

UNIVERZITET U NIŠU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

**Neki modeli vremenskih serija sa
marginalnom aproksimiranom beta
raspodelom**

—doktorska disertacija—

Mr Božidar V. POPOVIĆ

Niš, 2011.

Rezime

Razmatranje modela vremenskih serija najčešće podrazumeva da se za postavljeni model i prepostavljenu marginalnu raspodelu, odrede uslovi pri kojima inovacije imaju neku raspodelu, koja se kasnije i određuje. Zajedničko svim do sada izučavanim modelima jeste da je Laplaceova transformacija prepostavljene marginalne raspodele u elementarnoj formi. Beta i inverzna gama raspodela su neke od raspodela čije Laplaceove transformacije nisu u elementarnoj formi. Laplaceova transformacija beta raspodele je Kummerova funkcija prve vrste, dok je inverzne gama raspodjeli Krätselova funkcija. U svom izvornom obliku, transformacije ovih raspodela, nisu upotrebljive prilikom određivanja raspodela inovacionog niza. Drugim rečima, nije moguće prepostaviti da su beta i inverzna gama raspodele marginalne raspodele stacionarnih vremenskih serija. Zbog ovoga javila se potreba za aproksimacijom njihovih transformacija. Na taj način došli smo do novih raspodela koje zovemo aproksimirana beta i aproksimirana inverzna gama. U ovoj disertaciji istražuju se stacionarni, linearni i nelinearni, autoregresivni procesi prvog reda sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom. Takođe, razmotrićemo i linearni proces sa marginalnom inverznom gama raspodelom. Pokazaćemo i kako se procesi sa aproksimiranom beta raspodelom mogu koristiti za dobijanje uzorka sa aproksimiranom inverznom gama raspodelom. U slučaju linearog modela prikazaćemo kako se od stacionarne serije sa marginalnom inverznom gama raspodelom dolazi do uzorka sa aproksimiranom beta raspodelom.

Abstract

Time series consideration models usually means that for the set model and assumed marginal distribution it is necessary to determine conditions under which innovation sequences possess a distribution which has to be found. Common to all models studied so far is that the Laplace transform of perceived marginal distributions is in the elementary form. Beta and inverse gamma distribution are representatives of some of the distributions whose Laplace transform are not in the elementary form. Laplace transformation of beta distribution is in the form of the Kummer function of the first kind, while Laplace transformation of the inverse gamma distribution is Krätsel function. In its original form, the transform of these distributions are not useful in determining the distribution of the innovation sequence. In other words, it is not possible to assume that the beta and inverse gamma distributions are marginal distributions of stationary time series. Due to this, a need for the approximation of their transformations arose. In this way, we came to new distributions which we call approximated beta and approximated inverse gamma distribution. This dissertation examines stationary, linear and non-linear, autoregressive processes of the first-order with approximated marginal beta distribution. Also, the linear process with the marginal inverse gamma distribution is to be examined. We will present also how the processes with the approximated beta distribution can be used to extract samples from the approximated inverse gamma distribution. In the case of linear models there will be presented in which manner the stationary series with the marginal inverse gamma distribution leads to the sample with the approximated beta distribution.

Sadržaj

Predgovor	vii
1 Osnovi teorije slučajnih procesa	1
1.1 Konvergencije niza slučajnih promenljivih	1
1.2 Pojam slučajnog procesa, stacionarnosti i ergodičnosti	3
1.3 Linearni slučajni procesi	6
1.4 Nelinearni autoregresivni modeli	8
1.5 Pregled nekih dosadašnjih rezultata	10
2 Neke specijalne funkcije i integralne transformacije	13
2.1 Gama funkcija	13
2.2 Beta funkcija	15
2.3 Krätselova funkcija	15
2.4 Diracova delta i Heavisideova funkcija	16
2.5 Hipergeometrijska funkcija	17
2.5.1 Konfluentna hipergeometrijska funkcija	18
2.6 Wrightova hipergeometrijska funkcija	18
2.7 Laplaceova transformacija	20
2.8 Mellinova transformacija	23
3 Neki metodi ocene gustine verovatnoće	25
3.1 Ocena gustine metodom jezgra	25
3.2 Numeričko invertovanje Laplaceove transformacije	27

4 Aproksimirana dvoparametarska beta raspodela	31
4.1 Dvoparametarska beta raspodela $B_2(p, q)$	31
4.1.1 Kumaraswamyjeva raspodela $\text{Kum}_2(p, q)$	35
4.2 Aproksimirana beta raspodela $AB(p, q)$	35
4.2.1 Simulaciona studija	43
5 Aproksimirana dvoparametarska inverzna gama raspodela	49
5.1 Dvoparametarska inverzna gama raspodela	
IG(p, q)	49
5.2 Aproksimirana inverzna gama raspodela	
AIG(a, b)	53
5.2.1 Simulaciona studija	55
6 RCAR(1) model sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom	57
6.1 Definicija modela. Stacionarnost i ergodičnost	57
6.2 Ocenjivanje parametara $RCAR(1)$ modela	59
6.2.1 Metoda uslovnih najmanjih kvadrata	61
6.2.2 UNK metoda–primena na centrirani niz	62
6.2.3 Yule–Walkerova metoda	75
7 Novi linearni $AR(1)$ model sa marginalnom $AB(p, q)$ i $AIG(a, b)$ raspodelom	79
7.1 Definicija modela sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom	80
7.2 Definicija modela sa marginalnom $AIG(a, b)$ raspodelom	86
7.3 Neke karakteristike modela sa marginalnim $AB(p, q)$ i $AIG(a, b)$ raspodelama	89
7.4 Ocenjivanje nepoznatih parametara	91
7.4.1 Ocenjivanje parametara $LAB_{1,q}AR(1)$ modela	91
7.4.2 Ocenjivanje parametara $LAB_{p,q}AR(1)$ i $WIGAR(1)$ modela	92
Numerički primeri	94

8 Novi nelinearni $AR(1)$ modeli sa $AB(p, q)$ raspodelom	97
8.1 Definicija $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela	98
8.1.1 Neke karakteristike $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela	105
8.1.2 Ocjenjivanje parametara $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela	108
Numerički primeri	109
8.2 Definicija $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela	111
8.2.1 Neke karakteristike $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela	118
8.2.2 Ocjenjivanje parametara $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela	120
Numerički primeri	121
8.3 Definicija $GABAR(1)$ modela	122
8.3.1 Neke karakteristike $GABAR(1)$ modela	124
8.3.2 Ocjenjivanje parametara $GABAR(1)$ modela	127
Numerički primeri	129
Zaključak	131
LITERATURA	133
A Rezultati ocenjivanja parametara	139
Indeks pojmoveva	145

Predgovor

"Ne znam kako ja izgledam ljudima; ali sam sebi izgledam kao dečak koji se igra na obali mora, i zabavljam se sam sa sobom, pronašavši sa vremena na vreme manji oblutak ili lepšu školjku, dok se veliki okean istine čitav pruža neotkriven predannom." (Sir Isaac Newton)

Osamdesetih godina XX veka počelo je istraživanje vremenskih serija sa marginalnim raspodelama koje nisu Gaussove. U praksi su se javljali problemi koji su obuhvatili serije čije su vrednosti bile strogo pozitivne i/ili serije koje se modeluju asimetričnim raspodelama ili raspodelama sa teškim repovima. Pozitivne serije srećemo u hidrologiji (vodostaji reka), meteorologiji (vlažnost vazduha), ekonomiji (indeksi cena na malo), itd. Asimetrične serije ili serije sa teškim repovima sreću se, uglavnom, u ekonomskim naukama.

Na samom početku razmatrale su se serije sa marginalnom eksponencijalnom raspodelom. Prvi rad koji se bavi ovom temom objavili su Gaver i Lewis (1980). Kasnije su se mnogi matematičari bavili stacionarnim modelima sa eksponencijalnom raspodelom, među kojima su Jovan Mališić, Vesna Jevremović i Biljana Č. Popović. Nakon eksponencijalne razvijaju se stacionarni modeli sa gama, Weibullovom, Laplaceovom, Paretovom i drugim raspodelama.

Razmatranje modela vremenskih serija najčešće podrazumeva da se za postavljeni model i prepostavljenu marginalnu raspodelu, odrede uslovi pri kojima inovacije imaju neku raspodelu. Osnovni analitički aparat u određivanju raspodele inovacija jeste Laplaceova transformacija. Zajedničko svim do sada izučavanim modelima jeste da je Laplaceova transformacija prepostavljene marginalne raspodele u elementarnoj formi, što podrazumeva da se relativno lako dolazi do raspodele inovacionog niza.

Neke od raspodela čije Laplaceove transformacije nisu u elementarnoj formi jesu beta i inverzna gama raspodela. Laplaceova transformacija beta raspodele je

Kummerova funkcija prve vrste, dok je kod inverzne gama raspodele to *Krätzelova funkcija*. U svom izvornom obliku, transformacije ovih raspodela, nisu upotrebljive prilikom određivanja raspodela inovacionog niza. Drugim rečima, nije moguće pretpostaviti da su beta i inverzna gama raspodela marginalne raspodele stacionarnih vremenskih serija. Zbog ovoga javila se potreba za aproksimacijom njihovih transformacija. Na taj način došli smo do novih raspodela koje zovemo *aproksimirana beta* i *aproksimirana inverzna gama raspodela*. Postupak aproksimacije Laplaceovih transformacija, kada je argument transformacije dovoljno veliki, pa zatim određivanje novih graničnih raspodela, koje će se smatrati marginalnim raspodelama stacionarnih modela prvi put se ovde sreće u literaturi.

U ovoj disertaciji istražuju se stacionarni, linearni i nelinearni, autoregresivni procesi prvog reda sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom. Takođe, razmotrićemo i linearni proces sa marginalnom inverznom gama raspodelom. Pokažaćemo i kako se procesi sa aproksimiranom beta raspodelom mogu koristiti za dobijanje uzorka sa aproksimiranom inverznom gama raspodelom. U slučaju linearnog modela prikazaćemo kako se od stacionarne serije sa marginalnom inverznom gama raspodelom dolazi do uzorka sa aproksimiranom beta raspodelom.

Cela teorija u ovoj disertaciji biće zasnovana na uopštavanju autoregresivnih procesa sa marginalnom uniformnom raspodelom. Prvi uniformni autoregresivni proces konstruisao je u svom radu Chernick (1981). On je u istom radu proučavao i granična svojstva maksimuma niza slučajnih promenljivih. Nakon toga, u radu Chernick i Davis (1982), definisani su uniformni autoregresivni proces prvog reda sa negativnom autokorelacijom prvog reda. U istom radu, posmatraju se granična svojstva minimuma i maksimuma niza slučajnih promenljivih uniformnog autoregresivnog procesa prvog reda sa negativnom autokorelacijom prvog reda, ali i granična svojstva minimuma niza slučajnih promenljivih uniformnog autoregresivnog procesa prvog reda kojeg je uveo Chernick 1981. godine.

Ristić i Popović (2000) proučavaju nelinarni uniformni autoregresivni model i pokazuju da je raspodela inovacija uniformna diskretna raspodela. U istom radu dati su i metodi za ocenjivanje nepoznatih parametara. Dve godine kasnije u radu Ristić i Popović (2002) uvode i nelinarni autoregresivni proces drugog reda, dok je u svojoj disertaciji Ristić (2002) uveo i dvodimenzione autoregresivne procese.

Prvi model sa marginalnim beta raspodelama javlja se u radu McKenzie (1985). McKenzie je konstruisao autoregresivni model sa pozitivnim, odnosno negativnim autokorelacijama. Značajan doprinos proučavanju postojećih i razvoju novih autoregresivnih modela dali su i naši matematičari Biljana Č. Popović i Miroslav M. Ristić. Veliki broj njihovih radova bavi se ovom problematikom, a neke od njih smo ovde i citirali.

Prvi linearни proces sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom konstruisao je Popović (2010a). U tom radu pokazano je da se za $p = 1$ raspodela inovacija aproksimira uniformnom diskretnom, dok se za $p \in (0, 1)$ raspodela inovacija aproksimira neprekidnom raspodelom. Sledeći linearni model sa marginalnom aproksimiranom inverznom gama raspodelom konstruisao je takođe Popović (2010b). Pokazano je da se raspodela inovacija aproksimira neprekidnom raspodelom.

Prvi nelinearni model sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom konstruisali su Popović i ostali (2010). Kao i u slučaju linearog modela sa istom marginalnom raspodelom, pokazano je da se za $p = 1$ raspodela inovacija aproksimira uniformnom diskretnom, dok se za $p \in (0, 1)$ raspodela inovacija aproksimira neprekidnom raspodelom.

U sva tri rada u funkciji gustine neprekidne raspodele figuriše Wrightova hipergeometrijska funkcija. Za njeno detaljnije ispitivanje potrebno je imati algoritam za numeričku evaluaciju specijalne funkcije koja se ovde javlja, a koji danas ne postoji. U kontaktu sa profesorom Yuri Luchkovim, profesora na Beuth Hochschule für Technik u Berlinu, koji se bavi ovom funkcijom, autor disertacije je saznao da bi se implementacija algoritama, mogla očekivati 2011. godine.

Oslanjujući se na postojeće rezultate iz teorije stacionarnih uniformnih autoregresivnih procesa prvog reda, stacionarnih eksponencijalnih autoregresivnih procesa prvog reda u disertaciji su izloženi rezultati koji se odnose na konstrukcije novih stacionarnih uniformnih autoregresivnih procesa prvog reda.

Disertacija se sastoji od 9 glava. Na kraju je dat spisak literature koja je citirana u radu, kao i dodatak koji sadrži rezultate simulacija.

Ukratko ćemo izložiti sadržaj disertacije po glavama.

U Glavi 1 daju se elementarni pojmovi iz teorije stacionarnih slučajnih procesa.

Dati su pojmovi stacionarnosti (jake i slabe), autokovarijansne i autokorelaceone funkcije. Uveli smo i pojam ergodičnosti. Definisali smo linearne, nelinearne, kao i stacionarne procese sa slučajnim koeficijentima. Takođe dali smo i pregled dosadašnjih rezultata iz oblasti autoregresivnih procesa.

U Glavi 2 dat je pregled specijalnih funkcija koje će nam biti potrebne u ovoj disertaciji, kao i definicije i osobine Laplaceove i Mellinove transformacije. U obliku primera formulisali smo i rešili ne baš tako trivijalne zadatke na kojima će biti zasnovani pojedini rezultati u narednim glavama.

U Glavi 3 dati su metodi za ocenjivanje gustine raspodele. S obzirom da su aproksimirana beta i aproksimirana inverzna gama raspodela specifikovane aproksimacijama Laplaceovih transformacija odgovarajućih raspodela, u cilju određivanja kvaliteta aproksimacije gustinu možemo oceniti, metodom jezgra, ukoliko imamo poznat uzorak. Primenom Ridoutovog, u slučajevima kada on konvergira, moguće je odrediti slučajne brojeve iz aproksimiranih raspodela koje ovde razmatramo. U drugom poglavlju dat je tzv. Eulerov metod za numeričko invertovanje Laplaceove transformacije. Pokazaće se da je ovaj metod u praksi primenljiviji jer nije opterećen problemom konvergencije.

U Glavi 4 uveli smo beta raspodelu preko Pearsonove raspodele tipa I. Odredili smo momente beta raspodele, kao i njenu Laplaceovu transformaciju. Takođe smo uveli i Kumaraswamyjevu raspodelu koja je povezana sa beta raspodelom. Odgovarajućim aproksimacijama Laplaceove transformacije došli smo do aproksimirane beta raspodele. Pomoću EULERovog metoda odredili smo i gustine aproksimirane beta raspodele, u zavisnosti od vrednosti njenih parametara. U poglavlju Simulaciona studija ispitivali smo odnos beta i aproksimirane beta raspodele, odakle možemo zaključiti da je aproksimirana beta bliska beta raspodeli.

U Glavi 5 uvodi se aproksimirana inverzna gama raspodela preko Pearsonove raspodele tipa V. I ovde smo odredili momente i Laplaceovu transformaciju inverzne gama raspodele, čijom smo aproksimacijom došli do aproksimirane inverzne gama raspodela. Formulisane su i dokazane teoreme kojima se povezuju beta i inverzna gama raspodela. U sekciji Simulaciona studija pokazali smo da su aproksimirana inverzna gama i inverzna gama raspodela bliske.

U Glavi 6 uvodi se pojam autoregresivnog modela prvog reda sa slučajnim koefi-

cijentima. U opštem slučaju smo dokazali da su, pod određenim uslovima, takvi modeli stacionarni i ergodični. Te osobine su nam potrebne zbog izvođenja asimptotskih ocena metodom uslovnih najmanjih kvadrata. Razmatrali smo i njihove asimptotske osobine u slučaju centriranog niza, što se može smatrati i doprinosom problematici ocenjivanja parametara $RCAR(1)$ modela, jer je u praksi, vrlo često, poželjnije manipulisati nizovima čija je sredina jednaka nuli. Izveli smo ocene metodom najmanjih kvadrata u slučaju kada su slučajni koeficijenti nezavisni, odnosno zavisni. U slučaju kada su slučajni koeficijenti zavisni dali smo detaljne dokaze svih teorema koje se odnose na asimptotsko ponašanje ocena, dok smo u slučaju nezavisnosti dali formulacije odgovarajućih teorema. Na ovaj način pokazano je da pretpostavka o nezavisnosti slučajnih koeficijenata iz (Nicholls i Quinn, 1982) nije neophodna za izučavanje asimptotskih osobina ocena dobijenih UNK metodom. Primenili smo i Yule–Walkerov postupak za ocenjivanje parametara $AR(p)$ modela. Mi smo taj pristup prilagodili slučaju $RCAR(1)$ modela. Izveli smo Yule–Walkerovu ocenu i pokazali da je ona nepristrasna, postojana i asimptotski normalna.

U Glavi 7 uveli smo nove linearne autoregresivne modele prvog reda sa marginalnom aproksimiranom beta i inverznom gama raspodelom. Izveli smo raspodele inovacionih nizova izučavanih modela i ocenili smo njihove parametre metodom uslovnih najmanjih kvadrata i metodom minimalnog količnika. Generisali smo i uzorke iz modela i na njima ocenjivali parametre. Takođe na osnovu rezultata iz Glave 6 povezali smo modele sa aproksimiranom beta i aproksimiranom inverznom gama raspodelom.

U Glavi 8 uvode se novi nelinearni autoregresivni modeli prvog reda sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom. Izveli smo raspodele inovacionih nizova modela koje smo izučavali. Parametre smo u slučaju $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela ocenjivali metodom uslovnih najmanjih kvadrata, dok smo u slučaju preostala dva modela primenili Yule–Walkerov metod. Na osnovu rezultata iz Glave 6 pomoću nelinearnih modela sa aproksimiranom beta generisali smo uzorke sa aproksimiranom inverznom gama raspodelom.

U Dodatku su dati rezultati ocenjivanja parametara na uzorcima generisanim iz proučavanih modela. Takođe su dati rezultati simulacija ocenjivanja parametara aproksimirane beta i aproksimirane inverzne gama raspodele, posle primene Teorema

5.1.1 i 5.1.2. Na kraju je dat spisak citirane literature, kao i indeks pojmova.

Autor se zahvaljuje mentoru, prof. dr Miroslavu M. Ristiću, na nesebičnoj pomoći, veoma korisnim i stručnim savetima. Autor duguje zahvalnost članu komisije, prof. dr Tiboru K. Pogányu, redovnom profesoru Pomorskog fakulteta u Rijeci, koji je potrošio dosta energije i vremena u razmatranju ideja, u sugerisanju puteva za prevazilaženje problema koji su se javili tokom rada na disertaciji.

Zahvalio bih se i ostalim članovima komisije prof. dr Vesni S. Jevremović, prof. dr Biljani Č. Popović i prof. dr Miomiru Stankoviću koji su svojim sugestijama unapredili kvalitet disertacije.

Naročito se zahvaljujem svojoj porodici – supruzi Danijeli, majci Nadi, ocu Vanji, baki Tatjani za bezuslovnu podršku i pomoć u najtežim trenucima, jer je to od njih zahtevalo dodatna odricanja i žrtve.

Moja čerkica Jana mi nije pomogla u radu na disertaciji, ali mi je u proteklih par meseci samim svojim postojanjem darivala neslućenu radost, koja blagotvorno utiče na sve aspekte moga života, pa samim tim i na ovaj rad.

Mr Božidar V. Popović

Glava 1

Osnovi teorije slučajnih procesa

1.1 Konvergencije niza slučajnih promenljivih

DEFINICIJA 1.1.1. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj X , u oznaci $X_n \xrightarrow{d} X$, ako važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x),$$

u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ u kojoj je $F(x)$ neprekidna, gde su $F_n(x)$ i $F(x)$, redom, raspodele slučajnih promenljivih $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i X .

DEFINICIJA 1.1.2. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u verovatnoću ka slučajnoj promenljivoj X , u oznaci $X_n \xrightarrow{P} X$, ako je za svako $\varepsilon > 0$ ispunjeno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0.$$

DEFINICIJA 1.1.3. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira skoro sigurno ka slučajnoj promenljivoj X , u oznaci $X_n \xrightarrow{s.s.} X$, ako je ispunjeno

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \geq m\} = 1.$$

DEFINICIJA 1.1.4. Niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u srednjem indeksu r ka slučajnoj promenljivoj X , u oznaci $X_n \xrightarrow{L^r} X$, ako je za svako $r > 1$ i svako $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0 .$$

Za $r = 2$ kažemo da imamo konvergenciju u srednje kvadratnom, i pišemo l. i. m. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ (*limes in medio*).

Neke osobine konvergencije slučajnih promenljivih su:

1. $X_n \xrightarrow{s.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X;$
2. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X;$
3. $X_n \xrightarrow{L^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X;$
4. $X_n \xrightarrow{L^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^s} X, 0 < s < r;$
5. $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$, gde je c konstanta;
6. Neka je $X_n \xrightarrow{P} X$ i neka je a konstanta. Tada $aX_n \xrightarrow{P} aX$;
7. Ako $X_n \xrightarrow{P} a$ tada $X_n^2 \xrightarrow{P} a^2$;
8. Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} c$, tada $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$;
9. Ako slučajni vektor \mathbf{X}_N konvergira u raspodeli, tada $N^{-\frac{1}{4}}\mathbf{X}_N \xrightarrow{P} 0$;
10. Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} c$, gde je $c \neq 0$ konstanta tada
 - (a) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$,
 - (b) $Y_n X_n \xrightarrow{d} cX$,
 - (c) $Y_n^{-1} X_n \xrightarrow{d} c^{-1} X$.

Ovo tvrđenje predstavlja teoremu Slutskog¹.

¹Evgeny Evgenievich Slutsky (1880–1948), ruski statističar

1.2 Pojam slučajnog procesa, stacionarnosti i ergodičnosti

DEFINICIJA 1.2.1. Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoća i $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ skup vrednosti parametra t . Realni slučajni proces X na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sa faznim prostorom $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ i indeksnim skupom \mathbb{T} je familija slučajnih promenljivih $X = \{X(t) : t \in \mathbb{T}\}$ takvih da za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, funkcija

$$X(t, \omega) : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

je merljiva po t .

Fiksiranjem vremenskog trenutka $t = t_0$ dobijamo funkciju $X(t_0, \omega)$ merljivu u odnosu na Ω , odnosno slučajnu promenljivu. Takvu slučajnu promenljivu zovemo *zasekom* slučajnog procesa X u tački t_0 . Obrnuto, fiksiranjem $\omega = \omega_0$ dobijamo funkciju $X(\cdot, \omega_0) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta neslučajna funkcija argumenta t je *realizacija* ili *trajektorija* slučajnog procesa.

Predmet našeg istraživanja su stohastički nizovi ili stohastički procesi sa diskretnim vremenom, što podrazumeva da je i sam skup \mathbb{T} diskretan. Mi ćemo pretpostavljati da je $\mathbb{T} \equiv \mathbb{Z}$. U daljem tekstu neće se posebno naglašavati da su $t \in \mathbb{Z}$ i $\omega \in \Omega$, već će se zapisom $\{X_t\}$ to i podrazumevati.

DEFINICIJA 1.2.2. Kolekcija $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ je filtracija na merljivom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ako je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$ za svako $t \in \mathbb{Z}$.

Intuitivno, filtracija \mathcal{F}_t je "informacija dostupna u trenutku t ".

DEFINICIJA 1.2.3. Slučajna promenljiva X_t , za svako $t \in \mathbb{Z}$, je \mathcal{F}_t -merljiva ako za svaki Borelov skup B iz \mathcal{B} važi $X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$.

Najmanja σ -algebra u odnosu na koju je za svako $s \leq t$, slučajni proces $\{X_s\}$ merljiv je

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t). \quad (1.2.1)$$

Za svako t slučajna promenljiva X_t definisana je raspodelom $F(t, x) = \mathbb{P}\{X_t < x\}$. Takvu raspodelu zovemo *marginalnom raspodelom* slučajnog niza $\{X_t\}$. Funkcija raspodele n -dimenzionog zaseka $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je n -dimenziona funkcija raspodele

$$F(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n\}.$$

Definisaćemo pojmove stroge i slabe stacionarnosti.

DEFINICIJA 1.2.4. *Slučajni proces $\{X_t\}$ je strogo stacionaran ukoliko su za svako n , svako $g > 0$ i za svaki izbor indeksa $t_1, \dots, t_n \in T$, zaseci $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+g}, \dots, X_{t_n+g})$ jednako raspodeljeni.*

DEFINICIJA 1.2.5. *Slučajni proces $\{X_t\}$ je slabo stacionaran (stacionaran u širokom smislu) ako je:*

1. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, za svako t ;

2. $\mathbb{E}X_t = m$, za svako t ;

3. $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r+t, s+t) = \gamma_X(r-s, 0) = \gamma_X(\tau)$, za svako $t, r, s, \tau \in \mathbb{Z}$, gde je $\gamma_X(r, s)$ autokovariansna funkcija procesa $\{X_t\}$ definisana na sledeći način:

$$\gamma_X(r, s) \equiv Cov(X_{t+r}, X_{t+s}) = \mathbb{E}[(X_{t+r} - m)(X_{t+s} - m)].$$

Važno je naglasiti da su strogo stacionarni procesi sa konačnim momentima drugog reda i slabo stacionarni. Kompleksni Gaussovi strogo stacionarni procesi su i slabo stacionarni, dok obrnuto ne važi. Kod realnih Gaussovih procesa pojmovi stroge i slabe stacionarnosti su ekvivalentni.

Da bismo odredili srednju vrednost m slučajnog procesa $\{X_t\}$ treba da nam je poznata njegova jednodimenziona raspodela. Ako nam ova raspodela nije poznata, tada srednju vrednost ocenjujemo iz eksperimentalnih podataka. U cilju određivanja približne vrednosti matematičkog očekivanja potrebno je da imamo dovoljan broj realizacija procesa za svaku vrednost argumenta t . Poznato je da je nepristrasna ocena matematičkog očekivanja $\mathbb{E}X_t$ aritmetička sredina realizacija. Da bi mogli da kažemo da imamo ocenu srednje vrednosti slučajnog procesa $\{X_t\}$ ovo usrednjavanje treba izvršiti za svako t za koje imamo realizacije. Međutim, ovaj postupak je dosta glomazan, pa postoji težnja da se pojednostavi za klasu stacionarnih procesa.

Uvedimo pojam ergodičnosti.

DEFINICIJA 1.2.6. Za proces $\{X_t\}$ kažemo da je ergodičan ako niz slučajnih promenljivih

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (1.2.2)$$

teži u srednje kvadratnom ka $\mathbb{E}X_t$ kada $n \rightarrow \infty$.

Za procese kod kojih važi Definicija 1.2.6 kažemo da su ergodični u srednje kvadratnom.

Navešćemo, bez dokaza, dve teoreme koje daju neophodan i dovoljan uslov ergodičnosti u srednje kvadratnom smislu. Za dokaz videti Mališić (1989, str. 224-232).

Teorema 1.2.1. Stacionaran slučajni proces $\{X_t\}$ je ergodičan u srednje kvadratnom smislu, u odnosu na matematičko očekivanje, akko važi

$$\frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right) \gamma_X(\tau) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

gde je $\gamma_X(\tau)$ autokovariansna funkcija procesa $\{X_t\}$.

Iz teoreme Hergloza² (Mališić, 1987, str. 13) sledi da je spektralna reprezentacija autokovariansne funkcije $\gamma_X(\tau)$ slučajnog procesa $\{X_t\}$

$$\gamma_X(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda),$$

gde se nenegativna, ograničena, monotono neopadajuća i neprekidna s leve strane funkcija $F(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ zove *spektralna funkcija*.

Teorema 1.2.2. Slučajni proces $\{X_t\}$ je ergodičan u srednje kvadratnom smislu, u odnosu na matematičko očekivanje, akko je njegova spektralna funkcija neprekidna u nuli.

U istoj knjizi proučava se i srednje kvadratna ergodičnost u odnosu na autokovariansnu funkciju. Jedan od dovoljnih uslova pomenute ergodičnosti je

$$\gamma_X(\tau) \rightarrow 0, \quad |\tau| \rightarrow \infty.$$

²Gustav Herglotz (1881-1953), nemački matematičar

1.3 Linearni slučajni procesi

DEFINICIJA 1.3.1. *Slučajni proces $\{X_t\}$, zovemo procesom pokretnih sredina reda q , u oznaci $MA(q)$, ukoliko zadovoljava sledeću slučajnu diferencnu jednačinu:*

$$X_t = \theta_1 \xi_{t-1} + \theta_2 \xi_{t-2} + \dots + \theta_q \xi_{t-q} = \sum_{r=1}^q \theta_r \xi_{t-r}, \quad (1.3.1)$$

gde je $\{\xi_t : t \in \mathbb{Z}\}$ (u daljem tekstu $\{\xi_t\}$) strogi beli šum (niz nezavisnih i jednakost raspodeljenih slučajnih promenljivih). Takođe, $\{\xi_t\}$ se naziva i inovacionim nizom ili, kraće, inovacijama.

Specijalno, za $q = 1$ dolazimo do $MA(1)$ modela, dok za $q = \infty$ imamo $MA(\infty)$ model.

Na osnovu Woldove³ teoreme razlaganja (Mališić, 1989, str. 161–163) sledi da se svaki slučajni proces $\{X_t\}$ (sa očekivanjem nula) može izraziti u obliku

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \xi_{t-j} + \mathcal{V}_t, \quad (1.3.2)$$

gde je $\{\mathcal{V}_t\}$ deterministički proces. Slabo stacionaran slučajni proces je čisto nedeterministički akko njegova Woldova dekompozicija ne sadrži determinističku komponentu. Svaki slučajni proces, koji ćemo ovde izučavati, jeste čisto nedeterministički, što znači da se može napisati u obliku $MA(\infty)$ modela.

DEFINICIJA 1.3.2. *Slučajni proces $\{X_t\}$, zovemo autoregresivnim slučajnim procesom reda p , u oznaci $AR(p)$, ukoliko zadovoljava sledeću diferencnu jednačinu:*

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \xi_t. \quad (1.3.3)$$

Specijalno, za $p = 1$ dolazimo do $AR(1)$ modela, čiji je oblik

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \xi_t \quad (1.3.4)$$

³Herman Ole Andreas Wold (1908–1992), norveški statističar

Pokažimo da se (1.3.3) može predstaviti u obliku (1.3.2). Model $AR(p)$, dat diferencnom jednačinom (1.3.3), možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + b_p X_{t-p} &= c_0 \xi_t + (c_1 + b_1 c_0) \xi_{t-1} + \\ &+ (c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) \xi_{t-2} + \dots + (c_{p-1} + b_1 c_{p-2} + \dots + b_{p-1} c_0) \xi_{t-p+1} + \\ &+ \sum_{j=p}^{\infty} (c_j + b_1 c_{j-1} + \dots + b_j c_0) \xi_{t-j}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 + b_1 c_0 &= 0 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ c_{p-1} + b_1 c_{p-2} + \dots + b_{p-1} c_0 &= 0, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

i

$$c_j + b_1 c_{j-1} + \dots + b_j c_0 = 0, \quad j \geq p. \tag{1.3.6}$$

Jednačini (1.3.6) odgovara karakteristična jednačina

$$k^p + b_1 k^{p-1} + \dots + b_{p-1} k + b_p = 0. \tag{1.3.7}$$

Neka su k_1, \dots, k_p njena rešenja. Tada je

$$c_j = B_1 k_1^j + \dots + B_p k_p^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

gde su vrednosti B_1, \dots, B_p određene početnim uslovima (1.3.5). Ako su svi koreni k_1, \dots, k_p karakteristične jednačine (1.3.7) manji od 1, tada je

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{r=1}^p B_r k_r^j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=1}^p |B_r| \lambda^j = \left(\sum_{r=1}^p |B_r| \right) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j < \infty,$$

gde je $\lambda = \max\{|k_1|, \dots, |k_p|\}$. Pošto je niz c_j absolutno sumabilan, sledi da je niz

$$X_{t,n} = \sum_{j=0}^n c_j \xi_{t-j},$$

Cauchyjev u srednje kvadratnom smislu. Zaista, za $n > k$ biće

$$\mathbb{E}|X_{t,n} - X_{t,k}|^2 = \mathbb{E} \left| \sum_{j=k+1}^n c_j \xi_{t-j} \right|^2 = l \sum_{j=k+1}^n |c_j|^2 \leq l \left(\sum_{j=k+1}^n |c_j| \right)^2 < \infty,$$

gde je $l = E|\xi_t|^2$. Pošto postoji srednje kvadratna granična vrednost niza $\{X_t\}$, model $AR(p)$ se može napisati u obliku (1.3.2). Procesi definisani izrazom (1.3.2) nazivaju se *linearni procesi*.

Lako se može doći do zaključka o uslovu stacionarnosti serije (1.3.3). S obzirom da je (1.3.2) reprezentacija modela (1.3.3), može se pokazati da je uslov **2.** iz Definicije 1.2.5, ispunjen ako su svi koeficijenti c_j , $j \geq 0$, u jediničnom krugu, odakle sledi da mora biti ispunjeno $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in (-1, 1)$. Lako se može pokazati da su uslovi **1.** i **3.**, iz pomenute definicije, ispunjeni.

1.4 Nelinearni autoregresivni modeli

DEFINICIJA 1.4.1. *Modeli oblika*

$$X_t = \lambda(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.1)$$

gde je $\lambda : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ merljiva nelinearna funkcija i $\{\xi_t\}$ je strogi beli šum, nazivaju se nelinearni $AR(p)$ modeli.

Nelinearni $AR(1)$ model, najviše zastupljen u primenama, definiše se

$$X_t = \lambda(X_{t-1}) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Stacionarnost i ergodičnost nelinearnih $AR(1)$ modela izučavani su u radovima (Anděl, 1988) i (Mališić, 1992). Pokazano je da ukoliko je $P\{X_0 > 0, X_1 > 1, X_2 > 2, \dots\} > 0$ tada je nelinearan $AR(1)$ model nestacionaran. Ukoliko je λ neprekidna i ukoliko postoje konstante $k_1, k_2 > 0$ takve da je za $|x| > k_1$ ispunjeno $E(|\lambda(x) + \xi_t| - |x|) \leq -k_2$ tada je $\{X_t\}$ ergodičan.

U radu (Anděl i ostali, 1989) razmatrano je određivanje stacionarne marginalne funkcije raspodele nelinearnog $AR(1)$ modela

$$X_t = a \lambda(X_{t-1}) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.2)$$

gde je ispunjeno: $a > 0$, za svako t , $\xi_t \geq 0$, i λ je nenegativna rastuća funkcija na $[0, \infty)$. Formulisaćemo teoremu

Teorema 1.4.1 (Anděl i ostali, 1989). *Funkcija F je marginalna funkcija raspodele nelinearnog modela (1.4.1) akko zadovoljava sledeći uslov:*

$$F(x) = \int_0^x F\left[\lambda^{-1}\left(\frac{x-a}{t}\right)\right]dH(t), \quad x \geq 0, \quad (1.4.3)$$

gde je $H(x) = \mathbb{P}(\xi_t \leq x)$.

U opštem slučaju veoma je teško odrediti funkciju raspodele (1.4.3), ako je poznato $H(x)$. U radu (Anděl i ostali, 1989) je razmatran specijalni slučaj

$$X_t = aX_{t-1}^{1/h} + \xi_t,$$

gde su: $h > 1$, $p \in (0, 1)$, $\mathbb{P}\{\xi_t = 0\} = p$, $\mathbb{P}\{\xi_t = 1\} = 1 - p$. Neka je $c > 0$. Tada su marginalne raspodele modela (1.4.3)

$$F(x) = p F\left[\left(\frac{x}{a}\right)^h\right], \quad x \in (0, c],$$

odnosno

$$F(x) = p F\left[\left(\frac{x}{a}\right)^h\right] + (1-p) F\left[\left(\frac{x-c}{a}\right)^h\right], \quad x > c.$$

Odgovor na pitanje za kakvu funkciju λ stacionarni niz $\{X_t\}$ definisan sa (1.4.1) ima marginalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu, pri čemu inovacije $\{\xi_t\}$ imaju $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodelu, imamo u radu (Petruccielli, 1989). U slučaju modela prvog reda, pokazano je da je linearna funkcija jedina diferencijabilna funkcija λ za koju je marginalna raspodela normalna, kao i da ukoliko funkcija λ zadovoljava uslove da je 1-1, merljiva i da je $|\lambda(z)| = (1 - \sigma^2)^{1/2}|z|$ skoro svuda, tada $\{X_t\}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ stacionarnu raspodelu. Data su i uopštenja ovih tvrđenja za modele višeg reda.

Jednu novu klasu nelinearnih modela čine takozvani bilinearni modeli. U opštem slučaju bilinearni $BL(p, q, r, s)$ model je

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{k=0}^q b_k \xi_{t-k} + \sum_{l=0}^r \sum_{m=0}^s \beta_{lm} \xi_{t-l} X_{t-m}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gde je $b_0 = 1$ i niz $\{\xi_t\}$ je strogi beli šum. Analiza ovih modela je znatno komplikovanija od linearnih modela, te su detaljnije izučavani samo neki specijalni slučajevi.

Klasa autoregresionih modela sa pragovima takođe je jedna od klasa nelinearnih modela. Jedan oblik ovih modela je

$$X_t = \begin{cases} a_{11}X_{t-1} + a_{21}X_{t-2} + \dots + a_{n_11}X_{t-n_1} + \xi_t & \text{s.v. } \mathbb{P}\{X_{t-1} \in A_1\} \\ a_{12}X_{t-1} + a_{22}X_{t-2} + \dots + a_{n_22}X_{t-n_2} + \xi_t & \text{s.v. } \mathbb{P}\{X_{t-1} \in A_2\} \\ \vdots \\ a_{1k}X_{t-1} + a_{2k}X_{t-2} + \dots + a_{n_kk}X_{t-n_k} + \xi_t & \text{s.v. } \mathbb{P}\{X_{t-1} \in A_k\}, \end{cases}$$

gde su $A_j, j = \overline{1, k}$ disjunktni skupovi koji u uniji daju realnu pravu, a "s.v." znači sa verovatnoćom.

1.5 Pregled nekih dosadašnjih rezultata

U ovom poglavlju daćemo pregled rezultata koji se odnose na autoregresivne modele sa marginalnom raspodelom koja nije Gaussova⁴. Naime, potreba za proučavanjem ovih modela je višestruka. Kao najvažniji razlog može se smatrati izučavanje serija čije su vrednosti pozitivne. Takav je primer u hidrologiji gde se meri vodostaj reka, dok u meteorologiji imamo veoma važne serije u kojima se prati vlažnost vazduha. Takođe, jedan od razloga je i to što marginalne raspodele mogu imati visoki koeficijent spljoštenosti i/ili teške repove.

Osamdesetih godina prošlog veka razvijala se teorija sa marginalnom eksponencijalnom raspodelom. Jedan od prvih izučavanih modela autoregresivnog tipa sa marginalnom eksponencijalnom raspodelom definisan je sa (Gaver i Lewis, 1980)

$$X_t = \begin{cases} \beta X_{t-1} & \text{s.v. } \beta \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } 1 - \beta, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

$\beta \in (0, 1)$. Pokazano je da su inovacije, takođe, eksponencijalno raspodeljene. Naime, primenjujući Laplaceovu transformaciju na (1.5.1), pokazaće se da inovacije poseduju mešavinu diskretne komponente i eksponencijalne raspodele.

