 (biramo ceo broj k , tako da $0 \leq k < n$, zatim realne brojeve a i b kao početne vrednosti uopštenog Fibonacci-jevog niza)

Teorema 4.1.2. Matrica $\mathcal{Y}_n = [y_{i,j}]$ dimenzija $n \times n$ definisana na sledeći način

$$y_{i,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^k (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^3} \left(\frac{-G_k}{G_{k+1}}\right)^{i-j-2}, & i > j + 1, \\ -\frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2}, & i = j + 1, \\ \frac{1}{G_{k+1}}, & i = j, \\ 0, & \text{u protivnom,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

je inverz matrice $\mathcal{G}_n^{(k)}$, date za proizvoljni ceo broj k koji zadovoljava $0 \leq k < n$ i $G_{k+1} \neq 0$.

Dokaz. Radi jednostavnijeg zapisa u dokazu koristimo sledeću oznaku $g_{i,j} = g_{i,j}^{(k)}$. Označimo sa $\mathcal{H}_n = [h_{i,j}]$ proizvod sledećih matrica $\mathcal{G}_n^{(k)}$ i \mathcal{Y}_n . Treba pokazati da je $\mathcal{H}_n = [h_{i,j}]$ jedinična matrica. Najpre, jasno je da je $h_{i,j} = 0$, za $i < j$. U nastavku razlikujemo preostale slučajeve

- za $i = j$ imamo $h_{i,j} = G_{k+1} \frac{1}{G_{k+1}} = 1$.
- za $i = j + 1$

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= g_{j+1,j} \cdot y_{j,j} + g_{j+1,j+1} \cdot y_{j+1,j} \\ &= G_{k+2} \cdot \frac{1}{G_{k+1}} + G_{k+1} \left(-\frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

o Za slučaj $i > j + 1$, na osnovu (4.28) imamo

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \sum_{l=j}^i g_{i,l} \cdot y_{l,j} = g_{i,j} \cdot y_{j,j} + g_{i,j+1} \cdot y_{j+1,j} + \sum_{l=j+2}^i g_{i,l} \cdot y_{l,j} \\ &= \frac{1}{G_{k+1}} g_{i,j} - \frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2} g_{i,j+1} + \sum_{l=j+2}^i g_{i,l} \frac{(-1)^k (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^3} \left(\frac{-G_k}{G_{k+1}} \right)^{l-j-2}. \end{aligned}$$

Nakon uvođenja smene $i - j = r$ dobijamo

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \frac{1}{G_{k+1}} g_{i,j} - \frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2} g_{i,j+1} + \frac{(-1)^k (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^3} \sum_{l=2}^r g_{i,i-l+2} \left(\frac{-G_k}{G_{k+1}} \right)^{r-l} \\ &= \frac{1}{G_{k+1}} G_{r+k+1} - \frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2} G_{r+k} + \frac{(-1)^k (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^3} \sum_{l=2}^r G_{l+k-1} \left(\frac{-G_k}{G_{k+1}} \right)^{r-l}. \end{aligned}$$

Na kraju koristeći konvolucionu formulu (4.15) kao i identitet (4.12) iz leme 4.1.1, konačno dobijamo

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \frac{1}{G_{k+1}} G_{r+k+1} - \frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2} G_{r+k} + \frac{(-1)^k (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^3} F_{r-1} G_{k+1} \\ &= \frac{G_{k+1} G_{r+k+1} - G_{k+2} G_{r+k}}{G_{k+1}^2} + \frac{(-1)^k F_{r-1} (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^2} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} F_{r-1} (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^2} + \frac{(-1)^k F_{r-1} (a^2 + ab - b^2)}{G_{k+1}^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je \mathcal{H}_n jedinična matrica. Na sličan način može se pokazati da je $\mathcal{Y}_n \cdot \mathcal{G}_n^{(k)}$ takođe jedinična matrica, čime je dokaz završen. \square

Teorema 4.1.2 predstavlja generalizaciju prethodno dobijenih rezultata iz radova [92] i [159], u kojima su računati inverzi Fibonacci-jevih i Lucas-ovih matrica.

Napomena 4.1.3. *Konvolucionna formula (4.19) može se iskoristiti da se generiše inverz Fibonacci-jeve matrice \mathcal{F}_n , koja se dobija kao poseban slučaj $k = 0$, $(a, b) = (0, 1)$ matrice $\mathcal{G}_n^{(k)}$. Slično, kada je $k = 0$, $(a, b) = (2, 1)$ konvolucionna formula (4.20) nas vodi ka inverziji Lucas-ove matrice, koja je uvedena u [159]. Na ovaj način dajemo alternativni pristup dokaza (potvrde) rezultata koji su izvedeni u [92] i [159].*

U nastavku ovog poglavlja izračunavamo Moore-Penrose inverz singularne uopštene Fibonacci-jeve matrice $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$, $s < 0$ date definicijom 4.1.4. Kao direktnu posledicu teoreme 4.1.2 i propozicije 4.1.2 dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 4.1.5. *Za proizvoljne cele brojeve $s \leq 0$, $k \geq 0$, takve da važi $G_{k+1} \neq 0$ Toeplitz blok matrica $\mathcal{X}_n^{(s,k)}$ data sledećom reprezentacijom*

$$\mathcal{X}_n^{(s,k)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{(n+s) \times (-s)} & \mathcal{Y}_{n+s} \\ \hline \mathcal{O}_{(-s) \times (-s)} & \mathcal{O}_{(-s) \times (n+s)} \end{array} \right], \quad (4.29)$$

gde je \mathcal{Y}_{n+s} is $(n+s) \times (n+s)$ matrica definisana kao

$$y_{i,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^k (a^2+ab-b^2)}{G_{k+1}^3} \left(\frac{-G_k}{G_{k+1}} \right)^{i-j-2}, & i > j+1, \\ -\frac{G_{k+2}}{G_{k+1}^2}, & i = j+1, \\ \frac{1}{G_{k+1}}, & i = j, \\ 0, & \text{u protivnom,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n+s \quad (4.30)$$

je Moore-Penroseov inverz matrice $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$.

Napomena 4.1.4. Važno je istaći da se problem nalaženja inverza regularne donje trougaone matrice $\mathcal{G}_n^{(k)}$ redukuje sa dvodimenzionalnog problema (u opštem slučaju) na jednodimenzionalni (potrebno je naći samo po jedan element na svakoj pod dijagonali). Šta više, ovo pojednostavljenje se može primeniti za problema izračunavanja Moore-Penroseovog inverza striktno donje trougaone Toeplitz blok matrice $\mathcal{Q}_n^{(k)}$, videti propoziciju 4.1.2. Dakle, ova lepa osobina važi i za uopštenu Fibonacci-jevu matricu $\mathcal{G}_n^{(s,k)}$.

U nastavku koristimo oznaku $\mathcal{G}_n^{\dagger(s,k)} = [g_{i,j}^{\dagger(s,k)}]$ za matricu $\mathcal{X}_n^{(s,k)}$.

Primer 4.1.6. Matrica $\mathcal{G}_7^{\dagger(-2,2)}$ dimenzija 7×7 je sledećeg izgleda

$$\mathcal{G}_7^{\dagger(-2,2)} = \left[\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 0 & \frac{1}{a+2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a+3b}{(a+2b)^2} & \frac{1}{a+2b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+ab-b^2}{(a+2b)^3} & -\frac{2a+3b}{(a+2b)^2} & \frac{1}{a+2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(a^2+ab-b^2)(a+b)}{(a+2b)^4} & \frac{a^2+ab-b^2}{(a+2b)^3} & \frac{-2a-3b}{(a+2b)^2} & \frac{1}{a+2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(a^2+ab-b^2)(a+b)^2}{(a+2b)^5} & -\frac{(a^2+ab-b^2)(a+b)}{(a+2b)^4} & \frac{a^2+ab-b^2}{(a+2b)^3} & -\frac{2a+3b}{(a+2b)^2} & \frac{1}{a+2b} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ukoliko je $a = 0$, $b = 1$ iz poslednjeg tvrđenja dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 4.1.6. Moore-Penroseov inverz $n \times n$ Fibonacci-jeve matrice $\mathcal{F}_n^{(s,k)}$, gde su $s \leq 0$ i $k \geq 0$, je sledeća Toeplitz blok matrica:

$$\mathcal{F}_n^{\dagger(s,k)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{(n+s) \times (-s)} & \left(\mathcal{F}_{n+s}^{(k)} \right)^{-1} \\ \hline \mathcal{O}_{(-s) \times (-s)} & \mathcal{O}_{(-s) \times (n+s)} \end{array} \right], \quad (4.31)$$

gde je matrica $\left(\mathcal{F}_{n+s}^{(k)} \right)^{-1}$ dimenzija $(n+s) \times (n+s)$ čiji elementi zadovoljavaju

$$f_{i,j}^{(k)'} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{F_{k+1}^3} \left(\frac{-F_k}{F_{k+1}} \right)^{i-j-2}, & i > j+1, \\ -\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}^2}, & i = j+1, \\ \frac{1}{F_{k+1}}, & i = j, \\ 0, & \text{u protivnom,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n+s. \quad (4.32)$$

Slično, za slučaj $a = 2$, $b = 1$ predstavljamo Moore-Penroseov inverz Lucas-ove matrice $\mathcal{L}_n^{(s,k)}$, gde je $s \leq 0$.

Posledica 4.1.7. Moore-Penroseov inverz $n \times n$ Lucas-ove matrix $\mathcal{L}_n^{(s,k)}$, kod koje je $s \leq 0$, $k \geq 0$, je dat kao Toeplitz blok matrica

$$\mathcal{L}_n^{\dagger(s,k)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{(n+s) \times (-s)} & \left(\mathcal{L}_{n+s}^{(k)} \right)^{-1} \\ \hline \mathcal{O}_{(-s) \times (-s)} & \mathcal{O}_{(-s) \times (n+s)} \end{array} \right]. \quad (4.33)$$

Blok $\left(\mathcal{L}_{n+s}^{(k)} \right)^{-1}$ je $(n+s) \times (n+s)$ matrica koja je definisana na sledeći način

$$l_{i,j}^{(k)'} = \begin{cases} \frac{(-1)^k 5}{L_{k+1}^3} \left(\frac{-L_k}{L_{k+1}} \right)^{i-j-2}, & i > j + 1 \\ -\frac{L_{k+2}}{L_{k+1}^2}, & i = j + 1, \\ \frac{1}{L_{k+1}}, & i = j, \\ 0, & \text{u protivnom.} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n+s. \quad (4.34)$$

4.2 Catalan-ovi brojevi i odgovarajuće Toeplitz-ove matrice

Catalan-ovi brojevi su veoma poznati i široko izučavani u naučnoj literaturi a naziv su dobili po Belgiskom matematičaru Eugene Charles Catalan-u (1814-1894). Ovi brojevi su članovi niza prirodnih brojeva 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132,... i to takvi da je prvi član $C_0 = 1$, a n -ti je dat u terminima binomnih koeficijenata, kao što sledi

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}, \quad n \geq 0. \quad (4.35)$$

Rešenja problema mnogih prebrojavanja različitih skupova u geometriji i kombinatorici su data u terminima Catalan-ovih brojeva. Monografija [135] sadrži skup vežbanja koja opisuju 66 različitih interpretacija Catalan-ovih brojeva. U nastavku ćemo pobrojiti nekoliko najinteresantnijih:

- C_n je broj različitih načina na koji je moguće postaviti na pravilan način n parova zagrada
- C_n predstavlja broj različitih načina na koji se n -to ugao može podeliti na trouglove a da se pritom ne koriste dijagonale mnogougla koje se seku;
- C_n je broj načina da se u ravni poveže $2n$ tačaka koje leže na horizontalnoj pravoj pomoću n disjunktnih lukova, tako da svaki luk povezuje dve od datih tačaka i leži iznad svih tačaka;
- Catalan-ovi brojevi su u direktnoj vezi sa binomnim koeficijentima koji grade Pascal-ov brojni trougao;

Funkcija generatrisa za niz Catalan-ovih brojeva je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}. \quad (4.36)$$

Sledeća konvoluciona formula koja se sastoji od Catalan-ovih brojeva je veoma poznata, i predstavlja način na koji je moguće $n + 1$ -vi član ovog niza dati u funkciji od prethodnih n brojeva

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-k}, \quad n \geq 0. \quad (4.37)$$

Takođe, u literaturi se mogu pronaći i sledeća rekurentna relacija između susednih članova ovog niza

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad (4.38)$$

kao i još jedna od mogućih reprezentacija proizvoljnog Catalan-ovog broja (videti, na primer [136]):

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(2 + n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.39)$$

Ove formule i reprezentacije će biti korišćene u nastavku ovog poglavlja.

4.2.1 Definicije i osobine

Toeplitz-ove matrice čiji su elementi brojevi različitih tipova smešteni na glavnoj dijagonali i ispod nje, su jako izučavane i do danas im je posvećena velika pažnja u literaturi.

Sa istorijske tačke gledišta, najstarije među njima su takozvane Pascal-ove matrice. Različiti tipovi Pascal-ovih matrica su izučavani u radovima [2, 9, 23, 161].

Definicija 4.2.1. *Matricu $\mathcal{P}_n[x] = [p_{i,j}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$) koja je uređena na sledeći način*

$$p_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1}, & i - j \geq 0 \\ 0, & i - j < 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

nazivamo uopštenom (generalisanom) Pascal-ovom matricom. Za slučaj $x = 1$ uopštena Pascal-ova matrica se redukuje na običnu Pascal-ovu matricu koju obeležavamo sa $\mathcal{P}_n = [p_{i,j}]$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Kompletnosti radi podsećamo se nekih od definicija iz teorije specijalnih funkcija koje ćemo koristiti u nastavku ove glave. Uopštena hipergeometrijska funkcija ${}_pF_q$ je data kao sledeća beskonačna suma

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a_1)_l \cdots (a_p)_l}{(b_1)_l \cdots (b_q)_l} \cdot \frac{\lambda^l}{l!}, \quad (4.41)$$

gde je

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (4.42)$$

poznata Pochhammer-ova funkcija a $\Gamma(n)$ Euler-ova gama funkcija.

U nastavku uvodimo pojam donje trougaone Toeplitz-ove matrice, na sličan način na koje su definisane Fibonacci-jeva i Lucas-ova matrica, tako što raspoređujemo Catalan-ove brojeve na glavnoj dijagonali i ispod nje.

Definicija 4.2.2. Matricu reda n koju obeležavamo sa $\mathcal{C}_n[x] = [c_{i,j}[x]]$, čiji su elemetni uređeni kao što sledi

$$c_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j}C_{i-j}, & i-j \geq 0 \\ 0, & i-j < 0 \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.43)$$

gde je C_k k -ti Catalan-ov broj i $x \in \mathbb{R}$, nazivamo Catalan-ovom matricom.

Radi jednostavnosti, u slučaju kada je $x = 1$, Catalan-ovu matricu reda n ćemo označavati sa $\mathcal{C}_n = [c_{i,j}]$.

Primer 4.2.1. Catalan-ova matrica dimenzija 7×7

$$\mathcal{C}_7[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ 42x^5 & 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 & 0 \\ 132x^6 & 42x^5 & 14x^4 & 5x^3 & 2x^2 & x & 1 \end{bmatrix}.$$

U nastavku navodimo dva rezultata koja ćemo koristiti da bismo izveli različite kombinatorne identitete i rekurentne relacije koje su u vezi sa Catalan-ovim brojevima. Najpre pogledajmo kako izgleda inverz gore definisane Catalan-ove matrice.

