UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marija G. Milošević

NUMERIČKE I ANALITIČKE APROKSIMACIJE REŠENJA STOHASTIČKIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Doktorska disertacija

Mentor
dr Miljana D. Jovanović

Niš, 2011.

Predgovor

U doktorskoj disertaciji *Numeričke i analitičke aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina* proučavaju se aproksimacije rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina korišćenjem numeričke Euler-Maruyama metode i analitičke metode zasnovane na Taylorovim aproksimacijama.

Poznato je da je klasa eksplicitno rešivih stohastičkih diferencijalnih jednačina veoma uska. Na drugoj strani, mnoge pojave iz mehanike, fizike, biologije i finansija se matematički modeliraju pomoću takvih jednačina, zbog čega je aproksimacija rešenja vrlo aktuelna tema i predmet je proučavanja brojnih autora. Pored ocene bliskosti aproksimativnog i tačnog rešenja, u ovoj oblasti značajno mesto zauzima odredjivanje uslova pod kojima tačno i aproksimativno rešenje imaju zajedničke osobine, kao što su stabilnost, neprekidnost i ograničenost momenata. Medju prvim autorima koji su se bavili aproksimacijom rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina je Maruyama, koji je 1955. godine u radu [62] proučavao Eulerovu metodu sledeći pristup korišćen u slučaju determinističkih diferencijalnih jednačina. Od tada se teorija numeričkih aproksimacija rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina razvija kroz radove brojnih autora, pre svega Kanagawe [40, 41], Platena [79], Highama, Maoa, Stuarta [29], kao i kroz monografije Kloedena i Platena [42] i Kloedena, Platena i Schurtza [43].

Osnovni motiv za izučavanje novih aproksimativnih metoda je proširivanje postojećih rezultata na druge tipove jednačina, kao i povećanje reda konvergencije postojećih aproksimativnih metoda uz korišćenje novih tehnika. Tako su nastali brojni radovi na temu numeričkih aproksimacija rešenja funkcionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, na primer [13, 60], stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem [7, 8, 12, 31, 48, 52, 56], neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina [91, 93], pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina [6, 21], stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima [53, 57, 58, 81] i stohastičkih diferencijalnih jednačina sa skokovima [82, 86, 87]. Medju radovima na temu analitičkih aproksimacija zasnovanih na primeni Taylorovog razvoja, ističu se radovi S. Janković, D. Ilić [35, 36] koji se odnose na obične stohastičke diferencijalne jednačine i stohastičke integrodiferencijalne jednačine, kao i [9] gde se proučavaju stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Markovskim prelazima.

Ova disertacija jednim delom proširuje postojeće rezultate iz oblasti aproksimacija tipa Euler-Maruyama na još neke klase jednačina. Drugim delom su predstavljene aproksimativne metode koje imaju veći red konvergencije u odnosu na postojeće metode i koje se u specijalnim slučajevima svode na neke od postojećih metoda. Proučavanje takvih metoda, pre svega njihove konvergencije, dovelo je do inovacija koje su uslovljene prirodom samih jednačina.

Disertacija sadrži rezultate koji su izloženi u tri glave:

U prvoj glavi su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa i teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina, pre svega osnovne teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina.

U drugoj glavi se razmatraju srednje kvadratna konvergencija i eksponencijalna srednje kvadratna stabilnost Euler-Maruyama rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima. Na taj način su, izostavljanjem jednog restriktivnog uslova, prošireni rezultati iz rada [56]. Pored toga, proučava se srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. U tom smislu, poseban oblik zavisnosti od prošlosti koji opisuje funkcija kašnjenja, zahteva korišćenje potpuno drugačije tehnike od one koja se odnosi na neutralne stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine [91].

U trećoj glavi se proučavaju analitičke aproksimacije rešenja nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina koje se baziraju na Taylorovom razvoju koeficijenata tih jednačina. Iako je osnovna ideja za nastanak ove vrste aproksimacija proistekla iz radova [3] i [35], svaka klasa jednačina koja se proučava u disertaciji zahteva korišćenje specifične tehnike za dokazivanje konvergencije odgovarajućeg niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju. U tom smislu su dokazane L^p-konvergencija i skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina uz primenu Fréchetovog izvoda i opšte Taylorove formule. Pomenuti rezultati, objavljeni u radu M. Milošević, M. Jovanović, S. Janković [71], u specijalnom slučaju se svode na rezultate iz [60] koji se odnose na Euler-Maruyama metodu za stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine.

U nastavku, analogna tvrdjenja su dokazana za stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem, uz korišćenje tehnike kojom se na adekvatan način tretira zavisnost od prošlosti, prisutna u ovim jednačinama.

Pored toga, razmatraju se dve analitičke aproksimativne metode za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima i njihova L^p-konvergencija. Takodje su dokazane L^p-konvergencija i skoro izvesna konvergencija niza analitičkih aproksimativnih rešenja običnih pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ovi rezultati su objedinjeni u radu M. Milošević, M. Jovanović [73] i predstavljaju poboljšanje rezultata iz rada [81] gde je dokazana konvergencija u verovatnoći Euler-Maruyama rešenja pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima. Takodje, postizanjem većeg reda L^p-konvergencije i dokazivanjem skoro izvesne konvergencije niza aproksimativnih rešenja običnih pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina, poboljšani su i uopšteni rezultati iz radova [6] i [21].

Na kraju se razmatra L^p-konvergencija i skoro izvesna konvergencija niza analitičkih aproksimativnih rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i Poissonovim skokovima, i to posebno jednačine u kojima figuriše Poissonova slučajna mera i one u kojima figuriše Poissonov proces. Sama tehnika dokazivanja je prilagodjena, kako postojanju zavisnosti od prošlosti, tako i prisustvu stohastičkog integrala u odnosu na Poissonovu meru, odnosno, u odnosu na Poissonov proces.

U Zaključku su izloženi neki od otvorenih problema i mogući pravci daljih istraživanja.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Miljani Jovanović, kao i svom profesoru dr Svetlani Janković na nesebičnoj pomoći i podršci.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi se uvode neki osnovni pojmovi i rezultati koji se eksplicitno koriste u nastavku. U Poglavlju 1.1 se navode osnovni elementi teorije stohastičkih procesa kao što su merljivost, separabilnost, neprekidnost, ograničenost, markovsko svojstvo, stacionarnost. Mnoge pojave u mehanici, inženjerstvu, biologiji i finansijama, izložene su determinističkim i slučajnim pobudama tipa Gaussovog belog šuma koji se matematički modelira generalisanim izvodom Wienerovog procesa, tj. Brownovog kretanja. U tom smislu je u Poglavlju 1.2 uvedena definicija Wienerovog procesa i navedene su njegove najvažnije osobine. Konstrukcija integrala Itoa, tj. integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu, kao i osobine tog integrala, predstavljene su u Poglavlju 1.3. Empirijske studije su pokazale da matematički modeli koji se baziraju na integralu Itoa nisu dovoljni za opisivanje sistema čije se promene u toku vremena manifestuju kroz skokove. U takvim situacijama je od značaja integral slučajne funkcije po Poissonovoj slučajnoj meri, čije su osnovne osobine date u Poglavljima 1.4 i 1.5. Mnogi autori su se bavili egzistencijom, jedinstvenošću i stabilnošću rešenja, kao i proučavanjem kvalitativnih i kvantitativnih osobina rešenja različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. U Poglavljima 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 i 1.11 se navode teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih, funkcionalnih, stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem, neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina i pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima. Teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem su navedene u Poglavlju 1.12, i to u slučaju kada u njima figuriše integral po Poissonovoj slučajnoj meri i u slučaju kada figuriše integral po Poissonovom procesu. Na kraju glave, u Poglavlju 1.13 su navedene neke elementarne nejednakosti i integralna nejednakost Gronwall-Bellmana, koje se više puta primenjuju u radu.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Početkom prošlog veka je veliki napredak tehničkih disciplina uslovio pojavu problema koji se nisu mogli sagledati kroz klasičnu teoriju verovatnoća. U to vreme su se fizika i tehnika bavile proučavanjem pojava koje se menjaju sa protokom vremena, dok teorija verovatnoća još uvek nije imala razvijenu metodologiju za tretiranje takvih pojava. Tako se javila potreba za razvojem opšte teorije stohastičkih procesa u okviru koje bi se razmatrale slučajne promenljive koje su vremenski zavisne.

Pojam stohastičkog procesa je vezan, izmedju ostalih, za imena Kolmogorova, Sluckog, Wienera, Khincina i Cramera. Aksiomatskoj teoriji Kolmogorova je prethodilo nekoliko pokušaja proučavanja slučajnih pojava. Od posebnog značaja je pokušaj Sluckog [83] da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija kao i pokušaj Wienera [89], koji je dao matematičku formulaciju haotičnog kretanja čestica polena u tečnosti, poznatog kao Wienerov proces. Uvodjenje pojmova uslovne verovatnoće i uslovnog matematičkog očekivanja pružilo je mogućnost Kolmogorovu [46, 47] da postulira sistematsku i strogu konstrukciju osnova teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom. Khinchinu [45] pripada zasluga za nastanak teorije stacionarnih procesa, a Crameru [16] za rezultate vezane za Gaussove procese.

Poseban doprinos razvoju teorije slučajnih procesa je dao Doob koji je u svojoj monografiji [19] proučavao brojne koncepte iz ove oblasti, izmedju ostalog, koncept vremena zaustavljanja, koji je omogućio ekstenziju teorije martingala. Rad Dooba u oblasti teorije martingala su nastavili Meyer [64, 65, 66], Dolean-Dade [18], Dellacherie [17] i Kunita i Watanabe [49]. Teorija stohastičkih procesa je doprinela razvoju mnogobrojnih matematičkih teorija koje opisuju pojave iz realnog života, i kao takva je od velikog značaja za nematematičke nauke, kao što su ekonomija, inženjerstvo, biomedicina i mehanika.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dati prostor verovatnoća i $T \subset R$ parametarski skup. U predstojećem razmatranju, T će biti interval $[0, \infty)$, interval oblika $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, pri čemu je uobičajeno da se parametar $t \in T$ interpretira kao vreme.

Definicija 1.1.1 *Familija $\{x(t), t \in T\}$ slučajnih merljivih funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R^d, \mathcal{B})$ se naziva stohastički proces sa faznim prostorom $(R^d, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom T.*

Imajući u vidu prethodnu definiciju može sa zaključiti da se za svako fiksirano $t \in T$ dobija slučajna promenljiva $\omega \mapsto x(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, tj. $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $x(\omega, t) \in R^d$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$, koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Ako je $T = N$, tj. ako je vremenski interval diskretan, onda se radi o stohastičkom nizu $\{x_n(\omega), n \in N\}$. U ovom radu će se razmatrati isključivo procesi sa neprekidnim vremenom koji predstavljaju matematičke modele slučajnih pojava čiji se ishodi mogu registrovati neprekidno sa protokom vremena.

Stohastički proces odredjuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{x(t_1) < x_1, \ldots, x(t_n) < x_n\},$$

pri čemu je $x_i \in R^d$ i $t_i \in T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$.

Zahteva se da familija konačno-dimenzionalnih raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

- uslov simetrije, tj. da za svaku permutaciju $(i_1, \ldots, i_n)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

- uslov saglasnosti, tj. da važi

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},+\infty)=F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Kolmogorov je dokazao da za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela, koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i stohastički proces $\{x(t),t\in T\}$ definisan na tom prostoru kome odgovara data familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.

Neprebrojivost parametarskog skupa, u opštem slučaju, onemogućava odredjivanje verovatnoća dogadjaja opisanih pomoću stohastičkih procesa. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.1.2 *Stohastički proces $\{x(t),t\in T\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S\subset T$ (separant) i dogadjaj $\Lambda\subset\Omega$ za koji je $P(\Lambda)=0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F\subset R^d$ i proizvoljan otvoren interval $I\subset T$, skupovi*

$$\{\omega: x(\omega,t)\in F,\ t\in I\}\quad i\quad \{\omega: x(\omega,t)\in F,\ t\in I\cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ.

Definicija 1.1.3 *Stohastički procesi $\{x(t),t\in T\}$ i $\{\tilde{x}(t),t\in T\}$, definisani na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je*

$$P\{x(t)=\tilde{x}(t)\}=1 \text{ za svako } t\in T.$$

U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija (verzija) drugog.

Definicija 1.1.4 *Stohastički proces $\{x(t),t\in T\}$ je merljiv ako je $x(\omega,t)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_T\times\mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_T$ Borelovo σ-polje nad T, tj. za svaki Borelov skup B, važi $\{(t,\omega): x(\omega,t)\in B\}\in\mathcal{B}_T\times\mathcal{F}$.*

Slučajni proces $\{x(t),t\in T\}$ je stohastički neprekidan u tački $t_0\in T$ ako za svako $\varepsilon>0$ važi

$$P\{|x(t)-x(t_0)|>\varepsilon\}\to 0,\quad t\to t_0. \tag{1.1}$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S\subseteq T$ ako (1.1) važi za svako $t_0\in S$.

Teorema 1.1.1 (Doob, [19]) *Za svaki stohastički neprekidan stohastički proces $\{x(t),t\in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv stohastički proces $\{\tilde{x}(t),t\in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.*

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t),t\in T\}$ iz Teoreme 1.1.1 se naziva separabilna i merljiva modifikacija stohastičkog procesa $\{x(t),t\in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t),t\in T\}$ je neprekidan u srednjem reda p, tj. L_p-neprekidan, u tački $t_0\in T$ ako važi

$$E|x(t)-x(t_0)|^p\to 0,\quad t\to t_0. \tag{1.2}$$

Stohastički proces je L_p-neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Za stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ se kaže da je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako važi

$$P\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

Ispitivanje skoro izvesne neprekidnosti se često vrši po kriterijumu Kolmogorova koji je iskazan sledećom teoremom.

Teorema 1.1.2 (Kriterijum Kolmogorova) *Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ ima skoro izvesno neprekidnu modifikaciju ako postoje pozitivne konstante p, q i k, tako da za svako $T > 0$ i svako $0 \leq s, t \leq T$ važi*

$$E|x(t) - x(s)|^p \leq k|t - s|^{1+q}.$$

Definicija 1.1.5 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je drugog reda (L_2-proces) ako je $E|x(t)|^2 < \infty$, za svako $t \in T$.*

Funkcija $K(s, t) = E(x(s) - Ex(s))E(x(t) - Ex(t)),\ s, t \in T$ je korelaciona funkcija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Definicija 1.1.6 *Stohastički proces drugog reda $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u užem smislu) ako za svaki izbor parametara $t_1, \ldots, t_n \in T$ i $h \in R$, za koje je $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$, zajednička raspodela za $(x(t_1 + h), \ldots, x(t_n + h))$ ne zavisi od h.*

Definicija 1.1.7 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u širem smislu) ako za svako $t \in T$ važi $E|x(t)|^2 < \infty$, $Ex(t) = a = const$ i korelaciona funkcija $K(s, t)$ zavisi samo od $t - s$.*

Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dati prostor verovatnoća, onda se familija $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod-σ-algebri od $\mathcal{F}$ za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leq t,\ s, t \in T$, naziva filtracija. Ako je $T = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s<t} \mathcal{F}_s\}$ σ-algebra dogadjaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\{\cap_{s>t} \mathcal{F}_s\}$ σ-algebra dogadjaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je neprekidna s desna (neprekidna s leva) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_-}$). Za filtraciju se kaže da je neprekidna ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava uobičajene uslove ako je neprekidna s desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.1.8 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ako je, za svako $t \in T$, slučajna promenljiva $x(t)$ $\mathcal{F}_t$-merljiva.*

Činjenicu da je stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ označavaćemo sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in T\}$, prirodna filtracija je ona koja je generisana samim procesom, tj. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ-algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Dakle, X je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in T\}$ modifikacija procesa X, tada je i $\tilde{X}$ adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$ ako $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula.

Definicija 1.1.9 *Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je progresivno merljiv ako za svako $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}^d$ važi*

$$\{(s, \omega) : s \leq t,\, \omega \in \Omega,\, x(\omega, s) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0, t])$ Borelovo σ-polje nad $[0, t]$.

Očigledno, svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Medjutim, važe i sledeća tvrdjenja.

Teorema 1.1.3 (Meyer, [66]) *Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Teorema 1.1.4 (Meyer, [66]) *Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i neprekidan s desna ili s leva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Definicija 1.1.10 *Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ je proces Markova ako je za svako $s < t$ i svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}^d$*

$$P\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B | x(s)\}, \text{ skoro izvesno.}$$

Definicija 1.1.11 *Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ako je*

(i) $E|x(t)| < \infty$;

(ii) $E(x(t)|\mathcal{F}_s) = x(s)$ *skoro izvesno, za* $0 \leq s < t$.

Postoji nekoliko Doobovih nejednakosti koje se odnose na martingale i submartingale (videti [19]). Ovde će biti navedena samo ona koja će se koristiti eksplicitno u nastavku.

Teorema 1.1.5 *Neka je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan s desna martingal i neka je $E|x(t)|^p < \infty$, za svako $t \in [0, \infty)$. Ako je $[a, b] \subset [0, \infty)$ ograničen interval, tada važi*

$$E \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|x(b)|^p, \quad p > 1. \tag{1.3}$$

1.2 Wienerov proces

Brownovo kretanje je naziv za haotično kretanje čestica polena rastvorenih u vodi što je bio predmet proučavanja škotskog botaničara Roberta Browna 1828. godine. Medjutim, početkom 20. veka pojam Brownowog kretanja se interpretira na drugačiji način u odnosu na izvorni. Naime, L. Bachelier koji se prvi bavio proučavanjem kvantitativnih osobina Brownovog kretanja, u svom radu iz 1900. godine je pomoću Brownovog kretanja opisao nepredvidive promene u kretanju cena akcija i on se smatra začetnikom probabilističkog pristupa finansijama. Na drugoj strani, u radu A. Einsteina iz 1905. godine, Brownovo kretanje se proučava sa aspekta molekularno-kinetičke teorije toplote.

Strogu matematičku formulaciju Brownovog kretanja je uveo Norbert Wiener 1923. Zahvaljući njegovim rezultatima [89, 90] Brownovo kretanje se smatra matematičkim pojmom a ne samo fizičkom pojavom i često se naziva Wienerov proces. Danas Brownovo kretanje zauzima važno mesto u mnogim naučnim disciplinama i pomoću njega se opisuju mnoge pojave koje su prisutne u realnom životu.

Kada je reč o Wienerovom procesu, neizbežno je pomenuti pojam Gaussovog procesa kojim se mogu modelirati mnogobrojne pojave koje se razmatraju u okviru fizičkih, tehničkih i ekonomskih nauka.

Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ se naziva Gaussov proces ako je svaka linearna kombinacija n-dimenzionalnog zaseka $(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))$ Gaussova slučajna promenljiva, tj. ako je za svako $n \in N$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x(t_i)$ Gaussova.

Definicija 1.2.1 *Stohastički proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $w(0) = 0$, *skoro izvesno;*

2. *ima nezavisne priraštaje, tj. za svako* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, *slučajne promenljive* $w(t_0), w(t_1) - w(t_0), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ *su nezavisne;*

3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)),\ 0 \leq s < t.$

Parametar $\sigma^2 \neq 0$ predstavlja disperziju. Specijalno, za $\sigma^2 = 1$, radi se o standardnom Winerovom procesu, tj. procesu Brownovog kretanja.

Može se dokazati da je stohastički proces $\{w(t), t \geq 0\}$ Wienerov ako i samo ako je Gaussov i $Ew(t) = 0$, $K(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\},\ s,t \geq 0$.

Wienerov proces ima mnogo važnih osobina medju kojima su sledeće:

- proces je drugog reda, tj. $E|w(t)|^2 < \infty$;

- n-dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 < \ldots < t_n$ i $u_1, \ldots, u_n \in R$ se može izraziti preko jednodimenzionalnih gustina raspodele $f_1(t,u)$ Gaussove slučajne promenljive, tj.

$$\begin{aligned} f_n(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) = & f_1(t_1; u_1) \cdot f_1(t_2 - t_1; u_2 - u_1) \cdot \ldots \\ & \cdot f_1(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1}); \end{aligned}$$

- proces je Markova;

- srednje kvadratno je neprekidan;

- skoro izvesno je neprekidan, tj. skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije;

- skoro sve trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;

- proces $\{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, tj. za svako $t \geq s \geq 0$ važi

$$E(w(t)|\mathcal{F}_s) = w(s), \text{ skoro izvesno;}$$

- skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne varijacije na svakom segmentu $[a, b] \subset [0, \infty)$, tj. za proizvoljnu konstantu $c \in R$ i particiju $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ segmenta $[a, b]$ za koje $\max_{k=\overline{1,n}}(t_k - t_{k-1}) \to 0$, $n \to \infty$,

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})| > c\right\} \to 1, \; \sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})|^2 \to \sigma^2(b-a) \text{ s.k.},$$

- može se definisati na intervalu $(-\infty, +\infty)$, pri čemu je $Ew(t) = 0$ i $K(s,t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|)$. Na taj način se dobijaju nezavisni Wienerovi procesi $\{w(t), t \geq 0\}$ i $\{w(-t), t \geq 0\}$ čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$.

Definicija 1.2.2 *Stohastički proces* $\{w(t), t \geq 0\} = \{(w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t)), t \geq 0\}$ *je* m*-dimenzionalni Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $w(0) = 0$, *skoro izvesno;*

2. *ima nezavisne priraštaje;*

3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)I)$, $0 \leq s < t$, *gde je* I *jedinična matrica reda* m.

Dakle, koordinate Wienerovog procesa su jednodimenzionalni uzajamno nezavisni Wienerovi procesi i za m-dimenzionalni Wienerov proces važe sve osobine jednodimenzionalnog Wienerovog procesa.

1.3 Integral Itoa

U ovom poglavlju biće reči o konstrukciji stohastičkog integrala u odnosu na Wienerov proces. S obzirom da je Wienerov proces neograničene varijacije i da skoro sve njegove trajektorije nemaju izvod ni u jednoj tački, stohastički integral po Wienerovom procesu se ne može definisati kao Riemann-Stieltjesov ili Lebesgueov integral. Medjutim, zahvaljujući stohastičkoj prirodi Wienerovog procesa moguće je definisati stohastički integral i to za veliku klasu stohastičkih procesa. Takav integral je prvi put definisao K. Ito 1949 godine zbog čega se u literaturi najčešće sreće pod nazivom *stohastički integral Itoa*.

1.3.1 Konstrukcija integrala Itoa

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća na kome su definisane sve slučajne promenljive i procesi koji će biti razmatrani u nastavku.

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalni standardni Wienerov proces adaptiran u odnosu na rastuću familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ-algebre $\mathcal{F}$ pri čemu je $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t$ i $w(t) - w(s)$ je nezavisno u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$.

U daljem tekstu biće korišćena oznaka $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ za klasu stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ za koje važi:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-merljiv;
2. φ je adaptiran u odnosu na familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
3. $\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t)|^2 dt < \infty$.

Prostor $(\mathcal{M}_2([t_0, T]; R), \|\cdot\|)$ je Banachov i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$.

Najpre će biti definisan stohastički integral stepenastog stohastičkog procesa iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$, a zatim će definicija biti proširena na čitavu klasu $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ metodom aproksimacije proizvoljnog procesa iz te klase nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.3.1 *Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ je stepenasti proces ako postoji particija $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, nezavisna od ω, tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \text{ s.i., } t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Definicija 1.3.2 *Neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ stepenasti stohastički proces. Slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t) dw(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)) \tag{1.4}$$

naziva se stohastički integral stepenastog procesa φ u odnosu na Wienerov proces w ili integral Itoa.

Naredna teorema je od velike važnosti za definisanje integrala Itoa za proizvoljno $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$.

Teorema 1.3.1 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ Wienerov proces i neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$. Tada:*

1. *postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ tako da*

$$\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \to 0,\ n \to \infty;$$

2. *ako niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ aproksimira φ u smislu da je $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$, $n \to \infty$ i ako je integral $I(\varphi_n)$ definisan kao u Definiciji 1.3.2, tada niz slučajnih promenljivih $\{I(\varphi_n), n \in N\}$ konvergira u srednje kvadratnom smislu kada $n \to \infty$;*

3. *ako su $\{\varphi_n, n \in N\}$ i $\{\varphi'_n, n \in N\}$ dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju φ, tada je*
$$s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi'_n).$$

Na osnovu Teoreme 1.3.1 se može zaključiti da se intergal Itoa $I(\varphi)$ može definisati kao srednje kvadratni limes niza $\{\varphi_n, n \in N\}$, tj.

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) := \text{s.k.} \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{T} \varphi_n(t)dw(t).$$

Navedimo najvažnije osobine stohastičkog integrala (1.4).

Teorema 1.3.2 *Neka je $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ i $\alpha, \beta \in R$ proizvoljne konstante. Tada je:*

1. *$I(\varphi)$ $\mathcal{F}_T$-merljivo;*

2. *$EI(\varphi) = 0$;*

3. *$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$;*

4. *$E|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t)|^2 dt$ (stohastička integralna izometrija);*

5. *$E[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^{T} E[\varphi(t)\psi(t)]dt$.*

Integral Itoa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ klasa stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}$-merljivi, adaptirani u odnosu na familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i za koje važi da je

$$P\left\{\int_{t_0}^{T} |\varphi(t)|^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Očigledno da je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ šira klasa nego $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$.

Može se dokazati da za svako $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ postoji niz $\{\varphi_n, n \in N\}$ iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ tako da se integral Itoa procesa φ može definisati kao

$$I(\varphi) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) \text{ u verovatnoći.}$$

U ovom slučaju osobine 1-3 Teoreme 1.3.2 važe dok ostale ne važe. Medjutim, integral Itoa procesa $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ zadovoljava sledeću osobinu: za proizvoljne pozitivne konstante N i ε važi

$$P\left\{\left|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t)\right| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\int_{t_0}^{T} |\varphi(t)|^2 dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Integral Itoa se može definisati i za stohastičke procese iz klase $\mathcal{M}_2([t_0,T];R^d\times R^m)$, u odnosu na m-dimenzionalni Wienerov proces $w=\{w(t),\mathcal{F}_t,t\geq 0\}$ čije su osobine date u Definiciji 1.2.2. Klasa $\mathcal{M}_2([t_0,T];R^d\times R^m)$ obuhvata sve $(d\times m)$-dimenzionalne merljive i $\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\}$-adaptirane stohastičke procese φ koji zadovoljavaju uslov

$$\|\varphi\|^2=\int_{t_0}^{T}E|\varphi(t)|^2dt<\infty,$$

pri čemu je $|\cdot|$ matrična norma definisana sa

$$|\varphi|^2=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}|\varphi_{ij}|^2=tr(\varphi\varphi').$$

Kako je $\varphi\in\mathcal{M}_2([t_0,T];R^d\times R^m)$ onda kada je $\varphi_{ij}\in\mathcal{M}_2([t_0,T];R),i=\overline{1,d},j=\overline{1,m}$, to se višedimenzionalni integral Itoa može definisati kao d-dimenzionalni vektor

$$I(\varphi)=\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dw(t)=\int_{t_0}^{T}\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t)\\ \vdots & & \\ \varphi_{d1}(t) & \dots & \varphi_{dm}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dw_1(t)\\ \vdots\\ dw_m(t)\end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

gde je i-ta komponenta vektora $I(\varphi)$, suma jednodimenzionalnih integrala Itoa, tj.

$$I_i(\varphi)=\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{T}\varphi_{ij}(t)dw_j(t),i=\overline{1,d}.$$

U tom smislu, sve osobine Teoreme 1.3.2 važe i u ovom slučaju. Analogno jednodimenzionalnom slučaju, definicija stohastičkog integrala Itoa se može proširiti na klasu $\mathcal{L}_2([t_0,T];R^d\times R^m)$.

1.3.2 Neodredjeni integral Itoa

Definicija 1.3.3 *Neka je $I_{\{s<t\}},t_0\leq s<t<T$ indikator skupa $[t_0,t]$. Neodredjeni integral Itoa procesa $\varphi\in\mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ je stohastički proces $x=\{x(t),t\in[t_0,T]\}$, pri čemu je*

$$x(t):=\int_{t_0}^{T}I_{\{s<t\}}\varphi(s)dw(s)=\int_{t_0}^{t}\varphi(s)dw(s),\quad t\in[t_0,T].$$

Osobine neodredjenog integrala Itoa su:

1. $x(t)$ je $\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\}$-adaptiran;
2. $\{x(t),\mathcal{F}_t,t\in[t_0,T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;
3. $x(t_0)=0$ s.i.;
4. $x(t)-x(s)=\int_s^t\varphi(u)dw(u)$;

5. $Ex(t) = 0$;
6. $E|x(t)|^2 = \int_{t_0}^{t} E|\varphi(s)|^2 ds$;
7. proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$, je kvadratno integrabilni martingal sa kvadratnom varijacijom
$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi(u)|^2 du;$$
8. proces x iz Definicije 1.3.3 je s.i. neprekidan;
9. ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$, stohastički proces
$$x(t \wedge \tau) = \int_{t_0}^{t \wedge \tau} \varphi(s) dw(s), \quad t \in [t_0, T],$$
martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ i $Ex(t \wedge \tau) = 0$.

Neodredjeni integral Itoa se takodje može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$, analogno Definiciji 1.3.3. Tada je proces $x = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ merljiv i s.i. neprekidan, dok u opštem slučaju, nije martingal. Medjutim, proces x je lokalni martingal, tj. $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in N\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa
$$\tau_n = \inf_{t \in [t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)|^2 ds \geq n \right\}.$$

1.3.3 Formula Itoa

Formula Itoa je od velikog značaja za efektivno rešavanje integrala Itoa i ima značajnu ulogu u proučavanju različitih problema koji se tiču stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ovu formulu je prvi uveo K. Ito u radovima [33, 34], dok se njena uopštenja mogu naći u radu Meyera [67].

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalni Wienerov proces definisan na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pretpostavimo da su $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$ merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je, za svako $T > 0$,
$$\int_0^T |a(t, x(t))| dt < \infty, \quad \int_0^T |b(t, x(t))|^2 dt < \infty \text{ s.i.}$$

Definicija 1.3.4 *Jednodimenzionalni stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$, *gde je*
$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x(s)) ds + \int_0^t b(s, x(s)) dw(s), \quad t \geq 0, \tag{1.6}$$
se naziva proces Itoa kada je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ *i* $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$. *Kaže se da* $\{x(t), t \geq 0\}$ *ima stohastički diferencijal* $dx(t)$ *za* $t \geq 0$, *pri čemu je*
$$dx(t) = a(t, x(t)) dt + b(t, x(t)) dw(t).$$

Prvi integral u izrazu (1.6) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itoa. Kako su oba integrala merljiva, $\mathcal{F}_t$-adaptirana i s.i. neprekidna, to i proces Itoa ima iste osobine.

Teorema 1.3.3 (Formula Itoa, [33]) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ proces Itoa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t)$ i neka je $f : R_+ \times R \to R$ neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $f_t'(t,x)$, $f_x'(t,x)$, $f_{xx}''(t,x)$. Tada je $\{f(t,x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itoa i ima stohastički diferencijal*

$$df(t,x(t)) = \Big[f_t'(t,x(t)) + f_x'(t,x(t))a(t,x(t)) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,x(t))b^2(t,x(t))\Big]dt \qquad (1.7)$$
$$+f_x'(t,x(t))b(t,x(t))dw(t), \quad t \geq 0.$$

Izraz (1.7) je poznat kao Itova formula za stohastičko diferenciranje.

Formula Itoa se može uopštiti na višedimenzionalni slučaj, pa se u tom smislu najpre uvodi pojam višedimenzionalnog stohastičkog diferencijala.

Definicija 1.3.5 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalni Wienerov proces. Neprekidan i adaptirani d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, pri čemu je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t))^T$, je proces Itoa ako je oblika*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s,x(s))ds + \int_0^t b(s,x(s))dw(s),$$

gde je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R^d)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R^d \times R^m)$. Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = a(t,x(t))dt + b(t,x(t))dw(t).$$

Da bi se integral Itoa uopštio na višedimenzionalni slučaj, uvodi se funkcija $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$, pri čemu je

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Kao u jednodimenzionalnom, tako je i u višedimenzionalnom slučaju za efektivno rešavanje integrala Itoa vrlo često neophodno primeniti formulu Itoa za stohastičko diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.3.4 (Formula Itoa, [33]) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ d-dimenzionalni proces Itoa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t,x(t))dt + b(t,x(t))dw(t)$ i neka je $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$. Tada je $\{V(t,x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itoa i ima stohastički diferencijal*

$$dV(t,x(t)) \qquad (1.8)$$
$$= \Big[V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))a(t,x(t)) + \frac{1}{2}tr(b^T(t,x(t))V_{xx}(t,x(t))b(t,x(t))\Big]dt$$
$$+V_x(t,x(t))b(t,x(t))dw(t), \quad t \geq 0.$$

Naredno tvrdjenje, poznato kao Burkholder-Davis-Gundy nejednakost [14] ima veliku primenu u stohastičkoj analizi.

Teorema 1.3.5 (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost, [54]) *Neka je* $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *m-dimenzionalni Wienerov proces i* $\varphi \in \mathcal{L}_2(R_+; R^d \times R^m)$*. Tada, za svako* $p > 0$*, postoje univerzalne konstante* $\tilde{c}_p$ *i* c_p*, koje zavise samo od* p*, tako da za svako* $t \geq 0$ *važi*

$$\tilde{c}_p E \left| \int_0^t |\varphi(u)|^2 du \right|^{\frac{p}{2}} \leq E \sup_{s \in [0,t]} \left| \int_0^t \varphi(u) dw(u) \right|^p \leq c_p E \left| \int_0^t |\varphi(u)|^2 du \right|^{\frac{p}{2}}, \qquad (1.9)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_p = (p/2)^p,\ c_p = (32/p)^{p/2},\ 0 < p < 2; \\
&\tilde{c}_p = 1,\ c_p = 4,\ p = 2; \\
&\tilde{c}_p = (2p)^{-p/2},\ c_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1},\ p > 2.
\end{aligned}$$

1.4 Poissonova slučajna mera

U teoriji stohastičkih procesa, kao i u modelima iz različitih oblasti nauke i primena, značajnu ulogu imaju procesi sa skokovima. Izmedju ostalih, neki od poznatih modela u osiguranju (videti [68]) se baziraju na Poissonovom procesu.

Definicija 1.4.1 *Stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *je Poissonov proces sa parametrom* $\lambda > 0$ *ako zadovoljava sledeće uslove*

- $x(0) = 0$,
- *ima nezavisne priraštaje,*
- $P\{x(t) - x(s) = k\} = \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad k = 0, 1, ...$

U nastavku će biti reči o Poissonovoj slučajnoj meri koja predstavlja prirodno uopštenje Poissonovog procesa.

Neka je $\{x(t), t \in [0,T]\}$ separabilan stohastički proces, saglasan sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, neprekidan u verovatnoći i sa nezavisnim priraštajima koji uzima vrednosti u R^d. Neka je $D \subset R^d$ zatvoren skup koji ne sadrži koordinatni početak i $\mathcal{B}_D$ σ-algebra Borelovih skupova iz D. Za svako $A \in \mathcal{B}_D$, oznaka $\nu(A,t)$, $\nu(A,t) = \nu(A,[0,t))$ će se odnositi na broj tačaka $s \in [0,t)$ za koje je $x(s+0) - x(s-0) \in A$. U [24] se može naći dokaz da je, za fiksirano A, $\nu = \{\nu(A,t), t \in [0,T]\}$ Poissonov proces sa parametrom $\Pi(A,t)$ koji je saglasan sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$. Specijalno, ako je $\Pi(A,t) = \Pi(A)t$, tada se radi o homogenom stohastičkom procesu sa skokovima, neprekidnom u verovatnoći koji ima nezavisne priraštaje i raspodelu

$$P\{\nu(A,t) - \nu(A,s) = k\} = \frac{(\Pi(A))^k (t-s)^k}{k!} e^{-\Pi(A)(t-s)},$$

pri čemu je $0 \leq s \leq t \leq T, k = 0, 1, ...$ i $\Pi(A)t = E\nu(A, t)$.

Za svako $t \in [0, T]$ i uzajamno disjunktne skupove $A_1, A_2, ...$ iz $\mathcal{B}_D$, slučajne promenljive $\nu(A_i, t), i = 1, 2, ...$ su uzajamno nezavisne. Tada je

$$\nu(\sum_{k=1}^{\infty} A_k, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k, t) \quad \text{s.i.}$$

Imajući u vidu ove osobine slučajnog procesa $\{\nu(A, t), t \in [0, T]\}$, može se zaključiti da se na prostoru $(R^d \times [0, T], \mathcal{B}^d \times \mathcal{B}([0, T]))$ formira Poissonova slučajna mera $\nu(A, \Delta)$, pri čemu je $A \in \mathcal{B}^d$, $\Delta = [t, t + \Delta t) \subset [0, T]$. Kako je

$$E\nu(A, \Delta) = \Pi(A)|\Delta t|,$$

to je, za uzajamno disjunktne skupove $A_k, k = 1, 2, ...,$

$$\Pi(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi(A_k),$$

tj. Π je mera na prostoru $(R^d, \mathcal{B}^d)$.

Neka je

$$\tilde{\nu}(A, \Delta) = \nu(A, \Delta) - \Pi(A)|\Delta t|$$

slučajna funkcija skupova koja ima osobine

$$E\tilde{\nu}(A, \Delta) = 0, \quad E\tilde{\nu}(A, \Delta)\tilde{\nu}(B, \Delta) = \Pi(A \cap B)|\Delta t|, \quad A, B \in \mathcal{B}^d.$$

Funkcija $\tilde{\nu}$ se naziva kompenzovana (centrirana) Poissonova slučajna mera.

1.5 Integral po Poissonovoj slučajnoj meri

Pojam integrala stohastičkog procesa po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri se uvodi analogno kao integral Itoa po Wienerovom procesu o čemu je bilo reči u Poglavlju 1.3.1. Familija $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ je generisana pomoću ν u smislu da za svako $A \in \mathcal{B}^d$, $\nu(A, [0, t))$ bude $\mathcal{F}_t$-merljivo i da slučajne promenljive $\nu(A, [t, t + s))$, $0 \leq t < t + s \leq T$ ne zavise od $\mathcal{F}_t$.

Neka je $\{q(u, t), u \in R^d, t \in [0, T]\}$ slučajna funkcija sa vrednostima u R^d, saglasna sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, pri čemu je

$$\int_0^t \int_{R^d} |q(u, t)|^2 \Pi(du)dt < \infty \quad \text{s.i.} \tag{1.10}$$

Neka je sa $M_2(\Pi)$ označena klasa slučajnih funkcija koje zadovoljavaju uslov (1.10). Ako je $q \in M_2(\Pi)$ stepenasta funkcija, tj.

$$q(u, t) = q(u, t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, ..., n - 1, \; 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T,$$

tada je integral funkcije q po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri, slučajna promenljiva

$$\int_0^T \int_{R^d} q(u,t)\tilde{\nu}(du,dt) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{R^d} q(u,t_k)\tilde{\nu}(du,[t_k,t_{k+1})).$$

Integral proizvoljne slučajne funkcije $q \in M_2(\Pi)$ po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri se definiše kao slučajna promenljiva

$$\int_0^T \int_{R^d} q(u,t)\tilde{\nu}(du,dt) = \lim_{n\to\infty} q_n(u,t)\tilde{\nu}(du,dt) \quad \text{u verovatnoći,} \tag{1.11}$$

pri čemu je $q_n, n = 1,2,...$ niz stepenastih slučajnih funkcija iz klase $M_2(\Pi)$ koji aproksimira funkciju q u smislu da, kada $n \to \infty$

$$\int_0^T \int_{R^d} |q(u,t) - q_n(u,t)|^2 \Pi(du)dt \to 0, \quad \text{u verovatnoći.}$$

Analogno neodredjenom integralu Itoa, definiše se i neodredjeni integral po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri

$$x(t) = \int_0^t \int_{R^d} q(u,s)\tilde{\nu}(du,ds),$$

koji je d-dimenzionalni, $\mathcal{F}_t$-merljiv, skoro izvesno neprekidan s desna stohastički proces, bez tačaka prekida druge vrste.

U nastavku će biti navedene osnovne osobine neodredjenog integrala po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri, koje su od značaja za predstojeće razmatranje.

Ako je

$$\int_0^T \int_{R^d} E|q(u,s)|^2 \Pi(du)ds < \infty,$$

tada je

- $Ex(t) = 0,$
- $E|x(t)|^2 = \int_0^t \int_{R^d} E|q(u,s)|^2 \Pi(du)ds,$
- $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ je martingal sa kvadratnom varijacijom

$$u(t) = \int_0^t \int_{R^d} |q(u,s)|^2 \Pi(du)ds.$$

Imajući u vidu poslednju osobinu, na intergal po kompenzovanoj Poissonovoj slučajnoj meri se može primeniti sledeća teorema koja je uopštenje Teoreme 1.3.5.

Teorema 1.5.1 (Opšta Burkholder-Davis-Gundy nejednakost) *Za svako $p \geq 1$ postoje univerzalne pozitivne konstante c_p i C_p, tako da za svaki lokalni martingal $x = \{x(t), t \in [0,T]\}$, $x(0) = 0$, važi*

$$c_p(E[x]_t)^{p/2} \leq E \sup_{s\in[0,t]} |x(s)|^p \leq C_p(E[x]_t)^{p/2}, \quad t \in [0,T],$$

pri čemu je $[x]_t$ kvadratna varijacija procesa x.

1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina nepoznatog d-dimenzionalnog procesa $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je jednačina oblika

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.12}$$

pri čemu je $w = \{w(t), t \in [t_0, T]\}$ m-dimenzionalni Wienerov proces, početni uslov x_0 je d-dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na w i $a : [t_0, T] \times R^d \to R^d, b : [t_0, T] \times R^d \to R^d \times R^m$ su neslučajne Borelove funkcije.

U skladu sa Definicijom 1.3.5 stohastičkog diferencijala, jednačina (1.12) se može predstaviti u ekvivalentnom integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, x(s))ds + b(s, x(s))dw(s), \quad t \in [t_0, T]. \tag{1.13}$$

U nastavku će se podrazumevati da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, w(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Definicija 1.6.1 *Merljiv stohastički proces $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.12) ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. *$x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0, T]$;*
2. *$\int_{t_0}^{T} |a(t, x(t))|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^{T} |b(t, x(t))|^2 dt < \infty$ s.i.;*
3. *$x(t_0) = x_0$ s.i.;*
4. *integralni oblik jednačine (1.13) važi s.i. za svako $t \in [t_0, T]$.*

Na osnovu osobina 1 i 2 Definicije 1.6.1 sledi da su i Lebesgueov i Itov integral na desnoj strani jednakosti (1.13) dobro definisani i s.i. neprekidni, zbog čega je i x s.i. neprekidan proces. Oba integrala su jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti. U takvim slučajevima, u skladu sa Teoremom Dooba 1.1.1, uvek ćemo pretpostavljati da smo izabrali merljivu, separabilnu i s.i. neprekidnu modifikaciju strogog rešenja.

Definicija 1.6.2 *Jednačina (1.12) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja x i $\tilde{x}$ važi*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [t_0, T]\} = 1.$$

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.12).

Teorema 1.6.1 *Neka je w m-dimenzionalni Wienerov proces i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w, za koju važi da je $E|x_0|^2 < \infty$. Dalje, neka su $a : [t_0, T] \times R^d \to R^d, b : [t_0, T] \times R^d \to R^d \times R^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni*

Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t, x), (t, y) \in [t_0, T] \times R^d$, važi

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L|x - y|, \tag{1.14}$$
$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2). \tag{1.15}$$

Tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno strogo rešenje jednačine (1.12) sa osobinom $E \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)|^2 < \infty$.

Šta više, ako je $E|x_0|^p < \infty, p \geq 2$, *tada postoji konstanta* $Q > 0$ *tako da je* $E \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)|^p \leq Q$.

1.7 Funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine

U mnogim slučajevima, neki od najzastupljenijih i najvažnijih stohastičkih modela u kojima buduća stanja sistema zavise ne samo od trenutnog stanja, već i od prošlih stanja, opisuju se pomoću stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Predmet proučavanja u ovoj oblasti je najčešće egzistencija, jedinstvenost i stabilnost, kao i kvalitativna i kvantitativna svojstva rešenja. U opsežnoj literaturi iz ove oblasti, treba istaknuti rad Mohameda [76], radove i knjige [54, 55, 60], čiji je autor X. Mao, kao i literaturu na koju se oslanjaju.

Pored ranije uvedenih oznaka i osnovnih pretpostavki, biće uvedeni još neki pojmovi.

Polazna pretpostavka je da su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove (tj., rastuća je i neprekidna s desna, dok $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje verovatnoće nula).

Za fiksirano $\tau > 0$, neka je $C([-\tau, 0]; R^d)$ familija neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \to R^d$, sa supremum-normom definisanom sa $||\varphi|| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Očigledno, $(C([-\tau, 0]; R^d), || \cdot ||)$ je Banachov prostor.

U ovom poglavlju razmatraće se stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x_t, t)\, dt + g(x_t, t)\, dw(t), \quad t \in [t_0, T], \\ x_{t_0} &= \xi, \end{aligned} \tag{1.16}$$

pri čemu su funkcionali

$$f : C([-\tau, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d, \quad g : C([-\tau, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d \times R^m$$

Borel merljivi, $x(t)$ je d-dimenzionalni proces i $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ je stohastički proces iz klase $C([-\tau, 0]; R^d)$ i interpretira se kao prošlost datog stanja. Zbog zavisnosti od prošlosti, početni uslov se mora zadati na čitavom intervalu $[t_0 - \tau, t_0]$, tj.