Lawrence i Lewis (1980) uopštili su prethodni model zamenom promenljivih $\{\xi_t\}$ i $\{X_{t-1}\}$ i stavljanjem $\alpha = 1 - \beta$. Na taj način došli su do modela

$$X_t = \begin{cases} (1 - \alpha)\xi_t & \text{s.v. } 1 - \alpha \\ (1 - \alpha)\xi_t + X_{t-1} & \text{s.v. } \alpha, \end{cases}$$

⁴Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemački matematičar

Mališić (1987) definisao je *AREX(1)* model na sledeći način

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & \text{s.v.} & p_0 \\ \alpha X_{t-1} & \text{s.v.} & p_1 \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & q_1, \end{cases}$$

gde su $0 < \alpha, \beta < 1$, $0 \leq p_0, p_1, q_1 \leq 1$, $p_0 + p_1 + q_1 = 1$ i $\{\xi_t\}$ je niz nezavisnih i jednakost raspodeljenih slučajnih promenljivih takav da X_t ne zavisi od ξ_s ako je $t < s$. Inovacije su izabrane tako da je marginalna raspodela niza $\{X_t\}$ eksponencijalna. Pogodnim izborom parametara modela, mogu se dobiti prethodno navedeni modeli, pa je i ovaj model jedno njihovo uopštenje. U radu je pokazano da stacionarno rešenje $\{X_t\}$ postoji akko $0 \leq p_0\beta + p_1 < \alpha < \beta < 1$ i $p_1 < \alpha$.

Nakon toga, eksponencijalni autoregresivni modeli se proučavaju u (Popović, 1993), dok se modeli sa mešavinama eksponencijalnih raspodela proučavaju u (Jevremović, 1990).

Posle eksponencijalne razmatraju su Weibulova, Pareto, Erlangova, Laplaceova i druge raspodele. McKenzie (1985) je u svom radu, koristeći neke osobine beta raspodele, konstruisao autoregresivne modele sa marginalnom beta raspodelom sa pozitivno (*PBAR*) i negativno korelisanim (*NBAR*) parovima slučajnih promenljivih.

Ristić (2005) je proučavao *BGAR(2)* model

$$X_t = \begin{cases} B_{t1}X_{t-1} + G_{t1} & \text{s.v.} & \frac{\delta_2(1 - \delta_2)}{\delta_1^2 - \delta_2^2} \\ B_{t2}X_{t-2} + G_{t2} & \text{s.v.} & \frac{\delta_1^2 - \delta_2}{\delta_1^2 - \delta_2^2} \end{cases},$$

gde su ispunjeni uslovi:

1. $0 < \delta_2 \leq \delta_1^2 < 1$,
2. $\{B_{ni}\}$ i $\{G_{nj}\}$ su uzajamno nezavisni nizovi nezavisnih i jednakost raspodeljenih slučajnih promenljivih sa, redom, dvoparametarskom beta $B(k\delta_i, k(1 - \delta_i))$ i dvoparametarskom gama $G(k(1 - \delta_j), \beta)$ raspodelom, gde su $i, j \in \{1, 2\}$ i $k, \beta > 0$;
3. $\{X_m\}$ i $\{B_{ni}\}$ ili $\{G_{nj}\}$ su nezavisni akko je $m < n$.

Koristeći Beta-Gamma transformaciju (Lewis i ostali, 1989), kao i Laplaceovu transformaciju, dokazano je da $\{X_n\}$ ima $G(k, \beta)$ raspodelu.

Poseban naglasak daćemo modelima sa marginalnom uniformnom raspodelom. Chernick (1981) je konstruisao prvi takav model. Naime, razmatran je model oblika

$$X_n - \frac{1}{k}X_{n-1} = \xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gde je $k \geq 2$ ceo broj i ξ_n je strogi beli šum takav da $\{X_n\}$ ima neprekidnu uniformnu raspodelu definisanu na intervalu $(0, 1)$. Pretpostavljen je da su $\{X_n\}$ i $\{\xi_m\}$ nezavisne akko je $n < m$.

Godinu dana kasnije, Chernick i Davis (1982), konstruišu uniformni autoregresivni model prvog reda sa negativnom autokorelacijom prvog reda. Ovaj model je oblika

$$X_n + \frac{1}{k}X_{n-1} = \xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gde k i $\{\xi_t\}$ zadržavaju prethodne osobine.

Ristić i Popović (2000) proučavaju sledeći uniformni nelinearni autoregresivni model

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} & \text{s.v.} & \alpha \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in (0, 1).$$

Inovacije $\{\xi_t\}$ imaju gore navedene osobine i pokazano je da one imaju diskretnu uniformnu raspodelu. U istom radu određene su autokovarijaciona i autokovarijansna struktura, uslovna očekivanja i ocenjeni su nepoznati parametri.

Ristić i Popović (2002) uvode uniformni nelinearni model drugog reda

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \\ \beta X_{t-2} + \xi_t & \text{s.v.} & -\frac{\beta}{\alpha - \beta} \end{cases},$$

gde su $-1 < \beta \leq 0 \leq \alpha < 1$ i $\alpha - \beta > 0$. Pokazano je da je raspodela inovacija uniformna diskretna. Izvedene su autokorelaciona i autokovarijaciona funkcija. Data je *RCAR(2)* reprezentacija (videti Definiciju 6.1.1).

Značajan doprinos proučavanju postojećih i konstrukciji novih modela, dali su upravo Popović i Ristić.

Glava 2

Neke specijalne funkcije i integralne transformacije

U ovoj glavi daćemo kratak pregled specijalnih funkcija koje ćemo koristiti u ovom radu. Sa $\Re(\cdot)$ ćemo označiti realni deo kompleksnog broja ili kompleksne funkcije, a sa $\Im(\cdot)$ odgovarajući imaginarni deo.

2.1 Gama funkcija

Gama funkcija predstavlja proširenje faktorijelne funkcije na realne i kompleksne brojeve. Ukoliko je argument gama funkcije prirodan broj definicija gama funkcije je

$$\Gamma(n) = (n - 1)!.$$

Euler¹ je prethodnu definiciju proširio na slučaj kada je argument gama funkcije kompleksan. Prvobitna definicija je bila

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^n (z + k)}, \quad \Re(z) > 0.$$

Međutim, Euler je kasnije uveo i drugu, pogodniju, definiciju gama funkcije

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0. \tag{2.1.1}$$

¹Leonhard Euler (1707–1783), švajcarski matematičar i fizičar

Takođe važi

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z).$$

Uopštavanjem prethodnog izraza dolazimo do

$$\Gamma(n+z) = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sledeća vrlo važna svojstva su Eulerova formula refleksije

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

kao i

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^t t^{-z} dt, \quad (2.1.2)$$

gde je H_m Hankelova² putanja.

Gornja nekompletna gama funkcija je

$$\Gamma(z, x) = \int_x^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2.1.3)$$

dok je donja nekompletna gama funkcija

$$\gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt;$$

$$\Gamma(z, x) + \gamma(z, x) = \Gamma(z)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(z, x) = \Gamma(z).$$

Izvod logaritma gama funkcije, odnosno

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad (2.1.4)$$

naziva se digama funkcija.

²Hermann Hankel (1839–1873), nemački matematičar

2.2 Beta funkcija

Beta funkcija definiše se integralom

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \Re(x), \Re(y) > 0, \quad (2.2.1)$$

ili integralnom reprezentacijom

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}} da, \quad \Re(x), \Re(y) > 0.$$

Veza beta i gama funkcije data je sledećom jednakošću

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Beta funkcija je simetrična u odnosu na svoje argumente, odnosno važi

$$B(x, y) = B(y, x), \quad \Re(x), \Re(y) > 0.$$

Jedna od njenih integralnih reprezentacija je i

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta, \quad \Re(x) > 0, \Re(y) > 0.$$

Nekompletna beta funkcija definiše se kao

$$B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Za $x = 1$ nekompletna beta funkcija postaje (2.2.1).

Regularna nekompletna beta funkcija definiše se preko nekompletne beta i beta funkcije kao

$$I_x(a, b) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}. \quad (2.2.2)$$

2.3 Krätzelova funkcija

Laplaceova transformacija inverzne gama raspodele data je u obliku Krätzelove funkcije $Z_\rho^\nu(x)$ koja se definiše kao integral

$$Z_\rho^\nu(x) = \int_0^\infty t^{\nu-1} \exp\left(-t^\rho - \frac{x}{t}\right) dt, \quad x > 0, \quad (2.3.1)$$

gde je $x > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$ i $\nu \in \mathbb{C}$. Takođe, ukoliko je $\rho \leq 0$ biće ispunjeno $\Re(\nu) < 0$.

Za $\rho = 1$ i $x = t^2/4$ Krätselova funkcija se može napisati u obliku, (Erdélyi, 1953b, Poglavlje 7.12, jednakost 23),

$$Z_1^\nu \left(\frac{t^2}{4} \right) = 2 \left(\frac{t}{2} \right)^\nu K_\nu(t),$$

gde je $K_\nu(t)$ McDonaldova funkcija iz Poglavlja 7.2.2 u (Erdélyi, 1953b).

Asimptotsko ponašanje funkcije $Z_\rho^\nu(x)$, kada $x \rightarrow \infty$, proučavali su Kilbas i ostali (1980). U istom radu u Teoremi 3.2 i Napomeni 3.3 data je sledeća asimptotska jednakost

$$Z_\rho^\nu(x) \sim \alpha x^{(2\nu-\rho)/[2(\rho+1)]} \exp(-\beta x^{\rho/(\rho+1)}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3.2)$$

gde je $\alpha = \left(\frac{2\pi}{\rho+1} \right)^{1/2} \rho^{-(2\nu+1)/[2(\rho+1)]}$ i $\beta = (1 + \frac{1}{\rho}) \rho^{1/(\rho+1)}$.

2.4 Diracova delta i Heavisideova funkcija

Diracova³ delta funkcija se može posmatrati kao funkcija na realnoj pravoj koja je svuda 0, osim u koordinatnom početku gde je beskonačna

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

pri čemu zadovoljava svojstvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Abramowitz i Stegun (1972, str. 1020) definišu delta Diracovu funkciju kao

$$\delta(x) = dH(x) \quad (2.4.1)$$

gde je H Heavisideova⁴ funkcija

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

³Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), britanski fizičar

⁴Oliver Heaviside (1850–1925), samouki engleski elektroinženjer, matematičar i fizičar

Fundamentalna osobina delta Diracove funkcije je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-T) dx = f(T),$$

gde je $\delta(x-T)$ pomerena delta Diracova funkcija $\delta(x)$ za vrednost parametra T .

Zbog potrebe u Primeru 2.7.2 navešćemo jednu od osobina Heavisideove funkcije

$$H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 1, & a \leq x < b \\ 0, & x < a \quad \text{ili} \quad x \geq b, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

za $a < b$. Takođe, ukoliko slučajna promenljiva X uzima vrednosti x_1, \dots, x_n , redom sa verovatnoćama p_1, \dots, p_n , tada se gustina diskretne slučajne promenljive X može izraziti u obliku funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i).$$

2.5 Hipergeometrijska funkcija

Posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + [c + (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0, \quad (2.5.1)$$

gde $a, b, c \in \mathbb{C}$ ne zavise od $z \in \mathbb{C}$. Jednačinu (2.5.1) zovemo hipergeometrijskom jednačinom, sa otklonjivim singularitetima u $0, 1$ i ∞ .

Definišimo sa $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$ Pochhammerov⁵ simbol. Rešenja jednačine (2.5.1) jesu hipergeometrijske funkcije. Na primer, u okolini tačke $z = 0$, ukoliko je $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, jedno rešenje, (Erdélyi, 1953a, str. 56), je

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

⁵Leo August Pochhammer (1841- 1920), nemački matematičar

2.5.1 Konfluentna hipergeometrijska funkcija

Stavljući u (2.5.1) $z = \frac{x}{b}$ i deleći tako dobijenu diferencijalnu jednačinu sa b , dobijamo

$$x\left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[c + (a + b + 1)\frac{x}{b}\right]\frac{du}{dx} - ab = 0. \quad (2.5.2)$$

Ova diferencijalna jednačina ima otklonjive singularitete u $b, 0$ i ∞ . Ako u (2.5.2) $b \rightarrow \infty$ dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \left(c + x\right)\frac{du}{dx} - ab = 0, \quad (2.5.3)$$

sa otklonjivim singularitetom u b i esencijalnim u ∞ . Esencijalni singularitet nastao je sažimanjem (engl. confluence) dva otklonjiva singulariteta, pa rešenje diferencijalne jednačine (2.5.3) zovemo konfluentna hipergeometrijska funkcija ili Kummerova⁶ funkcija prve vrste, u oznaci ${}_1F_1(a, c; x)$, za koju važi razvoj

$$\mathsf{F}(a, c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!},$$

dok je njena integralna reprezentacija (Erdélyi, 1953a, str.255)

$${}_1F_1(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} du. \quad (2.5.4)$$

2.6 Wrightova hipergeometrijska funkcija

Wright⁷ je uveo hipergeometrijsku funkciju $\Phi(\tau, -p; z)$, definisanu u celoj kompleksnoj ravni \mathbb{C} , na sledeći način:

$$\Phi(\tau, -p; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\tau - pn) n!}, \quad (2.6.1)$$

gde je $a \in \mathbb{C}$ i $0 < p < 1$.

⁶Ernst Eduard Kummer (1810 –1893), nemački matematičar

⁷Sir Edward Maitland Wright (1906-2005), engleski matematičar

Integralna reprezentacija funkcije (2.6.1) je

$$\Phi(\tau, -p; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^{\sigma + z\sigma^p} \frac{d\sigma}{\sigma^\tau}. \quad (2.6.2)$$

Koristeći (2.1.2) pokazaćemo da su zapisi (2.6.1) i (2.6.2) ekvivalentni. Naime,

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, -p; z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^{\sigma + z\sigma^p} \frac{d\sigma}{\sigma^\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^\sigma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sigma^{pn} \right] \frac{d\sigma}{\sigma^\tau} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^\sigma \sigma^{pn-\tau} d\sigma \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\tau - np)}. \end{aligned}$$

Za $z = -Tx^{-p}$, gde su x i T pozitivni realni brojevi, Wrightovu hipergeometrijsku funkciju zapisujemo u obliku

$$x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Tx^{-p}),$$

čija je integralna reprezentacija:

$$\Phi(\tau, -p; -Tx^{-p}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^{\sigma - Tx^{-p}\sigma^p} d\sigma$$

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza. Dokaz videti u radu Stanković (1970, Teorema 8).

Teorema 2.6.1. *Ako je $\tau \geq 0$ tada je*

$$x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Tx^{-p}) > 0, \quad x > 0.$$

Ako je $\tau < 0$ funkcija $x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Tx^{-p})$ ima najmanje jednu nulu.

Asimptotsko ponašanje (2.6.1), kada $x \rightarrow 0$ ili $x \rightarrow \infty$, dato je sledećom teoremom, čiji dokaz sledi iz rezultata prikazanih u radu Mikusiński (1959, jednačine (4), (5)).

Teorema 2.6.2. Važe sledeće asimptotske jednakosti:

$$\begin{aligned} x^{-1}\Phi(0, -p; -x^{-p}) &\sim K x^{-\frac{2-p}{2-2p}} \exp\left(-Ax^{-\frac{p}{1-p}}\right), & x \rightarrow 0+ \\ x^{-1}\Phi(0, -p; -x^{-p}) &\sim Mx^{-1-p}, & x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gde su $K = \frac{p^{\frac{1}{2-2p}}}{\sqrt{2\pi(1-p)}}$, $A = (1-p)p^{\frac{p}{1-p}}$ i $M = \frac{\sin(p\pi)}{\pi}\Gamma(1+p)$.

U radu Stanković (1970, jednačina (32)) data je i majoranta Wrightove hipergeometrijske funkcije

$$|x^{-1}\Phi(0, -p; -x^{-p})| \leq \frac{1}{p\pi} \frac{\Gamma(1/p)}{\cos^{1/p}(p\pi/2)} \quad x \geq 0.$$

Ova specijalna funkcija ima poseban značaj u ovom radu, jer ćemo u Glavama 8 i 9 videti da se gustina raspodele inovacionog niza $\{\xi_t\}$, u nekim slučajevima, javlja u obliku Wrightove hipergeometrijske funkcije.

2.7 Laplaceova transformacija

Laplaceova⁸ transformacija (LT) predstavlja osnovni analitički aparat u ovoj disertaciji. U ovom poglavlju ćemo definisati pomenutu transformaciju i dati uslove pod kojima odgovarajući integral konvergira.

DEFINICIJA 2.7.1. Laplaceova transformacija funkcije $f(x)$, koja je definisana za $x \geq 0$, je funkcija $\varphi(s)$ definisana sa

$$\varphi(s) = \mathcal{L}_s[f] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) \, dx. \quad (2.7.1)$$

Laplaceova transformacija je linearни operator. Naime važi:

$$\varphi_{\alpha X + \beta Y}(s) = \varphi_X(\alpha s) + \varphi_Y(\beta s), \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

DEFINICIJA 2.7.2. Funkcija f je eksponencijalnog reda c , ako postoje konstante B i c takve da za neko $x_0 > 0$ važi

$$|f(x)| \leq Be^{cx}, \quad x \geq x_0.$$

⁸Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom

Teorema 2.7.1 (Sciff, 1999). *Ako je f deo po deo neprekidna funkcija na $[0, \infty)$ i ako je f eksponencijalnog reda c , tada Laplaceova transformacija $\mathcal{L}(f(x))$ postoji za $x > c$ i konvergira apsolutno.*

Inverzna Laplaceova transformacija definiše se

$$\mathcal{L}_x^{-1}[\varphi] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{xs} \varphi(s) ds =: f(x), \quad (2.7.2)$$

gde se integracija vrši u kompleksnoj ravni po vertikalnoj pravoj $\Re(s) = \gamma$ tako da φ na njoj i desno od nje nema singulariteta. Ovo osigurava da je kontura po kojoj se integrali u oblasti konvergencije.

Napomena 2.7.1. Dvostrana (bilateralna) Laplaceova transformacija funkcije $f(x)$ je funkcija $\varrho(s)$ definisana sa

$$\varrho(s) = \mathcal{D}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Sledeći primeri su prilično komplikovani, pa ćemo njihova rešenja detaljno prikazati. Takođe, ovi primeri su veoma važni u nastavku ovog rada.

Primer 2.7.1. Odredimo inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije $h(s) = s^{-\tau} e^{-Ds^p}$, gde je $D > 0$ i $p \in (0, 1)$.

Rešenje: Polazeći od Maclaurinovog⁹ razvoja funkcija e^x dobijamo:

$$\begin{aligned} s^{-\tau} e^{-Ds^p} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-D)^n s^{-\tau+np}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-D)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\tau - np)} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\tau-np-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\tau-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Dx^{-p})^n}{\Gamma(\tau - np) n!} \right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Dx^{-p}) dx. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$\mathcal{L}_x^{-1}[s^{-\tau} e^{-Ds^p}] = x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Dx^{-p}) \quad D > 0.$$

⁹Colin Maclaurin (1698-1746), škotski matematičar

Primer 2.7.2. Pokazati da je $\mathcal{L}_s[\delta(x - a)] = e^{-as}$.

Rešenje: Polazimo od definicije Laplaceove transformacije.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s[\delta(x - a)] &= \int_0^\infty \delta(x - a) e^{-sx} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} dH(x - a) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-sx} dH(x - a) \\ &= e^{-sa}.\end{aligned}$$

Preposlednja jednakost je posledica definicije Diracove delta funkcije (2.4.1).

Da bi objasnili poslednju jednakost, potrebna je definicija Riemann¹⁰-Stieltjesovog¹¹ integrala:

$$\int_0^M e^{-sx} dH(x - a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-sx_n} (H(x_n - a) - H(x_{n-1} - a)). \quad (2.7.3)$$

Neka je $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = M$ podela intervala $[0, M]$, takva da

$$\max_{1 \leq n \leq N} (x_n - x_{n-1}) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Ako je u datoj podeli $x_{n-1} < a \leq x_n$, tada je, na osnovu (2.4.2),

$$H(x_n - a) - H(x_{n-1} - a) = 1,$$

a inače je 0. Sada se desna strana (2.7.3) svodi samo na e^{-sx_n} , koji teži ka e^{-sa} , jer $x_n \rightarrow a$, kada $N \rightarrow \infty$.

Na ovaj način smo pokazali da je $\mathcal{L}_s[\delta(x - a)] = e^{-as}$.

¹⁰Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar

¹¹Thomas Joannes Stieltjesovog (1856–1894), holandski matematičar

2.8 Mellinova transformacija

Neka je $f(x)$ realna funkcija definisana i neprekidna na $[0, \infty)$. Mellinova¹² transformacija funkcije f je

$$\mathcal{M}_s[f] := f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Dvostrana Laplace-ova transformacija se može definisati preko Mellinove transformacije na sledeći način

$$\mathcal{D}_s[f] = \mathcal{M}_s[f(-\ln x)].$$

Sledeći primer, takođe netrivijalan, biće nam potreban u nastavku.

Primer 2.8.1. Važi sledeća jednakost:

$$\int_0^\infty x^{s-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) dx = \frac{T^{s/p} \Gamma\left(-\frac{s}{p}\right)}{p \Gamma(-s)}, \quad T > 0, sp^{-1} \notin \mathbb{N}_0. \quad (2.8.1)$$

Rešenje: Polazeći od leve strane jednakosti (2.8.1) dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{s-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^{\sigma - Tx^{-p} \sigma^{-p}} d\sigma \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^\sigma \left[\int_0^\infty x^{s-1} e^{-Tx^{-p} \sigma^{-p}} dx \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Posle odgovarajuće smene, dolazimo do rešenja drugog integrala u (2.8.2)

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-Tx^{-p} \sigma^{-p}} dx = \frac{T^{\frac{s}{p}}}{p \sigma^s} \Gamma\left(-\frac{s}{p}\right). \quad (2.8.3)$$

Zamenom (2.8.3) u (2.8.2) imamo

$$\int_0^\infty x^{s-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) dx = \frac{T^{\frac{s}{p}} \Gamma\left(-\frac{s}{p}\right)}{p} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{H_m} e^\sigma \frac{d\sigma}{\sigma^s} \right]. \quad (2.8.4)$$

Iz (2.1.2) sledi da

$$\Phi(\tau, 0; 0) = \frac{1}{\Gamma(\tau)},$$

pa na ovaj način (2.8.4) povlači (2.8.1).

¹²Robert Hjalmar Mellin (1854–1933), finski matematičar

Glava 3

Neki metodi ocene gustine verovatnoće

3.1 Ocena gustine metodom jezgra

Postoji više metoda za ocenu gustine slučajne promenljive. U ovom poglavlju prikazaćemo neparametarsku ocenu gustine metodom jezgra (engl. Kernel Density Estimation) ili, kako se još naziva, metod Parzenovih¹ prozora. U tom cilju pretpostavljamo da je X_1, X_2, \dots, X_n niz nezavisnih i jednakog raspodeljenih slučajnih promenljivih iz neprekidne raspodele sa gustinom f , čija je ocena $\hat{f}(x)$ definisana sa

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (3.1.1)$$

gde su K jezgro (engl. kernel) i h širina prozora.

Pod jezgrom podrazumevamo nenegativnu, realnu, integrabilnu funkciju K koja zadovoljava sledeća dva uslova:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$;
2. $K(-x) = K(x)$ za svako x .

Nekoliko tipova jezgara se koristi u praksi, kao na primer:

¹Emanuel Parzen (1929–), američki statističar

1. Gaussovo

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

2. Epanechnikovo

$$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}},$$

3. uniformno

$$K(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}},$$

4. trouglasto

$$K(x) = (1 - |x|) \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}},$$

gde je $\mathbf{1}$ indikator funkcija. Mi ćemo u daljem radu koristiti Gaussovo jezgro.

Izbor optimalne vrednosti širine prozora h ima veoma važnu ulogu. Naime, ako parametar h ima manju vrednost, ocenjena gustina će imati precenjen broj modova, dok se za veće vrednosti parametra h može potceneti broj modova. U cilju određivanja optimalne vrednosti h uvedimo srednju integralnu kvadratnu grešku (engl. Mean Integrated Squared Error)

$$MISE(\hat{f}, f) = \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right].$$

Zavisnost $MISE$ od parametra h nije eksplisitna. Zato postoji teškoća da se odredi uticaj parametra h na ocenjenu gustinu, pa se $MISE$ asimptotski aproksimira pomoću Taylorovog² reda. Na taj način dobijamo (Wand i Jones, 1995)

$$AMISE(\hat{f}, f) = \frac{1}{nh} R(K) + \frac{1}{4} h^4 \mu_2(K)^2 R(f''),$$

gde su: $R(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx$ i $\mu_2(g) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx$. Izjednačavajući prvi izvod $AMISE$ sa 0 dolazimo do optimalne vrednosti za h

$$h_{opt} = \left[\frac{R(K)}{\mu_2(K) R(f'') n} \right]^{1/5}.$$

Vidimo da izraz za h_{opt} zavisi od drugog izvoda gustine f koja je nepoznata. Više detalja o određivanju optimalne širine nalazi se u Poglavlju 4.2.1. Asimptotske osobine ocene (3.1.1) detaljno su izložene u Silverman (1986), Poglavlje 3.3.

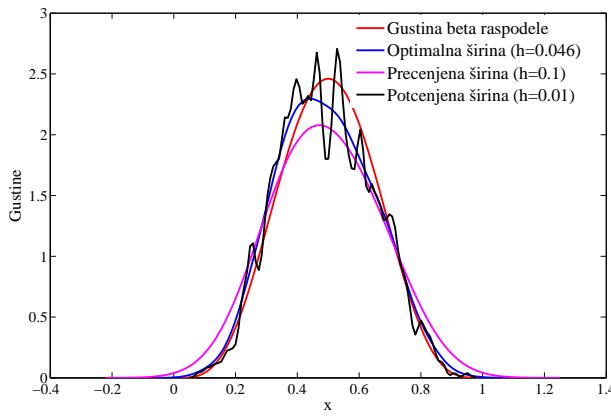
²Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

Da bismo pokazali uticaj izbora optimalne vrednosti širine prozora, generisaćemo uzorak od 1000 elemenata iz beta raspodele za vrednosti parametara $p = q = 5$. Za različite vrednosti parametra h ocenićemo gustinu. Iskoristićemo ideju iz rada (Sheather i Jones, 1991) za računanje optimalne vrednosti h_{opt} .

Ukoliko je vrednost širine prozora manja od optimalne, imamo precenjen broj modova gustine.

U slučaju kada je $h > h_{opt}$, broj modova bi trebalo da bude potcenjen, što zbog unimodalnosti beta raspodele to nije ovde slučaj. Međutim, uočljivo je da su repovi ocenjene gustine van oblasti definisanosti beta raspodele.

Slika 3.1.1: Ocenjene gustine na uzorku iz beta raspodele za različite širine prozora



3.2 Numeričko invertovanje Laplaceove transformacije

Ukoliko imamo neku raspodelu specifikovanu svojom Laplaceovom transformacijom, za detaljnije upoznavanje sa osobinama, ovako određene raspodele, potrebna nam je i njena gustina. Veoma često analitičko invertovanje Laplaceove transformacije je izuzetno težak posao. Zato, u ovim situacijama, pribegavamo numeričkim postupcima invertovanja. Postoji više algoritama za rešavanje ovog problema, a mi ćemo ukratko izložiti Eulerov metod prikazan u radu (Abate i Whitt, 1995).

Neka je data Laplaceova transformacija (2.7.1). Uvođenjem smene $s = \gamma + iu$, zatim pomoću Eulerove formule iz kompleksne analize, izraz (2.7.2) može se napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xs} \varphi(s) ds = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+iu)x} \varphi(\gamma + iu) du = \\
&= \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(ux) + i \sin(ux)) \varphi(\gamma + iu) du = \\
&= \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Re(\varphi(\gamma + iu)) \cos(ux) - \Im(\varphi(\gamma + iu)) \sin(ux)] du = \\
&= \frac{2e^{\gamma x}}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(\varphi(\gamma + iu)) \cos(ux) du. \tag{3.2.1}
\end{aligned}$$

Sledeće pitanje je numeričko izračunavanje nesvojstvenog integrala (3.2.1). U cilju rešavanja ovog problema neka je $\gamma = \frac{A}{2x}$. Pomoću trapezne formule za numeričku integraciju sa korakom $h = \frac{\pi}{2x}$ dolazimo do sledećeg izraza (Abate i Whitt, 1995, jednačina 5)

$$f(x) \approx f_h(x) = \frac{e^{A/2}}{2x} \Re\left(\varphi\left(\frac{A}{2x}\right)\right) + \frac{e^{A/2}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Re\left(\varphi\left(\frac{A+2k\pi i}{2x}\right)\right). \tag{3.2.2}$$

Prethodni problem sveli smo na problem numeričkog izračunavanja beskonačne sume u (3.2.2). Obeležimo sa $s_n(x)$ izraz (3.2.2) gde umesto beskonačne imamo konačnu sumu od n elemenata

$$s_n(x) = \frac{e^{A/2}}{2x} \Re\left(\varphi\left(\frac{A}{2x}\right)\right) + \frac{e^{A/2}}{x} \sum_{k=1}^n (-1)^k \Re\left(\varphi\left(\frac{A+2k\pi i}{2x}\right)\right). \tag{3.2.3}$$

Primenom Eulerove sumacione formule (Abate i Whitt, 1995, jednačina 15) dolazimo do numeričkog metoda za određivanje integrala u (3.2.1). Dakle,

$$f(x) \approx E(m, n, x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{-m} s_{n+k}(x).$$

Vidimo da prethodna formula predstavlja ponderisanu sumu parcijalnih suma (3.2.3). Ponderacija se vrši binomnom raspodelom sa parametrima m i $1/2$. Abate i Whitt (1995) predlažu da se, u cilju postizanja nivoa greške od 10^{-8} , u praksi koriste

sledeće vrednosti: $A = 18.4$, $m = 11$, $n = 15$. Određivanje gustine pomoću Eulerove sumacione formule autor disertacije je implementirao u MATLAB-u.

Ridout (2009) je otišao korak dalje. Posle invertovanja Laplaceove transformacije na gore naveden način, koristeći modifikovani Newton³-Raphsonov⁴ metod, Ridout određuje uzorak iz raspodele specifikovane Laplaceovom transformacijom.

Ridout je algoritam testirao generisanjem vrednosti iz gama raspodele, pretpostavljajući da je ona specifikovana svojom Laplaceovom transformacijom. Mi smo algoritam primenili kada je *aproksimirana beta raspodela* specifikovana jednom od aproksimacija (4.2.1) ili (4.2.3). Pokazaće se da za dati nivo tačnosti 10^{-7} , koji je preporučio autor algoritma, nije uvek moguće postići konvergenciju. Na žalost, to nije bilo moguće ni korigovanjem nivoa tačnosti. Autor disertacije smatra da je problem što su izrazi (4.2.1) ili (4.2.3) znatno komplikovaniji od Laplaceove transformacije gama raspodele, pa modifikovani Newton-Raphsonov metod ne konvergira uvek. Možda bi trebalo razmišljati o primeni nekog drugog metoda za numeričko rešavanje jednačina. Ovo se može smatrati jednim nedostatkom Ridoutovog algoritma. Sa problemom divergencije rešenja susrećemo se u nastavku ove disertacije. Ridout je implementirao algoritam u programskom paketu R (R Development Core Team, 2009).

Ridoutovim dobili smo niz nezavisnih jednakoj raspodeljenih slučajnih promenljivih iz raspodele specifikovane svojom Laplaceovom transformacijom. Na ovakovom uzorku možemo oceniti gustinu raspodele na način opisan u Poglavlju 3.1.

³Sir Isaac Newton (1642–1727), engleski matematičar i fizičar

⁴Joseph Raphson (1648-1715), engleski matematičar

Glava 4

Aproksimirana dvoparametarska beta raspodela

4.1 Dvoparametarska beta raspodela $B_2(p, q)$

Pearsonov sistem raspodela dobija se klasifikovanjem rešenja, u zavisnosti od znaka kvadratnog trinoma $a_0 + a_1Y + a_2Y^2$, sledeće diferencijalne jednačine

$$\frac{df}{dy} = \frac{y - a}{a_0 + a_1y + a_2y^2} f , \quad (4.1.1)$$

odnosno

$$(a_0 + a_1y + a_2y^2) \frac{df}{dy} = (y - a)f . \quad (4.1.2)$$

Ovako dobijene raspodele poznate su pod imenom Pearsonove raspodele tipa I do XII. Množenjem leve i desne strane (4.1.2) sa y^n , zatim primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\begin{aligned} & [y^n(a_0 + a_1y + a_2y^2)f] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} [na_0y^{n-1} + (n+1)a_1y^n + (n+2)a_2y^{n+1}]f dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^{n+1}f dy - a \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f dy . \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Prepostavljajući da važi $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} y^{n+2} f(y) = 0$ iz (4.1.3) sledi

$$\begin{aligned} & -na_0 \int_{-\infty}^{+\infty} y^{n-1} f dy - (n+1)a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f dy - (n+2)a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^{n+1} f dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} y^{n+1} f dy - a \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f dy, \end{aligned}$$

odnosno

$$na_0 \mu'_{n-1} + [(n+1)a_1 - a] \mu'_n + [(n+2)a_2 + 1] \mu'_{n+1} = 0, \quad (4.1.4)$$

gde su sa μ' označeni momenti, odgovarajućeg reda.

Odredićemo koeficijente a_0, a_1, a_2 i a u funkciji momenata. S obzirom da je $\mu'_0 = 1$, stavljujući redom u (4.1.4) da je $n = 0, 1, 2, 3$ i rešavajući tako dobijen sistem jednačina imamo da je

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{10\beta_2 - 18 - 12\beta_1}, \\ a_1 &= -\sqrt{\mu_2} \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{10\beta_2 - 18 - 12\beta_1} = a, \\ a_2 &= -\frac{2\beta_2 - 6 - 3\beta_1}{10\beta_2 - 18 - 12\beta_1}, \end{aligned}$$

gde su β_1 , odnosno β_2 , koeficijenti asimterije, odnosno spljoštenosti.

Ako u (4.1.1) uvedemo smenu $y = Y - a$ dobijamo

$$\ln f = \int \frac{Y dY}{A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2}, \quad (4.1.5)$$

gde ćemo koeficijente A_0, A_1 i A_2 odrediti iz uslova

$$a_0 + a_1(Y - a) + a_2(Y - a)^2 = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2.$$

Pokazaćemo da beta raspodela pripada Pearsonovom tipu I, koji se dobija pretpostavljajući da su rešenja y_1 i y_2 , kvadratne jednačine $A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 = 0$, ($A_2 > 0$) realna i različita. Za $y_1 < 0, y_2 > 0$ važi

$$A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 = A_2(Y + y_1)(Y - y_2).$$

Odredimo koeficijente a i b , tako da važi

$$\frac{Y}{(Y + y_1)(Y - y_2)} = \frac{a}{(Y + y_1)} + \frac{b}{(Y - y_2)}.$$

Odavde dobijamo sistem jednačina $a + b = 1$ i $-ay_2 + by_1 = 0$. Rešavanjem po a i b dobijamo da je $a = \frac{y_1}{y_1+y_2}$ i $b = \frac{y_2}{y_1+y_2}$. Tada je

$$\frac{Y}{(Y+y_1)(Y-y_2)} = \frac{y_1}{y_1+y_2} \frac{1}{Y+y_1} + \frac{y_2}{y_1+y_2} \frac{1}{Y-y_2},$$

pa određujući integral (4.1.5) nalazimo da je

$$f(Y) = k (Y+y_1)^{\frac{y_1}{A_2(y_1+y_2)}} (Y-y_2)^{\frac{y_2}{A_2(y_1+y_2)}},$$

odnosno

$$f(Y) = k_1 \left(1 + \frac{Y}{y_1}\right)^{\frac{y_1}{A_2(y_1+y_2)}} \left(1 - \frac{Y}{y_2}\right)^{\frac{y_2}{A_2(y_1+y_2)}}, \quad (4.1.6)$$

gde su $k, k_1 \in \mathbb{R}$ i $Y \in [-y_1, y_2]$.

Neka su $m_1 = \frac{y_1}{A_2(y_1+y_2)} > -1$ i $m_2 = \frac{y_2}{A_2(y_1+y_2)} > -1$. Normalizujuću konstantu k_1 odredićemo iz uslova

$$k_1 \int_{-y_1}^{y_2} \left(1 + \frac{Y}{y_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{Y}{y_2}\right)^{m_2} dY = 1. \quad (4.1.7)$$

Da bi odredili integral (4.1.7) uvešćemo smenu $Y = (y_2 + y_1)X - y_1$. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} k_1 \int_0^1 \left(1 + \frac{(y_1 + y_2)X - y_1}{y_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{(y_1 + y_2)X - y_1}{y_2}\right)^{m_2} (y_1 + y_2) dX &= 1 \\ k_1 \int_0^1 \frac{(y_1 + y_2)^{m_1}}{y_1^{m_1}} X^{m_1} \frac{(y_1 + y_2)^{m_2}}{y_2^{m_2}} (1-X)^{m_2} (y_1 + y_2) dX &= 1 \\ k_1 \frac{(y_1 + y_2)^{m_1+m_2+1}}{y_1^{m_1} y_2^{m_2}} \int_0^1 X^{m_1} (1-X)^{m_2} dX &= 1, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$k_1 = \frac{y_1^{m_1} y_2^{m_2}}{(y_1 + y_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)},$$

gde je $B(\cdot, \cdot)$ funkcija uvedena u Poglavlju 2.2. Da bi beta funkcija u imeniocu izraza za k_1 bila definisana morali smo da pretpostavimo da su $m_1, m_2 > -1$. Dakle, (4.1.6) se svodi na

$$f(Y) = \frac{y_1^{m_1} y_2^{m_2}}{(y_1 + y_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)} \left(1 + \frac{Y}{y_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{Y}{y_2}\right)^{m_2}, \quad (4.1.8)$$

za $Y \in [-y_1, y_2]$. Izraz (4.1.8) određuje gustinu Pearsonove raspodele tipa I. Smenom $Y = x - y_1$ dobijamo gustinu

$$f(x) = \frac{y_2^{m_2}}{(y_1 + y_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)} x^{m_1} \left(1 - \frac{x - y_1}{y_2}\right)^{m_2},$$

definisanu na $x \in [0, y_1 + y_2]$. Cilj nam je da rezultujuća gustina bude definisana na $[0, 1]$. U tom cilju pretpostavljamo da je $y_1 + y_2 = 1$. Ukoliko uvedemo oznake $p = m_1 + 1 > 0$ i $q = m_2 + 1 > 0$ dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad p, q > 0, \quad (4.1.9)$$

gde je

$$\mathbf{1}_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Dakle, za slučajnu promenljivu $X_{p,q}$, definisanu na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, kažemo da ima dvoparametarsku beta raspodelu $B_2(p, q)$ ukoliko je njena gustina (4.1.9). Ukoliko drugačije nije naglašeno, u daljem tekstu, pod beta raspodelom, podrazumevamo dvoparametarsku beta raspodelu. Funkcija raspodele slučajne promenljive $X_{p,q}$ je

$$F(x) = I_x(p, q),$$

gde je $I_x(p, q)$ regularna nekompletanu beta funkciju (2.2.2).

Ako slučajna promenljiva X ima $B_2(p, q)$ raspodelu tada iz njene ograničenosti sledi da svi njeni momenti postoje. Pošto važi $0 \leq X \leq 1$, tada je za svako $r \geq 0$ ispunjeno

$$0 \leq \mathbb{E}X^r \leq 1,$$

kao i

$$0 \leq \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^r \leq 1.$$

Lako se može pokazati da je r -ti moment slučajne promenljive iz beta raspodele

$$\mathbb{E}X^r = \frac{\Gamma(r+p)\Gamma(p+q)}{\Gamma(r+p+q)\Gamma(p)}, \quad r \geq 0.$$

Odredimo Laplaceovu transformaciju beta raspodele, čija je gustina (4.1.9). Korišteći (2.5.4) dolazimo do

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{p,q}}(s) &= \mathbb{E}e^{-sX_{p,q}} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 e^{-sx} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= F(p, q+p, -s), \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

gde je sa F označena *Kummerova funkcija prve vrste*, iz Poglavlja 2.5.1.

Za više detalja o beta raspodeli konsultovati Đorić i ostali (2007, str. 30-38).

4.1.1 Kumaraswamyjeva raspodela $\text{Kum}_2(p, q)$

Ovu raspodelu uveo je Kumaraswamy (1980). Slučajna promenljiva $X_{p,q}$ definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ima $\text{Kum}_2(p, q)$ raspodelu sa gustom

$$f(x) = pqx^{p-1}(1-x^p)^{q-1} \cdot 1_{[0,1]}(x), p, q > 0.$$

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X_{p,q}$ je

$$F(x) = (1 - (1 - x^p)^q) \cdot 1_{[0,1]}(x).$$

Takođe je ispunjeno

$$X_{p,q}^p \stackrel{d}{=} Y_{1,q}, \quad (4.1.12)$$

gde $Y_{1,q}$ ima beta raspodelu $B_2(1, q)$, $q > 1$. Imajmo na umu da i $\text{Kum}_2(1, 1)$ i $B_2(1, 1)$ reprezentuju uniformnu $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelu.

Primene ove raspodele mogu se naći u Fletcher i Ponnambalam (1996); Nadarajah (2007, 2008). Za kompletnejši prikaz osobina $\text{Kum}_2(p, q)$ videti Jones (2009) ili Đorić i ostali (2007, str. 168–169).