Teorema 4.2.1. Neka je $\mathcal{C}_n[x] = [c_{i,j}[x]]$ Catalan-ova matrica dimenzija $n \times n$. Inverz matrice $\mathcal{C}_n[x]$, koga označavamo sa $(\mathcal{C}_n[x])^{-1} = [c'_{i,j}[x]]$, jednak je

$$c'_{i,j}[x] = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -x^{i-j}C_{i-j-1}, & i \geq j + 1; \\ 0, & \text{u protivnom.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Dokaz. Posmatrajmo sledeći izraz $q_{i,j}[x] = \sum_{k=1}^n c_{i,k}[x] \cdot c'_{k,j}[x]$. Nije teško uočiti da važi $q_{i,j}[x] = 0$ za $i < j$, kao i, $q_{i,i}[x] = 1$, $i = 1, \dots, n$. Za slučaj $i > j$, nakon nekoliko algebarskih transformacija i primene relacije (4.37), dobijamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} q_{i,j}[x] &= \sum_{k=1}^n c_{i,k}[x] \cdot c'_{k,j}[x] = \sum_{k=j}^i c_{i,k}[x] \cdot c'_{k,j}[x] \\ &= c_{i,j}^{(0)}[x] \cdot c'_{j,j}^{(0)}[x] + \sum_{k=j+1}^i c_{i,k}[x] \cdot c'_{k,j}[x] \\ &= x^{i-j}C_{i-j} - \sum_{k=j+1}^i x^{i-k}C_{i-k} \cdot x^{k-j}C_{k-j-1} \\ &= x^{i-j}C_{i-j} - x^{i-j} \sum_{k=0}^{i-j-1} C_{i-j-1-k} \cdot C_k \\ &= x^{i-j} (C_{i-j} - C_{i-j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da važi $\mathcal{C}_n[x] \cdot (\mathcal{C}_n[x])^{-1} = I_n$. Slično se može pokazati $(\mathcal{C}_n[x])^{-1} \cdot \mathcal{C}_n[x] = I_n$, čime je dokaz završen. \square

Primer 4.2.2. Inverz Catalan-ove 7×7 matrice ima sledeći oblik

$$(\mathcal{C}_7[x])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -14x^5 & -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 & 0 \\ -42x^6 & -14x^5 & -5x^4 & -2x^3 & -x^2 & -x & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.2.2. Suma prvih m Catalan-ovih brojeva zadovoljava sledeću relaciju:

$$\Xi(m) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k = \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} - C_m \cdot {}_2F_1\left(1, m + \frac{1}{2}; m + 2; 4\right), \quad (4.45)$$

gde je $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica.

Dokaz. Koristićemo reprezentaciju za proizvoljan Catalan-ov broj datu pomoću (4.39). Znači, potrebno je da dokažemo:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{4^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(2 + k)} = \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{4^m}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m)}{\Gamma(2 + m)} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2} + m; 2 + m; 4\right).$$

Dokaz izvodimo pomoću matematičke indukcije po m . Tvrđenje je očigledno zadovoljeno za $m = 1$ imajući u vidu $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(3) = 2$ i ${}_2F_1(1, \frac{3}{2}; 3; 4) = -\frac{1}{2}\mathbf{i}(-\mathbf{i} + \sqrt{3})$. Poslednja jednakost se dobija kao direktna posledice zamene vrednosti $a = 1$, $z = 4$ u identitet

$${}_2F_1\left(a, a + \frac{1}{2}; 2a + 1; z\right) = 2^{2a}(\sqrt{1 - z} + 1)^{-2a},$$

koji je poznat kao primer iz [154].

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $p = m - 1$ i dokažimo da važi za m . U te svrhe koristimo sledeće svojstvo za uopštene hipergeometrijske funkcije koje se lako može proveriti:

$${}_2F_1(1, a; b; \lambda) = \lambda \cdot \frac{a}{b} \cdot {}_2F_1(1, a + 1; b + 1; \lambda) + 1. \quad (4.46)$$

Koristeći identitet (4.46) i induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\sum_{k=0}^m \frac{4^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(2 + k)} = \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{4^m}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m)}{\Gamma(2 + m)} \cdot 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} + m}{2 + m} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2} + m; 3 + m; 4\right).$$

Sada, imajući u vidu $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, imamo da važi

$$\sum_{k=0}^m \frac{4^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(2 + k)} = \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{4^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + m)}{\Gamma(3 + m)} \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2} + m; 3 + m; 4\right),$$

što je i trebalo dokazati. \square

Koristeći rezultat iz prethodne teoreme, kao direktnu posledicu, dobijamo sledeću rekurentnu relaciju za Catalan-ove brojeve.

Posledica 4.2.1. Za proizvoljan ceo broj $m > 0$ imamo da važi naredna rekurentna relacija

$$C_m = \frac{\frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} - \Xi(m)}{{}_2F_1\left(1, m + \frac{1}{2}; m + 2; 4\right)}. \quad (4.47)$$

4.2.2 Kombinatorni identiteti bazirani na matičnom inverzu

U prve dve teoreme ove sekcije dajemo faktorizaciju uopštene Pascal-ove matrice u terminima Catalan-ove matrice i na taj način predstavljamo dve nove matrice $\mathcal{G}_n[x] = [g_{i,j}[x]]$, $\mathcal{H}_n[x] = [h_{i,j}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$). Kao posledica ovih teorema, nekoliko kombinatornih identiteta je izvedeno. Takođe, jednostavnosti radi uvodimo sledeće oznake: umesto $\mathcal{G}_n[1]$ u nastavku pišemo \mathcal{G}_n , odnosno $g_{i,j}[1]$ menjamo sa $g_{i,j}$. Slično, umesto \mathcal{H}_n i $h_{i,j}$ korišćemo $\mathcal{H}_n[1]$ i $h_{i,j}[1]$, redom.

Teorema 4.2.3. *Za matricu $\mathcal{G}_n[x] = [g_{i,j}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$), koja je definisana kao što sledi*

$$g_{i,j}[x] = \begin{cases} 1, & i = j \\ x^{i-j} \left(\frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} - C_{i-j-1} \cdot {}_2F_1 \left(j, j-i; \frac{3}{2} - i + j; \frac{1}{4} \right) \right), & i > j \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (4.48)$$

imamo da važi

$$\mathcal{P}_n[x] = \mathcal{C}_n[x] \mathcal{G}_n[x]. \quad (4.49)$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati $\mathcal{G}_n[x] = (\mathcal{C}_n[x])^{-1} \mathcal{P}_n[x]$. Označimo sumu $\sum_{k=1}^n c'_{i,k}[x] p_{k,j}[x]$ sa $s_{i,j}[x]$. Očigledno je da važi $s_{i,j}[x] = 0 = g_{i,j}[x]$ za $i < j$. Dakle, ostaje da se dokaže slučaj $i \geq j$, za koji važi

$$s_{i,j}[x] = \sum_{k=1}^n c'_{i,k}[x] p_{k,j}[x] = \sum_{k=j}^i c'_{i,k}[x] p_{k,j}[x] = \sum_{k=j}^{i-1} c'_{i,k}[x] p_{k,j}[x] + c'_{i,i}[x] p_{i,j}[x]$$

Koristeći (4.44) iz teoreme 4.2.1 i (4.40) dobijamo

$$s_{i,j}[x] = x^{i-j} \left(\binom{i-1}{j-1} - \sum_{k=j}^{i-1} C_{i-k-1} \binom{k-1}{j-1} \right), \quad i \geq j. \quad (4.50)$$

U slučaju kada je $i = j$ imamo da važi $s_{i,i}[x] = \binom{i-1}{i-1} = 1 = g_{i,i}[x]$. Potrebno je da dokažemo sledeći identitet kada je $i > j$:

$$\sum_{k=j}^{i-1} C_{i-k-1} \binom{k-1}{j-1} = \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} + C_{i-j-1} \cdot {}_2F_1 \left(j, j-i; \frac{3}{2} - i + j; \frac{1}{4} \right) \quad (4.51)$$

Da bismo uprostiti prethodni izraz, označimo sa R levu stranu jednakosti (4.51). Iz same definicije hipergeometrijske funkcije ${}_2F_1$, imamo sledeću transformaciju:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} + C_{i-j-1} \cdot {}_2F_1 \left(j, j-i; \frac{3}{2} - i + j; \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} + C_{i-j-1} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(j)_k (j-i)_k \left(\frac{1}{4}\right)^k}{\left(\frac{3}{2} - i + j\right)_k k!}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Koristeći sledeće elementarne transformacije na Pochhammer-ovoj funkciji koja se pojavljuje u (4.52)

$$(j)_k = \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}; \quad (j-i)_k = (-1)^k \frac{(i-j)!}{(i-j-k)!}, \quad i \geq j, \quad k \leq i-j; \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - i + j\right)_k &= (-1)^k \frac{(2i - 2j - 3)(2i - 2j - 5) \cdots (2i - 2j - 2k - 1)}{2^k} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{(2i - 2j - 3)!}{(2i - 2j - 2k - 3)!} \frac{(i - j - k - 2)!}{(i - j - 2)!}, & k \leq i - j - 2 \\ 2 \frac{(-1)^{i - j - 1}}{4^{i - j - 1}} \frac{(2i - 2j - 3)!}{(i - j - 2)!}, & k = i - j - 1 \\ \frac{(-1)^{i - j + 1}}{4^{i - j - 1}} \frac{(2i - 2j - 3)!}{(i - j - 2)!}, & k = i - j \end{cases} \end{aligned}$$

lako dolazimo do zaključka da je gornja granica za sumu (4.52), zapravo $i - j$. Dalje, stavljajući $C_{i-j-1} = \frac{(2(i-j-1))!}{(i-j)!(i-j-1)!}$, dobijamo

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} \\ &+ 2 \left(\sum_{k=0}^{i-j-2} \frac{(2i-2j-2k-3)!(j+k-1)!}{(i-j-k)!} \frac{1}{(j-1)!(i-j-k-2)!k!} + \frac{1}{2} \binom{i-2}{j-1} - \frac{1}{4} \binom{i-1}{j-1} \right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{i-j-2} \frac{(2k+1)!(i-3-k)!}{(k+2)!} \frac{1}{(j-1)!k!(i-j-k-2)!} + \binom{i-2}{j-1}. \end{aligned}$$

Sada imamo da važi

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=0}^{i-j-2} \frac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+1)!} \frac{(i-3-k)!}{(j-1)!(i-j-k-2)!} + \binom{i-2}{j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-j-2} C_{k+1} \binom{i-3-k}{j-1} + C_0 \binom{i-2}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^{i-1} C_{i-k-1} \binom{k-1}{j-1}, \end{aligned}$$

što je zapravo leva strana izraza (4.51). \square

Kao direktnu posledicu teoreme 4.2.3 dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 4.2.2. *Za proizvoljan ceo pozitivan broj n imamo da važi sledeća rekurentna relacija sa Catalan-ovim brojevima:*

$$C_n = 1 - \Xi(n) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \Xi(n-k); \quad (4.54)$$

$$1 = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n-k+1} \left(\frac{1}{2} - C_{k-2} \cdot {}_2F_1 \left(1, 1-k; \frac{5}{2} - k; \frac{1}{4} \right) \right). \quad (4.55)$$

Dokaz. Izaberimo matricu $\mathcal{C}_n[x]$ proizvoljne dimenzije n . Iz (4.49) i (4.50) imamo da važi

$$p_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} = \sum_{k=j}^i C_{i-k} \left(\binom{k-1}{j-1} - \sum_{l=j}^{k-1} C_{k-l-1} \binom{l-1}{j-1} \right)$$

i kasnije za slučaj $(i, j) = (n, 1)$ je

$$\begin{aligned} 1 &= C_{n-1} + \sum_{k=2}^n C_{n-k} \left(1 - \sum_{l=1}^{k-1} C_{k-l-1} \right) \\ &= C_{n-1} + \sum_{k=2}^n C_{n-k} \left(- \sum_{l=1}^{k-2} C_l \right) \\ &= C_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} C_k \left(\sum_{l=1}^{n-k-2} C_l \right). \end{aligned}$$

Oдавде direktno sledi

$$C_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \sum_{l=1}^{n-k-1} C_l,$$

odnosno, kasnije (4.54).

Da bismo dokazali (4.55) primenimo, najpre, jednakost (4.48) u (4.49). Odatle odmah imamo

$$p_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} = \sum_{k=j+1}^i C_{i-k} \left(\frac{1}{2} \binom{k-1}{j-1} - C_{k-j-1} \cdot {}_2F_1 \left(j, j-k; \frac{3}{2} - k + j; \frac{1}{4} \right) \right) + C_{i-j},$$

pa je samim tim (4.55) dokazano nakon zamene $i = n, j = 1$. Pošto je $C_{-1} = -1/2$ (sledi direktno (4.39)) i ${}_2F_1(a, 0; b; \lambda) = 1$ (videti, na primer [154]), imajući u vidu da je n proizvoljno, imamo da je dokaz kompletiran. \square

Teorema 4.2.4. *Matrica $\mathcal{H}_n[x] = [h_{i,j}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$), defnisisana na sledeći način*

$$h_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \frac{1 + {}_2F_1(-\frac{1}{2}, j-i; j; -4)}{2}, & i \geq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.56)$$

zadovoljava datu matičnu jednačinu

$$\mathcal{P}_n[x] = \mathcal{H}_n[x] \mathcal{C}_n[x]. \quad (4.57)$$

Dokaz. Nije teško primetiti da (4.56) sledi iz identiteta

$$\sum_{k=j+1}^i C_{k-j-1} \binom{i-1}{k-1} = \binom{i-1}{j-1} \frac{1 - {}_2F_1(-\frac{1}{2}, j-i; j; -4)}{2}, \quad (4.58)$$

koga je potrebno verifikovati u nastavku dokaza. Ukoliko primenimo identitete koji su navedeni u (4.53), kao i identitet

$$\left(-\frac{1}{2} \right)_k = -\frac{(2k-3)!!}{2^k}, \quad (4.59)$$

na desnu stranu jednakosti (4.58), onda možemo da izvedemo sledeće transformacije

$$\begin{aligned}
 \binom{i-1}{j-1} \frac{(1 - {}_2F_1(-\frac{1}{2}, j-i; j; -4))}{2} &= \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} \left(1 - \sum_{k \geq 0} \frac{(-\frac{1}{2})_k (j-i)_k (-4)^k}{(j)_k k!} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=1}^{i-j} \frac{(2k-3)!! (i-j)! (j-1)! 2^k}{(i-j-k)! (j+k-1)! k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-j} \frac{(2k-3)!! (i-1)! 2^k}{(i-j-k)! (j+k-1)! k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{i-j-1} \frac{(2k-1)!! (i-1)! 2^k}{(i-j-k-1)! (j+k)! (k+1)!} = \sum_{k=0}^{i-j-1} \binom{i-1}{j+k} \frac{(2k-1)!! 2^k k!}{(k+1)! k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{i-j-1} \binom{i-1}{j+k} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{i-j-1} C_k \binom{i-1}{j+k} \\
 &= \sum_{k=j+1}^i C_{k-j-1} \binom{i-1}{k-1}.
 \end{aligned}$$

Na ovaj način smo transformisali desnu stranu jednakosti (4.58) u njenu levu stranu, što je zapravo i bio naš cilj. \square

Posledica 4.2.3. Za proizvoljan ceo broj $i \geq 1$, imamo da važi sledeći identitet koji sadrži Catalan-ove brojeve

$$i = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i C_{k-2} \binom{i-1}{k-1} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, k-i; k; -4\right). \quad (4.60)$$

Dokaz. Direktno iz (4.57) dobijamo naredni identitet

$$\binom{i-1}{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} C_{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} \cdot C_{k-j} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, k-i; k; -4\right). \quad (4.61)$$

Fokusirajmo se, najpre, na ovaj deo dokaza:

$$\sum_{k=j}^i C_{k-j} \binom{i-1}{k-1} = \binom{i-1}{j-2} \frac{1 - {}_2F_1(-\frac{1}{2}, j-i-1; j-1; -4)}{2}. \quad (4.62)$$

Ovu jednakost možemo dokazati na isti način kao i u teoremi 4.2.4, s tim što pored identiteta (4.59), takodje, koristimo

$$(j-1)_k = \frac{(j+k-2)!}{(j-2)!}; \quad (j-i-1)_k = (-1)^k \frac{(i-j+1)!}{(i-j-k+1)!}, \quad i \geq j, \quad k \leq i-j+1,$$

i

$${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, j-i-1; j-1; -4\right) = \sum_{k=0}^{i-j+1} \frac{(\frac{1}{2})_k (j-i-1)_k (-4)^k}{(j-1)_k k!}.$$

Dalje, stavljajući (4.62) u (4.61), imamo da važi

$$\binom{i-1}{j-1} = \binom{i-1}{j-2} \frac{1 - {}_2F_1(-\frac{1}{2}, j-i-1; j-1; -4)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} C_{k-j} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, k-i; k; -4\right).$$

Pošto je $C_{-1} = -1/2$, nakon zamene $j = 2$ imamo da važi (4.60). \square

Za izvođenje dodatnih kombinatornih identiteta, korišćićemo poznatu činjenicu, da je $n \times n$ Pascal-ova matrica invertibilna i da je njen inverz, zapravo, $(\mathcal{P}_n[x])^{-1} = \mathcal{P}_n[-x]$ (videti, na primer [2]).