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{1.17}$$

pri čemu je ξ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva iz klase $C([-\tau,0];R^d)$, za koju važi $E||\xi||^2<\infty$.

Definicija 1.7.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t\in[t_0-\tau,T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.16) ako je s.i. neprekidan, $\{x_t, t\in[t_0,T]\}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_{t_0}^T|f(x_t,t)|\,dt<\infty$ s.i., $\int_{t_0}^T|g(x_t,t)|^2\,dt<\infty$ s.i., $x_{t_0}=\xi$ s.i. i za svako $t\in[t_0,T]$, integralni oblik jednačine (1.16) važi s.i.*

Definicija 1.7.2 *Rešenje $\{x(t), t\in[t_0-\tau,T]\}$ je jedinstveno ako za bilo koje rešenje $\{\tilde{x}(t), t\in[t_0-\tau,T]\}$ važi da je stohastički ekvivalentno tom rešenju, tj. ako je*

$$P\{x(t)=\tilde{x}(t), t\in[t_0-\tau,T]\}=1.$$

Sledeći fundamentalni rezultat u teoriji stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina se može naći, na primer, u [54].

Teorema 1.7.1 *Ako za funkcionale f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. ako postoji konstanta $K>0$, tako da važi*

$$|f(\varphi,t)-f(\psi,t)|\vee|g(\varphi,t)-g(\psi,t)|\le K||\varphi-\psi||, \tag{1.18}$$

$$|f(\varphi,t)|\vee|g(\varphi,t)|\le K(1+||\varphi||) \tag{1.19}$$

za svako $t\in[t_0,T]$ i $\varphi,\psi\in C([-\tau,0];R^d)$, tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.16). Šta više, ako je $E||\xi||^p<\infty$ za $p\ge 2$, tada je $E\sup_{t_0-\tau\le t\le T}|x(t)|^p<\infty$.

1.8 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U mnogim situacijama iz realnog života, promene sistema su uslovljene kako trenutnim stanjem tako i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. U slučajevima kada te promene zavise od svih stanja sistema u toku prethodnog perioda fiksne dužine, koriste se funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine o kojima je bilo reči u Poglavlju 1.7. Medjutim, često je priroda zavisnosti od prošlosti nekog sistema takva da se adekvatnije opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

Postoji opsežna literatura kako o determinističkim, tako i o stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa kašnjenjem i njihovoj primeni u populacionoj dinamici, medicini i teoriji materijala sa memorijom, izmedju ostalog. Tako je, na primer, model neuroloških bolesti razmatran u [11], dok je studija o držanju ljudskog tela predstavljena u [20]. Na drugoj strani, rast ćelijske populacije u okruženju koje je izloženo slučajnim uticajima se može opisati sledećom stohastičkom diferencijalnom jednačinom sa vremenski zavisnim kašnjenjem,

$$\begin{aligned}&dx(t)=(\rho_0x(t)+\rho_1x(t-\delta(t)))dt+\beta x(t)dw(t),\ t\ge 0,\\&x_0=\xi=\{\xi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\},\end{aligned}$$

gde $x(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t. U ovom modelu se pretpostavlja da, kada otpočne, ćelijska deoba nije trenutna. U tom smislu ρ_0 predstavlja stopu trenutnog rasta populacije, ρ_1 je stopa zakasnelog rasta populacije, dok se δ može interpretirati kao vreme ćelijske deobe.

Pored toga, u radu [92] je razmatran sledeći stohastički Lotka-Volterra model sa vremenski zavisnim kašnjenjem

$$dx_i(t) = x_i(t)\Big[\Big(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\delta_j(t))\Big)dt + \sigma_i dw(t)\Big],$$

za $t \geq 0$ i $i = 1, 2, ..., n$, pri čemu $x_i(t)$ predstavlja veličinu populacije i-te vrste u trenutku t, b_i je stopa rasta i-te vrste, $a_{ij},\ b_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n$ predstavljaju mere interakcije izmedju vrsta x_i i x_j, $\delta_j \in C^1([0,\infty); [0,\tau])$, $\tau > 0$, $j = 1, 2, ..., n$ su funkcije kašnjenja, a izrazi $x_j(t - \delta_j(t))$ predstavljaju veličinu populacije koja je uslovljena nekim faktorima iz prošlosti.

Imajući u vidu ranije uvedene oznake, u nastavku će biti razmatrana stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. U tom smislu se uvodi Borelova funkcija $\delta : [t_0, T] \to [0, \tau]$ tako da je

$$dx(t) = f(x(t), x(t-\delta(t)), t)dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), t)dw(t),\ t \in [t_0, T], \tag{1.20}$$

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{1.21}$$

pri čemu su $f : R^d \times R^d \times [t_0, T] \to R^d$ i $g : R^d \times R^d \times [t_0, T] \to R^{d\times m}$ Borelove funkcije i $x(t)$ je d-dimenzionalni proces koji opisuje promenu stanja sistema tokom vremena. Pretpostavka je da je početni uslov ξ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiv, da pripada familiji $C([-\tau, 0]; R^d)$ i da važi $E||\xi||^2 < \infty$.

Definicija 1.8.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \in [t_0-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.20) sa početnim uslovom (1.21) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces, pri čemu važe uslovi $\int_{t_0}^T |f(x(t), x(t-\delta(t)), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^T |g(x(t), x(t-\delta(t)), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_{t_0} = \xi$ s.i. i za svako $t \in [t_0, T]$, integralni oblik jednačine (1.20) važi s.i.*

Jedinstvenost rešenja jednačine (1.20) se definiše na isti način kao u Definiciji 1.7.2.

Dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem su dati sledećom teoremom koja je preuzeta iz [54].

Teorema 1.8.1 *Ako koeficijenti f i g jednačine (1.20) zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, po x i y, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in R^d$, važi*

$$|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, \tilde{y}, t)|^2 \vee |g(x, y, t) - g(\tilde{x}, \tilde{y}, t)|^2 \leq K(|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2), \tag{1.22}$$

i za svako $(x, y, t) \in R^d \times R^d \times [t_0, T]$, važi

$$|f(x, y, t)|^2 \vee |g(x, y, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{1.23}$$

tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.20). Šta više, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E\sup_{t_0-\tau\leq t\leq T} |x(t)|^p < \infty$.

1.9 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine

Prirodno uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina koje imaju osobinu zavisnosti od prošlosti, predstavljaju neutralne stohastičke diferencijalne jednačine u kojima se, pored nepoznatog procesa x, pod diferencijalom javlja i argument sa kašnjenjem. U tom smislu, mnoga poznata tvrdjenja koja se odnose na funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine i stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem, uspešno su proširena na klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina što potvrdjuju, izmedju ostalih, radovi [39, 51, 54, 59, 80]. U ovom poglavlju će biti navedeni osnovni pojmovi vezani za funkcionalne neutralne stohastičke diferencijalne jednačine, kao i za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

1.9.1 Neutralne funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine

Neutralna funkcionalna stohastička diferencijalna jednačina je oblika

$$d[x(t) - u(x_t)] = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dw(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.24}$$

sa početnim uslovom $x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, pri čemu su

$$\begin{aligned} f &: C([-\tau, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d, \\ g &: C([-\tau, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^{d\times m}, \\ u &: C([-\tau, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d \end{aligned}$$

i $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\} \in C([-\tau, 0]; R^d)$.

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.24) (videti [54]).

Teorema 1.9.1 *Ako za funkcionale f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da važi*

$$|f(\varphi, t) - f(\psi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t) - g(\psi, t)|^2 \leq K||\varphi - \psi||^2, \tag{1.25}$$

$$|f(\varphi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t)|^2 \leq K(1 + ||\varphi||^2) \tag{1.26}$$

za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; R^d)$, i ako postoji $\kappa \in (0, 1)$ tako da važi

$$|u(\varphi) - u(\psi)| \leq \kappa\|\varphi - \psi\| \tag{1.27}$$

za svako $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; R^d)$ i $u(0) = 0$, tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.16). Pored toga, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E\sup_{t_0-\tau\leq t\leq T} |x(t)|^p < \infty$.

1.10 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

Prirodno uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem, o kojima je bilo reči u Poglavlju 1.8, su one u kojima se pod diferencijalom javlja argument sa kašnjenjem. Poznato je da se neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem mogu smatrati specijalnom klasom neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Na drugoj strani, zbog posebnog oblika zavisnosti od prošlosti, opisane funkcijom kašnjenja, ova klasa jednačina se često proučava posebno.

U nastavku će pored ranije uvedenih oznaka i osnovnih pretpostavki, od značaja biti funkcija kašnjenja $\delta : [0,+\infty) \to [0,\tau]$, koja je Borel-merljiva. Kako je, sa aspekta primene, prirodno raditi na konačnom vremenskom intervalu, to će biti razmatrana sledeća neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem

$$\begin{aligned} & d[x(t)-u(x(t-\delta(t)))] \\ & \quad = f(x(t),x(t-\delta(t)),t)dt+g(x(t),x(t-\delta(t)),t)dw(t),\ t\in[0,T], \end{aligned} \tag{1.28}$$

sa početnim uslovom

$$x_0=\xi=\{\xi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\}, \tag{1.29}$$

pri čemu su

$$f : R^d\times R^d\times[0,T]\to R^d,\quad g : R^d\times R^d\times[0,T]\to R^{d\times m},\quad u : R^d\to R^d,$$

Borelove funkcije i $x(t)$ je d-dimenzionalni proces. Pretpostavlja se da je početni uslov $x_0=\xi=\{\xi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\}$ $\mathcal{F}_0$-merljiv, da pripada familiji $C([-\tau,0];R^d)$ i da zadovoljava uslov $E\|\xi\|^2<\infty$.

Definicija 1.10.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t),t\in[-\tau,T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.28) sa početnim uslovom (1.29) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces, pri čemu važe uslovi $\int_0^T|f(x(t),x(t-\delta(t)),t)|dt<\infty$ s.i., $\int_0^T|g(x(t),x(t-\delta(t)),t)|^2dt<\infty$, s.i. i za svako $t\in[0,T]$, integralni oblik jednačine (1.28) važi s.i.*

Sledeća teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Teorema 1.10.1 *Ako je ispunjem globalni Lipschitzov uslov, tj. ako postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ tako da, za svako $t\in[0,T]$ i $x_1,x_2,y_1,y_2\in R^d$, važi*

$$\begin{aligned} & |f(x_1,y_1,t)-f(x_2,y_2,t)|^2\vee|g(x_1,y_1,t)-g(x_2,y_2,t)|^2 \\ & \qquad\qquad \le\bar{K}(|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2), \end{aligned} \tag{1.30}$$

ako važi uslov ograničenog rasta, tj. postoji pozitivna konstanta $K>0$ tako da, za svako $t\in[0,T]$ i $x,y\in R^d$, važi

$$|f(x,y,t)|^2\vee|g(x,y,t)|^2\le K(1+|x|^2+|y|^2), \tag{1.31}$$

i ako postoji konstanta $\beta \in (0,1)$ tako da, za svako $x, y \in R^d$, važi

$$|u(x) - u(y)| \leq \beta |x - y|, \tag{1.32}$$

tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.28).

Uobičajeno je da se, uz navedene uslove, uvede pretpostavka

$$u(0) = 0, \tag{1.33}$$

što je od značaja za dokazivanje ograničenosti momenata rešenja. Pored toga, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$ (videti, na primer, [54]).

1.11 Pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima

Stohastičke diferencijalne jednačine su od velikog značaja zbog toga što opisuju mnoge pojave iz realnog života. Upravo iz praktičnih problema je proisteklo veće interesovanje za hibridne sisteme. Naime, uočeno je da se neki sistemi menjaju u skladu sa različitim zakonima u toku nekog vremenskog perioda i da u slučajnim momentima prelaze sa jednog režima rada na drugi. To je osnovna motivacija za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima koje predstavljaju posebnu klasu hibridnih sistema. U radovima [57, 58, 53, 93] su razmatrane obične stohastičke diferencijalne jednačine kao i stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem, sa Markovskim prelazima.

Zbog svog praktičnog značaja, pantografske stohastičke diferencijalne jednačine se često proučavanju zasebno, iako predstavljaju klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem oblika (1.20). Rezultati vezani za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine se mogu naći u radovima [6, 21] kao i u literaturi na koju se oni pozivaju. Deterministička verzija pantografskih jednačina našla je svoju primenu, na primer, u analizi jačine električne energije koju koriste trolejbusi kao i u analizi jednodimenzionalnog talasnog kretanja, o čemu govore rezultati [77, 22].

Pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima predstavljaju jedan vid uopštenja pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Pored već uvedenih oznaka, označimo sa $\{r(t), t \in [t_0, T]\}$ neprekidan s desna lanac Markova definisan nad datim prostorom verovatnoća, sa konačnim skupom stanja $S = \{1, 2, ..., N\}$ i generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ definisanim sa

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

pri čemu je $\Delta > 0$. U poslednjem izrazu $\gamma_{ij} \geq 0$ je brzina prelaza iz stanja i u stanje j kada je $i \neq j$ dok je

$$\gamma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \gamma_{ij}.$$

Pretpostavlja se da je lanac Markova $r(\cdot)$ nezavisan u odnosu na Wienerov proces $w(\cdot)$. Kao što je poznato, skoro svaka trajektorija procesa $r(\cdot)$ je neprekidna s desna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na intervalu $[t_0, T]$.

U nastavku će biti reči o pantografskim stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa Markovskim prelazima. Za $q \in (0,1)$, razmatra se sledeća jednačina

$$dx(t) = f(x(t), x(qt), r(t), t)dt + g(x(t), x(qt), r(t), t)dw(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.34}$$
$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(t) : t \in [qt_0, t_0]\}, \ r(t_0) = r_0, \tag{1.35}$$

pri čemu su

$$f : R^d \times R^d \times S \times [t_0, T] \to R^d, \quad g : R^d \times R^d \times S \times [t_0, T] \to R^{d\times m},$$

Borelove funkcije i $x(t)$ je d-dimenzionalni proces.

Definicija 1.11.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \in [qt_0, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.34) ako je s.i. neprekidan, $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_{t_0}^T |f(x(t), x(qt), r(t), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^T |g(x(t), x(qt), r(t), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_{t_0} = \xi$ s.i. i za svako $t \in [t_0, T]$, integralni oblik jednačine (1.34) važi s.i.*

Teorema 1.11.1 *Ako koeficijenti f i g jednačine (1.34) zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. ako postoji konstanta $\bar{K} > 0$ tako da za svako $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^d$, $i \in S$ i $t \in [t_0, T]$,*

$$|f(x_1, y_1, i, t) - f(x_2, y_2, i, t)|^2 \vee |g(x_1, y_1, i, t) - g(x_2, y_2, i, t)|^2 \le \bar{K}(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2), \tag{1.36}$$

i ako postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(x, y, t) \in R^d \times R^d \times [t_0, T]$ i $i \in S$,

$$|f(x, y, i, t)|^2 \vee |g(x, y, i, t)|^2 \le K(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{1.37}$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [qt_0, T]\}$ jednačine (1.34). Pored toga, ako je $E\sup_{t\in[qt_0,t_0]} |\xi(t)|^p < \infty$ za $p \ge 2$, tada je $E\sup_{t\in[qt_0,T]} |x(t)|^p < \infty$.

1.12 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovim skokom

U poslednje vreme se može uočiti porast interesovanja za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa skokovima, što porvrdjuju, izmedju ostalih, radovi [78, 28]. Naime, modeli u kojima figurišu skokovi, postali su popularni u finansijama i nekim oblastima prirodnih nauka i inženjerstva. Sudeći po empirijskim studijama, dinamiku cena finansijskih instrumenata karakterišu skokovi koji se ne mogu adekvatno opisati samo difuzionim procesima (videti, na primer, [63]). Takodje, postoje studije, kao što su [10, 38], koje se bave skokovima na tržištu akcija, stranih valuta i obveznica.

1.12.1 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovom slučajnom merom

Pored standardnih oznaka, neka je $C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^d)$ familija ograničenih $\mathcal{F}_0$-merljivih slučajnih promenljivih koje su elementi klase $C([-\tau,0];R^d)$.

Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovom slučajnom merom su oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t),x(t-\tau),t)dt + g(x(t),x(t-\tau),t)dw(t) \qquad (1.38)\\ &\quad + \int_{R^d} h(x(t),x(t-\tau),u,t)\tilde{\nu}(du,dt), \quad t\in[t_0,T],\\ x_{t_0} &= \xi = \{\xi(\theta):\theta\in[-\tau,0]\}, \qquad (1.39)\end{aligned}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} f &: R^d\times R^d\times[t_0,T]\to R^d,\\ g &: R^d\times R^d\times[t_0,T]\to R^{d\times m},\\ h &: R^d\times R^d\times R^d\times[t_0,T]\to R^d\end{aligned}$$

i $\xi\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^d)$. Pored toga,

$$\tilde{\nu}(du,dt)=\nu(du,dt)-\Pi(du)dt$$

je kompenzovana Poissonova slučajna mera na $R^d\times[t_0,T]$ koja je nezavisna od Wienerovog procesa w.

Definicija 1.12.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t),t\in[t_0-\tau,T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.38) ako je s.i. neprekidan i $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces, pri čemu je $\int_{t_0}^T|f(x(t),x(t-\tau),t)|dt<\infty$ s.i., $\int_{t_0}^T|g(x(t),x(t-\tau),t)|^2dt<\infty$ s.i., $\int_{t_0}^T\int_{R^d}|h(x(t),x(t-\tau),u,t)|^2\Pi(du)dt<\infty$ s.i., $x_{t_0}=\xi$ s.i. i za svako $t\in[t_0,T]$, integralni oblik jednačine (1.38) važi s.i.*

U nastavku će biti navedena teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja, čiji se dokaz može naći u radu [85].

Teorema 1.12.1 *Ako važe globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. ako postoji konstanta $\bar{K}>0$ tako da, za svako $x_1,x_2,y_1,y_2,u\in R^d$ i $t\in[t_0,T]$, važi*

$$\begin{aligned} &|f(x_1,y_1,t)-f(x_2,y_2,t)|^2\vee|g(x_1,y_1,t)-g(x_2,y_2,t)|^2 \qquad (1.40)\\ &\quad\vee\int_{R^d}|h(x_1,y_1,u,t)-h(x_2,y_2,u,t)|^2\Pi(du)\le\bar{K}(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2),\end{aligned}$$

i ako postoji konstanta $K>0$ tako da, za svako $x,y,u\in R^d$ i $t\in[t_0,T]$, važi

$$|f(x,y,t)|^2\vee|g(x,y,t)|^2\vee\int_{R^d}|h(x,y,u,t)|^2\Pi(du)\le K(1+|x|^2+|y|^2), \qquad (1.41)$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t),t\in[t_0-\tau,T]\}$ jednačine (1.38).

1.12.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovim procesom

Specijalan slučaj stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i Poissonovom slučajnom merom, su one u kojima figuriše integral po Poissonovom procesu. U tom smislu će biti razmatrana sledeća jednačina iz te klase

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t), x(t-\tau), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), t)dw(t) \qquad (1.42)\\ &\quad +h^*(x(t), x(t-\tau), t)dN(t), \quad t \in [t_0, T], \\ x_{t_0} &= \xi = \{\xi(\theta) : \theta \in [-\tau, 0]\}, \qquad (1.43) \end{aligned}$$

gde je $h^* : R^d \times R^d \times [t_0, T] \to R^d$, $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d)$ i N je skalarni Poissonov proces sa intenzitetom λ.

Definicija 1.12.2 *Za d-dimenzionalni stohastički proces* $\{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ *se kaže da je rešenje jednačine (1.42) ako je s.i. neprekidan i* $\mathcal{F}_t$*-adaptiran proces, pri čemu je* $\int_{t_0}^T |f(x(t), x(t-\tau), t)|dt < \infty$ *s.i.,* $\int_{t_0}^T |g(x(t), x(t-\tau), t)|^2 dt < \infty$*, s.i.,* $\int_{t_0}^T |h(x(t), x(t-\tau), t)|^2 dt < \infty$*, s.i.,* $x_{t_0} = \xi$ *s.i. i za svako* $t \in [t_0, T]$*, integralni oblik jednačine (1.42) važi s.i.*

Dokaz naredne teoreme, koja daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.42), može se naći u [84].

Teorema 1.12.2 *Ako važe globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. ako postoji konstanta* $\bar{K}^* > 0$ *tako da, za svako* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^d$ *i* $t \in [t_0, T]$*, važi*

$$\begin{aligned} &|f(x_1, y_1, t) - f(x_2, y_2, t)|^2 \vee |g(x_1, y_1, t) - g(x_2, y_2, t)|^2 \qquad (1.44)\\ &\quad \vee |h(x_1, y_1, t) - h(x_2, y_2, t)|^2 \le \bar{K}^*(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2), \end{aligned}$$

i ako postoji konstanta $K^* > 0$ *tako da, za svako* $x, y \in R^d$ *and* $t \in [t_0, T]$*, važi*

$$|f(x, y, t)|^2 \vee |g(x, y, t)|^2 \vee |h(x, y, t)|^2 \le K^*(1 + |x|^2 + |y|^2), \qquad (1.45)$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ *jednačine (1.42).*

1.13 Elementarne i integralne nejednakosti

U ovom poglavlju biće navedene neke elemenarne nejednakosti [75] kao i integralna nejednakost Gronwall-Bellmana [5, 50, 75], koje će biti korišćene prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti koje će biti korišćene su:

$$(\sum_{i=1}^m a_i)^k \le (m^{k-1} \vee 1) \sum_{i=1}^m a_i^k, \;\; a_i \ge 0, k \ge 0; \qquad (1.46)$$

$$(a+b)^p \le (1+\varepsilon)^{p-1}\Big(a^p + \varepsilon^{1-p} b^p\Big), \quad a, b > 0, p > 1, \varepsilon > 0; \qquad (1.47)$$

$$(a+b)^2 \le \frac{a^2}{\varepsilon} + \frac{b^2}{1-\varepsilon}, \;\; a, b > 0, \; \varepsilon \in (0, 1). \qquad (1.48)$$

Poznato je da postoji više verzija Gronwall-Bellmanove nejednakosti. Za potrebe daljeg razmatranja biće navedena samo jedna od verzija, koja će biti eksplicitno korišćena i čiji se dokaz može naći u [54].

Teorema 1.13.1 *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(\cdot)$ Borelova ograničena nenegativna funkcija definisana na $[0, T]$ i neka je $v(\cdot)$ nenegativna integrabilna funkcija na $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq c\, e^{\int_0^t v(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

Glava 2

Euler-Maruyama aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina

U ovom poglavlju su predstavljene Euler-Maruyama metode za numeričko rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima i neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. U tom smislu su u Poglavlju 2.1 navedeni neki od postojećih rezultata koji se odnose na Euler-Maruyama metodu za različite tipove stohastičkih diferencijalnih jednačina. U Poglavlju 2.2 je dokazana srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama rešenja ka tačnom rešenju stohastičke diferencijalne jednačine sa deo po deo konstantnim argumentima, kao i eksponencijalna stabilnost rešenja u srednje kvadratnom smislu. U slučaju neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem, u Poglavlju 2.3 je dokazana srednje kvadratna bliskost Euler-Maruyama rešenja i tačnog rešenja.

2.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Euler-Maruyama aproksimativna metoda je eksplicitna numerička metoda koja se koristi za aproksimaciju rešenja kako običnih, tako i stohastičkih diferencijalnih jednačina. Pored toga što daje eksplicitna aproksimativna rešenja, prednost ove metode u odnosu na ostale metode se ogleda u tome što su, najčešće, za dokazivanje srednje kvadratne konvergencije odgovarajućih aproksimativnih rešenja dovoljni standardni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja, tj. Lipschitzov uslov, uslov ograničenog rasta i L^2-ograničenost početnog uslova.

U nastavku su navedeni postojeći rezultati vezani za L^p-konvergenciju, $p \geq 2$, Euler-Maruyama rešenja za neke klase stohastičkih diferencijalnih jednačina, koji će biti relevantni pri izlaganju rezultata u narednim poglavljima.

Neka je

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

stohastička diferencijalna jednačina za koju važe uslovi Teoreme 1.6.1.

Postoji veliki broj radova u kojima je rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (2.1) aproksimirano na proizvoljnoj particiji intervala $[0, 1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1, \quad \delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k). \tag{2.2}$$

Tako je Maruyama [62] medju prvima proučavao srednje kvadratnu konvergenciju Eulerove metode, sledeći pristup koji je korišćen u determinističkom slučaju. Ovaj rezultat je poboljšan u radovima Kanagawe [40, 41]. Primenom osnovne ideje iz rada Maruyame, Kanagawa je u radu [40] razmatrao jednačinu (2.1) pod uslovima $|a(t,x)-a(s,y)|^2+|b(t,x)-b(s,y)|^2 \leq L_1(|x-y|^2+|t-s|^2)$, $|a(t,x)|^2+|b(t,x)|^2 \leq L_2$ i $E|x_0|^2 < \infty$. Kao Maruyama [62], i Kanagawa je definisao neprekidno aproksimativno rešenje linearnom interpolacijom diskretnog aproksimativnog rešenja dobijenog u tačkama particije vremenskog intervala. Diskretno aproksimativno rešenje je definisano kao niz slučajnih promenljivih $Y_0, Y_1, ..., Y_n$, pri čemu je $Y_0 = X_0$ i za svako $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$Y_k = Y_0 + \sum_{j=1}^{k} a(t_{j-1}, Y_{j-1})(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{k} b(t_{j-1}, Y_{j-1})(w(t_j) - w(t_{j-1})).$$

Zatim je definisano neprekidno aproksimativno rešenje $y_n = \{y_n(t), t \in [0, 1]\}$,

$$y_n(t) = Y_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(Y_{k+1} - Y_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Uz neznatne razlike u odnosu na [62], Kanagawa je u svom radu dokazao da aproksimativno rešenje y_n konvergira u L^p-smislu ka tačnom rešenju x jednačine (2.1), tj. $E \sup_{t \in [0,1]} |y_n(t) - x(t)|^p \to 0$, $n \to \infty$. Red konvergencije, za proizvoljno $\varepsilon > p/2$ je

$$E \sup_{t \in [0,1]} |y_n(t) - x(t)|^p = O\delta_n^{p/2} (\log \delta_n)^{\varepsilon}.$$

U radu [41] Kanagawa je poboljšao svoj rezultat aproksimirajući rešenje x jednačine (2.1) nizom rešenja $\{x^n, n \in N\}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} &dx^n(t) = a(t_k, x^n(t_k))dt + b(t_k, x^n(t_k))dw(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \\ &x^n(0) = x_0. \end{aligned}$$

U tom slučaju je, za $p \geq 2$, red L^p-konvergencije $O(\delta_n^{p/2})$ kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$. Ovaj rezultat su ranije dokazali Gihman i Skorohod [23] za $p = 2$.

U radu [60], Mao je dokazao srednje kvadratnu konvergenciju Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja ka rešenju $x = \{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ autonomne funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine oblika

$$\begin{aligned} &dx(t) = f(x_t)\, dt + g(x_t)\, dw(t), \quad t \in [0, T], \\ &x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

pod uslovom da je $E\|\xi\|^p < \infty$, za neko $p > 2$, ako postoji konstanta $\lambda > 0$ tako da je

$$E|\xi(t) - \xi(s)|^2 \leq \lambda(t - s), \quad -\tau \leq s \leq t \leq 0;$$

i ako postoji neprekidna s desna neopadajuća funkcija $\mu : [-\tau, 0] \to R_+$ tako da, za svako $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; R^d)$, važi

$$|f(\varphi) - f(\psi)|^2 \vee |g(\varphi) - g(\psi)|^2 \leq \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 d\mu(\theta). \tag{2.4}$$

Globalni Lipschitzov uslov (2.4) implicira uslov ograničenog rasta

$$|f(\varphi)|^2 \vee |g(\varphi)|^2 \leq K\|\varphi\|^2$$

za $K = 2[(|f(0)|^2 \vee |g(0)|^2) \vee (\mu(0) - \mu(-\tau))]$.

Naime, Mao je za $N = \tau/\Delta$, $\Delta \in (0, 1)$ definisao diskretno Euler-Maruyama rešenje $\bar{y}(k\Delta), k \geq -N$ na sledeći način

$$\begin{cases} \bar{y}(k\Delta) = \xi(k\Delta), \quad -N \leq k \leq 0, \\ \\ \bar{y}((k+1)\Delta) = \bar{y}(k\Delta) + f(\bar{y}_{k\Delta})\Delta + g(\bar{y}_{k\Delta})(w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)), \quad k \geq 0, \end{cases}$$

pri čemu je $\bar{y}_{k\Delta} = \{\bar{y}_{k\Delta}(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ element klase $C([-\tau, 0]; R^d)$ definisan kao

$$\bar{y}_{k\Delta}(\theta) = \bar{y}((k+i)\Delta) + \frac{\theta - i\Delta}{\Delta}[\bar{y}((k+i+1)\Delta) - \bar{y}((k+i)\Delta)], \tag{2.5}$$

za $i\Delta \leq \theta \leq (i+1)\Delta$, $\quad i = -N, -(N-1), ..., -1$. Zatim je definisao neprekidno Euler-Maruyama rešenje $y = \{y(t), t \geq 0\}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} y(t) &= \xi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(t) &= \xi(0) + \int_0^t f(\bar{y}_s)ds + \int_0^t g(\bar{y}_s)dw(s), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

gde je $\bar{y}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_{k\Delta} I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), t \geq 0$. Na taj način je srednje kvadratna bliskost rešenja x i y ocenjena kao

$$E \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - y(t)|^2 \leq O(\Delta),$$

za svako $T > 0$.

U radu [56], Mao je proučavao srednje kvadratnu konvergenciju i eksponencijalnu srednje kvadratnu stabilnost Euler-Maruyama metode za stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem, oblika

$$dx(t) = f(x(t), x(t - \delta(t)))dt + g(x(t), x(t - \delta(t)))dw(t), \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{2.7}$$

gde je $\delta : R_+ \to [0, \tau]$ funkcija kašnjenja koja zadovoljava uslov

$$|\delta(u) - \delta(v)| \leq \eta(u - v), \quad 0 \leq v < u < \infty, \tag{2.8}$$

za neko $\eta > 0$. U [56], za dati korak Δ, diskretno Euler-Maruyama rešenje je definisano kao

$$\begin{cases} y(s+k\Delta) = \xi(k\Delta), \quad -\tau\Delta \le k \le 0, \\ \\ y(s+(k+1)\Delta) = y(s+k\Delta)+f(y(s+k\Delta), y(s+k\Delta-\mathrm{In}[\delta(s+k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta \\ \qquad\qquad\qquad +g(y(s+k\Delta), y(s+k\Delta-\mathrm{In}[\delta(s+k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k, \quad k \ge 0, \end{cases}$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)$ i In[x] je ceo deo broja x. Zatim je definisano neprekidno Euler-Maruyama rešenje tako da je $y(s+u) = \xi(u)$, $-\tau \le u \le 0$ i

$$y(t) = y(s) + \int_s^t f(z_1(r), z_2(r))dr + \int_s^t g(z_1(r), z_2(r))dw(r), \quad t \ge s,$$

gde je

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(s+k\Delta) I_{[s+k\Delta, s+(k+1)\Delta)}(t), \\ z_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(s+k\Delta - \mathrm{In}[\delta(s+k\Delta)/\Delta]\Delta) I_{[s+k\Delta, s+(k+1)\Delta)}(t). \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom da važi Lipschitzov uslov (1.22), $E\|\xi\|^2 < \infty$, kao i $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$, Mao je dokazao da je red srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja $y = \{y(t), t \ge -\tau\}$ ka tačnom rešenju $x = \{x(t), t \ge -\tau\}$ jednačine (2.6) jednak $1/2$, kao i da je rešenje jednačine (2.6) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako i samo ako to važi za Euler-Maruyama rešenje. Iako stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem predstavljaju posebnu klasu funkcionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, tehnika kojom se ova tvrdjenja dokazuju je potpuno drugačija od one koja je korišćena u [60] i te razlike proističu iz različitih oblika zavisnosti od prošlosti prisutnih u samim jednačinama.

Wu i Mao su u svom radu [91] proučavali srednje kvadratnu konvergenciju Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja ka rešenju $x = \{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ neutralne funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine oblika

$$d[x(t) - u(x_t)] = f(x_t)dt + g(x_t)dw(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.9}$$

sa početnim uslovom $x_0 = \xi$, za koji važi $E\|\xi\|^p < \infty, p \ge 2$ i postoji konstanta $\lambda > 0$ tako da je $E \sup_{-\tau \le s \le t \le 0, t-s \le \Delta} |\xi(t) - \xi(s)|^2 \le \lambda\Delta$. Pored toga, oni su pretpostavili da važi Lipschitzov uslov (1.25), koji implicira uslov ograničenog rasta (1.26), kao i da su zadovoljeni uslovi uslovi (1.27) i $u(0) = 0$.

Pomenuti autori su za korak $\Delta \in (0,1)$, izabran tako da postoje prirodni brojevi $N > \tau, M > T$ za koje je $\Delta = \tau/N = T/M$, definisali diskretno Euler-Maruyama rešenje $\bar{y}(k\Delta), k = -N, -(N-1), ..., M$ sa

$$\begin{cases} \bar{y}(k\Delta) = \xi(k\Delta), \quad -N \le k \le 0, \\ \\ \bar{y}((k+1)\Delta) = \bar{y}(k\Delta) + u(\bar{y}_{k\Delta}) - u(\bar{y}_{(k-1)\Delta}) + f(\bar{y}_{k\Delta})\Delta \\ \qquad\qquad\qquad +g(\bar{y}_{k\Delta})(w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)), \quad 0 \le k \le M-1, \end{cases}$$

pri čemu je $\bar{y}_{k\Delta} = \{\bar{y}_{k\Delta}(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ definisano u (2.5), dok je $\bar{y}(-(N+1)\Delta) = \xi(-N\Delta)$ da bi $\bar{y}_{-\Delta}$ bilo dobro definisano. Neprekidno Euler-Maruyama rešenje $y = \{y(t), t \in [-\tau, T]\}$ je dato sa

$$\begin{aligned}
&y(t) = \xi(t),\ t \in [-\tau, 0],\\
&y(t) = \xi(0) + u\Big(\bar{y}_{(k-1)\Delta} + \frac{t-k\Delta}{\Delta}(\bar{y}_{k\Delta} - \bar{y}_{(k-1)\Delta})\Big) - u(\bar{y}_{-\Delta})\\
&\qquad + \int_0^t f(\bar{y}_s)\, ds + \int_0^t g(\bar{y}_s)\, dw(s), \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta],\ k = 0, 1, ..., M-1,
\end{aligned}$$

gde je

$$\bar{y}_t = \sum_{k=0}^{M-2} \bar{y}_{k\Delta} I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t) + \bar{y}_{(M-1)\Delta} I_{[(M-1)\Delta, M\Delta]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Na taj način je srednje kvadratna bliskost rešenja x i y ocenjena sa

$$E \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - y(t)|^2 \leq C(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},$$

za svaki prirodan broj $l > 1$.

U nastavku će biti izloženi rezultati koji se odnose na srednje kvadratnu konvergenciju Euler-Maruyama rešenja stohastičkih diferencijanih jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima, kao i neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

2.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa deo po deo konstantnim argumentima

Diferencijalne jednačine sa deo po deo konstantnim argumentima opisuju hibridne dinamičke sisteme (kombinacije neprekidnih i diskretnih), i samim tim imaju osobine kako diferencnih tako i diferencijalnih jednačina. Ova klasa jednačina je slična onima koje se koriste u biomedicinskim modelima, a kao specijalne slučajeve obuhvata impulsivne jednačine. Neki od postojećih rezultata iz ove oblasti mogu se naći u radu [88]. Teorija diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(\gamma(t))), \quad t \geq 0, \tag{2.10}$$

gde je γ deo po deo konstantna funkcija, razvijena je u radovima [1, 2, 15, 25]. Modeli u čijoj je osnovi diferencijalna jednačina (2.10) imaju široku primenu u različitim oblastima nauke uključujući biologiju, epidemiologiju i mehaniku. Uprkos toj činjenici, do sada nije razvijena teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima. Glavna motivacija za proučavanje ove klase jednačina proistekla je iz rada F. Gurcana i F. Bozkurta [27], u kome je razmatrana diferencijalna jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\Big(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])\Big), \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, gde $[t]$ označava celobrojni deo od t. Pretpostavka je da su x_0 i parametri $r, \alpha, \beta_0, \beta_1$ pozitivni brojevi. Jednačina (2.11) predstavlja jedan od poznatih modela u populacionoj dinamici koji uzima u obzir uticaj lova (ako je u pitanju životinjska populacija), odnosno uticaj ubiranja plodova (ako je u pitanju populacija biljaka) na veličinu populacije.

Imajući u vidu različite slučajne uticaje iz okoline i unutar samih sistema koji se opisuju, može se razmatrati sledeća stohastička diferencijalna jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima

$$dx(t) = f(x(t), x([t]), x([t-1]))dt + g(x(t), x([t]), x([t-1]))dw(t), t \geq 0, \tag{2.12}$$
$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-1, 0]\}, \tag{2.13}$$

gde su

$$f : R^d \times R^d \times R^d \to R^d,$$
$$g : R^d \times R^d \times R^d \to R^{d\times m},$$

$x(t)$ je d-dimenzionalni proces, početni uslov ξ je $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva i $\sup_{\theta\in[-1,0]} E|\xi(\theta)|^2 < \infty$. Neka $x_t = \{x(t+\theta), \theta \in [-1, 0]\}$ opisuje evoluciju sistema u jediničnom periodu koji prethodi trenutku t. Iako je dovoljno znati samo vrednosti $x(-1)$ i $x(0)$, početni uslov (2.13) je definisan na čitavom intervalu $[-1, 0]$, što je pogodnije za dalje razmatranje.

Označimo sa $C([-1, 0]; R^d)$ familiju neprekidnih funkcija $\varphi : [-1, 0] \to R^d$. Neka je $L^2_{\mathcal{F}_t}([-1, 0]; R^d)$ familija $\mathcal{F}_t$-merljivih slučajnih promenljivih $\xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-1, 0]\} \in C([-1, 0]; R^d)$ tako da je

$$||\xi||^2_E := \sup_{\theta\in[-1,0]} E|\xi(\theta)|^2 < \infty.$$

Uočimo da se jednačina (2.12) može posmatrati kao sledeća stohastička diferencijalna jednačina sa dva vremenski zavisna kašnjenja

$$\begin{aligned} dx(t) =\, & f(x(t), x(t-\delta_1(t)), x(t-\delta_2(t))dt \\ & + g(x(t), x(t-\delta_1(t)), x(t-\delta_2(t))dw(t), \ \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

gde su funkcije kašnjenja $\delta_1 : [0, +\infty) \to [0, 1), \delta_2 : [0, +\infty) \to [0, 2)$ Borel-merljive i definisane sa

$$\delta_1(t) = t - [t], \quad \delta_2(t) = t - [t-1], \ t \geq 0.$$

Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjima su razmatrane u [54]. Neki od rezultata navedenih u [54] su od esencijalnog značaja za predstojeće razmatranje.

Definicija 2.2.1 *Za proizvoljno $T > 0$, d-dimenzionalni stohastički proces $x = \{x(t), t \in [-1, T]\}$ je rešenje jednačine (2.12) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_0^T |f(x(t), x([t]), x([t-1]))| dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(x(t), x([t]), x([t-1]))|^2 dt < \infty$, s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$, integralni oblik jednačine (2.12) važi s.i.*

Rešenje $x = \{x(t), t \in [-1, T]\}$ jednačine (2.12) je jedinstveno ako za bilo koje rešenje $\tilde{x} = \{\tilde{x}(t), t \in [-1, T]\}$ važi da je stohastički ekvivalentno sa x u smislu da je $P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [-1, T]\} = 1$.

Sledeće pretpostavke su od suštinskog značaja za dokazivanje glavnih rezultata.

Pretpostavimo da je zadovoljen globalni Lipschitzov uslov, tj. da postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $x_i, y_i \in R^d, i \in \{1, 2, 3\}$,

$$|f(x_1, x_2, x_3) - f(y_1, y_2, y_3)|^2 \vee |g(x_1, x_2, x_3) - g(y_1, y_2, y_3)|^2 \leq K \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|^2 \quad (2.15)$$

i neka je

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0. \quad (2.16)$$

Pretpostavka (2.16) omogućava dokazivanje rezultata vezanih za stabilnost rešenja.

Očigledno, uslovi (2.15) and (2.16) impliciraju uslov ograničenog rasta

$$|f(x_1, x_2, x_3)|^2 \vee |g(x_1, x_2, x_3)|^2 \leq K \sum_{i=1}^{3} |x_i|^2. \quad (2.17)$$

Kao što je poznato na osnovu [54], uslovi (2.15) i (2.17) su dovoljni za egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (2.12), za bilo koji početni uslov $x_0 = \xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}([-1, 0]; R^d)$. Rešenje jednačine (2.12) će biti označeno sa $x(t; 0, \xi)$ kada je potrebno naglasiti da ono zadovoljava početni uslov ξ u trenutku $t = 0$. Ako je $E \sup_{\theta \in [-1,0]} |\xi(\theta)|^2 < \infty$, tada je $E \sup_{t \in [0,T]} |x(t)|^2 < \infty$ za proizvoljno $T > 0$.

Imajući u vidu činjenicu da je usku klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina moguće eksplicitno rešiti, analitičke i numeričke aproksimativne metode dobijaju na značaju kada je u pitanju analiza kvalitativnih i kvantitativnih svojstava rešenja. Neki od poznatih rezultata iz oblasti aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina, koje su po svojoj prirodi bliske jednačinama oblika (2.14), mogu se naći u radovima [7, 29, 31, 48, 79], kao i u literaturi citiranoj u njima.

U Poglavlju 2.2.1, biće dokazana srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja ka rešenju jednačine (2.12). Kao što je pomenuto u Poglavlju 2.1, u radu [56] su dokazane srednje kvadratna konvergencija i eksponencijalna srednje kvadratna stabilnost Euler-Maruyama rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem (2.6), pod pretpostavkom da funkcija kašnjenja zadovoljava Lipschitzov uslov (2.8). Dakle, pomenuti rad ne obuhvata jednačine oblika (2.12), tj. oblika (2.14) imajući u vidu da funkcije kašnjenja δ_1 i δ_2 iz rada [56] ne zadovoljavaju uslov (2.8). U Poglavlju 2.2.2 će biti dokazano da je rešenje jednačine (2.14) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako i samo ako je, za dovoljno mali korak Δ, Euler-Maruyama rešenje eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu. Rezultati u Poglavljima 2.2.1 i 2.2.2 su sadržani u radu [69].

2.2.1 Srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama metode za stohastičke diferencijalne jednačine sa deo po deo konstantnim argumentima

Predstavimo jednačinu (2.12) u ekvivalentnom integralnom obliku, tj. za $t \geq 0$,

$$x(t)=\xi(0)+\int_0^t f(x(s),x([s]),x([s-1]),s)ds+\int_0^t g(x(s),x([s]),x([s-1]),s)dw(s), \quad (2.18)$$

sa početnim uslovom (2.13). Rešenje jednačine (2.18) se aproksimira na particiji vremenskog intervala sa podjednakom veličinom koraka $\Delta \in (0,1)$ definisanom sa $\Delta = 1/n_*$, za neki prirodan broj $n_* > 1$. Dakle, podeone tačke intervala $[-1,\infty)$ su

$$k\Delta, \quad k=-n_*,-n_*+1,...,0,1,...$$

Način na koji je definisana particija garantuje da je $[t]=[k\Delta]$ i $[t-1]=[k\Delta-1]$ za $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta), k=0,1,2,...$

Diskretno eksplicitno Euler-Maruyama (EM) aproksimativno rešenje se definiše na sledeći način

$$\begin{cases} \bar{y}(k\Delta)=\xi(k\Delta), & k=-n_*,-n_*+1,...,0, \\ \bar{y}((k+1)\Delta)=\bar{y}(k\Delta)+f(\bar{y}(k\Delta),\bar{y}([k\Delta]),\bar{y}([k\Delta-1]))\Delta & \\ \qquad +g(\bar{y}(k\Delta),\bar{y}([k\Delta]),\bar{y}([k\Delta-1]))\Delta w_k, & k=0,1,2,..., \end{cases} \quad (2.19)$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta)-w(k\Delta)$.

Da bi se definisalo neprekidno Euler-Maruyama rešenje neophodno je uvesti stepenaste procese

$$z_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}(k\Delta)I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \quad (2.20)$$
$$z_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}([k\Delta])I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t),$$
$$z_3(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}([k\Delta-1])I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t).$$

Neprekidno EM aproksimativno rešenje $\{y(t), t \geq 0\}$ se definiše kao

$$y(t)=\xi(0)+\int_0^t f(z_1(s),z_2(s),z_3(s))ds+\int_0^t g(z_1(s),z_2(s),z_3(s))dw(s), \quad (2.21)$$

tako da zadovoljava početni uslov $y_0=\xi$. Jednačina (2.21) se može predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$y(t)=\bar{y}(k\Delta)+\int_{k\Delta}^t f(z_1(s),z_2(s),z_3(s))ds+\int_{k\Delta}^t g(z_1(s),z_2(s),z_3(s))dw(s), \quad (2.22)$$

kada $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta)$. Lako se može uočiti da važi $y(k\Delta)=\bar{y}(k\Delta)$, tj. diskretno i neprekidno EM aproksimativno rešenje imaju iste vrednosti u podeonim tačkama.