4.2 Aproksimirana beta raspodela $\text{AB}(p, q)$

S obzirom da je Laplaceova transformacija beta raspodele data u obliku Kummerove funkcije prve vrste, nije moguće odrediti raspodelu inovacija tako da marginalna raspodela bude beta raspodela. Zbog toga ćemo za dovoljno veliki argument s Laplaceove transformacije aproksimirati Kummerovu funkciju. Na ovaj način dolazimo do nove raspodele koju ćemo zvati *aproksimirana beta raspodela*.

Teorema 4.2.1 (Popović i ostali, 2010). *Laplaceova transformacija beta raspodele $B_2(p, q)$, u slučaju kada $s \rightarrow \infty$ i $q > 1$, može se aproksimirati na sledeći način*

$$\varphi_{X_{p,q}}(s) \sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)s^p} \left(1 - e^{-p(q-1)s^p}\right), \quad (4.2.1)$$

gde je sa \sim označena asymptotska jednakost.

Specijalno za $p = 1$ dobijamo

$$\varphi_{X_{1,q}}(s) \sim \frac{q}{s} \left(1 - e^{-(q-1)s}\right). \quad (4.2.2)$$

Dokaz: Podintegralnu funkciju u (4.1.11) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{p,q}}(s) &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 e^{-sx} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{s^{-p}}{B(p,q)} \int_0^s e^{-x} x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{q-1} dx, \end{aligned}$$

tako da važi

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{p,q}}(s) &\sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)s^p} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \left(1 - \frac{(q-1)x}{s}\right) dx \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)s^p} \left(1 - \frac{p(q-1)}{s}\right) \\ &\sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)s^p} \exp\left\{-\frac{p(q-1)}{s^p}\right\} \\ &\sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)s^p} (1 - \exp\{-p(q-1)s^p\}), \end{aligned}$$

za dovoljno veliko s . Na ovaj način dokazali smo (4.2.1).

Teorema je dokazana. \square

S obzirom da se radi o asimptotskom ponašanju, podintegralnu funkciju možemo napisati i na drugačiji način i tako doći do nove aproksimacije Kummerove funkcije (4.1.11). Rezultati prethodne i naredne teoreme su asimptotski jednaki, a o razlozima uvođenja i druge aproksimacije videti Poglavlje 4.2.1.

Teorema 4.2.2 (Popović, Pogány, 2011). *Za dovoljno veliko s , Kummerovu funkciju (4.1.11) možemo aproksimirati na sledeći način*

$$\varphi_{X_{p,q}}(s) \sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)(s^p + q)}. \quad (4.2.3)$$

Dokaz: Podintegralnu funkciju u (4.1.11), za dovoljno veliko s možemo napisati i u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{p,q}}(s) &= F(p, q+p, -s) = \frac{s^{-p}}{B(p, q)} \int_0^s e^{-x} x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{q-1} dx \\ &\sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)s^p} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \left(1 - \frac{(q-1)x}{s}\right) dx \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)s^p} \left(1 - \frac{p(q-1)}{s}\right) \sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} \frac{1}{s^p + q}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\varphi_{X_{p,q}}(s) \sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)(s^p + q)}, \quad s \rightarrow \infty.$$

Teorema je dokazana. \square

Da bi u potpunosti odredili raspodelu $AB(p, q)$, specifikovanu aproksimacijama Laplaceovih transformacija (4.2.1) ili (4.2.3), potrebno je odrediti i izraz za gustinu. Određivanje gustine podrazumeva invertovanje aproksimiranih Laplaceovih transformacija iz Teorema 4.2.1 i 4.2.2. S obzirom da to nije uvek moguće analitički, mi ćemo primeniti numerički metod iz Poglavlja 3.2.

Teorema 4.2.3. *Ukoliko je raspodela $AB(p, q)$ specifikovana aproksimacijom (4.2.1), odnosno aproksimacijom (4.2.3), tada je njena gistica*

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x} \int_0^\infty \Re\left(\frac{1-e^{-p(q-1)(\gamma+iu)^p}}{(\gamma+iu)^p}\right) \cos(ux) du}{\int_0^1 \int_0^\infty \Re\left(\frac{1-e^{-p(q-1)(\gamma+iu)^p}}{(\gamma+iu)^p}\right) e^{\gamma x} \cos(ux) du dx}, \quad p \in (0, 1], q > 1, \quad (4.2.4)$$

odnosno

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x} \int_0^\infty \Re\left(((\gamma+iu)^p + q)^{-1}\right) \cos(ux) du}{\int_0^1 \int_0^\infty \Re\left(((\gamma+iu)^p + q)^{-1}\right) e^{\gamma x} \cos(ux) du dx}, \quad p > 1, q > 0. \quad (4.2.5)$$

Dokaz: Teoremu ćemo dokazati u slučaju kada je Laplaceova transformacija $AB(p, q)$ raspodele specifikovana funkcijom (4.2.1). Neka je $f(x)$ gistica aproksimirane beta raspodele. Izvođenje izraza za gesticu ovde ćemo preskočiti jer je postupak detaljno prikazan prilikom dobijanja jednakosti (3.2.1). Jedina razlika je pojavljivanje normirajuće konstante k , koja se ovde javlja, jer je $\varphi_{X_{p,q}}(s)$ aproksimacija Laplaceove transformacije. Dakle,

$$f(x) = k \frac{2e^{\gamma x}}{\pi} \int_0^\infty \Re(\varphi_{X_{p,q}}(\gamma+iu)) \cos(ux) du.$$

Kako je $AB(p, q)$ aproksimacija beta raspodele definisana na $[0, 1]$, konstantu k određujemo iz uslova

$$k \int_0^1 f(x) dx = 1,$$

pa je

$$k = \frac{\pi}{2 \int_0^1 \int_0^\infty \Re(\varphi_{X_{p,q}}(\gamma + iu)) \cos(ux) du}.$$

Teorema je dokazana. \square

Ipak, za neke vrednosti parametara p i q moguće je analitički invertovati aproksimaciju Laplaceove transformacije (4.2.3).

Teorema 4.2.4 (Popović, Pogány, 2011). *Neka je $\text{AB}(p, q)$ specifikovana aproksimacijom Laplaceove transformacije (4.2.3). Ako $s \rightarrow \infty$ tada se:*

1. $B_2(4, q)$, $q \geq (3\pi/4)^4 \approx 30.821$ raspodela može aproksimirati raspodelom čija je gustina

$$f_4(x) = \frac{4\sqrt[4]{q}}{\sqrt{2}\mathcal{A}} \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q^{1/4}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + q^{1/4}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) 1_{\mathfrak{J}_4}(x) \quad (4.2.6)$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \cosh\left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}\right) + \\ & + \sinh\left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

i

$$\mathfrak{J}_4 = \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{q}}, \frac{3\pi}{4\sqrt[4]{q}} \right].$$

2. $B_2(3, q)$, $q \geq (43\pi/6)^3 \approx 11413.04$ se može aproksimirati raspodelom čija je gustina

$$f_3(x) = \frac{2q \left\{ e^{-\sqrt[3]{q}x} - e^{\sqrt[3]{q}x/2} \cos\left(\pi/3 + \sqrt{3}\sqrt[3]{q}x/2\right) \right\} 1_{\mathfrak{J}_3}(x)}{e^{-\pi/(3\sqrt{3})} \frac{1-\exp(-16\pi/\sqrt{3})}{1-\exp(-4\pi/\sqrt{3})} - e^{-7\pi/6} \frac{1-\exp(-8\pi)}{1-\exp(-2\pi)} - e^{7\pi/2}\mathcal{B} + e^{\pi/(6\sqrt{3})}\mathcal{B}_1}, \quad (4.2.7)$$

gde je

$$\mathcal{B} = \cos\frac{7\sqrt{3}\pi}{12} + e^\pi \cos\frac{19\sqrt{3}\pi}{12} + e^{2\pi} \cos\frac{31\sqrt{3}\pi}{12} + e^{3\pi} \cos\frac{43\sqrt{3}\pi}{12},$$

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + e^{2\pi/\sqrt{3}} \cos\frac{13\pi}{6} + e^{8\pi/\sqrt{3}} \cos\frac{25\pi}{6} + e^{12\pi/\sqrt{3}} \cos\frac{37\pi}{6},$$

$$\mathfrak{J}_3 = \bigcup_{k=0}^3 \left[\frac{\pi(12k+1)}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{q}}, \frac{\pi(12k+7)}{6\sqrt[3]{q}} \right]$$

3. $B_2(1, q)$, $q > 0$ se aproksimira raspodelom čija je gustina

$$f_1(x) = \frac{q}{1 - e^{-q}} e^{-qx} \mathbf{1}_{[0,1]}(x). \quad (4.2.8)$$

4. $B_2(2, q)$, $q > \pi^2(2k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$ se aproksimira raspodelom čija je gustina

$$f_2(x) = -\mathcal{M}\sqrt{q}(q+1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{q} \cdot x\right) \mathbf{1}_{\mathfrak{I}_2}(x), \quad (4.2.9)$$

gde su

$$\mathfrak{I}_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2k\pi}{\sqrt{q}}, \frac{\pi(2k+1)}{\sqrt{q}} \right],$$

i $\mathcal{M} > 0$ je normalizirajuća konstanta.

5. $B_2(5, q)$, $q \geq (9\pi/10)^5 \approx 180.70$ se aproksimira raspodelom čija je gustina

$$f_5(x) = \frac{\mathcal{C}_1 \mathbf{1}_{\mathfrak{I}_5}(x)}{\mathcal{C}_2}, \quad (4.2.10)$$

gde su

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt[5]{q}x} - e^{-x\sqrt[5]{q}\cos\frac{\pi}{5}} \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\sqrt[5]{q}\sin\frac{\pi}{5}\right) - e^{-x\sqrt[5]{q}\cos\frac{3\pi}{5}} \cos\left(\frac{3\pi}{5} + x\sqrt[5]{q}\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \frac{1}{2\sqrt[5]{q}} \left(e^{-\frac{3\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}}} - e^{-\frac{9\pi}{10}} \right) + \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt[5]{q}} \left[e^{\frac{9\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}} \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{9\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}\right) - e^{3\pi\cot\frac{\pi}{5}} \right] + \\ & + \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt[5]{q}} \left[e^{\frac{9\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}} \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{9\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}\right) \right] + \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sqrt[5]{q}} \left[e^{\frac{9\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{5}} \sin\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{9\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{5}\right) - \right. \\ & - e^{\frac{3\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{5}} \left. \sin\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{5}\right) \right] + \frac{\cos\frac{3\pi}{5}}{\sqrt[5]{q}} \left[e^{\frac{9\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{5}} \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{9\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{5}\right) - \right. \\ & - e^{\frac{3\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{5}} \left. \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{5}\right) \right], \end{aligned}$$

i

$$\mathfrak{I}_5 = \left[\frac{3\pi}{10\sqrt[5]{q}\sin(\pi/5)}, \frac{9\pi}{10\sqrt[5]{q}} \right].$$

Dokaz:

1. Inverzna Laplaceova transformacija desne strane u (4.2.3) je

$$\mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{p,q}}] = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} \mathcal{L}_x^{-1}[(s^p + q)^{-1}].$$

Jasno je da je za $p \in \mathbb{N}$ ispunjeno

$$s^p + q = \prod_{j=0}^{p-1} \left(s - \sqrt[p]{q} \exp \left\{ \pi(2j+1)i/p \right\} \right). \quad (4.2.11)$$

Izraz $(s^p + q)^{-1}$ se može napisati u obliku

$$\frac{1}{s^p + q} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_j}{s - \sqrt[p]{q} \varepsilon_j}, \quad (4.2.12)$$

gde je $\varepsilon_j := \exp \{ (2j+1)\pi i/p \}, j = \overline{0, p-1}$. Pomoću l'Hôspitalovog¹ pravila možemo izračunati vrednosti koeficijenata A_j . Naime, važi jednakost:

$$A_j = \lim_{s \rightarrow \sqrt[p]{q} \varepsilon_j} \frac{s - \sqrt[p]{q} \varepsilon_j}{s^p + q} = -\frac{\varepsilon_j}{pq^{1-1/p}} \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Odredimo inverznu Laplaceovu transformaciju izraza oblika

$$g(s) = \frac{e^{i\eta}}{s - Ae^{i\eta}} + \frac{e^{-i\eta}}{s - Ae^{-i\eta}} = 2 \frac{\cos \eta (s - A \cos \eta) - A \sin^2 \eta}{(s - A \cos \eta)^2 + A^2 \sin^2 \eta}.$$

Naime, važi

$$\begin{aligned} g(s) &= 2 \left[\cos \eta \frac{s - A \cos \eta}{(s - A \cos \eta)^2 + A^2 \sin^2 \eta} - \sin \eta \frac{A \sin^2 \eta}{(s - A \cos \eta)^2 + A^2 \sin^2 \eta} \right] = \\ &= 2e^{(A \cos \eta)x} \left[\cos \eta \cos (A \sin \eta)x - \sin \eta \sin (A \sin \eta)x \right] = \\ &= 2e^{(A \cos \eta)x} \cos (\eta + x \cdot A \sin \eta). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Napomenimo da smo u prethodnom izvođenju koristili poznatu adpcionu formulu za kosinus razlike, kao i formule 29.3.26 i 29.3.27 iz Abramowitz i Stegun (1972).

Za $p = 2n, n \in \mathbb{N}$, rešenja jednačine (4.2.11) su uređeni parovi $(l_1, \bar{l}_1), \dots, (l_n, \bar{l}_n)$, gde je $\bar{l}_i, i = \overline{1, n}$, konjugat kompleksnog broja l .

Tada specifikujući $A = \sqrt[2n]{q}$, $\eta = \pi(2j+1)/(2n)$, na osnovu (4.2.12) i (4.2.13) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{2n,q}}] &= -\frac{\Gamma(2n+q)}{nq^{1-1/(2n)}\Gamma(q)} \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left\{ \sqrt[2n]{q} \cos \frac{\pi(2j+1)}{2n} \cdot x \right\} \\ &\quad \times \cos \left(\frac{\pi(2j+1)}{2n} + \sqrt[2n]{q} x \sin \frac{\pi(2j+1)}{2n} \right). \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

¹Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704), francuski matematičar

Da bi funkcija $\mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{2n,q}}]$ bila gustina potrebno je da bude ispunjen uslov nenegativnosti. Znajući da je $x > 0$, domen na kome će taj uslov biti ispunjen je

$$\frac{\pi(4k+1)}{2} \leq \underbrace{\frac{\pi(2j+1)}{2n} + x \sqrt[2n]{q} \sin \frac{\pi(2j+1)}{2n}}_{h_j(x)} \leq \frac{\pi(4k+3)}{2} \quad k \in \mathbb{N}_0, j = \overline{0, n-1}.$$

Leva nejednakost važi za svako $j = \overline{0, n-1}$ kada

$$4k+1 \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} x \sqrt[2n]{q} \sin \frac{\pi}{2n} \leq h_j(x),$$

odnosno

$$x \geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4k+1-1/n}{\sqrt[2n]{q} \sin \frac{\pi}{2n}}, \quad \sin \frac{\pi}{2n} \neq 0.$$

posle interpolacije za isto fiksirano $k \in \mathbb{N}_0$ desna strana nejednakosti postaje

$$h_j(x) \leq \frac{\pi(2n-1)}{2n} + \sqrt[2n]{q} x \leq \frac{\pi(4k+3)}{2} \quad j = \overline{0, n-1},$$

odnosno

$$x \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4k+1+1/n}{\sqrt[2n]{q}}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je na domenu

$$\bigcup_{k=0}^{\kappa_n} \left[\frac{\pi(4k+1-1/n)}{2 \sqrt[2n]{q} \sin(\pi/(2n))}, \frac{\pi(4k+1+1/n)}{2 \sqrt[2n]{q}} \right], \quad \sin \frac{\pi}{2n} \neq 0, \quad (4.2.15)$$

ispunjeno $\mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{2n,q}}] \geq 0$. Vrednost κ_n će biti određena naknadno. Skup (4.2.15) je neprazan kada

$$4k+1 \leq \frac{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}{n \left(1 - \sin \frac{\pi}{2n} \right)} =: R_n, \quad \sin \frac{\pi}{2n} \neq 1.$$

Lako možemo pokazati da $R_n \geq 1$ važi samo za $n = 2, 3$, a to je $R_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})} \approx 2.91$, $R_3 = 1$, a zatim $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$. Dakle, na osnovu (4.2.15) dolazimo do domena

$$\mathfrak{I}_{2n} = \left[\frac{\pi(1-1/n)}{2 \sqrt[2n]{q} \sin(\pi/(2n))}, \frac{\pi(1+1/n)}{2 \sqrt[2n]{q}} \right], \quad n = 2.$$

Pošto se za $n = 3$ interval I_6 svodi na tačku $2\pi/(3\sqrt[6]{q})$, samo ima smisla razmatrati slučaj $n = 2$, odnosno $p = 4$. Normalizujući $\mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{4,q}}]$ na

$$\mathfrak{J}_4 = \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{q}}, \frac{3\pi}{4\sqrt[4]{q}} \right],$$

i pretpostavljajući da je $\mathfrak{J}_4 \subset [0, 1]$ dolazimo do $q \geq (3\pi/4)^4$. Na ovaj način dobijamo gustinu (4.2.6).

2. Za $p = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$, jednačina (4.2.11) ima jedno realno i $2n$ kompleksnih rešenja, odnosno n parova $(l_1, \bar{l}_1), \dots, (l_n, \bar{l}_n)$.

Postupajući kao u prethodnom slučaju dolazimo do

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{2n+1,q}}] &= \frac{2\Gamma(2n+1+q)}{(2n+1)q^{1-1/(2n+1)}\Gamma(q)} \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ -\sqrt[2n+1]{q}x \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left\{ \sqrt[2n+1]{q} \cos \frac{\pi(2j+1)}{2n+1} \cdot x \right\} \cos \left(\frac{\pi(2j+1)}{2n+1} + \sqrt[2n+1]{q}x \sin \frac{\pi(2j+1)}{2n+1} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Na isti način kao u parnom slučaju dolazimo do intervala nenegativnosti

$$\mathfrak{J}_{2n+1} = \bigcup_{k=0}^{\lambda_n} \left[\frac{\pi(4k+1-2/(2n+1))}{2\sqrt[2n+1]{q} \sin(\pi/(2n+1))}, \frac{\pi(4k+1+4/(2n+1))}{2\sqrt[2n+1]{q}} \right],$$

koji je definisan ako je

$$4k+1 \leq \frac{2\left(1+2\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left(1-\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)} =: S_n$$

Lakim računom dolazimo do $S_1 = \frac{4(1+\sqrt{3})}{3(2-\sqrt{3})} \approx 13.59$, $S_2 \approx 2.11$ i $S_3 \approx 0.94$, odnosno $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$. Pošto je S_n monotono opadajuća, očigledno je da slučajevе $\lambda_n, n \geq 3$ ne razmatramo. Dakle,

$$\mathfrak{J}_3 = \bigcup_{k=0}^3 \left[\frac{\pi(12k+1)}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{q}}, \frac{\pi(12k+7)}{6\sqrt[3]{q}} \right],$$

gde iz istog razloga kao u parnom slučaju mora da bude

$$q \geq \left(\frac{43\pi}{6} \right)^3.$$

Na kraju, normalizujući na inverznu LT na intervalu integracije \mathfrak{I}_3

$$\mathcal{L}_x^{-1}[C_{X_{3,q}}] = \frac{2(q)_3}{3q^{2/3}\Gamma(q)} \left\{ 0.5e^{-\sqrt[3]{q}x} - e^{\sqrt[3]{q}x/2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt[3]{q}x \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\},$$

dobijamo traženu gustinu (4.2.7), gde je $(q)_3$ odgovarajući Pochhamerov simbol.

3. For $p = 1$ jednakost (4.2.16) postaje

$$\mathcal{L}_x^{-1}[C_{Y_{1,q}}] = qe^{qx}.$$

Posle noramalizacije dolazimo do (4.2.8).

4. Za $p = 2$ jednakost (4.2.14) becomes

$$\mathcal{L}_x^{-1}[C_{Y_{2,q}}] = -\frac{\Gamma(2+q)}{\Gamma(q)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{q}x\right).$$

Postupajući na isti načina kao u slučaju $p = 2n$ zaključujemo da je domen \mathfrak{I}_2 .

Posle normalizacije dolazimo do (4.2.9).

5. Na isti načim kao u slučaju 2. posle noramlizacije dolazimo do (4.2.10).

Teorema je dokazana. □

4.2.1 Simulaciona studija

U ovom poglavlju cilj nam je da grafički prikažemo gustine raspodela $AB(p, q)$ i $B_2(p, q)$. Na taj način utvrdili bi koliko dobro $AB(p, q)$ aproksimira $B_2(p, q)$ raspodelu. Gustinu *aproksimirane beta* raspodele odredićemo na dva načina:

1. Pretpostavićemo da su njene gustine određene izrazima (4.2.4) i (4.2.5). Dvostruki integral u imeniocu odredili smo primenom Fubinijeve² teoreme (Lažetić, 1991, Teorema 1, str. 157). Neka je

$$\rho(u, x) = \Re\left(\frac{1 - e^{-p(q-1)(\gamma+iu)^p}}{(\gamma+iu)^p}\right) e^{\gamma x} \cos(ux).$$

²Guido Fubini (1879-1943), italijanski matematičar

Vrednost integrala

$$\mathcal{H}(u) = \int_0^1 \rho(u, x) dx$$

odredićemo primenom Simpsonove³ formule. Tada je

$$\mathcal{H}(u) \approx \frac{\rho(u, 1) - \rho(u, 0)}{6} \left[\rho(u, 0) + 4\rho\left(u, \frac{1}{2}\right) + \rho(u, 1) \right],$$

gde je

$$\rho(u, 0) = \Re\left(\frac{1 - e^{-p(q-1)(\gamma+iu)^p}}{(\gamma+iu)^p}\right)$$

i

$$\rho(u, 1) = \Re\left(\frac{1 - e^{-p(q-1)(\gamma+iu)^p}}{(\gamma+iu)^p}\right) e^\gamma \cos(u).$$

Simpsonov algoritam je implemeniran u MATLAB-u.

Sada izračunavamo nesvojstveni integral

$$\int_0^\infty \frac{\rho(u, 1) - \rho(u, 0)}{6} \left[\rho(u, 0) + 4\rho\left(u, \frac{1}{2}\right) + \rho(u, 1) \right] du.$$

Označimo sa $\Lambda(u)$ njegovu podintegralnu funkciju. U ovom slučaju (3.2.3) postaje

$$s_n(u) = \frac{e^{A/2}}{2u} \Re\left(\Lambda\left(\frac{A}{2u}\right)\right) + \frac{e^{A/2}}{u} \sum_{k=1}^n (-1)^k \Re\left(\Lambda\left(\frac{A+2k\pi i}{2u}\right)\right).$$

Dakle, gustina $AB(p, q)$ raspodele dobija se Eulerovom aproksimacijom

$$f(u) \approx E(m, n, u) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^{-m} s_{n+k}(u).$$

Vrednosti parametara A , m i n su izabаране tako da se postigne greška od 10^{-8} , odnosno $A = 18.4$, $m = 11$ i $n = 15$. Kao što je rečeno, algoritam smo implementirali u MATLAB-u.

Grafik gustine dobijena na ovaj način biće prikazan crnom bojom.

2. Posle invertovanja aproksimiranih Laplaceovih transformacija, primenom algoritma (Ridout, 2009) dolazimo do slučajnih brojeva generisanih iz $AB(p, q)$

³Thomas Simpson (1710–1761), britanski matematičar

raspodele. Neka je (x_1, x_2, \dots, x_n) generisani uzorak. Da bi ocenili gustinu metodom jezgra, potrebno je odrediti optimalnu širinu prozora. Međutim, iz samog izraza vidimo da je tu formulu moguće koristiti samo ako imamo ocenjen i drugi izvod gustine. Naime, ocena ℓ -tog izvoda gustine je

$$\widehat{f}^{(\ell)}(x) = \frac{1}{nh^{(\ell+1)}} \sum_{i=1}^n K^{(\ell)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right),$$

gde je $K^{(\ell)}$ ℓ -ti izvod jezgra. U slučaju kada je K Gaussovo jezgro važi $K^{(\ell)}(w) = (-1)^\ell H_\ell(w)K(u)$, gde je $H_\ell(u)$ ℓ -ti Hermiteov⁴ polinom. Tada je ocena ℓ -toga izvoda gustine

$$\widehat{f}^{(\ell)}(x) = \frac{(-1)^{(\ell)}}{nh^{\ell+1}\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n H_{(\ell)}\left(\frac{x-x_i}{h}\right) e^{-(x-x_i)^2/2h^2}.$$

Optimalna širina prozora za ocenu ℓ -toga izvoda gustine je

$$h_{opt}^\ell = \left[\frac{R(K^{(\ell)})(2\ell+1)}{\mu_2^2(K)R(\widehat{f}^{(\ell+2)})n} \right]^{1/(2\ell+5)}, \quad (4.2.17)$$

gde su $R(\cdot)$ i $\mu_2^2(\cdot)$ definisani u Poglavlju 3.1. Napomenimo da je u h_{opt}^ℓ sa ℓ označen gornji indeks, a ne eksponent. S obzirom da mi ocenjujemo gustinu funkcije raspodele, a ne njene izvode, stavljajući u (4.2.17) da su $\ell = 0$ i $h_{opt}^0 = h_{opt}$ dobijamo optimalnu širinu prozora

$$h_{opt} = \left[\frac{R(K)}{\mu_2^2(K)R(\widehat{f}'')n} \right]^{1/5}.$$

S obzirom da je za generisanje slučajnih brojeva iz raspodele specifikovane svojom Laplaceovom transformacijom upotrebljena modifikovana Newton-Raphsonova formula, nećemo uvek postići potrebnu tačnost, tako da, u tom slučaju, možemo smatrati da nemamo konvergenciju ka rešenju. Takodje, može se desiti da Newton-Raphsonov algoritam ne konvergira kada je gustina raspodele na svojim repovima bliska 0. U slučaju konvergencije, na uzorku od 5000 elemenata, ocenićemo gustinu metodom jezgra (videti Poglavlje 3.1). Ovaj grafik ćemo prikazati plavom bojom.

⁴Charles Hermite(1822- 1901), francuski matematičar

Grafi kon gustine raspodele biće dat crvenom bojom.

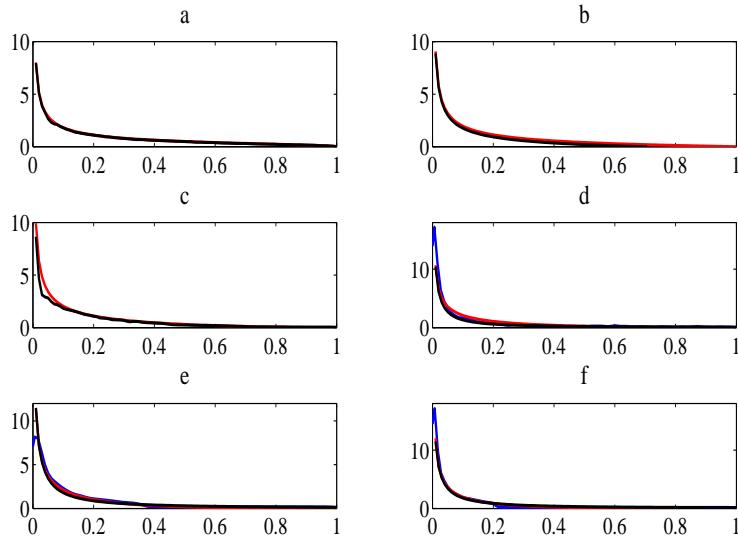
Na kraju ćemo, posebnim alatom koji je deo MATLAB-a, meriti odstupanje gustine aproksimirane beta od gustine beta raspodele. U svakom od narednih primera mi ćemo dati maksimalno odstupanje.

Primer 4.2.1. Razmotrićemo aproksimaciju (4.2.1). Fiksiraćemo vrednost parametra $p = \frac{3}{8}$, a parametar q će uzimati, redom, vrednosti iz skupa

$$Q = \{1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}.$$

Za ovako odabrane vrednosti grafički ćemo prikazati gusinu (4.2.4). U slučaju konvergencije Ridoutovog algoritma ocenićemo gusinu raspodele $\text{AB}(p, q)$.

Slika 4.2.1: Gustine raspodela $\text{AB}(p, q)$ i $B_2(p, q)$ za $p = 3/8$ i (a) $q = 1.5$, (b) $q = 2$, (c) $q = 2.5$, (d) $q = 3$, (e) $q = 3.5$, (f) $q = 4$.



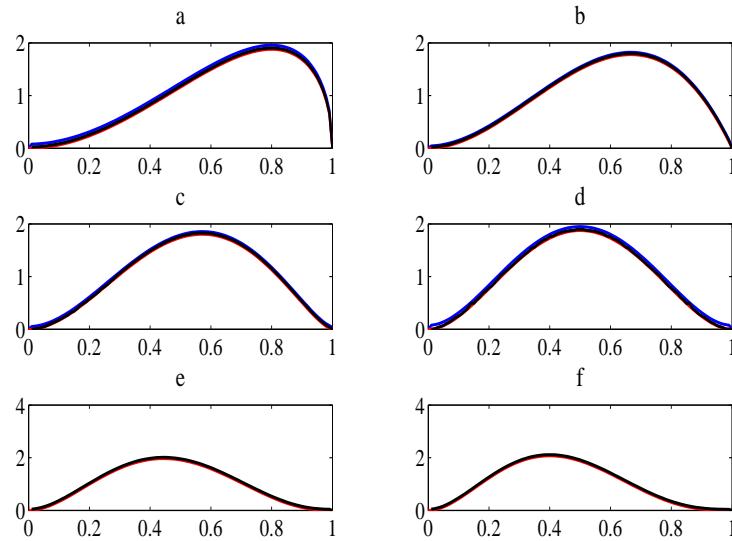
Sa Slike 4.2.1 možemo zaključiti da u slučajevima kada $q \in \{1.5, 2, 2.5\}$, nemamo krivu plave boje, što znači da nismo imali konvergenciju Ridoutovog algoritma. Maksimalno odstupanje gustine aproksimirane beta raspodele od gustine beta raspodele je 1.01 mm, pa možemo smatrati da raspodela $\text{AB}(p, q)$ specifikovana aproksimiranom Laplaceovom transformacijom (4.2.1) jeste dobra aproksimacija $B_2(p, q)$.

Primer 4.2.2. Razmotrićemo aproksimaciju (4.2.3). Fiksiraćemo vrednost parametra $p = 3$, a parametar q će uzimati, redom, vrednosti iz skupa

$$Q = \{1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

i postupiti kao u slučaju prethodnog primera.

Slika 4.2.2: Gustine raspodela $AB(p, q)$ i $B_2(p, q)$ za $p = 3$ i (a) $q = 1.5$, (b) $q = 2$, (c) $q = 2.5$, (d) $q = 3$, (e) $q = 3.5$, (f) $q = 4$.



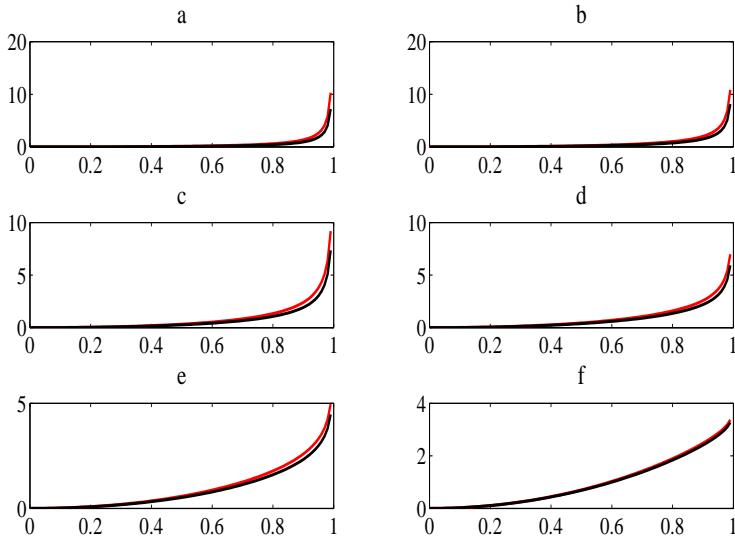
Razmatrajući Sliku 5.2.2 možemo zaključiti da za $q \in \{3.5, 4\}$, nije bilo konvergencije Ridoutovog algoritma (nemamo krivu plave boje). Pošto je maksimalno odstupanje gustine aproksimirane beta raspodele od beta raspodele 0.9896 mm, možemo smatrati da $AB(p, q)$ raspodela specifikovana aproksimacijom Laplaceove transformacije (4.2.3) dobro aproksimira raspodelu $B_2(p, q)$.

Primer 4.2.3. Razmotrićemo aproksimaciju (4.2.3). Fiksiraćemo vrednost parametra $p = 3$, a parametar q će uzimati, redom, vrednosti iz skupa

$$Q = \{0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95\}$$

i postupiti kao u slučaju prethodnih primera.

Slika 4.2.3: Gustine raspodela $AB(p, q)$ i $B_2(p, q)$ za $p = 3$ i (a) $q = 0.2$, (b) $q = 0.35$, (c) $q = 0.5$, (d) $q = 0.65$, (e) $q = 0.8$, (f) $q = 0.95$.



Kao što se vidi na Slici 4.2.1 i za ovakav izbor parametara možemo govoriti da $AB(p, q)$ dobro aproksimira $B_2(p, q)$ raspodelu, jer je maksimalno odstupanje 1.0298 mm. Treba napomenuti da Ridoutov algoritam nije konvergirao. U toku realizacije ove simulacione studije uočeno je da gustina (4.2.4), definisana za $q > 1$, dobro aproksimira (4.1.9) jedino u slučaju $0 < p \leq 1$. Cilj nam je bio da proširimo opseg vrednosti parametara p i q za koje bi pomenuta aproksimacija bila dobra. Drugačijom modifikacijom podintegralne funkcije u (4.1.11) (videti Teoremu 4.2.2), za dovoljno veliko s , dobijamo (4.2.3). Ono što bi ovde moglo da deluje zbunjujuće jeste da je jedna raspodela definisana dvema različitim gustinama, koje se "poklapaju" kada $s \rightarrow \infty$ (videti Teoremu 4.2.3). S obzirom da u ovoj disertaciji "glavnu reč" vodi asimptotika, tada su Laplaceove transformacije gustina (4.2.4) i (4.2.5), za dovoljno veliki argument s , jednake, pa je njima i određena ista raspodela.

Da rezimiramo, smatraćemo da je $AB(p, q)$ specifikovana gustinom (4.2.1) za $p \in (0, 1], q > 1$. Dakle, generalni zaključak jeste da aproksimacije Laplaceovih transformacija (4.2.1) i (4.2.3) generišu *aproksimiranu beta raspodelu* za koju se može smatrati da dobro aproksimira beta raspodelu, tako da će razmatranja u sledećim glavama imati smisla.

Glava 5

Aproksimirana dvoparametarska inverzna gama raspodela

5.1 Dvoparametarska inverzna gama raspodela $\text{IG}(p, q)$

Kao u slučaju gustine $B_2(p, q)$ raspodele, do gustine inverzne gama raspodele, doći ćemo klasifikovanjem rešenja diferencijalne jednačine (4.1.5). Pokazaćemo da je inverzna gama raspodela specijalni slučaj Pearsonove raspodele tipa V. U tom cilju neka kvadratna jednačina $A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 = 0$ ima jednaka, realna i negativna rešenja y . Takođe, neka je $-1 < A_2 < 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\ln f &= \frac{1}{A_2} \int \frac{Y dY}{(Y - y)^2} \\ &= \frac{1}{A_2} \left(\int \frac{du}{u} + y \int \frac{du}{u^2} \right) \\ &= \frac{1}{A_2} \ln u + \frac{y}{A_2} \frac{1}{u} + \ln C, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

odakle, za $C = 1$, sledi da je

$$f(u) = u^{\frac{1}{A_2}} e^{\frac{y}{A_2 u}}.$$

Odredimo konstantu $k > 0$ takvu da je

$$k \int_0^\infty u^{\frac{1}{A_2}} e^{\frac{y}{A_2 u}} du = 1.$$

Uvođenjem smene $\frac{y}{A_2 u} = t$ dobijamo

$$k \left(\frac{y}{A_2} \right)^{\frac{1}{A_2} + 1} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{A_2} - 2} e^{-t} dt = 1,$$

odnosno

$$k = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{A_2} - 1\right) \left(\frac{y}{A_2}\right)^{\frac{1}{A_2} + 1}}. \quad (5.1.1)$$

Zamenom $b = \frac{A_2}{y} > 0$ i $p = -\frac{1}{A_2} > 1$ u (5.1.1), dobijamo gustinu Pearsonove raspodele tipa V

$$f(u) = \frac{b^{p-1}}{\Gamma(p-1)} u^{-p} e^{-\frac{b}{u}}. \quad (5.1.2)$$

Stavljujući u (5.1.2) da je $p-1 = a > 0$ i $x = u$ dolazimo do gustine inverzne gama raspodele

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-p} e^{-\frac{b}{x}} \mathbf{1}_{[0,\infty]}(x), \quad a, b > 0, \quad (5.1.3)$$

gde je $\mathbf{1}_S(x)$ indikator funkcija (4.1.10).

Dakle, za slučajnu promenljivu $X_{a,b}$, definisanu na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, kažemo da ima dvoparametarsku inverznu gama raspodelu $\text{IG}(a, b)$ ukoliko je njena gustina (5.1.3). Ukoliko drugačije nije naglašeno, u daljem tekstu, pod inverznom gama raspodelom, podrazumevaćemo dvoparametarsku inverznu gama raspodelu. Funkcija raspodele slučajne promenljive $X_{a,b}$ je

$$F(x) = \frac{\Gamma(a, b/x)}{\Gamma(a)},$$

gde je u imeniocu gornja nekompletna gama funkcija definisana izrazom (2.1.3), dok je u brojiocu gama funkcija definisana sa (2.1.1).

Za više detalja o izvođenju svih dvanaest tipova Pearsonovih raspodela može se konsultovati Popović (2009, str. 19 –22).

U cilju povezivanja rezultata koji se odnose na inverznu gama raspodelu, sa beta raspodelom formulisaćemo i dokazati sledeće dve teoreme.

Teorema 5.1.1. *Ako slučajna promenljiva X ima beta raspodelu $B_2(a, b)$ i ako $b \rightarrow \infty$, tada važi*

$$\frac{1}{bX} \sim \text{IG}(a, \frac{1}{b}),$$

gde je sa \sim označena asimptotska jednakost raspodela.

Dokaz: Neka je

$$Y = g(X) = \frac{1}{bX},$$

odnosno

$$X = \frac{1}{bY}.$$

Na osnovu teoreme o smeni promenljive kod integrala i koristeći asimptotsku jednakošć $a + b \sim b$, za $b \rightarrow \infty$, dobijamo

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{1}{by} \right)^{a-1} \left(1 - \frac{1}{by} \right)^{b-1} \frac{1}{by^2} = \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(a)b^a} \left(\frac{1}{y} \right)^{a+1}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. \square

Teorema 5.1.2. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive takve da $\frac{1}{X} : \text{IG}(a, 1)$ i $\frac{1}{Y} : \text{IG}(b, 1)$, tada

$$\frac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}} : \text{B}_2(a, b). \quad (5.1.4)$$

Dokaz: Zadatak ćemo rešiti pronalaženjem gustine $f_{X,Y}(x, y)$. U tom cilju uvešćemo sledeće smene:

$$v = y$$

i

$$u = \frac{y}{x+y},$$

odnosno

$$x = \frac{v(1-u)}{u}$$

i

$$y = v.$$

Jakobijan transformacije je

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1-u}{u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{v}{u^2}.$$

Iz teoreme o smeni promenljive kod dvostrukog integrala sledi

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}\left(\frac{v(1-u)}{u}, v\right)|J| = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{v(1-u)}{u}\right)^{-a-1} v^{-b-1} \exp\left\{-\frac{u}{v(1-u)}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{v}\right\} \frac{v}{u^2} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} v^{-a-b-1} u^{a-1} (1-u)^{-a-1} \exp\left\{-\frac{1}{v(1-u)}\right\}. \end{aligned}$$

Na ovaj način imamo gustinu raspodele slučajnog vektora (U, V) , a nama je potrebna marginalna raspodela slučajne promenljive U . Integracijom prethodnog izraza po v dobijamo odgovarajuću marginalnu raspodelu

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty v^{-a-b-1} u^{a-1} (1-u)^{-a-1} \exp\left\{-\frac{1}{v(1-u)}\right\} dv = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{-a-1} \int_0^\infty v^{-a-b-1} \exp\left\{-\frac{1}{v(1-u)}\right\} dv. \end{aligned}$$

Ako u prethodni integral prvo uvedemo smenu $\frac{1}{v} = t$, a zatim $\frac{t}{1-u} = t_1$, dobijamo

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1} \int_0^\infty t_1^{a+b-1} e^{-t_1} dt_1 = \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1}, \end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. \square

Laplaceova transformacija inverzne gamma raspodele je

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{a,b}}(s) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \exp\left(-sx - \frac{b}{x}\right) x^{-a-1} dx \\ &= \frac{(sb)^a}{\Gamma(a)} Z_1^{-a}(bs), \end{aligned}$$

gde je $Z_1^{-a}(bs)$ Kräzelova funkcija (2.3.1), koja zadovoljava sve uslove egzistencije iz Leme 2.1 u radu (Kilbas i ostali, 1980).