Koristeći inverz matrice $\mathcal{G}_n[x]$, proizvoljan Catalan-ov broj možemo predstaviti u terminima binomnih koeficijenata i uopštene hipergeometrijske funkcije.

Teorema 4.2.5. *Proizvoljan Catalan-ov broj može se predstaviti koristeći sledeću reprezentaciju*

$$C_i = \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -k; 2; 4\right), \quad i \geq 1. \quad (4.63)$$

Dokaz. Na osnovu (4.49) nije teško zaključiti da je matrica $\mathcal{G}_n[x] = [g_{ij}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$) takođe invertibilna, odnosno imamo $(\mathcal{G}_n[x])^{-1} = (\mathcal{P}_n[x])^{-1} \mathcal{C}_n[x]$. Lako se može pokazati da je matrica $(\mathcal{G}_n[x])^{-1} = [g'_{i,j}[x]]$ ($i, j = 1, \dots, n$) sledećeg oblika:

$$g'_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j} \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} C_{k-j} \binom{i-1}{k-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j. \end{cases} \quad (4.64)$$

Direktno iz (4.49) imamo da je $\mathcal{C}_n[x] = \mathcal{P}_n[x] (\mathcal{G}_n[x])^{-1}$. Dalje, za slučaj $1 \leq j \leq i \leq n$ koristeći (4.64) odmah dobijamo

$$C_{i-j} = \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} \cdot \sum_{l=j}^k (-1)^{k-l} \binom{k-1}{l-1} C_{l-j}.$$

Ako posmatramo slučaj $j = 1$ i uvedemo smenu $i \rightarrow i + 1$ imamo da važi

$$C_i = \sum_{k=1}^{i+1} \binom{i}{k-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l+1} \binom{k-1}{l} C_l \right). \quad (4.65)$$

Koristeći definicije i osnovne osobine specijalnih funkcija, pokazaćemo da za proizvoljan pozitivan ceo broj k važi sledeći identitet

$$\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l+1} \binom{k-1}{l} C_l = -{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-k; 2; 4\right).$$

Zapravo, primenjujući osobine binomnih koeficijenata i definiciju Catalan-ovog broja dobijamo:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l+1} \binom{k-1}{l} C_l &= - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(k-l)_l}{l!} \cdot \frac{1}{l+1} \frac{(l+1)_l}{l!} \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-k)_l}{(l+1)!} \cdot \frac{(l+1)_l}{4^l} \cdot \frac{4^l}{l!} \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-k)_l}{(2)_l} \cdot \frac{(l+1)_l}{4^l} \cdot \frac{4^l}{l!}. \end{aligned}$$

Dalje, uzimajući u obzir da je

$$\frac{(l+1)_l}{4^l} = \frac{(2l)!}{2^l \cdot l! \cdot 2^l} = \frac{(2l-1)!! \cdot (2l)!!}{(2l)!! \cdot 2^l} = \left(\frac{1}{2}\right)_l,$$

i definiciju uopštene hipergeometrijske funkcije ${}_2F_1$ dokaz se lako može privesti kraju imajući u vidu da je broj n proizvoljan. \square

Na osnovu inverza matrice $\mathcal{H}_n[x]$, na sličan način izvodimo narednu rekurentnu relaciju sa Catalan-ovim brojevima.

Teorema 4.2.6. *Za proizvoljan pozitivan ceo broj i , imamo da važi*

$$C_i = \sum_{k=1}^{i+1} \left(\frac{1}{2} (-1)^{i-k} \binom{i+1}{k-1} + C_{i-k+1} \cdot {}_2F_1 \left(k, k-i-2; k-i-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right) \right). \quad (4.66)$$

Dokaz. Slično kao u dokazu prethodne teoreme, ako krenemo od relacije (4.57) da bismo našli $(\mathcal{H}_n[x])^{-1} = \mathcal{C}_n[x] (\mathcal{P}_n[x])^{-1}$, dobijamo

$$h'_{i,j}[x] = \begin{cases} x^{i-j} \sum_{k=j}^i (-1)^{k-j} C_{i-k} \binom{k-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j. \end{cases} \quad (4.67)$$

Dalje, iz (4.57) imamo $\mathcal{C}_n[x] = (\mathcal{H}_n[x])^{-1} \mathcal{P}_n[x]$, pa samim tim sledi

$$C_{i-j} = \sum_{k=j}^i \binom{k-1}{j-1} \left(\sum_{l=k}^i (-1)^{l-k} C_{i-l} \binom{l-1}{k-1} \right).$$

Ukoliko u prethodnom identitetu uvedemo smenu $j = 1$ dobijamo još jednu rekurentnu relaciju

$$C_i = \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{l=k}^{i+1} (-1)^{l-k} C_{i-l+1} \binom{l-1}{k-1}. \quad (4.68)$$

Sada je jasno da je ostalo još da dokažemo da je

$$\sum_{l=k}^{i+1} (-1)^{l-k} C_{i-l+1} \binom{l-1}{k-1} = \frac{1}{2} (-1)^{i-k} \binom{i+1}{k-1} + C_{i-k+1} \cdot {}_2F_1 \left(k, k-i-2; k-i-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right). \quad (4.69)$$

Uzimajući u obzir da važe sledeći identiteti

$$(k)_l = \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!}; \quad (k-i-2)_l = (-1)^l \frac{(i-k+2)!}{(i-k-l+2)!};$$

$$(k-i-\frac{1}{2})_l = (-1)^l \frac{(2i-2k+1)(2i-2k-1) \cdots (2i-2k-2l+3)}{2^l}$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^l}{4^l} \frac{(2i-2k+1)!}{(2i-2k-2l+1)!} \frac{(i-k-l)!}{(i-k)!}, & l \leq i-k \\ 2 \frac{(-1)^{i-k+1}}{4^{i-k+1}} \frac{(2i-2k+1)!}{(i-k)!}, & l = i-k+1 \\ 4 \frac{(-1)^{i-k+3}}{4^{i-k+2}} \frac{(2i-2k+1)!}{(i-k)!}, & l = i-k+2 \end{cases}$$

i prateći isti postupak kao u dokazu teoreme 4.2.3 imamo da važi (4.69), odnosno (4.66). \square

4.2.3 Kombinatorni identiteti bazirani na jediničnom vektoru

Sledeća četiri identiteta su izvedena na osnovu proizvoda matrica \mathcal{G}_n i \mathcal{C}_n sa kolona vektorom kao i matrica \mathcal{H}_n i \mathcal{C}_n sa vrsta vektorom.

Krenimo najpre sa matricom \mathcal{G}_n .

Tvrđenje 4.2.1. *Za proizvoljan pozitivan ceo broj i imamo da važi sledeći identitet*

$$2^{i-1} = \sum_{k=1}^i C_{i-k} \left(2^{k-1} - \sum_{l=0}^{k-2} 2^{k-2-l} C_l \right). \quad (4.70)$$

Dokaz. Polazeći od (4.48) i (4.49), množeći, sa desna, obe strane u (4.49) kolona vektorom $E_n = [1, 1, \dots, 1]^T$, i uzimajući u obzir

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_n E_n)_i &= \sum_{l=1}^i g_{i,l} = \sum_{l=1}^i \left(\binom{i-1}{l-1} - \sum_{k=l}^{i-1} C_{i-k-1} \binom{k-1}{l-1} \right) \\ &= 2^{i-1} - \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-k-1} \cdot 2^{k-1}, \end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{C}_n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - C_0 \\ \vdots \\ 2^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-2-k} C_k \end{bmatrix}.$$

Ukoliko iskoristimo $c_{i,j} = C_{i-j}$ i izjednačimo i -te elemente, $1 \leq i \leq n$, oba vektora iz prethodne jednakosti završili smo dokaz. \square

Tvrđenje 4.2.2. *Za proizvoljne pozitivne cele brojeve n i j za koje važi $n \geq j$, imamo sledeći identitet*

$$\binom{n}{j} = \sum_{k=1}^n \Xi(n-k+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \binom{k-1}{j-1} - C_{k-j-1} \cdot {}_2F_1 \left(j, j-k; \frac{3}{2} - k + j; \frac{1}{4} \right) \right). \quad (4.71)$$

Dokaz. Polazeći od (4.48) i (4.49), množeći obe strane, sa leva, u (4.49) vrsta vektorom $E_n^T = [1, 1, \dots, 1]$, dobijamo

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{0}, \dots, \sum_{i=n-1}^{n-1} \binom{i}{n-1} \right] = \left[\sum_{l=0}^{n-1} C_l, \dots, C_0 \right] \cdot \mathcal{G}_n.$$

Sada imamo da dokaz direktno proizilazi iz

$$\sum_{k=j-1}^{n-1} \binom{k}{j-1} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j-1+k}{j-1} = \binom{n}{j}$$

i koraka koje smo preduzeli u tvrđenju 4.2.1. \square

Primenjujući iste principe za matricu \mathcal{H}_n izvodimo analogne rezultate.

Tvrđenje 4.2.3. *Za proizvoljan pozitivan ceo broj i imamo da važi sledeći identitet*

$$2^i = \sum_{l=1}^i \binom{i-1}{l-1} \left(1 + {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, l-i; l; -4 \right) \right) \Xi(l). \quad (4.72)$$

Dokaz. Polazeći od (4.56) i (4.57), množeći sa desna obe strane u (4.57) kolona vektorom $E_n = [1, 1, \dots, 1]^T$, i kasnije primenjujući iste korake kao u tvrđenju 4.2.1 dobijamo (4.72). \square

Tvrđenje 4.2.4. *Za proizvoljne pozitivne cele brojeve n i j za koje važi $n \geq j$, imamo sledeći identitet*

$$\binom{n}{j} = \sum_{k=j}^n \sum_{l=k}^n C_{k-j} \binom{l-1}{k-1} \frac{1 + {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, k-l; k; -4 \right)}{2}. \quad (4.73)$$

Dokaz. Ponovo, iz (4.56) i (4.57), množeći sa leva obe strane u (4.57) kolona vektorom $E_n = [1, 1, \dots, 1]^T$, dobijamo (4.73) na sličan način kao prethodnim tvrđenjima. \square

4.3 Restauracija oštećenih slika

U ovom poglavlju bavićemo se obnavljanjem oštećenih digitalnih slika koje dobijamo korišćenjem foto aparata odnosno kamere. Kada koristimo kameru, želimo da snimljena slika bude veran prikaz prizora kojeg vidimo; međutim, imamo da je svaka slika manje-više zamućena. Dakle, proces restauracije je od fundamentalnog značaja za dobijanje oštine i jasnoće slika.

Digitalna slika se sastoji od elemenata koje nazivamo pikselima. Svakom pikselu je dodeljen intenzitet, koji bi trebalo da karakteriše boju malog pravougaonog segmenta scene koju slikamo. Slika malih dimenzija obično ima oko $256^2 = 65536$ piksela, dok sa druge strane slike visokih rezolucija imaju 5 do 10 miliona piksela. Pri snimanju neke scene radi dobijanja digitalne slike mora se javiti neko zamućenje, jer je nemoguće izbeći situaciju takozvanog "prelivanja" informacija sa originalne scene na susedne piksele. Na primer, optički sistem u objektivu kamere može biti van fokusa, tako da imamo da je dolazeća svetlost zamagljena. Isti problem se javlja, na primer, kod obrade slika u astronomiji gde je dolazeća svetlost u teleskop blago izvitoperena zbog turbulencija prisutnih u atmosferi. U ovakvim i sličnim situacijama, neizbežan rezultat je dobijanje zamućene slike.

Kod procesa restauracije slika, želimo da povratimo originalnu, jasnu, sliku koristeći neki matematički model kojim predstavljamo proces zamućenja. Ključno pitanje je da li su neke izgubljene informacije sadržane u degradiranoj slici? Ukoliko jesu, te informacije su u nekom smislu "sakrivene" i mogu se jedino povratiti ako znamo detalje procesa zamućenja.

Nažalost, nema nade da možemo da obnovimo originalnu sliku do najsitnijih detalja! To je zbog različitih grešaka koje su neizbežne u procesu snimanja i formiranja slike. Najvažnije greške su sama nestabilnost procesa snimanja slike i greške prilikom aproksimacije, odnosno predstavljanja slike pomoću konačnog broja cifara. Jedan od izazova procesa restauracije slike je da osmisli efikasan i pouzdan algoritam radi dobijanja što je više moguće informacija, o originalnoj slici, na osnovu datih podataka. U nastavku ovog poglavlja bavićemo se upravo ovim problemom kod slika kod kojih je došlo do zamućenja usled ravnomernog linearnog kretanja kamere ili scene koju želimo da uslikamo.

U naukama kao što su fizika i matematika, obično se uzima da važi pretpostavka o linearnom zamućenju zbog toga što je u mnogim realnim situacijama zamućenje zaista linearno, ili se barem može dobro aproksimirati nekim linearnim modelom. Ta pretpostavka je veoma korisna jer je poznato da raspolažemo velikim brojem alata kako iz linearne algebre tako i iz matričnog računa. Korišćenje linearne algebre u procesu rekonstrukcije slika ima dugu istoriju, i doseže nazad sve do klasičnih dela kao što je knjiga Andrews-a i Hunt-a [6].

4.3.1 Zamućenje usled linearnog kretanja i Toeplitz-ove matrice

Slike nam obezbeđuju jako korisne informacije, međutim nije redak slučaj postojanja zamućenja (nejasnih obrisa) kod slika. Usled relativnog kretanja između kamere i predmeta (cilja) koji treba biti uslika dolazi do *zamućenja uzrokovano kretanjem* (motion blur). Restauracija (obnova) slika zamućenih nekim pokretom dugi niz godina predstavlja jedan od osnovnih problema u oblasti digitalne obrade slika. Obnova oštećene slike radi dobijanja što bolje kopije početnog originala je od velikog značaja i nalazi primenu u mnogim oblastima kao što su medicina, vojni nadzor, satelitska i astronomska obrada slika, daljinska očitavanja i sl. Očekivano, veoma veliko naučno interesovanje vlada za oblast restauracije slika (pogledati [11, 27, 30, 31, 73, 125]).

Poznato je da svaku digitalnu crno-belu sliku možemo predstaviti pomoću dvodimenzionog niza (pravougaone matrice), u smislu da svakom pikselu odgovara neki broj koji je zapravo element te matrice. Na taj način problem restauracije slika je pomeren na oblast matematike, ili preciznije na manipulaciju sa matricama odnosno linearnu algebru. U ovom doktoratu bavićemo se otklanjanjem zamućenja kod slika koje je nastalo usled ravnomernog linearnog kretanja. Pretpostavlja se da je to linearno kretanje u tesnoj vezi sa celim brojem piksela i da se posmatra horizontalno i vertikalno uzorkovanje. Osim toga, imamo da se degradirana (zamućena) slika (koju obično obeležavamo sa G) može predstaviti kao konvolucija originalne slike (koju ćemo obeležavati sa F) i funkcije širenja tačke (point spread function-PSF) koja je takođe poznata i kao jezgro zamućenja (obeležavaćemo ga sa H). Kod ravnomernog linearnog kretanja to jezgro zamućenja, može se predstaviti pomoću sledeće veoma karakteristične Toeplitz-ove matrice

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} \end{bmatrix}.$$

Nepoznati parametar l zvaćemo *parametar zamućenja*. Pojavu zamućenja uzrokovanu horizontalnim odnosno vertikalnim linearnim kretanjem modeliramo pomoću matričnih jednačina $FH^T = G$ i $HF = G$, redom, u odnosu na nepoznatu (traženu) matricu F . Jasno, Moore-Penroseov inverz H^\dagger matrice H koja je uzročnik zamućenja originalne matrice F se koristi da bi se našla rešenja ovih jednačina [30, 31]. Na osnovu dobro poznate činjenice da je Moore-Penroseov inverz korisno oruđe za rešavanje linearnih sistema matričnih jednačina [12, 112] imamo veliki upliv primena ovog inverza u oblast restauracije slika [20, 30, 31, 32]. Korišćenje matričnog pseudo inverza u procesu rekonstrukcije slika predstavlja jedan od najčešćih pristupa u rešavanju ovog problema [20].

Drugim rečima, osnovni problem sa kojim ćemo se suočiti jeste odabir efikasnog algoritma za izračunavanje uopštenog inverza H^\dagger . Algoritmi koji su korišćeni u radovima [30, 31] za

računanje H^\dagger su bazirani na metodi za nalaženje Moore-Penroseovog inverza matrica potpunog ranga, koji su uvedeni u [87, 88]. Aproksimacije originalnih slika koje su dobijene u radu [30] su pouzdane i veoma precizne.