Pre ocenjivanja bliskosti rešenja x i y u srednje kvadratnom smislu, biće navedeni rezultati koji su neophodni za dokazivanje glavnih rezultata. Neke od sledećih propozicija će biti korišćene i u dokazivanju rezultata koji se tiču stabilnosti rešenja. S obzirom da je glavni rezultat u ovom poglavlju srednje kvadratna konvergencija EM rešenja u konačnom vremenskom periodu, jednačine (2.18) i (2.21) će biti razmatrane na intervalu $[0, T]$ gde je $T > 0$. Bez smanjenja opštosti se može pretpostaviti da je T racionalan broj. U suprotnom, T se može zameniti većim racionalnim brojem. Tada postoji prirodan broj $n > T$ tako da je $\Delta = 1/n_* = T/n$.

Propozicija 2.2.1 *Ako je zadovoljen uslov (2.17), tada je*

$$\sup_{t\in[-1,1]} E|y(t;0,\xi)|^2 \le C_1||\xi||_E^2,$$

pri čemu je $C_1 = 3(1+2K)e^{12K}$.

Dokaz. Neka je uvedena oznaka $y(t;0,\xi) = y(t)$. Za proizvoljno $t \in [0, 1]$, na osnovu uslova (2.17) i definicije (2.20), važi

$$\begin{aligned} & E|y(t)|^2 && (2.23)\\ & \le 3||\xi||_E^2 + 3\int_0^t E|f(z_1(s), z_2(s), z_3(s))|^2 ds + 3\int_0^t E|g(z_1(s), z_2(s), z_3(s))|^2 ds \\ & \le 3||\xi||_E^2 + 6K\int_0^t (E|z_1(s)|^2 + E|z_2(s)|^2 + E|z_3(s))|^2)ds \\ & \le 3||\xi||_E^2 + 6K||\xi||_E^2 + 6K\int_0^t (E|z_1(s)|^2 + E|z_2(s)|^2)ds \\ & \le 3(1+2K)||\xi||_E^2 + 12K\int_0^t \sup_{u\in[0,s]} E|y(u)|^2 ds, \end{aligned}$$

što implicira

$$\sup_{s\in[0,t]} E|y(s)|^2 \le 3(1+2K)||\xi||_E^2 + 12K\int_0^t \sup_{u\in[0,s]} E|y(u)|^2 ds, \quad t\in[0,1].$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme se dobija

$$\sup_{s\in[0,t]} E|y(s)|^2 \le 3(1+2K)e^{12K}||\xi||_E^2, \quad t\in[0,1]. \tag{2.24}$$

Kako je

$$\sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2 \le \sup_{t\in[-1,0]} E|y(t)|^2 \vee \sup_{t\in[0,1]} E|y(t)|^2,$$

na osnovu (2.24) je

$$\sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2 \le C_1||\xi||_E^2,$$

pri čemu je $C_1 = 3(1+2K)e^{12K}$. $\diamondsuit$

Propozicija 2.2.2 *Pod pretpostavkom (2.17), za svako* $T > 0$ *važi*

$$\sup_{t\in[0,1+T]} E|y(t;0,\xi)|^2 \leq C_2||\xi||_E^2,$$

gde je $C_2 = C_2(T) = 3C_1 e^{9KT(T+1)}$ *i* C_1 *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.1.*

Dokaz. Slično kao u dokazu Propozicije 2.2.1 se može pokazati da za svako $t \in [1, 1+T]$ važi

$$E|y(t)|^2 \leq 3E|y(1)|^2 + 9K(T+1)\int_1^t \sup_{u\in[0,s]} E|y(u)|^2 ds. \tag{2.25}$$

Primenom Propozicije 2.2.1 i ocene (2.25), imajući u vidu da je $C_1 > 1$, dobija se

$$\sup_{s\in[0,t]} E|y(s)|^2 \leq 3C_1||\xi||_E^2 + 9K(T+1)\int_1^t \sup_{u\in[0,s]} E|y(u)|^2 ds,$$

što primenom Gronwall-Bellmanove leme daje

$$\sup_{s\in[0,1+T]} E|y(s)|^2 \leq C_2||\xi||_E^2,$$

pri čemu je $C_2 = 3C_1 e^{9KT(T+1)}$. $\diamondsuit$

Propozicija 2.2.3 *Neka je* z_1 *stepenasti proces definisan u (2.20) i neka je* y *neprekidno EM aproksimativno rešenje definisano sa (2.21). Pod pretpostavkom (2.17), za proizvoljno* $T > 0$*,*

$$E|y(t;0,\xi) - z_1(t;0,\xi)|^2 \leq C_3||\xi||_E^2\,\Delta, \quad t\in[0,1+T],$$

gde je $C_3 = C_3(T) = 12KC_2$ *i* C_2 *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.2.*

Dokaz. Neka su uvedene oznake $y(t;0,\xi) = y(t)$ i $z_1(t;0,\xi) = z_1(t)$. Za proizvoljno $t\in[0,1+T]$, postoji k tako da je $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta)$. Na osnovu (2.22) sledi da je

$$\begin{aligned} y(t) - z_1(t) &= y(t) - \bar{y}(k\Delta) \\ &= \int_{k\Delta}^t f(z_1(s), z_2(s), z_3(s))ds + \int_{k\Delta}^t g(z_1(s), z_2(s), z_3(s))dw(s). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} E|y(t) - z_1(t)|^2 &\leq 2K(\Delta+1)\int_{k\Delta}^t (E|z_1(s)|^2 + E|z_2(s)|^2 + E|z_3(s)|^2)ds \qquad (2.26) \\ &\leq 12K\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \sup_{u\in[-1,1+T]} E|y(u)|^2 ds. \end{aligned}$$

Primenom Propozicija 2.2.1 i 2.2.2, pri čemu se može uočiti da je $C_2 > C_1 > 1$, ocena (2.26) postaje

$$E|y(t) - z_1(t)|^2 \leq C_3||\xi||_E^2\,\Delta,$$

gde je $C_3 = 12KC_2$. $\diamondsuit$

Navedene propozicije omogućavaju dokazivanje glavnog rezultata u ovom poglavlju, tj. L^2-konvergencije EM aproksimativnog rešenja y ka rešenju x jednačine (2.18).

Teorema 2.2.1 *Neka je x rešenje jednačine (2.18) i neka je y aproksimativno rešenje definisano jednačinom (2.21). Ako je zadovoljen uslov (2.15), tada, za proizvoljno $T > 0$ važi*

$$E \sup_{t\in[-1,T]} |x(t;0,\xi) - y(t;0,\xi)|^2 \leq B_{T,\xi}\Delta,$$

pri čemu je $B_{T,\xi} = \bar{C}C_3T||\xi||_E^2 e^{3\bar{C}T}$, $\bar{C} = 4K(T+4)$ i C_3 je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.3.

Dokaz. Neka je $x(t) = x(t;0,\xi)$ i $y(t) = y(t;0,\xi)$. Tada se, za proizvoljno $t \in [0,T]$, iz jednačina (2.18) i (2.21), dobija

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) = &\int_0^t (f(x(s), x([s]), x([s-1])) - f(z_1(s), z_2(s), z_3(s)))ds \\ &+ \int_0^t (g(x(s), x([s]), x([s-1])) - g(z_1(s), z_2(s), z_3(s)))dw(s). \end{aligned}$$

Kako x i y zadovoljavaju isti početni uslov, primena Hölderove nejednakosti i Doobove martingalne nejednakosti daje

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[-1,t]} |x(s) - y(s)|^2 \\ &\quad\leq E \sup_{s\in[0,t]} |x(s) - y(s)|^2 \\ &\quad\leq 2t \int_0^t E|f(x(u), x([u]), x([u-1])) - f(z_1(u), z_2(u), z_3(u))|^2 du \\ &\qquad + 8 \int_0^t E|g(x(u), x([u]), x([u-1])) - g(z_1(u), z_2(u), z_3(u))|^2 du. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Iz uslova (2.15) sledi

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[-1,t]} |x(s) - y(s)|^2 \\ &\leq 2K(T+4)\int_0^t (E|x(u) - z_1(u)|^2 + E|x([u]) - z_2(u)|^2 + E|x([u-1])) - z_3(u)|^2)du \\ &\leq \bar{C}\int_0^t (E|x(u) - y(u)|^2 + E|x([u]) - y([u])|^2 + E|x([u-1])) - y([u-1])|^2)du \\ &\quad + \bar{C}\int_0^t (E|y(u) - z_1(u)|^2 + E|y([u]) - z_2(u)|^2 + E|y([u-1])) - z_3(u)|^2)du, \end{aligned} \tag{2.28}$$

gde je $\bar{C} = \bar{C}(T) = 4K(T+4)$.

Podsetimo da neprekidno i diskretno EM rešenje imaju iste vrednosti u podeonim tačkama i da skup podeonih tačaka sadrži cele brojeve koji nisu veći od T. Zbog toga, a na osnovu definicije (2.20), sledi

$$E|y([u]) - z_2(u)|^2 = 0, \quad E|y([u-1]) - z_3(u)|^2 = 0, \quad u \geq 0.$$

Primenom Propozicije 2.2.3, izraz (2.28) se može oceniti kao

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[-1,t]} |x(s)-y(s)|^2 && (2.29)\\
&\quad \le 3\bar{C}\int_0^t E \sup_{s\in[-1,u]} |x(s)-y(s)|^2 du + \bar{C}\int_0^t E|y(u)-z_1(u)|^2 ds \\
&\quad \le 3\bar{C}\int_0^t E \sup_{s\in[-1,u]} |x(s)-y(s)|^2 du + \bar{C}C_3T||\xi||_E^2\,\Delta.
\end{aligned}
$$

Na osnovu Gronwall-Bellmanove leme je

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[-1,t]} |x(s)-y(s)|^2 &\le \bar{C}C_3T||\xi||_E^2\Delta e^{3\bar{C}T} \\
&\equiv B_{T,\xi}\Delta, \quad t\in[0,T],
\end{aligned}
$$

gde je $B_{T,\xi} = \bar{C}C_3Te^{3\bar{C}T}||\xi||_E^2$. S obzirom da poslednja nejednakost važi za svako $t\in[0,T]$, zaključujemo da je

$$
E \sup_{s\in[-1,T]} |x(s)-y(s)|^2 \le B_{T,\xi}\Delta,
$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

2.2.2 Stabilnost Euler-Maruyama rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima

Glavni cilj u ovom poglavlju je dokazati da je EM aproksimativno rešenje eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako i samo ako to važi za rešenje jednačine (2.12). U tom smislu se uvode sledeće definicije.

Definicija 2.2.2 *Rešenje jednačine (2.12) je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako postoji par pozitivnih konstanata λ i M tako da je za svaki početni uslov $\xi\in L^2_{\mathcal{F}_0}$,*

$$
E|x(t;0,\xi)|^2 \le M||\xi||_E^2\, e^{-\lambda t},\ t\ge 0. \tag{2.30}
$$

Konstante λ i M su poznate kao konstanta brzine i konstanta rasta, respektivno.

U daljem razmatranju javiće se potreba za razmatranjem rešenja jednačine (2.12) koje zadovoljava početni uslov $x_s\in L^2_{\mathcal{F}_s}([-1,0];R^d)$ u trenutku $t=s$. Pretpostavke (2.15) i (2.16) garantuju egzistenciju i jedinstvenost ovog rešenja koje označavamo sa $x(t;s,x_s)$ za $t\ge s-1$. Lako se zaključuje da rešenja jednačine (2.12) imaju sledeću osobinu (flow property)

$$
x(t;0,\xi) = x(t;s,x_s), \quad 0\le s<t<\infty.
$$

Šta više, uslov eksponencijalne stabilnosti (2.30) kao i autonomnost jednačine (2.12) impliciraju

$$E|x(t;s,\xi)|^2 \leq M||\xi||_E^2\, e^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s.$$

Oznaka $\bar{y}(k\Delta;0,\xi)$ će se koristiti za diskretno EM rešenje definisano sa (2.19), koje zadovoljava početni uslov ξ u trenutku $t=0$. Sledeći Definiciju 2.2.2, može se definisati eksponencijalna stabilnost ovog rešenja u srednje kvadratnom smislu.

Definicija 2.2.3 *Za datu veličinu koraka $\Delta = 1/n_*$, diskretno EM rešenje jednačine (2.12) je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako postoji par pozitivnih konstanata γ i $\tilde{M}$ tako da je za svaki početni uslov $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}$,*

$$E|\bar{y}(k\Delta;0,\xi)|^2 \leq \tilde{M}||\xi||_E^2\, e^{-\gamma k\Delta},\ k=0,1,.... \tag{2.31}$$

Na sličan način se može definisati eksponencijalna stabilnost u srednje kvadratnom smislu neprekidnog EM rešenja definisanog sa (2.21).

Definicija 2.2.4 *Za datu veličinu koraka $\Delta = 1/n_*$, neprekidno EM aproksimativno rešenje jednačine (2.12) je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako postoji par pozitvnih konstanata γ i H tako da je za svaki početni uslov $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}$,*

$$E|y(t;0,\xi)|^2 \leq H||\xi||_E^2\, e^{-\gamma t},\ t \geq 0. \tag{2.32}$$

Sledeća propozicija pokazuje da je eksponencijalna stabilnost diskretnog EM aproksimativnog rešenja u srednje kvadratnom smislu ekvivalentna onoj koja se odnosi na neprekidno EM rešenje.

Propozicija 2.2.4 *Pod pretpostavkama (2.15) i (2.16), diskretno EM rešenje jednačine (2.12) je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu sa konstantom brzine γ konstantom rasta $\tilde{M}$ ako i samo ako je neprekidno EM rešenje eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu sa istom konstantom brzine γ i, u opštem slučaju, drugačijom konstantom rasta H. Šta više, izborom dovoljno malog koraka Δ, odgovarajuće konstante rasta $\tilde{M}$ i H mogu se učiniti proizvoljno bliskim.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da (2.32) važi, tada (2.31) sledi direktno i, u tom slučaju, važi $\tilde{M} = H$. Da bi se dokazalo da (2.31) implicira (2.32), fiksirajmo ξ i uvedimo oznaku $y(t;0,\xi) = y(t)$. Za proizvoljno $t \geq 0$, odaberimo $k \in \{0,1,...\}$ tako da $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta)$. Na osnovu (2.22) je

$$\begin{aligned} y(t) = \bar{y}(k\Delta) &+ f(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}([k\Delta]), \bar{y}([k\Delta-1]))(t-k\Delta) \\ &+ g(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}([k\Delta]), \bar{y}([k\Delta-1]))(w(t)-w(k\Delta)). \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Imajući u vidu pretpostavke (2.15) i (2.16), sledi

$$\begin{aligned} E|y(t)|^2 \leq{} & (1+\varepsilon)E|\bar{y}(k\Delta)|^2 \\ & +2K(1+1/\varepsilon)\Delta(\Delta+1)\Big(E|\bar{y}(k\Delta)|^2 + E|\bar{y}([k\Delta])|^2 + E|\bar{y}([k\Delta-1]))|^2\Big). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Na osnovu (2.31) se dobija

$$
\begin{aligned}
&E|y(t)|^2 &(2.34)\\
&\leq \tilde{M}||\xi||_E^2\, e^{-\gamma k\Delta}\Big((1+\varepsilon)+2K(1+1/\varepsilon)\Delta(\Delta+1)(1+e^{\gamma(k\Delta-[k\Delta])}+e^{\gamma(k\Delta-[k\Delta-1])})\Big)\\
&\leq \tilde{M}||\xi||_E^2\, e^{-\gamma k\Delta}\Big((1+\varepsilon)+2K(1+1/\varepsilon)\Delta(\Delta+1)(1+e^{\gamma}+e^{2\gamma})\Big).
\end{aligned}
$$

Za

$$H = \tilde{M}e^{\gamma\Delta}\Big((1+\varepsilon)+2K(1+1/\varepsilon)\Delta(\Delta+1)(1+e^{\gamma}+e^{2\gamma})\Big),$$

nejednakost (2.34) postaje

$$E|y(t)|^2 \leq H||\xi||_E^2\, e^{-\gamma(k+1)\Delta} \leq H||\xi||_E^2\, e^{-\gamma t},\ \ t \in [k\Delta,(k+1)\Delta).$$

Lako se može zaključiti da se H može učiniti proizvoljno bliskim sa $\tilde{M}$, izborom dovoljno malih ε i Δ. Na taj način je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

U daljem razmatranju često će se koristiti neprekidno EM rešenje $y(t;s,\xi)$ jednačine (2.12) sa početnim uslovom $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_s}$ zadatim u trenutku $s \geq 0$. Rešenje $y(t;s,\xi)$ se može definisati na isti način kao $y(t;0,\xi)$. Naime, potrebno je odrediti diskretne aproksimacije $y(s+k\Delta;s,\xi)$, zatim odrediti odgovarajuće stepenaste procese z_1, z_2, z_3 i na kraju definisati neprekidno EM rešenje

$$y(t;s,\xi) = \xi(0)+\int_s^t f(z_1(u),z_2(u),z_3(u))du+\int_s^t g(z_1(u),z_2(u),z_3(u))dw(u).$$

EM rešenja kao i tačno rešenje $x(t;0,\xi)$ imaju osobinu

$$y(t;0,\xi) = y(t;s,y_s),\ \ 0 \leq s < t < \infty,$$

ako je s umnožak od Δ.

Pre navodjenja glavnog rezultata vezanog za stabilnost tačnog i neprekidnog EM rešenja, neophodno je dokazati sledeću propoziciju.

Propozicija 2.2.5 *Neka je $y(t;0,\xi) = y(t)$ i neka je se $x(t) = x(t;1,y_1)$ definisano rešenje jednačine (2.12) koje zadovoljava početni uslov $y_1 = \{y(1+\theta), \theta \in [-1,0]\}$ u trenutku $t = 1$. Ako važe pretpostavke (2.15) i (2.16), tada je, za proizvoljno $T > 0$,*

$$\sup_{t\in[1,1+T]} E|y(t)-x(t)|^2 \leq C||\xi||_E^2\, \Delta,$$

pri čemu je $C = C(T) = \bar{C}_1 C_3 T e^{3\bar{C}_1 T}$, $\bar{C}_1 = 4K(T+1)$ i C_3 je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.3.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.1 osim što se bazira na flow osobini rešenja x i y. Iz tog razloga će neki koraci biti izostavljeni i akcenat će biti na delu dokaza koji se razlikuje od dokaza Teoreme 2.2.1.

Primenom Hölderove nejednakosti na Lebesgueov integral, Itove izometrije na integral Itoa, kao i pretpostavke (2.15) može se pokazati da za svako $t \in [1, 1+T]$ važi

$$
\begin{aligned}
&E|y(t)-x(t)|^2 \qquad (2.35)\\
&\quad \le \bar{C}_1 \int_1^t (E|z_1(s)-y(s)|^2 + E|z_2(s)-y([s])|^2 + E|z_3(s)-y([s-1])|^2) ds\\
&\quad\quad + \bar{C}_1 \int_1^t (E|y(s)-x(s)|^2 + E|y([s])-x([s])|^2 + E|y([s-1])-x([s-1])|^2) ds,
\end{aligned}
$$

gde je $\bar{C}_1 = \bar{C}_1(T) = 4K(T+1)$. Koristeći Propoziciju 2.2.3, iz (2.35) sledi

$$
\begin{aligned}
&E|y(t)-x(t)|^2 \qquad (2.36)\\
&\quad \le \bar{C}_1 \int_1^t E|z_1(s)-y(s)|^2 ds + 2\bar{C}_1 \int_1^t \sup_{u\in[1,s]} E|y(u)-x(u)|^2 ds\\
&\quad\quad + \bar{C}_1 \int_1^2 E|y([s-1])-x([s-1])|^2 ds + \bar{C}_1 \int_2^t E|y([s-1])-x([s-1])|^2 ds\\
&\quad = \bar{C}_1 C_3 T ||\xi||_E^2 \, \Delta + 2\bar{C}_1 \int_1^t \sup_{u\in[1,s]} E|y(u)-x(u)|^2 ds\\
&\quad\quad + \bar{C}_1 \int_0^1 E|y([s])-x([s])|^2 ds + \bar{C}_1 \int_1^{t-1} E|y([s])-x([s])|^2 ds.
\end{aligned}
$$

S obzirom da je $x(s) = x(s; 1, y_1)$, to je $x(s) = y(s), s \in [0, 1]$. Na taj način (2.36) postaje

$$E|y(t)-x(t)|^2 \le \bar{C}_1 C_3 T ||\xi||_E^2 \, \Delta + 3\bar{C}_1 \int_1^t \sup_{u\in[1,s]} E|y(u)-x(u)|^2 ds,$$

što implicira

$$\sup_{s\in[1,1+T]} E|y(s)-x(s)|^2 \le C||\xi||_E^2 \, \Delta,$$

gde je $C = \bar{C}_1 C_3 T e^{3\bar{C}_1 T}$. $\diamondsuit$

Teorema 2.2.2 *Neka važe pretpostavke (2.15) i (2.16). Ako je rešenje jednačine (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu, tj. ako za svako* $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}([-1, 0]; R^d)$ *važi*

$$E|x(t; 0, \xi)|^2 \le M||\xi||_E^2 \, e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0,$$

tada postoji $\Delta^* > 0$ *tako da je, za svako* $\Delta < \Delta^*$, *EM aproksimativno rešenje jednačine (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu sa konstantom brzine* γ *i konstantom rasta* H *koje ne zavise od* Δ. *Preciznije, važi*

$$E|y(t; 0, \xi)|^2 \le H||\xi||_E^2 \, e^{-\gamma t}, \quad t \ge 0,$$

pri čemu je $\gamma = \frac{1}{2}\lambda$, $H = 2MC_1 e^{\frac{1}{2}\lambda T}$, $T = 9 + [4/\lambda ln M]$ *i* C_1 *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.1.*

Dokaz. Za fiksirani proizvoljni početni uslov ξ, neka je $y(t;0,\xi) = y(t)$ i $x(t) = x(t;1,y_1)$. Na osnovu eksponencijalne stabilnosti rešenja jednačine (2.12) u srednje kvadratnom smislu sledi

$$E|x(t)|^2 \leq M||y_1||_E^2\, e^{-\lambda(t-1)}, \quad t \geq 1. \tag{2.37}$$

S obzirom na izbor konstante T zaključuje se da je

$$Me^{-\lambda(T-2)} \leq e^{-\frac{3}{4}\lambda T}. \tag{2.38}$$

Na drugoj strani, za proizvoljno $\alpha > 0$, važi

$$E|y(t)|^2 \leq (1+\alpha)E|y(t)-x(t)|^2 + (1+1/\alpha)E|x(t)|^2. \tag{2.39}$$

Na osnovu Propozicije 2.2.5 i (2.37), dobija se

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|y(t)|^2 \leq &(1+\alpha) \sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|y(t)-x(t)|^2 \\
&+(1+1/\alpha) \sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|x(t)|^2 \\
\leq &(1+\alpha)\beta_1||\xi||_E^2\,\Delta + (1+1/\alpha)M||y_1||_E^2\, e^{-\lambda(T-2)} \\
\leq &((1+\alpha)\beta_1\Delta + (1+1/\alpha)Me^{-\lambda(T-2)}) \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2 r,
\end{aligned}$$

gde je $\beta_1 = C(2T-2)$, pri čemu je konstanta $C(\cdot)$ definisana u Propoziciji 2.2.5. Za izbor konstante

$$\alpha = \sqrt{\frac{Me^{-\lambda(T-2)}}{\beta_1\Delta}}$$

dobija se

$$\sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|y(t)|^2 \leq R(\Delta) \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2, \tag{2.40}$$

gde je

$$R(\Delta) = \beta_1\Delta + 2\sqrt{\beta_1 M\Delta}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda(T-2)} + Me^{-\lambda(T-2)}.$$

Imajući u vidu (2.38), može se zaključiti da važi

$$R(0) = Me^{-\lambda(T-2)} \leq e^{-\frac{3}{4}\lambda T}.$$

Kako je $R(\Delta)$ monotono rastuća funkcija od Δ, postoji Δ^* tako da je $R(\Delta) \leq e^{-\frac{1}{2}\lambda T}$ za svako $\Delta \leq \Delta^*$. Zbog toga se (2.40) može oceniti kao

$$\sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|y(t)|^2 \leq e^{-\frac{1}{2}\lambda T} \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2. \tag{2.41}$$

Za dalji tok dokaza je bitna činjenica da je T prirodan broj, a samim tim i umnožak od Δ. Na osnovu flow osobine EM rešenja, za proizvoljan prirodan broj $i \geq 0$, imamo

$$y(t) = y(t; iT, y_{iT}), \quad t \geq iT.$$

Prateći postupak kojim je dobijena ocena (2.41), za rešenje $y(t; iT, y_{iT})$ se dobija ocena

$$\sup_{t\in[(i+1)T-1,(i+2)T-1]} E|y(t)|^2 \le e^{-\frac{1}{2}\lambda T} \sup_{t\in[iT-1,iT+1]} E|y(t)|^2. \tag{2.42}$$

Odatle sledi, na osnovu definicije konstante T,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[(i+1)T-1,(i+2)T-1]} E|y(t)|^2 &\le e^{-\frac{1}{2}\lambda T} \sup_{t\in[iT-1,(i+1)T-1]} E|y(t)|^2 \\ &\cdots \\ &\le e^{-\frac{1}{2}\lambda (i+1)T} \sup_{t\in[-1,T-1]} E|y(t)|^2.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Kako je

$$\sup_{t\in[-1,T-1]} E|y(t)|^2 = \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2 \vee \sup_{t\in[1,T-1]} E|y(t)|^2, \tag{2.44}$$

uzimajući supremum po intervalu $[1, T-1]$ u (2.39), a zatim primenom Propozicije 2.2.5 i uslova stabilnosti (2.37), dobija se

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[1,T-1]} E|y(t)|^2 &\le (1+\alpha)\beta_2 ||\xi||_E^2 \Delta + (1+1/\alpha) M ||y_1||_E^2 \\ &\le ((1+\alpha)\beta_2\Delta + (1+1/\alpha)M) \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2,\end{aligned}$$

gde je $\beta_2 = C(T-2)$. Izborom

$$\alpha = \sqrt{\frac{M}{\beta_2\Delta}}$$

dobija se

$$\sup_{t\in[1,T-1]} E|y(t)|^2 \le (\beta_2\Delta + 2\sqrt{\beta_2\Delta M} + M) \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2.$$

Ukoliko je neophodno, može se izabrati dovoljno malo Δ^* tako da važi i $\beta_2\Delta + 2\sqrt{\beta_2 M\Delta} + M \le 2M$, za svako $\Delta \le \Delta^*$. Na taj način se dobija

$$\sup_{t\in[1,T-1]} E|y(t)|^2 \le 2M \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2.$$

Zamenom poslednje ocene u (2.44) i uočavajući da M ne sme biti manje od 1, dobija se

$$\sup_{t\in[-1,T-1]} E|y(t)|^2 \le 2M \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2. \tag{2.45}$$

Ocena (2.45), zajedno sa (2.43), daje

$$\sup_{t\in[(i+1)T-1,(i+2)T-1]} E|y(t)|^2 \le 2M e^{-\frac{1}{2}\lambda(i+1)T} \sup_{t\in[-1,1]} E|y(t)|^2.$$

Primenom Propozicije 2.2.1 se dobija

$$\sup_{t\in[(i+1)T-1,(i+2)T-1]} E|y(t)|^2 \leq 2MC_1||\xi||_E^2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda(i+1)T}, \quad i \geq 0,$$

dok, iz (2.45) sledi

$$\sup_{t\in[0,T-1]} E|y(t)|^2 \leq 2MC_1||\xi||_E^2.$$

Na taj način je

$$E|y(t)|^2 \leq 2MC_1 e^{\frac{1}{2}\lambda T}||\xi||_E^2 e^{-\frac{1}{2}\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

tj. EM rešenje je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu, pri čemu je $\gamma = \frac{1}{2}\lambda$ i $H = 2MC_1 e^{\frac{1}{2}\lambda T}$. $\diamondsuit$

Naredna propozicija se može dokazati na isti način kao Propozicije 2.2.1 i 2.2.5, pa će iz tog razloga dokaz biti izostavljen.

Propozicija 2.2.6 *Neka su uslovi (2.15) i (2.16) zadovoljeni. Tada je*

$$\sup_{t\in[0,1]} E|x(t;0,\xi)|^2 \leq C_1||\xi||_E^2, \tag{2.46}$$

gde je C_1 *konstanta definisana u Propoziciji 2.2.1. Neka je* $x(t;0,\xi) = x(t)$ *i neka je* $y(t) = y(t;1,x_1)$ *EM rešenje jednačine (2.12) sa početnim uslovom* x_1 *u trenutku* $t = 1$*. Tada je, za svako* $T > 0$,

$$\sup_{t\in[1,1+T]} E|y(t)-x(t)|^2 \leq C(T)||\xi||_E^2\,\Delta, \tag{2.47}$$

pri čemu je $C(T)$ *konstanta definisana u Propoziciji 2.2.5.*

Teorema 2.2.3 *Neka su uslovi (2.15) i (2.16) zadovoljeni. Pretpostavimo da je, za neko* $\Delta > 0$*, EM rešenje jednačine (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu, tj. da za svako* $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}([-1,0];R^d)$ *važi*

$$E|y(t;0,\xi)|^2 \leq H||\xi||_E^2\, e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Dalje, pretpostavimo da je

$$\beta_3\Delta + 2\sqrt{\beta_3 H\Delta}\, e^{-\frac{1}{2}\gamma(T-2)} + He^{-\lambda(T-2)} \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma T}, \tag{2.48}$$

gde je $T = 9+[4/\gamma lnH], \beta_3 = C(2T-2)$ *i* $C(\cdot)$ *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.5. Tada je i rešenje jednačine (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu. Tačnije,*

$$E|x(t)|^2 \leq M||\xi||_E^2\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

pri čemu je $\lambda = \frac{1}{2}\gamma, M = C_1 e^{\frac{1}{2}\gamma T}(\beta_4\Delta + 2\sqrt{\beta_4 H\Delta} + H), \beta_4 = C(T-2)$ *i* C_1 *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.1.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.2, zbog čega će biti navedena samo skica dokaza uz isticanje onih delova koji se razlikuju.

Za fiksirani proizvoljni početni uslov ξ, neka je $x(t;0,\xi) = x(t)$, i neka je $y(t) = y(t;1,x_1)$. Kako je, po pretpostavci, EM rešenje eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu, to je

$$E|y(t)|^2 \leq H||x_1||_E^2\, e^{-\lambda(t-1)}, \quad t \geq 1. \tag{2.49}$$

Na osnovu (2.47) i (2.49) sledi

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[T-1,2T-1]} & E|x(t)|^2 \\ & \leq (\beta_3\Delta + 2\sqrt{\beta_3 H\Delta}\, e^{-\frac{1}{2}\gamma(T-2)} + He^{-\lambda(T-2)}) \sup_{t\in[-1,1]} E|x(t)|^2,\end{aligned}$$

pri čemu je $\beta_3 = C(2T-2)$ i $C(\cdot)$ je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.5.

Koristeći (2.48), dobija se

$$\sup_{t\in[T-1,2T-1]} E|x(t)|^2 \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma T} \sup_{t\in[-1,1]} E|x(t)|^2.$$

Na isti način kao u dokazu Teoreme 2.2.2, može se pokazati da je

$$\sup_{t\in[(i+1)T-1,(i+2)T-1]} E|x(t)|^2 \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma(i+1)T} \sup_{t\in[-1,T-1]} E|x(t)|^2, \quad i \geq 0. \tag{2.50}$$

Na drugoj strani, iz (2.47) i uslova stabilnosti (2.49) proizilazi

$$\sup_{t\in[1,T-1]} E|x(t)|^2 \leq (\beta_4\Delta + 2\sqrt{\beta_4 H\Delta} + H) \sup_{t\in[-1,1]} E|x(t)|^2,$$

gde je $\beta_4 = C(T-2)$. Ova relacija zajedno sa (2.46) daje

$$\sup_{t\in[-1,T-1]} E|x(t)|^2 \leq C_1(\beta_4\Delta + 2\sqrt{\beta_4 H\Delta} + H)||\xi||_E^2. \tag{2.51}$$

Ocene (2.50) i (2.51) impliciraju

$$E|x(t)|^2 \leq C_1 e^{\frac{1}{2}\gamma T}(\beta_4\Delta + 2\sqrt{\beta_4 H\Delta} + H)||\xi||_E^2\, e^{-\frac{1}{2}\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Sledeća teorema objedinjuje rezultate Teorema 2.2.2 i 2.2.3.

Teorema 2.2.4 *Pod pretpostavkama (2.15) i (2.16), rešenje jednačine (2.12) je eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu ako i samo ako je, za neko* $\Delta > 0$, *EM rešenje date jednačine eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu sa konstantom brzine* γ *i konstantom rasta* H, *za koje važi*

$$\beta_3\Delta + 2\sqrt{\beta_3 H\Delta}\, e^{-\frac{1}{2}\gamma(T-2)} + He^{-\gamma(T-2)} \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma T}, \tag{2.52}$$

pri čemu je $T = 9 + [4/\gamma ln H], \beta_3 = C(2T-2)$ *i* $C(\cdot)$ *je konstanta definisana u Propoziciji 2.2.5.*

Dokaz. Obrnuti smer ovog tvrdjenja sledi direktno iz Teoreme 2.2.3. Za dokazivanje direktnog smera, potrebno je pretpostaviti da je rešenje jednačine (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu. Tada, na osnovu Teoreme 2.2.2, postoji $\Delta^* > 0$ tako da je, za svako $\Delta < \Delta^*$, EM rešenje jednačinu (2.12) eksponencijalno stabilno u srednje kvadratnom smislu sa konstantom brzine γ i konstantom rasta H koje su nezavisne od Δ. Za te vrednosti γ i H dobija se da je $T = 9 + [4/\gamma lnH]$ odakle je

$$He^{-\gamma(T-2)} = e^{-\frac{3}{4}\gamma T} He^{-\frac{1}{4}\gamma T+2\gamma} = e^{-\frac{3}{4}\gamma T} He^{-\frac{1}{4}\gamma\left(1+[4/\gamma lnH]\right)} \leq e^{-\frac{3}{4}\gamma T} < e^{-\frac{1}{2}\gamma T}.$$

Dakle, uvek je moguće naći dovoljno malo Δ tako da (2.52) važi i ovim je i direktan smer tvrdjenja dokazan. $\diamondsuit$

Sledeći primer ilustruje bliskost tačnog rešenja i odgovarajućeg Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja razmatrane jednačine. Naime, simuliran je veliki broj trajektorija tačnog i aproksimativnog rešenja, za različite vrednosti koraka Δ, pri čemu su dobijeni rezultati u skladu sa prethodnim teorijskim rezultatima.

Primer 2.2.1

Razmatrana je stohastička diferencijalna jednačina sa deo po deo konstantnim argumentima

$$dx(t) = (x(t) + x([t]) + x([t-1])dt + (x(t) + x([t-1])dw(t), \quad t \in [0,2], \tag{2.53}$$

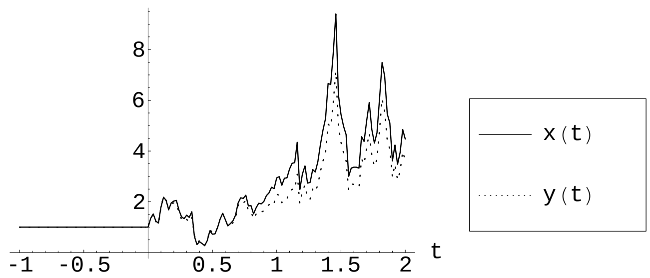
koja zadovoljava početni uslov $x_0 = \xi$, gde je $\xi(\theta) = 1, \theta \in [-1,0]$. Očigledno, koeficijenti ove jednačine zadovoljavaju uslove (2.15) and (2.16), što implicira egzistenciju i jedinstvenost odgovarajućeg rešenja. Kao što se može uočiti, jednačina (2.53) je deo po deo linearna i kao takva je eksplicitno rešiva. Za $t \in [0,1]$, rešenje jednačine (2.53) je oblika

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t+w(t)}\Big(\xi(0) + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}s-w(s)}ds + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}s-w(s)}dw(s)\Big), \tag{2.54}$$

dok je, za $t \in [1,2]$,

$$\begin{aligned} x(t) = e^{\frac{1}{2}(t-1)+w(t)-w(1)} \Bigg(& x(1) + x(1)\int_1^t e^{-\frac{1}{2}(s-1)-(w(s)-w(1))}ds \\ &+ \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(s-1)-(w(s)-w(1))}dw(s)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Da bi se ilustrovala konvergencija EM rešenja jednačine (2.53), simulirane su trajektorije za različite vrednosti koraka Δ. Na Slici 2.1 prikazano je tačno rešenje jednačine (2.53), zadato sa (2.54) i (2.55), nasuprot odgovarajućem Euler-Maruyama rešenju $\{y(t), t \in [-1,2]\}$, za $\Delta = 0.02$.



Slika 2.1: Tačno rešenje i Euler-Maruyama rešenje za $\Delta = 0.02$

2.3 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom poglavlju će biti definisana numerička aproksimativna metoda za jednu klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. Glavni rezultat se odnosi na srednje kvadratnu konvergenciju Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja. Osim standardnih uslova koji garantuju egzistenciju, jedinstvenost i ograničenost momenata rešenja neophodni su dodatni uslovi zbog prisustva funkcije kašnjenja u jednačini.

Postoji veliki broj radova koji se bave problemima aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina koje zavise od prošlosti, medju kojima su [12, 48, 56, 71]. Rezultati koji će biti navedeni u ovom poglavlju sadržani su u radu [70]. Osnovna motivacija za nastanak tih rezultata proistekla je iz rada [91], gde je dokazana srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama rešenja neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina.

U daljem tekstu će biti korišćene oznake koje su uvedene u Poglavlju 1.10.

Predmet razmatranja će biti autonomna neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem, oblika

$$\begin{aligned} &d[x(t)-u(x(t-\delta(t)))] \\ &\qquad = f(x(t),x(t-\delta(t)))dt+g(x(t),x(t-\delta(t)))dw(t),\ t\in[0,T], \end{aligned} \tag{2.56}$$

sa početnim uslovom

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}. \tag{2.57}$$

Pored uslova navedenih u Poglavlju 1.10, neophodno je uvesti dodatne pretpostavke koje su neophodne za dokazivanje glavnog rezultata, tj. srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja jednačine (2.56).

$\mathcal{A}_1$: Postoji konstanta $C_\xi > 0$ tako da važi

$$E \sup_{s,t\in[-\tau,0],|s-t|\le\Delta} |\xi(t)-\xi(s)|^2 \le C_\xi \Delta.$$

$\mathcal{A}_2$: Postoji konstanta $\eta > 0$ tako da važi

$$|\delta(t)-\delta(s)| \le \eta|t-s|, \quad t,s\in[0,T].$$

Jednačina (2.56) se može predstaviti u ekvivalentnom integralnom obliku, tj. za $t \in [0, T]$,

$$x(t)-u(x(t-\delta(t))) = \xi(0)-u(\xi(-\delta(0))) + \int_0^t f(x(s), x(s-\delta(s)))ds + \int_0^t g(x(s), x(s-\delta(s)))dw(s), \tag{2.58}$$

sa početnim uslovom (2.57). Bez gubljenja opštosti se može pretpostaviti da je T/τ racionalan broj. U suprotnom se T može zameniti nekim većim brojem kako bi se to postiglo. Neka je $\Delta \in (0,1)$ veličina koraka za koju važi $\Delta = \tau/n_* = T/M$, za neke prirodne brojeve $n_* > \tau$, $M > T$. Najpre se definiše eksplicitno diskretno Euler-Maruyama aproksimativno rešenje $\bar{y}$ jednačine (2.58), na ekvidistantnoj particiji $k\Delta, k = -(n_*+1), -n_*, ..., M$ intervala $[0, T]$. Ovo rešenje je dobro definisano ukoliko je

$$\delta(-\Delta) = \delta(0), \quad \bar{y}(-(n_*+1)\Delta) = \xi(-n_*\Delta). \tag{2.59}$$

Neka je $[\cdot]$ funkcija koja realnom broju pridružuje ceo deo tog broja. Diskretno Euler-Maruyama aproksimativno rešenje se definiše kao

$$\bar{y}(k\Delta) = \xi(k\Delta), \;\; k = -n_*, -n_*+1, ..., 0, \tag{2.60}$$

dok je, za $k \in \{0, 1, ..., M-1\}$,

$$\begin{aligned} &\bar{y}((k+1)\Delta) \\ &\;= \bar{y}(k\Delta)+u(\bar{y}(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))-u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad +f(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta+g(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.61}$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)$.

Da bi se definisalo neprekidno aproksimativno rešenje jednačine (2.56) uvode se stepenasti procesi

$$z_1(t) = \sum_{k=0}^{M-2} \bar{y}(k\Delta) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t) + \bar{y}((M-1)\Delta) I_{[(M-1)\Delta, M\Delta]}(t), \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} z_2(t) = &\sum_{k=-1}^{M-2} \bar{y}(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t) \\ &+\bar{y}((M-1)\Delta-[\delta((M-1)\Delta)/\Delta]\Delta) I_{[(M-1)\Delta, M\Delta]}(t). \end{aligned}$$

Takodje, neophodno je definisati linearnu kombinaciju izraza $\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)$ i $\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)$, tj.

$$\bar{y}_k(t) = z_2((k-1)\Delta) + \frac{t-k\Delta}{\Delta}(z_2(k\Delta)-z_2((k-1)\Delta)), \tag{2.63}$$

za svako $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta], k = 0, 1, ..., M-1$, što se ekvivalentno može predstaviti u obliku

$$\bar{y}_k(t) = \frac{t-k\Delta}{\Delta}\, z_2(k\Delta) + \frac{(k+1)\Delta - t}{\Delta}\, z_2((k-1)\Delta). \tag{2.64}$$

Neka je

$$z_3(t) = \sum_{k=0}^{M-2} \bar{y}_k(t) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t) + \bar{y}_{M-1}(t) I_{[(M-1)\Delta, M\Delta]}(t). \tag{2.65}$$

Sada se može definisati neprekidno Euler-Maruyama aproksimativno rešenje jednačine (2.56), tako da je

$$\begin{aligned} y(t) &= \xi(t), t \in [-\tau, 0], \\ y(t) &= \xi(0) + u(z_3(t)) - u(\bar{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad + \int_0^t f(z_1(s), z_2(s))ds + \int_0^t g(z_1(s), z_2(s))dw(s), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Kada je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$, jednačina (2.66) se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} y(t) = \bar{y}(k\Delta) &+ u(\bar{y}_k(t)) - u(\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &+ \int_{k\Delta}^t f(z_1(s), z_2(s))ds + \int_{k\Delta}^t g(z_1(s), z_2(s))dw(s). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Na osnovu (2.62), (2.63) i (2.67), može se zaključiti da važi $y(k\Delta) = \bar{y}(k\Delta)$, tj. diskretno i neprekidno Euler-Maruyama aproksimativno rešenje se poklapaju u tačkama particije.

Da bi se dokazao glavni rezultat, neophodno je dokazati nekoliko propozicija.