Parametre inverzne gama raspodele možemo oceniti metodom momenata ili metodom maksimalne verodostojnosti. Lako se može pokazati da su, za $a > r$, momenti inverzne gama raspodele

$$\mathbb{E} X^r = \frac{b^r}{(a-1)\dots(a-r)}. \quad (5.1.5)$$

Iz (5.1.5) vidimo da momenti inverzne gama raspodele nisu uvek definisani. Zato ćemo razmotriti i metod maksimalne verodostojnosti. Neka je (X_1, \dots, X_N) prost slučajan uzorak iz inverzne gama raspodele, čija je funkcija verodostojnosti

$$L = \frac{b^{Na}}{\Gamma^N(a)} \prod_{k=1}^N X_k^{-a-1} e^{-\frac{b}{X_k}},$$

dok je njen logaritam

$$\ln L = aN \ln b - N \ln \Gamma(a) + (-a-1) \sum_{k=1}^N \ln X_k - b \sum_{k=1}^N \frac{1}{X_k} \quad (5.1.6)$$

Diferencirajući (5.1.6) prvo po b , pa po a i njihovim izjednačavanjem sa 0 dolazimo do ocena

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\hat{a}N}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{X_k}}, \\ \Psi(a) - \ln(b) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln X_k, \end{aligned}$$

gde je $\Psi(\cdot)$ digama funkcija definisana relacijom (2.1.4).

5.2 Aproksimirana inverzna gama raspodela AIG(a, b)

Kao i u slučaju beta raspodele, Laplaceova transformacija inverzne gama raspodele data je u obliku specijalne funkcije. Koristeći (2.3.2), dolazimo do aproksimacije Laplaceove transformacije inverzne gama raspodele kada njen argument teži ka beskonačnosti

$$\varphi_{X_{a,b}}(s) \sim \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(a)} b^{-\frac{1-2a}{4}} s^{-\frac{1-2a}{4}} \exp(-2b^{1/2}s^{1/2}), \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.2.1)$$

Aproksimacijom Laplaceove transformacije $IG(a, b)$ dolazimo do nove raspodele koju ćemo zvati *aproksimirana inverzna gama raspodela*, u oznaci, $AIG(a, b)$. U

radu Popović (2010b) tu raspodelu zvali smo *Wrightova inverzna gama raspodela*, u oznaci $\text{WIG}(a, b)$.

Sledećom teoremom pokazaćemo da se za $0 < a \leq \frac{1}{2}$ analitičkim putem može doći do raspodele čija je Laplaceova transformacija (5.2.1):

Teorema 5.2.1 (Popović, 2010b). *Ako $s \rightarrow \infty$ i ako $0 < a \leq \frac{1}{2}$ tada se inverzna gama raspodela $\text{IG}(a, b)$ aproksimira raspodelom čija je gustina*

$$f(x) = M \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(a)} b^{\frac{2a-1}{4}} x^{-\frac{3+2a}{4}} \Phi\left(\frac{1-2a}{4}, -\frac{1}{2}; -D x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad x > 0, \quad (5.2.2)$$

gde su $D = 2\sqrt{b} > 0$, M je normirajuća konstanta, tj.

$$M = \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{\pi} b^{\frac{2a-1}{4}} \int_0^\infty x^{-\frac{3+2a}{4}} \Phi\left(\frac{1-2a}{4}, -\frac{1}{2}; -D x^{-\frac{1}{2}}\right) dx},$$

dok je sa $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ označena Wrightova hipergeometrijska funkcija.

Dokaz: Dokaz sledi iz Primera 2.7.1, stavljajući da je $\tau = \frac{1-2a}{4}$, $D = 2\sqrt{b}$ i $p = \frac{1}{2}$. Kako je za $0 < a \leq 1/2$ ispunjeno da je $\tau = \frac{1-2a}{4} \geq 0$ i kako je $x > 0$, iz Teoreme 2.6.1 sledi nenegativnost gustine (5.2.2). \square

Kao što je bio slučaj kod $\text{AB}(p, q)$ raspodele, do gustine aproksimirane inverzne gama raspodele može se doći i numeričkim putem. Pogodnost numeričkog određivanja gustine $\text{AIG}(a, b)$ raspodele jeste ta što ne postoji nikakvo ograničenje vrednosti parametara a i b . U prilog korišćenju numeričke aproksimacije u ovom radu je i činjenica da u informatičkoj eri, numerička matematika, postaje nezaobilazan deo, ne samo matematičke statistike, već i ostalih matematičkih disciplina.

Teorema 5.2.2. *Gustina $\text{AIG}(a, b)$ raspodele specifikovane Laplaceovom transformacijom (5.2.1) je*

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x} \int_0^\infty \Re\left((\gamma + iu)^{-\frac{1-2a}{4}} \exp\{-2b^{1/2}(\gamma + iu)^{1/2}\}\right) \cos(ux) du}{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\gamma x} \Re\left((\gamma + iu)^{-\frac{1-2a}{4}} \exp\{-2b^{1/2}(\gamma + iu)^{1/2}\}\right) \cos(ux) du dx}. \quad (5.2.3)$$

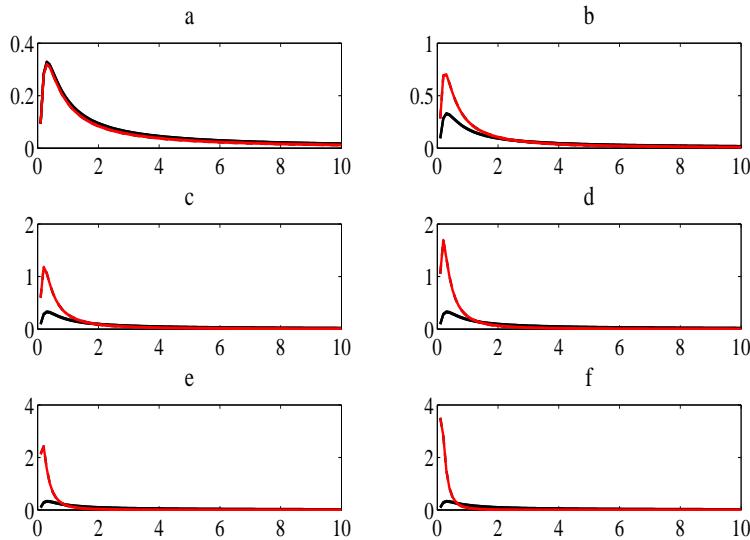
Dokaz: Sledi iz dokaza Teoreme 4.2.3. \square

5.2.1 Simulaciona studija

Simulacionu studiju sprovešćemo na isti način kao u Poglavlju 4.2.1, s tim što ćemo dvostruki integral u imeniku (5.2.3) računati uzastopnom primenom Eulerove sumacione formule. Pretpostavljamo da parametar a pripada skupu

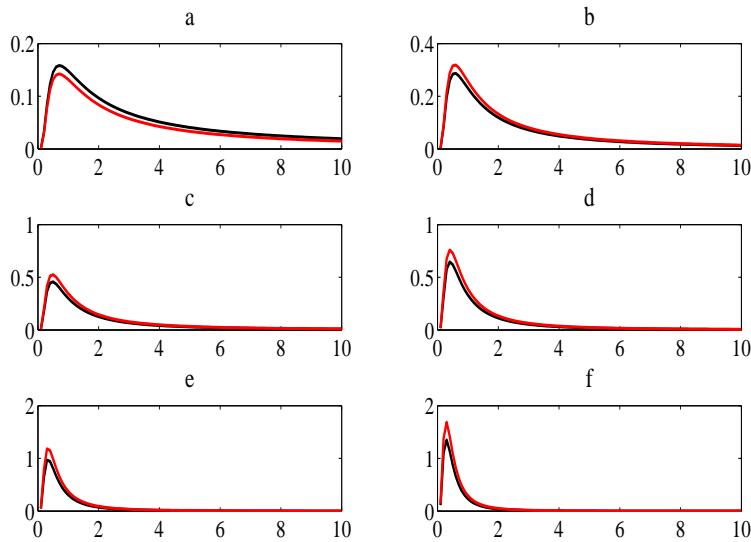
$A = \{0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.7, 2.2\}$, a parametar b skupu $B = \{0.4, 0.9, 1.5\}$. Za svaku kombinaciju parametara predstavljamo grafički gustinu raspodele $\text{AIG}(a, b)$ koju predstavlja funkcija (5.2.3) (crna boja) i grafik gustine $\text{IG}(a, b)$ raspodele (5.1.3) (crvena boja).

Slika 5.2.1: Gustine raspodela $\text{AIG}(a, b)$ i $\text{IG}(a, b)$ za $b = 0.4$ i (a) $a = 0.3$, (b) $a = 0.6$, (c) $a = 0.9$, (d) $a = 1.2$, (e) $a = 1.7$, (f) $a = 2.2$.

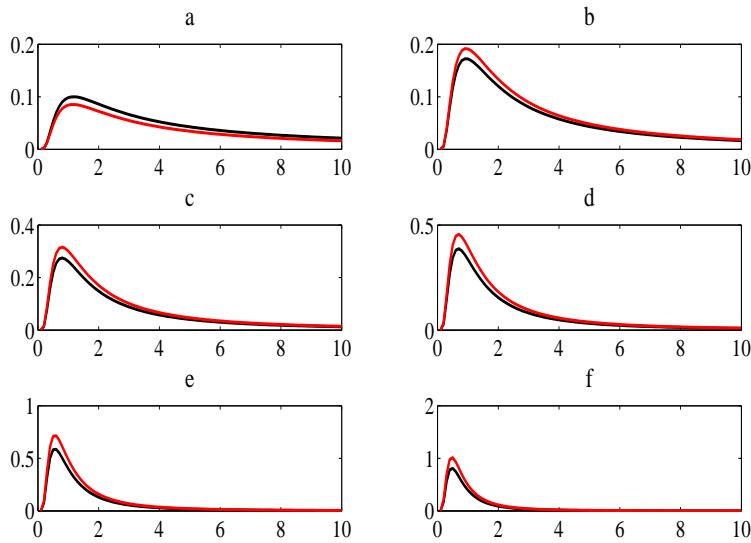


Maksimalno odstupanje gustine aproksimirane inverzne gama raspodele od gustine inverzne gama raspodele javlja se na intervalu $(0, r)$, gde je $r < 0.5$, i iznosi 3.1209 mm. Povećanjem vrednosti parametra r odstupanje se smanjuje tako da je minimalno odstupanje približno jednako 0. Odavde se nameće zaključak da $\text{AIG}(a, b)$ raspodela veoma dobro aproksimira $\text{IG}(a, b)$ raspodelu kada argument Laplaceove transformacije teži beskonačnosti. Takođe, treba napomenuti, da za ovako izabrane parametre, Ridoutov algoritam nije konvergirao.

Slika 5.2.2: Gustine raspodela $AIG(a, b)$ i $IG(a, b)$ za $b = 0.9$ i (a) $a = 0.3$, (b) $a = 0.6$, (c) $a = 0.9$, (d) $a = 1.2$, (e) $a = 1.7$, (f) $a = 2.2$.



Slika 5.2.3: Gustine raspodela $AIG(a, b)$ i $IG(a, b)$ za $b = 1.5$ i (a) $a = 0.3$, (b) $a = 0.6$, (c) $a = 0.9$, (d) $a = 1.2$, (e) $a = 1.7$, (f) $a = 2.2$.



Glava 6

$RCAR(1)$ model sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom

6.1 Definicija modela. Stacionarnost i ergodičnost

DEFINICIJA 6.1.1. Autoregresivni model reda p sa slučajnim koeficijentima, u oznaci $RCAR(p)$ (engl. Random Coefficient AutoRegressive model), definisan je sa

$$X_t = A_t X_{t-1} + A_{t-1} X_{t-2} + \dots + A_{t-(p-1)} X_{t-p} + B_t \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (6.1.1)$$

gde su $\{\xi_t\}$ inovacioni niz, kao i slučajni nizovi $\{A_{t-j} : j = \overline{0, p-1}, t \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$ i $\{B_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definisani na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Specijalno, za $p = 1$ dobijamo $RCAR(1)$, čiji je oblik

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t \xi_t, \quad (6.1.2)$$

dok za $p = 2$ dobijamo $RCAR(2)$ model

$$X_t = A_t X_{t-1} + A_{t-1} X_{t-2} + B_t \xi_t.$$

U opštem slučaju $RCAR(1)$ model nije niz sa konačnim momentima drugog reda. Prepostavka slabe stacionarnosti je jedna od polaznih tačaka u određivanju korelacione strukture i ocene nepoznatih parametara.

Tjøstheim (1986) navodi uslove koji garantuju strogu stacionarnost $RCAR(p)$ modela, ali ne i nužno postojanje momenata koji su ključni za ocenjivanje parametara modela. Takođe su dati uslovi za slabu stacionarnost u slučaju $RCAR(1)$ modela

gde je parametarski niz generisan $MA(1)$ modelom i u slučaju kada je parametarski proces stacionarni Markovljev lanac sa konačno mnogo stanja.

Iz definicije autokovarijansne funkcije sledi da za $\tau > 0$

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= \mathbb{E}\left\{(X_{t+\tau} - \mathbb{E}X)(X_t - \mathbb{E}X)\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\left(\prod_{j=1}^{\tau} A_{t+j}\right)X_t + \sum_{j=1}^{\tau} \left(\prod_{k=j+1}^{\tau} A_{t+k}\right)B_{t+j}\xi_{t+j} - \mathbb{E}X\right)\left(X_t - \mathbb{E}X\right)\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\prod_{j=1}^{\tau} A_{t+j}\right)X_t^2\right\} - \mathbb{E}X \mathbb{E}\left\{\left(\prod_{j=1}^{\tau} A_{t+j}\right)X_t\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{\tau} A_{t+j}\right)\mathbb{D}X = (\mathbb{E}A)^{\tau}\mathbb{D}X.\end{aligned}$$

Kako u slučaju realnih nizova važi

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau),$$

autokovarijansna funkcija sa korakom τ će biti

$$\gamma(\tau) = (\mathbb{E}A)^{|\tau|}\mathbb{D}X, \quad (6.1.3)$$

dok je autokorelaciona funkcija sa istim korakom

$$\rho(\tau) = (\mathbb{E}A)^{|\tau|}. \quad (6.1.4)$$

Stacionarnost i ergodičnost $RCAR(1)$ modela proučavala je (Popović, 1996). Naime, pretpostavimo da su ispunjeni uslovi:

1. $\{\xi_t\}$, $\{A_t\}$ i $\{B_t\}$ su nizovi nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih;
2. $\{\xi_t\}$ i $\{A_t\}$, kao i $\{\xi_t\}$ i $\{B_t\}$ su nezavisni nizovi;
3. postoje prva dva momenta slučajnih promenljivih koje čine nizove iz pretpostavke 1. Takođe, postoje $\mathbb{E}(A_t B_t)$, $\mathbb{E}(A_t^2 B_t)$ i $\mathbb{E}(A_t B_t^2)$;
4. $0 < |\mathbb{E}A_t| < 1$, $\mathbb{E}A_t^2 < 1$, i $\mathbb{E}A_t \neq \mathbb{E}A_t^2$;

5. X_t i A_s , X_t i B_s , kao i X_t i ξ_s su nezavisni ako je $t < s$;

$$6. \mathbb{E}X_t = \frac{\mathbb{E}B_t \mathbb{E}\xi_t}{1 - \mathbb{E}A_t}, \mathbb{E}X_t^2 = \frac{2\mathbb{E}(A_t B_t) \mathbb{E}B_t (\mathbb{E}\xi_t)^2}{(1 - \mathbb{E}A_t)(1 - \mathbb{E}A_t^2)} + \frac{\mathbb{E}B_t^2 \mathbb{E}\xi_t^2}{1 - \mathbb{E}A_t^2},$$

tada važi

Teorema 6.1.1. *Ukoliko su zadovoljeni uslovi 1-6, tada postoji \mathcal{F}_t –merljivo, slabo i strogo stacionarno, jedinstveno i ergodično rešenje jednačine (6.1.2).*

Dokaz: Videti (Popović, 1996). □

Stacionarnost i ergodičnost modela koje ćemo ovde proučavati direktna su posledica prethodne teoreme.

U nastavku ćemo pokazati da se svi modeli, koje ovde proučavamo, mogu napisati u obliku modela sa slučajnim koeficijentima. Popović (1993) je pokazala da se nelinearni modeli sa inovacijama iz eksponencijalne raspodele, mogu predstaviti u obliku modela sa slučajnim koeficijentima. Takođe ćemo svaki proučavani model napisati u obliku (1.3.2), pa možemo reći da su svi oni nedeterminističkog karaktera.

6.2 Ocenjivanje parametara $RCAR(1)$ modela

Nicholls i Quinn (1982) navode uslove pri kojima su ocene nepoznatih parametara dobijene metodom uslovnih najmanjih kvadrata strogo postojane i asimptotski normalne. Naime, za strogo stacionaran \mathcal{F}_t –merljiv slučajan proces $\{X_t\}$ definisan sa $X_t = \sum_{i=1}^n (\beta_i + B_i(t)) X_{t-1} + \xi_t$, koji ispunjava sledeće uslove:

1. niz $\{\xi_t\}$ je niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa matematičkim očekivanjem jednakim 0 i disperzijom σ^2 ,
2. β_i , $i = \overline{1, n}$ su konstante,
3. Neka je $B(t) = [B_1(t), \dots, B_n(t)]$, gde je $\{B_t\}$ je niz nezavisnih vektora. Slučajne promenljive koje čine niz $\{B(t)\}$ su nezavisne od onih koje čine niz $\{\xi_t\}$,

4. Ne postoji konstanta z takva da je zX_t čisto deterministički, tj. može da se napiše kao linearna kombinacija slučajnih promenljivih niza $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$,
5. nizovi $\{\xi_t\}$ i $\{B(t)\}$ su nizovi nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih,
6. parametri β_i , $i = \overline{1, n}$ i C su takvi da postoji jedinstveno stacionarno rešenje drugog reda, \mathcal{F}_t -merljivo rešenje gornje jednačine,
7. $\{\xi_t\}$ ne može uzeti samo dve vrednosti skoro sigurno,

pokazano je da su ocene uslovnih najmanjih kvadrata strogo postojane ukoliko je $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$ i asimptotski normalne ukoliko je $\mathbb{E}X_t^8 < \infty$.

Prikazaćemo primenu metoda uslovnih najmanjih kvadrata (UNK) na ocenjivanje parametara modela (6.1.2). U prvom delu izvećemo ocene koje se odnose na niz $\{X_t\}$, dok ćemo u drugom delu metod UNK primeniti na niz $\{X_t - m_1\}$, gde je $\mathbb{E}X_t = m_1$. Niz $\{X_t - m_1\}$ zovemo *centriranim nizom*. U slučaju centriranog niza ispitivaćemo i osobine ocena dobijenih metodom UNK. Taj deo može se smatrati i doprinosom problematici ocenjivanja parametara RCAR(1) modela, pošto je u praksi, obično, lakše manipulisati sa nizovima čija je srednja vrednost jednak nuli. U tom smislu, u Poglavlju 6.2.2 dopunićemo zaključke do kojih su došli Karlsen i Tjøstheim (1980).

Svi modeli koje ćemo uvoditi u narednim glavama su specijalni slučajevi RCAR(1) modela i svaki od njih može da se svede na model kod koga je očekivanje jednako nuli. U glavama koje slede, a u čijim poglavljima se simuliraju metodi za ocenjivanje, svaki generisani niz svodićemo na odgovarajući centrirani. Tako da su naredne teoreme od suštinskog značaja za spoznavanje osobina ocena metodom UNK koja se sprovodi, upravo, na centrirani niz.

U nastavku dela koji se odnosi na ocenjivanje uvećemo i Yule–Walkerove ocene. Do sada se te ocene, uglavnom, odnosile na $AR(p)$ modele, dok ćemo ih mi ovde primeniti na RCAR(1) model. Pokazaćemo da je Yule–Waklerova ocena nepristrasna, postojana i asimptotski normalna.

6.2.1 Metoda uslovnih najmanjih kvadrata

Pošto iz Teoreme 6.1.1 sledi da je (6.1.2) stacionaran i ergodičan, možemo izvesti sve osobine ocena dobijenih metodom uslovnih najmanjih kvadrata (engl. Conditional Least Squares Method). Ideja ovog metoda jeste minimizovanje sume kvadrata

$$Q_n = \sum_{t=2}^n (X_t - \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}))^2, \quad (6.2.1)$$

gde je \mathcal{F}_{t-1} σ -algebra definisana jednakošću (1.2.1). U tom cilju uvedimo oznake

$$\begin{aligned}\overline{X}_{n_1, n_2} &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{t=n_1}^{n_2} X_t \\ \overline{X}_{n_1, n_2}^2 &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{t=n_1}^{n_2} X_t^2 \\ \overline{XX}_{n_1, n_2} &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{t=n_1}^{n_2} X_t X_{t-1}\end{aligned}$$

U modelu (6.1.2) važi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(A_t X_{t-1} + B_t \xi_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= X_{t-1} \mathbb{E}A + \mathbb{E}B \mathbb{E}\xi = \\ &= \alpha X_{t-1} + \beta \gamma,\end{aligned}$$

gde je $\alpha = \mathbb{E}A$, $\beta = \mathbb{E}B$ i $\gamma = \mathbb{E}\xi$. Izjednačavanjem prvih izvoda od Q_n po α , β i γ sa nulom dobijamo linearни sistem jednačina i iz njega ocene:

1. za poznato γ

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{UNK} &= \frac{\overline{XX}_{2,n} - \overline{X}_{2,n} \overline{X}_{1,n-1}}{\overline{X}_{1,n-1}^2 - (\overline{X}_{1,n-1})^2} \\ \widehat{\beta}_{UNK} &= \frac{\overline{X}_{2,n} - \widehat{\alpha}_{UNK} \overline{X}_{1,n-1}}{\gamma}\end{aligned} \quad (6.2.2)$$

2. za poznato β

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{UNK} &= \frac{\overline{XX}_{2,n} - \overline{X}_{2,n} \overline{X}_{1,n-1}}{\overline{X}_{1,n-1}^2 - (\overline{X}_{1,n-1})^2} \\ \widehat{\gamma}_{UNK} &= \frac{\overline{X}_{2,n} - \widehat{\alpha}_{UNK} \overline{X}_{1,n-1}}{\beta}\end{aligned} \quad (6.2.3)$$

3. za nepoznate β i γ

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{UNK} &= \frac{\overline{XX}_{2,n} - \overline{X}_{2,n}\overline{X}_{1,n-1}}{\overline{X}_{1,n-1}^2 - (\overline{X}_{1,n-1})^2} \\ \widehat{\beta}\widehat{\gamma}_{UNK} &= \overline{X}_{2,n} - \widehat{\alpha}_{UNK}\overline{X}_{1,n-1}\end{aligned}\quad (6.2.4)$$

6.2.2 UNK metoda–primena na centrirani niz

Pre nego što pokažemo kako se UNK metodom izvode ocene parametara centriranog $RCAR(1)$ modela i koje su njihove osobine, formulisaćemo Lindeberg¹–Lévyjevu² centralnu graničnu teoremu za martingale:

Teorema 6.2.1 (Billingsley, 1961). *Neka je $\{R_t\}$ niz slučajnih promenljivih sa svojstvom da se $\{R_t\}$ može predstaviti kao funkcional koji ne zavisi od t , merljiv u odnosu na σ -polje σ_t generisano nizom $\{Y_t, Y_{t-1}, \dots\}$ strogo stacionarnih, ergodičkih slučajnih promenljivih. Neka je $\mathbb{E}(R_t|\sigma_{t-1}) = 0$ i $\mathbb{E}(R_t^2) = a^2 < \infty$. Tada*

$$(a^2 N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N R_t$$

ima raspodelu koja konvergira ka standardnoj normalnoj raspodeli.

U ovom poglavlju pretpostavljamo da su prva dva momenta $\mathbb{E}X_t = m_1$ i $\mathbb{E}X_t^2 = m_2$ poznata. Razmatraćemo centrirani niz

$$X_{0,t} = X_t - \mathbb{E}X_t = X_t - m_1,$$

umesto niza $\{X_t\}$. Neka je (X_1, \dots, X_N) uzorak generisan iz modela (6.1.2). Mićemo razmatrati uzorak (X_{01}, \dots, X_{0N}) koji se dobija kada se od svakog elementa prethodnog oduzme m_1 .

U radu (Popović, 1993) prikazana je dvoetapna primena metoda najmanjih kvadrata za ocenjivanje parametara autoregresivnih vremenskih serija prvog reda sa eksponencijalnim marginalnim raspodelama. Primer za ovakav način ocenjivanja je

¹Jarl Waldemar Lindeberg(1876 -1932), finski matematičar

²Paul Pierre Lévy (1886 -1971), francuski matematičar

FAREX(1) model, uveden u radu (Mališić, 1987), gde pretpostavka o eksponencijalnoj marginalnoj raspodeli dodatno vezuje nepoznate parametre na sledeći način: $\mathbb{E}A_t = 1 - \mathbb{E}B_t$ i $\mathbb{E}(A_t^2) + \mathbb{E}(B_t^2) = 1 - \mathbb{E}(A_t B_t)$. Za modele u kojima se pretpostavka o eksponencijalnoj raspodeli odnosi na inovacioni niz, ovi uslovi u opštem slučaju nisu ispunjeni. Takođe, Popović (1993) je izvela i asimptotske osobine UNK ocena za *RCAR(1)* model sa marginalnom eksponencijalnom raspodelom. Slične ideje biće primenjene i ovom radu, s tim što ćemo mi izvesti asimptotske osobine UNK ocena, u slučaju *RCAR(1)* modela sa zavisnim slučajnim koeficijentima.

I u radu (Karlsen i Tjøstheim, 1980) metod UNK primenjuje se u dva koraka. Prvi korak je primena na niz $\{X_t\}$, dok se u drugom koraku metod primenjuje na niz $\{v_t\}$, gde je

$$v_t = u_t^2,$$

gde je $u_t = X_t - \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$. Sličnu tehniku ćemo primeniti i ovde, s tim što ćemo mi razmatrati centrirani niz. Model (6.1.2) možemo napisati u obliku

$$X_{0,t} = A_t X_{0,t-1} + \xi'_t, \quad \xi'_t = (A_t - 1)m_1 + B_t \xi_t, \quad (6.2.5)$$

gde su A_t i ξ'_t zavisne slučajne promenljive. Takođe, važi $\mathbb{E}\xi'_t = 0$. Lako se pokazuje da važi

$$\mathbb{E}(X_{0,t} | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{0,t-1} \mathbb{E}A_t = a_1 X_{0,t-1}.$$

Izjednačavanjem prvog izvoda od (6.2.1) sa nulom, dobijamo ocenu \hat{a}_1 parametra $\mathbb{E}A_t = a_1$. Dakle,

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1} X_{0,t}}{\sum_{t=2}^n (X_{0,t-1})^2}. \quad (6.2.6)$$

Odredimo ocenu parametra $a_2 = \mathbb{E}A_t^2$. U tom cilju nam je potrebno

Lema 6.2.1. *Važi sledeća jednakost*

$$G_t := v_t - \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = v_t - a_2 (T_{t-1}^2 - m_2) + a_1^2 X_{0,t-1} S_{t-1} - DX,$$

gde su $T_{t-1} = X_{0,t-1} + m_1$ i $S_{t-1} = X_{0,t-1} + 2m_1$.

Dokaz: U cilju dokazivanja leme razmotrićemo sledeće korake:

$$\mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}((X_{0,t} - a_1 X_{0,t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_{0,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - a_1^2 X_{0,t-1}^2, \quad (6.2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{0,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(A_t^2 X_{0,t-1}^2 + 2A_t X_{0,t-1} \xi'_t + \xi'^2_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= a_2 X_{0,t-1}^2 + 2X_{0,t-1} \mathbb{E}(A_t \xi'_t) + \mathbb{E}\xi'^2_t, \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_t \xi'_t) &= \mathbb{E}(A_t((A_t - 1)m_1 + B_t \xi_t)) = \mathbb{E}(A_t^2 m_1 - A_t m_1) + \mathbb{E}A_t \mathbb{E}(B_t \xi_t) = \\ &= m_1(a_2 - a_1) + \mathbb{E}A_t \mathbb{E}(X_t - A_t X_{t-1}) = \\ &= m_1(a_2 - a_1) + (a_1 - a_1^2)m_1 = m_1 \mathsf{D}A_t, \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi'^2_t &= \mathbb{E}((A_t - 1)m_1 + B_t \xi_t)^2 \\ &= m_1^2 a_2 + m_1^2 + \mathbb{E}(B_t^2 \xi_t^2) - 2m_1^2 a_1 - 2m_1(1 - a_1)m_1 + 2m_1 \mathbb{E}(A_t B_t \xi_t) \\ &= m_1^2 a_2 - m_1^2 + \mathbb{E}\xi_t^2 + 2m_1 \mathbb{E}(A_t B_t \xi_t). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 \xi_t^2) &= \mathbb{E}(X_t - A_t X_{t-1})^2 = \mathbb{E}X_t^2 - 2\mathbb{E}(A_t X_{t-1} (A_t X_{t-1} + B_t \xi_t)) + \mathbb{E}A_t^2 \mathbb{E}X_{t-1}^2 \\ &= m_2 - 2a_2 m_2 - 2m_1 \mathbb{E}(A_t B_t \xi_t) + a_2 m_2 = m_2(1 - a_2) - 2m_1 \mathbb{E}(A_t B_t \xi_t), \end{aligned}$$

pa (6.2.10) postaje

$$\mathbb{E}(\xi'^2_t) = (1 - a_2)(m_2 - m_1^2) = (1 - a_2) \mathsf{D}X. \quad (6.2.11)$$

Na kraju je

$$\mathbb{E}(X_{0,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = a_2 X_{0,t-1}^2 + 2m_1 X_{0,t-1} \mathsf{D}A_t + (1 - a_2) \mathsf{D}X. \quad (6.2.12)$$

Iz (6.2.7)–(6.2.12) lako zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{0,t-1}^2 \mathsf{D}A_t + 2m_1 X_{0,t-1} \mathsf{D}A_t + (1 - a_2) \mathsf{D}X, \quad (6.2.13)$$

odakle lako dolazimo do tvrđenja leme.

□

Lema 6.2.2. *Vazi sledeća jednakost*

$$\mathbb{E}(G_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(G_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) - a_2 \mathbb{E}\left\{[(X_{0,t-1} + m_1)^2 - m_2] | \mathcal{F}_{t-1}\right\} + \\
 &\quad + a_1^2 \mathbb{E}\left\{X_{0,t-1}(X_{0,t-1} + 2m_1) | \mathcal{F}_{t-1}\right\} - \mathbf{D}X = \\
 &= X_{0,t-1}^2 \mathbf{D}A_t + 2m_1 X_{0,t-1} \mathbf{D}A_t + (1 - a_2) \mathbf{D}X - \\
 &\quad - a_2 X_{0,t-1}^2 - 2a_2 m_1 X_{0,t-1} + a_2 \mathbf{D}X + a_1^2 X_{0,t-1}^2 + 2m_1 X_{0,t-1} a_1^2 - \mathbf{D}X.
 \end{aligned}$$

Posle neposrednog izračunavanja zaključujemo da je tvrđenje leme ispunjeno. \square

Minimizovanjem sume kvadrata $\sum_{t=2}^n G_t^2$, dobijamo ocenu \hat{a}_2 parametra $\mathbb{E}A_t^2 = a_2$ u obliku

$$\hat{a}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n [(T_{t-1}^2 - m_2)(\hat{v}_t + \hat{a}_1^2 X_{0,t-1} S_{t-1} - \mathbf{D}X)]}{\sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2}, \quad (6.2.14)$$

gde je $\hat{v}_t = \hat{u}_t^2 = (X_{0,t} - \hat{a}_1 X_{0,t-1})^2$.

Primetimo da izvođenja (6.2.7)–(6.2.14) važe u slučaju ako su slučajni koeficijenti A_t i B_t nezavisni.

Razmotrimo slučaj kada su slučajni koeficijenti A_t i B_t zavisni. Napomenimo da su u radu (Popović, 1993) izvedene asimptotske osobine ocena $RCAR(1)$ modela sa zavisnim slučajnim koeficijentima gde je prepostavljena marginalna eksponencijalna raspodela. Mi ćemo ovde uopštiti tvrđenja do kojih je došla (Popović, 1993) i pokazati da prepostavka o marginalnoj eksponencijalnoj raspodeli nije neophodna za posedovanje odgovarajućih asimptotskih osobina UNK ocena.

Lema 6.2.3. *Važi sledeća jednakost*

$$G_t^{(1)} := v_t - \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = v_t - a_2 [T_{t-1}^2 - m_2] + a_1^2 X_{0,t-1} S_{t-1} - \mathbf{D}X - 2\omega_1 \omega_2 X_{0,t-1}, \quad (6.2.15)$$

gde su $\omega_1 = \mathbb{E}(A_t B_t)$ i $\omega_2 = \mathbb{E}\xi_t$, dok se T_{t-1} i S_{t-1} definišu na isti način kao u Lemi 6.2.1.

Dokaz: Dokaz ove leme se u većini koraka poklapa sa dokazom Leme 6.2.1. Jedina razlika je u koracima (6.2.8) i (6.2.9), pa ih zato ovde i navodimo:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(A_t \xi'_t) &= \mathbb{E}A_t((A_t - 1)m_1 + B_t \xi_t) = m_1(a_2 - a_1) + \mathbb{E}(A_t B_t \xi_t), \\
 \mathbb{E}(X_{0,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= a_2 X_{0,t-1}^2 + 2 X_{0,t-1} [m_1(a_2 - a_1) + \omega_1 \omega_2] + (1 - a_2) \mathbf{D}X.
 \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} G_t^{(1)} &= v_t - \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= v_t - a_2 X_{0,t-1}^2 - 2X_{0,t-1}[m_1(a_2 - a_1) + \omega_1 \omega_2] - (1 - a_2)\mathsf{D}X + a_1^2 X_{0,t-1}^2, \end{aligned}$$

odakle se odgovarajućim grupisanjem dobija (6.2.15), čime je lema i dokazana. \square

Lema 6.2.4. *Vazi jednakost*

$$\mathbb{E}\left(G_t^{(1)} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0.$$

Dokaz: Izvodi se na sličan način kao dokaz Leme 6.2.2. \square

Diferenciranjem $\sum_{t=2}^n (G_t^{(1)})^2$ prvo po a_2 , zatim po $a_3 = \omega_1 \omega_2$ dobijamo

$$\widehat{a}_2^1 = \frac{\sum_{t=2}^n [(T_{t-1}^2 - m_2)(\widehat{v}_t + \widehat{a}_1^2 X_{0,t-1} S_{t-1} - \mathsf{D}X - 2\widehat{a}_3 X_{0,t-1})]}{\sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2} \quad (6.2.16)$$

$$\widehat{a}_3 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1} [\widehat{v}_t - \widehat{a}_2^1 (T_{t-1}^2 - m_2) + \widehat{a}_1 X_{0,t-1} S_{t-1} - \mathsf{D}X]}{2 \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2}. \quad (6.2.17)$$

Za dobijanje ekplicitnih ocena parametara a_2 i a_3 potrebno je rešiti sistem jednačina (6.2.16) i (6.2.17). Radi lakšeg pisanja uvedimo oznake $U_t = v_t + a_1^2 X_{0,t-1}^2 + 2X_{0,t-1} m_1 a_1 - \mathsf{D}X$ i $V_t = [(X_{0,t-1} + m_1)^2 - m_2]$. Tada dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_2^{(1)} \sum_{t=2}^n V_t^2 &= \sum_{t=2}^n V_t (U_t - 2\omega_1 \omega_2 X_{0,t-1}) \\ 2\omega_1 \omega_2 \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2 &= \sum_{t=2}^n X_{0,t-1} (U_t - a_2^{(1)} V_t), \end{aligned}$$

čija su rešenja

$$\widehat{a}_2^{(1)} = \frac{\sum_{t=2}^n V_t U_t \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2 - \sum_{t=2}^n V_t X_{0,t-1} \sum_{t=2}^n U_t X_{0,t-1}}{\sum_{t=2}^n V_t^2 \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2 - \left(\sum_{t=2}^n V_t X_{0,t-1}\right)^2} \quad (6.2.18)$$

dok ocenu parametra ω_1 , odnosno ω_2 dobijamo kada umesto $a_2^{(1)}$ uzmemmo ocenu (6.2.18):

1. za ω_1 poznato

$$\omega_2 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1}(U_t - \hat{a}_2^{(1)}V_t)}{2\omega_1 \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2}, \quad (6.2.19)$$

2. za ω_2 poznato

$$\omega_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1}(U_t - \hat{a}_2^{(1)}V_t)}{2\omega_2 \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2}. \quad (6.2.20)$$

Napomenimo da je ocena parametra \hat{a}_1 data izrazom (6.2.6).

Narednim teoremmama izvešćemo asimptotske osobine ocena dobijenih UNK metodom, u slučaju kada su slučajne promenljive A_t i B_t zavisne, čime ćemo pokazati da nezavisnost slučajnih koeficijenata, pretpostavljena u (Nicholls i Quinn, 1982), nije neophodna za izvođenje asimptotskih osobina UNK ocena.

Teorema 6.2.2. Za svaki stacionarni, \mathcal{F}_t -merljivi stohastički proces $\{X_t\}$, koji zadovoljava uslove A1–A3, \hat{a}_1 je strogo postojana ocena a_1 . Više od toga, ako $EX_t^4 < \infty$, tada

$$\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, DZ),$$

gde je disperzija

$$DZ = E \left\{ X_{0,t-1}^2 (X_{0,t-1}^2 DA_t + (2m_1(a_2 - a_1) + 2\omega_1\omega_2) X_{0,t-1} + (1 - a_2)DX) \right\},$$

$$a \omega_1 = E(A_t B_t) \text{ i } \omega_2 = E\xi_t.$$

Dokaz: Da bi pokazali da je \hat{a}_1 strogo postojana ocena parametra a_1 potrebno je da pokažemo da $\hat{a}_1 \xrightarrow{s.s.} a_1$. U tom cilju razmotrimo razliku

$$\hat{a}_1 - a_1 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t X_{0,t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2}.$$

Stacionarnost i ergodičnost nizova $\{X_{0,t}^2\}$ i $\{X_{0,t-1}u_t\}$ je direktna posledica stacionarnosti i ergodičnosti niza $\{X_t\}$. Dakle, iz definicije stacionarnosti sledi da je drugi momenat $m_2 = EX_{0,t}^2$ konačan.

Iz $\mathbb{E}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ i \mathcal{F}_t -merljivosti niza $\{X_{0,t-1}\}$ sledi

$$\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1}) = 0. \quad (6.2.21)$$

Ergodičnost nizova $\{X_{0,t}^2\}$ i $\{X_{0,t-1} u_t\}$ povlači konvergencije

$$\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2 \xrightarrow{s.s.} m_2, \quad (6.2.22)$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1} u_t \xrightarrow{s.s.} 0. \quad (6.2.23)$$

Iz (6.2.21)–(6.2.23) zaključujemo da

$$\hat{a}_1 - a_1 \xrightarrow{s.s.} 0,$$

odakle sledi da je \hat{a}_1 strogo postojana ocena parametra a_1 .

Primenjujući isti postupak kao u (Popović, 1993), a koristeći ideju iz (Nicholls i Quinn, 1982), uvešćemo proizvoljnu konstantu γ . Tada je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\gamma X_{0,t-1} u_t)^2 &= \mathbb{E}\{\gamma^2 X_{0,t-1}^2 \mathbb{E}(v_t | \mathcal{F}_{t-1})\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\gamma^2 X_{0,t-1}^2 \left(X_{0,t-1}^2 \mathsf{D}A_t + 2X_{0,t-1}[m_1(a_2 - a_1) + \omega_1 \omega_2] + (1 - a_2) \mathsf{D}X\right)\right\}. \end{aligned}$$

Pošto je $\mathbb{E}(X_{0,t-1} u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, iz Teoreme 6.2.1 sledi da

$$(n-1)^{-1/2} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1} u_t$$

konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj iz normalne raspodele sa očekivanjem 0 i disperzijom

$$\mathbb{E}\left\{\gamma^2 X_{0,t-1}^2 \left(X_{0,t-1}^2 \mathsf{D}A_t + 2X_{0,t-1}[m_1(a_2 - a_1) + \omega_1 \omega_2] + (1 - a_2) \mathsf{D}X\right)\right\}.$$

Iz izraza

$$\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1) = \frac{(n-1)^{-1/2} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1} u_t}{(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2}, \quad (6.2.24)$$

i proizvoljnosti konstante γ , sledi da $\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1)$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj iz normalne raspodele sa očekivanjem 0 i disperzijom

$$\mathbb{E}\left\{X_{0,t-1}^2 \left(X_{0,t-1}^2 \mathsf{D}A_t + 2X_{0,t-1}[m_1(a_2 - a_1) + \omega_1 \omega_2] + (1 - a_2) \mathsf{D}X\right)\right\}.$$

Istaknimo da iz pretpostavke $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$ sledi da je (6.2.24) dobro definisan.