U literaturi postoje različiti direktni metodi za računanje Moore-Penroseovog inverza (videti na primer [12, 129]). P. Courrieu u svom radu [36] predlaže algoritam za brzo računanje Moore-Penroseovog inverza koji je baziran na principu obrnutog redosleda (reverse order law) i Cholesky faktorizaciji potpunog ranga na singularnim simetričnim matricama. Takođe, veoma efikasan metod za računanje Moore-Penroseovog inverza pravaougaoe matrice potpunog ranga kao i kvadratne matrice sa najmanje jednom nula kolonom ili vrstom je predstavljen u [87, 88]. Greville u svom radu [61] daje rekurentno pravilo za računanje Moore-Penroseovog inverza. Kasnije, Udawadia i Kalaba daju jednostavniji i drugačiji dokaz Greville-ove formule [144]. Zbog osobine sekvencijalnog izračunavanja Greville-ov partitioning metod nalazi široku primenu u teoriji filtriranja, teoriji linearnog ocenjivanja, sistemskoj identifikaciji, optimizaciji i oblasti analitičke dinamike [59, 76, 81, 82, 120]. Za razliku od ovog metoda gde se rekurzivno dodaju kolona po kolona (vrsta po vrsta) Bhimsankaram predstavlja metod kod koga se u koracima dodaju blokovi matrica [13]. Autor u svom radu kao dokaz prosto verifikuje da izlazna matrica zadovoljava četiri jednačine (uslova) za Moore-Penroseov inverz.

Mi ćemo se u ovom poglavlju doktorata fokusirati na primeni rekurzivnog blok partitioning metoda iz [145] kao i običnog partitioning metoda iz [61] za računanje Moore-Penroseovog inverza, radi otklanjanja zamućenja kod slika. Naime, oba ova algoritma će biti na odgovarajući način modifikovana i primenjena za računanje Moore-Penroseovog rešenja matricnih jednačina $HF = G$ and $FH^T = G$ sa nepoznatom matricom F . Motivaciju za korišćenje ovih metoda našli smo u specifičnoj strukturi konvolucione matrice H . Ta karakteristična struktura kao i poznavanje nekih početnih uslova smanjuju kompleksnost samih algoritama, i o tome će i najviše biti reči u nastavku ovog poglavlja. Na temu primene partitioning metoda za računanje različitih uopštenih inverza racionalnih i polinomijalnih matrica postoji mnogo radova (pogledati na primer [134, 141]).

4.3.2 Partitioning metod i restauracija slika

U ovom odeljku podsećamo na neke osnovne osobine i definicije rekurzivnog blok partitioning metoda kao i običnog partitioning metoda za računanje MP inverza i dajemo motivaciju za konstrukciju našeg metoda. Takođe, predstavljamo matematički model koji opisuje otklanjanje zamućenja kod slika, koje je uzrokovano ravnomernim linearnim kretanjem.

Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo sledeće oznake: sa A_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ označimo podmatricu proizvoljne matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ koja se sastoji od prvih i kolona ove matrice. Specijalno i -tu vrstu matrice A označićemo sa a_i dok će a^i označavati i -tu kolonu od A . Oznaka ${}_i A_k$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $k \in \{1, \dots, n-i\}$ važiće za podmatricu matrice A koja se sastoji od kolona a_{i+1}, \dots, a_{i+k} .

Navedimo algoritam za direktno računanje Moore-Penroseovog inverza matrice $B = [A|C]$ koji je dat u terminima A^\dagger .

Lema 4.3.1. [145] *Neka je $B = [A|C]$ kompleksna matrica dimenzija $m \times (r+p)$ kod koje zadnjih p kolona obeležavamo sa C . Neke su definisane sledeće matrice*

$$R = I - AA^\dagger, \quad Q = (RC)^T RC, \quad F = I - Q^\dagger Q, \quad Z = A^\dagger CF. \quad (4.74)$$

Tada imamo da je

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} A^\dagger(I - CV) \\ V \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

gde je

$$V = Q^\dagger C^T R + (I + Z^T Z)^{-1} Z^T A^\dagger (I - C Q^\dagger C^T R). \quad (4.76)$$

Takođe, navodimo Greville-ov rekurzivni algoritam za računanje MP inverza iz [61].

Lema 4.3.2. [61] *Neka je A $m \times n$ kompleksna matrica i a konstantni vektor dimenzija $m \times 1$. Tada je*

$$[A|a]^\dagger = \begin{bmatrix} A^\dagger - db^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

gde su pomoćni vektori definisani kao što sledi

$$d = A^\dagger a, \\ b = \begin{cases} \frac{1}{c^*} c, & c \neq \mathbf{0} \\ \frac{1}{1+d^*d} (A^\dagger)^* d, & c = \mathbf{0}, \end{cases}$$

odnosno

$$c = (I - AA^\dagger)a.$$

Pretpostavimo da matrica $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$ odgovara originalnoj slici čiji su elementi (pikseli) $f_{i,j}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m$ i neka je $G \in \mathbb{R}^{r \times m}$ sa pikselima $g_{i,j}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m$ matrica koja odgovara degradiranoj (zamućenoj) slici. Neka ceo broj l predstavlja dužinu (intezitet) linearnog kretanja, datu u pikselima, koje uzrokuje zamućenje i neka je $n = m + l - 1$. U praksi je faktor degradacije (indeks l) retko unapred poznat pa se mora odrediti iz same degradirane slike. Da bi izbegli situaciju gubljenja informacija u slučaju kada se pikseli originalne slike prelivaju preko ivica snimljene slike, dopunićemo originalnu sliku graničnim pikselima koji odgovaraju stvarnoj sceni koju zapravo slikamo. Bez zabune korišćićemo isti simbol F za uvećanu (graničnim pikselima) originalnu sliku sa napomenom da sada matrica F ima dimenzije $r \times n$. Najpre ćemo pretpostaviti da je zamućenje horizontalan fenomen. Matricu degradacije (zamućenja) obeležavaćemo sa $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Za svaku vrstu f_i matrice F i odgovarajuću vrstu g_i matrice G posmatraćemo jednačinu datu u sledećoj formi

$$g_i^T = H f_i^T, \quad g_i^T \in \mathbb{R}^m, \quad f_i^T \in \mathbb{R}^n, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (4.77)$$

Cilj je da dobijemo aproksimaciju originalne slike F , red po red, koristeći odgovarajuće vrste zamućene matrice G , kao i znanje o matrici zamućenja H . Jednačinu (4.77) možemo zapisati pomoću sledeće matricne forme

$$G = (HF^T)^T = FH^T, \quad G \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad F \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (4.78)$$

Na ovaj način smo zapravo zapisali sistem od m simultanih jednačina (jedna za svaki element vektora g) i $n = m + l - 1$ nepoznatih (jedna za svaki element vektora f).

Poznato je da postoji beskonačno mnogo rešenja za f koja zadovoljavaju jednačinu (4.77), ali samo Moore-Penroseovo rešenje rešava sledeći problem (videti, na primer [12]):

$$\min \|f\|_2, \quad \text{pod uslovom } \min \|Hf - g\|_2.$$

Ukoliko ovaj jedinstveni vektor obeležimo sa \tilde{f} , onda će posmatrana vrsta restaurirane slike postati [20, 30, 31, 32]

$$\tilde{f} = H^\dagger g. \quad (4.79)$$

Matrična forma prethodne jednačine (4.79) odnosno restaurirana slika \tilde{F} je data kao

$$\tilde{F} = G(H^\dagger)^T. \quad (4.80)$$

Matrica \tilde{F} definisana sa (4.80) je najmanje rešenje minimalne norme matrične jednačine (4.78).

Matrična jednačina koja karakteriše proces zamućenja uzrokovan vertikalnim kretanjem ima sledeći oblik

$$G = HF, \quad G \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad H \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad F \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad n = r + l - 1. \quad (4.81)$$

Restaurirana slika može se odrediti pomoću Moore-Penroseovog inverza na osnovu sledeće formule

$$\tilde{F} = H^\dagger G. \quad (4.82)$$

4.3.3 Uklanjanje zamućenja pomoću partitioning metoda

U ovom odeljku opisujemo nov metod za restauraciju zamućenih slika i samim tim predstavljamo glavni rezultat oblasti za restauraciju slika. Algoritam koji ćemo predložiti bavi se restauracijom slika čije je zamućenje uzrokovano ravnomernim linearnim kretanjem. Pretpostavka je da je zamućenje lokalni fenomen, koji je prostorno invarijantan kao i to da nikakvi dodatni šumovi nisu uključeni u procesu formiranja slike.

Nametanjem svih ovih uslova imamo da je funkcija širenja tačke zapravo vektor $(1/l, \dots, 1/l) \in \mathbb{R}^l$. Shodno tome, kada je zamućenje uzrokovano horizontalnim kretanjem, dobijamo da je matrica $H = \text{toeplitz}(h^1, h_1)$ nesimetrična Toeplitz-ova matrica dimenzija $m \times n$ koja je definisana svojom prvom kolonom $h^1 = (h_{i,1})_{i=1}^m$ i prvom vrstom $h_1 = (h_{1,j})_{j=1}^n$ koje su date kao

$$h_{i,1} = \begin{cases} 1/l, & i = 1 \\ 0, & i = 2, \dots, m \end{cases} \quad \text{i} \quad h_{1,j} = \begin{cases} 1/l, & j = 1, \dots, l \\ 0, & j = l + 1, \dots, n \end{cases}. \quad (4.83)$$

Proizvoljna i -ta vrsta degradirane slike može se predstaviti pomoću i -te vrste originalne slike uključivanjem odgovarajućih graničnih uslova

$$\begin{bmatrix} g_{i,1} \\ g_{i,2} \\ g_{i,3} \\ \vdots \\ g_{i,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \cdots & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ \vdots \\ f_{i,n} \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

na taj način što $l - 1$ elemenata vektora f_i predstavlja zapravo granične (proširene, dodate) piksele. Koliko će graničnih piksela biti dodato iznad originalnog vektora f zavisi od prirode i pravca kretanja. U svakom slučaju ostatak piksela ($l - 1$ minus broj piksela dodatih iznad vektora f) će predstavljati granične piksele desno od horizontalne linije i biće dodati ispod vektora f [65].

Najpre objasnimo motivaciju za korišćenje blok partitioning metoda [145] i običnog partitioning metod iz [61] za nalaženje H^\dagger . Jasno je da je blok H_m matrice H regularan. Šta više pokazaćemo da je njegov inverz jedna veoma jednostavna Toeplitz-ova matrica koju možemo lako da odredimo.

Lema 4.3.3. a) *Inverz matrice H_m je ne-simetrična Toeplitz-ova matrica, odnosno imamo $H_m^{-1} = \text{toeplitz}(\alpha, \beta)$, gde su vektori $\alpha = (\alpha_i)_i$ i $\beta = (\beta_i)_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$ definisani na sledeći način*

$$\alpha_i = \begin{cases} l, & i = 1 \\ 0, & i \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad i \quad \beta_i = \begin{cases} l, & \text{mod}(i, l) = 1 \\ -l, & \text{mod}(i, l) = 2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.85)$$

b) *Moore-Penroseov inverz matrice H_p , $1 \leq p < m$, je matrica koja se sastoji od dva bloka: kvadratnog dela inverza matrice H_m i odgovarajućeg nula bloka, i ima sledeću formu*

$$H_p^\dagger = [H_m^{-1}(1 : p, 1 : p) \mid O_{p, m-p}],$$

gde $H_m^{-1}(1 : p, 1 : p)$ predstavlja deo matrice H_m^{-1} sastavljen od prvih p vrsta i kolona.

Dokaz. Nije teško proveriti identitet $H_p^\dagger \cdot H_p = I_p$ iz koga proizilaze oba tvrđenja. \square

Pošto znamo kako izgleda inverz matrice H_m jasno je da je rekurzivan metod običnog partitioning-a skraćen za m koraka; takođe je jasna i namera da se iskoristi blok partitioning metod posle poznavanja ovog inverza jer on zapravo postaje direktan metod.

Primer 4.3.1. *Za slučaj $l = 5$, $m = 9$ matrica zamućenja H , izdeljena na dva bloka $[H_9 \mid {}_9H_4]$, ima sledeći zapis*

$$H = \text{Toeplitz}(\{1/l, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{1/l, 1/l, 1/l, 1/l, 1/l, 0, 0, 0, 0\}),$$

odnosno matičnu formu

$$H = \left[\begin{array}{cccccccc|cccc} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{array} \right].$$

Na osnovu (4.85) imamo da je $H_9^{-1} = \text{Toeplitz}(\alpha, \beta)$, gde su

$$\alpha = \{l, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad \beta = \{l, -l, 0, 0, 0, l, -l, 0, 0\},$$

kao i to da je $H_5^\dagger = [H_9^{-1}(1 : 5, 1 : 5) \mid O_{5,4}]$

Sledeći specijalan slučaj leme 4.3.1 je od velikog značaja za izračunavanje Moore-Penroseovog inverza matrice degradacije H .

Lema 4.3.4. *Pretpostavimo da matrica $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n = m + l - 1$ uzrokuje zamućenje kod procesa (4.84). Moore-Penroseov inverz prvih $p + k$ kolona ove matrice, razbijen na sledeću blokovsku formu $H_{p+k} = [H_p | {}_p H_k]$, $p \in \{1, \dots, n - 1\}$, $k \in \{1, \dots, n - p\}$, može se izraziti na sledeći način*

$$H_{p+k}^\dagger = \begin{bmatrix} H_p^\dagger (I - {}_p H_k \cdot B^T) \\ B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p^\dagger - DB^T \\ B^T \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

gde su

$$D = H_p^\dagger \cdot {}_p H_k \quad i \quad B = (H_p^\dagger)^T D (I + D^T D)^{-1}. \quad (4.87)$$

Dokaz. Sledi direktno iz leme 4.3.1 uzimajući u obzir da je matrica zamućenja matrica potpunog ranga vrste kao i činjenice da jednakosti iz (4.74), postaju

$$R = Q = O_m, \quad F = I_m, \quad V = B^T, \quad Z = D = H_p^\dagger \cdot {}_p H_k$$

posmatrajući ovaj specijalan slučaj. \square

Takođe, jedan korak Greville-ovog partitioning metoda se za ovu matricu redukuje na sledeću jednostavnu proceduru.

Lema 4.3.5. *Moore-Penroseov inverz matrice H_i ima sledeći izgled*

$$H_i^\dagger = \begin{bmatrix} H_{i-1}^\dagger - d_i b_i^T \\ b_i^T \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

gde je

$$d_i = H_{i-1}^\dagger \cdot h_i \quad i \quad b_i = (1 + d_i^T d_i)^{-1} (H_{i-1}^\dagger)^T d_i. \quad (4.89)$$

Pošto, na osnovu leme 4.3.3, znamo kako izgleda matrica H_m^{-1} onda imamo da praktična implementacija novog metoda koristi particije u sledećem obliku $H_{p+k} = [H_p | {}_p H_k]$, gde je jasno $p \geq m$, i $k \in \{1, \dots, n - m\}$.

Oslanjajući se na lemu 4.3.4 predlažemo sledeći algoritam za računanje Moore-Penroseovog inverza matrice H .

Algoritam 4.3.1 Računanje Moore-Penroseovog inverza matrice H

Ulaz: Matrica H dimenzija $m \times (m + l - 1)$ definisana procesom (4.84).

- 1: Izdvojiti kvadratni blok H_m iz matrice H .
 - 2: Generisati matricu $H_m^\dagger = H_m^{-1}$ koristeći lemu 4.3.3.
 - 3: Postaviti $p = m$ i izabrati k tako da važi $1 \leq k \leq l - 1$ i $\frac{l-1}{k} \in \mathbb{N}$.
 - 4: Izračunati $H_{p+k}^\dagger = [H_p | {}_p H_k]^\dagger$ pomoću leme 4.3.4.
 - 5: Postaviti $p = p + k$.
 - 6: Ukoliko je $p \neq n$ ići na korak 4.
 - 7: Vratiti H_n^\dagger .
-

Nije teško primetiti da za slučaj $p \geq m$, pod pretpostavkom da je korak $k = 1$ algoritam postaje zapravo običan partitioning metod kod koga je svaki korak definisan lemom 4.3.5. Takođe, kao poseban slučaj $p = m, k = l - 1$ algoritma 4.3.1 dobijamo sledeći algoritam

Algoritam 4.3.2 Računanje Moore-Penroseovog inverza matrice H

Ulaz: Matrica H dimenzija $m \times (m + l - 1)$ definisana procesom (4.84).