Propozicija 2.3.1 *Ako su zadovoljeni uslovi (1.31), (1.32) i (1.33) i uz to važi $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada postoji pozitivna konstanta $H(p)$, nezavisna od Δ, tako da važi*

$$E \sup_{t \in [-\tau, T]} |y(t)|^p \leq H(p).$$

Dokaz. U dokazu se primenjuje elementarna nejednakost (1.47), tj.

$$(a+b)^p \leq (1+\varepsilon)^{p-1}\Big(a^p + \varepsilon^{1-p} b^p\Big), \quad a, b > 0, \quad p > 1, \quad \varepsilon > 0.$$

U tom smislu, za svako $t \in [0, T]$ i $\varepsilon > 0$, na osnovu uslova (1.32) i (1.33), važi

$$\begin{aligned} |y(t)|^p &\leq (1+\varepsilon)^{p-1}\Big(|y(t) - u(z_3(t))|^p + \varepsilon^{1-p}|u(z_3(t))|^p\Big) \\ &\leq (1+\varepsilon)^{p-1}\Big(|y(t) - u(z_3(t))|^p + \varepsilon^{1-p}\beta^p|z_3(t)|^p\Big). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Imajući u vidu definiciju (2.62) stepenastog procesa z_2, kao i (2.59), dobija se sledeća ocena

$$|z_2(k\Delta)| \leq \sup_{-(n_*+1) \leq i \leq k} |\bar{y}(i\Delta)| = \sup_{-n_* \leq i \leq k} |\bar{y}(i\Delta)|, \quad k = 0, 1, ..., M-1. \tag{2.69}$$

Izborom takvog $k \in \{0, 1, ..., M-1\}$ za koje je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$, a na osnovu (2.69), sledi

$$|z_2((k-1)\Delta)| \vee |z_2(k\Delta)| \leq \sup_{s \in [-\tau, t]} |y(s)|.$$

Na taj način, na osnovu (2.64), može se zaključiti da je

$$|\bar{y}_k(t)|^p \le \Big(\frac{t-k\Delta}{\Delta} \sup_{t\in[-\tau,t]} |y(s)| + \frac{(k+1)\Delta - t}{\Delta} \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|\Big)^p \le \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p,$$

što, zajedno sa (2.65) implicira

$$|z_3(t)|^p \le \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p, \quad t \in [0,T].$$

Dakle, iz (2.68) sledi da je

$$|y(t)|^p \le (1+\varepsilon)^{p-1}\Big(|y(t) - u(z_3(t))|^p + \varepsilon^{1-p}\beta^p \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p\Big).$$

Za $\varepsilon = \beta/(1-\beta)$, poslednja nejednakost postaje

$$|y(t)|^p \le (1-\beta)^{1-p}|y(t) - u(z_3(t))|^p + \beta \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p, \quad t \in [0,T],$$

odakle je

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p &\le E||\xi||^p + E \sup_{s\in[0,t]} |y(s)|^p \\ &\le E||\xi||^p + (1-\beta)^{1-p} E \sup_{s\in[0,t]} |y(s) - u(z_3(s))|^p + \beta E \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p, \end{aligned}$$

pa je

$$E \sup_{s\in[-\tau,t]} |y(s)|^p \le \frac{E||\xi||^p}{1-\beta} + \frac{E \sup_{s\in[0,t]} |y(s) - u(z_3(s))|^p}{(1-\beta)^p}. \tag{2.70}$$

Ako se (2.66) predstavi u obliku

$$\begin{aligned} y(t) - u(z_3(t)) = \xi(0) - u(\xi(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta) \\ + \int_0^t f(z_1(s), z_2(s))ds + \int_0^t g(z_1(s), z_2(s))dw(s), \end{aligned}$$

primenom Hölderove nejednakosti se dobija

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[0,t]} |y(s) - u(z_3(s))|^p \qquad (2.71) \\ &\le 3^{p-1} E|\xi(0) - u(\bar{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^p \\ &\quad + 3^{p-1}\Bigg(T^{p-1}\int_0^t E|f(z_1(s), z_2(s))|^p ds + E \sup_{s\in[0,t]} \Big|\int_0^s g(z_1(u), z_2(u))dw(u)\Big|^p\Bigg). \end{aligned}$$

Kako je $\bar{y}(-(n_* + 1)\Delta) = \xi(-n_*\Delta)$, uslovi (1.32) i (1.33), impliciraju

$$\begin{aligned} &E|\xi(0) - u(\bar{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^p \qquad (2.72) \\ &\le E\Big(|\xi(0)| + \beta|\bar{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)|\Big)^p \\ &\le E\Big(|\xi(0)| + \beta(|\bar{y}(-(n_* + 1)\Delta)| \vee \sup_{-n_*\le k\le 0} |\xi(k\Delta)|)\Big)^p \\ &\le (1+\beta)^p E||\xi||^p. \end{aligned}$$

Na drugoj strani, na osnovu uslova ograničenog rasta (1.31) i definicije (2.62) stepenastih procesa z_1 i z_2, se dobija

$$\begin{aligned}\int_0^t E|f(z_1(s),z_2(s))|^p ds &\le 3^{p/2-1}K^{p/2}\int_0^t\Big(1+E|z_1(s)|^p+E|z_2(s)|^p\Big)ds \qquad (2.73)\\ &\le 3^{p/2-1}K^{p/2}\left(T+2\int_0^t E\sup_{u\in[-\tau,s]}|y(u)|^p ds\right).\end{aligned}$$

Primena Burkholder-Davis-Gandy nejednakosti (Teorema 1.3.5), zajedno sa argumentima korišćenim u (2.73), daje

$$\begin{aligned}&E\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s g(z_1(u),z_2(u))dw(u)\right|^p \qquad (2.74)\\ &\quad\le c_pT^{p/2-1}\int_0^t E|g(z_1(s),z_2(s))|^p ds\\ &\quad\le 3^{p/2-1}c_pT^{p/2-1}K^{p/2}\left(T+2\int_0^t E\sup_{u\in[-\tau,s]}|y(u)|^p ds\right),\end{aligned}$$

gde je c_p univerzalna konstanta koja zavisi samo od p. Zatim se, zamenom (2.72), (2.73) i (2.74) u (2.71), dobija

$$E\sup_{s\in[0,t]}|y(s)-u(z_3(s))|^p \le C_1+C_2\int_0^t E\sup_{u\in[-\tau,s]}|y(u)|^p ds, \qquad (2.75)$$

pri čemu je $C_1 = 3^{p-1}\Big((1+\beta)^pE||\xi||^p + 3^{p/2-1}K^{p/2}T^{p/2}(T^{p/2}+c_p)\Big)$, dok je $C_2 = 2\cdot 3^{3p/2-2}K^{p/2}T^{p/2-1}(T^{p/2}+c_p)$. Na taj način ocena (2.75), zajedno sa (2.70), daje

$$E\sup_{s\in[-\tau,t]}|y(s)|^p \le \frac{E||\xi||^p}{1-\beta}+\frac{C_1}{(1-\beta)^p}+\frac{C_2}{(1-\beta)^p}\int_0^t E\sup_{u\in[-\tau,s]}|y(u)|^p ds, \quad t\in[0,T].$$

Konačno, primenom Gronwall-Bellmanove leme se dobija

$$E\sup_{s\in[-\tau,T]}|y(s)|^p \le \left(\frac{E||\xi||^p}{1-\beta}+\frac{C_1}{(1-\beta)^p}\right)e^{\frac{C_2T}{(1-\beta)^p}} \equiv H(p),$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Propozicija 2.3.2 *Neka su uslovi Propozicije 2.3.1 zadovoljeni, zajedno sa pretpostavkama $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ i neka je*

$$(3+[\eta])\beta < 1. \qquad (2.76)$$

Tada, za prirodan broj $l>1$, važi

$$E\sup_{-n_*\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \le A(l)\Delta^{\frac{l}{l-1}},$$

gde je $A(l)$ konstanta koja zavisi od l, ali ne zavisi od Δ.

Dokaz. Najpre treba uočiti da je

$$E\sup_{-n_*\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2\le E\sup_{-n_*\le k\le 0}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \qquad (2.77)$$
$$+E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2.$$

Imajući u vidu da je $\bar{y}(-(n_*+1)\Delta)=\xi(-n_*\Delta)$, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$ se dobija

$$E\sup_{-n_*\le k\le 0}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2=E\sup_{-n_*+1\le k\le 0}|\xi(k\Delta)-\xi((k-1)\Delta)|^2 \qquad (2.78)$$
$$\le C_\xi\Delta.$$

Za $k=1,2,...,M$, iz (2.61) sledi

$$\begin{aligned}&\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)\\&\quad=u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))-u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta))\\&\quad\quad+f(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta\\&\quad\quad+g(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_{k-1}.\end{aligned}$$

U nastavku se primenjuje elementarna nejednakost (1.48), tj.

$$(x+y)^2\le\frac{x^2}{\varepsilon}+\frac{y^2}{1-\varepsilon},\ \ x,y>0,\,\varepsilon\in(0,1).$$

U tom smislu, koristeći uslov (1.32), dobija se

$$\begin{aligned}&|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2\\&\quad\le\frac{\beta^2}{\varepsilon}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\&\quad\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}|f(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2\Delta^2\\&\quad\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}|g(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_{k-1}|^2.\end{aligned}$$

Odatle sledi da je

$$E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \qquad (2.79)$$
$$\begin{aligned}&\le\frac{\beta^2}{\varepsilon}E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\&\quad+\frac{2\Delta^2}{1-\varepsilon}E\sup_{1\le k\le M}|f(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2\\&\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}E\sup_{1\le k\le M}|g(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_{k-1}|^2.\end{aligned}$$

Kako važi pretpostavka $\mathcal{A}_2$, to je

$$\begin{aligned}|(k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta-(k-2)\Delta+[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta|\\ &\le \Delta+|[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta|\\ &\le \Delta+(1+\eta)\Delta\\ &\le (3+[\eta])\Delta, \quad k=2,3,...,M,\end{aligned}$$

dok se, s obzirom da je $\delta(-\Delta)=\delta(0)$, za $k=1$, dobija

$$\begin{aligned}|(k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta-(k-2)\Delta+[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta|\\ &\equiv |[\delta(0)/\Delta]\Delta+\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta|\\ &\equiv \Delta.\end{aligned}$$

Dakle, za svako $k=1,2,...,M$, važi

$$|(k-1)-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]-(k-2)+[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]|\le(3+[\eta]). \tag{2.80}$$

Prilikom ocenjivanja prvog sabirka u izrazu (2.79), pretpostavlja se da je $(k-1)-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\le(k-2)-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]$ za neko $k\in\{1,2,...,M\}$. U tom slučaju je, na osnovu (2.80),

$$\begin{aligned}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\ &\le(3+[\eta])\sum_{i=(k-1)-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]+1}^{(k-2)-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]}|\bar{y}(i\Delta)-\bar{y}((i-1)\Delta)|^2\\ &\le(3+[\eta])^2\sup_{-n_*\le i\le M}|\bar{y}(i\Delta)-\bar{y}((i-1)\Delta)|^2.\end{aligned} \tag{2.81}$$

U suprotnom, kada je $(k-2)-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\le(k-1)-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]$, $k\in\{1,2,...,M\}$, primena istih argumenata takodje daje ocenu (2.81) pa se može zaključiti da je

$$\begin{aligned}E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\ \le(3+[\eta])^2E\sup_{-n_*\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2.\end{aligned} \tag{2.82}$$

Za ocenjivanje drugog sabirka u izrazu (2.79) neophodan je uslov ograničenog rasta (1.31) i Propozicija 2.3.1. Na taj način se dobija

$$\begin{aligned}&E\sup_{1\le k\le M}|f(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2\\ &\le K\Big(1+E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}((k-1)\Delta)|^2+E\sup_{1\le k\le M}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Big)\\ &\le K\Big(1+2E\sup_{t\in[-\tau,T]}|y(t)|^2\Big)\\ &\le K(1+2H(2)),\end{aligned} \tag{2.83}$$

pri čemu je $H(2)$ konstanta koja ne zavisi od Δ.

Ocenjivanje trećeg sabirka u izrazu (2.79) se bazira na primeni Hölderove nejednakosti i elementarne nejednakosti (1.46). Za proizvoljan prirodan broj $l > 1$ je

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{1\le k\le M} |g(\bar{y}((k-1)\Delta), \bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_{k-1}|^2 \\
&\le E\Big(\sup_{1\le k\le M} |g(\bar{y}((k-1)\Delta), \bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \sup_{1\le k\le M} |\Delta w_{k-1}|^2\Big) \\
&\le \Big(E \sup_{1\le k\le M} |g(\bar{y}((k-1)\Delta), \bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^{\frac{2l}{l-1}}\Big)^{\frac{l-1}{l}} \\
&\quad \times \Big(E \sup_{1\le k\le M} |\Delta w_{k-1}|^{2l}\Big)^{\frac{1}{l}} \\
&\le K\Big(3^{\frac{1}{l-1}}(1 + 2E \sup_{-n_*\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta)|^{\frac{2l}{l-1}})\Big)^{\frac{l-1}{l}} \Big(E \sum_{k=0}^{M-1} |\Delta w_k|^{2l}\Big)^{\frac{1}{l}} \\
&\le 3K\Big(1 + 2H\Big(\frac{2l}{l-1}\Big)\Big)^{\frac{l-1}{l}} \Big(\sum_{k=0}^{M-1} \Delta^l (2l-1)!!\Big)^{\frac{1}{l}} \\
&\le B(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

gde je $B(l) = 3K\Big(1 + 2H\Big(\frac{2l}{l-1}\Big)\Big)^{\frac{l-1}{l}} \Big(T(2l-1)!!\Big)^{\frac{1}{l}}$.

Zamenom (2.82), (2.83) i (2.84) u (2.79), dobija se

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{1\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\
&\qquad \le \frac{\beta^2(3+[\eta])^2}{\varepsilon} E \sup_{-n_*\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\
&\qquad\quad + \frac{2K(1+2H(2))}{1-\varepsilon}\Delta^2 + \frac{2B(l)}{1-\varepsilon}\Delta^{\frac{l-1}{l}}.
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

Za proizvoljno $l > 1$, (2.78) i (2.85), zajedno sa (2.77), daju

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{-n_*\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\
&\qquad \le C_\xi \Delta + \frac{\beta^2(3+[\eta])^2}{\varepsilon} E \sup_{-n_*\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\
&\qquad\quad + \frac{2K(1+2H(2))}{1-\varepsilon}\Delta^2 + \frac{2B(l)}{1-\varepsilon}\Delta^{\frac{l-1}{l}}.
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

Pretpostavka (2.76) garantuje da je $a = (3+[\eta])^2\beta^2 < 1$. Dakle, moguće je izabrati $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \in (a,1)$ tako da važi $\frac{\beta^2(3+[\eta])^2}{\bar{\varepsilon}} < 1$. Tada, s obzirom da je $\Delta \in (0,1)$, ocena (2.86) postaje

$$
E \sup_{-n_*\le k\le M} |\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \tag{2.87}
$$

$$\leq \frac{C_\xi \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} - a}\,\Delta + \frac{2K(1+2H(2))\bar{\varepsilon}}{(1-\bar{\varepsilon})(\bar{\varepsilon} - a)}\,\Delta^2 + \frac{2B(l)\bar{\varepsilon}}{(1-\bar{\varepsilon})(\bar{\varepsilon} - a)}\,\Delta^{\frac{l-1}{l}}$$
$$\leq A(l)\Delta^{\frac{l}{l-1}},$$

gde je $A(l) = \frac{C_\xi \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-a} + \frac{2\bar{\varepsilon}\Big(K\big(1+2H(2)\big)+B(l)\Big)}{(1-\bar{\varepsilon})(\bar{\varepsilon}-a)}$, $l > 1$. $\diamondsuit$

Propozicija 2.3.3 *Neka su ispunjeni uslovi Propozicija 2.3.1 i 2.3.2. Tada, za svaki prirodan broj $l > 1$, važi*

$$E \sup_{t\in[0,T]} |y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \leq D(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},$$

pri čemu je $D(l)$ konstanta koja zavisi od l, ali na zavisi od Δ.

Dokaz. Neka su, za fiksirano $t \in [0,T]$ indeksi $k \in \{0,1,...,M-1\}$ i $k_t \in \{-n_*, -n_*+1,...,M-1\}$ takvi da važi $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta)$ i $t-\delta(t) \in [k_t\Delta,(k_t+1)\Delta)$, respektivno. Treba uočiti da, za $(k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta \leq k_t\Delta \leq t-\delta(t)$, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_2$, važi

$$\begin{aligned}
|k_t\Delta - (k-1)\Delta + [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta| \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\leq |t-\delta(t) - (k-1)\Delta + [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta| & \\
\leq 2\Delta + |[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta - \delta(t)| & \\
\leq 3\Delta + |\delta((k-1)\Delta) - \delta(t)| & \\
\leq (4+[2\eta])\Delta. &
\end{aligned} \tag{2.88}$$

U suprotnom, ako je $k_t\Delta \leq t-\delta(t) < (k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta$, dobija se

$$\begin{aligned}
|k_t\Delta - (k-1)\Delta + [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta| \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\leq \Delta + |(k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta - t + \delta(t)| & \\
\leq 4\Delta + |\delta(t) - \delta((k-1)\Delta)| & \\
\leq (5+[2\eta])\Delta. &
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Iz (2.88) i (2.89) sledi

$$|k_t - (k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])| \leq 5 + [2\eta]. \tag{2.90}$$

Imajući u vidu definiciju (2.65) stepenastog procesa z_3, može se zaključiti da, za svako $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta)$, važi

$$|y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \leq 2|y(t-\delta(t)) - \bar{y}(k_t\Delta)|^2 + 2|\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t)|^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
E \sup_{t\in[0,T]} |y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \leq 2E \sup_{t\in[0,T]} |y(t-\delta(t)) - \bar{y}(k_t\Delta)|^2 & \\
+2E \sup_{t\in[0,T]} |\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t)|^2. &
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Prilikom ocenjivanja $E\sup_{t\in[0,T]}|y(t-\delta(t))-\bar{y}(k_t\Delta)|^2$ neophodno je razmatrati sledeća dva slučaja.

Slučaj 1: Ako je $k_t\le -1$, tada je, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$,

$$\begin{aligned} E\sup_{t\in[0,T],k_t\le-1}|y(t-\delta(t))-\bar{y}(k_t\Delta)|^2 &= E\sup_{t\in[0,T],k_t\le-1}|\xi(t-\delta(t))-\xi(k_t\Delta)|^2 \\ &\le E\sup_{s,t\in[-\tau,0],|s-t|\le\Delta}|\xi(s)-\xi(t)|^2 \\ &\le C_\xi\Delta. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Slučaj 2: Ako je $k_t\ge 0$, tada se, imajući u vidu (2.67), dobija

$$\begin{aligned} &E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}|y(t-\delta(t))-\bar{y}(k_t\Delta)|^2 \\ &\quad\le 3E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}|u(\bar{y}_{k_t}(t-\delta(t)))-u(\bar{y}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &\quad\ +3E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\left|\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}f(z_1(s),z_2(s))ds\right|^2 \\ &\quad\ +3E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\left|\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}g(z_1(s),z_2(s))dw(s)\right|^2. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Na osnovu uslova (1.32), kao i definicija (2.62) i (2.63), sledi

$$\begin{aligned} &E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}|u(\bar{y}_{k_t}(t-\delta(t)))-u(\bar{y}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &\le\beta^2E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\left|\frac{t-\delta(t)-k_t\Delta}{\Delta}(z_2(k_t\Delta)-z_2((k_t-1)\Delta))\right|^2 \\ &\le\beta^2E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}|\bar{y}(k_t\Delta-[\delta(k_t\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta|^2. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Imajući u vidu ocenu (2.82) i Propoziciju 2.3.2, dobija se

$$\begin{aligned} &E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}|u(\bar{y}_{k_t}(t-\delta(t)))-u(\bar{y}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &\qquad\le\beta^2(3+[\eta])^2E\sup_{-n_*\le k\le M}|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\ &\qquad\le\beta^2(3+[\eta])^2A(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Hölderova nejednakost, uslov ograničenog rasta (1.31) i Propo-zicija 2.3.1 daju

$$\begin{aligned} E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\left|\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}f(z_1(s),z_2(s))ds\right|^2 & \\ \le\Delta E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}|f(z_1(s),z_2(s))|^2ds & \\ \le K\Delta E\sup_{t\in[0,T],k_t\ge0}\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}(1+|z_1(s)|^2+|z_2(s)|^2)ds & \end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\leq K\Delta\int_0^T(1+2E\sup_{t\in[-\tau,T]}|y(t)|^2)ds$$
$$\leq KT(1+2H(2))\Delta.$$

Uvodjenjem oznaka $v=t-\delta(t)$ i $k_v=k_t$ i primenom Hölderove nejednakosti, dobija se

$$E\sup_{t\in[0,T],k_t\geq 0}\left|\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}g(z_1(s),z_2(s))dw(s)\right|^2 \tag{2.97}$$
$$=E\sup_{t\in[0,T],k_v\geq 0}|g(\bar{y}(k_v\Delta),\bar{y}(k_v\Delta-[\delta(k_v\Delta)/\Delta]\Delta))(w(v)-w(k_v))|^2$$
$$\leq\Big(E\sup_{v\in[0,T],k_v\geq 0}|g(\bar{y}(k_v\Delta),\bar{y}(k_v\Delta-[\delta(k_v\Delta)/\Delta]\Delta))|^{\frac{2l}{l-1}}\Big)^{\frac{l-1}{l}}$$
$$\times\Big(E\sup_{v\in[0,T],k_v\geq 0}|w(v)-w(k_v))|^{2l}\Big)^{\frac{1}{l}}.$$

Primenom Doobove martingalne nejednakosti dobija se ocena

$$E\sup_{v\in[0,T],k_v\geq 0}|w(v)-w(k_v))|^{2l} \tag{2.98}$$
$$=E\sup_{0\leq k_v\leq M-1}\ \sup_{v\in[k_v\Delta,(k_v+1)\Delta]}|w(v)-w(k_v))|^{2l}$$
$$\leq\sum_{k_v=0}^{M-1}E\sup_{v\in[k_v\Delta,(k_v+1)\Delta]}|w(v)-w(k_v))|^{2l}$$
$$\leq\left(\frac{2l}{2l-1}\right)^{2l}\sum_{k_v=0}^{M-1}E|w((k_v+1)\Delta)-w(k_v))|^{2l}.$$

Zamenom (2.98) u (2.97) i korišćenjem istog postupka kao u (2.84), sledi

$$E\sup_{t\in[0,T],k_t\geq 0}\left|\int_{k_t\Delta}^{t-\delta(t)}g(z_1(s),z_2(s))dw(s)\right|^2 \tag{2.99}$$
$$\leq\left(\frac{2l}{2l-1}\right)^2\Big(E\sup_{v\in[0,T],k_v\geq 0}|g(\bar{y}(k_v\Delta),\bar{y}(k_v\Delta-[\delta(k_v\Delta)/\Delta]\Delta))|^{\frac{2l}{l-1}}\Big)^{\frac{l-1}{l}}$$
$$\times\Big(\sum_{k_v=0}^{M-1}E|w((k_v+1)\Delta)-w(k_v))|^{2l}\Big)^{\frac{1}{l}}$$
$$\leq\left(\frac{2l}{2l-1}\right)^2B(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}.$$

Zamenom (2.95), (2.96) i (2.99) u (2.93) i imajući u vidu da je $\Delta\in(0,1)$, dobija se

$$E\sup_{t\in[0,T],k_t\geq 0}|y(t-\delta(t))-\bar{y}(k_t\Delta)|^2\leq 3\beta^2(3+[\eta])^2A(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}} \tag{2.100}$$

$$+3KT(1+2H(2))\Delta + 3\left(\frac{2l}{2l-1}\right)^2 B(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}$$
$$\leq R(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},$$

gde je $R(l) = 3\beta^2(3+[\eta])^2 A(l) + 3KT(1+2H(2)) + 3\left(\frac{2l}{2l-1}\right)^2 B(l)$.

Ocene (2.92) i (2.100) impliciraju

$$E \sup_{t\in[0,T]} |y(t-\delta(t)) - \bar{y}(k_t\Delta)|^2 \leq M(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}, \tag{2.101}$$

pri čemu je $M(l) = C_\xi \vee R(l)$.

Prilikom ocenjivanja $E\sup_{t\in[0,T]} |\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t)|^2$ koji figuriše u (2.91), treba imati u vidu definiciju (2.63). Tako je

$$\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t) = \bar{y}(k_t\Delta) - z_2((k-1)\Delta) - \frac{t-k\Delta}{\Delta}(z_2(k\Delta) - z_2((k-1)\Delta)), \tag{2.102}$$

za svako $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$. Na osnovu (2.81) i (2.90) sledi

$$\begin{aligned}
&|\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t)|^2 \\
&\quad \leq 2|\bar{y}(k_t\Delta) - z_2((k-1)\Delta)|^2 + 2|z_2(k\Delta) - z_2((k-1)\Delta)|^2 \\
&\quad = 2|\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad\quad +2|\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad \leq 2\Big((5+[2\eta])^2 + (3+[\eta])^2\Big) \sup_{-n_*\leq i\leq M} |\bar{y}(i\Delta) - \bar{y}((i-1)\Delta)|^2.
\end{aligned}$$

Tada je, na osnovu Propozicije 2.3.2,

$$E \sup_{t\in[0,T]} |\bar{y}(k_t\Delta) - \bar{y}_k(t)|^2 \leq 2\Big((5+[2\eta])^2 + (3+[\eta])^2\Big) A(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}. \tag{2.103}$$

Konačno, primenom ocena (2.101) i (2.103), (2.91) postaje

$$E \sup_{t\in[0,T]} |y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \leq D(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},$$

pri čemu je $D(l) = 2M(l) + 4\Big((5+[2\eta])^2 + (3+[\eta])^2\Big)A(l)$. $\diamondsuit$

Na osnovu navedenih propozicija može se dokazati srednje kvadratna konvergencija Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja y ka rešenju x polazne jednačine (2.58).

Teorema 2.3.1 *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicija 2.3.1, 2.3.2 i 2.3.3. Takodje, neka je ispunjen Lipschitzov uslov (1.30). Tada, za svaki prirodan broj $l > 1$, važi*

$$E \sup_{s\in[-\tau,T]} |x(s) - y(s)|^2 \leq N(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},$$

gde je $N(l)$ konstanta koja zavisi od l, ali ne zavisi od Δ.

Dokaz. Za svako $t \in [0,T]$, iz jednačina (2.58) i (2.66), sledi da je

$$x(t)-y(t) = u(x(t-\delta(t)))-u(z_3(t))-u(\xi(-\delta(0)))+u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ +\int_0^t (f(x(s),x(s-\delta(s))) - f(z_1(s),z_2(s)))ds \\ +\int_0^t (g(x(s),x(s-\delta(s))) - g(z_1(s),z_2(s)))dw(s).$$

Tada se, za proizvoljno $\varepsilon \in (0,1)$, korišćenjem elementarne nejednakosti (1.48), dobija

$$\begin{aligned} &|x(t)-y(t)|^2 \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)))-u(z_3(t))-u(\xi(-\delta(0)))+u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &+\frac{2}{1-\varepsilon}\left(T\int_0^t |f(x(s),x(s-\delta(s))) - f(z_1(s),z_2(s))|^2 ds \right. \\ &\left. +\left|\int_0^t (g(x(s),x(s-\delta(s))) - g(z_1(s),z_2(s)))dw(s)\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Iz uslova (1.32) sledi da je

$$\begin{aligned} &|u(x(t-\delta(t)))-u(z_3(t))-u(\xi(-\delta(0)))+u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)))-u(z_3(t))|^2+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\xi(-\delta(0)))-u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^2 \\ &\le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|x(t-\delta(t))-y(t-\delta(t))|^2+\frac{\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \\ &+\frac{\beta^2}{1-\varepsilon}|\xi(-\delta(0))-\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)|^2, \end{aligned} \tag{2.105}$$

pa je

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)|^2 \le{}& \frac{\beta^2}{\varepsilon^3}|x(t-\delta(t))-y(t-\delta(t))|^2+\frac{\beta^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}|y(t-\delta(t))-z_3(t)|^2 \\ &+\frac{\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|\xi(-\delta(0))-\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\ &+\frac{2}{1-\varepsilon}\left(T\int_0^t |f(x(s),x(s-\delta(s))) - f(z_1(s),z_2(s))|^2 ds \right. \\ &\left. +\left|\int_0^t (g(x(s),x(s-\delta(s))) - g(z_1(s),z_2(s)))dw(s)\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Treba naglasiti da je $\xi(-\delta(0)) = y(-\delta(0))$, na osnovu definicije neprekidnog Euler-Maruyama rešenja y, kao i da važi $\bar{y}(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta) = z_3(0)$. Tada, s obzirom da x i y zadovoljavaju isti početni uslov, na osnovu (2.106), sledi

$$E\sup_{s\in[-\tau,t]}|x(s)-y(s)|^2 \tag{2.107}$$

$$
\begin{aligned}
&\le E \sup_{s\in[0,t]} |x(s)-y(s)|^2 \\
&\le \frac{\beta^2}{\varepsilon^3} E \sup_{s\in[-\tau,t]} |x(s)-y(s)|^2 + \frac{\beta^2(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)} E \sup_{s\in[0,t]} |y(s-\delta(s))-z_3(s)|^2 \\
&\quad + \frac{2}{1-\varepsilon}\left(T\int_0^t E|f(x(s),x(s-\delta(s)))-f(z_1(s),z_2(s))|^2 ds\right. \\
&\quad \left. +4\int_0^t E|g(x(s),x(s-\delta(s)))-g(z_1(s),z_2(s))|^2 ds\right).
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu Propoziciju 2.3.3, izborom $\varepsilon = \beta^{\frac{1}{3}}$, (2.107) postaje

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[-\tau,t]} |x(s)-y(s)|^2 \\
&\quad \le \frac{\beta^{\frac{4}{3}}(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(l)}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} \Delta^{\frac{l-1}{l}} \\
&\quad + \frac{2}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\left(T\int_0^t E|f(x(s),x(s-\delta(s)))-f(z_1(s),z_2(s))|^2 ds\right. \\
&\quad \left. +4\int_0^t E|g(x(s),x(s-\delta(s)))-g(z_1(s),z_2(s))|^2 ds\right).
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Primenom Lipschitzovog uslova, iz (2.108) se dobija

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[-\tau,t]} |x(s)-y(s)|^2 \\
&\quad \le \frac{\beta^{\frac{4}{3}}(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(l)}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} \Delta^{\frac{l-1}{l}} \\
&\quad + \frac{2(T+4)\bar{K}}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} \int_0^t (E|x(s)-z_1(s)|^2 + E|x(s-\delta(s))-z_2(s))|^2) ds.
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

Za $u \in [0,T]$ neka je k_u prirodan broj za koji važi $u \in [k_u\Delta, (k_u+1)\Delta)$. Iz definicije (2.62) stepenastog procesa z_1, primenom istog postupka kao u Slučaju 2 Propozicije 2.3.3, za $s \in [0,t]$ sledi

$$
\begin{aligned}
E|x(s)-z_1(s)|^2 &\le 2E|x(s)-y(s)|^2 + 2E|y(s)-z_1(s)|^2 \\
&\le 2E \sup_{u\in[-\tau,s]} |x(u)-y(u)|^2 + 2E \sup_{u\in[0,s],k_u\ge 0} |y(u)-\bar{y}(k_u\Delta)|^2 \\
&\le 2E \sup_{u\in[-\tau,s]} |x(u)-y(u)|^2 + 2R(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}.
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

Na drugoj strani je

$$
\begin{aligned}
&E|x(s-\delta(s))-z_2(s)|^2 \\
&\le 3E|x(s-\delta(s))-y(s-\delta(s))|^2 + 3E|y(s-\delta(s))-z_3(s)|^2 + 3E|z_3(s)-z_2(s)|^2.
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

Na osnovu definicija (2.62) i (2.65), važi

$$
z_3(s)-z_2(s) = z_2((k-1)\Delta) + \frac{s-k\Delta}{\Delta}(z_2(k\Delta)-z_2((k-1)\Delta)) - z_2(k\Delta),
$$

za svako $s \in [k\Delta, (k+1)\Delta), k = 0, 1, ..., M-1$. Ova činjenica, zajedno sa ocenom (2.82) i Propozicijom 2.3.2, implicira

$$
\begin{aligned}
&E|z_3(s)-z_2(s)|^2 \qquad (2.112)\\
&\leq 4E|z_2(k\Delta)-z_2((k-1)\Delta))|^2\\
&\leq 4E \sup_{1\leq k\leq M} |\bar{y}((k-1)\Delta)-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta)-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\leq 4(3+[\eta])^2 A(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}\\
&\equiv G(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}}, \quad s \in [k\Delta, (k+1)\Delta), k = 0, 1, ..., M-1.
\end{aligned}
$$

gde je $G(l) = 4(3+[\eta])^2 A(l)$.

Zamenom (2.112) u (2.111) i primenom Propozicije 2.3.3, dobija se

$$
E|x(s-\delta(s))-z_2(s)|^2 \leq 3E \sup_{u\in[-\tau,s]} |x(u)-y(u)|^2 + 3(D(l)+G(l))\Delta^{\frac{l-1}{l}}. \quad (2.113)
$$

Ocene (2.110) i (2.113), zajedno sa (2.109), daju

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[-\tau,t]} |x(s)-y(s)|^2\\
&\qquad \leq \frac{\beta^{\frac{4}{3}}(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(l) + 2(T+4)T\bar{K}(2R(l)+3(D(l)+G(l)))}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta^{\frac{l-1}{l}}\\
&\qquad +\frac{10(T+4)\bar{K}}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t E \sup_{u\in[-\tau,s]} |x(u)-y(u)|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme se dobija

$$
E \sup_{s\in[-\tau,t]} |x(s)-y(s)|^2 \leq N(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},\ t \in [0,T]
$$

gde je $N(l) = \frac{\beta^{\frac{4}{3}}(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(l)+2(T+4)T\bar{K}\left(2R(l)+3(D(l)+G(l))\right)}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} e^{M_1 T}, M_1 = \frac{10(T+4)T\bar{K}}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}$.

Odatle je

$$
E \sup_{s\in[-\tau,T]} |x(s)-y(s)|^2 \leq N(l)\Delta^{\frac{l-1}{l}},
$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Napomena 2.3.1 *U slučaju funkcionalnih diferencijalnih jednačina, kao i stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem, red srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja je* $1/2$ *(videti [56, 60]). Kod neutralnih funkcionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, dobijen je manji red srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja što se može videti u radu [91]. Teoremom 2.3.1 je dokazano da je red srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja ka rešenju polazne jednačine, blizak* $1/2$. *Preciznije, red konvergencije teži ka* $1/2$ *kada* l *teži beskonačnosti. Medjutim, kako važi* $N(l) \to \infty, \quad l \to \infty$, *to se ne može uzeti da* $l \to \infty$ *kako bi se dobio red konvergencije* $1/2$. *Ipak, Teorema 2.3.1 daje mogućnost izbora proizvoljnog* $\varepsilon > 0$, *za koje se može naći* $l \geq 1/\varepsilon$ *tako da važi*

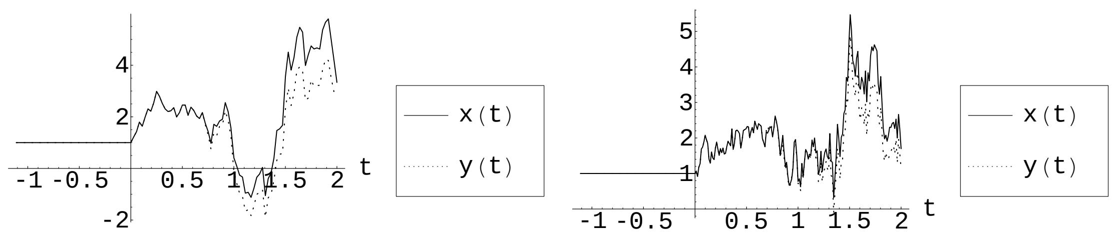
$$
E \sup_{s\in[-\tau,T]} |x(s)-y(s)|^2 \leq O(\Delta^{1-\varepsilon}).
$$

Prethodno razmatranje će biti zaokruženo sledećim primerom koji ilustruje teorijske rezultate vezane za bliskost tačnog rešenja i Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja.

Primer 2.3.1 *Za* $\tau = 10/9$, *neka je* δ *funkcija kašnjenja definisana sa* $\delta(t) = 0.25t + 0.5$, $t \in [0, 2]$. *Lako je uočiti da takva funkcija zadovoljava pretpostavku* $\mathcal{A}_2$ *za* $\eta = 0.25$ *i uz to važi* $0 \leq \delta(t) \leq \tau$, $t \in [0, 2]$. *Polazna jednačina je neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem*

$$d[x(t) - 0.25x(0.75t - 0.5)] = x(t)dt - 2x(0.75t - 0.5)dw(t), \quad t \in [0, 2], \tag{2.114}$$

sa početnim uslovom $x_0 = \xi$, *gde je* $\xi(\theta) = 1, \theta \in [-10/9, 0]$. *Očigledno, koeficijenti ove jednačine zadovoljavaju uslove (1.30) i (1.31), dok* $u(x) = 0.25x$ *zadovoljava uslove (1.32) i (1.33) za* $\beta = 0.25$. *Dakle, postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.114). Pored toga, zadovoljen je uslov* $\beta(3 + [\eta]) < 1$, *koji je neophodan za dokaz bliskosti tačnog i aproksimativnog Euler-Maruyama rešenja.*



Slika 2.2: Tačno rešenje i Euler-Maruyama rešenje za $\Delta = 3^{-3}$ (levo); $\Delta = 3^{-4}$ (desno)

Činjenica da $x(0.75t - 0.5)$ *figuriše u jednačini (2.114) nameće rešavanje ove jednačine u nekoliko koraka, pri čemu u svakom koraku taj izraz mora biti poznat na osnovu prethodnih koraka. U tom smislu, prvo se odredjuju one vrednosti* $t \in [0, 2]$ *za koje se* $x(0.75t - 0.5)$ *podudara sa početnim uslovom. S obzirom da je* $0.75t - 0.5 \leq 0$, $t \in [0, 2/3]$, *to je* $x(0.75t - 0.5) = \xi(0.75t - 0.5) = 1$, $t \in [0, 2/3]$. *Dakle, na osnovu (2.114), sledi*

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds - 2w(t), \quad t \in [0, 2/3], \tag{2.115}$$

što predstavlja integralni oblik linearne stohastičke diferencijalne jednačine koja je eksplicitno rešiva. Za $t \in [2/3, 14/9]$, $x(0.75t - 0.5)$ *je već odredjeno rešavanjem jednačine (2.115), pa je*

$$\begin{aligned} x(t) = {} & 0.25\, x(0.75t - 0.5) + x(2/3) - 0.25\, \xi(0) \\ & + \int_{2/3}^t x(s)ds - 2\int_{2/3}^t x(0.75s - 0.5)dw(s), \quad t \in [2/3, 14/9]. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Konačno, za $t \in [14/9, 2]$, $x(0.75t - 0.5)$ *je poznato na osnovu (2.116), što omogućava rešavanje jednačine*

$$x(t) = 0.25\, x(0.75t - 0.5) + x(14/9) - 0.25\, x(2/3) \tag{2.117}$$

$$+\int_{14/9}^{t} x(s)ds - 2\int_{14/9}^{t} x(0.75s-0.5)dw(s), \quad t\in[14/9,2].$$

Da bi se ilustrovala konvergencija Euler-Maruyama rešenja, simuliran je veliki broj trajektorija za različit izbor veličine koraka Δ*. Na Slici 2.2 prikazan je grafik tačnog rešenja jednačine (2.114), dobijenog rešavanjem jednačina (2.115), (2.116) i (2.117), zajedno sa odgovarajućim Euler-Maruyama aproksimativnim rešenjem* $\{y(t), t\in[-10/9,2]\}$*, za* $\Delta = 3^{-3}$ *i* $\Delta = 3^{-4}$.

Glava 3

Taylorov pristup aproksimaciji rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina

Postoji više kriterijuma za uporedjivanje metoda aproksimacija rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina. Medju najvažnijim su mogućnost jednostavne implementacije i red konvergencije niza aproksimativnih rešenja. Razmatranja u Glavi 2 pokazuju da je red srednje kvadratne konvergencije Euler-Maruyama rešenja u najboljem slučaju jednak $1/2$. Iz tog razloga, postoji velika motivacija za razvojem drugih aproksimativnih metoda, numeričkih i analitičkih, čiji je red konvergencije veći u odnosu na red konvergencije koji obezbedjuje pomenuta metoda. Neophodno je istaći da se nizak red konvergencije Euler-Maruyama metode kompenzuje činjenicom da je ta metoda eksplicitna, jednostavno se implementira, a za srednje kvadratnu konvergenciju niza aproksimativnih rešenja najčešće su dovoljni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Poznato je iz realne analize da se vrednost funkcije u tački utoliko bolje aproksimira, ukoliko je veći broj članova u Taylorovom razvoju funkcije u okolini date tačke. U tom smislu se može smatrati da kod Euler-Maruyama metode odgovarajuće aproksimativno rešenje zadovoljava jednačinu čiji su koeficijenti Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine, zaključno sa izvodima reda 0. Tako se javila ideja da se definisanjem aproksimativnog rešenja tako da zadovoljava jednačinu čiji su koeficijenti Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine zaključno sa izvodima proizvoljnog reda, može postići veći red konvergencije niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju, nego u slučaju Euler-Maruyama metode. Taylorov pristup aproksimaciji rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina prisutan je kako u numeričkim, tako i u analitičkim metodama. Rezultati iz oblasti numeričkih aproksimacija koji se baziraju na Taylorovim aproksimacijama se mogu naći, na primer, u knjizi Kloedena i Platena [42] i radovima Kloedena i Jentzena [37, 44], dok su odgovarajuće analitičke metode razmatrane u radovima Atalle [3, 4], S. Janković, D. Ilić [35, 36] i J. Baoa [9].

3.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Osnovna motivacija za uvodjenje aproksimativnih metoda koji će u nastavku biti razmatrani, proistekla je iz radova M.A. Atalle [3, 4] i S. Janković , D. Ilić [35, 36]. Naime, u radu [3], rešenje $x = \{x(t), t \in [0,1]\}$ obične stohastičke diferencijalne jednačine

$$dx(t) = a(x(t),t)dt + b(x(t),t)dw(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x_0,$$

je aproksimirano procesima $x_n = \{x_n(t), t \in [0,1]\}, n \in N$, sukcesivnim povezivanjem rešenja $x_n = \{x_n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0,1,...,n-1$ jednačina

$$dx_n(t) = a(x_n(t_k),t)dt + b(x_n(t_k),t)dw(t), t \in [t_k, t_{k+1}], \quad x_n(0) = x_0$$

u tačkama t_k proizvoljne particije $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ vremenskog intervala $[0,1]$. Red L^p-konvergencije, $p \geq 2$, ove metode je $O(\delta_n^{p/2})$ kada $n \to \infty$ i $\delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1}(t_{k+1} - t_k) \to 0$.

U radu [4], rezultat iz [3] je poboljšan na taj način što su aproksimativna rešenja definisana tako da zadovoljavaju sledeće linearne stohastičke diferencijalne jednačine u kojima su koeficijenti prenosa i difuzije Taylorove aproksimacije funkcija $a(x,t)$ i $b(x,t)$, do prvog izvoda po x,

$$\begin{aligned} dx_n(t) = {} & [a(x_n(t_k),t) + a'_x(x_n(t_k),t)(x_n(t) - x_n(t_k))]dt \\ & +[b(x_n(t_k),t) + b'_x(x_n(t_k),t)(x_n(t) - x_n(t_k))]dw(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

pri čemu je $x_n(0) = x_0, k = 0,1,...,n-1$. U ovom slučaju je red L^p-konvergencije $O(\delta_n^p)$ kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$.

Imajući u vidu da Taylorove aproksimacije mogu biti korisno sredstvo za analitičku ili numeričku aproksimaciju koeficijenata stohastičkih diferencijalnih jednačina, Atallin pristup iz [4] je uopšten u radu [35] u smislu da su koeficijenti prenosa i difuzije Taylorove aproksimacije funkcija $a(x,t)$ i $b(x,t)$ zaključno sa m_1-im i m_2-im izvodom, respektivno. Bliskost tačnog i aproksimativnog rešenja u L^p-smislu je, u ovom slučaju, reda $O(\delta_n^{(m+1)p/2})$ kada $n \to \infty$ i $\delta_n \to 0$, pri čemu je $m = \min\{m_1, m_2\}$. U radu [36], ova ideja je proširena na stohastičke integrodiferencijalne jednačine.

Sledeći koncept iz radova [3, 35], nastali su rezultati koji će biti navedeni u Poglavljima 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5, pri čemu je tehnika koja se koristi u dokazima potpuno drugačija u odnosu na onu u pomenutim radovima, a uslovljena je prirodom samih jednačina koje se razmatraju.

3.2 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju će rešenje stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (1.16) biti aproksimirano nizom rešenja stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, čiji su koeficijenti Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine do proizvoljnih izvoda po x. S obzirom da su koeficijenti f i g jednačine (1.16) funkcionali, za dokazivanje bliskosti aproksimativnog i tačnog rešenja je neophodno korišćenje Fréchetovih izvoda, kao i opšte Taylorove formule. U tom smislu će biti navedeni sledeći pojmovi i rezultati koji se mogu naći, na primer, u [26, 32].

Definicija 3.2.1 *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem skalara. Za preslikavanje $T : V^k \to W$ se kaže da je multi-linearno ako je linearno po svakom argumentu, tj. ako važi*

$$\begin{aligned} T(v_1, ..., v_{i-1}, a_i v_i + u_i, v_{i+1}, ..., v_k) = a_i T(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_k) \\ + T(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, ..., v_k) \end{aligned}$$

za svako $1 \leq i \leq k$ i sve skalare a_i, kao i za svako $v_i, u_i \in V$. Neka je sa $\mathcal{T}(V^k \to W)$ označen skup svih multi-linearnih preslikavanja $T : V^k \to W$, koji na uobičajen način generiše odgovarajući vektorski prostor.

Definicija 3.2.2 *Neka su V i W Banachovi prostori i neka je D otvoreni podskup od V. Za preslikavanje $T : D \to W$ se kaže da je Fréchet-diferencijabilno u tački $x \in D$ ako postoji ograničen linearan operator $A \in \mathcal{L}(V \to W)$ za koji važi*

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||T(x+h) - T(x) - A(h)||}{||h||} = 0.$$

Operator A se naziva Fréchetov izvod preslikavanja T u tački x i označava se sa $T'_{(x)}$. Ako je preslikavanje $T : D \to W$ Fréchet diferencijabilno na skupu D, tada su, Fréchetovi izvodi višeg reda u tački x, koji se označavaju sa $T^{(2)}_{(x)}, T^{(3)}_{(x)}, ..., T^{(k)}_{(x)}$, multi-linearna preslikavanja iz V u W. Navedene činjenice nameću prirodnu identifikaciju prostora $\mathcal{L}(V \to \mathcal{T}(V^k \to W))$ i $\mathcal{T}(V^{k+1} \to W)$, tj. $\mathcal{L}(V \to \mathcal{T}(V^k \to W) = \mathcal{T}(V^{k+1} \to W)$. Naime, prostori $\mathcal{L}(V \to \mathcal{T}(V^k \to W))$ i $\mathcal{T}(V^{k+1} \to W)$ su izometrični.