Teorema je dokazana. \square

Neka \tilde{a}_2 ocena parametra a_2 kada je vrednost parametra a_1 poznata, dok je \tilde{a}_3 ocena parametra a_3 kada su parametri a_1 i a_2 poznati.

Teorema 6.2.3. *Neka je $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$. Tada važi*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \tilde{a}_2 - \hat{a}_2 \xrightarrow{s.s.} 0, \quad \tilde{a}_3 - \hat{a}_3 \xrightarrow{s.s.} 0, \\ \text{(b)} \quad & \sqrt{n-1}(\tilde{a}_2 - \hat{a}_2) \xrightarrow{P} 0, \quad \sqrt{n-1}(\tilde{a}_3 - \hat{a}_3) \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Dokaz: Dokažimo prvo tvrđenje u delu (a). Posmatrajmo razliku

$$\tilde{a}_2 - \hat{a}_2 = \frac{(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2) ((v_t - \hat{v}_t) + (a_1^2 - \hat{a}_1^2) X_{0,t-1} S_{t-1})}{(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2}. \quad (6.2.25)$$

Iz Teoreme 6.2.5 sledi da $v_t - \hat{v}_t \xrightarrow{s.s.} 0$, kao i $a_1 - \hat{a}_1 \xrightarrow{s.s.} 0$. Imenilac u (6.2.25) je konačan, jer je $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$. Iz svojstva ergodičnosti i konačnosti momenata niza $\{X_{0,t}\}$ sledi

$$(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2) \xrightarrow{s.s.} \mathbb{E}(T_{t-1}^2 - m_2), \quad (6.2.26)$$

$$(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2 \xrightarrow{s.s.} \mathbb{E}(T_{t-1}^2 - m_2)^2. \quad (6.2.27)$$

Takođe iz Teoreme 6.2.5, kao i iz (6.2.26) i (6.2.27), zaključujemo da je ispunjeno

$$\tilde{a}_2 - \hat{a}_2 \xrightarrow{s.s.} 0,$$

čime je dokazano prvo tvrđenje u delu (a) teoreme.

Dokažimo prvo tvrđenje u delu (b). U tom cilju razmatramo sledeću razliku

$$\sqrt{n-1}(\tilde{a}_2 - \hat{a}_2) = \frac{(n-1)^{-1/2} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2) ((v_t - \hat{v}_t) + (a_1^2 - \hat{a}_1^2) X_{0,t-1} S_{t-1})}{(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2}.$$

Primetimo da je

$$v_t - \hat{v}_t = 2(a_1 - \hat{a}_1) X_{0,t-1} u_t - (a_1 - \hat{a}_1)^2 X_{0,t-1}^2.$$

Napomenimo da se osobine pomenute tokom dokaza ove teoreme odnose na osobine iz Poglavlja 1.1 na strani 2.

Pokažimo da $2(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1 - \hat{a}_1)X_{0,t-1}u_t$ teži u verovatnoći ka 0. Naime, u Teoremi 6.2.5 pokazano je da $\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1)$ konvergira u raspodeli. Iz ergodičnosti niza $\{X_{0,t-1}\}$ i činjenice da je $E(X_{0,t-1}u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, sledi da $(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}u_t$ skoro sigurno teži ka 0. Pošto skoro sigurna povlači konvergenciju u verovatnoći, pomoću osobina **5** i **8**, sledi da

$$2(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1 - \hat{a}_1)X_{0,t-1}u_t \xrightarrow{P} 0. \quad (6.2.28)$$

Pokažimo da i $(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1 - \hat{a}_1)^2 X_{0,t-1}^2$ teži u verovatnoći ka 0. Kako iz Teoreme 6.2.5 sledi da $\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1)$ konvergira u raspodeli, iz osobine **9**, sledi da $(n-1)^{\frac{1}{4}}(\hat{a}_1 - a_1)$ teži u verovatnoći ka 0. Iz osobine **7**, sledi da $(n-1)^{\frac{1}{2}}(\hat{a}_1 - a_1)^2$ teži u verovatnoći ka 0. Iz ergodičnosti niza $\{X_{0,t-1}^2\}$ sledi da $(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2$ skoro sigurno teži ka $E X_{0,t-1}^2$. Kako skoro sigurna konvergencija povlači konvergenciju u raspodeli, to na osnovu osobine **8** sledi da

$$(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1 - \hat{a}_1)^2 X_{0,t-1}^2 u_t \xrightarrow{P} 0. \quad (6.2.29)$$

Ostalo je još da se pokaže da i $(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1^2 - \hat{a}_1^2)X_{0,t-1}S_{t-1}$ teži u verovatnoći ka 0. Naime, iz Teoreme 6.2.5 sledi da $a_1^2 - \hat{a}_1^2$ skoro sigurno teži ka 0. Pomoću osobina **1** i **6**, zaključujemo da važi $(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1^2 - \hat{a}_1^2) \xrightarrow{P} 0$. Iz ergodičnosti niza $\{X_{0,t-1}\}$ sledi da $(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}S_{t-1}$ skoro sigurno teži ka $E X_{0,t-1}^2$. Pošto skoro sigurna povlači konvergenciju u raspodeli, a na osnovu osobine **8**, zaključujemo da

$$(n-1)^{-\frac{1}{2}}(a_1^2 - \hat{a}_1^2)X_{0,t-1}S_{t-1} \xrightarrow{P} 0. \quad (6.2.30)$$

Pošto smo pretpostavili da je $E X_t^4 < \infty$ sledi da je imenilac izraza kojim je definisana razlika $\sqrt{n-1}(\tilde{a}_2 - \hat{a}_2)$ konačan, pa iz (6.2.28)–(6.2.30) sledi prvo tvrdnje u delu **(b)** teoreme.

Na sličan način ćemo pokazati da $\tilde{a}_3 - \hat{a}_3 \xrightarrow{s.s.} 0$, kao i $\sqrt{n-1}(\tilde{a}_3 - \hat{a}_3) \xrightarrow{P} 0$, čime smo dokazali teoremu. \square

Teorema 6.2.4. *Neka je $E X_t^4 < \infty$. Tada*

$$\widehat{D} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \xrightarrow{s.s.} D = (a_1, a_2, a_3).$$

Više od toga, ako $\mathbb{E}X_t^8 < \infty$, tada $\sqrt{n-1}(\widehat{D} - D)$ konvergira ka slučajnom vektoru sa trodimenzionalnom normalnom raspodelom sa očekivanjem $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ i kovarijacionom matricom

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

gde su

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1})^2}{H_1^2(n-1)^2}, & c_{22} &= \frac{\mathbb{E}(G_t^{(1)}(T_{t-1}^2 - m_2))^2}{H_2^2(n-1)^2}, \\ c_{33} &= \frac{\mathbb{E}(G_t^{(1)} X_{0,t-1})^2}{4(n-1)^2 H_1^2}, & & \\ c_{12} = c_{21} &= \frac{\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1} G_t^{(1)}(T_{t-1}^2 - m_2))}{H_1 H_2(n-1)^2}, & & \\ c_{13} = c_{31} &= \frac{\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1}^2 G_t^{(1)})}{2H_1^2(n-1)^2}, & & \\ c_{23} = c_{32} &= \frac{\mathbb{E}(X_{0,t-1} (G_t^{(1)})^2 (T_{t-1}^2 - m_2))}{2H_1 H_2(n-1)^2}. & & \end{aligned}$$

Ovde je

$$H_1 = \mathbb{E}X_{0,t-1}^2, \quad H_2 = \mathbb{E}(T_{t-1}^2 - m_2)^2.$$

Dokaz: Iz teoreme 6.2.2 lako dolazimo do zaključka da je $\widetilde{D} - \widehat{D} \xrightarrow{s.s.} 0$ i $\sqrt{n-1}(\widetilde{D} - \widehat{D}) \xrightarrow{P} 0$, gde je $\widetilde{D} = (\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3)$. Razliku $D - \widehat{D}$ možemo napisati u obliku

$$\widehat{D} - D = (\widehat{D} - \widetilde{D}) + (\widetilde{D} - D^*) + (D^* - D), \quad (6.2.31)$$

gde je $D^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$, odnosno

$$a_1^* = a_1 + \frac{1}{H_1(n-1)} \sum_{t=2}^n u_t X_{0,t-1}, \quad (6.2.32)$$

$$a_2^* = a_2 + \frac{1}{H_2(n-1)} \sum_{t=2}^n G_t^{(1)}(T_{t-1}^2 - m_2), \quad (6.2.33)$$

$$a_3^* = a_3 + \frac{1}{2H_1(n-1)} \sum_{t=2}^n G_t^{(1)} X_{0,t-1}. \quad (6.2.34)$$

Već je dokazano da prvi izraz u (6.2.31) konvergira skoro sigurno ka 0. Pokazaćemo da i drugi i treći izraz u (6.2.31), takođe, konvergiraju skoro sigurno ka 0. Da bi

dokazali da $\tilde{D} - D^* \xrightarrow{s.s.} 0$, ispitaćemo konvergenciju niza

$$\tilde{a}_2 - a_2 = \frac{\sum_{t=2}^n G_t^{(1)}(T_{t-1}^2 - m_2)}{\sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2}. \quad (6.2.35)$$

Iz (6.2.32) lako sledi

$$a_1^* = \frac{1}{H_1(n-1)} \sum_{t=2}^n X_{0,t} X_{0,t-1}$$

i

$$a_1^* - \hat{a}_1 = \left(\frac{1}{H_1(n-1)} - \frac{1}{\sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2} \right) \sum_{t=2}^n X_{0,t} X_{0,t-1}.$$

Ergodičnost niza $\{X_{0,t}\}$ povlači

$$(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t-1}^2 \xrightarrow{s.s.} H_1,$$

i

$$\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n X_{0,t} X_{0,t-1} \xrightarrow{s.s.} \mathbb{E}(X_{0,t} X_{0,t-1}).$$

Iz prethodnog zaključujemo da

$$a_1^* - \hat{a}_1 \xrightarrow{s.s.} 0 \quad \text{i} \quad \sqrt{n-1}(a_1^* - \hat{a}_1) \xrightarrow{P} 0.$$

Dalje razmatramo razliku

$$\tilde{a}_2 - a_2^* = (\tilde{a}_2 - a_2) - (a_2^* - a_2).$$

Konvergencija $\sum_{t=2}^n (T_{t-1}^2 - m_2)^2 \xrightarrow{s.s.} H_2$ je posledica ergodičnosti niza u imeniku izraza (6.2.35). Pošto je

$$\frac{\tilde{a}_2 - a_2}{n-1} \mathcal{I} - H_2(a_2^* - a_2) = \frac{\mathcal{B}}{n-1} - \frac{\mathcal{B}}{n-1} = 0,$$

gde je \mathcal{I} imenilac iz (6.2.35), a \mathcal{B} brojilac iz (6.2.33) i (6.2.35), sledi da $\tilde{a}_2 - a_2^* \xrightarrow{s.s.} 0$ i $\sqrt{n-1}(\tilde{a}_2 - a_2^*) \xrightarrow{P} 0$. Na sličan način pokazujemo da $\tilde{a}_3 - a_3^* \xrightarrow{s.s.} 0$ i $\sqrt{n-1}(\tilde{a}_3 - a_3^*) \xrightarrow{P} 0$. Dakle, dokazali smo

$$\tilde{D} - D^* \xrightarrow{s.s.} 0 \quad \text{i} \quad \sqrt{n-1}(\tilde{D} - D^*) \xrightarrow{P} 0.$$

Ostaje još da dokažemo $D^* - D \xrightarrow{s.s.} 0$. U tom cilju neka je $d = (d_1, d_2, d_3)^T$ proizvoljan vektor. Ispitajmo konvergenciju niza

$$d^T(D^* - D) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n M_t(d),$$

gde je $M_t(d) = d_1(a_{1t}^* - a_{1t}) + d_2(a_{2t}^* - a_{2t}) + d_3(a_{3t}^* - a_{3t})$ i

$$\begin{aligned} a_{1t}^* - a_{1t} &= \frac{1}{H_1(n-1)} u_t X_{0,t-1}, \\ a_{2t}^* - a_{2t} &= \frac{1}{H_2(n-1)} G_t^{(1)} (T_{t-1}^2 - m_2), \\ a_{3t}^* - a_{3t} &= \frac{1}{2H_1(n-1)} G_t^{(1)} X_{0,t-1}. \end{aligned}$$

Već smo rekli da važi $\mathbb{E}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(G_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Tada je $\mathbb{E}(M_t(d) | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Konvergencija $d^T(D^* - D) \xrightarrow{s.s.} 0$ je direktna posledica ergodičnosti i stacionarnosti niza $\{M_t(d)\}$. Iz Teoreme 6.2.1 sledi da $d^T \sqrt{n-1}(D^* - D)$ konvergira ka slučajnom vektoru iz dvodimenzionalne normalne raspodele sa nula očekivanjem i disperzijom $\mathbb{E}M_t^2(d) = d^T C d$. Konačnost drugog momenta niza $\{M_t^2(d)\}$, obezbeđen je pretpostavkom da je $\mathbb{E}X^8(t) < \infty$. Elementi kovarijacione matrice C su

$$\begin{aligned} c_{11} &= \mathbb{E} \left\{ H_1^{-1}(n-1)^{-1} u_t X_{0,t-1} \right\}^2, \\ c_{22} &= \mathbb{E} \left\{ H_2^{-1}(n-1)^{-1} G_t^{(1)} (T_{t-1}^2 - m_2) \right\}^2, \\ c_{33} &= \mathbb{E} \left\{ 2^{-1} H_1^{-1}(n-1)^{-1} G_t^{(1)} X_{0,t-1} \right\}^2, \\ c_{12} = c_{21} &= \mathbb{E} \left\{ (H_1 H_2)^{-1}(n-1)^{-2} u_t X_{0,t-1} G_t^{(1)} (T_{t-1}^2 - m_2) \right\}, \\ c_{13} = c_{31} &= \mathbb{E} \left\{ 2^{-1} H_1^{-2}(n-1)^{-2} u_t X_{0,t-1}^2 G_t^{(1)} \right\}, \\ c_{23} = c_{32} &= \mathbb{E} \left\{ 2^{-1} (H_1 H_2)^{-1}(n-1)^{-2} X_{0,t-1} (G_t^{(1)})^2 (T_{t-1}^2 - m_2) \right\}. \end{aligned}$$

Iz proizvoljnosti parametra d sledi

$$\widehat{D} - D \xrightarrow{s.s.} 0 \quad \text{i} \quad \sqrt{n-1}(\widehat{D} - D) \xrightarrow{d} \mathcal{Z},$$

gde \mathcal{Z} poseduje trodimenzionalnu normalnu raspodelu kod koje je $\mathbb{E}\mathcal{Z} = 0$ i kovariaciona matrica C .

Teorema je dokazana.

□

U slučaju kada su slučajne promenljive A_t i B_t nezavisne formulisaćemo teoreme koje se dokazuju na sličan način kao odgovarajuće teoreme kada su slučajne promenljive A_t i B_t zavisne.

Teorema 6.2.5. Za svaki stacionarni, \mathcal{F}_t -merljivi stohastički proces $\{X_t\}$, koji zadovoljava uslove A1–A3, \hat{a}_1 je strogo postojana ocena za a_1 . Više od toga, ako $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$, tada

$$\sqrt{n-1}(\hat{a}_1 - a_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathsf{D}Z),$$

gde je disperzija

$$\mathsf{D}Z = \mathbb{E} \left\{ X_{0,t-1}^3 S_{t-1} \mathsf{D}A_t + (1 - a_2) \mathsf{D}X \right\}.$$

Teorema 6.2.6. Neka je $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$. Tada važi

$$(a) \quad \tilde{a}_2 - \hat{a}_2 \xrightarrow{s.s.} 0, \quad (b) \quad \sqrt{n-1}(\tilde{a}_2 - \hat{a}_2) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Teorema 6.2.7. Neka je $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$. Tada

$$\widehat{D} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2) \xrightarrow{s.s.} D = (a_1, a_2).$$

Više od toga, ako $\mathbb{E}X_t^8 < \infty$, tada $\sqrt{n-1}(\widehat{D} - D)$ konvergira ka slučajnom vektoru sa dvodimenzionalnom normalnom raspodelom sa očekivanjem $\mathbf{0} = (0, 0)$ i kovarijacionom matricom

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

gde su

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1})^2}{H_1^2(n-1)^2}, & c_{22} &= \frac{\mathbb{E}(G_t(T_{t-1}^2 - m_2))^2}{H_2^2(n-1)^2}, \\ c_{12} &= c_{21} = \frac{\mathbb{E}(u_t X_{0,t-1} G_t(T_{t-1}^2 - m_2))}{H_1 H_2(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Ovde je

$$H_1 = \mathbb{E}X_{0,t-1}^2, \quad H_2 = \mathbb{E}(T_{t-1}^2 - m_2)^2.$$

6.2.3 Yule–Walkerova metoda

Yule³–Walkerov⁴ postupak ocenjivanja parametara uglavnom se odnosila na ocene parametara $AR(p)$ modela definisanih diferencnom jednačinom (1.3.3). U ovom poglavlju ćemo odrediti Yule–Walkerovu ocenu nepoznatog parametra $RCAR(1)$ modela definisanog jednačinom (6.2.5). Pokazaćemo da je ta ocena nepristrasna, postojana i asimptotski normalna. U tom cilju inoviraćemo odgovarajuće teoreme iz (Brockwell i Davis, 1990).

Neka $\phi_1 = \mathbb{E}A_t$, gde je A_t slučajni koeficijent u modelu (6.2.5). Razmotrićemo model

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \xi'_t, \quad (6.2.36)$$

gde je ξ'_t definisano drugom jednakošću u (6.2.5). S obzirom da je niz $\{X_t\}$ centriran sledi da je $\mathbb{E}X_t = 0$. Takođe, iz definicije niza $\{\xi'_t\}$ lako zaključujemo da je $\mathbb{E}\xi'_t = 0$. Neka je (X_1, \dots, X_n) uzorak iz modela (6.2.36).

Ako pomnožimo levu i desnu stranu (6.2.5) sa X_{t-k} , zatim od tako dobijenog izraza potražimo matematičko očekivanje dobijamo

$$\gamma(k) - \phi_1 \gamma(k-1) = 0,$$

gde je sa $\gamma_X(\cdot)$ označena autokovariansna funkcija . Ako prethodni izraz podelimo sa $\gamma(0)$ dobijamo

$$\rho(k) - \phi_1 \rho(k-1) = 0,$$

gde je $\rho(\cdot)$ autokorelaciona funkcija . S obzirom da nam je nepoznat jedan parametar za $k = 1$ dobijamo

$$\hat{\phi}_1 = \rho(1), \quad (6.2.37)$$

gde se $\rho(1)$ ocenjuje formulom

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}, \quad (6.2.38)$$

³George Udny Yule (1871–1951), škotski statističar

⁴Sir Gilbert Thomas Walker (1868–1958), britanski fizičar i statističar

ili matrično $\widehat{\rho}(1) = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{X}$, gde su $\mathbf{X} = \mathbf{R}\phi_1 + \boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)^T$, $\mathbf{X} = [X_2, \dots, X_n]^T$ i $\mathbf{R} = [X_1, \dots, X_{n-1}]^T$.

Teorema 6.2.8. *Ocena $\widehat{\phi}_1$ je nepristrasna ocena parametra ϕ_1 .*

Dokaz: Da bi dokazali nepristrasnost potrebno je dokazati $E\widehat{\phi}_1 = \phi_1$. Zaista,

$$\begin{aligned} E\widehat{\phi}_1 &= E\left\{(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{X}\right\} = \phi_1 + E\left\{(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\xi}'\right\} \\ &= \phi_1 + E\left\{(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T E\{\boldsymbol{\xi}' | \mathbf{R}\}\right\} \\ &= \phi_1 + E\left\{(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T E\boldsymbol{\xi}'\right\}, \end{aligned}$$

S obzirom da slučajna promenljiva X_t ne zavisi od slučajne promenljive ξ'_s za $s > t$, zaključujemo da je $E\{\boldsymbol{\xi}' | \mathbf{R}\} = E\boldsymbol{\xi}' = 0$, sledi da je $E\widehat{\phi}_1 = \phi_1$, odakle sledi nepristrasnost ocene $\widehat{\phi}_1$. \square

Teorema 6.2.9. *Ocena $\widehat{\phi}_1$ je postojana ocena parametra ϕ_1 .*

Takođe, važi

$$N^{1/2}(\widehat{\phi}_1 - \phi_1) : \mathcal{N}\left(0, \frac{E\xi'}{DX}\right)$$

Dokaz: Da bi pokazali postojanost ocene potrebno je pokazati da $\widehat{\phi}_1 \xrightarrow{P} \phi_1$. U tom cilju iskoristićemo matrični izraz za ocenu $\widehat{\phi}_1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_1 &= \left(\frac{1}{n} \mathbf{R}^T \mathbf{R}\right)^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{R}^T \mathbf{X} \\ &= \left(\frac{1}{n} \mathbf{R}^T \mathbf{R}\right)^{-1} \frac{1}{n} \mathbf{R}^T (\mathbf{R}\phi_1 + \boldsymbol{\xi}') \\ &= \phi_1 + \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2\right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \xi'_t\right) \end{aligned}$$

Iz ergodičnosti niza $\{X_t\}$ slede konvergencije

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \xrightarrow{s.s.} E X_{t-1}^2 = \Omega$$

i

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \xi'_t \xrightarrow{s.s.} E X_{t-1} \xi'_t = 0.$$

Na osnovu osobine **1**, iz Poglavlja 1.1, slede odgovarajuće konvergencije u verovatnoći. Iz tvrđenja **(c)** teoreme Slutskog, kao i osobine **5**, iz Poglavlja 1.1, sledi

$$\widehat{\phi}_1 \xrightarrow{P} \phi_1 + \mathfrak{Q}^{-1} \cdot 0 = \phi_1,$$

odakle sledi postojanost ocene $\widehat{\phi}_1$.

Dokažimo asimptotsku normalnost. Iz centralne granične teoreme sledi

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \xi'_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathcal{V}),$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathsf{D}(X_{t-1} \xi'_t) = \mathsf{E}(X_{t-1}^2 \xi'^2_t) \\ &= \mathsf{E}\{X_{t-1}^2 \mathsf{E}(\xi'^2_t | X_{t-1})\} = \mathfrak{Q} \mathsf{D} \xi'. \end{aligned}$$

Iz tvrđenja **(c)** teoreme Slutskog sledi:

$$\sqrt{n}(\widehat{\phi}_1 - \phi_1) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_{t-1} \xi'_t \right) \xrightarrow{d} \mathfrak{Q}^{-1} \cdot \mathcal{N}(0, \mathfrak{Q} \mathsf{D} \xi') = \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathsf{D} \xi'}{\mathsf{D} X}\right),$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema je dokazana. □

Dakle, Yule–Walkerova ocena nepoznatog parametra *RCAR*(1) modela je $\mathsf{E} A_t = \widehat{\rho}(1)$. S obzirom da primenom ovog metoda imamo samo jednu jednačinu, a obično u izrazu za očekivanje $\mathsf{E} A_t$ figuriše više parametara koje treba oceniti, obično ćemo, ako je to moguće, kombinovati više metoda za ocenjivanje.

Glava 7

Novi linearni $AR(1)$ model sa marginalnom $AB(p, q)$ i $AIG(a, b)$ raspodelom

U ovoj glavi uvešćemo dva nova linearna autoregresivna modela prvog reda, uz pretpostavku da su $B_2(p, q)$ ili $IG(a, b)$ marginalne raspodele. Otežavajući okolnost predstavlja to što Laplaceove transformacije razmatranih raspodela nisu u elementarnoj formi, već u obliku specijalnih funkcija. Kod beta raspodele u pitanju je *Kummerova funkcija prvog reda*, dok je kod inverzne gama raspodele to *Krätselova funkcija*. Ovakve Laplaceove transformacije nisu pogodne za određivanje tačne raspodele inovacija, pa ih je zato potrebno aproksimirati. Na taj način dolazimo do novih raspodela, veoma bliskih inicijalnim, što je i pokazano u simulacionim studijama u Glavama 4 i 5. Zato ćemo i smatrati da su te nove raspodele i marginalne raspodele modela.

Ova disertacija predstavlja novi pravac u izučavanju stohastičkih nizova, jer se prvi put srećemo sa situacijom da se proučavaju mogućnosti da raspodele čije Laplaceove transformacije nisu u elementarnoj formi, odnosno imaju oblik specijalnih funkcija, budu marginalne raspodele stohastičkih nizova.

Na ovom mestu ćemo napomenuti da se simulacije koje se odnose na ocenjivanje nepoznatih parametara odnose na centrirani niz. Do centriranog niza se dolazi tako što se od generisanog niza oduzme ocenjena srednja vrednost. Na ovaj način opravdavamo posebno izučavanje osobina ocena dobijenih na nizu čija je sredina jednaka 0.

7.1 Definicija modela sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom

U ovoj glavi uvodimo novi linearni autoregresivni model prvog reda sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom. U zavisnosti od vrednosti parametra p , razlikovaćemo tri slučaja. U prvom, kada je $p = 1$, prepostavljamo da je funkcija (4.2.2) Laplaceova transformacija $AB(p, q)$ raspodele. U drugom slučaju, $p \in (0, 1)$, ćemo smatrati da je to funkcija (4.2.1). Za $p \in (0, 1]$ funkcija (4.2.4) će biti gustina $AB(p, q)$ raspodele.

U trećem slučaju prepostavljamo da je $p > 1$. Tada je funkcija (4.2.5) gustina $AB(p, q)$ raspodele. U slučaju kada su ispunjeni uslovi Teoreme 4.2.4 gustina $AB(p, q)$ raspodele može se odrediti i analitički. Aproksimaciju raspodele inovacija odredićemo koristeći činjenicu da je funkcija (4.2.3) Laplaceova transformacija aproksimirane beta raspodele.

Tehnički deo istraživanja počinje izvođenjem Laplaceove transformacije inovacionog niza modela (7.1.1). Njenim invertovanjem, u slučaju $p \in (0, 1)$, dolazimo do toga da je raspodela inovacija u obliku Wrightove hipergeometrijske funkcije (videti Primer 2.7.1).

U slučaju kada je $p = 1$ suočeni smo sa invertovanjem Diracove delta funkcije. Rešenje ovog ne baš trivijalnog problema dato je u Primeru 2.7.2. Za $p > 1$ invertovanje Laplaceove transformacije inovacija ne predstavlja nikakav problem, pa lako dolazimo do raspodele inovacionog niza.

S obzirom da je stohastički niz koji će se razmatrati linearan autoregresivni model sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom, označavaćemo ga sa $LAB_{p,q}AR(1)$.

Model $LAB_{p,q}AR(1)$ se definiše na sledeći način:

$$X_t - \beta X_{t-1} = \xi_t, \quad \beta^{-p} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad p > 0, \quad (7.1.1)$$

gde su zadovoljene prepostavke:

- (i) X_t je iz $AB(p, q)$, $p > 0$, $q > 0$,
- (ii) $\beta \in (0, 1)$ što povlači stacionarnost procesa $\{X_t\}$,
- (iii) X_t i ξ_s su nezavisni za $t < s$,

(iv) $\{\xi_t\}$ je niz nezavisnih i jednakoraspodeljenih slučajnih promenljivih,

(v) Neka su p i β takvi da

$$\kappa(p) = \lceil \beta^{-p} \rceil = n \in \mathbb{N},$$

gde $[A]$ označava najveći ceo deo od nekog broja A .

Slučaj $p = 1$.

Teorema 7.1.1 (Popović, 2010a). *Neka je dat $LAB_{1,q}AR(1)$ model*

$$X_t - \beta X_{t-1} = \xi_t \quad \beta = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

takav da poseduje marginalnu $AB(1, q)$ raspodelu i neka je $q > 1$. Tada se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira uniformnom diskretnom raspodelom

$$\mathbb{P}\left\{\xi_t = \frac{(q-1)j}{n}\right\} = 1/n \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Dokaz: Odredimo Laplaceovu transformaciju (7.1.1). Na osnovu prepostavke (iii) imamo

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(s) &= \mathbb{E}e^{-sX_t} = \mathbb{E}e^{-(\beta X_{t-1} + \xi_t)s} = \mathbb{E}e^{-s\beta X_{t-1}}\mathbb{E}e^{-s\xi_t} = \\ &= \varphi_{X_{t-1}}(\beta s)\varphi_{\xi_t}(s). \end{aligned}$$

Zbog prepostavke (ii) o stacionarnosti procesa $\{X_t\}$ možemo zaključiti

$$\varphi_X(s) = \varphi_X(\beta s)\varphi_{\xi}(s).$$

Koristeći asimptotsku formulu (4.2.2), dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(s) &= \frac{\varphi_X(s)}{\varphi_X(\beta s)} \sim \beta \cdot \frac{1 - e^{-(q-1)s}}{1 - e^{-(q-1)\beta s}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - (e^{-(q-1)\frac{1}{n}s})^n}{1 - e^{-(q-1)\frac{1}{n}s}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} e^{-(q-1)\frac{j}{n}s} =: A_s(\varphi_{\xi}), \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Iz Primera 2.7.2 sledi da je inverzna Laplaceova transformacija od $A_s(\varphi_\xi)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x^{-1}[A_s(\varphi_\xi)] &= \frac{1}{n} \mathcal{L}_x^{-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{-(q-1)\frac{j}{n}s} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta \left(x - \frac{(q-1)j}{n} \right),\end{aligned}$$

gde je δ Diracova delta funkcija. Dakle, možemo zaključiti da se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira unifromnom diskretnom raspodelom

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & (q-1)/n & \cdots & (q-1)(n-1)/n \\ n^{-1} & n^{-1} & \cdots & n^{-1} \end{pmatrix}}_n.$$

Teorema je dokazana. \square

Napomena 7.1.1. Isti model, (7.1.1), ali sa marginalnom uniformnom $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelom razmatrao je Chernick (1981).

Napomena 7.1.2. Iz (4.1.12) sledi

$$X_t : \text{Kum}_2(p, q) \stackrel{d}{=} X_t^{1/p} : \text{B}_2(1, q),$$

što povezuje naš rezultat sa Kumaraswamyjevom $\text{Kum}_2(p, q), q > 1$ raspodelom.

Primer 7.1.1. Trajektorije na Slici 7.1.1 modela (7.1.1) predstavljaju slučaj kada su vrednosti parametara $p = 1, q = 2$ i $\beta = 1/5$. Generisali smo uzorke obima 500, 1000, 1500 i 2000.

Slučaj $p \in (0, 1)$.

Teorema 7.1.2 (Popović, 2010a). *Neka $LAB_{p,q}AR(1)$ model*

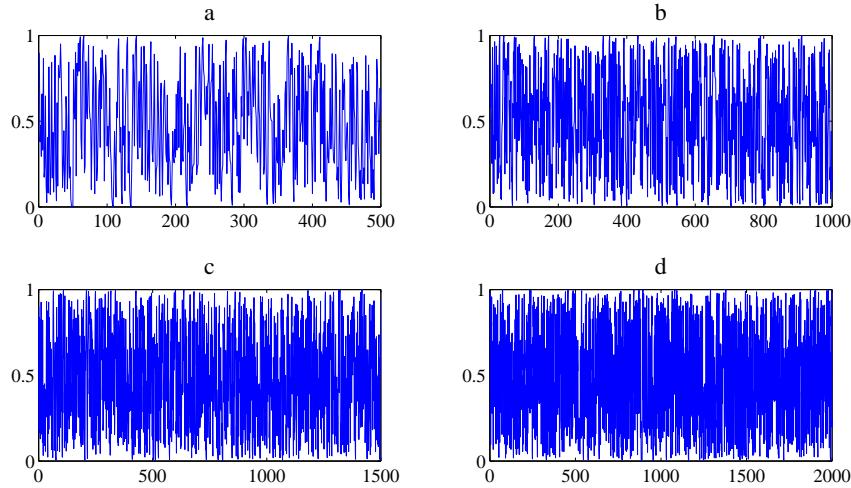
$$X_t - \beta X_{t-1} = \xi_t \quad \beta^p = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

ima marginalnu AB(p, q) raspodelu. Pretpostavimo da su $p \in (0, 1), q > 1$ i $\kappa(p) \in \mathbb{N}$.

Tada se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira raspodelom čija je gustina

$$f_\xi(p; x) = \frac{x^{-1}}{\kappa(p)} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \Phi \left(0, -p ; -\frac{p(q-1)\beta^p j}{x^p} \right). \quad (7.1.2)$$

Slika 7.1.1: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



Dokaz: Uzimajući u obzir asymptotsku jednakost (4.2.1) i koristeći odgovarajući deo dokaza Teoreme 7.1.1, zaključujemo

$$\varphi_\xi(s) = \frac{\varphi_X(s)}{\varphi_X(\beta s)} \sim \beta^p \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \exp\{-p(q-1)\beta^p j s^p\}.$$

Označimo desnu stranu prethodnog izraza sa $B_{s,p}(\varphi_\xi)$. Iz Primera 2.7.1 za $\tau = 0$ i $D = p(q-1)\beta^p j$ sledi

$$\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}(\varphi_\xi)] = \beta^p \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} x^{-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{p(q-1)\beta^p j}{x^p}\right).$$

Ova Wrightova hipergeometrijska funkcija je dobro definisana pošto red (2.6.1) konvergira, jer je $p \in (0, 1)$.

Nenegativnost funkcije $\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}(\varphi_\xi)]$ sledi na osnovu Teoreme 2.6.1.

Primetimo da Laplaceova transformacija

$$s^{-\tau} e^{-Ts^p} = \int_0^\infty e^{-sx} x^{\tau-1} \Phi(\tau, -p; -Tx^{-p}) dx$$

važi za svako s , a ne samo za $s \rightarrow \infty$. Za $\tau = 0$ i kada $s \rightarrow 0$ dolazimo do

$$\int_0^\infty x^{-1} \Phi(0, -p; -Tx^{-p}) dx = 1,$$

odakle sledi da je (7.1.2) normalizovana.

Teorema je dokazana. \square

Asimptotsko ponašanje gustine (7.1.2)

$$x^{-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) \sim \begin{cases} \frac{Q_T}{x^{p/(2(1-p))}} \exp\left\{-R_T x^{-p/(1-p)}\right\}, & x \rightarrow 0+ \\ \frac{p}{\Gamma(1-p)} T x^{-p-1}, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

gde su

$$\begin{aligned} Q_T &:= \frac{(pT)^{1/(2(1-p))}}{\sqrt{2\pi(1-p)}} , \\ R_T &:= (1-p)(p^p T)^{1/(1-p)} , \\ T &:= p(q-1)\beta^p j , \end{aligned}$$

direktno sledi iz Teoreme 2.6.2.

Primer 7.1.2. Na Slici 7.1.2 prikazane su simulirane trajektorije modela (7.1.1) u slučaju kada su vrednosti parametara $p = 1/3$, $q = 4$ i $\beta = 1/8$. Generisani su uzorci obima 500, 1000, 1500 i 2000.

Slučaj $p > 1$.

Teorema 7.1.3. Razmatramo $\text{LAB}_{p,q}\text{AR}(1)$ model (7.1.1) sa marginalnom $\text{AB}(p, q)$, $p > 1, q > 0$, raspodelom.

Tada se raspodela inovacionog niza $\{\xi_t\}$ aproksimira mešavinom diskretnе komponente 0 i neprekidne raspodele

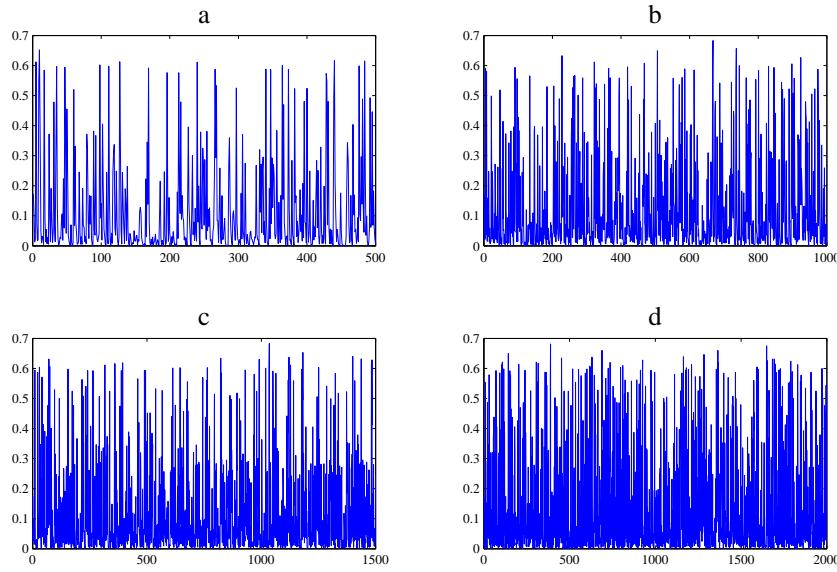
$$\xi_t = \begin{cases} 0 & \text{s.v.} & \beta^p \\ q K_t & \text{s.v.} & 1 - \beta^p \end{cases},$$

gde je K_t niz jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih iz raspodele čija je gustina (4.2.5).

Dokaz: Imajući na umu prepostavke (i)–(v) i postupajući na sličan način kao u prethodne dve teoreme, uz upotrebu aproksimacije (4.2.3) dolazimo do

$$\varphi_\xi(s) = \frac{\varphi_X(s)}{\varphi_X(s\beta)} \sim \frac{s^p \beta^p + q}{s^p + q}.$$

Slika 7.1.2: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



Posle deljenja prethodnog razlomka dolazimo do

$$\varphi_\xi(s) \sim \beta^p + (1 - \beta^p) \frac{q}{s^p + q} \quad s \rightarrow \infty .$$

Invertovanjem prethodne Laplaceove transformacije lako se dolazi do tvrđenja teoreme. \square

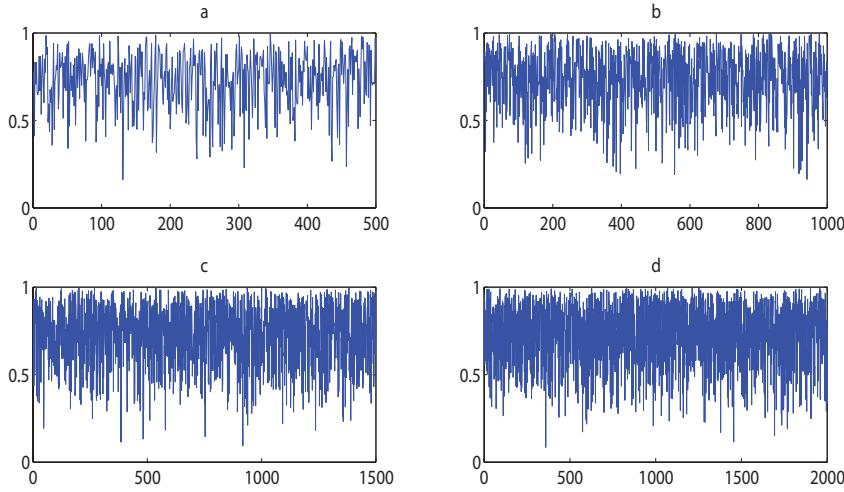
Napomena 7.1.3. U slučaju da su zadovoljene pretpostavke Teoreme 4.2.4, niz jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih K_t ima gustinu (4.2.6) ili (4.2.7), u zavisnosti od toga da li je $p = 3$ ili $p = 4$.

Primer 7.1.3. Kao i u prethodnim slučajevima, na Slici 7.1.3 prikazane su simulirane trajektorije modela (7.1.1) za $p = 4$, $q = 1.5$ i $\beta = 0.1$.

Neka je \mathbf{X}_0 početna vrednost niza $\{X_t\}$. Tada, za svaki prethodno naveden slučaj, možemo formulisati teoremu:

Teorema 7.1.4. Neka je $\{\xi_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa bilo kojom gustinom iz Teorema 7.1.1, 7.1.2 ili 7.1.3. Ako parametar

Slika 7.1.3: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



β zadovoljava uslov **(v)** i ako je \mathbf{X}_0 iz $AB(p, q)$ tada (7.1.1) definiše stohastički niz sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom.