- 1: Podeliti matricu H u dva bloka H_m i ${}_m H_{l-1}$, odnosno $H = [H_m \mid {}_m H_{l-1}]$.
- 2: Generisati matricu $H_m^\dagger = H_m^{-1}$ koristeći lemu 4.3.3.
- 3: Izračunati $H^\dagger = [H_m \mid {}_m H_{l-1}]^\dagger$ pomoću leme 4.3.4.

Birajući najefikasniji metod, u pogledu vremena potrebnog za izvršavanje algoritma, predlažemo metod za računanje MP inverza matrice H a samim tim i efikasan metod za uklanjanje zamućenja kod slika baziran na jednačinama (4.80) i (4.82). U te svrhe sa $I(n)$ ćemo označiti kompleksnost algoritma za računanje inverza matrice dimenzija $n \times n$. Takođe, sa $\mathcal{M}(m, n, k)$ označićemo kompleksnost algoritma za množenje dve matrice dimenzija $m \times n$ i $n \times k$. Jednostavniju oznaku $\mathcal{M}(n)$ koristićemo umesto $\mathcal{M}(n, n, n)$ [35].

U nastavku razmatramo kompleksnost izračunavanja za dva slučaja: slučaj $k = 1$ dat algoritmom 4.3.1 kao i slučaj $k = l - 1$ dat algoritmom 4.3.2. Analizirajući korake iz algoritma 4.3.2, koji odgovara izboru $p = m, k = l - 1$, može se zaključiti da je njegova kompleksnost reda

$$E_{l-1} = 3M(m, m, l-1) + 3M(m, l-1, l-1) + I(l-1) + A(l-1). \quad (4.90)$$

Skenirajući algoritam 4.3.1 za slučaj $k = 1$ na sličan način, dobijamo da je za i -ti rekurzivni korak očekivana složenost reda

$$M(m+i-1, m, 1) + M(1, m+i-1, 1) + M(m, m+i-1, 1),$$

za svako $i = 1, \dots, l-1$. Dakle, kompleksnost čitavog algoritma je

$$E_1 = \sum_{i=1}^{l-1} (M(m+i-1, m, 1) + M(1, m+i-1, 1) + M(m, m+i-1, 1)). \quad (4.91)$$

Poznato je da je matična inverzija ekvivalentna operaciji množenja matrica. Šta više, imamo da inverz proizvoljne $n \times n$ matrice može da se izračuna u vremenu $I(n) = \mathcal{O}(M(n))$ operacija [35]. Vezano za algoritam 4.3.2 imamo da kompleksnost izračunavanja inverza matrice $I + D^T D \in \mathbb{R}^{l \times l}$ nije veća od $\mathcal{O}(M(l))$ (u slučaju Gauss-Jordan eliminacije), što je prilično manje od $\mathcal{O}(M(n))$ uzimajući u obzir da je $l \ll n$. Znamo da teoretsko ubrzavanje množenja matrica ubrzava i matičnu inverziju [35]. Jasno je da za računanje inverza matrice mogu da se koriste i neki brži metodi kao što su Strassen-ov algoritam (sa kompleksnošću $\mathcal{O}(n^{2.807})$) ili algoritam Coppersmith-Winograd (čija je kompleksnost $\mathcal{O}(n^{2.376})$). Takođe, imamo da mera kompleksnosti E_1 ne uključuje izvršavanje nikakve matične inverzije kao kod mere E_l ali zato zahteva $l-1$ iteracija. Na osnovu gore izračunatih mera dobijamo jednostavniji zapis kompleksnosti algoritama 4.3.2 i 4.3.1

$$E_{l-1} \sim \mathcal{O}(M(m, m, l-1)), \quad E_1 \sim l \cdot \mathcal{O}(M(m, m+l, 1)).$$

Ove dve mere u opštem slučaju nisu uporedive. S toga, najbolji izbor od ponudjenih varijanti partitioning metoda biće određen na osnovu izvedenih numeričkih eksperimenata. Vremena potrebna za izvršavanje algoritama zavisice od dva parametra: teorijske složenosti izračunavanja kao i samih implementacionih detalja ugrađenih u programskom paketu MATLAB.

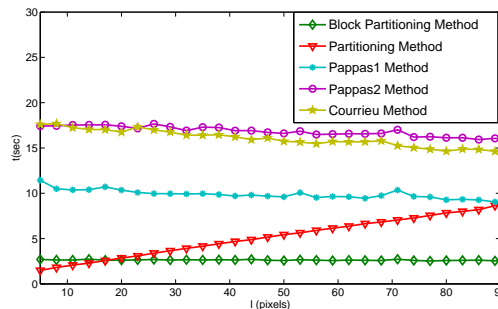
4.3.4 Rezultati testiranja

U ovom odeljku predstavljamo numeričke rezultate izvišavanja ponuđenih algoritama. Da bismo potvrdili njihovu efikasnost uporedili smo ih sa nedavno objavljenim metodama za računanje Moore-Penroseovog inverza u [30] i [36], a koji su u vezi sa problemom uklanjanja zamućenja kod slika, koje je uzrokovano uniformnim linearnim kretanjem. Ove metode zovemo redom Pappas-ova i Courrieu-ova metoda. Sledeći algoritmi za računanje MP inverza matrice H su posmatrani i upoređeni:

1. Blok partitioning metod predstavljen algoritmom 4.3.2,
2. Običan partitioning metod dat algoritmom 4.3.1 za slučaj $k = 1$,
3. Pappas1 metod, opisan MATLAB funkcijom `ginv.m` iz [88],
4. Pappas2 metod, predstavljen MATLAB funkcijom `qrginv.m` iz [32],
5. Courrieu-ov metod iz [36].

Kod za ove metode pisan je u programskom paketu MATLAB [76] i testiran na Intel-ovom Core duo 1.6 GHz procesoru sa 2 GB RAM memorije. Eksperimenti su izvedeni na slikama čije su dimenzije u opštem slučaju $r \times m$. Za svaku odabranu sliku parametar zamućenja je indeks l koji uzima vrednosti između 5 i 90.

Rezultati predstavljeni na slici 3.1 pokazuju procesorsko vreme $t(sec)$, svih posmatranih metoda, potrebno da se restaurira zamućena slika. To vreme dato je u funkciji inteziteta zamućenja slike odnosno parametra $l \leq 90(pixels)$. Za slučajno generisanu matricu dimenzija 600×1200 , kojoj odgovara slučajno generisana slika istih dimenzija, vidimo da partitioning metodi pokazuju bolje rezultate od svih ostalih metoda.



Slika 3.1. Vreme izvršavanja u funkciji inteziteta zamućenja za prizvoljnu sliku

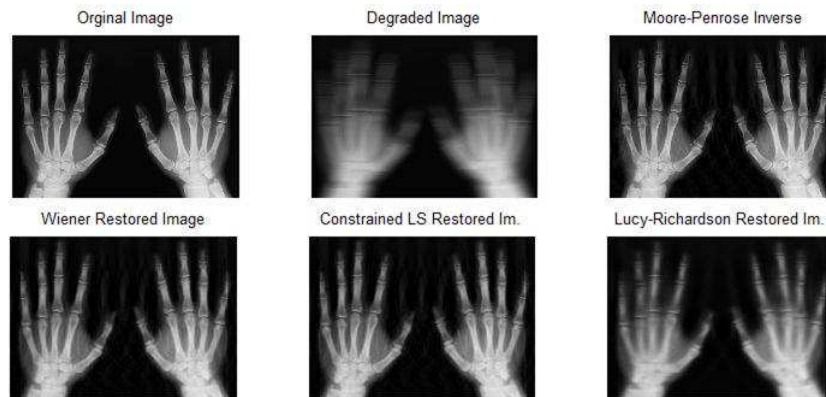
Takođe, sa slike uočavamo da običan partitioning metod daje najbolje rezultate za malu vrednost parametra l . Očigledno je da je CPU vreme partitioning metoda lineano rastuće u odnosu na parametar zamućenja pa se očekuje da u nekom trenutku (za dovoljno veliko l) postane veće od svih ostalih posmatranih metoda. Stoga, zaključujemo da je običan partitioning metod prihvatljiv samo za male vrednosti parametra degradacije $l \leq 20$. Za vrednosti $l > 20$ jasno je da blok partitioning metod daje ubedljivo najbolje rezultate kako u odnosu na običan partitioning tako i u odnosu na ostale posmatrane metode.

Kao što znamo blok partitioning metod zahteva samo jedan rekurzivan korak za nalaženje H^\dagger , dok Greville-ov metod zahteva $l - 1$ koraka. Opšti zaključak je da je praktična kompleksnost izračunavanja, dobijena na osnovu implementacije inkorporirane u MATLAB paketu, obrnuto srazmerna veličini bloka matrice ${}_p H_k$ u koraku 4 algoritma 4.3.1.

Kao posledicu svega gore navedenog, biramo blok partitioning metod kao efikasniji i u nastavku analize posmatraćemo samo njega i upoređivati ga sa ostalim do sada predloženim metodama.

Zamućenja koja nastaju pri formiranju rentgenskih slika (X-ray images) obično nastaju kao posledica pomeranja kamere ili samog objekta koji je potrebno uslikati. Problem restauracije ovih slika može se veoma efikasno modelirati pomoću zamućenja dobijenog ranije opisanim linearnim uniformnim kretanjem. Slika 3.2 predstavlja jedan praktičan primer restauracije zamućenih rentgenskih slika. Originalna slika je preuzeta sa interneta posle pretrage na "Google Image" sa ključnim rečima "X-ray image". Slika demonstrira efikasnost četiri izabrana metoda za restauraciju slike zamućene linearnih uniformnim kretanjem. Ti metodi su: metod na osnovu izračunavanja Moore-Penroseovog inverza, Wiener filter-ov metod, Constrained least-squares (LS) filter-ov metod i Lucy-Richardsonov metod, redom. Za implementaciju poslednja tri metoda koristili smo ugrađene funkcije u *Matlab* programskom paketu.

Sličica sa oznakom *Original image* predstavlja originalnu sliku izdeljenu na $r = 750$ redova i $m = 1050$ kolona. Da bismo sprečili gubitak dragocenih informacija sa ivica slike dodali smo nula granične uslove, što podrazumeva nula vrednosti (crnu boju) za dodatne piksele. Ovaj izbor je prirodan za rentgenske slike iz prostog razloga što je pozadina ovih slika uvek crna. Sličica sa oznakom *Degraded image* predstavlja degradirani sliku dobijenu za $l = 90$. Jasno je sa slike 3.2 da sva spomenuta četiri metoda rekonstruišu zamućenu sliku na način da detalji šake postaju vidljivi i jasni.

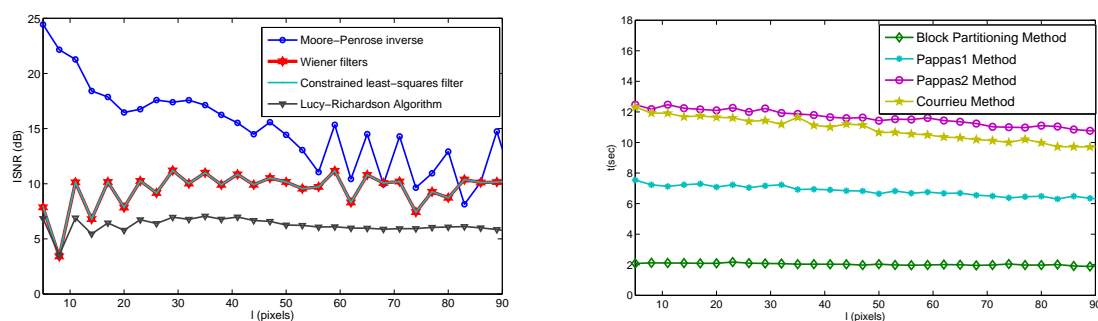


Slika 3.2. Otklanjanje zamućenja ($l = 90$), uzrokovanog uniformnim linearnim kretanjem kod rentgenske slike dimenzija $r = 750$, $m = 1050$.

Razlika u kvalitetu obnovljenih slika teško je (nije) uočljiva golim okom. Zbog toga koristimo uobičajeni metod za upoređivanje restauriranih slika, odnosno takozvani *ISNR* (improved signal-to-noise ratio) koji je definisan sledećom formulom

$$ISNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i,j} (g_{i,j} - f_{i,j})^2}{\sum_{i,j} (\tilde{f}_{i,j} - f_{i,j})^2} \right). \quad (4.92)$$

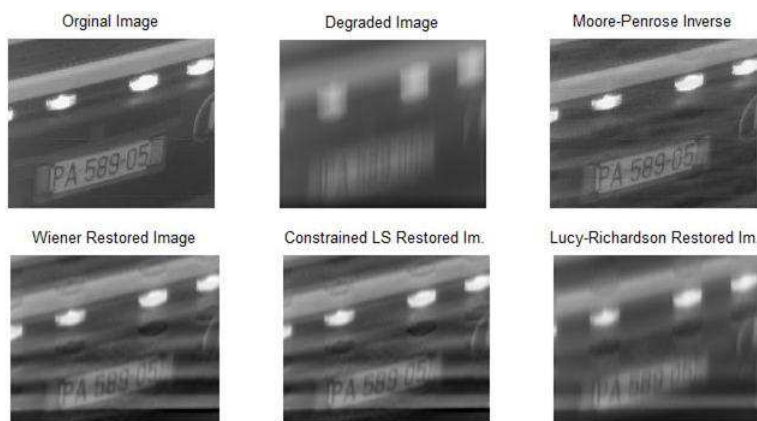
Slika 3.3 (levo) pokazuje odgovarajuće *ISNR* vrednosti za restaurirane slike kao funkciju od parametra l , za sve ranije spomenute metode. Jasno je da je kvalitet obnovljenih slika na strani metoda zasnovanog na Moore-Penroseovom inverzu. Samo u nekoliko slučajeva Wiener filter-ov i Constrained least-squares (LS) filter-ov metod dostižu iste vrednosti kao i MP inverz. Interesantno je napomenuti i to da ova dva metoda zapravo uvek imaju isti *ISNR*.

Slika 3.3. (levo) Odgovarajući $ISNR$ u funkciji inteziteta zamućenja

(desno) CPU vreme u funkciji inteziteta zamućenja.

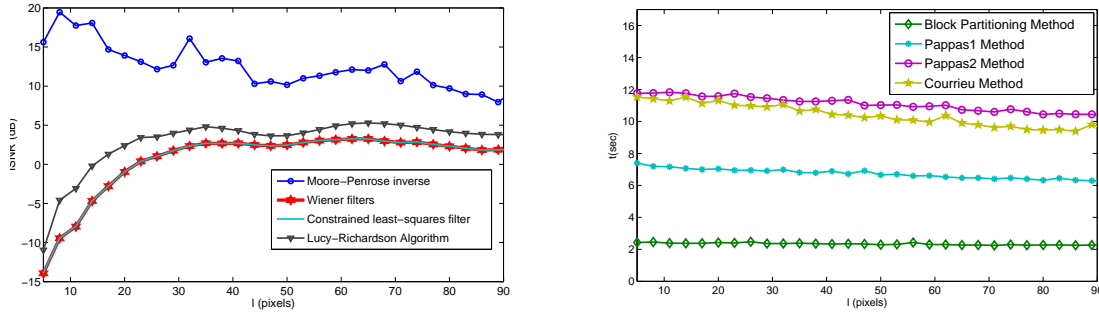
Procesorsko vreme potrebno da se obnovi slika za metod baziran na Moore-Penroseovom inverzu, kao najboljem od ponuđenih metoda, je prikazano na slici 3.3 (desno) i dato je u funkciji od parametra l . Više je nego jasna dominacija našeg metoda baziranog na blok partitioning-u.

U nastavku ćemo pokazati da ovaj metod nije ograničen samo na primenu kod rentgenskih slika, nego da se može veoma uspešno primeniti i na druge praktične probleme. Jedan od njih jeste problem otklanjanja zamućenja kod slika koje se javljaju u sistemu automatskog raspoznavanja registarskih tabli (Automatic Number Plate Recognition-ANPR) vozila. Prirodno je pretpostaviti da je zamućenje koje nastaje u ANPR sistemu uzrokovano vertikalnim kretanjem usled kretanja samog vozila.

Slika 3.4. Otklanjanje zamućenja ($l = 90$), uzrokovnog uniformnim vertikalnim kretanjem kodANPR slike dimenzija $r = 928, m = 1200$.