Teorema 3.2.1 *Neka je D konveksan podskup Banachovog prostora V i neka je T proizvoljno $n+1$ puta Fréchet-diferencijabilno preslikavanje na D. Ako x i $x+h$ pripadaju D, tada je*

$$T(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^{(k)}_{(x)} (\underbrace{h, ..., h}_{k}) + W(x, h) \tag{3.1}$$

Taylorov razvoj preslikavanja T u okolini tačke x, pri čemu je Lagrangeov oblik ostatka $W(x, h)$, za neko $t \in (0, 1)$

$$W(x, h) = \frac{1}{(n+1)!} T^{(n+1)}_{(x+th)} (\underbrace{h, ..., h}_{n+1}) \tag{3.2}$$

i pritom važi

$$||W(x, h)|| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,1]} ||T^{(n+1)}_{(x+th)}|| \cdot ||h||^{n+1}. \tag{3.3}$$

Imajući u vidu prethodno navedene rezultate, kao i činjenicu da je u stohastičkim funkcionalnim diferencijalnim jednačinama prisutna zavisnost od prošlosti, dokazi tvrdjenja koja će biti navedena u nastavku su potpuno drugačiji od onih u [35, 36], iako je osnovna ideja ista. Rezultati u nastavku ovog poglavlja su objavljeni u radu M. Milošević, M. Jovanović, S. Janković [71].

Integralni oblik stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (1.16) je

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(x_s, s)\, dw(s), \quad t \in [t_0, T] \tag{3.4}$$

sa početnim uslovom $x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]$. Neka je

$$t_0 < t_1 < ... < t_n = T \tag{3.5}$$

ekvidistantna particija intervala $[t_0, T]$, pri čemu je

$$t_k = t_0 + \frac{k}{n}(T - t_0), \quad k = 0, 1, ..., n$$

i za dovoljno veliko $n \in N$ važi $\delta_n = (T - t_0)/n \in (0, 1)$.

Rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ jednačine (3.4) se aproksimira na particiji (3.5) rešenjima $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{f^{(i)}_{(x^n_{t_k}, s)}(x^n_s - x^n_{t_k}, ..., x^n_s - x^n_{t_k})}{i!}\, ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{g^{(i)}_{(x^n_{t_k}, s)}(x^n_s - x^n_{t_k}, ..., x^n_s - x^n_{t_k})}{i!}\, dw(s),\ t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned} \tag{3.6}$$

sa početnim uslovima $x_{t_0} = \xi,\ x^n_{t_k} = \{x^n(t_k + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\},\ k = 1, 2, \ldots, n-1$. Koeficijenti prenosa i difuzije jednačine (3.6) su Taylorove aproksimacije koeficijenata f i g jednačine (3.4) po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n_{t_k}$, zaključno sa m_1-im i m_2-im Fréchetovim izvodom, respektivno.

Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ se dobija kao s.i. neprekidan proces, sukcesivnim povezivanjem početnog uslova $\xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ i procesa $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama particije $t_k,\ k = 0, 1, ..., n-1$.

Pored Lipschitzovog uslova (1.18) i uslova ograničenog rasta (1.19), uvode se sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcionali f i g imaju Taylorov razvoj po prvom argumentu, zaključno sa m_1-im i m_2-im Fréchetovim izvodom, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Funkcionali $f^{(m_1+1)}_{(x,t)}$ i $g^{(m_2+1)}_{(x,t)}$ su uniformno ograničeni, tj. postoje pozitivne konstante $L_1, L_2 > 0$, tako da važi

$$\sup_{C([-\tau,0];R^d)\times[t_0,T]} ||f^{(m_1+1)}_{(x,t)}(h, ..., h)|| \le L_1 \cdot ||h||^{m_1+1},$$
$$\sup_{C([-\tau,0];R^d)\times[t_0,T]} ||g^{(m_2+1)}_{(x,t)}(h, ..., h)|| \le L_2 \cdot ||h||^{m_2+1}.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoje jedinstvena, s.i. neprekidna rešenja x i x^n jednačina (3.4) i (3.6), respektivno, tako da, za $p \geq 2$ važi

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t)|^p < \infty, \qquad E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x^n(t)|^{(M+1)^2 p} \leq Q < \infty,$$

gde je $M = \max\{m_1, m_2\}$ i $Q > 0$ je konstanta, nezavisna od n. Pored toga, neka je $E||\xi||^{(M+1)^2 p} < \infty$ i neka su svi Lebesgueovi i Itovi integrali, koji se javljaju u nastavku, dobro definisani.

$\mathcal{A}_4$: Početni uslov (1.17) je uniformno Lipschitz-neprekidan, tj. postoji konstanta $\beta > 0$ tako da, za svako $-\tau \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0$, važi

$$|\xi(\theta_2) - \xi(\theta_1)| \leq \beta\, |\theta_2 - \theta_1|.$$

U predstojećoj diskusiji će nekoliko puta, bez posebnog isticanja, biti primenjivana elementarna nejednakost (1.46), Hölderova nejednakost na Lebesgueove integrale i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost na integrale Itoa.

Pre ocenjivanja bliskosti rešenja x i x^n, biće naveden sledeći rezultat koji je neophodan za dokazivanje glavnog rezultata.

Propozicija 3.2.1 *Neka su $\{x^n(t), t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, rešenja jednačina (3.6). Ako važi uslov ograničenog rasta (1.19) i pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, tada je, za svako $2 \leq r \leq (M+1)p$,*

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \leq C \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

gde je C generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Zbog pojednostavljenja zapisa, uvode se oznake

$$F(x_t^n, t; x_{t_k}^n) = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{f^{(i)}_{(x_{t_k}^n, t)}(x_t^n - x_{t_k}^n, ..., x_t^n - x_{t_k}^n)}{i!},$$
$$G(x_t^n, t, x_{t_k}^n) = \sum_{i=0}^{m_2} \frac{g^{(i)}_{(x_{t_k}^n, t)}(x_t^n - x_{t_k}^n, ..., x_t^n - x_{t_k}^n)}{i!}.$$

Tada, imajući u vidu pretpostavku $\mathcal{A}_1$, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., n-1$ i neko $\bar{\theta} \in (0, 1)$, važi

$$f(x_t^n, t) = F(x_t^n, t; x_{t_k}^n) + \frac{f^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n + \bar{\theta}(x_t^n - x_{t_k}^n), t)}(x_t^n - x_{t_k}^n, ..., x_t^n - x_{t_k}^n)}{(m_1+1)!}, \tag{3.7}$$
$$g(x_t^n, t) = G(x_t^n, t; x_{t_k}^n) + \frac{g^{(m_2+1)}_{(x_{t_k}^n + \bar{\theta}(x_t^n - x_{t_k}^n), t)}(x_t^n - x_{t_k}^n, ..., x_t^n - x_{t_k}^n)}{(m_2+1)!}.$$

Za ocenjivanje $E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r$, neophodno je primeniti prethodno pomenutu elementarnu nejednakost na jednačinu (3.6), a zatim Hölderovu nejednakost na Lebesgueov integral, kao i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost na integral Itoa, za $r > 2$, odnosno nejednakost Dooba za $r = 2$. Na taj način se, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., n-1$, dobija

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r &\leq 2^{r-1}(t-t_k)^{r-1} \int_{t_k}^t E|F(x_s^n, x_{t_k}^n, s)|^r \, ds \\ &\quad + 2^{r-1} c_r (t-t_k)^{\frac{r}{2}-1} \int_{t_k}^t E|G(x_s^n, x_{t_k}^n, s)|^r ds \\ &\equiv 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\Big[(t-t_k)^{\frac{r}{2}} J_1(t) + c_r J_2(t)\Big], \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde je c_r univerzalna konstanta iz Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti, dok su $J_1(t)$ i $J_2(t)$ odgovarajući integrali. Na osnovu Taylorovog razvoja (3.7), uslova linearnog rasta (1.19) i pretpostavki $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$, integral $J_1(t)$ se može oceniti na sledeći način

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_{t_k}^t E|f(x_s^n, s) - [f(x_s^n, s) - F(x_s^n, x_{t_k}^n, s)]|^r ds \\ &\equiv \int_{t_k}^t E \left| f(x_s^n, s) - \frac{f^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n + \bar\theta(x_s^n - x_{t_k}^n), s)}(x_s^n - x_{t_k}^n, ..., x_s^n - x_{t_k}^n)}{(m_1+1)!} \right|^r ds \\ &\leq 2^{r-1}\left[K^r \int_{t_k}^t E|f(x_s^n, s)|^r ds + \frac{L_1^r}{[(m_1+1)!]^r} \int_{t_k}^t E||x_s^n - x_{t_k}^n||^{(m_1+1)r} ds\right] \\ &\leq 2^{r-1}\Bigg[K^r 2^{r-1} \int_{t_k}^t (1 + E||x_s^n||^r) \, ds \\ &\quad + \frac{L_1^r}{[(m_1+1)!]^r} 2^{(m_1+1)r-1} \int_{t_k}^t \Big(E||x_s^n||^{(m_1+1)r} + E||x_{t_k}^n||^{(m_1+1)r}\Big) \, ds\Bigg] \\ &\leq 2^{2r-1}\left[K^r(2+Q)(t-t_k) + 2^{(m_1+1)r} \frac{(1+Q)L_1^r}{[(m_1+1)!]^r}(t-t_k)\right] \\ &\equiv C_1(t-t_k), \end{aligned}$$

gde je $\bar\theta \in (0,1)$ i $C_1 \equiv C_1(K, L_1, Q, r, m_1)$ je generisana konstanta.

Na sličan način se dobija

$$J_2(t) \leq C_2(t-t_k),$$

pri čemu je $C_2 \equiv C_2(K, L_2, Q, r, m_2)$ generisana konstanta. Na taj način, (3.8) postaje

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r &\leq 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}}\Big[C_1(T-t_k)^{\frac{r}{2}} + c_r C_2\Big] \\ &\leq C(t-t_k)^{\frac{r}{2}} \\ &\leq C \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

gde je C generisana konstanta, nezavisna od n. $\diamondsuit$

Za dokazivanje narednog tvrdjenja, od značaja je da particija intervala $[t_0, T]$ bude ekvidistantna. Zbog toga, za svake dve tačke $t, s \in [t_k, t_{k+1}]$, tačke $t-\tau$ i $s-\tau$ pripadaju istom intervalu $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ili intervalu $[t_0 - \tau, t_0]$.

Propozicija 3.2.2 *Ako su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.2.1 i pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada je, za svako $2 \leq r \leq (M+1)p$,*

$$E||x_t^n - x_{t_k}^n||^r \leq B \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

gde je B generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Za dokazivanje ovog tvrdjenja, neophodno je podeliti diskusiju u tri slučaja.

Slučaj 1. Ako je $t - \tau < t_0$, tada se procesi $x_t^n = \{x^n(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ i $x_{t_k}^n = \{x^n(t_k+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ podudaraju sa početnim uslovom za neke vrednosti $\theta \in [-\tau, 0]$. U skladu sa normom na prostoru $C([-\tau, 0]; R^d)$, dobija se

$$\begin{aligned}
E||x_t^n - x_{t_k}^n||^r &= E \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |x^n(t+\theta) - x^n(t_k+\theta)|^r \\
&= E \sup_{u \in [t_k - \tau, t_k]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(u)|^r \\
&\leq E \sup_{u \in [t_k - \tau, t_0 + t_k - t]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(u)|^r \\
&\quad + E \sup_{u \in [t_0 + t_k - t, t_0]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(u)|^r \\
&\quad + E \sup_{u \in [t_0, t_k]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(u)|^r.
\end{aligned}$$

Prvi sabirak se odnosi na slučaj kada je $u+t-t_k \leq t_0$ i $u \leq t_0$, drugi, za $u+t-t_k \geq t_0$ i $u \leq t_0$, dok se treći sabirak odnosi na slučaj kada je $u+t-t_k \geq t_0$ i $u \geq t_0$. Na osnovu toga, sledi

$$\begin{aligned}
E||x_t^n - x_{t_k}^n||^r \leq\; & E \sup_{u \in [t_k - \tau, t_0 + t_k - t]} |\xi(u+t-t_k-t_0) - \xi(u-t_0)|^r \\
& + E \sup_{u \in [t_0 + t_k - t, t_0]} |x^n(u+t-t_k) - \xi(u-t_0)|^r \\
& + E \sup_{u \in [t_0, t_k]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(u)|^r \\
\equiv\; & (A_1 + A_2 + A_3).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ocena sabirka A_1 se dobija na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_4$, tj. na osnovu Lipschitz-neprekidnosti početnog uslova

$$A_1 \leq \beta^r (T - t_0)^{\frac{r}{2}}\, n^{-r/2}. \tag{3.10}$$

Prilikom ocenjivanja sabirka A_2, koristi se činjenica da je $u+t-t_k \in [t_0, t_1]$ kada je $u \leq t_0$, što sledi na osnovu izbora particije. Takodje se koriste Propozicija 3.2.1 i pretpostavka $\mathcal{A}_4$. U tom smislu je

$$\begin{aligned}
A_2 &\leq 2^{r-1} \Big[E \sup_{u \in [t_0 + t_k - t, t_0]} |x^n(u+t-t_k) - x^n(t_0)|^r \\
&\quad + E \sup_{u \in [t_0 + t_k - t, t_0]} |\xi(0) - \xi(u-t_0)|^r \Big] \\
&\leq 2^{r-1} \left[C + \beta^r (T - t_0)^{\frac{r}{2}} \right] n^{-r/2}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Za ocenjivanje sabirka A_3 potrebno je najpre uočiti da postoji indeks $i \in \{0, ..., k\}$ i $v \in [t_i, t_{i+1}]$, tako da je $A_3 = E|x^n(v + t - t_k) - x^n(v)|^r$. Dalje razmatranje se deli na dva slučaja.

Prvo, neka je $t_i \leq v \leq v + t - t_k \leq t_{i+1}$. Imajući u vidu Propoziciju 3.2.1, dobija se

$$\begin{aligned} A_3 &\leq 2^{r-1} \left[E|x^n(v + t - t_k) - x^n(t_i)|^r + E|x^n(v) - x^n(t_i)|^r \right] \\ &\leq 2^r C\, n^{-r/2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Drugo, neka je $t_i \leq v \leq t_{i+1} \leq v + t - t_k \leq t_{i+2}$. Tada, na osnovu Propozicije 3.2.1, sledi

$$\begin{aligned} A_3 \leq\; & 3^{r-1} \left[E|x^n(v + t - t_k) - x^n(t_{i+1})|^r + E|x^n(t_{i+1}) - x^n(t_i)|^r \right. \\ & \left. + E|x^n(v) - x^n(t_i)|^r \right] \\ \leq\; & 3^r C\, n^{-r/2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Na taj način (3.10), (3.11), (3.12) i (3.13), zajedno sa (3.9), impliciraju

$$E||x^n_t - x^n_{t_k}||^r \leq B\, n^{-r/2},$$

gde je B generisana konstanta, nezavisna od n.

Slučaj 2. Ako je $t_k - \tau < t_0 \leq t - \tau$, tada se samo proces $x^n_{t_k} = \{x^n(t_k + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ podudara sa početnim uslovom za neke vrednosti $\theta \in [-\tau, 0]$. Na sličan način kao u Slučaju 1 se dobija

$$\begin{aligned} E||x^n_t - x^n_{t_k}||^r &\leq E \sup_{u \in [t_k - \tau, t_0]} |x^n(u + t - t_k) - x^n(u)|^r \\ &\quad + E \sup_{u \in [t_0, t_k]} |x^n(u + t - t_k) - x^n(u)|^r \\ &\leq (A_2 + A_3) \\ &\leq B\, n^{-r/2}. \end{aligned}$$

Slučaj 3. Ako je $t_k - \tau \geq t_0$ tada je, imajući u vidu Slučaj 1,

$$\begin{aligned} E||x^n_t - x^n_{t_k}||^r &\leq E \sup_{u \in [t_0, t_k]} |x^n(u + t - t_k) - x^n(u)|^r \\ &= A_3 \\ &\leq B\, n^{-r/2}. \end{aligned}$$

Na taj način je dato tvrdjenja dokazano. $\diamondsuit$

Na osnovu Propozicija 3.2.1 i 3.2.2, može se dokazati glavni rezultat, tj. konvergencija u L^p smislu niza aproksimativnih rešenja $\{x^n, n \in N\}$ ka rešenju x jednačine (3.4). To se može zaključiti na osnovu sledeće teoreme kojom se odredjuje red bliskosti rešenja x i x^n.

Teorema 3.2.2 *Neka je x rešenje jednačine (3.4) i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje, odredjeno jednačinama (3.6). Ako su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.2.2 i Lipschitzov uslov (1.18), tada je, za svako $p \geq 2$,*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t)-x^n(t)|^p \leq H\cdot n^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m=\min\{m_1,m_2\}$ i H je generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t\in[t_0,T]$, na osnovu (3.4) i (3.6), sledi

$$\begin{aligned} x(t)-x^n(t) &= \int_{t_0}^t \sum_{k:t_k\leq t} [f(x_s,s)-F(x^n_s,s;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1})}(s)\,ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sum_{k:t_k\leq t} [g(x_s,s)-G(x^n_s,s;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1})}(s)\,dw(s). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Kako x i x^n zadovoljavaju isti početni uslov, to je

$$\begin{aligned} &E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \\ &\quad \leq E\sup_{s\in[t_0-\tau,t_0]}|x(s)-x^n(s)|^p + E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \\ &\quad = E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \\ &\quad \leq 2^{p-1}E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^s\sum_{k:t_k\leq s}[f(x_u,u)-F(x^n_u,u;,x^n_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1})}(u)\,du\Big|^p \\ &\qquad +2^{p-1}E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^s\sum_{k:t_k\leq s}[g(x_u,u)-G(x^n_u,u;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1})}(u)\,dw_u\Big|^p \\ &\quad \leq 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}E\int_{t_0}^t\Big|\sum_{k:t_k\leq t}[f(x_u,u)-F(x^n_u,u;x^n_{t_k}))I_{[t_k,t_{k+1})}(u)\Big|^p du \\ &\qquad +c_p2^{p-1}(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}E\int_{t_0}^t\Big|\sum_{k:t_k\leq t}[g(x_u,u)-G(x^n_u,u;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1})}(u)\Big|^p du. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Neka je $j=\max\{i\in\{0,1,2,...,n-1\},\ t_i\leq t\leq T\}$ i neka je

$$J_{t_k,t}(u)=[f(x_u,u)-F(x^n_u,u;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t)}(u),$$

$$\tilde{J}_{t_k,t}(u)=[g(x_u,u)-G(x^n_u,u;x^n_{t_k})]I_{[t_k,t)}(u).$$

Tada se (3.15) može izraziti u obliku

$$\begin{aligned} E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p &\leq 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\int_{t_0}^t E\Big|\sum_{k=0}^{j-1}J_{t_k,t_{k+1}}(u)+J_{t_j,t}(u)\Big|^p du \\ &\quad +2^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^t E\Big|\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}}(u)+\tilde{J}_{t_j,t}(u)\Big|^p du. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{j-1} J_{t_k,t_{k+1}}(u) + J_{t_j,t}(u) = \begin{cases} f(x_u,u) - F(x_u^n, u; x_{t_k}^n), & u \in [t_k, t_{k+1}), \\ \\ f(x_u,u) - F(x_u^n, u; x_{t_j}^n), & u \in [t_j, t), \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{j-1} \tilde{J}_{t_k,t_{k+1}}(u) + \tilde{J}_{t_j,t}(u) = \begin{cases} g(x_u,u) - G(x_u^n, u, x_{t_k}^n), & u \in [t_k, t_{k+1}), \\ \\ g(x_u,u) - G(x_u^n, u; x_{t_j}^n), & u \in [t_j, t), \end{cases}$$

za $k = 0, 1, ..., j-1$, izraz (3.16) postaje

$$\begin{aligned} & E \sup_{s \in [t_0 - \tau, t]} |x(s) - x^n(s)|^p \qquad (3.17) \\ & \le 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\Big| f(x_u,u) - F(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\Big|^p du \\ & \quad + 2^{p-1}(T-t_0)^{p-1} \int_{t_j}^{t} E\Big| f(x_u,u) - F(x_u^n, u; x_{t_j}^n)\Big|^p du \\ & \quad + 2^{p-1} c_p (T-t_0)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\Big| g(x_u,u) - G(x_u^n, u; x_{t_k}^n)\Big|^p du \\ & \quad + 2^{p-1} c_p (T-t_0)^{\frac{p}{2}-1} \int_{t_j}^{t} E\Big| g(x_u,u) - G(x_u^n, u; x_{t_j}^n)\Big|^p du. \end{aligned}$$

Na osnovu Lipschitzovog uslova (1.18), pretpostavke $\mathcal{A}_2$ i Propozicije 3.2.2, sledi

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t} E|f(x_u,u) - F(x_u^n, u; x_{t_k}^n)|^p\, du \qquad (3.18) \\ & \le 2^{p-1}\left[\int_{t_k}^{t} E|f(x_u,u) - f(x_u^n,u)|^p du + \int_{t_k}^{t} E|f(x_u^n,u) - F(x_u^n, u; x_{t_k}^n)|^p du \right] \\ & \le 2^{p-1} K^p \int_{t_k}^{t} E||x_u - x_u^n||^p\, du \\ & \quad + 2^{p-1} \int_{t_k}^{t} E \left|\left| \frac{f^{(m_1+1)}_{(x_{t_k}^n + \bar{\theta}(x_u^n - x_{t_k}^n), u)}(x_u^n - x_{t_k}^n, ..., x_u^n - x_{t_k}^n)}{(m_1+1)!} \right|\right|^p du \\ & \le 2^{p-1}\left[K^p \int_{t_k}^{t} E||x_u - x_u^n||^p du + \frac{L_1^p}{[(m_1+1)!]^p} \int_{t_k}^{t} E||x_u^n - x_{t_k}^n||^{(m_1+1)p} du \right] \\ & \le 2^{p-1}\left[K^p \int_{t_k}^{t} E||x_u - x_u^n||^p\, du + \frac{L_1^p B}{[(m_1+1)!]^p}\, n^{-(m_1+1)p/2}(t - t_k) \right], \end{aligned}$$

kada je $k = 0, 1, ..., j$ i $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Analogno se dobija

$$\int_{t_k}^{t} E|g(x_u,u) - G(x_u^n, u; x_{t_k}^n)|^p\, du \qquad (3.19)$$

$$\leq 2^{p-1}\left[K^p\int_{t_k}^t E||x_u-x_u^n||^p\,du+\frac{L_2^pB}{[(m_2+1)!]^p}\,n^{-(m_2+1)p/2}(t-t_k)\right].$$

Ocene (3.18) i (3.19), zajedno sa (3.17), impliciraju

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau\, t]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq\alpha_1\int_{t_0}^t E||x_u-x_u^n||^p\,du+\alpha_2\,n^{-(m+1)p/2}(t-t_0),\tag{3.20}$$

gde je $m=\min\{m_1,m_2\}$ i α_1,α_2 su generisane konstante, nezavisne od n.

Postupak ocenjivanja izraza $E||x_u-x_u^n||^p$ se deli u dva slučaja. Prvo, neka je $u-\tau<t_0$. U tom slučaju je

$$\begin{aligned}E||x_u-x_u^n||^p&\leq E\sup_{\theta\in[-\tau,0]}|x(u+\theta)-x^n(u+\theta)|^p\\&=E\sup_{r\in[u-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p\\&\leq E\sup_{r\in[u-\tau,t_0]}|x(r)-x^n(r)|^p+E\sup_{r\in[t_0,u]}|x(r)-x^n(r)|^p\\&=E\sup_{r\in[t_0,u]}|x(r)-x^n(r)|^p\\&\leq E\sup_{r\in[t_0-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p.\end{aligned}$$

Ako je $u-\tau\geq t_0$, tada je

$$E||x_u-x_u^n||^p\leq E\sup_{r\in[u-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p\leq E\sup_{r\in[t_0-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p.$$

Imajući u vidu poslednju ocenu i (3.20), dobija se

$$\begin{aligned}E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq\alpha_1\int_{t_0}^t E&\sup_{r\in[t_0-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p du\\&+\alpha_2\,n^{-(m+1)p/2}(t-t_0).\end{aligned}$$

Primena Gronwall-Bellmanove leme daje

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq\alpha_2\,n^{-(m+1)p/2}(T-t_0)e^{\alpha_1(T-t_0)}\equiv H\,n^{-(m+1)p/2},$$

gde je H konstanta, nezavisna od n. S obzirom da poslednja nejednakost važi za svako $t\in[t_0,T]$, sledi

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,T]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq H\,n^{-(m+1)p/2},$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Dakle, $E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x(t)-x^n(t)|^p\to 0$ kada $n\to\infty$, odnosno, $x^n\xrightarrow{L^p}x$ kada $n\to\infty$. Potrebno je naglasiti da brzina konvergencije raste sa povećanjem broja članova u Taylorovom razvoju funkcionala f i g, kao što je slučaj u realnoj analizi. Sledeće tvrdjenje je direktna posledica Teoreme 3.2.2, a odnosi se na skoro izvesnu konvergenciju niza aproksimativnih rešenja $\{x^n,n\in N\}$ ka rešenju x jednačine (3.4).

Teorema 3.2.3 *Ako važe uslovi Teoreme 3.2.2, tada niz $\{x^n, n \in N\}$ aproksimativnih rešenja, odredjenih jednačinama (3.6), skoro izvesno konvergira ka rešenju x jednačine (3.4).*

Dokaz. Na osnovu Chebyshevljeve nejednakosti i Teoreme 3.2.2, može se zaključiti da za proizvoljno $\eta > 0$ važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\sup_{t \in [t_0-\tau, T]} |x(t) - x^n(t)|^{\frac{p}{2}} \geq n^{-\eta} \Big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} E \sup_{t \in [t_0-\tau, T]} |x(t) - x^n(t)|^p \cdot n^{2\eta}$$
$$\leq H \sum_{n=1}^{\infty} n^{-[(m+1)p-4\eta]/2}.$$

Red na desnoj strani nejednakosti konvergira ako se izabere, na primer, $\eta < 1/2$ za $p = 2$, odnosno, $\eta < (p/2-1)/2$ za $p > 2$. Tada, na osnovu Borel-Cantellijeve leme, sledi $x^n \xrightarrow{a.s.} x$ kada $n \to \infty$. $\diamondsuit$

Napomena 3.2.1 *Umesto Lagrangeovog oblika ostatka (3.2), može se koristiti bilo koji drugi oblik ostatka u Taylorovom razvoju funkcionala f i g. Ostatak u Cauchyjevom obliku*

$$W(x,h) = \frac{1}{n!} T^{(n+1)}_{(x+th)}((1-t)h, ..., (1-t)h, h),$$

za neko $t \in (0,1)$, može se oceniti kao

$$||W(x,h)|| \leq \frac{1}{n!} ||T^{(n+1)}_{(x+th)}|| \cdot ||h||^{n+1},$$

dok se ostatak u integralnom obliku,

$$W(x,h) = \frac{1}{n!} \int_0^1 T^{(n+1)}_{(a+th)}((1-t)h, ..., (1-t)h, h)\, dt,$$

za neko $t \in (0,1)$, može oceniti kao

$$||W(x,h)|| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [0,1]} ||T^{(n+1)}_{(x+th)}|| \cdot ||h||^{n+1}.$$

Dakle, Propozicije 3.2.1 i 3.2.2 kao i Teorema 3.2.2 važe pod istim uslovima, s tim što se ocene razlikuju u konstantama.

Ako je jednačina (1.16) autonomna, prethodno definisana aproksimativna metoda se, specijalno za $m = 0$, svodi na Euler-Maruyama metodu (videti [60]).

3.3 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom poglavlju će biti reči o analitičkoj metodi aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. Aproksimativne jednačine se definišu na ekvidistantnoj particiji vremenskog intervala i njihovi koeficijenti su Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine. Glavni rezultati se odnose na L^p-konvergenciju i s.i. konvergenciju niza aproksimativnih rešenja ka rešenju polazne jednačine, i to bez restriktivnih pretpostavki o funkciji kašnjenja. Specifičnost ove metode je u tome što se red L^p-konvergencije povećava sa povećanjem broja članova u Taylorovom razvoju, kao u realnoj analizi. Pored toga, biće predstavljena procedura za implementaciju ove metode, pod pretpostavkom da je funkcija kašnjenja neprekidna. Rezultati izloženi u ovom poglavlju su sadržani u radu [72].

Poznato je da stohstičke difierencijalne jednačine sa kašnjenjem, u opštem slučaju, nisu eksplicitno rešive. To je osnovna motivacija za nastanak aproksimativnih metoda, kako numeričkih tako i analitičkih, kao što su, na primer, [7, 12, 79, 56, 31].

Imajući u vidu oznake i osnovne pojmove koji su uvedeni u Poglavlju 1.8, u nastavku će biti razmatrana stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem oblika (1.20) čiji je integralni oblik

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), x(s-\delta(s)), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), x(s-\delta(s)), s)dw(s), \qquad (3.21)$$

za svako $t \in [t_0, T]$, pri čemu je početni uslov

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}. \qquad (3.22)$$

Neka je

$$t_0 < t_1 < ... < t_n = T \qquad (3.23)$$

ekvidistantna particija intervala $[t_0, T]$, gde je n izabran tako da postoji ceo broj n_*, pri čemu je $\tau = n_* \frac{T-t_0}{n}$. Dakle, particija intervala $[t_0 - \tau, T]$ je odredjena tačkama

$$t_k = t_0 + \frac{k}{n}(T - t_0), \quad k = -n_*, -n_* + 1, ..., -1, 0, 1, ..., n,$$

gde je $\delta_n = (T - t_0)/n \in (0, 1)$ za dovoljno veliko $n \in N$.

U nastavku će rešenje jednačine (3.21) biti aproksimirano na particiji (3.23), procesima $\{x^n(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$, korišćenjem Taylorovog razvoja koeficijenata f i g po prvom i drugom argumentu. S obzirom da je kašnjenje vremenski zavisno, za $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, argument $s - \delta(s), s \in [t_k, t]$, u opštem slučaju uzima vrednosti iz bilo kog intervala $[t_j, t_{j+1}), j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$. Iz tog razloga se ne mogu odmah odrediti tačke u kojima se vrši razvoj po drugom argumentu u Taylorovom razvoju. Zbog toga je prirodno razmatrati podskupove $A_k^j, j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$ intervala $[t_k, t]$, gde je $A_k^j = \{s \in [t_k, t] : s - \delta(s) \in$

$[t_j, t_{j+1})\}$. Očigledno je da će se razvoj koeficijenata jednačine (3.21) po drugom argumentu vršiti u tačkama $x^n(t_j)$ kada $s \in A_k^j$. S tim u vezi se, za $t \in [t_k, t_{k+1}]$ i $s \in [t_k, t]$, definiše stepenasti proces

$$\hat{x}^n(s) = \sum_{j=k-n_*}^{k} I_{A_k^j}(s) x^n(t_j), \tag{3.24}$$

pri čemu je $x^n(t_j) = \xi(t_j - t_0)$ za $j \in \{-n_*, -n_* + 1, ..., -1\}$.

Rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (3.21) se aproksimira na particiji (3.23) rešenjima $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$, jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), \hat{x}^n(s), s)}{i!}\, ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), \hat{x}^n(s), s)}{i!}\, dw(s),\ \ t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned} \tag{3.25}$$

pri čemu je početni uslov $x_{t_0}^n = \xi$ s.i. U ovim jednačinama, koeficijenti prenosa i difuzije su Taylorove aproksimacije funkcija f i g, i to po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_k)$, i po drugom argumentu u okolini tačaka $\hat{x}^n(s), s \in [t_k, t], k = 0, 1, ..., n-1$, do m_1-og i m_2-og izvoda, respektivno, pri čemu je

$$d^i f(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i f(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t)}{\partial^j x^n(t) \partial^{i-j} x^n(t - \delta(t))} (\Delta x_{t_k}^n)^j (\Delta \hat{x}_t^n)^{i-j},$$

$$d^i g(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i g(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t)}{\partial^j x^n(t) \partial^{i-j} x^n(t - \delta(t))} (\Delta x_{t_k}^n)^j (\Delta \hat{x}_t^n)^{i-j},$$

za $\Delta x_{t_k}^n = x^n(t) - x^n(t_k)$ i $\Delta \hat{x}_t^n = x^n(t - \delta(t)) - \hat{x}^n(t)$.

Imajući u vidu (3.24), jednačine (3.25) se mogu predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \sum_{j=k-n_*}^{-1} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), \xi(t_j - t_0), s)}{i!} ds \\ &+ \sum_{j=0}^{k} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_j), s)}{i!} ds \\ &+ \sum_{j=k-n_*}^{-1} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), \xi(t_j - t_0), s)}{i!} dw(s) \\ &+ \sum_{j=0}^{k} \int_{A_k^j} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_j), s)}{i!} dw(s), \end{aligned} \tag{3.26}$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Aproksimativno rešenje $x^n = \{x^n(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ se dobija kao s.i. neprekidan proces sukcesivnim povezivanjem početnog uslova $\{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ i procesa

$\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k gde je $k = 0, 1, ..., n-1$. Bez preciziranja uslova, pretpostavlja se egzistencija i jedinstvenost svih rešenja koja su od značaja za dalje razmatranje. Pored Lipschitzovog uslova (1.22) i uslova ograničenog rasta (1.23), neophodno je uvesti sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije f i g imaju Taylorov razvoj po prvom i drugom argumentu, zaključno sa m_1-im i m_2-im izvodom, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Parcijalni izvodi m_1+1-og i m_2+1-og reda, funkcija f i g, respektivno, su uniformno ograničeni, tj. postoji pozitivna konstanta L tako da važi

$$\sup_{R^d \times R^d \times [t_0,T]} \Big| \frac{\partial^{m_1+1} f(x,y,t)}{\partial x^j \partial y^{m_1+1-j}} \Big| \leq L, \; j = 0, 1, ..., m_1+1,$$
$$\sup_{R^d \times R^d \times [t_0,T]} \Big| \frac{\partial^{m_2+1} g(x,y,t)}{\partial x^j \partial y^{m_2+1-j}} \Big| \leq L, \; j = 0, 1, ..., m_2+1.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoje jedinstvena, s.i. neprekidna rešenja x i x^n jednačina (3.21) i (3.25), respektivno, tako da za $p \geq 2$, važi

$$E \sup_{t \in [t_0-\tau,T]} |x(t)|^p < \infty, \quad E \sup_{t \in [t_0-\tau,T]} |x^n(t)|^{(M+1)^2 p} \leq Q < \infty,$$

gde je $M = \max\{m_1, m_2\}$ i $Q > 0$ je konstanta koja ne zavisi od n. Pored toga, pretpostavlja se da je $E||\xi||^{(M+1)^2 p} < \infty$, kao i da su svi Lebesgueovi i Itovi integrali, koji se koriste u nastavku, dobro definisani.

$\mathcal{A}_4$: Početni uslov (3.22) zadovoljava Lipschitzov uslov, tj. postoji konstanta $\beta > 0$ tako da, za svako $-\tau \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0$, važi

$$|\xi(\theta_2) - \xi(\theta_1)| \leq \beta |\theta_2 - \theta_1|.$$

Potrebno je istaći da je poslednja pretpostavka slabija od Lipschitz neprekidnosti funkcije δ, što je uobičajeno u kontekstu aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem (videti, na primer [56],[87]).

Lako se može uočiti da na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_3$ sledi

$$E \sup_{t \in [t_0-\tau,T]} |\hat{x}^n(t)|^{(M+1)^2 p} \leq Q,$$

s obzirom da je $\sup_{t \in [t_0-\tau,T]} |\hat{x}^n(t)| \leq \sup_{t \in [t_0-\tau,T]} |x^n(t)|$ s.i.

U nastavku će, bez posebnog naglašavanja, nekoliko puta biti primenjena elementarna nejednakost (1.46), stohastička izometrija, kao i Hölderova nejednakost na Lebesgueove integrale i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost (Teorema 1.3.5) na integrale Itoa.

Za ocenjivanje bliskosti rešenja x i x^n, neophodno je najpre dokazati sledeću propoziciju.

Propozicija 3.3.1 *Neka su* $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$ *rešenja jednačina (3.25) i neka su zadovoljeni uslov ograničenog rasta (1.23) i pretpostavke* $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_3$. *Tada, za svako* $2 \leq r \leq (M+1)p$, *važi*

$$E \sup_{s \in [t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \leq C \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Pored toga, ako važi pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada je

$$\sup_{s\in[t_k,t]} E|x^n(s-\delta(s))-\hat{x}^n(s)|^r \leq \bar{C}\cdot n^{-r/2},\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,...,n-1,$$

pri čemu su C i $\bar{C}$ generisane konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Kako bi se pojednostavila notacija, uvode se oznake

$$F(x_t^n, x_{t-\delta(t)}^n, t; x_{t_k}^n, \hat{x}_t^n) = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t)}{i!},$$
$$G(x_t^n, x_{t-\delta(t)}^n, t; x_{t_k}^n, \hat{x}_t^n) = \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), \hat{x}^n(t), t)}{i!}.$$

Tada, imajući u vidu pretpostavku $\mathcal{A}_1$, za svako $t\in[t_k,t_{k+1}], k=0,1,...,n-1$, važi

$$f(x^n(t), x^n(t-\delta(t)), t) = F(x_t^n, x_{t-\delta(t)}^n, t; x_{t_k}^n, \hat{x}_t^n) + r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t), \tag{3.27}$$
$$g(x^n(t), x^n(t-\delta(t)), t) = G(x_t^n, x_{t-\delta(t)}^n, t; x_{t_k}^n, \hat{x}_t^n) + r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t),$$

gde su

$$r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t) = \frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k)+\bar{\theta}\Delta x_{t_k}^n, \hat{x}^n(t)+\bar{\theta}\Delta\hat{x}_t^n, t)}{(m_1+1)!},$$
$$r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t) = \frac{d^{m_2+1} g(x^n(t_k)+\bar{\theta}\Delta x_{t_k}^n, \hat{x}^n(t)+\bar{\theta}\Delta\hat{x}_t^n, t)}{(m_2+1)!}, \quad \bar{\theta}\in(0,1),$$

odgovarajući ostaci u Taylorovim aproksimacijama funkcija f i g, respektivno. Na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_2$, tj. uniformne ograničenosti (m_1+1)-ih i (m_2+1)-ih parcijalnih izvoda funkcija f i g, respektivno, kao i Newtonove binomne formule, dobija se

$$r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t) \leq \frac{L}{(m_1+1)!}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta\hat{x}_t^n|)^{m_1+1}, \tag{3.28}$$
$$r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta\hat{x}_t^n, t) \leq \frac{L}{(m_2+1)!}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta\hat{x}_t^n|)^{m_2+1}, \tag{3.29}$$

za svako $t\in[t_k,t_{k+1}], k=0,1,...,n-1$.

Prilikom ocenjivanja izraza $E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r$, najpre se primenjuje elementarna nejednakost (1.46) na jednačine (3.25), zatim Hölderova nejednakost na Lebesgueove integrale i Teorema 1.3.5 na integrale Itoa. Na taj način se, za svako $t\in[t_k,t_{k+1}], k=0,1,...,n-1$, dobija

$$\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r \qquad (3.30)\\
&\leq 2^{r-1}(t-t_k)^{r-1}\int_{t_k}^t E|F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \hat{x}_s^n)|^r ds\\
&\quad +2^{r-1}c_r(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\int_{t_k}^t E|G(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \hat{x}_s^n)|^r ds\\
&\equiv 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\Big[(t-t_k)^{\frac{r}{2}}J_1(t)+c_rJ_2(t)\Big],
\end{aligned}$$

gde je c_r univerzalna konstanta iz Teoreme 1.3.5, dok su $J_1(t)$ i $J_2(t)$ odgovarajući integrali. Integral $J_1(t)$ je oblika

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_{t_k}^{t} E|F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \hat{x}_s^n)|^r ds \\ &= \sum_{j=k-n_*}^{-1} \int_{A_k^j} E|F(x_s^n, \xi_{s-\delta(s)-t_0}, s; x_{t_k}^n, \xi_{t_j-t_0})|^r ds \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k} \int_{A_k^j} E|F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, x_{t_j}^n)|^r ds. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Integral $\int_{A_k^j} E|F(x_s^n, \xi_{s-\delta(s)-t_0}, s; x_{t_k}^n, \xi_{t_j-t_0})|^r ds$ za svako $j = k-n_*, k-n_*+1, ..., -1$ se može oceniti na osnovu Taylorovog razvoja (3.27), uslova ograničenog rasta (1.23), pretpostavki $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$ i ocene (3.28), na sledeći način

$$\begin{aligned} &\int_{A_k^j} E|F(x_s^n, \xi_{s-\delta(s)-t_0}^n, s; x_{t_k}^n, \xi_{t_j-t_0})|^r ds \\ &\le 2^{r-1} \int_{A_k^j} E|F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \xi_{t_j-t_0}) - f(x^n(s), \xi(s-\delta(s)-t_0), s)|^r ds \\ &\quad +2^{r-1} \int_{A_k^j} E|f(x^n(s), \xi(s-\delta(s)-t_0), s)|^r ds \\ &\le 2^{r-1} \int_{A_k^j} E \left| \frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k) + \bar{\theta}\Delta x_{t_k}^n, \xi(t_j - t_0) + \bar{\theta}\Delta\xi_{t_j-t_0}, s)}{(m_1+1)!} \right|^r ds \\ &\quad +2^{r-1} K^{\frac{r}{2}} \int_{A_k^j} E[1 + |x^n(s)|^2 + |\xi(s-\delta(s)-t_0)|^2]^{\frac{r}{2}} ds \\ &\le \frac{2^{r-1} L^r}{[(m_1+1)!]^r} \int_{A_k^j} E[|x^n(s) - x^n(t_k)| + |\xi(s-\delta(s)-t_0) - \xi(t_j-t_0)|]^{(m_1+1)r} ds \\ &\quad +2^{r-1} 3^{\frac{r}{2}-1} K^{\frac{r}{2}} \int_{A_k^j} [1 + E|x^n(s)|^r + E|\xi(s-\delta(s)-t_0)|^r]\, ds \\ &\le \frac{2^{r-1} 4^{(m_1+1)r} L^r}{[(m_1+1)!]^r} \int_{A_k^j} E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds \\ &\quad +2^{r-1} 3^{\frac{r}{2}-1} K^{\frac{r}{2}} \int_{A_k^j} [1 + 2E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^r] ds. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Slično, za $j = 0, 1, ..., k$ se dobija

$$\begin{aligned} &\int_{A_k^j} E|F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, x_{t_j}^n)|^r ds \\ &\quad \le \frac{2^{r-1} 4^{(m_1+1)r} L^r}{[(m_1+1)!]^r} \int_{A_k^j} E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds \\ &\quad\quad +2^{r-1} 3^{\frac{r}{2}-1} K^{\frac{r}{2}} \int_{A_k^j} [1 + 2E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^r] ds. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Koristeći ocene (3.32) i (3.33), nejednakost (3.31) postaje

$$
\begin{aligned}
J_1(t) \leq & \frac{2^{r-1}4^{(m_1+1)r}L^r}{[(m_1+1)!]^r} \sum_{j=k-n_*}^{k} \int_{A_k^j} E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds \\
& + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}} \sum_{j=k-n_*}^{k} \int_{A_k^j} [1+2E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^r] ds \\
\equiv & \frac{2^{r-1}4^{(m_1+1)r}L^r}{[(m_1+1)!]^r} \int_{t_k}^{t} E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds \\
& + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}} \int_{t_k}^{t} [1+2E \sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^r] ds \\
\leq & \frac{2^{r-1}4^{(m_1+1)r}L^r R}{[(m_1+1)!]^r}(t-t_k) + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}}(1+2R)(t-t_k) \\
\equiv & C_1 \cdot (t-t_k),
\end{aligned}
$$

pri čemu je $C_1 \equiv C_1(K, L, R, r, m_1)$ generisana konstanta i $R = 1 + Q$.

Analogno se dobija

$$J_2(t) \leq C_2 \cdot (t-t_k),$$

gde je $C_2 \equiv C_2(K, L, R, r, m_2)$ generisana konstanta. Na taj način, (3.30) se može oceniti kao

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r &\leq 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}} \left[C_1(T-t_k)^{\frac{r}{2}} + c_r C_2 \right] \\
&\leq C \cdot (t-t_k)^{\frac{r}{2}} \\
&\leq C \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],
\end{aligned}
$$

pri čemu je C generisana konstanta, nezavisna od n.

U nastavku se ocenjuje izraz $\sup_{s\in[t_k,t]} E|x^n(s-\delta(s)) - \hat{x}^n(s)|^r$ imajući u vidu pretpostavku $\mathcal{A}_4$, tj. Lipschitz neprekidnost početnog uslova, kao i ocenu dobijenu u prvom delu dokaza ove propozicije. Na osnovu (3.24) i definicije skupova $A_k^j, j = k-n_*, k-n_*+1, ..., k$, sledi da za proizvoljno $s \in [t_k, t]$, važi

$$
\begin{aligned}
& E|x^n(s-\delta(s)) - \hat{x}^n(s)|^r \\
&= \sum_{j=k-n_*}^{k} I_{A_k^j}(s) E|x^n(s-\delta(s)) - x^n(t_j)|^r \\
&= \sum_{j=k-n_*}^{-1} I_{A_k^j}(s) E|\xi(s-\delta(s)-t_0) - \xi(t_j-t_0)|^r + \sum_{j=0}^{k} I_{A_k^j}(s) E|x^n(s-\delta(s)) - x^n(t_j)|^r \\
&\leq \beta^r \sum_{j=k-n_*}^{-1} I_{A_k^j}(s)(t_{j+1}-t_j)^r + \sum_{j=0}^{k} I_{A_k^j}(s) E \sup_{u\in[t_j,t_{j+1}]} |x^n(u) - x^n(t_j)|^r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \beta^r \sum_{j=k-n_*}^{-1} I_{A_k^j}(s)(t_{j+1}-t_j)^{r/2} + C\cdot n^{-r/2}\sum_{j=0}^{k} I_{A_k^j}(s)\\
&\leq \bar{C}\cdot n^{-r/2},
\end{aligned}
$$

gde je $\bar{C} = \max\{\beta^r(T-t_0)^{r/2}, C\}$.