Dokaz: Dokaz teoreme se lako izvodi, imajući na umu da ova teorema predstavlja suprotnu implikaciju od one u Teoremama 7.1.1, 7.1.2 ili 7.1.3. \square

7.2 Definicija modela sa marginalnom $AIG(a, b)$ raspodelom

U ovom poglavlju uvodimo još jedan linearni model sa marginalnom inverznom gama raspodelom. Model će biti oblika (7.1.1). Osnovni analitički aparat, i ovde će biti Laplaceova transformacija. Kao što je pokazano u Glavi 5, Laplaceova transformacija inverzne gama raspodele nije u elementarnoj formi, već u obliku specijalne funkcije, zato smo je na odgovarajući način aproksimirali. Na taj način došli smo do aproksimirane inverzne gama raspodele koja će biti prepostavljena marginalna raspodela. Neka su ispunjene prepostavke **(i)**, **(ii)**, **(iii)** i **(iv)**, iz prethodnog poglavlja, s tim što ćemo umesto $AB(p, q)$ razmatrati $AIG(a, b)$, $a, b > 0$. Kao što je to u radu (Popović, 2010b) model (7.1.1) ćemo nazivati *WIGAR(1)*, s obzirom

da smo aproksimiranu inverznu gama raspodelu nazvali i Wrightova inverzna gama raspodela.

Teorema 7.2.1 (Popović, 2010b). *Neka je WIGAR(1) model sa marginalnom AIG(a, b), $a, b > 0$ raspodelom dat diferencnom jednačinom (7.1.1) tako da su ispunjene pretpostavke (ii) i (iii). Tada se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira raspodelom čija je gustina*

$$g_\xi(x) = x^{-1} \Phi\left(0, -\frac{1}{2}; -T x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad x > 0, \quad (7.2.1)$$

gde je $T = 2\sqrt{b}(1 - \sqrt{\beta}) > 0$.

Dokaz: Postupajući na isti način kao prilikom dokazivanja Teoreme 7.1.1, primeđujući (5.2.1) dolazimo do aproksimacije Laplaceove transformacije inovacija

$$\varphi_\xi(s) = \frac{\varphi_X(s)}{\varphi_X(\beta s)} \sim \beta^{\frac{1-2a}{4}} e^{-(2\sqrt{b}(1-\sqrt{\beta}))s^{1/2}}, \quad s \rightarrow \infty.$$

Ako označimo desnu stranu prethodnog izraza sa $B_{s,p}(\varphi_\xi)$, iz Primera 2.7.1 za $\tau = 0$ i $D = 2\sqrt{b}(1 - \sqrt{\beta})$ sledi

$$\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}(\varphi_\xi)] = \beta^{\frac{1-2a}{4}} x^{-1} \Phi\left(0, -\frac{1}{2}; -2\sqrt{b}(1 - \sqrt{\beta})x^{-1/2}\right).$$

Imajući na umu komentar iz dokaza Teoreme 7.1.2 zaključujemo da je

$$\int_0^\infty x^{-1} \Phi(0, -p; -Tx^{-p}) dx = 1,$$

odakle sledi da je normalizujuća konstanta $k = \beta^{\frac{1-2a}{4}}$. Sada lako dolazimo do (7.2.1).

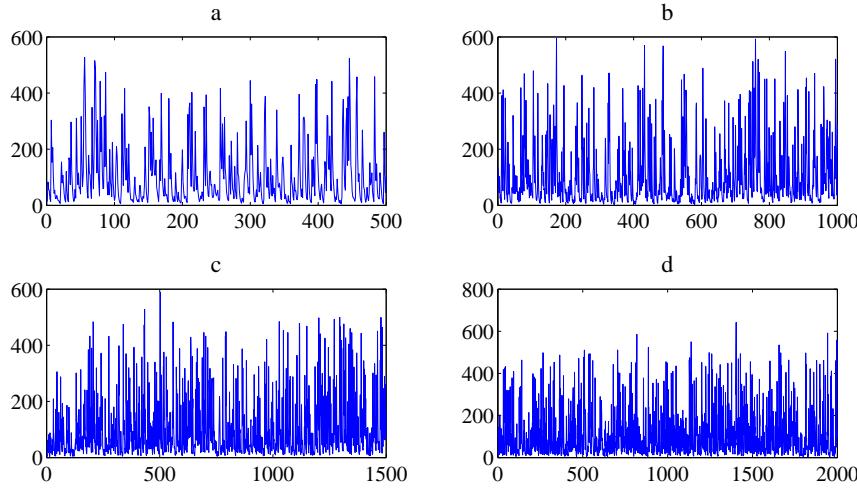
Nenegativnost direknto sledi iz Teoreme 2.6.1.

Teorema je dokazana. □

S obzirom na Teoreme 5.1.1 i 5.1.2, kao i na činjenicu da su beta i inverzna gama raspodela veoma "bliske" odgovarajućim aproksimiranim raspodelama, možemo zaključiti da postoji tesna veza između modela sa marginalnim AB(p, q) i AIG(a, b) raspodelama. Tako, ukoliko imamo model sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom, pod određenim pretpostavkama, veoma lako dolazimo do modela sa marginalnom aproksimiranom inverznom gama raspodelom. Takođe, dva nezavisna uzorka generisana iz WIGAR(1) modela daju uzorak iz AB(p, q) raspodele. Ove činjenice daju još veću težinu proučavanju modela sa inverznom gama raspodelom i predstavljaju podlogu za dalje proučavanje sličnih situacija.

Primer 7.2.1. Kao i u prethodnim slučajevima, na Slici 7.2.1 simulirane su trajektorije modela $WIGAR(1)$ za $a = 0.35$, $b = 2$ i $\beta = 0.4$.

Slika 7.2.1: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



7.3 Neke karakteristike modela sa marginalnim AB(p, q) i AIG(a, b) raspodelama

Vrlo lako se, na osnovu (6.1.3) i (6.1.4), može pokazati da su autokovarijansna i autokorelaciona funkcija modela (7.1.1), sa korakom $\tau \in \mathbb{Z}$, redom:

$$\gamma(\tau) = \beta^{|\tau|} \text{DX},$$

$$\rho(\tau) = \beta^{|\tau|}.$$

Teorema 7.3.1. *Proces $\{X_t\}$ nije vremenski invarijantan.*

Dokaz: Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) je

$$\varphi_{X_t, X_{t-1}}(s_1, s_2) = \mathbf{E}(e^{-s_1 X_t - s_2 X_{t-1}}) = \varphi_X(s_1 \alpha + s_2) \varphi_\xi(s_1),$$

odakle sledi da Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) nije simetrična funkcija u odnosu na argumente transformacije s_1 i s_2 , samim tim ni model (7.1.1) nije vremenski invarijantan.

Teorema je dokazana. □

Teorema 7.3.2. *Diferencna jednačina (7.1.1) ima jedinstveno, strogo stacionarno, \mathcal{F}_t -merljivo i ergodično rešenje*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \xi_{t-j}$$

Dokaz: Sledi kao posledica Teoreme 6.1.1. □

Odredimo uslovnu funkciju raspodele $F(x|y) = \mathbf{P}\{X_t < x | X_{t-1} = y\}$ slučajne promenljive $\{X_t\}$ kada je $X_{t-1} = y$.

Teorema 7.3.3. *Uslovna raspodela slučajne promenljive $\{X_t\}$ pod uslovom $X_{t-1} = y$ je*

$$F(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ F_\xi(x - \beta y), & x > \beta y \end{cases}.$$

Više od toga, odgovarajuća gustina je

$$f(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ f_\xi(x - \beta y), & x > \beta y \end{cases},$$

gde su f_ξ, F_ξ funkcije gustine i raspodele, redom, inovacionog niza $\{\xi_t\}$.

Dokaz: Odredimo uslovnu verovatnoću za neko $h > 0$

$$\pi = \mathbb{P}\{X_t < x | y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} = \frac{\mathbb{P}\{X_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}{\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}.$$

Brojilac iz prethodnog izraza možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \pi_B &= \mathbb{P}\{\beta X_{t-1} + \xi_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq \beta(y - h) \\ \int_{y-h}^{x/\beta} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & \beta(y - h) < x \leq \beta(y + h) \\ \int_{y-h}^{y+h} f_j(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & x > \beta(y + h) \end{cases}. \end{aligned}$$

Kada $h \rightarrow 0$ imamo

$$\pi_B \sim \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ \int_{y-h}^{x/\beta} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & \beta y < x \leq \beta y \\ \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & x > \beta y \end{cases},$$

i $\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \xrightarrow{\text{s.s.}} 2hf(y)$. Dakle,

$$\pi = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & x > \beta y \end{cases}.$$

Imajući na umu definicije funkcije raspodele inovacionog niza $\{\xi_t\}$, nalazimo da je $F_\xi(0) = 0$ skoro sigurno.

Diferencirajući izraz za uslovnu funkciju raspodele, dolazimo do uslovne gustine, pa sledi tvrđenje teoreme. \square

7.4 Ocenzivanje nepoznatih parametara

U ovom poglavlju parametre q i β koji se javljaju u $LAB_{1,q}AR(1)$ ocenićemo koristeći autokorelacionu funkciju sa korakom 1. Takođe, imajući na umu da $AB(p, q)$ dobro aproksimira beta raspodelu, srednju vrednost slučajne promenljive X iz $AB(1, q)$ raspodele, približno ćemo oceniti koristeći prvi moment odgovarajuće beta raspodele.

Parametre $LAB_{p,q}AR(1)$ i $WIGAR(1)$ ocenićemo metodom uslovnih najmanjih kvadrata.

7.4.1 Ocenzivanje parametara $LAB_{1,q}AR(1)$ modela

Parametar β ocenjujemo pomoću autokorelace funkcije sa korakom 1, tj.

$$\hat{\beta} = \hat{\rho}(1) ,$$

gde je

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} .$$

U Poglavlju 4.2 videli smo da je aproksimirana beta raspodela veoma "bliska" beta raspodeli. Zato ćemo za ocenzivanje vrednosti parametra q koristiti prvi moment beta raspodele. Naime,

$$EX \approx \frac{1}{1+q} \tag{7.4.1}$$

Iz (7.4.1) sledi da se parametar q može oceniti pomoću

$$q \approx \frac{1 - \bar{X}}{\bar{X}} ,$$

gde je sa \bar{X} označena ocena srednje vrednosti niza $\{X_t\}$.

7.4.2 Ocenjivanje parametara $LAB_{p,q}AR(1)$ i $WIGAR(1)$ modela

Parametar β modela (7.1.1) možemo oceniti metodom UNK, kao i metodom minimalnih količnika. U slučaju primene UNK metoda koristićemo ocenu (6.2.6). Pokazano je da je ona strogo postojana ocena.

Metod minimalnih količnika zasniva se na činjenici da je skoro sigurno ispunjeno

$$X_t = \beta X_{t-1} + \xi_t \geq \beta X_{t-1},$$

odakle sledi da je

$$\tilde{\beta} = \min_{2 \leq t \leq N} \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\}. \quad (7.4.2)$$

Sledećom teoremom pokazaćemo da je (7.4.2) postojana ocena.

Teorema 7.4.1. *Neka je $\chi = \beta^{-1}$. Tada je $\tilde{\beta}$ postojana ocena parametra β .*

Dokaz: Da bi $\tilde{\beta}$ ocena bila postojana potrebno je pokazati da $\tilde{\beta} \xrightarrow{P} \beta$. U tom cilju neka je

$$H_N(u) = \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N (X_{t-1} \leq u X_t) \right\}, \quad (7.4.3)$$

gde je $u > 0$. Iz (7.4.3) i (7.1.1) imamo

$$\begin{aligned} H_N(u) &= \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N \left\{ X_{t-1} \leq u X_t \right\} \right\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N \left\{ X_{t-1} \leq u \left(\frac{1}{\chi} X_{t-1} + \xi_t \right) \right\} \right\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N \left\{ X_{t-1} \left(1 - \frac{u}{\chi} \right) \leq u \xi_t \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Neka je $u \geq \chi$. Tada je skoro sigurno $X_{t-1} \left(1 - \frac{u}{\chi} \right) \leq u \xi_t$, za svako t , jer je leva strana nejednakosti negativna, a desna pozitivna. Odavde sledi da je $H_N(u) = 1$ za svako $u \geq \chi$.

Neka je $0 < u < \chi$. Tada važi

$$\begin{aligned} H_N(u) &= \frac{1}{\chi} \sum_{i_2=0}^{\chi-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{\chi-1} \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N \left\{ X_{t-1} \left(1 - \frac{u}{\chi} \right) \leq \frac{u i_t}{\chi} \right\} \right\} \leq \\ &\leq \left(\frac{\chi-1}{\chi} \right)^{N-1}, \end{aligned}$$

jer je

$$\mathbb{P} \left\{ \bigcap_{t=2}^N \left\{ X_{t-1} \left(1 - \frac{u}{\chi} \right) \leq \frac{u i_t}{\chi} \right\} \right\} = 0,$$

kad god je $i_t = 0$. Ako $N \rightarrow \infty$ tada

$$H_N(u) \rightarrow H(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq \chi \\ 0 & , \quad 0 < u < \chi \end{cases},$$

odakle sledi da

$$\tilde{\chi} \xrightarrow{d} \chi.$$

S obzirom da je χ konstanta, konvergencija u raspodeli, povlači konvergenciju u verovatnoći, pa važi

$$\tilde{\chi} \xrightarrow{P} \chi,$$

odakle neposredno sledi da

$$\tilde{\beta} \xrightarrow{P} \beta,$$

odnosno da je $\tilde{\beta}$ postojana ocena parametra β . \square

Na osnovu rezultata iz Poglavlja 4.2.1, parametre p i q raspodele $AB(p, q)$ ocećemo pomoću momenata $B_2(p, q)$. Dakle,

$$\begin{aligned} \hat{p} &\approx \frac{m_1 m_2 - m_1^2}{m_1^2 - m_2}, \\ \hat{q} &\approx \frac{(m_2 - m_1)(1 - m_1)}{m_1^2 - m_2}, \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

gde su $m_1 = \hat{\mu}_1'$ i $m_2 = \hat{\mu}_2'$ ocene momenata koje se računaju po formulama: $\hat{\mu}_1' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$ i $\hat{\mu}_2' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^2$.

U poglavlju 5.1 pokazali smo kako se parametri inverzne gama raspodele ocenjuju metodom maksimalne verodostojnosti. Iz istih razloga, kao u slučaju aproksimirane beta raspodele, parametre $AIG(a, b)$ raspodele ocenićemo metodom maksimalne

verodostojnosti za $IG(a, b)$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\hat{b} &\approx \frac{\hat{a}N}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{X_k}}, \\ \Psi(\hat{a}) - \ln \hat{a} &\approx \ln \frac{N}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{X_k}} - \frac{1}{N} \ln X_k,\end{aligned}$$

gde su \hat{a} i \hat{b} ocene parametara a i b .

Numerički primeri

1. Marginalna $AB(p, q)$ raspodela

Na osnovu (7.1.1) generisamo, za razne vrednosti parametara p , q i β , matrice $\mathcal{A}_{\ell \times 1000}$, gde je $\ell \in \{10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000\}$. Svaka kolona matrice \mathcal{A} je uzorak na kome ćemo ocenjivati nepoznate parametre. S obzirom da se uzorci ponavljaju 1000 puta, računaćemo prosek dobijenih ocena na svakom uzorku, a u zagradi, pored ocene, daćemo i standardne devijacije.

Treba napomenuti da su slučajni brojevi iz raspodele $AB(p, q)$, neophodni za određivanje matrice \mathcal{A} , generisani primenom Ridoutovog algoritma (Ridout, 2009).

Nepoznati parametar β ocenićemo metodom minimalnog količnika pomoću formule (7.4.2), a zatim UNK metodom formulom (6.2.6).

Iz Tabele A.1 nedvosmisleno sledi da je metoda minimalnog količnika najprikladniji za ocenjivanje. Naime, relativno brzo se dolazi do tačne vrednosti, a lako se i implementira. Metod uslovnih najmanjih kvadrata, povećanjem uzorka, postiže manju standardnu devijaciju i daje tačniju ocenu.

Parametre p i q ocenićemo metodom momenta beta raspodele. Pošto se koristi metoda momenata realno je očekivati da se povećanjem obima uzorka dobijaju ocene bliske stvarnim vrednostima. Tako je bilo i u ovom slučaju, pa ocenjeni parametri aproksimirane beta raspodele povećavaju tačnost povećanjem obima uzorka. Ta ko na primer, ukoliko je obim uzorka 10000 razlika između stvarnog i ocenenog parametra p je približno 0.08, dok je ta razlika u slučaju parametra q jednaka 0.09.

Pošto je $\hat{p} \approx p$ i $\hat{q} \approx q$, zaključujemo da $AB(p, q)$ raspodela dobro aproksimira $B_2(p, q)$ raspodelu.

Sistem jednačina (7.4.4) rešavali smo primenom funkcije *BBsolve()* opisane u radu (Varadhan i Gilbert, 2009).

2. Marginalna $AIG(a, b)$ raspodela

Simulacionu studiju za $WIGAR(1)$ model sprovešćemo na potpuno isti način kao u slučaju marginalne aproksimirane beta raspodele. Uzimajući u obzir rezultate iz Poglavlja 5.2.1, parametre $AIG(a, b)$ raspodele ocenićemo metodom maksimalne verodostojnosti za inverznu gama raspodelu. Na ovaj način pokazali smo, i eksperimentalnim putem, da $AIG(a, b)$, zaista, dobro aproksimira $IG(a, b)$ raspodelu. Metod maksimalne verodostojnosti sproveli smo, u softverskom paketu R, koristeći optimizacionu funkciju *BBoptim()*.

Što se tiče metoda za ocenjivanje nepoznatog parametra, kao i u prethodnom slučaju, možemo zaključiti da je metod minimalnog količnika najprihvatljiviji, jer se vrlo brzo dolazi do tačne vrednosti, a i na uzorcima manjeg obima ima malu standardnu devijaciju. Metod uslovnih najmanjih kvadrata daje dobre rezultate povećanjem obima uzorka. Rezultati simulacija dati su u Tabeli A.2.

Inicijalne vrednosti, potrebne za generisanje $WIGAR(1)$ modela, odredili smo primenom Ridoutovog algoritma.

3. Veza $WIGAR(1)$ i $LAB_{p,q}AR(1)$ modela

Cilj nam je da eksperimentalnim putem pokažemo da se polazeći od $WIGAR(1)$, primenom Teoreme 5.1.2, može doći do $LAB_{p,q}AR(1)$ modela. Naime, generisaćemo dve matrice \mathcal{A} i \mathcal{A}_1 formata kao u prvom slučaju. Smatraćemo da je svaka kolona ovih matrica uzorak iz $WIGAR(1)$ modela. Uzorci iz matrice \mathcal{A} imaju marginalnu $AIG(a, 1)$, dok uzorci iz matrice \mathcal{A}_1 imaju marginalnu $AIG(b, 1)$ raspodelu. S obzirom da su kolone matrica \mathcal{A} i \mathcal{A}_1 nezavisne, primenom (5.1.4) dobijamo matricu \mathcal{B} , za čije kolone ćemo pretpostaviti da imaju $AB(p, q)$ raspodelu takvu da je $p \approx a$ i $q \approx b$.

Metodom momenata, primenom funkcije *BBsolve()*, kao i u prvom slučaju, oceni-

ćemo parametre aproksimirane beta raspodele. Iz tabele sa rezultatima možemo zaključiti da su ocenjeni parametri p i q zaista približno jednaki parametrima aproksimirane inverzne gama raspodele, što navodi na zaključak da su uzorci iz matrice \mathcal{B} , zaista iz $LAB_{p,q}AR(1)$ modela. Rezultati simuliranja su u Tabeli A.3.

Glava 8

Novi nelinearni $AR(1)$ modeli sa AB(p, q) raspodelom

U ovoj glavi proučavaćemo nelinearne autoregresivne modele prvog reda sa marginalnom beta raspodelom. Iz istih razloga kao u prethodnoj glavi, umesto beta, posmatraćemo aproksimiranu beta raspodelu.

Prepostavke koje će važiti za svaki ovde proučavani model su:

- (i) $\{X_t\}$ ima AB(p, q), $p > 0$, $q > 0$ marginalnu raspodelu,
- (ii) $\{X_t\}$ je stacionaran niz,
- (iii) X_t i ξ_s su nezavisni za $t < s$,
- (iv) $\{\xi_t\}$ je niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih.

Nelinearni modeli, koje ćemo ovde uvesti, se mogu predstaviti u obliku modela sa slučajnim koeficijentima. Na taj način oni dobijaju linearnu strukturu, što olakšava njihovo proučavanje. Parametre jednog modela ocenićemo metodom najmanjih kvadrata, dok ćemo za preostale koristiti Yule–Walkerov metod.

Kao što je bio slučaj u prethodnoj glavi, nepoznate parametre nelinearnih modela ocenićemo UNK metodom, koja će biti primenjena na centrirani niz. I u ovom slučaju pokazuje se neophodnost proučavanja osobina ocena dobijenih metodom UNK, kada je u pitanju niz čija je srednja vrednost 0.

8.1 Definicija $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela

Model $ABAR(1)$ definišemo na sledeći način

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } p_1 \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } 1 - p_1 \end{cases}, \quad \alpha, \beta, p_1 \in (0, 1). \quad (8.1.1)$$

Stacionarnost modela obezbeđena je uslovom $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Teorema 8.1.1 (Popović, Pogány, 2011). *Neka je dat $ABAR(1)$ model sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom takvom da je $p > 1, q > 0$, pri čemu $\beta < \alpha$, $\mu^p = p_1\beta^p + (1 - p_1)\alpha^p$ i neka su $\eta, v > 0$ skalirajući parametri.*

Tada se raspodela inovacionog niza $\{\xi_t\}$ aproksimira raspodelom koja je mešavina diskretnih komponente 0 i dve neprekidne raspodele

$$\xi_t = \begin{cases} 0 & \text{s.v. } (\alpha\beta/\mu)^p \\ K_t & \text{s.v. } \eta(1 - \alpha^p)(1 - \beta^p)(1 - \mu^p)^{-1} \\ \mu K_t & \text{s.v. } v(\beta^p - \mu^p)(\mu^p - \alpha^p)\mu^{-p}(1 - \mu^p)^{-1}, \end{cases} \quad (8.1.2)$$

gde je K_t niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih čija je gustina (4.2.5), gde parametar $q = q(\eta, v)$ zadovoljava uslov

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q+1)} = \frac{\eta\mu^p(1 - \alpha^p)(1 - \beta^p) + v(\mu^p - \beta^p)(\alpha^p - \mu^p)}{(1 - \mu^p)(\mu^p - (\alpha\beta)^p)}. \quad (8.1.3)$$

Dokaz: Laplaceova transformacija modela (8.1.1), uz prepostavke (ii) i (iii), je

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(s) &= Ee^{-sX_t} = p_1 Ee^{-s(\alpha X_{t-1} + \xi_t)} + (1 - p_1) Ee^{-s(\beta X_{t-1} + \xi_t)} \\ &= p_1 \varphi_{X_{t-1}}(\alpha s) \varphi_{\xi_t}(s) + (1 - p_1) \varphi_{X_{t-1}}(\beta s) \varphi_{\xi_t}(s). \end{aligned}$$

Iz prepostavki (ii) i (iv) zaključujemo da važi

$$\varphi_X(s) = p_1 \varphi_X(\alpha s) \varphi_\xi(s) + (1 - p_1) \varphi_X(\beta s) \varphi_\xi(s).$$

S obzirom na prepostavku da parametri aproksimirane beta raspodele zadovoljavaju uslov $p > 1$ i $q > 0$ koristićemo aproksimaciju Laplasove transformacije (4.2.3).

Tada dobijamo

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(s) &= \frac{\varphi_X(s)}{p_1\varphi_X(\alpha s) + (1-p_1)\varphi_X(\beta s)} \sim \frac{\frac{1}{s^p+q}}{p_1\frac{1}{\alpha^p s^p + q} + (1-p_1)\frac{1}{\beta^p s^p + q}} \\ &= \frac{(\alpha^p s^p + q)(\beta^p s^p + q)}{(s^p + q)(\mu^p s^p + q)} =: R_\xi(s) \quad s \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{8.1.4}$$

gde je $\mu^p = p_1\beta^p + (1-p_1)\alpha^p$. Racionalna funkcija (8.1.4) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}R_\xi(s) &= \left(\frac{\alpha\beta}{\mu}\right)^p + \frac{q(1-\alpha^p)(1-\beta^p)}{(1-\mu^p)(s^p+q)} + \frac{q(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{\mu^p(1-\mu^p)(\mu^p s^p + q)} \\ &= \left(\frac{\alpha\beta}{\mu}\right)^p + \frac{\Gamma(q+1)(1-\alpha^p)(1-\beta^p)}{\Gamma(p+q)(1-\mu^p)} \cdot C_{X_{p,q}}(s) \\ &\quad + \frac{\Gamma(q+1)(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{\Gamma(p+q)\mu^p(1-\mu^p)} \cdot C_{X_{p,q}}(\mu s) \\ &= \left(\frac{\alpha\beta}{\mu}\right)^p + \frac{\eta\Gamma(q+1)(1-\alpha^p)(1-\beta^p)}{\Gamma(p+q)(1-\mu^p)} \cdot \eta^{-1} C_{X_{p,q}}(s) \\ &\quad + \frac{v\Gamma(q+1)(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{\Gamma(p+q)\mu^p(1-\mu^p)} \cdot v^{-1} C_{X_{p,q}}(\mu s),\end{aligned}\tag{8.1.5}$$

gde su $\eta, v > 0$ parametri skaliranja i $C_{X_{p,q}}(s) = \frac{1}{s^p+q}$. Iz $0 < \beta^p < \mu^p < \alpha^p < 1$ sledi da se tri koeficijenta

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\mu}\right)^p, \quad \frac{\eta\Gamma(q+1)(1-\alpha^p)(1-\beta^p)}{\Gamma(p+q)(1-\mu^p)}, \quad \frac{v\Gamma(q+1)(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{\Gamma(p+q)\mu^p(1-\mu^p)}$$

mogu smatrati verovatnoćama. Pošto je cela teorija zasnovana na prepostavci da $s \rightarrow \infty$, ne možemo koristiti uslov da je $\varphi_\xi(0) = 1$, pa ćemo odrediti $q = q(\eta, v)$ tako da suma prethodnih verovatnoća zadovoljava

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\mu}\right)^p + \frac{\eta\Gamma(q+1)(1-\alpha^p)(1-\beta^p)}{\Gamma(p+q)(1-\mu^p)} + \frac{v\Gamma(q+1)(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{\Gamma(p+q)\mu^p(1-\mu^p)} = 1.$$

Rešavanjem prethodne jednačine dolazimo do (8.1.3)

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q+1)} = \frac{\eta\mu^p(1-\alpha^p)(1-\beta^p) + v(\mu^p-\beta^p)(\alpha^p-\mu^p)}{(1-\mu^p)(\mu^p - (\alpha\beta)^p)}.$$

Varirajući vrednosti parametara η, v nije teško naći njihov parametarski prostor, samim tim nije teško doći ni do parametarskog prostora parametra q .

Istaknimo da inverzna Laplaceova transformacija $\gamma^{-1} C_{X_{p,q}}(s)$, $\gamma \in \{\eta, v\}$ preko gustine (4.2.5) vodi do gustine slučajne promenljive K_t sa aproksimiranom beta

raspodelom, kod koje je $p > 1$ i q zadovoljava (8.1.3). Dakle, iz (8.1.5) lako zaključujemo da je aproksimacija raspodele inovacija mešavina diskretne komponente 0 i dve neprekidne raspodele, odnosno

$$\xi_t = \begin{cases} 0 & \text{s.v. } \alpha^p \beta^p \mu^{-p} \\ K_t & \text{s.v. } \eta (1 - \alpha^p)(1 - \beta^p)(1 - \mu^p)^{-1} \\ \mu K_t & \text{s.v. } v(\beta^p - \mu^p)(\mu^p - \alpha^p)(\mu^p(1 - \mu^p))^{-1}, \end{cases}$$

gde slučajna promenljiva K_t ima gore navedenu raspodelu.

Teorema je dokazana. \square

Neka je \mathbf{X}_0 početna vrednost niza $\{X_t\}$. Tada važi

Teorema 8.1.2. *Neka je $\{\xi_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa gustinom (8.1.2). Ako je $0 < \beta < \alpha < 1$, $\mu^p = p_1 \beta^p + (1 - p_1) \alpha^p$, gde $p > 1, q > 0$ zadovoljavaju (8.1.3) i ako je \mathbf{X}_0 iz $AB(p, q)$ tada (8.1.1) definiše stohastički niz sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom, čija je gustina (4.2.5).*

Napomena 8.1.1. U slučaju kada su $p = 1, q > 0; p = 2, q > \pi^2(2k+1)^2, k \in \mathbb{N}_0$; $p = 3, q \geq (43\pi/6)^3$; $p = 4, q \geq (3\pi/4)^4$ ili $p = 5, q \geq (9\pi/10)^5$ tada je niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih K_t ima raspodelu čija je gustina (4.2.6); (4.2.7); (4.2.8); (4.2.9) ili (4.2.10), respektivno.

Primer 8.1.1. Na Slici 8.1.1 simulirane su trajektorije modela $ABAR(1)$, na uzorcima obima 500, 1000, 1500 i 2000, za $\alpha = 0.18, \beta = 0.73, p_1 = 0.6, p = 4$ i $q = 2.5499$.

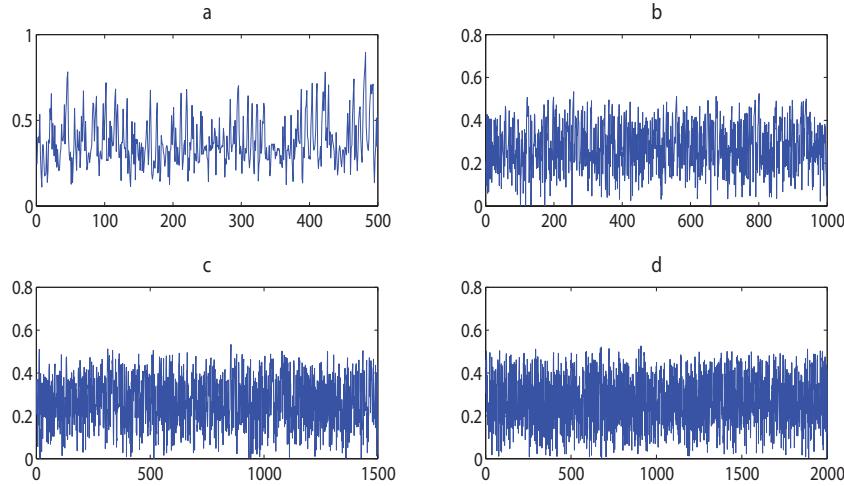
U slučaju $ABAR(1)$ modela smatrali smo da parametri $AB(p, q)$ raspodele zadovoljavaju uslov $p > 1$ i $q > 0$. U nastavku ćemo razmotriti pod kojim uslovima je moguće razmatrati model $ARAB(1)$ tako da važi $p \in (0, 1]$. Pokazaće se da je to moguće jedino kada je $\beta \in (-1, 0)$. S obzirom da će nam biti potrebno da bude ispunjen uslov $\beta^p < 0$ moraćemo pretpostaviti da parametar p pripada skupu

$$\mathcal{P}(u, v) = \{u/v : u < v, u, v \text{ neparni prirodni brojevi}\}.$$

Zaista za takvo p je ispunjeno

$$\beta^p = |\beta|^p \exp \left\{ i\pi u \cdot \frac{2j+1}{v} \right\} \quad j = \overline{0, v-1},$$

Slika 8.1.1: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



odakle sledi da je za $j = (v - 1)/2 \in \mathbb{N}_0$ ispunjeno $\beta^p = -|\beta|^p \in (-1, 0)$, gde je v neparan prirodan broj.

Neka je, kao i u prethodnom slučaju, niz $\{X_t\}$ sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom ($p \in (0, 1]$, $q > 1$) gde su ispunjene pretpostavke (ii), (iii) i (iv). Napomenimo, da je stacionarnost osigurana pretpostavkom da $\alpha \in (0, 1)$ i $\beta \in (-1, 0)$.

$AB_{p,q}AR^*(1)$ model definišemo na sledeći način

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & \frac{\alpha^p}{\alpha^p - \beta^p} \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & \frac{-\beta^p}{\alpha^p - \beta^p} \end{cases}, \quad (8.1.6)$$

gde je $-1 < \beta^p \leq 0 \leq \alpha^p < 1$ i $\alpha > \beta$.

Razmotrićemo koju raspodelu ima model $AB_{1,q}AR^*(1)$ sa marginalnom $AB(1, q)$ raspodelom.

Teorema 8.1.3. Neka model $AB_{1,q}AR^*(1)$

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v.} & \frac{-\beta}{\alpha - \beta} \end{cases},$$

kod koga je $-1 < \beta \leq 0 \leq \alpha < 1$ i $\alpha > \beta$ ima marginalnu $AB(1, q)$ raspodelu. Za $q > 1$ i $\kappa = (\alpha - \beta)^{-1} \in \mathbb{N}$ raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ se aproksimira uniformnom

diskretnom raspodelom

$$\mathsf{P}\{\xi_t = ((\alpha - \beta)j - \beta)(q - 1)\} = \frac{1}{\kappa} \quad j = \overline{0, \kappa - 1}.$$

Dokaz: Laplaceova transformacija slučajnog procesa (8.1.6) pod pretpostavkom stacionarnosti i nezavisnosti X_t i ξ_s za $t < s$ je

$$\varphi_X(s) = p_1 \varphi_X(\alpha s) \varphi_\xi(s) + (1 - p_1) \varphi_X(\beta s) \varphi_\xi(s).$$

S obzirom da je AB($1, q$) specifikovana aproksimacijom Laplaceove transformacije (4.2.2) dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(s) &= \frac{\varphi_X(s)}{p_1 \varphi_X(\alpha s) + (1 - p_1) \varphi_X(\beta s)} \sim (\alpha - \beta) e^{(q-1)\beta s} \frac{1 - e^{-(q-1)s}}{1 - e^{-\frac{(q-1)s}{\kappa}}} \\ &= (\alpha - \beta) \sum_{j=0}^{\kappa-1} e^{-(q-1)\frac{j-\kappa\beta}{\kappa}s} =: A_s(\varphi_\xi) \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

S obzirom da je $(\alpha - \beta)^{-1}$ prirodan broj lako zaključujemo

$$\mathcal{L}_x^{-1}[A_s(\varphi_\xi)] = (\alpha - \beta) \sum_{j=0}^{\kappa-1} \delta(x - (j(\alpha - \beta) - \beta)(q - 1)).$$

Iz Primera 2.7.2 sledi da je aproksimacija raspodele članova niza $\{\xi_t\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\beta(q-1) & (\alpha - 2\beta)(q-1) & \cdots & ((\kappa-1)(\alpha - \beta) - \beta)(q-1) \\ \kappa^{-1} & \kappa^{-1} & \cdots & \kappa^{-1} \end{pmatrix}}_{\kappa}.$$

Teorema je dokazana. \square

Napomena 8.1.2. Za $\alpha^{-1} \in \mathbb{N}_2 = \{2, 3, \dots\}$, $p_1 = 1$ dobijamo linearni model razmatran u (Popović, 2010a).

Razmotrićemo kako se aproksimira raspodela inovacija u slučaju kada je AB(p, q), $p \in \mathcal{P}(u, v)$, $q > 1$ njegova marginalna raspodela.

Teorema 8.1.4. Neka je $p \in \mathcal{P}(u, v)$, $q > 1$, $-1 < \beta^p \leq 0 \leq \alpha^p < 1$ i $\alpha > \beta$. Neka $AB_{p,q}AR^*(1)$ model

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \xi_t & s.v. \quad \frac{\alpha^p}{\alpha^p - \beta^p} =: p_2 \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & s.v. \quad \frac{-\beta^p}{\alpha^p - \beta^p} \end{cases}, \quad (8.1.7)$$

ima marginalnu $AB_{p,q}$ raspodelu. Kada je $\kappa(p) = (\alpha^p - \beta^p)^{-1} \in \mathbb{N}$ tada se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira raspodelom

$$f_\xi(p; x) = \frac{1}{\kappa(p)x} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{p(q-1)(j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)}{x^p}\right). \quad (8.1.8)$$

Dokaz: Na sličan način kao u Teoremi 8.1.4 dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(s) &= \frac{\varphi_X(s)}{p_2\varphi_X(\alpha s) - (1-p_2)\varphi_X(\beta s)} \\ &\sim \frac{1}{\kappa(p)} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \exp\left\{-p(q-1)(j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)s^p\right\} =: B_{s,p}^1(\varphi_\xi). \end{aligned}$$

Na osnovu Primera 2.7.1 lako dolazimo do

$$\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}^1(\varphi_\xi)] = \frac{1}{\kappa(p)} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} x^{-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{p(q-1)(j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)}{x^p}\right), \quad (8.1.9)$$

gde Wrightova hipergeometrijska funkcija konvergira pošto $p \in \mathcal{P}(u, v) \subset (0, 1)$. Nenegativnost funkcije $\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}^1(\varphi_\xi)]$ sledi iz Teoreme 2.6.1. Na osnovu dokaza Teoreme 7.1.2 lako zaključujemo da je

$$\int_0^\infty x^{-1} \Phi\left(0, -p; -T_j x^{-p}\right) dx = 1,$$

gde je $T_j = p(q-1)(j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)$ i $j = \overline{0, \kappa(p)-1}$, odakle sledi da je (8.1.8) normalizovana.

Teorema je dokazana. □

Neka je \mathbf{X}_0 početna vrednost niza $\{X_t\}$. Tada važi

Teorema 8.1.5. Neka je $\{\xi_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa gustinom (8.1.8). Ako je $-1 < \beta^p \leq 0 \leq \alpha^p < 1$, $\kappa(p) = (\alpha^p - \beta^p)^{-1} \in \mathbb{N}$, gde je $p \in \mathcal{P}(u, v)$, $q > 1$, i \mathbf{X}_0 iz $AB(p, q)$ tada (8.1.7) definiše stohastički niz sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom, specifikovanom sa (4.2.1).

U nekim specijalnim slučajevima moguće je odrediti disperziju inovacija čija se gустина raspodela aproksimira gустином (8.1.8).

Teorema 8.1.6. Neka je $N(\Delta) := \Delta(1/p - 1)$ prirodan broj takav da $\Delta > 0$ i $p \in \mathcal{P}^*(v)$, gde je

$$\mathcal{P}^*(v) = \mathcal{P}(1, v).$$

Tada

$$\begin{aligned} D\xi = & \frac{2p^{2/p-2}(q-1)^{2/p}}{\kappa(p)(2/p)!} \left\{ \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} p(j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)^{2/p} - \right. \\ & \left. - \frac{(2/p)!}{2\kappa(p)[(1/p)!]^2} \left(\sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} (j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)^{1/p} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Dokaz: U Primeru 2.8.1 pokazali smo da je Mellinova transformacija Wrightove hipergeometrijske funkcije

$$\int_0^\infty x^{\Delta-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) dx = \frac{T^{\Delta/p} \Gamma\left(-\frac{\Delta}{p}\right)}{p \Gamma(-\Delta)} \quad T > 0. \quad (8.1.11)$$

Pomoću (8.1.11) izračunaćemo $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Pošto je $\Delta > 0$, $p \in (0, 1)$ to je $-\Delta/p < -\Delta$. Uzastopnom primenom $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ zaključujemo da je

$$\Gamma(-\Delta) = (-1)^{N(\Delta)} (\Delta + 1)_{N(\Delta)} \Gamma(-\Delta - N(\Delta)).$$

Zatim, ako je $-\Delta/p = -\Delta - N(\Delta)$ tada (8.1.11) postaje

$$\int_0^\infty x^{\Delta-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{T}{x^p}\right) dx = \frac{T^{N(\Delta)+\Delta}}{(-1)^{N(\Delta)} p (\Delta + 1)_{N(\Delta)}}.$$

Kako je

$$N(1) = 1/p - 1, \quad N(2) = 2N(1) = 2/p - 2;$$

posle neposrednih izračunavanja dolazimo do

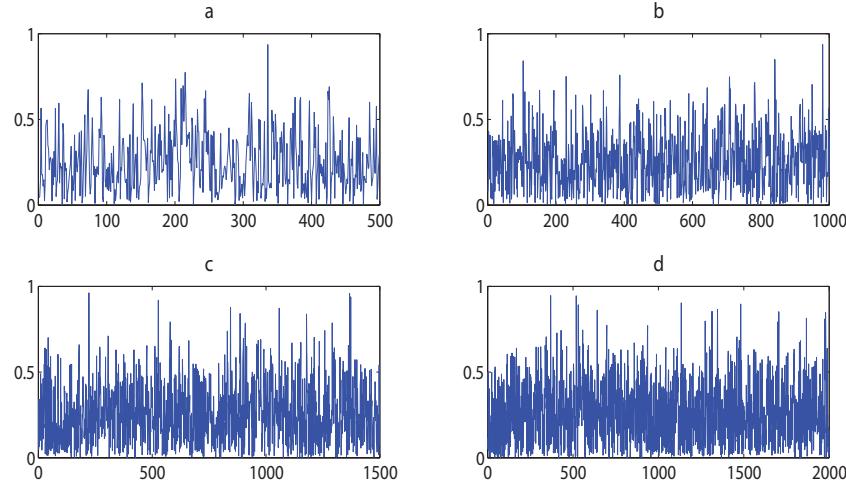
$$\begin{aligned} E\xi &= \frac{p^{1/p-1}(q-1)^{1/p}}{(-1)^{1/p-1} \kappa(p) (1/p)!} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} (j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)^{1/p} \\ E\xi^2 &= \frac{2p^{2/p-1}(q-1)^{2/p}}{\kappa(p) (2/p)!} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} (j(\alpha^p - \beta^p) - \beta^p)^{2/p}. \end{aligned}$$

Iz definicije disperzije lako dolazimo do (8.1.10).