Slika 3.4 predstavlja rezultat restauracije slike dimenzija 1023×1250 uzete iz ANPR sistema. Originalna slika je preuzeta od uprave carine republike Makedonije a dobijena je primenom sistema za automatsko raspoznavanje registarskih tabli vozila. U ovom slučaju je čak i golim okom moguće uočiti dominaciju metoda (jasnoća obnovljene slike) zasnovanog na MP inverzu u odnosu na ostale metode.

Slika 3.5 (levo) jasno pokazuje da metod baziran na Moore-Penroseovom inverzu daje bolji kvalitet restaurirane slike od ostalih metoda.



Slika 3.5. (levo) Odgovarajući $ISNR$ u funkciji inteziteta zamućenja
(desno) CPU vreme u funkciji inteziteta zamućenja.

Slika 3.5 (desno) bez sumnje, još jednom potvrđuje, da je vreme potrebno za restauraciju degradirane ASNR slike najmanje kod našeg metoda baziranog na blok partitioning metodu.

4.3.5 Restauracija bazirana na problemu matrične inverzije

Podsetimo se najpre teoreme 2.1.10 iz druge glave o opštem obliku rešenja matrične jednačine $AXB = D$. Jednostavnosti i preglednosti radi navedimo je opet

Propozicija 4.3.1. *Neka su $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $D \in \mathbb{C}^{m \times q}$ date matrice. Matrična jednačina*

$$AXB = D \quad (4.93)$$

je konzistentna ako i samo ako za proizvoljne $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ važi

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D. \quad (4.94)$$

U tom slučaju, opšte rešenje je dato pomoću

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \quad (4.95)$$

gde je $Y \in \mathbb{C}^{n \times p}$ proizvoljna matrica.

Ukoliko posmatramo početnu matričnu jednačinu (4.78) iz ovog poglavlja, videćemo da je ona zapravo samo specijalan slučaj ($X \rightarrow A \equiv F, B \rightarrow X \equiv H^T, D \rightarrow B \equiv G, A \rightarrow I$) jednačine (4.95) iz date propozicije. Umesto $A^{(1)}$ i $B^{(1)}$ koristimo A^\dagger i B^\dagger , redom. Imamo da je uslov konzistentnosti (4.94) ispunjen, pošto imamo da važi

$$G(H^T)^\dagger H^T = G,$$

jer je H^T levo invertibilna. Sada opšte rešenje (4.95) postaje

$$\begin{aligned} F &= G(H^T)^\dagger + Y(I - H^T(H^T)^\dagger) \\ &= G(H^T)^\dagger + Y(I - (H^\dagger H)^T) \\ &= G(H^T)^\dagger + Y(I - H^\dagger H). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Rešenje koje smo koristili u prethodnim odeljcima ovog poglavlja $F = G(H^T)^\dagger$, jasno je, dobija se za slučaj $Y = 0$. To rešenje jeste najmanje srednjekvadratno rešenje minimalne norme. Međutim i sva druga rešenja, za $Y \neq 0$ su najmanja srednjekvadratna rešenja. Jednostavno

u ovom slučaju nam se čini da je uslov minimalnosti norme rešenja suvišan i u tom smislu tragamo za nekim drugim rešenjem koje će dovesti do bolje aproksimacije početne originalne slike, odnosno, koje će matematički govoreći dati bolji ISNR.

Zapišimo opšte rešenje kao

$$\tilde{F} = G(H^T)^\dagger + Y (I - H^\dagger H). \quad (4.97)$$

Potrebno je odrediti Y tako da sledeća norma bude najmanja moguća

$$\|F - \tilde{F}\|$$

odnosno potrebno je rešiti sledeći problem

$$\min_Y \|F - G(H^T)^\dagger - Y (I - H^\dagger H)\|. \quad (4.98)$$

Odnosno, minimizira se

$$\min Q(Y) = \frac{1}{2} \|Y (I - H^\dagger H) - (F - G(H^T)^\dagger)\|^2 \quad (4.99)$$

i na osnovu toga određuje Y . Idealan slučaj bi bio ukoliko bi imali da važi

$$Y(I - H^\dagger H) - (F - G(H^T)^\dagger) = 0, \quad (4.100)$$

što povlači

$$Y(I - H^\dagger H) - (F - FH^T(H^T)^\dagger) = Y(I - H^\dagger H) - F(I - H^\dagger H) = 0,$$

što bi dovelo do najoptimalnijeg rešenja

$$Y_{\text{opt}} = F.$$

U nastavku ćemo takođe izložiti ideju, na koji način je moguće koristiti nelinearne optimizacione metode predstavljene u glavi 3 radi minimizacije matrice norme (4.98), a sve u cilju nalaženja što boljeg rešenja početnog problema restauracije slika. U tom smislu pokazaćemo usku povezanost ove oblasti sa oblašću nelinearne optimizacije.

Jednostavnosti radi uvedimo sledeće oznake

$$A = I - H^\dagger H, \quad B = F - G(H^T)^\dagger. \quad (4.101)$$

Ukoliko koristimo neki gradijentni metod da bismo rešili minimizacioni problem (4.99), pošto imamo da važi

$$\nabla Q(Y) = A^*(YA - B) \quad (4.102)$$

dobijamo iterativnu šemu opšteg oblika

$$Y_{k+1} = Y_k - \gamma_k A^*(YA - B). \quad (4.103)$$

Naravno, parametar γ_k je određen nekom od metoda (SC, SM ili BB metod). Očekuje se da svi ovi metodi ispunjavaju (ovo bi trebalo pokazati, slično kao za $B = I$ kod SC metoda u poglavlju 3.4)

$$Y_k \rightarrow BA^{(1,3)}.$$

Medjutim, zbog uslova rešivosti matricne jednačine definisane pomoću (4.100) i uvedenih oznaka (4.101), važi

$$BA^{(1,3)} = BA^\dagger,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} Y_k \rightarrow BA^\dagger &= (F - G(H^T)^\dagger) (I - H^\dagger H) = F - G(H^T)^\dagger - FH^\dagger H + G(H^T)^\dagger \\ &= F(I - H^\dagger H). \end{aligned}$$

Tada na osnovu (4.97) dobijamo

$$\tilde{F} = G(H^T)^\dagger + F(I - H^\dagger H)^2 = G(H^T)^\dagger + F(I - H^\dagger H),$$

što znači da ponovo dolazimo do istog rezultata, a to je da bi trebalo uzeti

$$Y_{\text{opt}} = F.$$

Osnovni problem koji se ovde javlja je to što mi zapravo u samom procesu restauracije slike ne znamo kako izgleda original F pa samim tim i ne možemo na ovaj način da izaberemo Y_{opt} . Međutim, naš cilj u bliskoj budućnosti biće pronalaženje nekog drugog (poznatog) Y koje će dovesti do preciznije i čistije aproksimacije (u smislu ISNR-a) početnog originala F od do sada predložene.

Glava 5

Zaključak

U ovoj doktorskoj disertaciji posmatrane su i izučavane tri glavne oblasti: *strukturne matrice*, *uopšteni inverzi matrica* i *nelinearna optimizacija*. Iako su ove naučne oblasti po svojoj sadržini veoma široke i na prvi pogled se prilično razlikuju, mi smo izučili i obradili neke delove ovih oblasti i pokušali da ih na jedan prirodan način povežemo u jednu interesantnu i raznovrsnu celinu. Naime, pokazali smo kako je moguće iskoristiti nelinearnu optimizaciju za efikasno računanje različitih uopštenih i običnih inverza matrica. Takođe, konstruisali smo nove i modifikovali neke od postojećih algoritama za računanje generalisanih inverza proizvoljnih matrica i primenili ih efikasno na strukturnim matricama. Pokazali smo kako je moguće te metode iskoristiti u praktične svrhe, kao što je, recimo, restauracija oštećenih slika.

Kratak pregled svih izloženih rezultata kao i neke ideje za dalja istraživanja biće prikazani u ovoj, zaključnoj glavi.



U drugoj glavi ove doktorske disertacije najpre smo opisali Levinson-Durbinov (1947) algoritam za rešavanje sistema jednačina čija je matrica sistema Toeplitz-ova matrica. Pored njega prikazali smo još jedan algoritam dat Gohberg-Semenculovom fomulom za računanje inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice. Kompleksnost ovih algoritama je reda $O(n^2)$ za prvi navedeni algoritam kao i $O(n \log n)$ za množenje inverza Toeplitz-ove matrice proizvoljnim vektorom za drugi algoritam.

◇ Glavni rezultat ove glave predstavljen je u odeljku 2.2.5. gde je predstavljen efikasan algoritam za računanje spoljnog inverza proizvoljne Toeplitz-ove matrice sa predefinisanim jezgrom i slikom. Kao motivaciju za ovaj rezultat najpre smo iskoristili i kasnije iskombinovali radove [14] i [131].

Naime, poznato je da jedan od najmoćnijih alata za izračunavanje običnog inverza, kao i generalisanih inverza proizvoljne matrice, koji se može naći u literaturi, jeste Newton-ov metod koga je prvobitno predložio Shultz 1933. godine [126]. Postoji nekoliko različitih modifikacija ovog metoda koje se bave Toeplitz-ovim matricama. Svaki od njih je namenjen izračunavanju običnih, group, Moore-Penrouseovih ili nekih drugih uopštenih inverza ovih matrica [14, 15, 22, 150].

S druge strane, autori u [131] predlažu metod, na osnovu SMS algoritma za izračunavanje različitih $\{2\}$ -inverza (spoljnih inverza) proizvoljne kompleksne matrice sa predefinisanim jezgrom i slikom. Ovaj metod zapravo predstavlja objedinjenje različitih algoritama i samim tim se izdvaja kao uopšten i jedinstven algoritam za računanje različitih generalisanih inverza date matrice koji proizilaze iz $\{2\}$ -inverza te matrice.

U ovoj glavi doktorata koristimo ideju uvedenu u [131], u kombinaciji sa konceptom operatora razmeštanja matrice i ranga razmeštene iterativne matrice opisanih u radu [14]. Naime, predstavili smo modifikaciju SMS algoritma za računanje spoljašnjeg inverza sa predefinisanim jezgrom i slikom proizvoljne Toeplitz-ove matrice. Naš metod je zapravo uopštenje ideja iz radova [14, 22] i u tom smislu predstavlja univerzalni algoritam za nalaženje uopštenog inverza Toeplitz-ove matrice. Rezultati iz radova [14, 22] mogu se posmatrati kao posebni slučajevi datog algoritma. Kao opšti zaključak imamo da naš algoritam daje jedinstveni pristup pomoću koga možemo otkloniti navedene razlike u prethodno navedenim metodama a koje se tiču strategija za izbor početne aproksimacije, definisanja iterativnih pravila i korišćenja operatora razmeštanja matrica.

Prikazani numerički rezultati i kvadratna konvergencija pokazuju da je naš algoritam za računanje spoljašnjeg generalisanog inverza dobar kao i SMS algoritam, u pogledu broja iteracija. Pored toga, postignute niske vrednosti za maksimalni i ukupni rang razmeštanja matrice evidentno smanjuju troškove algoritma imajući u vidu korišćenje strategija FFT-a i konvolucije za množenje matrica vektorom.

U nastavku bavljenja istraživačkim radom pokušaćemo da predstavimo sličnu modifikaciju SMS algoritma za računanje $\{2\}$ -inverza proizvoljne strukturne matrice. Naime, nastojaćemo da iskoristimo već postojeće (za Hankel-ove matrice) i pronađemo nove reprezentacije proizvoljne strukturne matrice pomoću sume proizvoda nekih drugih strukturnih matrica koje se veoma efikasno mogu množiti vektorom. Zapravo, tragaćemo za formulama sličnim kao kod Toeplitz-ovih matrica koje su date teoremom 2.2.6 gde je Toeplitz-ova matrica predstavljena pomoću sume proizvoda cirkularnih matrica.



Glavni rezultati treće glave ovog doktorata su predstavljeni u poglavljima 3.2, 3.3 i 3.4. Prva dva poglavlja obuhvataju opis novih gradijentnih metoda za nalaženje minimuma proizvoljne nelinearne funkcije, dok je u poslednjem poglavlju pokazano kako je moguće koristiti ove metode za izračunavanje običnih i generalisanih inverza matrica.

◇ Kao motivaciju za rezultat dat u poglavlju 3.2 iskoristili smo rad u kome je predstavljena ideja kako je moguće ubrzati klasičan metod opadajućig gradijenata [4]. Kod našeg algoritma, za izbor parametra ubrzanja metoda opadajućih gradijenata, koristili smo drugačiji pristup u odnosu na algoritam koji je predstavljen u [4]. Tačnije, mi uvodimo ubrzani metod opadajućih gradijenata, koristeći Newton-ov metod sa linijskim pretraživanjem tako što Hessian aproksimiramo pomoću, na odgovarajući način izabrane, skalarne matrice.

Za uniformno konveksne funkcije kao i za odgovarajući podskup strogo konveksnih kvadratnih funkcija pokazana je linearna konvergencija algoritma.

Na osnovu tabela koje su date u odeljku 3.2.3, u kome su prikazani numerički rezultati, zaključujemo da predstavljeni (SM) metod ima daleko bolje karakteristike od AGD metoda iz [4] kao i od običnog gradijentnog GD metoda. Posmatrani kriterijumi su broj iterativnih koraka, potrebno CPU vreme, kao i broj izračunavanja vrednosti funkcija. U tom smislu, dobijen je još jedan metod sa linearnom konvergencijom koji ima izuzetno dobre numeričke karakteristike kako u pogledu stabilnosti tako i u pogledu kompleksnoti samog algoritma.

Poboljšanje karakteristika algoritma dodavanjem parametra ubrzanja, na ovako predstavljen način, kod gradijentnog metoda kao i kod nekih drugih metoda (recimo, konjugovanih gradijenata) je veoma zanimljiv problem i u svakom slučaju biće predmet našeg budućeg istraživanja.

◇ U poglavlju 3.3 predstavili smo novi metod opadajućih gradijenata sa dvotačkastom dužinom koraka koji je detaljno opisan algoritmom 3.3.3. Kao osnovna ideja korišćena je dvotačkasta aproksimacija sekantne jednačine iz quasi-Newtonovog metoda, kao i aproksimacija inverza Hessian-a B_k odgovarajućom skalarnom matricom $\gamma_k I$. Ideja za konstrukciju algoritma sa dvotačkastom dužinom koraka preuzeta je iz rada [10] u kome je predstavljen veoma poznat i široko primenjivan, takozvani, BB (Barzilai-Bowein) metod za rešavanje problema nelinearne optimizacije.

Raydan u svom radu [122] predlaže globalni metod u kome kombinuje ideje nemonotonog linijskog pretraživanja koju je uveo Grippo u radu [62] i koja garantuje globalnu konvergenciju i ideju BB gradijentnog metoda. Rezultujući algoritam, poznatiji kao globalni Barzilai-Borwein metod (ili skraćeno GBB metod) je jedan od najpoznatijih i najpogodnijih metoda za nelinearnu optimizaciju problema velikih dimenzija i služi kao merilo za testiranje istih.

Kod našeg metoda, u svakoj iteraciji aproksimaciju inverza Hessian-a biramo tako što tražimo skalar a_k koji će zadovoljavati $\gamma_{k+1} = \gamma_k + a_k$. Cilj je da se početni probni parametar γ_{k+1} relaksira što je više moguće u smislu da njegova vrednost bude najveća moguća. Na taj način skalarom a_k korigujemo parametar iz prethodne iteracije, pa je jasan i sam naziv ovog algoritma "Metod skalarne korekcije". Nekoliko vrednosti dužina koraka koje proizilaze iz sekantne jednačine analiziramo i biramo one sa najvećim vrednostima. Kasnije, da bi dobili globalno konvergentan algoritam koji bi u tom smislu bio uporediv sa BB metodom, našem metodu (SC metodu) pridružena je tehnika nemonotonog linijskog pretraživanja i tako dobijen takozvani GSC metod.

Numerički rezultati predstavljeni u poslednjem odeljku ovog poglavlja neosporno ukazuju na to da je naš metod, ne samo uporediv sa GBB metodom, već i poseduje bolje numeričke karakteristike. Na osnovu tih prednosti kao i ostalih karakteristika GSC algoritma, za koji je pokazana kvadratna konvergencija, kao što su jednostavnost, efikasnost i veoma mali zahtevi za memorijom (slično kao kod GBB metodom), on se prirodno nameće kao veoma atraktivan i efikasan metod za rešavanje optimizacionih problema velikih dimenzija.