Posledica toga je

$$
\sup_{s\in[t_k,t]} E|x^n(s-\delta(s))-\hat{x}^n(s)|^r \leq \bar{C}\cdot n^{-r/2},\ \ t\in[t_k,t_{k+1}],\ \ k=0,1,...,n-1,
$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Sledećim tvrdjenjem se odredjuje red L^p-konvergencije niza $\{x^n, n\in N\}$ aproksimativnih rešenja ka rešenju x polazne jednačine (3.21).

Teorema 3.3.1 *Neka je x rešenje jednačine (3.21) i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje odredjeno jednačinama (3.25). Ako su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.3.1, Lipschitzov uslov i pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada, za $p\geq 2$, važi*

$$
E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x(t)-x^n(t)|^p \leq H\cdot n^{-(m+1)p/2},
$$

pri čemu je $m=\min\{m_1,m_2\}$, dok je H generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t\in[t_0,T]$, na osnovu jednačina (3.21) i (3.25), sledi da je

$$
x(t)-x^n(t) = \int_{t_0}^{t}\hat{F}(s)ds + \int_{t_0}^{t}\hat{G}(s)dw(s),
$$

pri čemu je

$$
\hat{F}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s), \quad \hat{G}(s) = \sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s),
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) &= [f(x(s),x(s-\delta(s)),s) - F(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \hat{x}_s^n)]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s),\\
\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) &= [g(x(s),x(s-\delta(s)),s) - G(x_s^n, x_{s-\delta(s)}^n, s; x_{t_k}^n, \hat{x}_s^n)]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s).
\end{aligned}
$$

Kako rešenja x i x^n zadovoljavaju isti početni uslov, dobija se

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \qquad (3.34)\\
&\quad\leq E\sup_{s\in[t_0-\tau,t_0]}|x(s)-x^n(s)|^p + E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\\
&\quad= E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p
\end{aligned}
$$

$$\leq 2^{p-1}\Bigg[E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^{s}\hat{F}(u)du\Big|^p + E\sup_{s\in[t_0,t]}\Big|\int_{t_0}^{s}\hat{G}(u)dw(u)\Big|^p\Bigg]$$
$$\leq 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du$$
$$+\,2^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du.$$

Za $j=\max\{i\in\{0,1,...,n-1\},t_i\leq t\}$, nejednakost (3.34) se može izraziti u obliku

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \tag{3.35}$$
$$\leq 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du$$
$$+\,2^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du.$$

Na taj način, relacija (3.35) postaje

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \tag{3.36}$$
$$\leq 2^{p-1}\Bigg[(T-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|f(x(u),x(u-\delta(u)),u)-F(x_u^n,x_{u-\delta(u)}^n,u;x_{t_i}^n,\hat{x}_u^n)\Big|^p du$$
$$+c_p(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|g(x(u),x(u-\delta(u)),u)-G(x_u^n,x_{u-\delta(u)}^n,u;x_{t_i}^n,\hat{x}_u^n)\Big|^p du\Bigg].$$

Primenom Lipschitzovog uslova (1.22), pretpostavke $\mathcal{A}_2$ i Propozicije 3.3.1, za $s\in[t_i,t_{i+1}\wedge t], i\in\{0,1,...,j\}$ se dobija

$$\int_{t_i}^{s}E|f(x(u),x(u-\delta(u)),u)-F(x_u^n,x_{u-\delta(u)}^n,u;x_{t_i}^n,\hat{x}_u^n)|^p du \tag{3.37}$$
$$\leq 2^{p-1}\Bigg[\int_{t_i}^{s}E|f(x(u),x(u-\delta(u)),u)-f(x^n(u),x^n(u-\delta(u)),u)|^p du$$
$$+\int_{t_i}^{s}E|f(x^n(u),x^n(u-\delta(u)),u)-F(x_u^n,x_{u-\delta(u)}^n,u;x_{t_i}^n,\hat{x}_u^n)|^p du\Bigg]$$
$$\leq 2^{3p/2-2}K^{p/2}\Bigg[\int_{t_i}^{s}E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s}E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Bigg]$$
$$+2^{p-1}\int_{t_i}^{s}E\left|\frac{d^{m_1+1}f(x^n(t_i)+\bar{\theta}\Delta x_{t_i}^n,\hat{x}^n(u)+\bar{\theta}\Delta\hat{x}_u^n,u)}{(m_1+1)!}\right|^p du$$
$$\leq 2^{3p/2-2}K^{p/2}\Bigg[\int_{t_i}^{s}E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s}E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Bigg]$$

$$+\frac{2^{p-1}L^p}{[(m_1+1)!]^p}\int_{t_i}^{s} E[|x^n(u)-x^n(t_i)|+|x^n(u-\delta(u))-\hat{x}^n(u)|]^{(m_1+1)p}du$$

$$\leq 2^{3p/2-2}K^{p/2}\Big[\int_{t_i}^{s} E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s} E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Big]$$

$$+\frac{2^{(m_1+2)p-2}L^p}{[(m_1+1)!]^p}\Big[\int_{t_i}^{s} E|x^n(u)-x^n(t_i)|^{(m_1+1)p}du$$

$$+\int_{t_i}^{s} E|x^n(u-\delta(u))-\hat{x}^n(u)|^{(m_1+1)p}du\Big]$$

$$\leq 2^{3p/2-2}K^{p/2}\Big[\int_{t_i}^{s} E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s} E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Big]$$

$$+2^{(m_1+2)p-2}\frac{L^p(C+\bar{C})}{[(m_1+1)!]^p}\,n^{-(m_1+1)p/2}(s-t_i).$$

Analogno se dobija

$$\int_{t_i}^{s} E|g(x(u),x(u-\delta(u)),u)-G(x_u^n,x_{u-\delta(u)}^n,u;x_{t_i}^n,\hat{x}_u^n)|^p du \tag{3.38}$$

$$\leq 2^{3p/2-2}K^{p/2}\Big[\int_{t_i}^{s} E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s} E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Big]$$

$$+2^{(m_2+2)p-2}\frac{L^p(C+\bar{C})}{[(m_2+1)!]^p}n^{-(m_2+1)p/2}(s-t_i).$$

Ocene (3.37) i (3.38), zajedno sa (3.36) daju

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p$$

$$\leq \alpha_1\Big[\int_{t_0}^{t} E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_0}^{t} E|x(u-\delta(u))-x^n(u-\delta(u))|^p du\Big]$$

$$+\alpha_2 n^{-(m+1)p/2}(t-t_0)$$

$$\leq 2\alpha_1\int_{t_0}^{t} E\sup_{r\in[t_0-\tau,u]}|x(r)-x^n(r)|^p du+\alpha_2 n^{-(m+1)p/2}(T-t_0),$$

pri čemu je $m=\min\{m_1,m_2\}$ i α_1,α_2 su generisane konstante, nezavisne od n.

Primena Gronwall-Bellmanove leme (Teorema 1.13.1) implicira

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \leq \alpha_2 n^{-(m+1)p/2}(T-t_0)e^{2\alpha_1(T-t_0)}$$

$$\equiv H\cdot n^{-(m+1)p/2},$$

gde je H konstanta. S obzirom da poslednja nejednakost važi za $t\in[t_0,T]$, sledi da je

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,T]}|x(s)-x^n(s)|^p \leq H\cdot n^{-(m+1)p/2},$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Na osnovu prethodnih tvrdjenja, može se dokazati skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja $\{x^n, n \in N\}$ ka rešenju x jednačine (3.21), o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 3.3.2 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.3.1. Tada niz* $\{x^n, n \in N\}$ *aproksimativnih rešenja, odredjenih jednačinama (3.25), konvergira skoro izvesno ka rešenju* x *jednačine (3.21).*

Dokaz. Na osnovu Chebyshevljeve nejednakosti i Teoreme 3.3.1, za proizvoljno $\eta > 0$, sledi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t)-x^n(t)|^{\frac{p}{2}} \geq n^{-\eta}\Big)& \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t)-x^n(t)|^p \cdot n^{2\eta} \\ &\leq H \sum_{n=1}^{\infty} n^{-[(m+1)p-4\eta]/2}.\end{aligned}$$

Na osnovu Borell-Cantellijeve leme, red na desnoj strani nejednakosti konvergira ako se izabere, na primer, $\eta < 1/2$ za $p = 2$ i $\eta < (p/2-1)/2$ za $p > 2$. Tada, $x^n \xrightarrow{s.i.} x$ kada $n \to \infty$. $\diamondsuit$

Napomena 3.3.1 *Specijalno, ako je* $\delta(t) \equiv \tau > 0, t \in [t_0, T]$, *jednačina (3.21) se svodi na stohastičku diferencijalnu jednačinu sa konstantnim kašnjenjem oblika*

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), x(s-\tau), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), x(s-\tau), s)dw(s), \tag{3.39}$$

za $t \in [t_0, T]$, *sa početnim uslovom* $x_{t_0} = \xi$. *Kao što je poznato (videti, na primer [54]), egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (3.39) se može dokazati ako važe uslov ograničenog rasta (1.23) i globalni Lipschitzov uslov po prvom argumentu: postoji pozitivna konstanta* K *tako da, za svako* $t \in [t_0, T], y \in R^d$ *i* $x, \tilde{x} \in R^d$, *važi*

$$|f(x,y,t) - f(\tilde{x},y,t)|^2 \vee |g(x,y,t) - g(\tilde{x},y,t)|^2 \leq K|x-\tilde{x}|^2. \tag{3.40}$$

U ovom slučaju, aproksimativne jednačine su oblika (3.25), sa tom razlikom što je stepenasti proces $\hat{x}$ *definisan kao*

$$\begin{aligned}\hat{x}^n(t) &= x^n(t_{k-n*}) \\ &= \begin{cases} x^n(t_{k-n*}), & k = n_*, n_*+1, ..., n-1, \\ \xi(t_{k-n*} - t_0), & k = 0, 1, ..., n_*-1, \end{cases}\end{aligned}$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$.

Ako se uslov (1.22) zameni uslovom (3.40), tvrdjenja analogna Propoziciji 3.3.1 i Teoremama 3.3.1 i 3.3.2 važe i u slučaju kada je polazna jednačina oblika (3.39), s tim što su odgovarajući dokazi jednostavniji.

Ovo poglavlje će biti upotpunjeno nekim komentarima i primerom koji ilustruje prethodno navedene teorijske rezultate.

Naime, u okviru prethodnog razmatranja, dokazana je L^p-bliskost rešenja jednačine (3.21) i aproksimativnog rešenja, odredjenog jednačinama (3.25), pri čemu su od značaja bili skupovi A_k^j, $j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, $k = 0, 1, ..., n - 1$, na kojima $s - \delta(s) \in [t_j, t_{j+1})$. Činjenica da $s - \delta(s)$ može ući više puta u isti interval, recimo $[t_j, t_{j+1})$ za neko $j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, dopušta mogućnost da A_k^j imaju veoma složenu strukturu, neadekvatnu za primenu ove metode. Sa ciljem da se ta metoda učini praktično primenljivom, biće predstavljena procedura za generisanje podeonih tačaka intervala $[t_k, t_{k+1}]$, takvih da se u njima menjaju tačke u čijoj okolini se vrši Taylorov razvoj po drugom argumentu, funkcija f i g. U tom smislu se pretpostavlja da je funkcija kašnjenja neprekidna.

Prvi korak je rešavanje jednačina $s - \delta(s) = t_j, j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, za $s \in [t_k, t_{k+1}]$. Za svako $j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, skup rešenja je oblika $\bigcup_{i=1}^{n_j}[a_i^j, b_i^j] \cup \bigcup_{i=1}^{k_j}\{c_i^j\}$. Očigledno, može se desiti da je $n_j = 0$, što znači da funkcija $s - \delta(s), s \in [t_k, t_{k+1}]$ nema rešenja koja su konstantna na intervalima. Takodje, može se desiti da je $k_j = 0$, što znači da jednačina nema izolovanih rešenja, ili $k_j = n_j = 0$, kada data jednačina nema rešenja.

Za svako $j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, definiše se skup

$$t_i^j = \begin{cases} a_i^j, & i = 1, 2, ..., n_j, \\ b_k^j, & k = 1, 2, ..., n_j, i = n_j + 1, n_j + 2, ..., 2n_j, \\ c_k^j, & k = 1, 2, ..., k_j, i = 2n_j + 1, 2n_j + 2, ..., 2n_j + k_j, \end{cases}$$

i uvode se oznake $m_j = 2n_j + k_j, m = \sum_{j=k-n_*}^{k} m_j$. Zatim se definiše rastući niz pomoću elemenata skupa $\{t_i^j, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{k - n_*, k}\}$, na sledeći način:

$$\begin{aligned} y_0^{j_0} &= t_k,\ j_0 = \max\{j \in \{k - n_*, k - n_* + 1, ..., k\} : t_k - \delta(t_k) \geq t_j\}, \\ y_1^{j_1} &= t_i^{j_1} = \min\{t_i^j, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{k - n_*, k}\}, \\ &\qquad j_1 \in \{k - n_*, k - n_* + 1, ..., k\}, i \in \{1, 2, ..., m_{j_1}\}, \\ y_2^{j_2} &= t_i^{j_2} = \min\{\{t_i^j, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{k - n_*, k}\} \backslash \{y_1^{j_1}\}\}, \\ &\qquad j_2 \in \{k - n_*, k - n_* + 1, ..., k\}, i \in \{1, 2, ..., m_{j_2}\}, \\ &\dots \\ y_m^{j_m} &= t_i^{j_m} = \min\{\{t_i^j, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{k - n_*, k}\} \backslash \{y_1^{j_1}, ..., y_{m-1}^{j_{m-1}}\}\}. \\ &\qquad j_m \in \{k - n_*, k - n_* + 1, ..., k\}, i \in \{1, 2, ..., m_{j_m}\}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

S obzirom da se može desiti da je $y_m^{j_m} < t_{k+1}$, definiše se $y_{m+1}^{j_{m+1}} = t_{k+1}, j_{m+1} = \max\{j \in \{k - n_*, k - n_* + 1, ..., k\} : t_{k+1} - \delta(t_{k+1}) \geq t_j\}$.

Ova procedura je ilustrovana Slikom 3.1, gde je $\delta(t) = \sin 9t + 1, t \in [t_0, T]$ za $t_0 = 0$, $T = 6$. Očigledno je da važi $\delta(t) \leq 2 \equiv \tau, t \in [t_0, T]$. Ako je, na primer, $n = 12$, tada je $(T - t_0)/n = 0.5$ i $n_* = 4$. Na osnovu Slike 3.1 se lako može uočiti da je $n_j = 0, j = -4, -3, ..., 0$, kada je $t \in [0, 0.5]$.

U opštem slučaju se može desiti da su, po konstrukciji, j_i i j_k jednaki kada je $i \neq k$, za neki izbor indeksa $i, k \in \{0, 1, ..., m + 1\}$. Potrebno je istaknuti da

Slika 3.1: $y = t - \sin 9t - 1, t \in [0, 0.5]$

za svako $s \in [y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}}), l \in \{1, ..., m\}$, važi da $s - \delta(s)$ pripada tačno jednom od intervala $[t_{l-1}, t_l), [t_l, t_{l+1})$. Na primer, kao što se može uočiti na Slici 3.1, y_1^{-3} i y_2^{-3} su rešenja iste jednačine $s - \delta(s) = t_{-3}, s \in [t_0, t_1]$, dok je $s - \delta(s) \in [t_{-4}, t_{-3})$ za $s \in [y_1^{-3}, y_2^{-3})$, i $s - \delta(s) \in [t_{-3}, t_{-2})$ za $s \in [y_2^{-3}, y_3^{-2})$. Medjutim, način na koji je konstruisan niz (3.41) ne daje informaciju da li $s - \delta(s)$ pripada intervalu $[t_{l-1}, t_l)$ ili $[t_l, t_{l+1})$ za $s \in [y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}}), l \in \{1, ..., m\}$. Ako pripada intervalu $[t_l, t_{l+1})$, tada će biti korišćeni izvodi koeficijenata jednačine (3.21), po drugom argumentu, u tački $x^n(t_l)$; ako pripada intetvalu $[t_{l-1}, t_l)$, tada se koriste odgovarajući izvodi u tački $x^n(t_{l-1})$. U tom smislu se definišu skupovi

$$
\begin{aligned}
&M_g(l) = \{y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) > y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}})\},\\
&M_{le}(l) = \{y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) = y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}}), y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) \le (y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}}))_-\},\\
&M_{less}(l) = \{y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) < y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}})\},\\
&M_{ge}(l) = \{y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) = y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}}), y_l^{j_l} - \delta(y_l^{j_l}) > (y_{l+1}^{j_{l+1}} - \delta(y_{l+1}^{j_{l+1}}))_-\},
\end{aligned}
$$

za svako $l = 0, 1, ..., m$.

Neka je $t \in [t_k, t_{k+1}]$ i $s \in [t_k, t]$. Stepenasti proces $\hat{x}^n$ definisan sa (3.24) se može izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}^n(s) \qquad (3.42)\\
&= \sum_{l=0}^{m} I_{\left[y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}} \wedge t\right.}(s) \left[x^n(t_{j_{l+1}}) I_{M_g(l) \cup M_{le}(l)} + x^n(t_{j_l}) I_{M_{less}(l)} + x^n(t_{j_l - 1}) I_{M_{ge}(l)}\right],
\end{aligned}
$$

pri čemu je $x^n(t_{j_l}) = \xi(t_{j_l} - t_0)$ za $j_l \in \{-n_*, -n_* + 1, ..., -1\}$. U prethodno navedenom primeru je

$$
I_{M_g(0)} = I_{M_{ge}(1)} = I_{M_{less}(2)} = I_{M_{less}(3)} = I_{M_{less}(4)} = I_{M_{less}(5)} = 1,
$$

odakle, za $t \in [t_0, t_1]$ i $s \in [t_0, t]$, sledi da je

$$
\hat{x}^n(s) = I_{\left[y_0^{-2}, y_1^{-3} \wedge t\right)}(s) x^n(t_{-3}) + I_{\left[y_1^{-3}, y_2^{-3} \wedge t\right)}(s) x^n(t_{-4}) \qquad (3.43)
$$

$$+ I_{\left[y_2^{-3}, y_3^{-2}\wedge t\right)}(s)x^n(t_{-3}) + I_{\left[y_3^{-2}, y_4^{-1}\wedge t\right)}(s)x^n(t_{-2})$$
$$+ I_{\left[y_4^{-1}, y_5^{0}\wedge t\right)}(s)x^n(t_{-1}) + I_{\left[y_5^{0}, y_6^{0}\wedge t\right)}(s)x^n(t_0).$$

U skladu sa tim, skupovi $A_k^j = \{s \in [t_k, t] : s - \delta(s) \in [t_j, t_{j+1})\}$, $j = k - n_*, k - n_* + 1, ..., k$, $k = 0, 1, ..., n-1$ imaju sledeću reprezentaciju

$$A_k^j = \left(\bigcup_{\{l: j_l = j, I_{M_{less}(l)}=1\}} [y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}} \wedge t)\right) \bigcup \left(\bigcup_{\{l: j_l = j, I_{M_g(l-1)\cup M_{le}(l-1)}=1\}} [y_{l-1}^{j_{l-1}}, y_l^{j_l} \wedge t)\right)$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{\{l: j_l - 1 = j, I_{M_{ge}(l)}=1\}} [y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}} \wedge t)\right).$$

Naime, A_k^j sadrži sve intervale $[y_l^{j_l}, y_{l+1}^{j_{l+1}} \wedge t)$ na kojima $s - \delta(s)$ pripada intervalu $[t_j, t_{j+1})$. Konačno, imajući u vidu (3.42), jednačine (3.25) se mogu predstaviti u eksplicitnom obliku, tj. za svako $t \in [y_d^{j_d}, y_{d+1}^{j_{d+1}}), d = 0, 1, ..., m$, je

$$\begin{aligned}
x^n(t) = x^n(t_k) &+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{j_{l+1}}), s)}{i!} I_{M_g(l)\cup M_{le}(l)} ds \\
&+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{j_l}), s)}{i!} I_{M_{less}(l)} ds \\
&+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{j_l - 1}), s)}{i!} I_{M_{ge}(l)} ds \\
&+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{j_{l+1}}), s)}{i!} I_{M_g(l)\cup M_{le}(l)} dw(s) \\
&+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{j_l}), s)}{i!} I_{M_{less}(l)} dw(s) \\
&+ \sum_{l=0}^{d} \int_{y_l^{j_l}}^{y_{l+1}^{j_{l+1}}\wedge t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{j_l - 1}), s)}{i!} I_{M_{ge}(l)} dw(s),
\end{aligned}$$

pri čemu je $x^n(t_{j_l}) = \xi(t_{j_l} - t_0), j_l \in \{-n_*, -n_* + 1, ..., -1\}$.

Sa ciljem implementacije prethodne procedure, biće naveden sledeći jednostavan primer.

Primer 3.3.1 *Neka je*

$$\begin{aligned}
dx(t) = {} & [\sin x(t) + \sin x(t - \sin 9t - 1)]dt \\
& + [\cos x(t) + \cos x(t - \sin 9t - 1)]dw(t), \ \ t \in [t_0, T],
\end{aligned} \tag{3.44}$$

jednodimenzionalna stohastička diferencijalna jednačina sa kašnjenjem sa ranije definisanom funkcijom kašnjenja $\delta(t) = \sin 9t + 1$ *i početnim uslovom* $\xi = \{\xi(\theta), \theta \in$

$[-\tau, 0]\}$, *koji zadovoljava uslove sa početka poglavlja. Koeficijenti ove jednačine zadovoljavaju uslove (1.22) i (1.23), što implicira egzistenciju i jedinstvenost njenog rešenja. U nastavku će se posmatrati funkcija kašnjenja na intervalu* $[t_0, t_1]$, *kao što je prikazano na Slici 3.1. Aproksimativno rešenje će biti definisano na osnovu Taylorovih aproksimacija koeficijenata jednačine (3.44), do prvog izvoda. Koristeći notaciju s početka, kao i (3.43), za* $s \in [t_0, t]$, $t \in [t_0, t_1]$, *koeficijent prenosa aproksimativne jednačine je*

$$
\begin{aligned}
&F(x^n_s, x^n_{s-\delta(s)}, s; x^n_{t_0}, \hat{x}^n_s) \qquad (3.45)\\
&\quad = \sin x^n(t_0) + \cos x^n(t_0)(x^n(s) - x^n(t_0))\\
&\qquad + [\sin x^n(t_{-3}) + \cos x^n(t_{-3})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-3}))] I_{[y_0^{-2}, y_1^{-3} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\sin x^n(t_{-4}) + \cos x^n(t_{-4})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-4}))] I_{[y_1^{-3}, y_2^{-3} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\sin x^n(t_{-3}) + \cos x^n(t_{-3})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-3}))] I_{[y_2^{-3}, y_3^{-2} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\sin x^n(t_{-2}) + \cos x^n(t_{-2})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-2}))] I_{[y_3^{-2}, y_4^{-1} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\sin x^n(t_{-1}) + \cos x^n(t_{-1})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-1}))] I_{[y_4^{-1}, y_5^{0} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\sin x^n(t_0) + \cos x^n(t_0)(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_0))] I_{[y_5^{0}, y_6^{0} \wedge t)}(s).
\end{aligned}
$$

Analogno se dobija odgovarajući koeficijent difuzije aproksimativne jednačine

$$
\begin{aligned}
&G(x^n_s, x^n_{s-\delta(s)}, s; x^n_{t_0}, \hat{x}^n_s) \qquad (3.46)\\
&\quad = \cos x^n(t_0) - \sin x^n(t_0)(x^n(s) - x^n(t_0))\\
&\qquad + [\cos x^n(t_{-3}) - \sin x^n(t_{-3})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-3}))] I_{[y_0^{-2}, y_1^{-3} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\cos x^n(t_{-4}) - \sin x^n(t_{-4})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-4}))] I_{[y_1^{-3}, y_2^{-3} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\cos x^n(t_{-3}) - \sin x^n(t_{-3})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-3}))] I_{[y_2^{-3}, y_3^{-2} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\cos x^n(t_{-2}) - \sin x^n(t_{-2})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-2}))] I_{[y_3^{-2}, y_4^{-1} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\cos x^n(t_{-1}) - \sin x^n(t_{-1})(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_{-1}))] I_{[y_4^{-1}, y_5^{0} \wedge t)}(s)\\
&\qquad + [\cos x^n(t_0) - \sin x^n(t_0)(x^n(s - \sin 9s - 1) - x^n(t_0))] I_{[y_5^{0}, y_6^{0} \wedge t)}(s).
\end{aligned}
$$

Očigledno, za $t \in [y_0^{-2}, y_1^{-3})$, *aproksimativno rešenje zadovoljava jednačinu*

$$
dx^n(t) = [\alpha_0(t) + \beta_0 x^n(t)]dt + [\bar{\alpha}_0(t) + \bar{\beta}_0 x^n(t)]dw(t), \qquad (3.47)
$$

gde je, na osnovu (3.45) i (3.46),

$$
\begin{aligned}
\alpha_0(t) &= \sin\xi(0) - \cos\xi(0)\cdot\xi(0) + \sin\xi(t_{-3} - t_0)\\
&\qquad + \cos\xi(t_{-3} - t_0)(\xi(t - \sin 9t - 1 - t_0) - \xi(t_{-3} - t_0)),\\
\bar{\alpha}_0(t) &= \cos\xi(0) + \sin\xi(0)\cdot\xi(0) + \cos\xi(t_{-3} - t_0)\\
&\qquad - \sin\xi(t_{-3} - t_0)(\xi(t - \sin 9t - 1 - t_0) - \xi(t_{-3} - t_0)),\\
\beta_0 &= \cos\xi(0), \quad \bar{\beta}_0 = -\sin\xi(0).
\end{aligned}
$$

Jednačina (3.47) je linearna stohastička diferencijalna jednačina čije je rešenje

$$
\begin{aligned}
x^n(t) = \psi_0(t)\Bigg[\xi(0) &+ \int_{t_0}^{t} \psi_0^{-1}(s)(\alpha_0(s) - \bar{\beta}_0\bar{\alpha}_0(s))ds\\
&+ \int_{t_0}^{t} \psi_0^{-1}(s)\bar{\beta}_0 dw(s)\Bigg], \quad t \in [y_0^{-2}, y_1^{-3}],
\end{aligned}
$$

gde je

$$\psi_0^{-1}(t) = e^{\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\bar{\beta}_0^2\right)(t-t_0) + \bar{\beta}_0(w(t)-w(t_0))}.$$

Lako se može uočiti da je odgovarajuća homogena linearna jednačina ista sve do prelaska na naredni interval $[t_1, t_2]$. *Dalje, ako je* $t \in [y_1^{-3}, y_2^{-3}]$, *tada se dobija jednačina*

$$dx^n(t) = [\alpha_1(t) + \beta_0 x^n(t)]dt + [\bar{\alpha}_1(t) + \bar{\beta}_0 x^n(t)]dw(t), \tag{3.48}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \sin\xi(0) - \cos\xi(0)\cdot\xi(0) + \sin\xi(t_{-4} - t_0) \\ &\quad + \cos\xi(t_{-4} - t_0)(\xi(t - \sin 9t - 1 - t_0) - \xi(t_{-4} - t_0)), \\ \bar{\alpha}_1(t) &= \cos\xi(0) + \sin\xi(0)\cdot\xi(0) + \cos\xi(t_{-4} - t_0) \\ &\quad - \sin\xi(t_{-4} - t_0)(\xi(t - \sin 9t - 1 - t_0) - \xi(t_{-4} - t_0)). \end{aligned}$$

Rešenje linearne jednačine (3.48), za $t \in [y_1^{-3}, y_2^{-3}]$, *je oblika*

$$x^n(t) = \psi_0(t)\left[x^n(y_1^{-3}) + \int_{y_1^{-3}}^{t} \psi_0^{-1}(s)(\alpha_1(s) - \bar{\beta}_0\bar{\alpha}_1(s))ds + \int_{y_1^{-3}}^{t} \psi_0^{-1}(s)\bar{\beta}_0 dw(s)\right].$$

Ponavljanjem ovog postupka se dobija aproksimativno rešenje na intervalu $[t_0, t_1]$, *a ekstenzijom date procedure na ostale intervale* $[t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, ..., n-1$, *dobija se rešenje* $\{x^n(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$.

Napomena 3.3.2 *Specijalno, ako je polazna jednačina autonomna i ako je* $m_1 = m_2 = 0$, *prethodno razmatrana metoda postaje uopštenje poznate Euler-Maruyama metode iz rada [56], s obzirom da se ne zahteva Lipschitz neprekidnost funkcije kašnjenja* δ. *Medjutim, izostavljanjem argumenta sa kašnjenjem, polazna jednačina (3.21) se svodi na običnu stohastičku diferencijalnu jednačinu. U tom smislu, rezultati u ovom poglavlju predstavljaju uopštenje rezultata dobijenih u radu [35].*

3.4 Pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima

U ovom poglavlju se razmatraju analitičke aproksimativne metode za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima, kao i za one bez Markovskih prelaza. Aproksimativno rešenje je definisano tako da zadovoljava jednačine čiji su koeficijenti Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine do proizvoljnog stepena, u okolini tačaka odredjenih elementima ekvidistantne particije vremenskog intervala. U slučaju jednačina sa Markovskim prelazima biće predstavljene dve metode: u prvoj će figurisati Taylorove aproksimacije koeficijenata po prva dva argumenta, dok će u drugoj figurisati Taylorove aproksimacije koeficijenata samo po prvom argumentu. U oba slučaja će biti dokazana bliskost tačnog i aproksimativnog rešenja u L^p-smislu, čiji red zavisi od broja članova u Taylorovom razvoju, s tim što na njega utiče i prisustvo lanca Markova. Zatim će ove metode biti prilagodjene slučaju kada je polazna jednačina, pantografska stohastička diferencijalna jednačina bez Markovskih prelaza. U tom smislu će biti dokazano da prva metoda pored toga što konvergira u L^p-smislu, konvergira i skoro izvesno.

Činjenica da su pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima u malom broju slučajeva eksplicitno rešive je osnovna motivacija za razvoj aproksimativnih metoda koje će biti opisane u nastavku. Od postojećih rezultata treba pomenuti rad [6], gde je razmatran stohastički Θ-metod za linearne stohastičke pantografske diferencijalne jednačine, rad [81], gde je dokazana konvergencija u verovatnoći Euler-Maruyama metode za stohastičke pantografske diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima i [9], gde je dokazana L^p-konvergencija analitičke metode za stohastičke diferencijalne jednačine sa konstantnim kašnjenjem i Markovskim prelazima.

Imajući u vidu oznake iz Poglavlja 1.11, za $q \in (0,1)$, biće razmatrana sledeća stohastička pantografska diferencijalna jednačina sa Markovskim prelazima

$$dx(t)=f(x(t),x(qt),r(t),t)dt+g(x(t),x(qt),r(t),t)dw(t), t\in[t_0,T], \tag{3.49}$$

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(t) : t \in [qt_0, t_0]\}, \quad r(t_0) = r_0. \tag{3.50}$$

Celo ovo poglavlje sadrži rezultate koji su objavljeni u radu M. Milošević, M. Jovanović [73].

3.4.1 L^p-konvergencija aproksimacija rešenja pantografskih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima

Predstavimo jednačinu (3.49) u ekvivalentnom integralnom obliku, tj. za svako $t\in[t_0,T]$,

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(s),x(qs),r(s),s)ds+\int_{t_0}^{t} g(x(s),x(qs),r(s),s)dw(s). \tag{3.51}$$

Rešenje jednačine (3.51) se aproksimira na ekvidistantnoj particiji

$$t_0 < t_1 < ... < t_n = T \tag{3.52}$$

intervala $[t_0,T]$, gde je n izabrano tako da je $\delta_n = \frac{T-t_0}{n} < 1$ i da uz to postoji ceo broj n_* tako da važi $t_0 - qt_0 = n_*\delta_n$. Dakle, particija intervala $[qt_0,T]$ je odredjena tačkama

$$t_k = t_0 + k\delta_n, \quad k = -n_*, -n_*+1, ..., -1, 0, 1, ..., n.$$

Neka je $j_k = \lfloor qk - n_* \rfloor, k = 0,1,...,n-1$, pri čemu je $\lfloor a \rfloor$ najveći ceo broj ne veći od a. Rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0,T]\}$ jednačine (3.51) se aproksimira na particiji (3.52) rešenjima $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0,1,...,n-1$ jednačina

$$x^n(t)=x^n(t_k)+\int_{t_k}^{t}\sum_{i=0}^{m_1}\frac{d^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{i!}ds \tag{3.53}$$

$$+\int_{t_k}^{t}\sum_{i=0}^{m_2}\frac{d^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{i!}dw(s),\ t\in[t_k,t_{k+1}],$$

sa početnim uslovom $x^n_{t_0}=\xi$ s.i. i $r(t_0)=r_0$.

U ovim jednačinama koeficijenti prenosa i difuzije su Taylorove aproksimacije koeficijenata f i g i to po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_k)$, i po drugom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_{j_k}), k=0,1,...,n-1$, do m_1-og i m_2-og izvoda, respektivno. Jasno,

$$\begin{aligned}
&d^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)\\
&=\sum_{i_1+\cdots+i_{2d}=i}C^i_{i_1,\dots,i_{2d}}\frac{\partial^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{\partial^{i_1}x^n_1(s)\dots\partial^{i_d}x^n_d(s)\partial^{i_{d+1}}x^n_1(qs)\dots\partial^{i_{2d}}x^n_d(qs)}\Delta x^n_{k,i_1,\dots,i_{2d}},\\
&d^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)\\
&=\sum_{i_1+\cdots+i_{2d}=i}C^i_{i_1,\dots,i_{2d}}\frac{\partial^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{\partial^{i_1}x^n_1(s)\dots\partial^{i_d}x^n_d(s)\partial^{i_{d+1}}x^n_1(qs)\dots\partial^{i_{2d}}x^n_d(qs)}\Delta x^n_{k,i_1,\dots,i_{2d}},
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
&C^i_{i_1,\dots,i_{2d}}=\frac{i!}{i_1!i_2!\cdots i_{2d}!},\\
&\Delta x^n_{k,i_1,\dots,i_{2d}}=(\Delta x^n_1(t_k))^{i_1}\cdots(\Delta x^n_d(t_k))^{i_d}(\Delta x^n_1(t_{j_k}))^{i_{d+1}}\cdots(\Delta x^n_d(t_{j_k}))^{i_{2d}},
\end{aligned}$$

dok je $\Delta x^n_j(t_k)=x^n_j(s)-x^n_j(t_k)$ i $\Delta x^n_j(t_{j_k})=x^n_j(qs)-x^n_j(t_{j_k})$ za svako $j=1,2,...,d$.

Aproksimativno rešenje $x^n=\{x^n(t),t\in[t_0,T]\}$ se konstruiše kao s.i. neprekidan proces sukcesivnim povezivanjem početnog uslova $\{\xi(t),t\in[qt_0,t_0]\}$ i procesa $\{x^n(t),t\in[t_k,t_{k+1}]\}$ u tačkama t_k kada je $k=0,1,...,n-1$.

Očigledno je, s obzirom na oblik aproksimativnih jednačina, da f i g moraju zadovoljavati odgovarajuće uslove. Bez preciziranja tih uslova, pretpostavićemo egzistenciju i jedinstvenost rešenja koja se javljaju u narednom izlaganju. Pored Lipschitzovog uslova (1.36) i uslova ograničenog rasta (1.37), uvode se sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije f i g imaju Taylorov razvoj po prvom i drugom argumentu, zaključno sa izvodima m_1-og i m_2-og reda, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Parcijalni izvodi reda m_1+1 i m_2+1 funkcija f i g, respektivno, su uniformno ograničeni, tj. postoji pozitivna konstanta L tako da važi

$$\sup_{R^d\times R^d\times S\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_1+1}f(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d,i,t)}{\partial^{i_1}x_1\cdots\partial^{i_d}x_d\partial^{i_{d+1}}y_1\cdots\partial^{i_{2d}}y_d}\right|\le L,\ i_1+\ldots+i_{2d}=m_1+1,$$

$$\sup_{R^d\times R^d\times S\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_2+1}g(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d,i,t)}{\partial^{i_1}x_1\cdots\partial^{i_d}x_d\partial^{i_{d+1}}y_1\cdots\partial^{i_{2d}}y_d}\right|\le L,\ i_1+\ldots+i_{2d}=m_2+1.$$

$\mathcal{A}_3$: Postoji konstanta $D>0$ tako da važi

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{m_1}\frac{d^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),t)}{i!}\right|\vee\left|\sum_{i=0}^{m_2}\frac{d^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),t)}{i!}\right| \qquad (3.54)\\
&\qquad\le D\Big(1+\sup_{s\in[qt_0,t]}|x^n(s)|\Big),\quad t\in[t_k,t_{k+1}],k=0,1,...,n-1.
\end{aligned}$$

Takodje, neka je $E\sup_{t\in[qt_0,t_0]}|\xi(t)|^{(M+1)^2p}<\infty$, što zajedno sa (3.54) implicira, za $p\geq 2$,

$$E\sup_{t\in[qt_0,T]}|x^n(t)|^{(M+1)^2p}\leq Q<\infty,$$

pri čemu je $M=\max\{m_1,m_2\}$ i $Q>0$ je konstanta nezavisna od n. Pored toga, pretpostavimo da su svi Lebesqueovi i Itovi integrali koji će biti korišćeni, dobro definisani.

$\mathcal{A}_4$: Za $p\geq 2$ postoji pozitivna konstanta C_ξ tako da za $k=-n_*,-n_*+1,...,-1$ početni uslov ξ zadovoljava uslov

$$E\sup_{s,t\in[t_k,t_{k+1}]}|\xi(t)-\xi(s)|^p\leq C_\xi\delta_n^{p/2}.$$

Pored toga, u nastavku se nekoliko puta, bez posebnog isticanja, koristi elementarna nejednakost (1.46), kao i stohastička integralna izometrija, Hölderova nejednakost i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost (Teorema 1.3.5).

Za dokazivanje bliskosti rešenja x i x^n u L^p-smislu, od značaja je sledeće tvrdjenje.

Propozicija 3.4.1 *Neka su $\{x^n(t),t\in[t_k,t_{k+1}]\},k=0,1,...,n-1$, rešenja jednačina (1.11.1) i neka su zadovoljeni uslov (1.37) i pretpostavke $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_3$. Tada, za svako $2\leq r\leq(M+1)p$, važi*

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r\leq C\cdot n^{-r/2},\quad t\in[t_k,t_{k+1}],\quad k=0,1,...,n-1.$$

Pored toga, ako važi pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(qs)-x^n(t_{j_k})|^r\leq\bar{C}\cdot n^{-r/2},\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,...,n-1,$$

pri čemu je $j_k=\lfloor qk-n_*\rfloor$ i $C,\bar{C}$ su generisane konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Da bi se pojednostavile oznake, neka je

$$F(x^n_t,x^n_{qt},t;x^n_{t_k},x^n_{t_{j_k}},r_{t_k})=\sum_{i=0}^{m_1}\frac{d^if(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),t)}{i!},$$
$$G(x^n_t,x^n_{qt},t;x^n_{t_k},x^n_{t_{j_k}},r_{t_k})=\sum_{i=0}^{m_2}\frac{d^ig(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),t)}{i!},$$

za svako $t\in[t_k,t_{k+1}],k\in\{0,1,...,n-1\}$.

Tada, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$, važi

$$f(x^n(t),x^n(qt),r(t_k),t)=F(x^n_t,x^n_{qt},t;x^n_{t_k},x^n_{t_{j_k}},r_{t_k})+r^f_{m_1,k}(t),\tag{3.55}$$
$$g(x^n(t),x^n(qt),r(t_k),t)=G(x^n_t,x^n_{qt},t;x^n_{t_k},x^n_{t_{j_k}},r_{t_k})+r^g_{m_2,k}(t),$$

gde su

$$\begin{aligned} r^f_{m_1,k}(t) &\equiv r^f_{m_1}(\Delta x^n(t_k), \Delta x^n(t_{j_k}), r(t_k), t) \\ &= \frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k)+\theta_f \Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k})+\theta_f \Delta x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{(m_1+1)!}, \\ r^g_{m_2,k}(t) &\equiv r^g_{m_2}(\Delta x^n(t_k), \Delta x^n(t_{j_k}), r(t_k), t) \\ &= \frac{d^{m_2+1} g(x^n(t_k)+\theta_g \Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k})+\theta_g \Delta x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{(m_2+1)!}, \end{aligned}$$

za neke $\theta_f, \theta_g \in (0,1)$, odgovarajući ostaci u Taylorovim aproksimacijama funkcija f i g, respektivno. Imajući u vidu pretpostavku $\mathcal{A}_2$, tj. uniformnu ograničenost (m_1+1)- ih and (m_2+1)-ih parcijalnih izvoda funkcija f i g, respektivno, kao i multinomnu formulu, dobija se

$$\begin{aligned} &|r^f_{m_1,k}(t)| \qquad (3.56) \\ &\le \frac{L}{(m_1+1)!}(|\Delta x^n_1(t_k)| + \ldots + |\Delta x^n_d(t_k)| + |\Delta x^n_1(t_{j_k})| + \cdots + |\Delta x^n_d(t_{j_k})|)^{m_1+1} \\ &\le \frac{2dL}{(m_1+1)!}(|\Delta x^n(t_k)|^2 + |\Delta x^n(t_{j_k})|^2)^{\frac{m_1+1}{2}} \\ &\le \frac{2(2^{\frac{m_1-1}{2}} \vee 1)dL}{(m_1+1)!}(|\Delta x^n(t_k)|^{m_1+1} + |\Delta x^n(t_{j_k})|^{m_1+1}), \end{aligned}$$

kada je $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$. Slično se dobija

$$|r^g_{m_2,k}(t)| \le \frac{2(2^{\frac{m_2-1}{2}} \vee 1)dL}{(m_2+1)!}(|\Delta x^n(t_k)|^{m_2+1} + |\Delta x^n(t_{j_k})|^{m_2+1}).$$

Prilikom ocenjivanja $E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s) - x^n(t_k)|^r$, na jednačinu (3.53) se nekoliko puta primenjuje elementarna nejednakost (1.46), zatim Hölderova nejednakost na Lebesgueov integral, kao i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost na integral Itoa. Tada je, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$,

$$\begin{aligned} &E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s) - x^n(t_k)|^r \qquad (3.57) \\ &\quad\le 2^{r-1}(t-t_k)^{r-1}\int_{t_k}^t E|F(x^n_s, x^n_{qs}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k})|^r ds \\ &\quad\quad + 2^{r-1}c_r(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\int_{t_k}^t E|G(x^n_s, x^n_{qs}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k})|^r ds \\ &\quad\equiv 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}-1}\Big[(t-t_k)^{\frac{r}{2}}J_1(t) + c_r J_2(t)\Big], \end{aligned}$$

gde je c_r univerzalna konstanta iz Teoreme 1.3.5, dok su sa $J_1(t)$ i $J_2(t)$ označeni odgovarajući integrali. Taylorov razvoj (3.55), uslov ograničenog rasta (1.37), pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$ i ocena (3.56), daju

$$J_1(t) = \int_{t_k}^t E|F(x^n_s, x^n_{qs}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k})|^r ds \qquad (3.58)$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|F(x_s^n, x_{qs}^n, s; x_{t_k}^n, x_{t_{j_k}}^n, r_{t_k}) - f(x^n(s), x^n(qs), r(t_k), s)|^r ds \\
&\quad + 2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|f(x^n(s), x^n(qs), r(t_k), s)|^r ds \\
&\le 2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|r_{m_1,k}^f(s)|^r ds + 2^{r-1}K^{\frac{r}{2}}\int_{t_k}^{t} E[1+|x^n(s)|^2+|x^n(qs)|^2]^{\frac{r}{2}} ds \\
&\le \frac{2^{2r-1}[(2^{\frac{m_1-1}{2}}\vee 1)dL]^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^{t} E[|\Delta x^n(t_k)|^{m_1+1}+|\Delta x^n(t_{j_k})|^{m_1+1}]^r ds \\
&\quad + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}}\int_{t_k}^{t}\left[1+E|x^n(s)|^r+E|x^n(qs)|^r\right] ds \\
&\le \frac{2^{r(m_1+4)-1}[(2^{\frac{m_1-1}{2}}\vee 1)dL]^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^{t} E\sup_{u\in[qt_0,T]}|x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds \\
&\quad + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}}\int_{t_k}^{t}[1+2E\sup_{u\in[qt_0,T]}|x^n(u)|^r] ds \\
&\le \frac{2^{r(m_1+4)-1}[(2^{\frac{m_1-1}{2}}\vee 1)dL]^r R}{[(m_1+1)!]^r}(t-t_k) + 2^{r-1}3^{\frac{r}{2}-1}K^{\frac{r}{2}}(1+2R)(t-t_k) \\
&\equiv C_1\cdot(t-t_k),
\end{aligned}
$$

pri čemu je $C_1 \equiv C_1(K, L, R, r, m_1, d)$ generisana konstanta i $R = 1 + Q$.