Teorema je dokazana. \square

Primer 8.1.2. Na Slici 8.1.2 simulirane su trajektorije modela $AB_{p,q}AR^*(1)$, na uzorcima obima 500, 1000, 1500 i 2000, za $\alpha = 0.449$, $\beta = -0.2$, $p_1 = 0.4$, $p = 3.5$ i $q = 2.5$.

Slika 8.1.2: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



8.1.1 Neke karakteristike $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela

Teorema 8.1.7. Autokovarijansna funkcija sa korakom τ i autokorelaciona funkcija sa korakom $\tau > 0$, modela $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$, su redom

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= (p_i\alpha + \beta(1 - p_i))^{\lvert\tau\rvert} DX \\ \rho(\tau) &= (p_i\alpha + \beta(1 - p_i))^\tau,\end{aligned}$$

gde je $i \in \{1, 2\}$.

Dokaz: Modeli $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ su specijalni slučajevi $RCAR(1)$ modela kod koga je

$$A_t: \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ p_i & 1 - p_i \end{pmatrix}, \quad B_t \equiv 1,$$

gde su $p_i, i \in \{1, 2\}$ odgovarajuće verovatnoće. Tada tvrđenje sledi iz (6.1.3) i (6.1.4).

Teorema je dokazana. □

U slučaju kada je $\alpha > \beta$, odredićemo uslovnu funkciju raspodele $F(x|y) = \mathbb{P}\{X_t < x | X_{t-1} = y\}$ slučajne promenljive X_t , definisane $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modelima, pod uslovom $X_{t-1} = y$.

Interesantno je naglasiti da uslovne raspodele ne zavise od gustine marginalne raspodele.

Teorema 8.1.8. Za $\beta < \alpha$ uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X_t pod uslovom $X_{t-1} = y$ je

$$F(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ p_1 F_\xi(x - \beta y), & \beta y < x \leq \alpha y \\ p_1 F_\xi(x - \beta y) + (1 - p_1) F_\xi(x - \alpha y), & x > \alpha y \end{cases} . \quad (8.1.12)$$

Takođe je odgovarajuća gustina

$$f(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \text{ ili } x = \alpha y \\ p_1 f_\xi(x - \beta y), & \beta y < x < \alpha y \\ p_1 f_\xi(x - \beta y) + (1 - p_1) f_\xi(x - \alpha y), & x > \alpha y \end{cases} , \quad (8.1.13)$$

gde su f_ξ, F_ξ , redom, funkcije gustine i raspodele inovacionog niza $\{\xi_t\}$.

Dokaz:

Izračunajmo uslovnu verovatnoću za neko $h > 0$:

$$\pi = \mathbb{P}\{X_t < x | y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} = \frac{\mathbb{P}\{X_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}{\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}} .$$

Brojilac u prethodnom izrazu se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}\pi_B &= p_1 \mathbb{P}\{\beta X_{t-1} + \xi_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &\quad + (1 - p_1) \mathbb{P}\{\alpha X_{t-1} + \xi_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq \beta(y - h) \\ p_1 \int_{y-h}^{x/\beta} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & \beta(y - h) < x \leq \beta(y + h) \\ p_1 \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt, & \beta(y + h) < x \leq \alpha(y - h) \\ p_1 \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt \\ + (1 - p_1) \int_{y-h}^{x/\alpha} f(t) dt \int_0^{x-\alpha y} f_\xi(t) dt, & \alpha(y - h) < x \leq \alpha(y + h) \\ p_1 \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f_\xi(t) dt \\ + (1 - p_1) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\alpha y} f_\xi(t) dt, & x > \alpha(y + h) \end{cases},\end{aligned}$$

gde je f gustina slučajne promenljive X_t . Kada $h \rightarrow 0$ imamo

$$\pi_B \sim \begin{cases} 0, & x < \beta y \\ p_1 h f(y) [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & x = \beta y \\ p_1 2h f(y) [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & \beta y < x < \alpha y \\ p_1 2h f(y) [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)] \\ + (1 - p_1) h f(y) [F_\xi(x - \alpha y) - F_\xi(0)], & x = \alpha y \\ p_1 2h f(y) [F_\xi(x - \alpha y) - F_\xi(0)] \\ + (1 - p_1) 2h f(y) [F_\xi(x - \alpha y) - F_\xi(0)], & x > \alpha y \end{cases},$$

i $\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \xrightarrow{\text{s.s.}} 2h f(y)$. Odavde sledi da je

$$\pi = \begin{cases} 0, & x \leq \beta y \\ p_1 [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & \beta y < x < \alpha y \\ p_1 [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)] \\ + (1 - p_1) [F_\xi(x - \alpha y) - F_\xi(0)], & x > \alpha y \end{cases}.$$

Imajući na umu da je raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ određena sa (8.1.2) ili (8.1.8) nalazimo da je $F_\xi(0) = 0$ skoro sigurno. Na ovaj način smo dokazali (8.1.12), dok je (8.1.13) direktna posledica prethodnog.

Teorema je dokazana. \square

Sledeće tvrđenje je posledica definicije uslovne gustine data izrazom (8.1.11).

Posledica 8.1.1. Uslovna funkcija verodostojnosti na uzorku (x_1, \dots, x_n) je

$$\mathsf{L} = \prod_{t=2}^n (p_1 f_\xi(x_t - \beta y))^{1_{\{\beta y < x_t < \alpha y\}}} \cdot \prod_{t=2}^n (p_1 f_\xi(x_t - \beta y) + (1 - p_1) f_\xi(x_t - \alpha y))^{1_{\{x_t > \alpha y\}}}.$$

Teorema 8.1.9. Stohastički nizovi $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ nisu vremenski invarijantni.

Dokaz: Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) je

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t, X_{t-1}}(s_1, s_2) &= \mathbb{E}(e^{-s_1 X_t - s_2 X_{t-1}}) = \\ &= p_1 \varphi_X(s_1 \alpha + s_2) \varphi_\xi(s_1) + (1 - p_1) \varphi_X(s_1 \beta + s_2) \varphi_\xi(s_1). \end{aligned}$$

Pošto Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) nije simetrična u odnosu na s_1 i s_2 , razmatrani stohastički nizovi nisu vremenski invarijantni.

Teorema je dokazana. \square

8.1.2 Ocenjivanje parametara $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela

Parametre modela razmatranog u ovoj glavi ocenićemo UNK metodom. U dokazu Teoreme 8.1.7 pokazano je da je model (8.1.1) specijalan slučaj modela (6.1.2). Takođe iz Teoreme 6.1.1 sledi da je model (8.1.1) stacionaran i ergodičan. Lako se može pokazati da su momenti četvrtog i osmog reda modela (8.1.1) konačni, pa su zadovoljeni i uslovi Teorema 6.2.5, 6.2.6 i 6.2.7 pa su ocene dobijene UNK metodom postojane i asimptotski normalne.

U slučaju modela (8.1.1), odnosno (8.1.6), imamo da je $\mathbb{E}A_t = a_1 = p_i\alpha + (1 - p_i)\beta$ i $\mathbb{E}A_t^2 = a_2 = p_i\alpha^2 + (1 - p_i)\beta^2$, gde je $i \in \{1, 2\}$. S obzirom da nam UNK ne daje dovoljno jednačina za ocenu svih nepoznatih parametara, moramo prepostaviti da su neki parametri poznati. Prvo ćemo razmotriti $ABAR(1)$ model i tada ćemo razlikovati tri slučaja:

Slučaj I Neka je parametar p_1 poznat. Tada je

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{a}_1 - (1 - p_1)\hat{\beta}}{p_1} \quad (8.1.14)$$

gde je $\hat{\beta}$ koren kvadratne jednačine

$$(1 - p_1)\beta^2 - 2\hat{a}_1(1 - p_1)\beta + \hat{a}_1^2 - \hat{a}_2 p_1 = 0, \quad (8.1.15)$$

gde su \hat{a}_1 , odnosno \hat{a}_2 ocene dobijene formulama (6.2.6), odnosno (6.2.14). Pošto je diskriminanta prethodne kvadratne jednačine

$$4p_1(1 - p_1)(\hat{a}_2 - \hat{a}_1^2) = 4p_1(1 - p_1)DA_1 \geq 0,$$

zaključujemo da su njena rešenja realna.

Slučaj II Neka je poznat parametar α . Tada je

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\hat{a}_1 - p_1\alpha}{1 - p_1}, \\ \hat{p}_1 &= \frac{\hat{a}_2 - \hat{a}_1^2}{\alpha^2 + \hat{a}_2 - 2\hat{a}_1 + \alpha}. \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

Slučaj III Neka je poznat parametar β . Tada je

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\hat{a}_1 - (1 - \hat{p}_1)\beta}{\hat{p}_1}, \\ \hat{p}_1 &= 1 - \frac{\hat{a}_2 - \hat{a}_1^2}{\beta^2 + \hat{a}_1 - 2\hat{a}_2\beta}. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Kod $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela situacija je nešto komplikovanija, jer se parametri ocenjuju rešavanjem nelinearnog sistema jednačina

$$\begin{aligned} \alpha^{p+1} - \beta^{p+1} &= \hat{a}_1(\alpha^p - \beta^p), \\ \alpha^{p+2} - \beta^{p+2} &= \hat{a}_2(\alpha^p - \beta^p). \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

S obzirom da imamo dve jednačine, uvek ćemo pretpostavljati da je parametar p poznat.

Numerički primeri

1. $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$

U cilju ocenjivanja nepoznatih parametara $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela formiraćemo matrice kao u Poglavlju 7.4.2. Za ocenjivanje nepoznatih parametara $ABAR(1)$ modela, u zavisnosti od poznatih parametara, koristićemo jedan od sistema jednačina (8.1.14)–(8.1.17). Pokazali smo da parametri p i q zadovoljavaju uslov (8.1.3). Za potrebe simulacija smatrali smo da $p \in \mathbb{N}_2$, čime se ograničenje (8.1.3) svodi na

$$\prod_{k=1}^{p-1} (q+k) = \frac{\eta\mu^p(1-\alpha^p)(1-\beta^p) + \nu(\mu^p - \beta^p)(\alpha^p - \mu^p)}{(1-\mu^p)(\mu^p - \alpha^p\beta^p)}.$$

Pretpostavimo da su vrednosti parametra p poznate. Vrednost parametra q dobijamo rešavanjem prethodne nelinearne jednačine. Parametre skaliranja birali smo na slučajan način zadovoljavajući uslov da su oni pozitivni brojevi. U cilju sprovođenja simulacija pretpostavili smo da je parametar p_1 poznat.

U slučaju simulacija za $AB_{p,q}AR^*(1)$ model pretpostavili smo da je parametar p poznat (ne neophodno prirodan broj), pa ćemo sistem jednačina (8.1.18) rešavati numerički, primenom $BBsolve()$ funkcije (Varadhan i Gilbert, 2009).

Iz Tabela A.4 i A.5 sledi da, kao i u prethodnom slučaju, metod uslovnih najmanjih kvadrata, povećanjem obima uzorka postiže manju standardnu devijaciju i daje tačniju ocenu. Ocenjujući parametre aproksimirane beta raspodele metodom momenata $B(p, q)$ raspodele, možemo izvesti zaključak sličan onome u Poglavlju 7.4.2. Drugim rečima, vrednosti parametara ove dve raspodele su veoma bliske, pa možemo govoriti da $AB(p, q)$ dobro aproksimira $B_2(p, q)$ raspodelu.

2. Veza sa inverznom gama raspodelom

Generisatićemo matrice na osnovu modela (8.1.1) i (8.1.6) istih dimenzija kao u tački 3. Poglavlja 7.4.2. Na osnovu rezultata Teoreme 5.1.1 odredićemo nove matrice za čije kolone ćemo pretpostaviti da su uzorci iz aproksimirane inverzne gama raspodele.

Pretpostavili smo da je parametar p aproksimirane beta raspodele jednak 0.5, dok parametar q uzima vrednosti iz skupa $U = \{20, 40, 60, 80\}$. Za svaku od kombinacija vrednosti parametara p i q generisatićemo, Ridoutovim algoritmom, uzorke iz $AB(p, q)$ raspodele.

Ova pretpostavka počiva na rezultatima iz Poglavlja 5.2.1, u kome se pokazuje da je aproksimirana inverzna gama dobra aproksimacija inverzne gama raspodele.

Parametre $AIG(a, b)$ raspodele ocenićemo metodom maksimalne verodostojnosti. Cilj ovog dela simulacija jeste empirijska provera tvrđenja Teoreme 5.1.1.

S obzirom da uzorak generisan modelima (8.1.1) i (8.1.6) nije prost slučajan, za ocenjivanje odgovarajućih parametara trebalo bi koristiti uslovnu funkciju verodostojnosti iz Posledice 8.1.1. Međutim, komplikovanost funkcije gustine raspodele inovacionog niza, kao i nedostatak odgovarajućih numeričkih algoritama nas u tome sprečavaju. Vremenom će i taj problem biti rešen. Zbog svega navedenog, a samo u cilju empirijske provere pomenute teoreme, smatraćemo da je generisani uzorak prost slučajan i primenićemo ocene maksimalne verodostojnosti iz Poglavlja 5.1.

Problem optimizacije, koji se ovde javlja, rešićemo primenom $BBoptim()$ funkcije (Varadhan i Gilbert, 2009). Napomenimo da ćemo digama funkciju numerički evaluirati. Važno je istaći da smo prilikom optimizacije tražili minimum funkcije $-\ln L$, gde je $\ln L$ dat izrazom (5.1.6). Ovako smo odredili maksimum funkcije $\ln L$.

Rezultati prezentovani u Tabeli A.6 su u potpunosti očekivani. Naime, imajući u vidu rezultat Teoreme 5.1.1, realno je da, porastom vrednosti parametra q aproksimirane beta raspodele, dobijamo uzorce na kojima su ocene parametara aproksimirane inverzne gama raspodele blizu teorijskim vrednostima. Na ovaj način, pod datim uslovima, iz modela (8.1.1) i (8.1.6) mogu se dobiti uzorci sa marginalnom aproksimiranom inverznom gama raspodelom.

8.2 Definicija $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela

Model $ARAB(1)$ definišemo kao

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} & \text{s.v. } \alpha^p \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } 1 - \alpha^p \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1). \quad (8.2.1)$$

Naglasimo samo da je stacionarnost modela obezbeđena pretpostavkom da su $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Teorema 8.2.1. *Neka je dat $ARAB(1)$ model sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom takvom da je $p > 1$.*

Ako je $\alpha^p < \beta^p$ i $q = 1$ tada se raspodela inovacionog niza $\{\xi_t\}$ aproksimira mešavinom dve neprekidne raspodele

$$\xi_t = \begin{cases} K_t & s.v. \\ \alpha K_t & s.v. \end{cases} \quad \begin{aligned} &\frac{1 - \beta^p}{\beta^p - \alpha^p} \\ &\frac{1}{1 - \alpha^p}, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

gde je $\{K_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih čija je gustina (4.2.5).

Dokaz: U dokazu ove teoreme koristićemo pretpostavke (i)–(iv), kao i osobina Laplaceove transformacije iz Poglavlja 2.7. Naime, imamo

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(s) &= Ee^{-sX_t} = \alpha^p Ee^{-s\alpha X_{t-1}} + (1 - \alpha^p) Ee^{-s(\beta X_{t-1} + \xi_t)} \\ &= \alpha^p \varphi_{X_{t-1}}(\alpha s) + (1 - \alpha^p) \varphi_{X_{t-1}}(\beta s) \varphi_{\xi_t}(s), \end{aligned}$$

odnosno

$$\varphi_X(s) = \alpha^p \varphi_X(\alpha s) + (1 - \alpha^p) \varphi_X(\beta s) \varphi_\xi(s).$$

Koristeći aproksimaciju (4.2.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(s) &= \frac{\varphi_X(s) - \alpha^p \varphi_X(\alpha s)}{(1 - \alpha^p) \varphi_X(\beta s)} \sim \frac{\frac{1}{s^p + q} - \alpha^p \frac{1}{\alpha^p s^p + q}}{(1 - \alpha^p) \frac{1}{\beta^p s^p + q}} \\ &= \frac{q(\beta^p s^p + q)}{(s^p + q)(\alpha^p s^p + q)} =: A_s(\varphi_\xi) \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Prethodni razlomak možemo napisati u obliku

$$A_s(\varphi_\xi) = \frac{q(1 - \beta^p)}{1 - \alpha^p} \frac{1}{s^p + q} + \frac{q(\beta^p - \alpha^p)}{1 - \alpha^p} \frac{1}{\alpha^p s^p + q}.$$

Pošto je $\alpha^p < \beta^p$ to znači da se koeficijenti $\frac{q(1 - \beta^p)}{1 - \alpha^p}$ i $\frac{q(\beta^p - \alpha^p)}{1 - \alpha^p}$ mogu smatrati verovatnoćama. Imajući na umu obrazloženje iz Teoreme 8.1.1 ne možemo koristiti uslov da je $\varphi_\xi(0) = 1$, pa ćemo odrediti q takvo da je

$$q \left(\frac{1 - \beta^p}{1 - \alpha^p} + \frac{\beta^p - \alpha^p}{1 - \alpha^p} \right) = 1,$$

odakle sledi da je $q = 1$.

Određujući inverznu Laplaceovu transformaciju izraza $A_s(\varphi_\xi)$ lako zaključujemo da se raspodela inovacija aproksimira mešavinom dve raspodele sa gustinom (4.2.5).

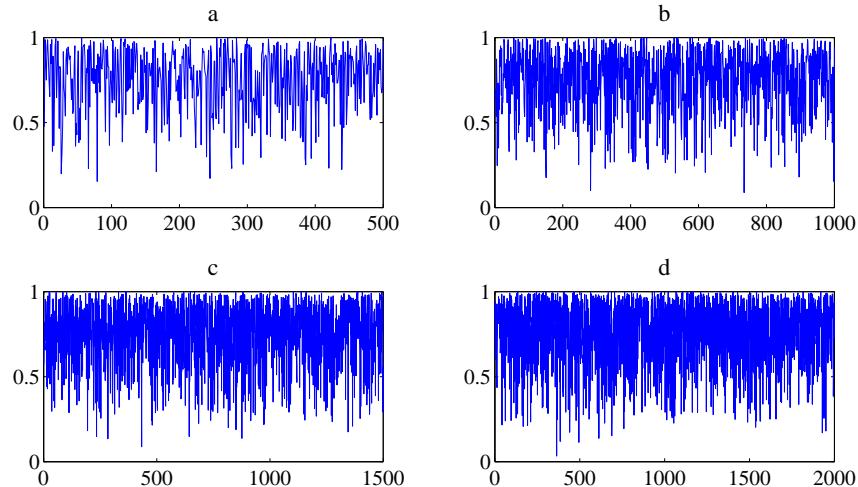
Teorema je dokazana. \square

Neka je \mathbf{X}_0 početna vrednost niza $\{X_t\}$. Tada važi

Teorema 8.2.2. *Neka je $\{\xi_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih definisan sa (8.2.2). Ako je $\alpha^p < \beta^p$ i ako je \mathbf{X}_0 iz $AB(p, 1)$, $p > 1$ tada (8.2.1) definiše stohastički niz sa marginalnom $AB(p, 1)$ raspodelom, čija je gistica (4.2.5).*

Primer 8.2.1. Na Slici 8.2.1 simulirane su trajektorije modela $ARAB(1)$, uzorcima obima 500, 1000, 1500 i 2000, za $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $p = 3$ i $q = 1$.

Slika 8.2.1: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



U slučaju $ARAB(1)$ modela smatrali smo da parametri $AB(p, q)$ raspodele zadovoljavaju uslov $p > 1$ i $q = 1$. U nastavku ćemo proučiti model $AR_{p,q}^*AB(1)$ definisan sa (8.2.1), kada je $p \in (0, 1]$.

Kao i u slučaju linearog modela razmatraćemo dva slučaja.

Slučaj I Neka je $p = 1$. Tada se model (8.2.1) svodi na

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} & \text{s.v. } \alpha \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } 1 - \alpha, \end{cases} \quad (8.2.3)$$

gde su $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Teorema 8.2.3 (Popović i ostali, 2010). *Neka je dat $AR_{1,q}^*AB(1)$ model. Ako je $q > 1$ i $\kappa = (1 - \alpha)/\beta \in \mathbb{N}$ tada se raspodela inovacija ξ_t aproksimira uniformnom diskretnom raspodelom*

$$\mathbb{P}\{\xi_t = (\alpha + j\beta)(q - 1)\} = \frac{1}{\kappa} \quad j = \overline{0, \kappa - 1}.$$

Dokaz: Sledеći koraci su direktna posledica definicije modela, prepostavki **(i)**–**(iv)** i osobina Laplaceove transformacije . Naime, važi

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(s) &= \mathbb{E}e^{-sX_t} = \alpha \mathbb{E}e^{-s\alpha X_{t-1}} + (1 - \alpha) \mathbb{E}e^{-s(\beta X_{t-1} + \xi_t)} \\ &= \alpha \varphi_{X_{t-1}}(\alpha s) + (1 - \alpha) \varphi_{X_{t-1}}(\beta s) \varphi_{\xi_t}(s), \end{aligned}$$

odnosno

$$\varphi_X(s) = \alpha \varphi_X(\alpha s) + (1 - \alpha) \varphi_X(\beta s) \varphi_{\xi}(s).$$

Koristeći aproksimaciju (4.2.2) dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(s) &= \frac{\varphi_X(s) - \alpha \varphi_X(\alpha s)}{(1 - \alpha) \varphi_X(\beta s)} \sim \frac{\beta}{1 - \alpha} \frac{1 - e^{-(q-1)s} - (1 - e^{-\alpha(q-1)s})}{1 - e^{-\beta(q-1)s}} \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \frac{e^{-\alpha(q-1)s} - e^{-(q-1)s}}{1 - e^{-\beta(q-1)s}} =: A_s(\varphi_{\xi}) \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Koristeći razvoj eksponencijalne funkcije u Maclaurinov red i rezultat iz Primera 2.7.2 dolazimo do inverzne Laplaceove transformacije izraza $A_s(\varphi_{\xi})$. Dakle,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^{-1}[A_s(\varphi_{\xi})] &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \mathcal{L}_x^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-(\alpha+n\beta)(q-1)s} \right\} \right] \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{L}_x^{-1}[e^{-(\alpha+n\beta)(q-1)s}] \right\} \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \delta(x - (\alpha + n\beta)(q - 1)) \right\}. \end{aligned}$$

Imajući na umu da je $(1 - \alpha)/\beta$ prirodan broj, na primer κ , možemo zaključiti da je

$$\mathcal{L}_x^{-1}[A_s(\varphi_{\xi})] = \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{\kappa-1} \delta(x - (\alpha + n\beta)(q - 1)).$$

Lako zaključujemo da se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira uniformnom diskretnom raspodelom

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(q-1) & (\alpha+\beta)(q-1) & \cdots & (\alpha+(\kappa-1)\beta)(q-1) \\ \kappa^{-1} & \kappa^{-1} & \cdots & \kappa^{-1} \end{pmatrix}}_{\kappa}. \quad (8.2.4)$$

Teorema je dokazana. \square

Napomena 8.2.1. Isti model (8.2.3), ali sa marginalnom $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelom pro- učavan je u radu (Ristić i Popović, 2002). Tamo je pokazano da se raspodela inovacija poklapa sa uniformnom diskretnom raspodelom (8.2.4) u slučaju kada je $q = 2$.

Neka je \mathbf{X}_0 početna vrednost niza $\{X_t\}$. Tada važi

Teorema 8.2.4. Neka je $\{\xi_t\}$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa raspodelom (8.2.4). Ako je $\alpha, \beta, p \in (0, 1)$, $q > 1$ i \mathbf{X}_0 je iz $AB_{1,q}$ raspodele, tada relacija (8.2.3) definiše stohastički niz $\{X_t\}$ čija je marginalna raspodela aproksimirana beta raspodela.

Napomena 8.2.2. Iz (4.1.12) lako zaključujemo da

$$X_t : \text{Kum}_2(p, q) \stackrel{d}{=} X_t^{1/p} : \text{B}_2(1, q),$$

čime je rezultat iz prethodne teoreme povezan sa Kumaraswamyjevom $\text{Kum}_2(p, q)$, $q > 1$ raspodelom .

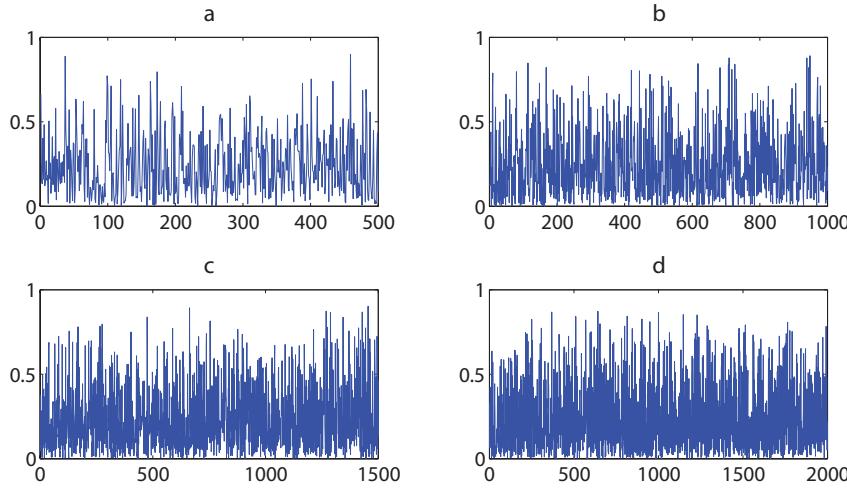
Primer 8.2.2. Na Slici 8.2.2 prikazane su simulirane trajektorije (videti Sliku 8.2.2) modela $ARAB(1)$ za $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $p = 1$ i $q = 3$.

Slučaj II Neka je $p \in (0, 1)$. Odredićemo aproksimaciju raspodele inovacija modela (8.2.1). U tom cilju gustina $AB(p, q)$ raspodele je funkcija (4.2.4).

Teorema 8.2.5 (Popović i ostali, 2010). Neka je dat $AR_{p,q}AB(1)$ model sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom . Ako je $p \in (0, 1)$, $q > 1$, $A = \alpha^p$, $B = \beta^p$ i $\kappa(p) = (1 - A)/B \in \mathbb{N}$. Tada se raspodela inovacija $\{\xi_t\}$ aproksimira raspodelom čija je gustina

$$f_\xi(p; x) = \frac{x^{-1}}{\kappa(p)} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{p(q-1)(A+Bj)}{x^p}\right). \quad (8.2.5)$$

Slika 8.2.2: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



Dokaz: Do Laplaceove transformacije inovacija modela (8.2.1) dolazimo na isti način kao i u prethodnim teoremmama ovog poglavlja. Koristeći aproksimaciju (4.2.1) imamo

$$\varphi_\xi(s) = \frac{\varphi_X(s) - A\varphi_X(As)}{(1-A)\varphi_X(Bs)} \sim \frac{B}{1-A} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} \exp\{-p(q-1)(A+jB)s^p\}. \quad (8.2.6)$$

Neka je $B_{s,p}(\varphi_\xi)$ desna strana izraza (8.2.6). Iz Primera 2.7.1 sledi da je

$$\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}(\varphi_\xi)] = \frac{B}{1-A} \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} x^{-1} \Phi\left(0, -p; -\frac{p(q-1)(A+Bj)}{x^p}\right).$$

Ova Wrightova hipergeometrijska funkcija je dobro definisana pošto red (2.6.1) konvergira, jer je $p \in (0, 1)$.

Nenegativnost funkcije $\mathcal{L}_x^{-1}[B_{s,p}(\varphi_\xi)]$ sledi na osnovu Teoreme 2.6.1.

Na osnovu dokaza Teoreme 7.1.2 sledi da je

$$\int_0^\infty x^{-1} \Phi(0, -p; -Tx^{-p}) dx = 1,$$

odakle sledi da je (8.2.5) normalizovana.

Teorema je dokazana. □

Ako prepostavimo da $p \in \mathcal{P}^*(v)$, gde je skup $\mathcal{P}^*(v)$ uveden u Teoremi 8.1.6.

Tada važi

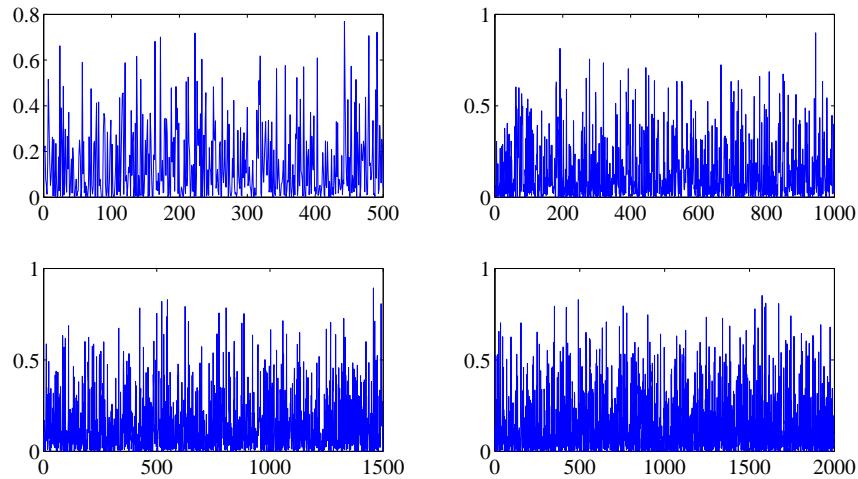
Teorema 8.2.6. Neka je $N(\Delta) := \Delta(1/p - 1) \in \mathbb{N}$, gde je $\Delta > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} D\xi = & \frac{2p^{2/p-2}(q-1)^{2/p}}{\kappa(p)(2/p)!} \left\{ \sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} p(\alpha^p + j\beta^p)^{2/p} - \right. \\ & \left. - \frac{(2/p)!}{2\kappa(p)[(1/p)!]^2} \left(\sum_{j=0}^{\kappa(p)-1} (\alpha^p + j\beta^p)^{1/p} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dokaz: Izvodi se na isti način kao dokaz Teoreme 8.1.6. \square

Primer 8.2.3. Na uzorcima obima 500, 1000, 1500 i 2000, simuliraćemo trajektorije (videti Sliku 8.2.3) modela $AR_{p,q}AB^*(1)$ za $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $p = 0.5$ i $q = 3$.

Slika 8.2.3: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



8.2.1 Neke karakteristike $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela

Teorema 8.2.7. Autokovariansna funkcija sa korakom τ i autokorelaciona funkcija sa korakom $\tau > 0$, modela $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$, su redom

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= (\alpha^{p+1} + \beta(1 - \alpha^p))^{|\tau|} DX \\ \rho(\tau) &= (\alpha^{p+1} + \beta(1 - \alpha^p))^{\tau}.\end{aligned}$$

Dokaz: Modeli $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ su specijalni slučaj $RCAR(1)$ modela kod koga je

$$A_t: \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^p & 1 - \alpha^p \end{pmatrix}, \quad B_t: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^p & 1 - \alpha^p \end{pmatrix}.$$

Tada tvrđenje sledi iz (6.1.3) i (6.1.4). \square

U slučaju kada je $\alpha > \beta$, odredićemo uslovnu funkciju raspodele $F(x|y) = \mathbb{P}\{X_t < x | X_{t-1} = y\}$ slučajne promenljive X_t , definisane $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modelima, pod uslovom $X_{t-1} = y$.

Interesantno je naglasiti da uslovne raspodele ne zavise od gustine marginalne raspodele.

Teorema 8.2.8. Za $\beta < \alpha$ uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive $\{X_t\}$ pod uslovom $X_{t-1} = y$ je

$$F(x|y) = \begin{cases} 0, & x < \alpha y \\ \alpha^p, & \alpha y < x \geq \beta y \\ \alpha^p + (1 - \alpha^p) F_\xi(x - \beta y), & x > \beta y \end{cases}. \quad (8.2.7)$$

Takođe je odgovarajuća gustina

$$f(x|y) = \begin{cases} 0, & x < \beta y \\ (1 - \alpha^p) f_\xi(x - \beta y), & x \geq \alpha y \end{cases}, \quad (8.2.8)$$

gde su f_ξ, F_ξ , redom, funkcije gustine i raspodele inovacija $\{\xi_t\}$.

Dokaz:

Izračunajmo uslovnu verovatnoću za neko $h > 0$:

$$\pi = \mathbb{P}\{X_t < x | y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} = \frac{\mathbb{P}\{X_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}{\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}.$$

Brojilac u prethodnom izrazu se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}\pi_B &= \alpha^p \mathsf{P}\{\alpha X_{t-1} < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &\quad + (1 - \alpha^p) \mathsf{P}\{\beta X_{t-1} + \xi_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq \alpha(y - h) \\ \alpha^p \int_{y-h}^{x/\alpha} f(t) dt, & \alpha(y - h) < x \leq \alpha(y + h) \\ \alpha^p \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt, & \alpha(y + h) < x \leq \beta(y - h) \\ \alpha^p \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt + (1 - \alpha^p) \int_{y-h}^{x/\beta} f(t) dt \int_{y+h}^{x-\beta y} f(t) dt, & \beta(y - h) < x \leq \beta(y + h) \\ \alpha^p \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt + (1 - \alpha^p) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt \int_0^{x-\beta y} f(t) dt, & x > \beta(y + h), \end{cases},\end{aligned}$$

gde je f gustina slučajne promenljive X_t . Kada $h \rightarrow 0$ imamo

$$\pi_B \sim \begin{cases} 0, & x < \alpha y \\ \alpha^p \left(\frac{x}{\alpha} - y + h \right), & x = \alpha y \\ 2h\alpha^p f(y) & \alpha y < x < \beta y \\ 2h\alpha^p f(y) + (1 - \alpha^p) \left(\frac{x}{\beta} - y + h \right) f(y) [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & x = \beta y \\ 2h\alpha^p f(y) + (1 - \alpha^p) 2h f(y) [F_\xi(x - \beta y) - F_\xi(0)], & x > \beta y \end{cases}.$$

Uzimajući u obzir da je $\mathsf{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \xrightarrow{\text{s.s.}} 2h f(y)$ dobijamo

$$F(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha y \\ \alpha^p, & \alpha y < x \leq \beta y \\ \alpha^p + (1 - \alpha^p) F_\xi(x - \beta y), & x > \beta y \end{cases}.$$

Imajući na umu da je raspodela inovacija ξ_t odredena sa (8.2.2) ili (8.2.5) nalazimo da je $F_\xi(0) = 0$ skoro sigurno. Na ovaj način smo dokazali (8.2.7), dok je (8.2.8) direktna posledica prethodnog.

Teorema je dokazana. □

Sledeće tvrđenje je direktna posledica prethodne teoreme.

Posledica 8.2.1. Uslovna funkcija verodostojnosti na uzorku (x_1, \dots, x_n) je

$$\mathsf{L} = \prod_{t=2}^n (\alpha^p)^{1_{\{\alpha y < x_t < \beta y\}}} \cdot [(1 - \alpha^p) f_\xi(x_t - \beta y)]^{1_{\{x_t > \beta y\}}}.$$

Teorema 8.2.9. Stohastički nizovi $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ nisu vremenski invarijantni.

Dokaz: Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) je za model $ARAB(1)$

$$\begin{aligned}\varphi_{X_t, X_{t-1}}(s_1, s_2) &= \mathbb{E}(e^{-s_1 X_t - s_2 X_{t-1}}) = \\ &= \alpha^p \varphi_X(s_1 \alpha) + (1 - \alpha^p) \varphi_X(s_1 \beta + s_2) \varphi_\xi(s_1).\end{aligned}$$

Pošto Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) nije simetrična u odnosu na s_1 i s_2 , razmatrani stohastički niz nije vremenski invarijantan. Na sličan način se izvodi tvrđenje u slučaju $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela.

Teorema je dokazana. \square

Napomena 8.2.3. Stacionarnost i ergodičnost $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela su direktna posledica Teoreme 6.1.1.

8.2.2 Ocenjivanje parametara $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela

Već smo primetili da su $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modeli specijalni slučajevi modela (6.1.2). Zajednička raspodela vektora (A_t, B_t) je

A_t	α	β
B_t		
0	α^p	0
1	0	$1 - \alpha^p$

odakle se može zaključiti da su slučajni koeficijenti A_t i B_t zavisni. U ovom slučaju ako želimo da primenimo UNK metodu za ocenjivanje parametara moramo koristiti formule (6.2.6), (6.2.18) i (6.2.19). Za njihovu primenu morali bi imati poznato matematičko očekivanje inovacionog niza. S obzirom da njegova gustina ima oblik Wrightove hipergeometrijske funkcije trebalo bi primeniti numeričko evaluiranje ove specijalne funkcije. Međutim, taj algoritam još uvek nije razvijen. Postoje neki

nagoveštaji da bi se to moglo dogoditi tokom 2011. godine. Zbog svega ovoga, parametre ćemo oceniti kombinacijom Yule–Walkerove metode i metode minimalnog količnika.

Teorema 8.2.10. *Ako je $\beta > \alpha$, tada je*

$$\hat{\alpha} = \min_{2 \leq t \leq n} \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\}$$

postojana ocena parametra α .

Dokaz: Za dokaz postojanosti ocene, potrebno je pokazati da $\hat{\alpha}$ teži u verovatnoći ka α . Kako je

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \min \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} : t = \overline{2, n} \right\} > \alpha \right\} &= \mathbb{P}\{X_2 > \alpha X_1, \dots, X_{n-1} > \alpha X_{n-2}, X_n > \alpha X_{n-1}\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_2 = \beta X_1 + \xi_2, \dots, X_n = \beta X_{n-1} + \xi_n\} = \\ &= P\{(A_2, B_2) = (\beta, 1), \dots, (A_n, B_n) = (\beta, 1)\} = (1 - \alpha^p)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

odakle sledi

$$\mathbb{P} \left\{ \min \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} : t = \overline{2, n} \right\} = \alpha \right\} = 1.$$

Iz poslednje jednakosti zaključujemo da je $\tilde{\alpha}$ postojana ocena parametra α . \square

Primenjujući Yule–Walkerov metod za ocenjivanje parametara iz (6.2.37) sledi da je $\mathbb{E} A_t = \alpha^{p+1} + \beta(1 - \alpha^p) = \rho(1)$, gde je ocena autokorelace funkcije sa korakom 1 data izrazom (6.2.38). Dakle, iz poslednje jednakosti se dobija

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{\alpha}^{p+1}}{1 - \hat{\alpha}^p}. \quad (8.2.10)$$

U Poglavlju 6.2.3 pokazano je da su ocene dobijene Yule–Walkerovom metodom asimptotski normalne. Imajući u vidu obrazloženje iz Poglavlja 7.4.2, parametre $AB(p, q)$ raspodele možemo oceniti pomoću (7.4.4).

Numerički primeri

1. $AR_{p,q}AB(1)$ model

Simulacije ćemo izvesti za $AR_{p,q}AB(1)$ model. U cilju ocenjivanja nepoznatih parametara postupićemo na isti način kao u prethodnim slučajevima. Parametar p

aproksimirane beta raspodele, koji figuriše u definiciji modela, ocenićemo metodom momenata, odnosno primenom formula (7.4.4). Zatim, čemo metodom minimalnog količnika oceniti parametar α , dok čemo parametar β oceniti pomoću (8.2.10). Iz Tabele A.7 možemo zaključiti da metod minimalnog količnika veoma brzo (povećanjem obima uzorka), daje tačno rešenje. Takođe, standardna devijacija ocene parametra β se brzo smanjuje povećanjem obima uzorka. Iz ocena parametara p i q možemo zaključiti da je i u ovom slučaju, aproksimirana beta raspodela dobra aproksimacija beta raspodele.

2. Veza sa inverznom gama raspodelom

Ovaj deo simulacija sprovećemo potpuno analogno simulaciji u Poglavlju 8.1.2 u tački 3. Razmatrajući Tabelu A.8 možemo izvući isti zaključak kao i u slučaju $ARAB(1)$ modela.