Takođe, nadamo se da će i prikazana teorijska i numerička analiza ovog metoda biti korisne i relevantne u narednim studijama o gradijentnim metodama sa dvotačkastom dužinom koraka kao i sama analiza tehnike o nemonotonom linijskom pretraživanju.

◇ Nashed u svom radu [104] koristi ideju metoda najstrmijeg pada kako bi pronašao rešenje najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$ na Hilbert-ovom prostoru za linearno ograničen operator A . Ideja iz ovog rada poslužila je kao motivacija za rešavanje operatorske jednačine $Ax = b$ korišćenjem metoda skalarne korekcije. Metod kojim je dobijeno ovo rešenje prikazan je u poglavlju 3.4. Treba napomenuti da se ovaj metod može iskoristiti i za računanje običnog i uopštenih inverza proizvoljne matrice.

U poglavlju 3.4. najpre smo proširili pojam sekantne jednačine na Hilbert-ov prostor kako bismo mogli da primenimo metod skalarne korekcije. Odnosno, razvili smo novi gradijentni metod za nalazjenje rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$ na Hilbert-ovim prostorima, koji pored dobrih osobina koje proističu iz same sekantne jednačine, takođe poseduje i osobinu monotonosti.

Skup rešenja najmanjih kvadrata operatorske jednačine $Ax = b$ identifikovali smo sa skupom graničnih vrednosti iterativnog procesa (3.69) koji opisuje proizvoljan gradijentni metod na Hilbert-ovom prostoru. Poznato je da je granična vrednosti iterativnog procesa (3.69) u potpunosti određena pomoću početne aproksimacije i ta granična vrednost je rešenje najmanjih

kvadrata [105]. Ovo važi za svaki gradijentni metod koji konvergira ka svom minimumu. S druge strane mi smo pokazali obrnuto, kako je moguće za dato rešenje najmanjih kvadrata odrediti skup svih početnih aproksimacija za koje će dati gradijentni iterativni metod konvergirati ka baš tom rešenju (teorema 3.4.3). Kao poseban slučaj pomenutih operatorskih jednačina pokazali smo kako je moguće računati $\{1, 3\}$ -inverze kao i Moore-Penroseov inverz proizvoljne kompleksne matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Predstavljeni numerički rezultati potvrdili su naša očekivanja o dominaciji predstavljenog metoda u odnosu na metod najstrmijeg pada. Naime, poznato je da metod najstrmijeg pada poseduje loše osobine konvergencije za loše-uslovljene probleme ili čak uopšte i ne konvergira. Zbog toga smo nov metod sa dvotačkastom dužinom koraka uporedili sa najpoznatijim takvim metodom, favorizovanim BB metodom. Upoređujući numeričke rezultate, kao zaključak, slično kao u prethodnom poglavlju, dobijamo da je naš metod konkurentan BB metodu, i to ne samo u broju iteracija već i u pogledu tačnosti. U tom smislu predstavljen je još jedan, veoma efikasan i lak za implementaciju, metod za računanje uopštenih inverza proizvoljnih matrica.



U četvrtoj glavi predstavili smo tri nova rezultata, svaki od njih nalazi se u posebnom poglavlju. Najpre smo posmatrali karakteristične Toeplitz-ove matrice čiji su elementi uopšteni Fibonacci-jevi i Catalan-ovi brojevi, a kasnije, u poslednjem poglavlju, videli smo kako je moguće koristiti Toeplitz-ove matrice i njihove inverze u procesu restauracije zamućenih slika.

◇ Pojam Fibonacci-jevih matrica uveden je u radu [91] da bi potom bio definisan i pojam Lucas-ovih matrica [159] koje su zapravo donje trougaone Toeplitz-ove matrice. Kasnije, Stanimirović sa koautorima posmatra opštiji slučaj uređujući duž paralela glavne dijagonale uopštene Fibonacci-jeve brojeve i tako dobijene uopštene Fibonacci-jeve matrice [133]. Faktorizacijom ovih matrica pomoću Pascal-ovih matrica kao i nalaženjem njihovih inverza, dobijeni su veoma interesantni kombinatorni identiteti koji sadrže ove brojeve. Kao motivaciju za posmatranje Fibonacci-jevih matrica kao posebne klase Toeplitz-ovih matrica i njihovih uopštenja iskoristili smo gore navedne radove.

U prvom poglavlju četvrte glave, najpre smo predstavili uopštene Fibonacci-jeve brojeve pomoću konvolucione formule. Takođe, donje trougaone uopštene Fibonacci-jeve matrice dali smo u terminima konvolucije.

Kasnije smo konstruisali novu konvolucionu formulu koja sadrži uopštene Fibonacci-jeve brojeve i prikazali neke od njenih primena. Pokazali smo da je konvolucija zajednički pojam koji se može koristiti u izvođenju različitih kombinatornih identiteta kao i u nalaženju inverza ovih donje trougaonih Toeplitz-ovih matrica.

U nekim posebnim slučajevima od konvolucione formule dobili smo odgovarajuće, veoma interesantne, kombinatorne identitete koji sadrže uobičajene Fibonacci-jeve brojeve, Lucas-ove brojeve, kao i uopštene Fibonacci-jeve brojeve. Takođe, razmatramo donje trougaone blok Toeplitz-ove matrice koje za razliku od svih do tada posmatranih matrica, jer nisu regularne. Izvodimo i formulu za nalaženje njihovog MP inverza koristeći konvoluciju. Treba napomenuti i to da većina kombinatornih identiteta koji su prikazani u ovom poglavlju sadrže ili su uopštenja identiteta koji su izvedeni u radovima [91, 133, 159].

◇ Osnovna ideja predstavljena u poglavlju 4.2 je upotreba Catalan-ovih brojeva kao ne nula elemenata u donje trougaonim Toeplitz-ovim matricama. Pojam Catalan-ovih matrica je uveden na osnovu opštih ideja koje su predstavljene u radovima [92, 130, 160, 159]. U tu svrhu poredali smo na odgovarajući način Catalan-ove brojeve kao ne nula elemente u donje

trougaonu Toeplitz-ovu matricu i na taj način formirali Catalan-ovu matricu. Glavni rezultati ovog dela četvrte glave doktorske disertacije su predstavljeni sledećim iskazima

- Eksplicitno predstavljanje Catalan-ove matrice i njenog inverza.
- Predstavljanje sume prvih m Catalan-ovih brojeva i odgovarajućih rekurentnih relacija.
- Alternativna reprezentacija proizvoljnog Catalan-ovog broja data u terminima binomnih koeficijenata i uopštene hiper-geometrijske funkcije.
- Izvođenje raznih kombinatornih identiteta i rekurentnih relacija koji sadrže Catalan-ove brojeve, binomne koeficijente i specijalne funkcije.

Ovi rezultati su nastavak opšte ideje koje se koriste u radovima [92, 130, 160, 159] kao i rezultata izloženih u poglavlju 4.1.

◇ Motivisani problemom restauracije zamućenih slika, u zadnjem poglavlju četvrte glave, predstavili smo metod za obnovu slika kod kojih je zamućenje nastalo usled ravnomernog linearnog kretanja. Ovaj metod baziran je na izračunavanju Moore-Penroseovog inverza veoma karakteristične pravougaone Toeplitz-ove matrice H .

Novi algoritam, za računanje MP inverza, zasnovan je na odgovarajućim adaptacijama poznatih partitioning metoda koji su uvedeni u radovima [145] i [61]. Koristeći specifičnu strukturu matrice H , kao i činjenicu da znamo početnu kvadratnu matricu H_m^\dagger iskoristili smo ove partitioning metode kako bi dobili efikasan metod.

Predstavljeni rezultati najpre pokazuju superiornost tehnike Moore-Penroseovog inverza u odnosu na druge metode, kao što su: Wiener-ov filter, metod ograničenog filtera najmanjih kvadrata kao i Lucy-Richardsonov algoritam. Kasnije, poredimo naš metod sa ostalim metodima koji koriste tehniku izračunavanja Moore-Penroseovog inverza matrice: algoritam uveden u radu [87] i kasnije korišćen u [31, 30] kao i sa Courrieu-ovim metodom iz [36].

Glavna prednost je činjenica da je predloženi metod znatno smanjio vreme potrebno za dobijanje obnovljene slike, u odnosu na druge metode na osnovu korišćenja tehnike MP inverza. Takođe, korišćenjem predložene metode, imamo da je rezolucija obnovljene slike, koja se meri na osnovu vrednosti $ISNR$ -a, [19], i dalje na veoma visokom nivou.

Uveden metod može se koristiti za obnavljanje zamućenih rentgenskih snimaka, kod kojih je zamućenje nastalo usled nekog uniformnog linearnog kretanja. Naš metod, osim u radiologiji, može se koristiti i u različitim praktičnim primenama, kao što je recimo restauracija slika iz ANPR sistema, što je i prikazano u odeljku 4.3.4.

Na kraju treba reći i to da je u poslednjem odeljku poslednje glave postavljen jedan konkretan i otvoren problem na kojem će se raditi a tiče se oblasti restauracije slika. Osim toga, zbog veoma specifične strukture same matrice zamućenja H moguće je eksplicitno odrediti njen Moore-Penroseov inverz nakon nametanja dodatnih ograničenja na dimenzije ove matrice. Ta ograničenja neće onemogućiti primenu ovog rešenja na problem restauracije rentgenskih snimaka. Treba proučiti na koje još klase slika neće uticati ova ograničenja. U tom smislu neće biti potrebno primenjivati bilo kakav algoritam za nalaženje MP inverza vec samo za njegovu eksplicitnu konstrukciju što bi u mnogome smanjilo potrebno vreme za restauraciju. Ova ideja će svakako biti proučavana i doradivana u našim daljim istraživanjima.



Svi rezultati izloženi u ovoj disertaciji, pored značajnog doprinosa na izučavanju strukturnih matrica na jedan karakterističan način, i njihovoj primeni, predstavljaju i dobru osnovu za dalja istraživanja i razvoj novih algoritama za rad sa strukturnim matricama kako iz prikazanih tako i iz nekih drugih oblasti.

Literatura

- [1] V.M. Adukov, *Generalized inversion of finite rank Hankel and Toeplitz operators with rational matrix symbols*, Linear Algebra Appl. **290** (1999), 119-134.
- [2] R. Aggarwala and M.P. Lamoureux, *Inverting the Pascal matrix plus one*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 371–377.
- [3] H. Akaike, *On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method*, Ann. Inst. Statist. Math. **11** (1959), 1–17.
- [4] N. Andrei, *An acceleration of gradient descent algorithm with backtracking for unconstrained optimization*, Numer. Algorithms **42** (2006), 63–73.
- [5] N. Andrei, *An Unconstrained Optimization Test Functions Collection*, <http://www.ici.ro/camo/journal/vol10/v10a10.pdf>.
- [6] H. Andrews, B. Hunt. *Digital Image Restoration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1977.
- [7] I. K. Argyros, *Weak sufficient convergence conditions and applications for Newton methods*, J. Appl. Math. Comput. **16** (2004), 1–17.
- [8] L. Armijo, *Minimization of functions having Lipschitz first partial derivatives*, Pacific J. Math. **6** (1966), 1–3.
- [9] A. Ashrafi, P.M. Gibson, *An involutory Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **387** (2004), 277–286.
- [10] J. Barzilai, J.M. Borwein. *Two point step size gradient method*, IMA J. Numer. Anal. **8** (1988) 141–148.
- [11] M.R. Banham, A.K. Katsaggelos, *Digital image restoration*, IEEE Signal Processing Magazine **14** (1997), 24–41.
- [12] A. Ben-Israel, T.N. E. Greville, *Generalized Inverses. Theory and Applications, Second edition*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [13] P. Bhimasankaram, *On Generalized Inverses of Partitioned Matrices*, Sankhya **33** (1971), 331–314.
- [14] D. Bini, B. Meini, *Approximate displacement rank and applications*, Structured Matrices in Mathematics, Computer Science and Engineering II, V. Olshevsky Editor, Contemporary Mathematics, **281** (2001), 215–232, American Mathematical Society, Rhode Island.

- [15] D. Bini, G. Codevico, M. Van Barel, *Solving Toeplitz least squares problems by means of Newton's iteration*, Numer. Algorithms **33** (2003), 93–103.
- [16] D. Bini, V. Pan, *Improved parallel computations with Toeplitz-like and Hankel matrices*, Linear Algebra Appl. **188-189** (1993), 3–29.
- [17] D. Bini, V. Pan, *Matrix and Polynomial Computations*, vol.1: Fundamental algorithms, Birkhauser, Boston, 1994. Linear Algebra Appl. **188-189** (1993), 3–29.
- [18] E.G. Birgin, J.M. Martinez and M. Raydan *Nonmonotone spectral projected gradient methods for convex sets*, SIAM J. Optim., **10** (2000), 1196–1211.
- [19] A. Bovik, *The essential guide to the image processing*, Academic Press, San Diego, San Francisco, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, 2009.
- [20] A. Bovik, *Handbook of image and video processing*, Academic Press, San Diego, San Francisco, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, 2000.
- [21] C. Brezinski, *A classification of quasi-Newton methods*, Numer. Algorithms **33** (2003), 123-135.
- [22] J. F.Cai, M. K. Ng, Y. Wei, *Modified Newton's Algorithm for Computing the Group Inverses of Singular Toeplitz Matrices*, J. Comput. Math. **24** (2006), 647–656.
- [23] G.S. Call, D.J. Vellman, *Pascal matrices*, Amer. Math. Monthly, **100** (1993), 372–376.
- [24] S. L. Campbell, C. D. Meyer, *Generalized inverses of Linear Transformations*, Pitman, New York, 1979.
- [25] A. Cauchy, *Metode generale pour la resolution des systems d'equations simultanees*, Comp. Rend. Sci. **25** (1847), 46–89.
- [26] R. Chan, M. Ng, *Conjugate gradient methods for Toeplitz systems*, SIAM Rev. **38** (1996), 427-482.
- [27] G.K. Chantas, N.P. Galatsanos, N.A. Woods, *Super-resolution based on fast registration and maximum a posteriori reconstruction*, IEEE Trans. Image Process. **16** (2007), 1821–1830.
- [28] L. Chen, E.V. Krishnamurthy, I. Macleod, *Generalized matrix inversion and rank computation by successive matrix powering*, Parallel Comput. **20** (1994), 297-311.
- [29] Gi-Cheon and Jin-Soo Kim, *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **329** (2001), 49–59.
- [30] S. Chountasis, V. N. Katsikis, D. Pappas, *Applications of the Moore-Penrose inverse in digital image restoration*, Math. Probl. Eng., Volume 2009, Article ID 170724, 12 pages doi:10.1155/2009/170724.
- [31] S. Chountasis, V. N. Katsikis, D. Pappas, *Digital Image Reconstruction in the Spectral Domain Utilizing the Moore-Penrose Inverse*, Math. Probl. Eng., Volume 2010, Article ID 750352, 14 pages doi:10.1155/2010/750352.

- [32] S. Chountasis, V. N. Katsikis, D. Pappas, *Image restoration via fast computing of the Moore-Penrose inverse matrix*, Systems, Signals and Image Processing, 2009, IWSSIP 2009.
- [33] A.I. Cohen *Stepsize analysis for descent methods*, J. Optim. Theory Appl. **33** (1981), 187–205.
- [34] L. Collatz, *Functional analysis and numerical mathematics*, Academic Press, New York, 1966.
- [35] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms, Second Edition*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts London, McGraw-Hill Book Company, Boston Burr Ridge , IL Dubuque , IA Madison , WI New York San Francisco St. Louis Montreal Toronto, 2001.
- [36] P. Courrieu, *Fast Computation of Moore-Penrose Inverse Matrices*, Neural Information Processing - Letters and Reviews, **8** No 2 (2005), 25–29.
- [37] Y.H. Dai, *Alternate step gradient method*, Report AMSS–2001–041, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, 2001.
- [38] Y.H. Dai and R. Fletcher, *On the asymptotic behaviour of some new gradient methods*, Numerical Analysis Report, NA/212, Dept. of Math. University of Dundee, Scotland, UK (2003).
- [39] Y.H. Dai, J.Y. Yuan, Y. Yuan, *Modified two-point step-size gradient methods for unconstrained optimization*, Comput. Optim. Appl. **22** (2002), 103–109.
- [40] Y.H. Dai, Y. Yuan, *Alternate minimization gradient method*, IMA J. Numer. Anal. **23** (2003), 377–393.
- [41] Y.H. Dai, Y. Yuan, *Analysis of monotone gradient methods*, J. Ind. Manag. Optim. **1** (2005), 181–192.
- [42] Y. H. Dai, H. Zhang, *Adaptive two-point stepsize gradient algorithm*, Numer. Algorithms **27** (2001), 377–385.
- [43] Y.H. Dai, L.Z. Liao, *R-linear convergence of the Barzilai and Borwein gradient method*, IMA J. Numer. Anal. **22** (2002), 1–10.
- [44] Y.H. Dai, *On the Nonmonotone Line Search*, J. Optim. Theory Appl. **112** (2002), 315–330.
- [45] D. S. Djordjević and V. Rakocević, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, 2008.
- [46] D.S. Djordjević, P.S. Stanimirović, *Iterative methods for computing generalized inverses related with optimization methods*, J. Aust. Math. Soc. **78** (2005), 257–272.
- [47] M.P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65**, (1958), 506–514.