Ponavljanjem prethodnog postupka, dobija se

$$J_2(t) \le C_2 \cdot (t - t_k),$$

gde je $C_2 \equiv C_2(K, L, R, r, m_2, d)$ generisana konstanta. Zbog toga se (3.57) može oceniti kao

$$
\begin{aligned}
E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r &\le 2^{r-1}(t-t_k)^{\frac{r}{2}}\left[C_1(T-t_0)^{\frac{r}{2}}+c_r C_2\right] \\
&\le C_3\cdot(t-t_k)^{\frac{r}{2}} \\
&\le C\cdot n^{-r/2}, \quad t\in[t_k,t_{k+1}],
\end{aligned}
$$

pri čemu je C generisana konstanta, nezavisna od n.

Za dokaz drugog dela tvrdjenja, potrebno je uočiti da za svako $s \in [t_k, t], t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$ važi $qs - qt_k < s - t_k$. Kako je ranije uvedena oznaka $j_k = \lfloor qk - n_* \rfloor, k = 0, 1, ..., n-1$, to je $qs \in [t_{j_k}, t_{j_k+1}] \cup [t_{j_k+1}, t_{j_k+2}]$. Na dalje razmatranje utiče činjenica da se rešenje $x^n(qs)$, za neke vrednosti $s \in [t_0, T]$, poklapa sa početnim uslovom $\xi = \{\xi(t), t \in [qt_0, t_0]\}$. U tom smislu, javljaju se sledeća tri slučaja:

Slučaj 1: Ako je $j_k \ge 0$, tada se, na osnovu prvog dela dokaza, dobija

$$
\begin{aligned}
E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(qs)-x^n(t_{j_k})|^r \le\; & E\sup_{s\in[t_{j_k},t_{j_k+1}]}|x^n(s)-x^n(t_{j_k})|^r \\
& + 2^{r-1}E\sup_{s\in[t_{j_k+1},t_{j_k+2}]}|x^n(s)-x^n(t_{j_k+1})|^r
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

$$+2^{r-1}E|x^n(t_{j_k+1})-x^n(t_{j_k})|^r$$
$$\leq (2^r+1)C\cdot n^{-r/2}.$$

Slučaj 2: Ako je $j_k=-1$, tada, prvi deo dokaza i pretpostavka $\mathcal{A}_4$ impliciraju

$$\begin{aligned}E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(qs)-x^n(t_{j_k})|^r &\leq E\sup_{s\in[t_{-1},t_0]}|\xi(s)-\xi(t_{-1})|^r \\ &+2^{r-1}E\sup_{s\in[t_0,t_1]}|x^n(s)-x^n(t_0)|^r \\ &+2^{r-1}E|x^n(t_0)-\xi(t_{-1})|^r \\ &\leq [(2^{r-1}+1)\bar{C}_\xi+2^{r-1}C]\cdot n^{-r/2},\end{aligned} \tag{3.60}$$

gde je $\bar{C}_\xi=C_\xi(T-t_0)^{r/2}$.

Slučaj 3: Ako je $j_k<-1$, tada je, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_4$,

$$\begin{aligned}E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(qs)-x^n(t_{j_k})|^r &\leq E\sup_{s\in[t_{j_k},t_{j_k+1}]}|\xi(s)-\xi(t_{j_k})|^r \\ &+2^{r-1}E\sup_{s\in[t_{j_k+1},t_{j_k+2}]}|\xi(s)-\xi(t_{j_k+1})|^r \\ &+2^{r-1}E|\xi(t_{j_k+1})-\xi(t_{j_k})|^r \\ &\leq (2^r+1)\bar{C}_\xi\cdot n^{-r/2}.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Tako (3.59), (3.60) i (3.61) daju

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(qs)-x^n(t_{j_k})|^r\leq \bar{C}\cdot n^{-r/2}, t\in[t_k,t_{k+1}], k=0,1,...,n-1,$$

pri čemu je $\bar{C}=(2^r+1)(C+\bar{C}_\xi)$, čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Sledeća teorema daje ocenu bliskosti rešenja x i x^n u L^p-smislu.

Teorema 3.4.1 *Neka je x rešenje jednačine (3.51) i x^n, odgovarajuće aproksimativno rešenje koje zadovoljava jednačine (3.53). Pretpostavimo da važe svi uslovi Propozicije 3.4.1, kao i Lipschitzov uslov i pretpostavka $\mathcal{A}_4$. Tada, za $p\geq 2$, važi*

$$E\sup_{t\in[qt_0,T]}|x(t)-x^n(t)|^p\leq \beta_1 n^{-(m+1)p/2}+\beta_2 n^{-p/2}+\beta_3 n^{-1},$$

pri čemu je $m=\min\{m_1,m_2\}$, dok su β_1,β_2 i β_3 generisane konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t\in[t_0,T]$, na osnovu (3.51) i (3.53), sledi

$$x(t)-x^n(t)=\int_{t_0}^t\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)ds+\int_{t_0}^t\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)dw(s),$$

gde je

$$J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)=[f(x(s),x(qs),r(s),s)-F(x_s^n,x_{qs}^n,s;x_{t_k}^n,x_{t_{j_k}}^n,r_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s),$$
$$\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)=[g(x(s),x(qs),r(s),s)-G(x_s^n,x_{qs}^n,s;x_{t_k}^n,x_{t_{j_k}}^n,r_{t_k})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s).$$

Tada se, s obzirom da x i x^n zadovoljavaju isti početni uslov, dobija

$$
\begin{aligned}
E\sup_{s\in[qt_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p &\le E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\\
&\le 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du\\
&\quad+2^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du.
\end{aligned}
$$

Ako je $j=\max\{i\in\{0,1,...,n-1\},t_i\le t\}$, nejednakost (3.62) se može izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
E\sup_{s\in[qt_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p &\le 2^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du\\
&\quad+2^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du,
\end{aligned}
$$

odakle je

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[qt_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \qquad (3.62)\\
&\quad\le 2^{p-1}\Big[(T-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}J_3(t_{i+1}\wedge t)+c_p(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}J_4(t_{i+1}\wedge t)\Big],
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
J_3(s)&=\int_{t_i}^{s}E|f(x(u),x(qu),r(u),u)-F(x_u^n,x_{qu}^n,u;x_{t_i}^n,x_{t_{j_i}}^n,r_{t_i})|^p du,\\
J_4(s)&=\int_{t_i}^{s}E|g(x(u),x(qu),r(u),u)-G(x_u^n,x_{qu}^n,u;x_{t_i}^n,x_{t_{j_i}}^n,r_{t_i})|^p du,
\end{aligned}
$$

za svako $s\in[t_i,t_{i+1}\wedge t], i\in\{0,1,...,j\}$. Integral $J_3(s)$ se može oceniti na sledeći način

$$
\begin{aligned}
J_3(s)\le 3^{p-1}\Big[&\int_{t_i}^{s}E|f(x(u),x(qu),r(u),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)|^p du \qquad (3.63)\\
&+\int_{t_i}^{s}E|f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)|^p du\\
&+\int_{t_i}^{s}E|f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)-F(x_u^n,x_{qu}^n,u;x_{t_i}^n,x_{t_{j_i}}^n,r_{t_i})|^p du\Big].
\end{aligned}
$$

Primenom Lipschitzovog uslova (1.36) na prvi sabirak u (3.63), dobija se

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{s}E|f(x(u),x(qu),r(u),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)|^p du \qquad (3.64)\\
&\quad\le 2^{p/2-1}\bar{K}^{p/2}\Big[\int_{t_i}^{s}E|x(u)-x^n(u)|^p du+\int_{t_i}^{s}E|x(qu)-x^n(qu)|^p du\Big].
\end{aligned}
$$

Prilikom ocenjivanja drugog sabirka u (3.63), pored Lipschitzovog uslova se primenjuju Propozicija 3.4.1 i uslov linearnog rasta (1.37). Tada je

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)|^p du \qquad (3.65)\\
&\le 3^{p-1}\bigg[\int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)-f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(u),u)|^p du\\
&+\int_{t_i}^{s} E|f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(u),u)-f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(t_i),u)|^p du\\
&+\int_{t_i}^{s} E|f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(t_i),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)|^p du\bigg]\\
&\le 3^{p-1}2^{p/2}\bar{K}^{p/2}\int_{t_i}^{s}[E|x^n(u)-x^n(t_i)|^p+E|x^n(qu)-x^n(t_{j_i})|^p]du\\
&+6^{p-1}\int_{t_i}^{s} E[(|f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(u),u)|^p+|f(x^n(t_i),x^n(t_{j_i}),r(t_i),u)|^p)I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}]du\\
&\le 3^{p-1}2^{p/2}\bar{K}^{p/2}(C+\bar{C})\cdot n^{-p/2}(s-t_i)\\
&+2^p\cdot 3^{3p/2-2}\int_{t_i}^{s} E[(1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p)I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}]du.
\end{aligned}
$$

Uslovna nezavisnost izraza $1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p$ i $I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}$ u odnosu na σ-algebru generisanu slučajnom promenljivom $r(t_i)$, implicira

$$
\begin{aligned}
&E[(1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p)I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}] \qquad (3.66)\\
&\quad = E\Big[E[(1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p)I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}|r(t_i)]\Big]\\
&\quad = E\Big[E[1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p|r(t_i)]E[I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}|r(t_i)]\Big].
\end{aligned}
$$

Na osnovu markovskog svojstva se dobija

$$
\begin{aligned}
E[I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}|r(t_i)] &= \sum_{i\in S} I_{\{r(t_i)=i\}}P\{r(u)\neq i|r(t_i)=i\}\\
&= \sum_{i\in S} I_{\{r(t_i)=i\}}\sum_{j\neq i}[\gamma_{ij}(u-t_i)+o(u-t_i)]\\
&\le \max_{1\le i\le N}(-\gamma_{ii})\delta_n+o(\delta_n).
\end{aligned}
$$

Prema tome, (3.66) se može oceniti kao

$$
\begin{aligned}
&E[(1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p)I_{\{r(u)\neq r(t_i)\}}] \qquad (3.67)\\
&\qquad \le \Big(\max_{1\le i\le N}(-\gamma_{ii})\delta_n+o(\delta_n)\Big)E[1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p].
\end{aligned}
$$

Zamenom izraza (3.67) u (3.65) i korišćenjem uslova $\mathcal{A}_3$, dobija se

$$
\int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u),x^n(qu),r(u),u)-f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)|^p du \qquad (3.68)
$$

$$\leq 3^{p-1}2^{p/2}\bar{K}^{p/2}(C+\bar{C})\cdot n^{-p/2}(s-t_i)$$
$$+2^p\cdot 3^{3p/2-2}\int_{t_i}^{s}\Big(\max_{1\leq i\leq N}(-\gamma_{ii})\delta_n+o(\delta_n)\Big)E[1+|x^n(t_i)|^p+|x^n(t_{j_i})|^p]du$$
$$\leq K_1\cdot n^{-p/2}(s-t_i)+2^p\cdot 3^{3p/2-2}(1+2R)\Big(\max_{1\leq i\leq N}(-\gamma_{ii})\delta_n+o(\delta_n)\Big)(s-t_i),$$

pri čemu je $K_1=3^{p-1}2^{p/2}\bar{K}^{p/2}(C+\bar{C})$.

Za ocenjivanje trećeg sabirka u (3.63), koriste se pretpostavka $\mathcal{A}_2$ i Propozicija 3.4.1. Imajući u vidu ocenu (3.56), sledi

$$\int_{t_i}^{s}E|f(x^n(u),x^n(qu),r(t_i),u)-F(x^n_u,x^n_{qu},u;x^n_{t_i},x^n_{t_{j_i}},r_{t_i})|^pdu \tag{3.69}$$
$$\equiv\int_{t_i}^{s}E|r^f_{m_1,i}(u)|^pdu$$
$$\leq\frac{[2(2^{\frac{m_1-1}{2}}\vee 1)dL]^p}{[(m_1+1)!]^p}\Big[\int_{t_i}^{s}E|x^n(u)-x^n(t_i)|^{(m_1+1)p}du$$
$$+\int_{t_i}^{s}E|x^n(qu)-x^n(t_{j_i})|^{(m_1+1)p}du\Big]$$
$$\leq K_2\cdot n^{-(m_1+1)p/2}(s-t_i),$$

gde je $K_2=\frac{\left[2(2^{\frac{m_1-1}{2}}\vee 1)dL\right]^p(C+\bar{C})}{[(m_1+1)!]^p}$.

Zamenom (3.64), (3.68) i (3.69) u (3.63) se dobija

$$J_3(s)\leq\varphi(s,m_1), \tag{3.70}$$

pri čemu je

$$\varphi(s,m_1)=3^{p-1}2^{p/2-1}\bar{K}^{p/2}\Big[\int_{t_i}^{s}E|x(u)-x^n(u)|^pdu+\int_{t_i}^{s}E|x(qu)-x^n(qu)|^pdu\Big]$$
$$+3^{p-1}K_1\cdot n^{-p/2}(s-t_i)+3^{p-1}K_2\cdot n^{-(m_1+1)p/2}(s-t_i)$$
$$+2^p\cdot 3^{5p/2-3}(1+2R)\Big(\max_{1\leq i\leq N}(-\gamma_{ii})\delta_n+o(\delta_n)\Big)(s-t_i).$$

Analogno se dobija

$$J_4(s)\leq\varphi(s,m_2). \tag{3.71}$$

Tada ocene (3.70) i (3.71), zajedno sa (3.62), daju

$$E\sup_{s\in[qt_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\leq\alpha_1\Big[\int_{t_0}^{t}E|x(u)-x^n(u)|^pdu+\int_{t_0}^{t}E|x(qu)-x^n(qu)|^pdu\Big]$$
$$+[\alpha_2n^{-(m+1)p/2}+\alpha_3n^{-p/2}+\alpha_4n^{-1}](t-t_0)$$
$$\leq 2\alpha_1\int_{t_0}^{t}E\sup_{r\in[qt_0,u]}|x(r)-x^n(r)|^pdu$$
$$+[\alpha_2n^{-(m+1)p/2}+\alpha_3n^{-p/2}+\alpha_4n^{-1}](T-t_0),$$

gde je $m=\min\{m_1,m_2\}$, dok su $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ i α_4 generisane konstante, nezavisne od n.

Primenom teoreme Gronwall-Bellmana (Teorema 1.13.1) se dobija

$$E\sup_{s\in[qt_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \le [\alpha_2 n^{-(m+1)p/2}+\alpha_3 n^{-p/2}+\alpha_4 n^{-1}](T-t_0)e^{2\alpha_1(T-t_0)}$$
$$\equiv \beta_1 n^{-(m+1)p/2}+\beta_2 n^{-p/2}+\beta_3 n^{-1},$$

pri čemu su β_1,β_2 and β_3 generisane konstante. Kako poslednja nejednakost važi za svako $t\in[t_0,T]$, to je tvrdjenje teoreme dokazano. $\diamondsuit$

U nastavku se razmatra još jedna aproksimativna metoda gde su odgovarajuće jednačine jednostavnijeg oblika nego (3.51), dok je zbog prisustva lanca Markova, red L^p-bliskosti aproksimativnog i tačnog rešenja isti kao kod prvog metoda.

U ovom slučaju, rešenje $x=\{x(t),t\in[t_0,T]\}$ jednačine (3.51) se aproksimira na particiji (3.52) rešenjima $\{x^n(t),t\in[t_k,t_{k+1}]\}, k=0,1,...,n-1$ jednačina

$$x^n(t)=x^n(t_k)+\int_{t_k}^t\sum_{i=0}^{m_1}\frac{d^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{i!}\,ds \tag{3.72}$$
$$+\int_{t_k}^t\sum_{i=0}^{m_2}\frac{d^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{i!}\,dw(s),$$

sa početnim uslovom $x^n_{t_0}=\xi$ s.i. i $r(t_0)=r_0$, pri čemu je $j_k=\lfloor qk-n_*\rfloor$. U ovim jednačinama, koeficijenti prenosa i difuzije su Taylorove aproksimacije funkcija f i g, po prvom argumentu, u okolini tačaka $x^n(t_k), k=0,1,...,n-1$, zaključno sa m_1-im i m_2-im izvodima, respektivno.

Sada je

$$d^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)=\sum_{i_1+\cdots+i_d=i}C^i_{i_1,\ldots,i_d}\frac{\partial^i f(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{\partial^{i_1}x_1^n(s)\ldots\partial^{i_d}x_d^n(s)}\Delta x^n_{k,i_1,\ldots,i_d},$$
$$d^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)=\sum_{i_1+\cdots+i_d=i}C^i_{i_1,\ldots,i_d}\frac{\partial^i g(x^n(t_k),x^n(t_{j_k}),r(t_k),s)}{\partial^{i_1}x_1^n(s)\ldots\partial^{i_d}x_d^n(s)}\Delta x^n_{k,i_1,\ldots,i_d},$$

pri čemu je $C^i_{i_1,\ldots,i_d}=\frac{i!}{i_1!i_2!\cdots i_d!}$ i $\Delta x^n_{k,i_1,\ldots,i_d}=(\Delta x_1^n(t_k))^{i_1}\cdots(\Delta x_d^n(t_k))^{i_d}$.

Pored Lipschitzovog uslova (1.36), uslova linearnog rasta (1.37) i ranije uvedenih pretpostavki $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$, uvode se i sledeće pretpostavke:

$\mathcal{B}_1$: Funkcije f i g imaju Taylorov razvoj po prvom argumentu zaključno sa m_1-im i m_2-im izvodima, respektivno.

$\mathcal{B}_2$: Izvodi m_1+1-og i m_2+1-og reda funkcija f i g, respektivno, su uniformno ograničeni, tj. postoji pozitivna konstanta $\tilde{L}$ tako da važi

$$\sup_{R^d\times R^d\times S\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_1+1}f(x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_d,i,t)}{\partial^{i_1}x_1\cdots\partial^{i_d}x_d}\right|\le\tilde{L},\quad i_1+\ldots+i_d=m_1+1,$$
$$\sup_{R^d\times R^d\times S\times[t_0,T]}\left|\frac{\partial^{m_2+1}g(x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_d,i,t)}{\partial^{i_1}x_1\cdots\partial^{i_d}x_d}\right|\le\tilde{L},\quad i_1+\ldots+i_d=m_2+1.$$

Kao što je bio slučaj sa prvom metodom, i u ovom slučaju će najpre biti dokazan naredni rezultat koji daje bitnu osobinu aproksimativnog rešenja x^n odredjenog jednačinama (3.72).

Propozicija 3.4.2 *Neka su* $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$, *rešenja jednačina (3.72) i neka su zadovoljeni uslov ograničenog rasta (1.37) i pretpostavke* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_3$. *Tada, za svako* $2 \le r \le (M+1)p$,

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \le \tilde{C} \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Pored toga, ako važi pretpostavka $\mathcal{A}_4$, *tada je*

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(qs) - x^n(t_{j_k})|^r \le \hat{C} \cdot n^{-r/2},\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., n-1,$$

pri čemu je $j_k = \lfloor qk - n_* \rfloor$ *i* $\tilde{C}, \hat{C}$ *su generisane konstante, nezavisne od* n.

Dokaz. Zbog pojednostavljenja notacije, uvode se oznake

$$\tilde{F}(x^n_t, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k}) = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{i!},$$
$$\tilde{G}(x^n_t, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k}) = \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{i!},$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Tada je, s obzirom da važi pretpostavka $\mathcal{B}_1$,

$$f(x^n(t), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t) = \tilde{F}(x^n_t, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k}) + \tilde{r}^f_{m_1,k}(t), \tag{3.73}$$
$$g(x^n(t), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t) = \tilde{G}(x^n_t, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k}) + \tilde{r}^g_{m_2,k}(t),$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}\tilde{r}^f_{m_1,k}(t) &\equiv \tilde{r}^f_{m_1}(\Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)\\ &= \frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k) + \theta_f \Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{(m_1+1)!},\\ \tilde{r}^g_{m_2,k}(t) &\equiv \tilde{r}^g_{m_2}(\Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)\\ &= \frac{d^{m_2+1} g(x^n(t_k) + \theta_g \Delta x^n(t_k), x^n(t_{j_k}), r(t_k), t)}{(m_2+1)!},\end{aligned}$$

za neke $\theta_f, \theta_g \in (0, 1)$, odgovarajući ostaci u Taylorovim aproksimacijama funkcija f i g, respektivno. Na osnovu pretpostavke $\mathcal{B}_2$, tj. uniformne ograničenosti (m_1+1)-ih i (m_2+1)-ih parcijalnih izvoda funkcija f i g, respektivno, dobijaju se ocene

$$|\tilde{r}^f_{m_1,k}(t)| \le \frac{d\tilde{L}}{(m_1+1)!} |x^n(t) - x^n(t_k)|^{m_1+1}, \tag{3.74}$$
$$|\tilde{r}^g_{m_2,k}(t)| \le \frac{d\tilde{L}}{(m_2+1)!} |x^n(t) - x^n(t_k)|^{m_2+1},$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$.

Osnovni cilj je oceniti $E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r$. U tom smislu se sprovodi postupak sličan onom iz dokaza Propozicije 3.4.1. Na taj način se dobija

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \leq \tilde{C} \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

pri čemu je $\tilde{C}$ generisana konstanta, nezavisna od n.

Drugi deo tvrdjenja se dokazuje na potpuno isti način kao što je to učinjeno u dokazu Propozicije 3.4.1, zbog čega je izostavljen. $\diamondsuit$

Na ovaj način se dobija rezultat koji omogućava dokazivanje glavnog rezultata, tj. ocenjivanje L^p-bliskosti rešenja x jednačine (3.51) i rešenja x^n jednačina (3.72).

Teorema 3.4.2 *Neka je x rešenje jednačine (3.51) i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje odredjeno jednačinama (3.72). Ako su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.4.2, kao i Lipschitzov uslov i pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada, za svako $p \geq 2$, važi*

$$E \sup_{t\in[qt_0,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \leq \tilde{\beta}_1 n^{-(m+1)p/2} + \tilde{\beta}_2 n^{-p/2} + \tilde{\beta}_3 n^{-1},$$

gde je $m = \min\{m_1, m_2\}$, dok su $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ i $\tilde{\beta}_3$ generisane konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t \in [t_0, T]$, imajući u vidu jednačine (3.51) and (3.72), sledi da je

$$x(t) - x^n(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} J^1_{t_k, t_{k+1}\wedge t}(s) ds + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{J}^1_{t_k, t_{k+1}\wedge t}(s) dw(s),$$

pri čemu je

$$J^1_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [f(x(s), x(qs), r(s), s) - \tilde{F}(x^n_s, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k})] I_{[t_k, t_{k+1}\wedge t)}(s),$$
$$\tilde{J}^1_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [g(x(s), x(qs), r(s), s) - \tilde{G}(x^n_s, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, r_{t_k})] I_{[t_k, t_{k+1}\wedge t)}(s).$$

Tada se, na osnovu argumenata korišćenih u dokazu Teoreme 3.4.1, za $j = \max\{i \in \{0, 1, ..., n-1\}, t_i \leq t\}$, dobija

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[qt_0,t]} |x(s) - x^n(s)|^p \qquad (3.75) \\ &\leq 2^{p-1} \Big[(T - t_0)^{p-1} \sum_{i=0}^{j} \tilde{J}_3(t_{i+1} \wedge t) + c_p (T - t_0)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=0}^{j} \tilde{J}_4(t_{i+1} \wedge t) \Big], \end{aligned}$$

gde je

$$\tilde{J}_3(s) = \int_{t_i}^{s} E|f(x(u), x(qu), r(u), u) - \tilde{F}(x^n_u, u; x^n_{t_i}, x^n_{t_{j_i}}, r_{t_i})|^p du,$$
$$\tilde{J}_4(s) = \int_{t_i}^{s} E|g(x(u), x(qu), r(u), u) - \tilde{G}(x^n_u, u; x^n_{t_i}, x^n_{t_{j_i}}, r_{t_i})|^p du,$$

za svako $s \in [t_i, t_{i+1} \wedge t], i \in \{0, 1, ..., j\}$. Integral $\tilde{J}_3(s)$ se može oceniti na sledeći način

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_3(s) \leq 4^{p-1} \Bigg[& \int_{t_i}^{s} E|f(x(u), x(qu), r(u), u) - f(x^n(u), x^n(qu), r(u), u)|^p du \\
& + \int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u), x^n(qu), r(u), u) - f(x^n(u), x^n(qu), r(t_i), u)|^p du \\
& + \int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u), x^n(qu), r(t_i), u) - f(x^n(u), x^n(t_{j_i}), r(t_i), u)|^p du \\
& + \int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u), x^n(t_{j_i}), r(t_i), u) - \tilde{F}(x_u^n, u; x_{t_i}^n, x_{t_{j_i}}^n, r_{t_i})|^p du \Bigg].
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Prvi i drugi sabirak u izrazu (3.76) se mogu oceniti na isti način kao (3.64) i (3.68), respektivno, u skladu sa postupkom korišćenim u dokazu Teoreme 3.4.1.

Ocenjivanje trećeg sabirka u izrazu (3.76) zahteva primenu Lipschitzovog uslova i Propozicije 3.4.2. Na taj način se dobija

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u), x^n(qu), r(t_i), u) - f(x^n(u), x^n(t_{j_i}), r(t_i), u)|^p du \\
& \qquad \leq \bar{K}^{p/2} \hat{C} \cdot n^{-p/2} (s - t_i).
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Prilikom ocenjivanja četvrtog sabirka u izrazu (3.76), koriste se pretpostavka $\mathcal{B}_2$ i Propozicija 3.4.2, što rezultira ocenom

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_i}^{s} E|f(x^n(u), x^n(t_{j_i}), r(t_i), u) - F(x_u^n, u; x_{t_i}^n, x_{t_{j_i}}^n, r_{t_i})|^p du \\
& \qquad \equiv \int_{t_i}^{s} E|\tilde{r}_{m_1,i}^f(u)|^p du \\
& \qquad \leq \frac{d^p \tilde{L}^p}{[(m_1+1)!]^p} \int_{t_i}^{s} E|x^n(u) - x^n(t_i)|^{(m_1+1)p} du \\
& \qquad \leq \tilde{K}_2 \cdot n^{-(m_1+1)p/2} (s - t_i),
\end{aligned} \tag{3.78}
$$

gde je $\tilde{K}_2 = \frac{d^p L^p \tilde{C}}{[(m_1+1)!]^p}$.

Zamenjivanjem ocena (3.64), (3.68), (3.77) i (3.78) u (3.76), dobija se

$$
\tilde{J}_3(s) \leq \psi(s, m_1), \tag{3.79}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\psi(s, m_1) \leq {} & 4^{p-1} 2^{p/2-1} \bar{K}^{p/2} \left[\int_{t_i}^{s} E|x(u) - x^n(u)|^p du + \int_{t_i}^{s} E|x(qu) - x^n(qu)|^p du \right] \\
& + 4^{p-1} (K_1 + \bar{K}^{p/2} \hat{C}) \cdot n^{-p/2} (s - t_i) + 4^{p-1} \tilde{K}_2 \cdot n^{-(m_1+1)p/2} (s - t_i) \\
& + 2^{3p-2} \cdot 3^{3p/2-2} (1 + 2R) \Big(\max_{1 \leq i \leq N} (-\gamma_{ii}) \delta_n + o(\delta_n) \Big) (s - t_i).
\end{aligned}
$$

Analogno se dobija ocena

$$\tilde{J}_4(s) \leq \psi(s, m_2). \tag{3.80}$$

Ocene (3.79) i (3.80), zajedno sa izrazom (3.75), daju

$$E \sup_{s\in[qt_0,t]} |x(s) - x^n(s)|^p \leq 2\tilde{\alpha}_1 \int_{t_0}^{t} E \sup_{r\in[qt_0,u]} |x(r) - x^n(r)|^p du$$
$$+[\tilde{\alpha}_2 n^{-(m+1)p/2} + \tilde{\alpha}_3 n^{-p/2} + \tilde{\alpha}_4 n^{-1}](T - t_0),$$

gde je $m = \min\{m_1, m_2\}$, dok su $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ i $\tilde{\alpha}_4$ generisane konstante, nezavisne od n.

Na osnovu teoreme Gronwall-Bellmana sledi

$$E \sup_{s\in[qt_0,T]} |x(s) - x^n(s)|^p \leq \tilde{\beta}_1 n^{-(m+1)p/2} + \tilde{\beta}_2 n^{-p/2} + \tilde{\beta}_3 n^{-1},$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Napomena 3.4.1 *Potrebno je istaknuti da se u Teoremi 3.4.1, sabirak $\beta_3 n^{-1}$ u oceni L^p-bliskosti rešenja x i x^n, javlja kao posledica primene markovskog svojstva. Pored toga, sabirak $\beta_2 n^{-p/2}$ u toj oceni se javio nakon svodjenja odgovarajućeg izraza na oblik pogodan za primenu uslovne nezavisnosti, što je takodje posledica markovskog svojstva.*

3.4.2 Pantografske stohastičke diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju će biti reči o običnim pantografskim stohastičkim diferencijalnim jednačinama (bez Markovskih prelaza). Može se pokazati da obe ranije uvedene metode konvergiraju u L^p-smislu brže nego u slučaju sa Markovskim prelazima.

Predmet razmatranja je jednačina oblika (3.51), ali bez Markovskih prelaza. Postupkom analognim onom koji je korišćen u Poglavlju 3.4.1 može se konstruisati odgovarajuća aproksimativna metoda za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine (bez Markovskih prelaza) i dokazati da je red L^p-konvergencije odgovarajućeg niza aproksimativnih rešenja $O(n^{-(m+1)p/2})$, kada $n \to \infty$, gde je $m = \min\{m_1, m_2\}$. U tom smislu, aproksimativne jednačine su oblika (3.53), bez Markovskih prelaza.

Kako se u dokazu Propozicije 3.4.1 ne koristi svojstvo Markova, tako i u ovom slučaju važi analogno tvrdjenje. Zbog toga će biti naveden samo glavni rezultat koji se odnosi na L^p-bliskost rešenja x jednačine (3.51), ali bez Markovskih prelaza, i odgovarajućeg aproksimativnog rešenja x^n.

Teorema 3.4.3 *Neka je x rešenje jednačine (3.51) bez Markovskih prelaza i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje odredjeno jednačinama oblika (3.53), prilagodjenim ovom slučaju. Pod pretpostavkom da važe uslovi Propozicije 3.4.1, Lipschitzov uslov i $\mathcal{A}_4$, za $p \geq 2$ važi*

$$E \sup_{t\in[qt_0,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \leq H \cdot n^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m = \min\{m_1, m_2\}$ i H je generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz ovog tvrdjena je izostavljen jer je sličan dokazu Teoreme 3.4.1, tačnije, bazira se na ocenama (3.63) i (3.69).

Na osnovu prethodnih tvrdjenja, može se dokazati skoro izvesna konvergencija niza $\{x^n, n \in N\}$ aproksimativnih rešenja odredjenih jednačinama (3.53) bez Markovskih prelaza, ka rešenju x jednačine (3.51) bez Markovskih prelaza.

Teorema 3.4.4 *Neka važe svi uslovi Teoreme 3.4.3. Tada, niz $\{x^n, n \in N\}$ aproksimativnih rešenja odredjenih jednačinama (3.53) bez Markovskih prelaza, konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (3.51) bez Markovskih prelaza.*

Dokaz. Na osnovu Chebyshevljeve nejednakosti i Teoreme 3.4.1, za proizvoljno $\eta > 0$, važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\sup_{t\in[t_0,T]} |x(t) - x^n(t)|^{\frac{p}{2}} \geq n^{-\eta}\Big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} E \sup_{t\in[t_0,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \cdot n^{2\eta}$$
$$\leq H \sum_{n=1}^{\infty} n^{-[(m+1)p-4\eta]/2}.$$

Ako se izabere, na primer, $\eta < 1/2$ za $p = 2$ i $\eta < (p/2 - 1)/2$ za $p > 2$, tada red na desnoj srani nejednakosti konvergira. Na osnovu Borell-Cantellijeve leme sledi $x^n \xrightarrow{s.i.} x$ kada $n \to \infty$. $\diamondsuit$

Za razliku od Teoreme 3.4.3, kada se izostavi lanac Markova u polaznoj jednačini, L^p-bliskost rešenja polazne jednačine i aproksimativnog rešenja (3.72) se može oceniti $\gamma_1 n^{-(m+1)p/2} + \gamma_2 n^{-p/2}$, pri čemu su γ_1 i γ_2 generisane konstante, nezavisne od n.

Napomena 3.4.2 *Rezultati u Poglavljima 3.4.1 i 3.4.2 predstavljaju uopštenje rezultata rada [35]. Naime, izostavljanjem argumenta sa kašnjenjem i lanca Markova, prethodno navedeni rezultati se svode na one iz rada [35]. Specijalno, ako je* $M = \max\{m_1, m_2\} = 0$, *tada su aproksimativna rešenja, odredjena jednačinama (3.53) i (3.72) ekvivalentna i svode se na poznata Euler-Maruyama rešenja. Euler-Maruyama metoda za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima je razmatrana u radu [81], gde je dokazana konvergencija date metode u verovatnoći, ali pod nešto slabijim uslovima nego što su (1.36) i (1.37). Medjutim, za sada nema poznatih rezultata koji se odnose na L^p konvergenciju Euler-Maruyama metode za pantografske stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima. U tom smislu, prethodno navedeni rezultati otklanjaju taj nedostatak. Na drugoj strani, ako je $M = 0$ i ako se izostavi argument sa kašnjenjem u polaznoj jednačini, dobija se isti red srednje kvadratne konvergencije kao u monografiji [57].*

Prethodno razmatranje će biti zaokruženo jednostavnim primerom koji ilustruje teorijske rezultate.

Primer 3.4.1

Neka je w jednodimenzionalno Brownovo kretanje. Takodje, neka je r neprekidan s desna lanac Markova koji je nezavisan od w sa vrednostima iz skupa $S = \{1, 2\}$ i generatorom

$$\Gamma = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right].$$

Polazna jednačina će biti sledeća skalarna pantografska stohastička diferencijalna jednačina sa Markovskim prelazima

$$dx(t) = f(x(t), x(0.5t), r(t))dt + g(x(t), x(0.5t), r(t))dw(t), \; t \in [1, 2], \qquad (3.81)$$

koja zadovoljava početni uslov $\xi(t) = 1, t \in [0.5, 1]$, $r(1) = 1$, pri čemu je

$$\begin{aligned} f(x, y, 1) &= \sin x, \quad f(x, y, 2) = \cos x + y, \\ g(x, y, 1) &= x + \sin y, \quad g(x, y, 2) = \sin(x + y). \end{aligned}$$

Očigledno, koeficijenti jednačine (3.81) zadovoljavaju Lipschitzov uslov (1.36) i uslov ograničenog rasta (1.37), dok je $E \sup_{t\in[0.5,1]} |\xi(t)|^p < \infty$, $p \geq 2$. Dakle, postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [0.5, 2]\}$ ove jednačine čiji su momenti reda $p \geq 2$ uniformno ograničeni. Pored toga, početni uslov ξ zadovoljava uslov $\mathcal{A}_4$. S obzirom da važi pretpostavka $\mathcal{A}_1$, aproksimativno rešenje koje odgovara rešenju jednačine (3.81), biće definisano za $m_1 = m_2 = 1$ i $n = 4$. Na osnovu (3.53), za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, 3$, koeficijenti aproksimativnih jednačina su oblika

$$\begin{aligned} &F(x^n_t, x^n_{0.5t}, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, 1) = \sin x^n(t_k) + \cos x^n(t_k)(x^n(t) - x^n(t_k)), \\ &F(x^n_t, x^n_{0.5t}, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, 2) = \cos x^n(t_k) - \sin x^n(t_k)(x^n(t) - x^n(t_k)) + x^n(0.5t), \\ &G(x^n_t, x^n_{0.5t}, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, 1) = \sin x^n(t_{j_k}) + x^n(t) + \cos x^n(t_{j_k})(x^n(0.5t) - x^n(t_{j_k})), \\ &G(x^n_t, x^n_{0.5t}, t; x^n_{t_k}, x^n_{t_{j_k}}, 2) \\ &= \sin(x^n(t_k) + x^n(t_{j_k})) + \cos(x^n(t_k) + x^n(t_{j_k}))(x^n(t) - x^n(t_k) + x^n(0.5t) - x^n(t_{j_k})). \end{aligned}$$

Očigledno je da su ovi koeficijenti linearni po $x^n(t)$ i $x^n(0.5t)$. Zbog toga oni zadovoljavaju uslov ograničenog rasta koji implicira $E \sup_{t\in[0.5,2]} |x^n(t)|^p \leq Q$ za neko $Q > 0$ i svako $p \geq 2$, tj. pretpostavka $\mathcal{A}_3$ važi.

Pored toga, važi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f(x, y, 1)}{\partial^2 x} = -\sin x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, 1)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, 1)}{\partial^2 y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 f(x, y, 2)}{\partial^2 x} = -\cos x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, 2)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, 2)}{\partial^2 y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 g(x, y, 1)}{\partial^2 x} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(x, y, 1)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(x, y, 1)}{\partial^2 y} = -\sin x, \\ &\frac{\partial^2 g(x, y, 2)}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 g(x, y, 2)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g(x, y, 2)}{\partial^2 y} = -\sin(x + y). \end{aligned}$$

Dakle, svi parcijalni izvodi drugog reda, koeficijenata f i g su uniformno ograničeni, pa je uslov $\mathcal{A}_2$ zadovoljen za $L = 1$. Imajući u vidu prethodno razmatranje, zaključuje se da su sve pretpostavke Teoreme 3.4.1 zadovoljene. Šta više, važe i sve pretpostavke Teorema 3.4.2 i 3.4.3.

3.5 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovim skokom

U ovom poglavlju će biti predstavljena analitička metoda aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i Poissonovim skokom. U tom smislu će biti razmatrana dva slučaja i to kada je Poissonov skok opisan pomoću integrala u odnosu na Poissonovu slučajnu meru, kao i kada je opisan integralom u odnosu na Poissonov slučajni proces.

U oba slučaja aproksimativno rešenje se definiše na ekvidistantnoj particiji vremenskog intervala, kao rešenje stohastičke diferencijalne jednačine čiji su koeficijenti Taylorove aproksimacije koeficijenata polazne jednačine. Glavni rezultat se odnosi na L^p-konvergenciju i skoro izvesnu konvergenciju niza aproksimativnih rešenja ka rešenju polazne jednačine, pri čemu red L^p-konvergencije raste sa povećanjem broja članova u Taylorovom razvoju koeficijenata. Rezultati koji će biti navedeni sadržani su u radu [74].

S obzirom da samo uska klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem dopušta eksplicitno rešavanje, postoji permanentna potreba za razvojem aproksimativnih metoda, kako eksplicitnih, tako i implicitnih. Na primer, u radovima [7, 8, 56] se mogu naći rezultati koji se tiču konvergencije eksplicitnih numeričkih metoda, dok se u [52] može naći studija o stabilnosti i konvergenciji semi-implicitne Eulerove metode za linearne stohastičke diferencijalne jednačine za kašnjenjem. Isto tako, aproksimacija rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i Poissonovim skokom je tema kojom su se bavili brojni autori. Medju prvim autorima koji su se time bavili su D.J. Higham i P.E. Kloeden, koji su u radu [30] uveli numeričke aproksimativne metode. U [86, 87] je proučavana semi-implicitna Eulerova metoda a u [82] konvergencija Euler-Maruyama aproksimativnog rešenja, za stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovim skokom.

3.5.1 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovom slučajnom merom

U osnovi predstojeće diskusije je sledeća stohastička diferencijalna jednačina sa kašnjenjem i Poissonovom slučajnom merom

$$\begin{aligned} dx(t) = {} & f(x(t), x(t-\tau), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), t)dw(t) \\ & + \int_{R^d} h(x(t), x(t-\tau), u, t)\tilde{\nu}(du, dt), \ t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{3.83}$$

o kojoj je bilo reči u Poglavlju 1.12.1, čiji je integralni oblik

$$\begin{aligned} x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), x(s-\tau), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), x(s-\tau), s)dw(s) \\ + \int_{t_0}^{t} \int_{R^d} h(x(s), x(s-\tau), u, s)\tilde{\nu}(du, ds), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Rešenje jednačine (3.84) se aproksimira na ekvidistantnoj particiji

$$t_0 < t_1 < ... < t_n = T \tag{3.85}$$

intervala $[t_0, T]$, pri čemu se n bira tako da važi $\delta_n = \frac{T-t_0}{n} < 1$, kao i da postoji prirodan broj n_* za koji je $\tau = n_*\delta_n$. Dakle, podeone tačke intervala $[t_0 - \tau, T]$ su

$$t_k = t_0 + k\delta_n, \quad k = -n_*, -n_* + 1, ..., -1, 0, 1, ..., n.$$

Rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (3.84) se aproksimira na particiji (3.85) rešenjima $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$ jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) + \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{i!} ds \\ + \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{i!} dw(s) \\ + \int_{t_k}^{t} \int_{R^d} \sum_{i=0}^{m_3} \frac{d^i h(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), u, s)}{i!} \tilde{\nu}(du, dt), \end{aligned} \tag{3.86}$$

pri čemu je zadovoljen početni uslov $x^n_{t_0} = \xi$ s.i. U ovoj jednačini, koeficijenti su Taylorove aproksimacije funkcija f, g i h, po prvom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_k)$, kao i po drugom argumentu u okolini tačaka $x^n(t_{k-n_*}), k = 0, 1, ..., n-1$, zaključno sa m_1-im, m_2-im i m_3-im izvodom, respektivno, dok je

$$d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i f(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{\partial^j x^n(s) \partial^{i-j} x^n(s-\tau)} (\Delta x^n_{t_k})^j (\Delta x^n_{t_{k-n_*}})^{i-j},$$

$$d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i g(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{\partial^j x^n(s) \partial^{i-j} x^n(s-\tau)} (\Delta x^n_{t_k})^j (\Delta x^n_{t_{k-n_*}})^{i-j},$$

$$\begin{aligned} d^i h(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), u, s) \\ = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i h(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), u, s)}{\partial^j x^n(s) \partial^{i-j} x^n(s-\tau)} (\Delta x^n_{t_k})^j (\Delta x^n_{t_{k-n_*}})^{i-j}, \end{aligned}$$

za $\Delta x^n_{t_k} = x^n(s) - x^n(t_k)$ i $\Delta x^n_{t_{k-n_*}} = x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})$.

Pored Lipschitzovog uslova (1.40) i uslova ograničenog rasta (1.41), za dokazivanje glavnih rezultata su neophodne sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: Funkcije f, g i h imaju Taylorov razvoj po prvom i drugom argumentu, zaključno sa m_1-im, m_2-im i m_3-im izvodom, respektivno.

$\mathcal{A}_2$: Parcijalni izvodi m_1+1-og reda funkcije f, m_2+1-og reda funkcije g i m_3+1-og reda funkcije h su uniformno ograničeni, tj. postoji pozitivna konstanta L tako da važi

$$\begin{aligned}
&\sup_{R^d\times R^d\times[t_0,T]}\Big|\frac{\partial^{m_1+1}f(x,y,t)}{\partial x^j\partial y^{m_1+1-j}}\Big|\leq L,\ j=0,1,...,m_1+1\\
&\sup_{R^d\times R^d\times[t_0,T]}\Big|\frac{\partial^{m_2+1}g(x,y,t)}{\partial x^j\partial y^{m_2+1-j}}\Big|\leq L,\ j=0,1,...,m_2+1,\\
&\sup_{R^d\times R^d\times[t_0,T]}\int_{R^d}\Big|\frac{\partial^{m_3+1}h(x,y,u,t)}{\partial x^j\partial y^{m_3+1-j}}\Big|^2\Pi(du)\leq L^2,\ j=0,1,...,m_3+1.
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_3$: Postoji konstanta $Q>0$ koja ne zavisi od n, tako da, za $p\geq 2$ važi

$$E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x^n(t)|^{(M+1)^2p}\leq Q<\infty,$$

pri čemu je $M=\max\{m_1,m_2,m_3\}$. Pored toga, neka je $E\sup_{t\in[t_0-\tau,t_0]}|\xi(t)|^p<\infty$, $p\geq 2$ i neka su svi Lebesgueovi i Itovi integrali, kao i integrali u odnosu na Poissonovu meru, koji se u nastavku koriste, dobro definisani.

$\mathcal{A}_4$: Za $p\geq 2$, postoji konstanta $C_\xi>0$ tako da, za $k=-n_*,-n_*+1,...,-1$, važi

$$E\sup_{s,t\in[t_k,t_{k+1}]}|\xi(t)-\xi(s)|^p\leq C_\xi\cdot n^{-p/2}.$$

U nastavku će, bez posebnog isticanja, više puta biti primenjena elementarna nejednakost (1.46), Hölderova nejednakost na Lebesgueove integrale, kao i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost na ostala dva tipa integrala.

Najpre će biti naveden pomoćni rezultat, koji će imati značajnu ulogu u dokazivanju bliskosti rešenja x i x^n.

Propozicija 3.5.1 *Neka su $\{x^n(t), t\in[t_k,t_{k+1}]\}, k=0,1,...,n-1$, rešenja jednačina (3.86). Ako važi uslov (1.41) i pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, tada za svako $2\leq r\leq(M+1)p$, važi*

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s)-x^n(t_k)|^r\leq C\cdot n^{-r/2},\quad t\in[t_k,t_{k+1}],\quad k=0,1,...,n-1.$$

Ako je zadovoljena i pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada je

$$E\sup_{s\in[t_k,t]}|x^n(s-\tau)-x^n(t_{k-n_*})|^r\leq\bar{C}\cdot n^{-r/2},\ t\in[t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,...,n-1,$$

pri čemu su C i $\bar{C}$ poznate konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Da bi se pojednostavio zapis, neka je

$$
\begin{aligned}
F(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), t)}{i!}, \\
G(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) &= \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), t)}{i!}, \\
H(x_t^n, x_{t-\tau}^n, u, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) &= \sum_{i=0}^{m_3} \frac{d^i h(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), u, t)}{i!},
\end{aligned}
$$

kada je $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Tada je, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$,

$$
\begin{aligned}
f(x^n(t), x^n(t-\tau), t) &= F(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) + r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t), \qquad (3.87)\\
g(x^n(t), x^n(t-\tau), t) &= G(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) + r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t), \\
h(x^n(t), x^n(t-\tau), u, t)& \\
&= H(x_t^n, x_{t-\tau}^n, u, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) + r_{m_3}^h(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, u, t),
\end{aligned}
$$

pri čemu su, za neke $\theta_f, \theta_g, \theta_h \in (0, 1)$,

$$
\begin{aligned}
r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t) &= \frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k) + \theta_f \Delta x_{t_k}^n, x^n(t_{k-n_*}) + \theta_f \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t)}{(m_1+1)!}, \\
r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t) &= \frac{d^{m_2+1} g(x^n(t_k) + \theta_g \Delta x_{t_k}^n, x^n(t_{k-n_*}) + \theta_g \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t)}{(m_2+1)!}, \\
r_{m_3}^h(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, u, t) &= \frac{d^{m_3+1} h(x^n(t_k) + \theta_h \Delta x_{t_k}^n, x^n(t_{k-n_*}) + \theta_h \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, u, t)}{(m_3+1)!},
\end{aligned}
$$

odgovarajući ostaci Taylorovih aproksimacija funkcija f, g i h, respektivno. Kako važi pretpostavka $\mathcal{A}_2$, tj. uniformna ograničenost (m_1+1)-ih, (m_2+1)-ih i (m_3+1)-ih parcijalnih izvoda funkcija f, g i h, respektivno, to se na osnovu Newtonove binomne formule dobija

$$
\begin{aligned}
|r_{m_1}^f(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t)| &\le \frac{L}{(m_1+1)!}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta x_{t_{k-n_*}}^n|)^{m_1+1}, \qquad (3.88)\\
|r_{m_2}^g(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t)| &\le \frac{L}{(m_2+1)!}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta x_{t_{k-n_*}}^n|)^{m_2+1}, \\
\int_{R^d} |r_{m_3}^h(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, u, t)|^2 \Pi(du) &\le \frac{L^2}{[(m_3+1)!]^2}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta x_{t_{k-n_*}}^n|)^{2(m_3+1)},
\end{aligned}
$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$.

Za ocenjivanje izraza $E \sup_{s \in [t_k, t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r$ primenjuje se elementarna nejednakost (1.46) na jednačine (3.86), a zatim Hölderova nejednakost na Lebesgueov integral i Burkholder-Davis-Gundy nejednakost na integral Itoa i na integral u odnosu na Poisson meru. U tom smislu je, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$,

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s)-x^n(t_k)|^r \qquad (3.89)\\
&\quad \leq 3^{r-1}(t-t_k)^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|F(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})|^r ds\\
&\quad\quad +3^{r-1}c_r(t-t_k)^{r/2-1}\int_{t_k}^{t} E|G(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})|^r ds\\
&\quad\quad +3^{r-1}c_r E\left(\int_{t_k}^{t}\int_{R^d} |H(x^n_s, x^n_{s-\tau}, u, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})|^2 \Pi(du) ds\right)^{r/2}\\
&\quad \equiv 3^{r-1}(t-t_k)^{r/2-1}[(t-t_k)^{r/2} J_1(t) + c_r J_2(t)] + 3^{r-1}c_r J_3(t),
\end{aligned}
$$

gde su $J_1(t), J_2(t)$ i $J_3(t)$ odgovarajući integrali, dok je c_r univerzalna konstanta iz Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti.

Na osnovu Taylorovog razvoja (3.87), uslova linearnog rasta (1.41), pretpostavki $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$ i ocene (3.88), dobija se

$$
\begin{aligned}
J_1(t) &= \int_{t_k}^{t} E|F(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})|^r ds \qquad (3.90)\\
&\leq 2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|F(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}}) - f(x^n(s), x^n(s-\tau), s)|^r ds\\
&\quad +2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E|f(x^n(s), x^n(s-\tau), s)|^r ds\\
&\leq 2^{r-1}\int_{t_k}^{t} E\left|\frac{d^{m_1+1} f(x^n(t_k) + \theta_f \Delta x^n_{t_k}, x^n(t_{k-n_*}) + \theta_f \Delta x^n_{t_{k-n_*}}, s)}{(m_1+1)!}\right|^r ds\\
&\quad +2^{r-1}K^{r/2}\int_{t_k}^{t} E[1+|x^n(s)|^2 + |x^n(s-\tau)|^2]^{r/2} ds\\
&\leq \frac{2^{r-1}L^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^{t} E[|\Delta x^n_{t_k}| + |\Delta x^n_{t_{k-n_*}}|]^{(m_1+1)r} ds\\
&\quad +2^{r-1}3^{r/2-1}K^{r/2}\int_{t_k}^{t} [1 + E|x^n(s)|^r + E|x^n(s-\tau)|^r]\, ds\\
&\leq \frac{2^{r-1}4^{(m_1+1)r}L^r}{[(m_1+1)!]^r}\int_{t_k}^{t} E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^{(m_1+1)r} ds\\
&\quad +2^{r-1}3^{r/2-1}K^{r/2}\int_{t_k}^{t} [1 + 2E\sup_{u\in[t_0-\tau,T]} |x^n(u)|^r] ds\\
&\leq \frac{2^{(2m_1+3)r-1}L^r R}{[(m_1+1)!]^r}(t-t_k) + 2^{r-1}3^{r/2-1}K^{r/2}(1+2R)(t-t_k)\\
&\equiv C_1\cdot(t-t_k),
\end{aligned}
$$

gde je $C_1 \equiv C_1(K, L, R, r, m_1)$ generisana konstanta i $R = 1 + Q$.

Na sličan način se, ponavljanjem prethodnog postupka, dobija

$$J_2(t) \leq C_2 \cdot (t - t_k), \tag{3.91}$$

pri čemu je $C_2 \equiv C_2(K, L, R, r, m_2)$ generisana konstanta. Prilikom ocenjivanja integrala $J_3(t)$, treba uočiti da je

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} \int_{R^d} |H(x_s^n, x_{s-\tau}^n, u, s; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^2 \Pi(du) ds \\
&\leq 2 \int_{t_k}^{t} \int_{R^d} |H(x_s^n, x_{s-\tau}^n, u, s; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) - h(x^n(s), x^n(s-\tau), u, s)|^2 \Pi(du) ds \\
&\quad +2 \int_{t_k}^{t} \int_{R^d} |h(x^n(s), x^n(s-\tau), u, s)|^2 \Pi(du) ds.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Imajući u vidu ocenu (3.88) i uslov ograničenog rasta (1.41), ocena (3.92) postaje

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t} \int_{R^d} |H(x_s^n, x_{s-\tau}^n, u, s; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^2 \Pi(du) ds \\
&\leq \frac{2L^2}{[(m_3+1)!]^2} \int_{t_k}^{t} (|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta x_{t_{k-n_*}}^n|)^{2(m_3+1)} ds \\
&\quad +2K \int_{t_k}^{t} [1+|x^n(s)|^2+|x^n(s-\tau)|^2] ds \\
&\leq \left(\frac{2^{4(m_3+1)+1} L^2}{[(m_3+1)!]^2} \sup_{u \in [t_0-\tau, T]} |x^n(u)|^{2(m_3+1)} + 2K[1+2 \sup_{u \in [t_0-\tau, T]} |x^n(u)|^2] \right) (t-t_k).
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Odatle, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_3$, sledi

$$\begin{aligned}
J_3(t) &= E \left(\int_{t_k}^{t} \int_{R^d} |H(x_s^n, x_{s-\tau}^n, u, s; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^2 \Pi(du) ds \right)^{r/2} \\
&\leq \left(\frac{2^{(2m_3+3)r-1} L^r}{[(m_3+1)!]^r} R + 2^{3r/2-2} K^{r/2} [1 + 2^{r/2} R] \right) (t - t_k)^{r/2} \\
&\equiv C_3 \cdot (t - t_k)^{r/2},
\end{aligned} \tag{3.94}$$

pri čemu je $C_3 \equiv C_3(K, L, R, r, m_3)$ i $R = 1 + Q$.

Zamenom (3.90), (3.91) i (3.94) u (3.89), dobija se

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \leq C \cdot n^{-r/2},\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.95}$$

gde je C generisana konstanta, nezavisna od n.

Za dokazivanje drugog dela tvrdjenja, tj. za ocenjivanje $E \sup_{s \in [t_k, t]} |x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})|^r$, neophodna je pretpostavka $\mathcal{A}_4$. U tom smislu će dalja diskusija biti podeljena u dva slučaja, u zavisnosti od toga da li se aproksimativno rešenje x^n podudara sa početnim uslovom ili ne.

1. Ako je $t - \tau < t_0$ za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, tada je $t_{k-n_*} < t_0$. Dakle, u tim tačkama se rešenje x^n podudara sa početnim uslovom, pa se na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_4$ dobija

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})|^r = E \sup_{s\in[t_k,t]} |\xi(s-\tau-t_0) - \xi(t_{k-n_*} - t_0)|^r \le C_\xi \cdot n^{-r/2}. \tag{3.96}$$

2. Ako je $t - \tau \ge t_0$ za $t \in [t_k, t_{k+1}]$, tada definicija podeonih tačaka garantuje da važi $t_{k-n_*} \ge t_0$. Zbog toga se, na osnovu prvog dela dokaza dobija

$$E\sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})|^r \le C \cdot n^{-r/2}. \tag{3.97}$$

Imajući u vidu ocene (3.96) i (3.97), sledi

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})|^r \le \bar{C} \cdot n^{-r/2},\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

pri čemu je $\bar{C} = \max\{C_\xi, C\}$, čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Prethodna propozicija, zajedno sa ranije uvedenim pretpostavkama, daje mogućnost dokazivanja rezultata koji se odnosi na bliskost rešenja x i x^n, u L^p-smislu.

Teorema 3.5.1 *Neka je x rešenje jednačine (3.84) i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje, odredjeno jednačinama (3.86). Ako su ispunjeni uslovi Propozicije 3.5.1 i Lipschitzov uslov (1.40), tada, za $p \ge 2$, važi*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \le \beta \cdot n^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m = \min\{m_1, m_2, m_3\}$ i β je generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t \in [t_0, T]$, na osnovu (3.84) i (3.86), sledi

$$x(t) - x^n(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)ds + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)dw(s) + \int_{t_0}^{t} \int_{R^d} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\tilde{\nu}(du, ds),$$

pri čemu je

$$J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [f(x(s), x(s-\tau), s) - F(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s), \tag{3.98}$$

$$\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [g(x(s), x(s-\tau), s) - G(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s),$$

$$\hat{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [h(x(s), x(s-\tau), u, s) - H(x^n_s, x^n_{s-\tau}, u, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s).$$

Zatim, s obzirom da x i x^n zadovoljavaju isti početni uslov, to je

$$
\begin{aligned}
E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p &\le E\sup_{s\in[t_0,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \qquad (3.99)\\
&\le 3^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^p ds\\
&\quad +3^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^{t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^p ds\\
&\quad +3^{p-1}c_pE\left(\int_{t_0}^{t}\int_{R^d}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\hat{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^2\Pi(du)ds\right)^{p/2}.
\end{aligned}
$$

Jasno je da se za $j=\max\{i\in\{0,1,...,n-1\},t_i\le t\}$, nejednakost (3.99) može izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p\\
&\quad\le 3^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^p ds\\
&\quad\quad + 3^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^p ds\\
&\quad\quad + 3^{p-1}c_pE\left(\sum_{i=0}^{j}\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}\int_{R^d}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\hat{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)\Big|^2\Pi(du)ds\right)^{p/2},
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \qquad (3.100)\\
&\quad\le 3^{p-1}(T-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j}J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}+3^{p-1}c_p(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j}J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\\
&\quad\quad +3^{p-1}c_pE\Big(\sum_{i=0}^{j}J^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\Big)^{p/2},
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}&=\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E|f(x(s),x(s-\tau),s)-F(x^n_s,x^n_{s-\tau},s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^p ds, \qquad (3.101)\\
J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t}&=\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}E|g(x(s),x(s-\tau),s)-G(x^n_s,x^n_{s-\tau},s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^p ds,\\
J^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}&\\
=\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}&\int_{R^d}|h(x(s),x(s-\tau),u,s)-H(x^n_s,x^n_{s-\tau},u,s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^2\Pi(du)ds.
\end{aligned}
$$

Integral $J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}$ se može oceniti na sledeći način

$$J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t} \le 2^{p-1}\bigg[\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|f(x(s),x(s-\tau),s)-f(x^n(s),x^n(s-\tau),s)|^p ds \tag{3.102}$$
$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|f(x^n(s),x^n(s-\tau),s)-F(x^n_s,x^n_{s-\tau},s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^p ds\bigg].$$

Primenom Lipschitzovog uslova (1.40) na prvi sabirak u izrazu (3.102), dobija se

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|f(x(s),x(s-\tau),s)-f(x^n(s),x^n(s-\tau),s)|^p ds \tag{3.103}$$
$$\le 2^{p/2-1}\bar{K}^{p/2}\bigg[\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|x(s)-x^n(s)|^p ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)|^p ds\bigg].$$

Za ocenjivanje drugog sabirka u izrazu (3.102), neophodna je pretpostavka $\mathcal{A}_2$ i Propozicija 3.5.1. Na taj način je

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|f(x^n(s),x^n(s-\tau),s)-F(x^n_s,x^n_{s-\tau},s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^p ds \tag{3.104}$$
$$\equiv \int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E\left|\frac{d^{m_1+1}f(x^n(t_i)+\theta_f\Delta x^n_{t_i},x^n(t_{i-n_*})+\theta_f\Delta x^n_{t_{i-n_*}},s)}{(m_1+1)!}\right|^p ds$$
$$\le \frac{2^{(m_1+1)p-1}L^p}{[(m_1+1)!]^p}\bigg[\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|x^n(s)-x^n(t_i)|^{(m_1+1)p} ds$$
$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|x^n(s-\tau)-x^n(t_{i-n_*})|^{(m_1+1)p} ds\bigg]$$
$$\le K_2\cdot n^{-(m_1+1)p/2}(t_{i+1}\wedge t-t_i),$$

pri čemu je $K_2=\frac{2^{(m_1+1)p-1}L^p(C+\bar{C})}{[(m_1+1)!]^p}$.

Zamenom (3.103) i (3.104) u (3.102), dobija se

$$J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\le \varphi(i,t,m_1), \tag{3.105}$$

gde je

$$\varphi(i,t,m_1) \tag{3.106}$$
$$=2^{3p/2-2}\bar{K}^{p/2}\bigg[\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}\Big[E|x(s)-x^n(s)|^p ds+E|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)|^p\Big]ds\bigg]$$
$$+2^{p-1}K_2\cdot n^{-(m_1+1)p/2}(t_{i+1}\wedge t-t_i).$$

Analogno se dobija

$$J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\le \varphi(i,t,m_2). \tag{3.107}$$

Na drugoj strani je

$$
\begin{aligned}
&J^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\\
&\quad\le 2\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}\int_{R^d}|h(x(s),x(s-\tau),u,s)-h(x^n(s),x^n(s-\tau),u,s)|^2\Pi(du)ds\\
&\qquad+2\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}\int_{R^d}|h(x^n(s),x^n(s-\tau),u,s)-H(x^n_s,x^n_{s-\tau},u,s;x^n_{t_i},x^n_{t_{i-n_*}})|^2\Pi(du)ds\\
&\quad\le 2\bar K\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}[|x(s)-x^n(s)|^2+|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)|^2]ds\\
&\qquad+K_3\int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t}\Big[|x^n(s)-x^n(t_i)|^{2(m_3+1)}+|x^n(s-\tau)-x^n(t_{i-n_*})|^{2(m_3+1)}\Big]ds,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $K_3=\frac{2^{2(m_3+1)}L^2}{[(m_3+1)!]^2}$. Odatle sledi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j}J^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}&\le 2\bar K\int_{t_0}^{t}[|x(s)-x^n(s)|^2+|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)|^2]ds\\
&\quad+K_3\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)|x^n(s)-x^n(t_i)|^{2(m_3+1)}ds\\
&\quad+K_3\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)|x^n(s-\tau)-x^n(t_{i-n_*})|^{2(m_3+1)}ds.
\end{aligned}\tag{3.108}
$$

Na osnovu Propozicije 3.5.1 i ocene (3.108), dobija se

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\sum_{i=0}^{j}J^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\Big)^{p/2}\\
&\quad\le 3^{p/2-1}2^{p/2}\bar K^{p/2}E\left(\int_{t_0}^{t}[|x(s)-x^n(s)|^2+|x(s-\tau)-x^n(s-\tau)|^2]ds\right)^{p/2}\\
&\qquad+3^{p/2-1}K_3^{p/2}\left[E\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)|x^n(s)-x^n(t_i)|^{2(m_3+1)}ds\right)^{p/2}\right.\\
&\qquad\left.+E\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)|x^n(s-\tau)-x^n(t_{i-n_*})|^{2(m_3+1)}ds\right)^{p/2}\right]\\
&\quad\le 3^{p/2-1}2^{p}\bar K^{p/2}(T-t_0)^{p/2-1}\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x(u)-x^n(u)|^pds\\
&\qquad+3^{p/2-1}K_3^{p/2}(T-t_0)^{p/2-1}\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)E|x^n(s)-x^n(t_i)|^{(m_3+1)p}ds\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{j}I_{[t_i,t_{i+1}\wedge t)}(s)E|x^n(s-\tau)-x^n(t_{i-n_*})|^{(m_3+1)p}ds\right]
\end{aligned}\tag{3.109}
$$

$$\leq 3^{p/2-1}2^p\bar{K}^{p/2}(T-t_0)^{p/2-1}\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x(u)-x^n(u)|^p ds$$
$$+3^{p/2-1}K_3^{p/2}(T-t_0)^{p/2}(C+\bar{C})\cdot n^{-(m_3+1)p/2}.$$

Sada, ocene (3.105), (3.107) i (3.109), zajedno sa (3.100), impliciraju

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \leq \alpha_1\int_{t_0}^{t}E\sup_{u\in[t_0-\tau,s]}|x(u)-x^n(u)|^p ds+\alpha_2 n^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m=\min\{m_1,m_2,m_3\}$ i α_1,α_2 su generisane konstante, nezavisne od n.

Primena Gronwall-Bellmanove leme daje

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,t]}|x(s)-x^n(s)|^p \leq \alpha_2 n^{-(m+1)p/2}e^{\alpha_1(T-t_0)}$$
$$\equiv \beta\cdot n^{-(m+1)p/2},$$

gde je β generisana konstanta. S obzirom da poslednja nejednakost važi za svako $t\in[t_0,T]$, sledi da je

$$E\sup_{s\in[t_0-\tau,T]}|x(s)-x^n(s)|^p \leq \beta\cdot n^{-(m+1)p/2},$$

čime je dato tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

Na osnovu prethodnih tvrdjenja, može se dokazati skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja $\{x^n, n\in N\}$, odredjenih jednačinama (3.86), ka rešenju x polazne jednačine (3.84), što potvrdjuje sledeća teorema.

Teorema 3.5.2 *Ako važe uslovi Teoreme 3.5.1, tada niz $\{x^n, n\in N\}$ aproksimativnih rešenja, odredjenih jednačinama (3.86), konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (3.84).*

Dokaz. Na osnovu Chebyshevljeve nejednakosti i Teoreme 3.5.1, za proizvoljno $\eta>0$, sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\Big(\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x(t)-x^n(t)|^{\frac{p}{2}}\geq n^{-\eta}\Big)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}E\sup_{t\in[t_0-\tau,T]}|x(t)-x^n(t)|^p\cdot n^{2\eta}$$
$$\leq\beta\sum_{n=1}^{\infty}n^{-[(m+1)p-4\eta]/2}.$$

Red na desnoj strani znaka nejednakosti konvergira ako se izabere, na primer, $\eta<1/2$ za $p=2$ i $\eta<(p/2-1)/2$ za $p>2$. Tada se, primenom Borell-Cantellijeve leme, dobija $x^n\xrightarrow{a.s.}x$ kada $n\to\infty$. $\diamondsuit$

3.5.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Poissonovim procesom

U nastavku će biti predstavljena aproksimativna metoda analogna onoj koja je razmatrana u Poglavlju 3.5.1 i to za sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu sa kašnjenjem i Poissonovim procesom

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t), x(t-\tau), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), t)dw(t) \\ &\quad + h^*(x(t), x(t-\tau), t)dN(t), t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{3.110}$$

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{3.111}$$

o kojoj je bilo reči u Poglavlju 1.12.2.

Za dalje razmatranje je pogodniji integralni oblik ove jednačine, tj. za svako $t \in [t_0, T]$,

$$\begin{aligned} x(t) = \xi(0) &+ \int_{t_0}^{t} f(x(s), x(s-\tau), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), x(s-\tau), s)dw(s) \\ &+ \int_{t_0}^{t} h^*(x(s), x(s-\tau), s)dN(s). \end{aligned} \tag{3.112}$$

Rešenje $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (3.112) se aproksimira na particiji (3.85), rešenjima $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$ jednačina

$$\begin{aligned} x^n(t) = x^n(t_k) &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{d^i f(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{i!} ds \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_2} \frac{d^i g(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{i!} dw(s) \\ &+ \int_{t_k}^{t} \sum_{i=0}^{m_3} \frac{d^i h^*(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), s)}{i!} dN(s), \end{aligned} \tag{3.113}$$

pri čemu zadovoljava početni uslov $x^n_{t_0} = \xi$ s.i.

U ovom slučaju će biti dokazana L^p-bliskost rešenja jednačina (3.112) i (3.113) i to pod Lipschitzovim uslovom (1.44), uslovom linearnog rasta (1.45) i pretpostavkama $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_4$ sa modifikovanom pretpostavkom $\mathcal{A}_2$, u sledećem smislu

$$\sup_{R^d \times R^d \times [t_0, T]} \left| \frac{\partial^{m_3+1} h^*(x, y, t)}{\partial x^j \partial y^{m_3+1-j}} \right| \leq L, \; j = 0, 1, ..., m_3 + 1. \tag{3.114}$$

Pre glavnih rezultata, biće dokazana sledeća propozicija.

Propozicija 3.5.2 *Neka su $\{x^n(t), t \in [t_k, t_{k+1}]\}, k = 0, 1, ..., n-1$ rešenja jednačina (3.113) i neka je zadovoljen uslov ograničenog rasta (1.45) i pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$ i modifikovana pretpostavka $\mathcal{A}_2$. Tada, za svako $2 \leq r \leq (M+1)p$, važi*

$$E \sup_{s \in [t_k, t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \leq C^* \cdot n^{-r/2}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Pored toga, ako važi pretpostavka $\mathcal{A}_4$, tada je

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s-\tau) - x^n(t_{k-n_*})|^r \leq \bar{C}^* \cdot n^{-r/2},\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., n-1,$$

pri čemu su C^* i $\bar{C}^*$ pozitivne konstante, nezavisne od n.

Dokaz. Dokaz ovog tvrdjenja je sličan dokazu Propozicije 3.5.1 osim što se integral po Poissonovom procesu ocenjuje drugačije nego integral po Poissonovoj slučajnoj meri. U tom smislu, najpre se uvodi oznaka

$$H^*(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) = \sum_{i=0}^{m_3} \frac{d^i h^*(x^n(t_k), x^n(t_{k-n_*}), t)}{i!}$$

pri čemu je

$$h^*(x^n(t), x^n(t-\tau), t) = H^*(x_t^n, x_{t-\tau}^n, t; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) + r_{m_3}^{h^*}(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t).$$

Na osnovu pretpostavke (3.114) sledi

$$|r_{m_3}^{h^*}(\Delta x_{t_k}^n, \Delta x_{t_{k-n_*}}^n, t)| \leq \frac{L}{(m_3+1)!}(|\Delta x_{t_k}^n| + |\Delta x_{t_{k-n_*}}^n|)^{m_3+1}, \tag{3.115}$$

za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$.

Na taj način se, za svako $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1$, dobija

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \\ &\qquad \leq 3^{r-1}[(t-t_k)^{r-1} J_1(t) + c_r (t-t_k)^{r/2-1} J_2(t) + J_3^*(t)], \end{aligned} \tag{3.116}$$

gde su $J_1(t)$ i $J_2(t)$ odgovarajući integrali koji se javljaju u izrazu (3.89) i ranije su ocenjeni sa (3.90) i (3.91), respektivno, dok je

$$J_3^*(t) = E \sup_{s\in[t_k,t]} \left| \int_{t_k}^s H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) dN(u) \right|^r. \tag{3.117}$$

Za ocenjivanje integrala $J_3^*(t)$, koristi se kompenzovani Poissonov proces $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, koji je martingal, zbog čega se na njega može primeniti Burkolder-Davis-Gundy nejednakost. Na taj način se dobija

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[t_k,t]} \left| \int_{t_k}^s H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) d\tilde{N}(u) \right|^r \\ &\qquad \leq c_r E \left(\lambda \int_{t_k}^t |H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^2 du \right)^{r/2} \\ &\qquad \leq c_r \lambda^{r/2} (t-t_k)^{r/2-1} \int_{t_k}^t E|H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^r du. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Tada se, na osnovu (3.118), dobija

$$
\begin{aligned}
&J_3^*(t) \qquad (3.119)\\
&= E \sup_{s\in[t_k,t]} \left| \int_{t_k}^{s} H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) d\tilde{N}(u) + \lambda \int_{t_k}^{s} H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n) du \right|^r \\
&\le 2^{r-1}\lambda^{r/2}(t-t_k)^{r/2-1}[c_r + \lambda^{r/2}(t-t_k)^{r/2}] \int_{t_k}^{t} E|H^*(x_u^n, x_{u-\tau}^n; x_{t_k}^n, x_{t_{k-n_*}}^n)|^r du \\
&\equiv 2^{r-1}\lambda^{r/2}(t-t_k)^{r/2-1}[c_r + \lambda^{r/2}(t-t_k)^{r/2}] \tilde{J}_3^*(t).
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu ocenu (3.119), izraz (3.116) se može oceniti kao

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^2 \le 3^{r-1}(t-t_k)^{r/2-1} \Big[(t-t_k)^{r/2} J_1(t) + c_r J_2(t) \qquad (3.120)\\
+ 2^{r-1}\lambda^{r/2}[c_r + \lambda^{r/2}(t-t_k)^{r/2}] \tilde{J}_3^*(t) \Big].
\end{aligned}
$$

Sledeći postupak kojim je dobijena ocena (3.90), dobija se

$$\tilde{J}_3^*(t) \le C_3^* \cdot (t-t_k),$$

pri čemu je $C_3^* = C_3^*(\lambda, K, L, R, r, m_3)$.

Na taj način, (3.116) implicira

$$E \sup_{s\in[t_k,t]} |x^n(s) - x^n(t_k)|^r \le C^* \cdot n^{-r/2},\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., n-1, \qquad (3.121)$$

gde je $C^* = 3^{r-1}(T-t_0)^{r/2}\Big[C_1 + c_r C_2 + 2^{r-1}\lambda^{r/2}[c_r + \lambda^{r/2}]C_3^*\Big]$.

Dokaz drugog dela će biti izostavljen jer se izvodi na potpuno isti način kao u Propoziciji 3.5.1. $\diamondsuit$

Na osnovu prethodne propozicije se može dokazati L^p-bliskost rešenja x jednačine (3.112) i aproksimativnog rešenja x^n, koje je odredjeno jednačinama (3.113).

Teorema 3.5.3 *Neka je x rešenje jednačine (3.112) i neka je x^n odgovarajuće aproksimativno rešenje, odredjeno jednačinama (3.113). Ako su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.5.2 i Lipschitzov uslov (1.44), tada, za svako $p \ge 2$, važi*

$$E \sup_{t\in[t_0-\tau,T]} |x(t) - x^n(t)|^p \le \beta^* n^{-(m+1)p/2},$$

gde je $m = \min\{m_1, m_2, m_3\}$ i β^* je generisana konstanta, nezavisna od n.

Dokaz. Za proizvoljno $t \in [t_0, T]$, na osnovu (3.112) i (3.113), sledi

$$
\begin{aligned}
x(t) - x^n(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} J_{t_k, t_{k+1}\wedge t}(s) ds + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{J}_{t_k, t_{k+1}\wedge t}(s) dw(s) \\
+ \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{J}^*_{t_k, t_{k+1}\wedge t}(s) dN(s),
\end{aligned}
$$

pri čemu su integrali $J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)$ i $\tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s)$ definisani sa (3.98), dok je

$$\hat{J}^*_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(s) = [h^*(x(s), x(s-\tau), s) - H^*(x^n_s, x^n_{s-\tau}, s; x^n_{t_k}, x^n_{t_{k-n_*}})]I_{[t_k,t_{k+1}\wedge t)}(s).$$

Kako x i x^n zadovoljavaju isti početni uslov, sledeći postupak kojim je dobijena ocena (3.119), dobija se

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s) - x^n(s)|^p \qquad (3.122) \\ &\quad \le 3^{p-1}(t-t_0)^{p-1}\int_{t_0}^{t} E\Big|\sum_{k=0}^{n-1} J_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du \\ &\quad +3^{p-1}c_p(t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^{t} E\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{J}_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du \\ &\quad +6^{p-1}\lambda^{p/2}(t-t_0)^{p/2-1}[c_p+\lambda^{p/2}(t-t_0)^{p/2}]\int_{t_0}^{t} E\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \hat{J}^*_{t_k,t_{k+1}\wedge t}(u)\Big|^p du. \end{aligned}$$

Očigledno, za $j = \max\{i \in \{0,1,...,n-1\}, t_i \le t\}$, nejednakost (3.122) se može izraziti u obliku

$$\begin{aligned} &E \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} |x(s)-x^n(s)|^p \qquad (3.123) \\ &\quad \le 3^{p-1}\Big[(T-t_0)^{p-1}\sum_{i=0}^{j} J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}+c_p(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=0}^{j} J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t}+C_\lambda\sum_{i=0}^{j} \tilde{J}^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t}\Big]. \end{aligned}$$

gde je $C_\lambda = 2^{p-1}\lambda^{p/2}(T-t_0)^{p/2-1}[c_p+\lambda^{p/2}(T-t_0)^{p/2}]$ i $J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t}$, $J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t}$ su definisani sa (3.101), dok je

$$\tilde{J}^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t} = \int_{t_i}^{t_{i+1}\wedge t} E|h^*(x(u), x(u-\tau), u) - H^*(x^n_u, x^n_{u-\tau}, u; x^n_{t_i}, x^n_{t_{i-n_*}})|^p du.$$

Sledeći tok dokaza Teoreme 3.5.1, dobija se

$$J^1_{t_i,t_{i+1}\wedge t} \le \varphi(i,t,m_1),\ \ J^2_{t_i,t_{i+1}\wedge t} \le \varphi(i,t,m_2),\ \ \tilde{J}^3_{t_i,t_{i+1}\wedge t} \le \varphi(i,t,m_3), \qquad (3.124)$$

pri čemu je $\varphi(i,\cdot,\cdot)$ definisano sa (3.106).

Zamena (3.124) u (3.123) i primena Gronwall-Bellmanove leme, daju

$$E \sup_{s\in[t_0-\tau,T]} |x(s) - x^n(s)|^p \le \beta^* n^{-(m+1)p/2},$$

gde je β^* generisana konstanta, nezavisna od n. $\diamondsuit$

Analogno Teoremi 3.5.2, može se dokazati skoro izvesna konvergencija niza aproksimativnih rešenja $\{x^n, n \in N\}$, koja zadovoljavaju jednačine (3.113), ka rešenju x polazne jednačine (3.112). Iz tog razloga će biti navedena samo formulacija teoreme.

Teorema 3.5.4 *Ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.5.3, tada niz $\{x^n, n \in N\}$ aproksimativnih rešenja odredjenih jednačinama (3.113), konvergira skoro izvesno ka rešenju x jednačine (3.112).*

Zaključak

U ovoj disertaciji su razmatrane numerička Euler-Maruyama metoda i analitička metoda zasnovana na Taylorovim aproksimacijama, za nekoliko tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina. Euler-Maruyama metoda, pored toga što daje eksplicitna rešenja, jednostavno se implementira, za dokazivanje konvergencije odgovarajućeg niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju često su dovoljni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja, dok je red konvergencije u najboljem slučaju 1/2. Na drugoj strani, analitička aproksimativna rešenja čija je konvergencija razmatrana u Glavi 3, u opštem slučaju brže konvergiraju od pomenutih numeričkih rešenja, uz strože uslove u odnosu na one u slučaju Euler-Maruyama metode.

Metode koje su predstavljene u ovom radu se mogu na odgovarajući način proširiti na stohastičke diferencijalne jednačine u odnosu na martingale i martingalne mere, umesto u odnosu na Wienerov proces.

Poznato je da se brojne realne pojave matematički modeliraju pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina za koje ne važe klasični uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja (Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta). To se može uočiti kod većeg broja populacionih modela kao što je, na primer, onaj koji je razmatran u radu [92] i opisan je pomoću stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem. U tom smislu, dalje istraživanje bi moglo biti usmereno ka dokazivanju bliskosti aproksimativnog i tačnog rešenja nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina pod ne-Lipschitzovim uslovima. Takodje, predmet daljeg istraživanja bi mogle biti aproksimacije rešenja nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina pod Lipschitzovim uslovom uz zamenu uslova ograničenog rasta nekim slabijim uslovom.

Rezultati izloženi u Glavi 3 pokazuju da se povećava red konvergencije niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju, kada se povećava broj članova u Taylorovom razvoju koeficijenata jednačine. U tom smislu date analitičke metode bi se mogle kombinovati sa numeričkim aproksimacijama koje se baziraju na Ito-Taylorovom razvoju višeg stepena (videti [42, 43]). Štaviše, za uvodjenje novih numeričkih metoda višeg reda, koje se odnose na složene stohastičke diferencijalne jednačine iz Glave 3, rešenja u aproksimativnim jednačinama, tačnije u Taylorovom razvoju, mogla bi se zameniti aproksimacijama nižeg reda, kao što je učinjeno u radovima Kloedena i Jentzena [44, 37], koji se odnose na obične stohastičke diferencijalne jednačine.

Literatura

[1] M.U. Akhmet, Integral manifolds of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type, Nonlinear Analysis 66 (2007) 367-383.

[2] M.U. Akhmet, Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type, Nonlinear Analysis 68 (2008) 794-803.

[3] M. A. Atalla, Finite-difference approximations for stochastic differential equations, Probabilistic Methods for the Investigation of Systems with an Infinite number of Degrees of freedom, Inst. of Math. Acad. of Science USSR, Kiev, (1986), 11-16 (in Russian).

[4] M. A. Atalla, On one approximating method for stochastic differential equations, Asymptotic Methods for the Theory of Stochastic processes, Inst. of Math. Acad. of Science USSR, Kiev, (1987), 15-21 (in Russian).

[5] D. Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[6] C.T.H. Baker, E. Buckwar, Continuous Θ-methods for stochastic pantograph equation, Electron. Trans. Numer. Anal. 11 (2000) 131-151.

[7] C.T.H. Baker, E. Buckwar, Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic differential delay equations, LMS J. Comput. Math. 3 (2000) 315-335.

[8] C.T.H. Baker, E. Buckwar, Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations, J. Comput. Appl. Math. 125 (2000) 297-307.

[9] J. Bao, Z. Hou, An analytic approximation of solutions of stochastic differential delay equations with Markovian switching, Mathematical and computer modelling 50 (2009) 1379-1384.

[10] D. Bates, Jumps and stochastic volatility: exchange rates processes implicit in deutschemark options, Rev. Financ. Studies 9 (1996) 96-107.

[11] A. Beuter, J. Belair, C. Labrie, J. Belair, Feedback and delays in neurological diseases: a modelling study using dynamical systems, Bull. Math. Biol. 55 (1993) 525-541.

[12] E. Buckwar, T. Shardlow, Weak approximation of stochastic differential delay equations, IMA Journal of Numerical analysis (2005), 57-86.

[13] E. Buckwar, One-step approximation for stochastic functional differential equations, Appl. Numerical Math., 56 (2006), 667–681.

[14] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. $6th$ Berkley Symp. Math. Statis. Prob., Berkley, Univ. of California Press, 2 (1972) 223-240.

[15] K.L. Cooke, J. Wiener, Retarded differential equations with piecewise constant delays, J. Math. Anal. Appl. 99 (1984) 265-297.

[16] H. Cramer, On the theory of random processes, Ann. Math., 41 (1940), 215-230.

[17] C. Delacherie, Capacites et processus stochastiques, Berlin, Springer Verlag, 1972.

[18] C. Dolean-Dade, P. Meyer, Integrales stochastiques par raport aux martingales, Lect. Notes Math., 124 (1970), 77-107.

[19] J.L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, New York, 1953.

[20] C.W. Eurich, J.G. Milton, Noise-induced transitions in human postural sway, Phys. Rev., 54 (1996) 6681-6684.

[21] Z. Fan, M. Liu, W. Cao, Existence and uniqueness of the solutions and convergence of semi-implicit Euler-methods for stochastic pantograph equations, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1142-1159.

[22] L. Fox, D.F. Mayers, J.R. Ockendon, A.B. Tayler, On a functional differential equations, J. Inst. Math. Appl. 8 (1971) 271-307.

[23] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, 1982. (in Russian)

[24] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Introduction to the theory of random processes, Dover Publications, Inc., New York, 1996.

[25] K. Gopalsamy, M.R.S. Kulenović, G. Ladas, On a logistic equation with piecewise constant arguments, Differential Integral Equations 4 (1991) 215-223.

[26] D.H. Griffel, Applied Functional Analysis, Dover Publications, 2002.

[27] F. Gurcan, F. Bozkurt, Global stability in a population model with piecewise constant arguments, J. Math. Anal. Appl. (2009) 334-342.

[28] S. Hajji, Stochastic fractional partial differential equations driven by Poisson white noise, Annales Mathematiques 15 (2008) 43-55.

[29] D.J. Higham, X. Mao, A.M. Stuart, Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations, LMS J. Comput. Math. 6 (2003) 297-313.

[30] D.J. Higham, P.E. Kloeden, Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps, Numer. Math 101 (2005) 101-119.

[31] Y. Hu, S.E.A. Mohamed, F. Yan, Discrete-time approximations of stochastic delay equations: the Milstein scheme, The Annals of Probability (2004) Vol. 32, 265-314.

[32] V. Huston, J. S. Pym, M. J. Cloud, Applications of Functional Analysis and Operator Theory, Elsevier, 2005.

[33] K. Itô, On a Formula Concerning Stochastic Differentials, Nagoya Math. J. 3 (1951), 55-65.

[34] K. Itô, On a formula of stochastic differentials, Matematika, Sbornik perevodov inost. statei 3 (1959), 131-141.

[35] S. Janković, D. Ilić, An analytic approximation of solutions of stochastic differential equations, Comput. Math. Appl. 47 (2004) 903-912.

[36] S. Janković, D. Ilić, An analytic approximate method for solving stochastic integrodifferential equations, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 203-245.

[37] A. Jentzen, P.E. Kloeden, Pathwise Taylor schemes for random ordinary differential equations, BIT, 49 (1) (2009), 113–140.

[38] P. Jorion, On jump processes in the foreign exchange and stock markets, Rev. Financ. Studies 1 (1988) 427-445.

[39] M. Jovanović, S. Janković, Neutral stochastic functional differential equations with additive perturbations, Applied Mathematics and Computation, 213 (2009) 370-379.

[40] S. Kanagawa, On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations, Yokohama Math. J., 36 (1988) 79-85.

[41] S. Kanagawa, The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations, Tokyo J. Math., 12 (1) (1989) 31-48.

[42] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Third Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[43] P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, Numerical Solution of SDE Throught Computer Experiments, Third Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[44] P.E. Kloeden, A. Jentzen, Pathwise convergent higher order numerical schemes for random ordinary differential equations, Proc. Roy. Soc. London A, 463 (2007), 2929–2944.

[45] A. Ja. Khinchin, Correlation theory of stationar processes, Uspehi Mat. Nauk, 5 (1939) 42-51. (in Russian)

[46] A.N. Kolmogorov, Basic notions in probability theory, ONTI, 1936. (in Russian)

[47] A.N. Kolmogorov, Analytic methods in probability theory, Uspehi Matem. Nauk, (1938), 5-41. (in Russian)

[48] U. Küchler, E. Platen, Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay, Mathematics and Computers in Simulation 54 (2000) 189-205

[49] H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209-245.

[50] G. Ladde, V. Lakshmikantham, Random Differential Inequalities, Academic Press, New York, 1980.

[51] K. Liu, X. Xia, On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations, Systems Control Lett., 37 (1999) 207-215.

[52] M. Liu, W. Cao, Z. Fan, Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for a linear stochastic differential delay equation, J. Comput. Appl. Math. 170 (2004) 255-268.

[53] J. Luo, J. Zou, Z. Hou, Comparison principle and stability criteria for stochastic delay differential equations with Markovian switching, Sci. China 46 (2003) 129-138.

[54] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horvood, Chichester, UK, 2007 (Second Edition).

[55] X. Mao, Exponential Stability for Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, 1994.

[56] X. Mao, Exponential stability of equidistant Euler-Maruyama approximations of stochastic differential delay equations, J. Comput. Appl. Math., 200 (2007) 297-316.

[57] X. Mao, C. Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperical college press, 2006.

[58] X. Mao, A. Matasov, A.B. Piunovskiy, Stochastic differential delay equation with Markovian switching, Bernoulli 6 (2000) 73-90.

[59] X. Mao, Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997) 389-401.

[60] X. Mao, Numerical solutions of stochastic functional differential equations, LMS J. Comput. Math., 6 (2003) 141-161.

[61] X. Mao, C. Yuan, G. Yin, Approximations of Euler-Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions, J. Comput. Appl. Math, 205 (2007) 936-948.

[62] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. math. Palermo, 4 (1955), 48-90.

[63] R.C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, J. Financ. Econ. 2 (1976) 125-144.

[64] P.A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ilinois J. Math., 2 (1962), 193-205.

[65] P.A. Meyer, Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem, Ilinois J. Math., 7 (1963), 1-17.

[66] P.A. Meyer, Probability and Potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.

[67] P.A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastic, Lecture Notes in Math., 511 (1976) 245-398.

[68] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics, An Introcuction with Stochastic Processes, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[69] M. Milošević, The Euler-Maruyama approximation of solutions to stochastic differential equations with piecewise constant arguments (submitted).

[70] M. Milošević, Convergence of Euler-Maruyama approximations of neutral stochastic differential equations with time-dependent delay (submitted).

[71] M. Milošević, M. Jovanović, S. Janković, An approximate method via Taylor series for stochastic functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010) 128-137.

[72] M. Milošević, M. Jovanović, An application of Taylor series in the approximation of solutions to stochastic differential equations with time-dependent delay (submitted).

[73] M. Milošević, M. Jovanović, A Taylor polynomial approach in approximations of solution to pantograph stochastic differential equations with Markovian switching, Math. Comput. Modelling 53 (2011) 280-293.

[74] M. Milošević, Taylor approximation of solution to stochastic differential delay equations with Poisson jump (submitted).

[75] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[76] S.E.A. Mohammed, Stochastic Functional Differential Equations, Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1986.

[77] J.R. Ockendon, A.B. Tayler, The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 322 (1971) 447-468.

[78] B. Øksendal, A. Sulem, Applied Stochastic control of jump diffusions, Springer, 2006.

[79] E. Platen, An introduction to numerical methods for stochastic differential equations, Acta numerica (1999) 197-246.

[80] J. Randjelović, S. Janković, On the pth moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007) 266-280.

[81] L. Ronghua, L. Min, P. Wan-kai, Convergence of numerical solutions to stochastic pantograph equations with Markovian switching, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 414-422.

[82] L. Ronghua, M. Hongbing, D. Yonghong, Convergence of numerical solutions to stochastic delay differential equations with jumps, Appl. Math. Comput. 172 (2006) 584-602.

[83] E.E. Sluckii, Sur les fonctions éventelles continues intégrables et dérivables dans le sense stochastique, Comptes Rendus Acad. Sci., 187 (1928), 370-372.

[84] K. Sobcyk, Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

[85] M.L.Tsarkov, M.L.Sverdan, V.K. Yasynsky, Stability in stochastic modelling of the complex dynamical systems, Kyiv, 1996.

[86] L. Wang, C. Mei, H. Xue, The semi-implicit Euler method for stochastic differential delay equation with jumps, Appl. Math. Comput. 192 (2007) 567-578.

[87] M. Wei, Convergence of numerical solutions for variable delay differential equations driven by Poisson random jump measure, Appl. Math. Comput. 212 (2009) 409-417.

[88] J. Wiener, Generalized solutions of functional differential equations, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1993.

[89] N. Wiener, Differential spaces, J. Math. Phys., 2 (1923), 131-174.

[90] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math., 60 (1930), 897-936.

[91] F. Wu, X. Mao, Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 46 (2008) 1821-1841.

[92] Y. Xu, S. Zhu, S. Hu, A stochastic Lotka-Volterra model with variable delay, THE SIXTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NEURAL NETWORKS, Advances in soft computing 56 (2009), 91-100.

[93] S. Zhou, F. Wu, Convergence of numerical solutions to neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching, J. Comput. Appl. Math. 229 (2009) 85-96.