- [48] J. Durbin, *The fitting of time series models*, Rev. Inst. Int. Stat. **28** (1960), 233–243.
- [49] I. Erdelyi, *On the Matrix Equation $Ax = \lambda Bx$* J. Math. Anal. Appl. **17** No 1 (1967), 119–132.
- [50] R. Fletcher, C.M. Reeves, *Function minimization by conjugate gradients*, Comput. J. **7** (1964), 149–154.
- [51] R. Fletcher, *On the Barzilai-Borwein method*, Numerical Analysis Report NA/207, (2001).
- [52] G.E. Forsythe, *On the asymptotic directions of the s -dimensional optimum gradient method*, Numer. Math. **11** (1968), 57–76.
- [53] A. Friedlander, J. M. Martinez, B. Molina, M. Raydan, *Gradient method with retracts and generalizations*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), 275–289.
- [54] R. Gabriel, *Das verallgemeinerte inverse einer matrix, deren elemente einem Körper angehören* J. Rewie Ansew Math. **234** (1969), 107–122.
- [55] I.C. Gohberg, A.A. Semencul, *On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs*, (in Russian), Mat. Issled **2** (1972), 201–223.
- [56] A.A. Goldstein, *On steepest descent*, SIAM J. Control **3** (1965), 147–151.
- [57] M.C. Gouveia, *Generalized invertibility of Hankel and Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **193** (1993), 95–106.
- [58] R.M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*, Foundations and Trends in Communications and Information Theory, **2** (2006), 155–239.
- [59] F. Graybill, *Matrices and Applications to Statistics*, second ed., Wadsworth, Belmont, California, 1983.
- [60] U. Grenander, M. Rosenblatt, *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, Wiley and Sons, NY, 1966, Chapter 1.
- [61] T.N.E. Grevile, *Some applications of the pseudo-inverse of matrix*, SIAM Rev. **3** (1960), 15–22.
- [62] L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi *A nonmonotone line search technique for Newton's method*, SIAM J. Numer. Anal. **23** (1986), 707–716.
- [63] L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi, *A class of nonmonotone stability methods in unconstrained optimization*, Numer. Math. **62** (1991), 779–805.
- [64] L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi, *A truncated Newton method with nonmonotone line search for unconstrained optimization*, J. Optim. Theory Appl. **60** (1989), 401–419.
- [65] P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary, *Deblurring images: matrices, spectra, and filtering*, SIAM, Philadelphia, 2006.

- [66] R.E. Hartwig, J. Shoaf, *Group inverses and Drazin inverses of bidiagonal and triangular Toeplitz matrices*, J. Aust. Math. Soc. **24** (Ser. A) (1977), 10-34.
- [67] G. Heinig, K. Rost, *Algebraic method for Toeplitz-like matrices and operators*, Akademie-Verlag, Berlin and Birkhauser, 1984.
- [68] G. Heinig, F. Hellinger, *On the Bezoutian structure of the Moore-Penrose inverse of Hankel matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **14** (1993), 629-645.
- [69] G. Heinig, F. Hellinger, *Displacement structure of pseudoinverses*, Linear Algebra Appl. **197/198** (1994), 623-649.
- [70] G. Heinig, *Generalized inverses of Hankel and Toeplitz mosaic matrices*, Linear Algebra Appl. **216** (1995), 43-59.
- [71] G. Heinig, F. Hellinger, *Moore-Penrose inversion of square Toeplitz matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **15** (1994), 418-450.
- [72] M.R.Hestenes, *Pseudoinverses and conjugate gradients*, Commun. ACM **18** (1975), 40-43.
- [73] M. Hillebrand and C. H. Müller, *Outlier robust corner-preserving methods for reconstructing noisy images*, Ann. Statist. **35** (2007), 132-165.
- [74] A.F. Horadam, *A generalized Fibonacci sequence*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 455-459.
- [75] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1986.
- [76] *Image Processing Toolbox User's Guide*, The Math Works, Inc., Natick, MA, 2009.
- [77] T. Kailath, S.Y. Kung, M. Morf, *Displacement rank of matrices and linear equations*, J. Math. Anal. Appl. **68** (1979), 395-407.
- [78] T. Kailath, A.H. Sayed, *Displacement structure: theory and applications*, SIAM Rev. **37** (1995), 297-386.
- [79] T. Kailath, A.H. Sayed, *Fast reliable algorithms for matrices with structure*, SIAM Philadelphia, (1999).
- [80] T. Kailath, S.Y. Kung, M. Morf, *Displacement rank of a matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 769-773.
- [81] R.E. Kalaba, F.E. Udawadia, *Analytical Dynamics: A New Approach*, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [82] R.E. Kalaba, F.E. Udawadia, *Associative memory approach to the identification of structural and mechanical systems*, J. Optim. Theory Appl. **76** (1993), 207-223.
- [83] D. Kalman, R. Mena, *The Fibonacci numbers-exposed*, Math. Mag. **76** (2003), 167-181.
- [84] W.J. Kammerer, M.Z. Nashed, *On the convergence of the conjugate gradient method for singular linear operators equations*, SIAM J. Numer. Anal. **97** (1972), 165-181.

- [85] L.V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis* (in Russian), Moscow, 1977.
- [86] N. Levinson, *The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction*, J. Math. Phys. **25** (1947), 261–278.
- [87] S. Karanasios, D. Pappas, *Generalized inverses and special type operator algebras*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **21** (2006), 41–48.
- [88] V. Katsikis, D. Pappas, *Fast computing of the Moore- Penrose Inverse matrix*, Electron. J. Linear Algebra **17** (2008), 637-650.
- [89] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
- [90] F. Krahmer, Y. Lin, B. Mcadoo, K. Ott, J. Wang, D. Widemann, and B.Wohlberg, *Blind image deconvolution: Motion blur estimation*, In IMA Preprints Series, #2133-5, September 2006.
- [91] Gwang-Yeon Lee, Jin-Soo Kim, Sang-Gu Lee, *Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci matrices*, Fibonacci Quart. **40** (2002), 203–211.
- [92] Gwang-Yeon Lee, Jin-Soo Kim, Seong-Hoon Cho, *Some combinatorial identities via Fibonacci numbers*, Discrete Appl. Math. **130** (2003), 527–534.
- [93] C. Lemaréchal, *A view of line search*, In: A. Auslander, W. Oetti, J. Stoer (eds) Optimization and Optimal Control, pp. 59–78, Springer, Berlin, 1981.
- [94] D.G. Luenberg and Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008.
- [95] H. Lütkepohl, *Handbook of Matrices*, New York: Wiley, 1996.
- [96] Xiao-Guang Lv, Ting-Zhu Huang, Jiang Le, *A note on computing the inverse and the determinant of a pentadiagonal Toeplitz matrix*, Appl. Math. Comput. **206** (2008), 327–331.
- [97] C.C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, N.Y., 1956.
- [98] J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Application*, Springer-Verlag New York, Inc, 2001.
- [99] S.G. Mikhlin, *The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
- [100] A. Mohsen, J. Stoer, *A Variable Metric Method for Approximating Generalized Inverses of Matrices*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **81** (2001), 435446.
- [101] B. Molina, M. Raydan, *Preconditioned Barzilai–Borwein method for the numerical solution of partial differential equations*, Numer. Algorithms **13** (1996), 45–60.
- [102] E. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394-395.

- [103] J.J. Moré and D.J. Thuente, *On line search algorithm with guaranteed sufficient decrease*, Mathematics and Computer Science Division Preprint MCS-P153-0590, Argone National Laboratory, Argone, 1990.
- [104] M.Z. Nashed, *Steepest descent for singular linear operators equations*, SIAM J. Numer. Anal. **7** (1970), 358–362.
- [105] M.Z. Nashed, *Generalized Inverses and Applications*, Edited by M. Zuhair Nashed, Proceedings of an Advanced Seminar, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976.
- [106] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag New York, Inc, 1999.
- [107] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution Of Nonlinear Equation in Several Variables*, Academic Press, 1970.
- [108] V. Pan, R. Schreiber, *An improved Newton iteration for the generalized inverse of a matrix with applications*, SIAM J. Sci. Comput. **12** (1991), 1109–1131.
- [109] V. Y. Pan *Structured matrices and polynomials: unified superfast algorithms*, Springer-Verlag New York, (2001).
- [110] V. Y. Pan, S. Braham, R. E. Rosholt, A. L. Zheng, *Newton's iteration for structured matrices: unified superfast algorithms*, Fast reliable algorithms for matrices with structure (T. Kailath, A.H. Sayed), SIAM Philadelphia, (1999) 189–210.
- [111] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406-413.
- [112] R. Penrose, *On a best approximate solutions to linear matrix equations*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 17-19.
- [113] W. H. Pierce, *A Self-Correcting Matrix Iteration for the Moore-Penrose Generalized Inverse*, Linear Algebra Appl. **244** (1996), 357–363.
- [114] E. Polak, G. Ribière, *Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées*, Revue Francaise Informat. Reserche Opérationnelle, 3e Année **16** (1969) 35-43.
- [115] B.T. Polyak, *The conjugate gradient method in extreme problems*, USSR Comp. Math. Math. Phys. **9** (1969), 94-112.
- [116] F.A. Potra and Y. Shi, *Efficient line search algorithm for unconstrained optimization*, J. Optim. Theory Appl. **85** (1995), 677–704.
- [117] M.J.D. Powell, *Some global convergence properties of a variable-metric algorithm for minimization without exact line search*, AIAM-AMS Proc. Philadelphia **9** (1976), 53–72.
- [118] M. Radić, *Some contributions to the inversions of rectangular matrices*, Glasnik Matematički, **1** (**21**) (1966), 23–37.
- [119] C.R. Rao, S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley and Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

- [120] C.R. Rao, *A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics*, J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. **24** (1962), 152–158.
- [121] M. Raydan, *On the Barzilai and Borwein choice of steplength for the gradient method*, IMA J. Numer. Anal. **13** (1993), 321–326.
- [122] M. Raydan, *The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem*, SIAM J. Optim. **7** (1997), 26–33.
- [123] M. Raydan, B.F. Svaiter, *Relaxed Steepest Descent and Cauchy-Barzilai-Borwein Method*, Comput. Optim. Appl. **21** (2001), 155–167.
- [124] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [125] R.W. Schafer, R.M. Mersereau, and M.A. Richards, *Constrained iterative restoration algorithms*, Proceedings of the IEEE **69** (1981), 432–450.
- [126] G. Schulz, *Iterative Berechnung der reziproken Matrix*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **13** (1933), 57–59.
- [127] Z.-Jun Shi, *Convergence of line search methods for unconstrained optimization*, Appl. Math. Comput. **157** (2004), 393–405.
- [128] Z.-Jun Shi, J. Shen *Convergence of descent method without line search*, Appl. Math. Comput. **167** (2005), 94–107.
- [129] N. Shinozaki, M. Sibuya, K. Tanabe, *Numerical algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix: Direct methods*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics **24** (1972), 193–203.
- [130] P. Stănică, *Cholesky factorizations of matrices associated with r-Order recurrent sequences*, Integers **5(2)** (2005), #A16.
- [131] P. Stanimirović, D. Cvetkovic-Ilić, *Successive matrix squaring algorithm for computing outer inverses*, Appl. Math. Comput. **203** (2008), 19–29.
- [132] P.S. Stanimirović, *Block representation of $\{2\}$, $\{1, 2\}$ inverses and the Drazin inverse*, Indian J. Pure Appl. Math. **29** (1998), 1159–1176.
- [133] P. Stanimirović, J. Nikolov, I. Stanimirović, *A generalization of Fibonacci and Lucas matrices*, Discrete Appl. Math. **156** (2008), 2606–2619.
- [134] P. S. Stanimirović, M. B. Tasić, *Partitioning method for rational and polynomial matrices*, Appl. Math. Comput. **155** (2004), 137–163.
- [135] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 2 Cambridge University Press, Cambridge, (2001).
- [136] R. Stanley and E. W. Weisstein, *Catalan Number*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>.
- [137] G.W. Stewart, *Introduction to Matrix Computation*, Academic Press, New York, 1973.

- [138] Wenyu Sun and Ya-Xiang Yuan, *Optimization theory and methods: nonlinear programming*, Springer, 2006.
- [139] W. Y. Sun, J. Y. Han, J. Sun, *Global convergence of nonmonotone descent methods for unconstrained optimization problems*, J. Comput. Appl. Math. **146** (2002), 89–98.
- [140] K. Tanabe, *Conjugate-gradient method for computing the Moore-Penrose inverse and rank of a matrix*, J. Optim. Theory Appl. **22** (1977), 1–23.
- [141] M. B. Tasić, P. S. Stanimirović, M. D. Petković, *Symbolic computation of weighted MoorePenrose inverse using partitioning method*, Appl. Math. Comput. **189** (2007), 615–640.
- [142] Ph. L. Toint, *A nonmonotone trust region algorithm for nonlinear optimization subject to convex constraints* Math. Program. **77** (1997), 69–94.
- [143] W. R. Trench, *An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices*, SIAM J. Appl. Math. **12** (1964), 515–522.
- [144] F.E. Udawadia, R.E. Kalaba, *An Alternative Proof for Greville's Formula*, J. Optim. Theory Appl. **94** (1997), 23–28.
- [145] F.E. Udawadia, R.E. Kalaba, *General Forms for the Recursive determination of generalized inverses: Unified approach*, J. Optim. Theory Appl. **101** (1999), 509–521.
- [146] M.N. Vrahatis, G.S. Androulakis, J.N. Lambrinos, G.D. Magoulas, *A class of gradient unconstrained minimization algorithms with adaptive step-size*, J. Comput. Appl. Math. **114** (2000), 367–386.
- [147] J.E. Walton and A.F. Horadam, *Some further identities for the generalized Fibonacci sequence $\{H_n\}$* , Fibonacci Quart. **12** (1974), 272–280.
- [148] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, 2003.
- [149] Y. Wei, H. Diao, M.K. Ng, *On Drazin inverse of singular Toeplitz matrix*, Appl. Math. Comput. **172** (2006), 809–817.
- [150] Y. Wei, J. Cai, M. K. Ng, *Computing Moore-Penrose inverses of Toeplitz matrices by Newton's iteration*, Math. Comput. Model. **40** (2004), 181–191.
- [151] Y. Wei, *Successive matrix squaring algorithm for computing Drazin inverse*, Appl. Math. Comput. **108** (2000), 67–75.
- [152] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 4th ed.*, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
- [153] P. Wolfe, *Convergence conditions for ascent methods*, SIAM Rev. **11** (1968), 226–235.
- [154] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/03/>.
- [155] Z. Xu, *On Moore-Penrose inverse of Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **169** (1992), 9–15.

- [156] Y. Yuan, *A new stepsize for the steepest descent method*, Research report, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, 2004.
- [157] F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, New York: Springer-Verlag, 1999.
- [158] Z. Zhang, J. Wang, *Bernoulli matrix and its algebraic properties*, Discrete Appl. Math. **154** (2006), 1622–1632.
- [159] Z. Zhang, Y. Zhang, *The Lucas matrix and some combinatorial identities*, Indian J. Pure Appl. Math. **38** (2007), 457–466.
- [160] Z. Zhang, X. Wang, *A factorization of the symmetric Pascal matrix involving the Fibonacci matrix*, Discrete Appl. Math. **155** (2007), 2371–2376.
- [161] Z. Zhang, *The linear algebra of generalized Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **250** (1997), 51–60.
- [162] G. Zielke, *Report on test matrices for generalized inverses*, Computing **36** (1986), 105–162.
- [163] S. Zohar, *Toeplitz matrix inversion: The algorithm of W.R. Trench*, J. ACM **16** (1969), 592–601.