8.3 Definicija $GABAR(1)$ modela

Model koji čemo sada uvesti predstavlja uopštenje prethodno uvedih modela kod kojih je (4.2.4) gustina aproksimirane beta raspodele. Otuda se u nazivu modela pojavljuje slovo "G" od engleske reči "generalize" što znači uopštenje. $GABAR(1)$ model definiše se na sledeći način:

$$X_t = \begin{cases} \xi_t & \text{s.v. } p_0 \\ aX_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } p_1 \\ bX_{t-1} + \xi_t & \text{s.v. } p_2 \\ cX_{t-1} & \text{s.v. } p_3 \end{cases}, \quad (8.3.1)$$

gde su pored uobičajenih (i)–(iv) ispunjene i sledeće pretpostavke:

- (v) $c^p = p_3/(1 - p_0)$,
- (vi) $0 \leq p_i \leq 1, i \in \{0, 1, 2, 3\}, p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_3 \neq 1$.

Teorema 8.3.1. *Neka je dat $GABAR(1)$ model (8.3.1) sa marginalnom $AB(p, q)$ raspodelom. Ukoliko su sve verovatnoće $p_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, različite od nule tada i inovacije modela (8.3.1) imaju, takođe, $AB(p, q)$ raspodelu.*

Dokaz: Koristeći definiciju modela (8.3.1), pretpostavke **(i)–(v)**, kao i osobine Laplaceove transformacije dobijamo

$$\varphi_X(s) = p_0\varphi_X(as)\varphi_\xi(s) + p_1\varphi_X(bs)\varphi_\xi(s) + p_2\varphi_\xi(s) + p_3\varphi_X(cs).$$

Neka je $\mathcal{T}(s) = 1 - e^{-p(q-1)s^p}$. Koristeći aproksomaciju (4.2.1) dobijamo

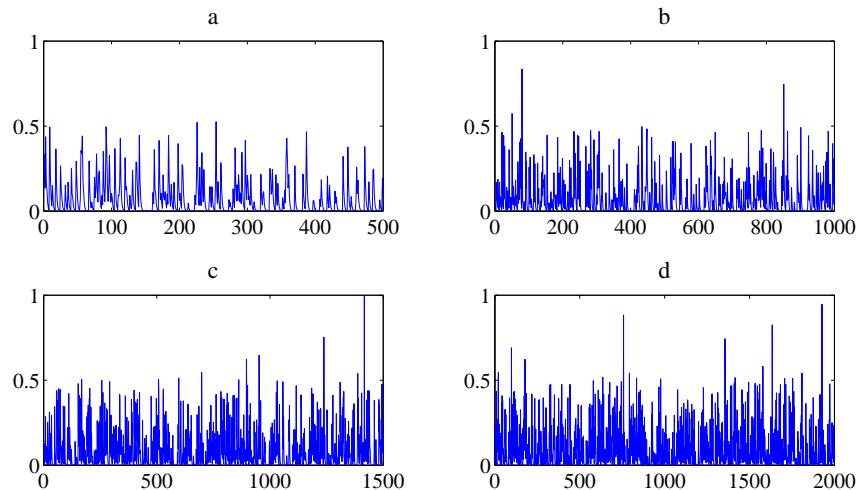
$$\begin{aligned} \varphi_\xi(s) &= \frac{\varphi_X(s) - p_3\varphi_X(cs)}{p_1\varphi_X(as) + p_2\varphi_X(bs) + p_0} \\ &\sim \frac{a^p b^p}{c^p} \frac{\Gamma(p+q)(c^p \mathcal{T}(s) - p_3 \mathcal{T}(cs))}{a^p b^p p_2 \Gamma(q) s^p + a^p p_1 \Gamma(p+q) + b^p p_0 \Gamma(p+q)} \\ &\sim \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} \frac{c^p (1-p_3)}{p_0 s^p} \cdot \mathcal{T}(s) \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q) s^p} \cdot \mathcal{T}(s), \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sada lako zaključujemo da je raspodela inovacija ξ_t aproksimirana beta raspodela čija je gustina (4.2.4).

Teorema je dokazana. \square

Primer 8.3.1. Na Slici 8.3.1 prikazane su simulirane trajektorije, na uzorcima obima 500, 1000, 1500 i 2000, modela $GABAR(1)$ za $a = 0.1$, $b = 0.2$, $c = 0.3935$, $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$.

Slika 8.3.1: Trajektorije na uzorku obima: a) 500, b) 1000, c) 1500 i d) 2000



Specijalni slučajevi

1. Za $p_0 = 1$ ili $p_1 = 1$ i uz pretpostavku da parametri a ili b zadovoljavaju uslov **(v)** iz Poglavlja 7.1 model (8.3.1) se svodi na model (7.1.1). Za izvođenje aproksimacije raspodele inavacionog niza koriste se teoreme iz Glave 7.
2. Za $p_0 = p_3 = 0$ i uz pretpostavku da $b \in (-1, 0)$ model (8.3.1) se svodi na model uveden Teoremom 8.1.3.
3. Za $p_0 = p_1 = 0$ ili $p_0 = p_2 = 0$ model (8.3.1) se svodi na nelinearni model uveden Teoremom 8.2.5.

8.3.1 Neke karakteristike $GABAR(1)$ modela

Teorema 8.3.2. *Autokovariansna funkcija sa korakom τ i autokorelaciona funkcija sa korakom $\tau > 0$, modela $GABAR(1)$ su redom*

$$\gamma(\tau) = (p_1 a + p_2 b + p_3 c)^{|\tau|} DX$$

$$\rho(\tau) = (p_1 a + p_2 b + p_3 c)^\tau.$$

Dokaz: Model $GABAR$ je specijalan slučaj $RCAR(1)$ modela kod koga je

$$A_t: \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}, \quad B_t: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_3 & p_0 + p_1 + p_2 \end{pmatrix}.$$

Tada tvrđenje sledi iz (6.1.3) i (6.1.4). \square

U slučaju kada je $a < b < c$, odredićemo uslovnu funkciju raspodele $F(x|y) = \mathbb{P}\{X_t < x | X_{t-1} = y\}$ slučajne promenljive X_t , definisane $GABAR(1)$ modelom, pod uslovom $X_{t-1} = y$.

Kao i u prethodnim slučajevima i ovde uslovna raspodela ne zavisi od gustine marginalne raspodele.

Teorema 8.3.3. Za $a < b < c$ raspodela slučajne promenljive $X_t | X_{t-1}$ je

$$F(x|y) = \begin{cases} p_0 F_\xi(x), & x \leq ay \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)], & ay < x \leq by \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)], & by < x < cy \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)] + p_3, & x \geq cy \end{cases}. \quad (8.3.2)$$

Takođe, odgovarajuća gustina je

$$f(x|y) = \begin{cases} p_0 f_\xi(x), & x \leq ay \\ p_0 f_\xi(x) + p_1 f_\xi(x - ay), & ay < x \leq by \\ p_0 f_\xi(x) + p_1 f_\xi(x - ay) + p_2 f_\xi(x - by), & x > by \end{cases}, \quad (8.3.3)$$

gde su f_ξ, F_ξ funkcije gustine i raspodele, redom, inovacija ξ_t .

Dokaz: Ponovo polazimo od uslovne verovatnoće gde je $h > 0$. Naime,

$$\pi = \mathbb{P}\{X_t < x | y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} = \frac{\mathbb{P}\{X_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}{\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\}}.$$

Brojilac prethodnog izraza se svodi na

$$\begin{aligned} \pi_B &= p_0 \mathbb{P}\{\xi_t < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} + p_1 \mathbb{P}\{\mathcal{G}_{t-1} < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &\quad + p_2 \mathbb{P}\{\mathcal{C}_{t-1} < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &\quad + p_3 \mathbb{P}\{\mathcal{V}_{t-1} < x, y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \\ &= \begin{cases} p_0 F_\xi(x) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt, & x \leq a(y - h) \\ p_0 F_\xi(x) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt + p_1 \int_{y-h}^{x/a} f(t) \int_0^{x-ay} f_\xi(t) dt, & a(y - h) < x \leq b(y + h) \\ p_0 F_\xi(x) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt + p_1 \int_{y-h}^{x/a} f(t) \int_0^{x-ay} f_\xi(t) dt \\ + p_2 \int_{y-h}^{x/a} f(t) \int_0^{x-by} f_\xi(t) dt, & b(y + h) < x < c(y - h) \\ p_0 F_\xi(x) \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt + p_1 \int_{y-h}^{x/a} f(t) \int_0^{x-ay} f_\xi(t) dt \\ + p_2 \int_{y-h}^{x/a} f(t) \int_0^{x-by} f_\xi(t) dt + p_3 \int_{y-h}^{y+h} f(t) dt, & x \geq c(y - h) \end{cases}, \end{aligned}$$

gde su $\mathcal{G}_{t-1} = aX_{t-1} + \xi_t$, $\mathcal{C}_{t-1} = bX_{t-1} + \xi_t$ i $\mathcal{V}_{t-1} = cX_{t-1}$ i f je gustina slučajne promenljive X_t .

Kada $h \rightarrow 0$ važi

$$\pi_B \sim \begin{cases} p_0 F_\xi(x) 2h f(y), & x \leq ay \\ p_0 F_\xi(x) 2h f(y) + p_1 2h f(y) [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)], & ay < x \leq by \\ p_0 F_\xi(x) 2h f(y) + p_1 2h f(y) [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 2h f(y) [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)], & by < x < cy \\ p_0 F_\xi(x) 2h f(y) + p_1 2h f(y) [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 2h f(y) [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)] + p_3 2h f(y), & x \geq cy \end{cases},$$

i $\mathbb{P}\{y - h \leq X_{t-1} \leq y + h\} \xrightarrow{\text{a.s.}} 2hf(y)$, odakle dobijamo

$$\pi = \begin{cases} p_0 F_\xi(x), & x \leq ay \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)], & ay < x \leq by \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)], & by < x < cy \\ p_0 F_\xi(x) + p_1 [F_\xi(x - ay) - F_\xi(0)] + \\ + p_2 [F_\xi(x - by) - F_\xi(0)] + p_3, & x \geq cy \end{cases}.$$

Imajući na umu da je raspodela inovacija ξ_t aproksimirana beta raspodela nalazimo da je $F_\xi(0) = 0$ skoro sigurno. Na ovaj način smo dokazali (8.3.2), dok je (8.3.3) direktna posledica prethodnog. \square

Posledica 8.3.1. Uslovna funkcija verodostojnosti na uzorku (x_1, \dots, x_n) je

$$\begin{aligned} \mathsf{L} = & \prod_{t=2}^n (p_0 f_\xi(x_t))^{1_{\{x_t \leq ay\}}} \cdot \prod_{t=2}^n (p_0 f_\xi(x_t) + p_1 f_\xi(x_t - ay))^{1_{\{ay < x_t \leq by\}}} \\ & \cdot \prod_{t=2}^n (p_0 f_\xi(x_t) + p_1 f_\xi(x_t - ay) + p_2 f_\xi(x_t - by))^{1_{\{x_t > by\}}} \end{aligned}$$

Teorema 8.3.4. Stohastički niz (8.3.1) nije vremenski invarijantan.

Dokaz: Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) je

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t, X_{t-1}}(s_1, s_2) &= \mathbb{E}(e^{-s_1 X_t - s_2 X_{t-1}}) = \\ &= p_0 \varphi_\xi(s_1) + p_1 \varphi_X(s_1 a + s_2) \varphi_\xi(s_1) + p_2 \varphi_X(s_1 b + s_2) \varphi_\xi(s_1) + p_3 \varphi_X(s_1 c). \end{aligned}$$

Pošto Laplaceova transformacija slučajnog vektora (X_t, X_{t-1}) nije simetrična u odnosu na s_1 i s_2 zaključujemo da GABAR(1) model nije vremenski invarijantan. \square

Napomena 8.3.1. Stacionarnost i ergodičnost $GABAR(1)$ modela su direktna posledica Teoreme 6.1.1.

8.3.2 Ocenjivanje parametara $GABAR(1)$ modela

Kao što je bio slučaj i kod ranije proučavanih modela, $GABAR(1)$ model je specijalan slučaj modela sa slučajnim koeficijentima (6.1.2). Raspodela vektora (A_t, B_t) je

		A_t	0	a	b	c
		B_t	0	0	0	p_3
A_t	B_t	0	p_0	p_1	p_2	0

odakle zaključujemo da su slučajni koeficijenti A_t i B_t zavisni. Dakle, ukoliko želimo primeni UNK metodu moramo koristiti formule (6.2.18)–(6.2.20), u zavisnosti od toga da li nam je poznato $E(A_t B_t)$ ili očekivanje inovacija. S obzirom da je u $GABAR(1)$ modelu gustina raspodele inovacija data funkcijom (4.2.4), određivanje matematičkog očekivanja inovacija zahteva naprednije numeričke metode. Zato bi bilo potrebno smatrati da je $E(A_t B_t) = ap_0 + bp_1$ poznato, što povlači da imamo poznate parametre a, p_0, b, p_1 . Pošto je

$$EA_t = ap_0 + bp_1 + cp_3 = \hat{a}_1$$

i

$$EA_t^2 = a^2 p_0 + b^2 p_1 + c^2 p_3 = \hat{a}_2^{(1)},$$

sledi da bi ocena parametra c bila

$$\hat{c} = \frac{\hat{a}_2^{(1)} - a^2 p_1 - b^2 p_3}{\hat{a}_1 - ap_1 - bp_2}.$$

Razlikovaćemo dva slučaja:

- Parametar p_3 je poznat, pa je tada

$$\hat{p}_0 = 1 - \frac{p_3}{\hat{c}^p}. \quad (8.3.4)$$

2. Parametar p_0 je poznat, pa je tada

$$\hat{p}_3 = \hat{c}^p(1 - p_0). \quad (8.3.5)$$

Pretpostavimo da je $p_0 = 0$. Pošto je $a < b < c$ parametar a možemo oceniti metodom minimalnog količnika

$$\hat{a} = \min_{2 \leq t \leq n} \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\}.$$

Ova ocena je i postojana ocena parametra a . Zaista,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \min_{2 \leq t \leq n} \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\} > a \right\} &= \\ &= \mathbb{P} \left\{ X_2 > aX_1, \dots, X_n > aX_{n-1} \right\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ (A_2, B_2) \neq (a, 1), \dots, (A_n, B_n) \neq (a, 1) \right\} = \\ &= (1 - p_1(p_1 + p_2))^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\mathbb{P} \left\{ \min_{2 \leq t \leq n} \left\{ \frac{X_t}{X_{t-1}} \right\} = a \right\} = 1,$$

što povlači postojanost ocene \hat{a} . Iz (6.2.37) sledi da je Yule–Walkerova jednačina

$$\rho(1) = ap_1 + bp_2 + cp_3,$$

gde se $\rho(1)$ ocenjuje formulom (6.2.38). Mogući su sledeći slučajevi:

3. Parametri b, p_1, p_2 i p_3 su poznati. Tada je

$$\hat{c} = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{a}p_1 - bp_2}{p_3}. \quad (8.3.6)$$

4. Parametri c, p_1, p_2 i p_3 su poznati. Tada je

$$\hat{b} = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{a}p_1 - cp_3}{p_2}.$$

5. Parametri b, c, p_2 i p_3 su poznati. Tada je

$$\hat{p}_1 = \frac{\hat{\rho}(1) - bp_2 - cp_3}{\hat{a}}.$$

6. Parametri c, p_1 i p_3 su poznati. Tada je

$$\hat{p}_2 = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{a}p_1 - cp_3}{b}.$$

7. Parametri c , p_1 i p_2 su poznati. Tada je

$$\hat{p}_3 = \frac{\hat{\rho}(1) - \hat{a}p_1 - bp_2}{c},$$

dok se parametar p_0 , u prethodnim slučajevima, ocenjuje pomoću (8.3.4). Napomenimo da ćemo parametre aproksimirane beta raspodele oceniti pomoću (7.4.4).

Numerički primeri

1. *GABAR(1)* model

Naglasimo da će simulacije biti sprovedene tako što će se generisati matrice kao u prethodnim primerima. Parametre *GABAR(1)* modela ocenićemo uz prepostavke slučaja 3. Smatraćemo da je $p_0 = 0$, pa ćemo parametar a oceniti metodom minimalnog količnika. Parametar c ćemo oceniti pomoću (8.3.6), a parametar p_3 pomoću (8.3.5). Parametre aproksimirane beta raspodele ocenićemo pomoću momenata beta raspodele. Iz rezultata u Tabeli A.9 možemo zaključiti da se metodom minimalnog količnika veoma brzo postižu tačne vrednosti, dok ocene parametara c i p_3 imaju manje standardne devijacije na uzorcima većeg obima.

Iz ocena parametara p i q aproksimirane beta raspodele, možemo zaključiti da $\text{AB}(p, q)$ dobro aproksimira $\text{B}_2(p, q)$ raspodelu.

2. Veza sa inverznom gama raspodelom

Simulacije za eksperimentalnu proveru Teoreme 5.1.1 sprovesti na potpuno analogan način kao u Poglavlju 8.1.2 u tački 3. Razmatrajući rezultate prezentovane u Tabeli A.10 zaključujemo da postoji analogija sa rezultatima kao u istim simulacijama kod ranije izučenih modela, pa ih zbog toga ovde nećemo ponovo komentarisati.

Zaključak

Dosadašnja istraživanja na polju autoregresivnih stohastičkih nizova, podrazumevala su da je Laplaceova transformacija pretpostavljene marginalne raspodele u elementarnoj formi, što je imalo za posledicu da je određivanje raspodele inovacionog niza bilo je relativno lako. Mi smo, u ovoj disertaciji, otišli korak dalje. Naime, odredili smo raspodele inovacija, nekih autoregresivnih stohastičkih nizova, kada su beta, odnosno inverzna gama marginalne raspodele, čije su LT Kummerova, odnosno Krätselova funkcija. Aproksimacijom pomenutih specijalnih funkcija, pa zatim određivanjem inverzne LT, došli smo do gustine aproksimirane beta i gustine aproksimirane inverzne gama raspodele. U simulacionim studijama pokazano je da $AB(p, q)$ veoma dobro aproksimira $B_2(p, q)$, odnosno da $AIG(a, b)$ veoma dobro aproksimira $IG(a, b)$ raspodelu. Prilikom određivanja gustine raspodele inovacionog niza pretpostavljali smo da su aproksimirana beta i aproksimirana inverzna gama marginalne raspodele. Ovaj pristup se prvi put javlja u literaturi, pa ova disertacija predstavlja originalni doprinos proučavanju stohastičkih nizova.

Predmet izučavanja bili su stacionarni, autoregresivni modeli sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom. Razmatrali smo i linearni model sa marginalnom inverznom gama raspodelom. Dokazali smo i teoremu kojom se povezuju beta i inverzna gama raspodela. Imajući na umu rezultate simulacionih studija, pokazali smo, u slučaju linearnih modela, kako se generisanjem dva nezavisna uzorka iz $WIGAR(1)$ modela, zatim primenom odgovarajuće transformacije, dolazi do uzorka iz $AB(p, q)$ raspodele. Takođe, pozivajući se na Teoremu 5.1.1, generišući uzorak iz modela sa marginalnom aproksimiranom beta raspodelom, lako dolazimo do uzorka iz aproksimirane inverzne gama raspodele. Ovi zaključci daju posebnu težinu proučavanju marginalne inverzne gama raspodele.

Za ocenjivanje nepoznatih parametara razmatranih modela koristili smo metod uslovnih najmanjih kvadrata, Yule–Walkerov ili metod minimalnog količnika. Izveli smo UNK ocene kada su slučajni koeficijenti A_t i B_t zavisni, odnosno nezavisni. Pokazali smo da pretpostavka nezavisnosti slučajnih koeficijenata, što je bio slučaj u (Nicholls i Quinn, 1982), nije neophodna da bi ocene bile postojane i asimptot-

ski normalne, pa se ova činjenica može smatrati doprinosom teoriji uslovnih najmanjih kvadrata. Ipak, kada su slučajni koeficijenti A_t i B_t zavisni, UNK metodu nismo primenili, jer nam je za to bio potreban i algoritam za numeričko evaluiranje Wrightove hipergeometrijske funkcije, koji, još uvek nije razvijen, pa smo koristili Yule–Walkerovu metodu. Pokazali smo da su Yule–Walkerove ocene nepoznatih parametara $RCAR(1)$ modela nepristrasne, postojane i asimptotski normalne. Odgovarajuće teoreme dokazali smo modifikacijom rezultata iz (Brockwell i Davis, 1990), što se, takođe, može smatrati doprinosom teoriji ocenjivanja, pošto se Yule–Walkerov metod prvi put primenjuje kod autoregresivnog modela prvog reda sa slučajnim koeficijentima.

Prilikom izvođenja uslovnih raspodela, odnosno uslovnih gustina slučajnih nizova, primećeno je da one ne zavise od raspodele, odnosno gustine marginalne raspodele.

Dalji rad bi bio razvijanje algoritma za numeričko evaluiranje Wrightove funkcije, čime bi se omogućila primena UNK metoda kada su slučajni koeficijenti zavisni.

Literatura

- Abate, J., Whitt, W. (1995). *Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions*. ORSA Journal on Computing 7(1), 36–43.
- Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*. New York: Dover.
- Anděl, J. (1981). *On Autoregressive Models with Random Parameters*. U (J. Hajek, uredník) Proc. Third Prague Symp. on Asymtotic Statistics, 17–30.
- Anděl, J. (1988). *On Nonlinear Models for Time Series*. Statistics 20(4), 615–32.
- Anděl, J. (1989). *AR(1) Processes with Given Moments of Marginal Distribution*. Kybernetika 25(5), 337–47.
- Anděl, J., Gómez, J., Vega, C. (1989). *Stationary Distribution of some Nonlinear AR(1) Processes*, Kybernetika 25(6), 615–32.
- Billingsley, P. (1961). *The Lindeberg-Lévy Theorem for Martingales*. Proc. Amer. Math. Soc. 12, 788–92.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A. (1990). *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York.
- Chernick, M. (1981). *A Limit Theorem for the Maximum of Autoregressive Processes with Uniform Marginal Distribution*. Ann. Probab. 9, 145–49.
- Chernick, M., Davis, R. A. (1982). *Extremes in Autoregressive Processes with Uniform Marginal Distributions*. Statist. Probab. Lett. 1, 145–49.

- Dorić, D., Mališić, J., Jevremović, V., Nikolić - Đorić, E. (2007). *Atlas raspodela*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd.
- Erdélyi, A. (1953a). *Higher Transcendental Functions Vol. 1*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Erdélyi, A. (1953b). *Higher Transcendental Functions Vol. 2*, McGraw-Hill Book Company., New York.
- Fletcher, S. Ponnambalam, K., (1996). *Estimation of Reservoir Yield and Storage Distribution Using Moments Analysis*. Journal of Hydrology 182, 259–75.
- Gaver, D., Lewis, P. (1980). *First Order Autoregressive Gamma Sequences and Point Processes*. Adv. Appl. Probab. 12, 727–45.
- Humbert, P. (1945). *Nouvelles correspondances symboliques*. Bull. Sci. Math LXIX, 121–29.
- Jevremović, V. (1990). *Two Examples of Nonlinear Process with Mixed Exponential Marginal Distribution*. Stat. Probab. Letters 10, 221–24.
- Jones, M. (2009). *KumaraSwamy's Distribution: A Beta-Type Distribution with some Tractability Advantages*. Stat. Methodol. 6, 70–81.
- Karlsen, H., Tjøstheim, D. (1980). *Consistent Estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) Time Series Models*. J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 50(2), 313–20.
- Kilbas, A. A., Saxena, R. K., Trujillo, J. J. (2006). *The Krätzel Function as Function of Hypergeometric Type*. Fract. Calc. and Appl. Anal. 9(2), 109–31.
- KumaraSwamy, P. (1980). *A Generalized Probability Density Function for Double-Bounded Random Processes*. Journal of Hydrology 46, 79–88.
- Lawrence, A. (1980). *The Mixed Exponential Solution to the First Order Autoregressive Model*. J. Appl. Probab. 17, 546–52.
- Lawrence, A., Lewis, P. (1980). *A new Autoregressive Time Series Model in Exponential Variables (NEAR(1))*. Adv. in Appl. Probab. 13, 826–45.

- Lažetić, N. (1991). *Matematika II/I*, Naučna knjiga, Beograd
- Lewis, P. A. W., Mckenzie, E., Hugus, D. K. (1989). *Gamma Processes*. Comm. Statist. Stochastic Models 5 1–30.
- McKenzie, E. (1985). *An Autoregressive Process for Beta Random Variables*. Management Science 31, 988–97.
- Mališić, J. (1987). *On Exponential Autoregressive Time Series Models*. Bauer, P. et al. (eds.), Mathematical Statistics and Probability Theory B, 147–53.
- Mališić, J. (1989). *Slučajni procesi-teorija i primena*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Mališić, J. (1992). *On Some Univariate Non-Linear Time Series Models*. ZRFFN 6(2), 307–20.
- Mikusiński, J. (1959). *On the Function whose Laplace Transform is $\exp(-s^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$* . Stud. Math. XVIII, 191–98.
- Nadarajah, S. (2007). *Probability Models for Unit Hydrograph Derivation*. Journal of Hydrology 344, 185–89.
- Nadarajah, S. (2008). *On the Distribution of Kumaraswamy*. Journal of Hydrology 348, 568–69.
- Nicholls, D. F., Quinn, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: an Introduction, Lecture Notes in Statistics Vol. 11*, Springer-Verlag, New York.
- Novković, M. (1997). *Autoregresioni modeli vremenskih serija sa gama i Laplasovom raspodelom*. Magistarski rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd.
- Petruccelli, J. (1989). *Autoregressive Processes with Normal Stationary Distributions*. J. Time Series Anal. 10(1), 65–70.
- Pollard, H. (1946). *The Representation of $\exp(-x^\lambda)$ as a Laplace Integral*. Bull. Amer. Math. Soc. 52, 908–10.

- Popović, B. Č. (1993). *Estimation of Parameters of RCA with Exponential Marginals*, Publ. Inst. Math. (Belgrade) (N.S.) 54(68), 135-143.
- Popović, B. Č. (1996). *The First Order RC Autoregressive Time Series*, Scientific Review, Ser. Science and Engineering 21-22, 131-136.
- Popović, B. V. (2009). *Modeli vremenskih serija sa marginalnim raspodjelama iz Pirsonovog sistema raspodjela*. Magistarski rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd.
- Popović, B. V. (2010a). *AR(1) Time Series with Approximated Beta Marginal*, Publ. Inst. Math. (Belgrade) (N.S.) 88(102), 89–98.
- Popović, B. V. (2010b). *On AR(1) Time Series Model with Marginal Two Parameter Wright Inverse-Gamma Distribution*, Comm. Statist. Theory Methods (prihvaćen za štampu).
- Popović, B. V., Pogány, T. K., Nadarajah,, S. (2010). *On Mixed AR(1) Time Series Model with Approximated Beta Marginal*, Stat. Probab. Letters 80, 1551–58.
- Popović, B. V., Pogány, T. K., (2011). *New mixed AR(1) Time Series Models Having Approximated Beta Marginals*, Math. Comput. Modelling – prihvaćen za štampu.
- Ridout, M. (2009). *Generating Random Numbers from a Distribution Specified by its Laplace Transform*. Stat. Comput. 19, 439–50.
- Ristić, M. M. (2002). *Stacionarni autoregresivni modeli sa marginalnom uniformnom raspodelom*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš .
- Ristić, M. M., Popović, B. Č. (2000). *A New Uniform AR(1) Time Series Model (NUAR(1))*. Publ. Inst. Math. (Belgrade) (N.S.) 68(82), 145–52.
- Ristić, M. M., Popović, B. Č. (2002). *The Uniform Autoregressive Process of the Second Order (UAR(2))*. Stat. Probab. Letters 57, 113–19.
- Ristić, M. M. (2005). *A BetaGamma Autoregressive Process of the Second-Order (BGAR(2))*. Stat. Probab. Letters 73, 403–10.

- R Development Core Team. (2009). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, ISBN 3-900051-07-0.
- Sheather, S., Jones, M. (1991). *A Reliable Data-Based Bandwidth Selection Method for Kernel Density Estimation*. J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 53, 683–90.
- Silverman, B. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, London.
- Sim, C. H. (1986). *Simulation of Weibull and Gamma Autoregressive Stationary Process*, Comm. Statist. Simulation Comput. 15(4), 1141 –46 .
- Schiff, J. L. (1999), *Laplace Transform: Theory and Application*, Springer-Verlag, New York .
- Stanković, B. (1970). *On the Function of E.M. Wright*. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 10, 113–24.
- Tjøstheim, D. (1986). *Some Doubly Stochastic Time Series Models*. J. Time Series Anal. 7(1), 51–72.
- Wand, M. P., Jones, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, London.
- Varadhan, R., Gilbert, P. (2009). *BB: An R Package for Solving a Large System of Nonlinear Equations and for Optimizing a High-Dimensional Nonlinear Objective Function*. Journal of Statistical Software 32(4), 1–26.

Dodatak A

Rezultati ocenjivanja parametara

Tabela A.1: Ocene parametara $LAB_{p,q}AR(1)$ modela

N	\hat{p}	\hat{q}	$\hat{\beta}$	$\tilde{\beta}$
Stvarne vrednosti: $p = 4, q = 1.5, \beta = 0.1$				
10	5.8183 (3.8043)	2.1784 (1.2276)	0.0287 (0.2204)	0.0649 (0.0798)
50	4.3412 (0.9619)	1.6788 (0.3603)	0.0762 (0.1195)	0.0813 (0.0509)
100	4.2381 (0.6720)	1.6382 (0.2393)	0.0911 (0.0913)	0.0996 (0.0245)
500	4.1017 (0.2839)	1.5953 (0.1042)	0.0967 (0.0418)	0.0992 (0.0007)
1000	4.0892 (0.2013)	1.5914 (0.0723)	0.0987 (0.0324)	0.1 (0)
5000	4.0897 (0.0884)	1.5930 (0.0323)	0.1002 (0.0140)	0.1 (0)
10000	4.0819 (0.0617)	1.5905 (0.0225)	0.1003 (0.0103)	0.1 (0)
Stvarne vrednosti: $p = 3, q = 0.45, \beta = 0.05$				
10	8.0016 (7.4684)	0.7786 (0.5042)	-0.02 (0.2352)	0.0127 (0.0842)
50	3.3801 (1.0346)	0.5074 (0.0987)	0.0296 (0.1291)	0.0243 (0.0594)
100	3.2867 (0.9441)	0.4965 (0.0899)	0.0377 (0.0957)	0.0392 (0.0416)
500	3.1353 (0.4086)	0.4849 (0.0418)	0.0484 (0.0447)	0.0424 (0.0291)
1000	3.1051 (0.2703)	0.4830 (0.0269)	0.0481 (0.0320)	0.0492 (0.0031)
5000	3.0767 (0.1247)	0.4797 (0.0126)	0.0494 (0.0140)	0.05 (0)
10000	3.0817 (0.0850)	0.4801 (0.0087)	0.0499 (0.0098)	0.05 (0)
Stvarne vrednosti: $p = 1/3, q = 4, \beta = 0.125$				
10	0.6350 (0.3708)	8.0386 (8.2473)	-0.0283 (0.2791)	0.1097 (0.0574)
50	0.4341 (0.1186)	4.4729 (1.5742)	0.1065 (0.0953)	0.1127 (0.0049)
100	0.4106 (0.0831)	4.1559 (1.000)	0.1209 (0.0437)	0.125 (0)
500	0.3922 (0.0339)	3.9154 (0.3958)	0.1239 (0.0314)	0.125 (0)
1000	0.3912 (0.0235)	3.8993 (0.2729)	0.1219 (0.0310)	0.125 (0)
5000	0.3907 (0.0106)	3.8926 (0.1242)	0.1248 (0.0138)	0.125 (0)
10000	0.3898 (0.0075)	3.8801 (0.0857)	0.1253 (0.0100)	0.125 (0)
Stvarne vrednosti: $p = 2/3, q = 3, \beta = 0.3536$				
10	0.9245 (0.5723)	4.7340 (3.4796)	0.1248 (0.3229)	0.4075 (0.0640)
50	0.6727 (0.1593)	3.178 (0.8741)	0.3136 (0.1340)	0.3606 (0.0094)
100	0.6529 (0.1082)	3.0407 (0.5615)	0.3349 (0.0986)	0.3563 (0.0037)
500	0.6354 (0.0459)	2.9394 (0.2392)	0.3496 (0.0433)	0.3536 (0)
1000	0.6337 (0.0325)	2.9378 (0.1631)	0.3509 (0.0286)	0.3536 (0)
5000	0.6307 (0.0147)	2.9149 (0.0774)	0.3531 (0.0133)	0.3536 (0)
10000	0.6295 (0.0102)	2.9089 (0.0518)	0.3534 (0.0095)	0.3536 (0)

Tabela A.2: Ocene parametara $WIGAR(1)$ modela

N	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}$
Stvarne vrednosti: $a = 0.35, b = 2, \beta = 0.2$				
10	0.6214 (0.3881)	3.5910 (1.0050)	0.0426 (0.2765)	0.2435 (0.0559)
50	0.5162 (0.2540)	2.4171 (0.7603)	0.1636 (0.1298)	0.2076 (0.0049)
100	0.4597 (0.1214)	2.1657 (0.1894)	0.1847 (0.0918)	0.2052 (0.0029)
500	0.4027 (0.0916)	2.0760 (0.1109)	0.1976 (0.0425)	0.2025 (0.0009)
1000	0.3979 (0.0569)	2.0471 (0.0742)	0.1991 (0.0308)	0.2020 (0.0006)
5000	0.3879 (0.0305)	1.9974 (0.0460)	0.1992 (0.0137)	0.2013 (0.0003)
10000	0.3771 (0.0157)	2.0821 (0.0243)	0.1997 (0.0100)	0.2012 (0.0002)
Stvarne vrednosti: $a = 0.35, b = 2, \beta = 0.4$				
10	0.6181 (0.3774)	3.9411 (1.1275)	0.1873 (0.2789)	0.4348 (0.0379)
50	0.5374 (0.2280)	2.4521 (0.7975)	0.3572 (0.1217)	0.4063 (0.0036)
100	0.4471 (0.1315)	2.4291 (0.2020)	0.3787 (0.0886)	0.4044 (0.0022)
500	0.3994 (0.0897)	2.2541 (0.1217)	0.3956 (0.0416)	0.4022 (0.0007)
1000	0.3978 (0.0518)	2.1866 (0.0891)	0.3982 (0.0294)	0.4018 (0.0005)
5000	0.3831 (0.0299)	2.0541 (0.0391)	0.3997 (0.0126)	0.4013 (0.0004)
10000	0.3799 (0.0111)	2.0771 (0.0197)	0.3995 (0.0088)	0.4011 (0.0003)
Stvarne vrednosti: $a = 0.35, b = 2, \beta = 0.6$				
10	0.6550 (0.4001)	3.8971 (1.1679)	0.3152 (0.2699)	0.6161 (0.0148)
50	0.5181 (0.2193)	2.9971 (0.7586)	0.5490 (0.1065)	0.6049 (0.0027)
100	0.4781 (0.1284)	2.8141 (0.1981)	0.5719 (0.0760)	0.6034 (0.0016)
500	0.4491 (0.0841)	2.5000 (0.1207)	0.5943 (0.0350)	0.6018 (0.0006)
1000	0.4081 (0.0474)	2.2384 (0.0808)	0.5978 (0.0259)	0.6015 (0.0004)
5000	0.3781 (0.0220)	2.0971 (0.0315)	0.5997 (0.0108)	0.6010 (0.0003)
10000	0.3671 (0.0099)	2.0284 (0.0100)	0.5959 (0.0088)	0.6009 (0.0002)
Stvarne vrednosti: $a = 0.35, b = 2, \beta = 0.8$				
10	0.6371 (0.3923)	3.6730 (1.0715)	0.5488 (0.2710)	0.8184 (0.0231)
50	0.5059 (0.2279)	3.0125 (0.7787)	0.7328 (0.0964)	0.8028 (0.0014)
100	0.4529 (0.1282)	2.8448 (0.1915)	0.7675 (0.0619)	0.8020 (0.0009)
500	0.4344 (0.0994)	2.5304 (0.1397)	0.7939 (0.0270)	0.8012 (0.0004)
1000	0.3937 (0.0469)	2.3176 (0.0931)	0.7964 (0.0192)	0.8010 (0.0003)
5000	0.3694 (0.0207)	2.0899 (0.0325)	0.7990 (0.0086)	0.8007 (0.0001)
10000	0.3692 (0.0097)	2.0287 (0.0098)	0.7996 (0.0059)	0.8006 (0.0001)

Tabela A.3: Ocene parametara $AB(p, q)$ raspodele

N	\hat{p}		\hat{q}	
	$p = 0.35, q = 0.45$	$p = 2.5, q = 0.5$	$p = 3, q = 4.5$	$p = 3, q = 4.5$
10	0.4972 (0.3211)	0.5535 (0.4121)	4.0767 (3.2891)	0.7710 (0.4281)
50	0.3978 (0.0912)	0.4398 (0.1041)	2.6700 (0.7165)	0.5726 (0.1384)
100	0.3854 (0.0645)	0.4243 (0.0730)	2.6006 (0.5050)	0.5590 (0.0934)
500	0.3817 (0.0286)	0.4206 (0.0310)	2.4943 (0.2035)	0.5422 (0.0398)
1000	0.3810 (0.0200)	0.4206 (0.0229)	2.5006 (0.1427)	0.5423 (0.0277)
5000	0.3801 (0.0086)	0.4202 (0.0099)	2.4859 (0.0652)	0.5412 (0.0123)
10000	0.3801 (0.0061)	0.4201 (0.0066)	2.4823 (0.0463)	0.5409 (0.0094)
$p = 0.80, q = 3.5$				
10	1.2042 (0.7279)	5.5482 (4.0610)	4.1150 (2.9315)	6.5079 (4.8871)
50	0.8885 (0.2031)	3.8882 (1.0309)	3.1125 (0.6674)	4.7857 (1.0326)
100	0.8627 (0.1373)	3.7153 (0.6746)	3.0324 (0.4128)	4.6651 (0.6375)
500	0.8351 (0.0600)	3.5650 (0.2780)	2.9642 (0.1895)	4.5589 (0.2965)
1000	0.8307 (0.0420)	3.5435 (0.2019)	2.9580 (0.1315)	4.5557 (0.2076)
5000	0.8296 (0.0186)	3.5395 (0.0889)	2.9524 (0.0591)	4.5445 (0.0926)
10000	0.8305 (0.0132)	3.5424 (0.0600)	2.9520 (0.0428)	4.5434 (0.0660)

Tabela A.4: Ocene parametara $ABAR(1)$ modela

N	\hat{p}	\hat{q}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Stvarne vrednosti: $p = 4, q = 2.5499, \alpha = 0.18, \beta = 0.73, p_1 = 0.6$				
10	5.4016 (3.2083)	3.3441 (1.8872)	-0.0440 (0.0590)	0.0837 (0.0695)
50	4.1695 (0.8965)	2.5921 (0.5385)	0.1514 (0.0359)	0.7254 (0.0331)
100	4.0845 (0.6202)	2.5472 (0.3774)	0.1505 (0.0212)	0.7283 (0.0203)
500	4.0025 (0.2596)	2.4926 (0.1579)	0.1777 (0.0071)	0.7352 (0.0090)
1000	3.9810 (0.1842)	2.4849 (0.1120)	0.1780 (0.0050)	0.7341 (0.0067)
5000	3.9706 (0.0807)	2.4815 (0.0489)	0.1798 (0.0027)	0.7309 (0.0029)
10000	3.9672 (0.0570)	2.4782 (0.0339)	0.1791 (0.0020)	0.7302 (0.0021)
Stvarne vrednosti: $p = 4, q = 0.0472, \alpha = 0.8, \beta = 0.3, p_1 = 0.4$				
10	1078.3 (9623.3)	0.1928 (0.1153)	0.5241 (0.3257)	0.3711 (0.1564)
50	8.9722 (10.2192)	0.0819 (0.0363)	0.7006 (0.1047)	0.3566 (0.1021)
100	5.9038 (3.6578)	0.0687 (0.0253)	0.7241 (0.0943)	0.3341 (0.0741)
500	4.2982 (1.0689)	0.0576 (0.0111)	0.7557 (0.0189)	0.3242 (0.0154)
1000	4.1275 (0.7178)	0.0561 (0.0076)	0.7696 (0.0115)	0.3137 (0.0080)
5000	3.9880 (0.3075)	0.0547 (0.0034)	0.7903 (0.0037)	0.3049 (0.0026)
10000	3.9739 (0.2174)	0.0546 (0.0024)	0.7965 (0.0015)	0.3049 (0.0018)
Stvarne vrednosti: $p = 5, q = 0.6356, \alpha = 0.1, \beta = 0.2, p_1 = 0.3$				
10	8.9696 (7.0862)	0.9677 (0.5351)	-0.1214 (0.0978)	0.4712 (0.0547)
50	5.5744 (1.5403)	0.6915 (0.1663)	-0.0242 (0.0782)	0.2509 (0.0337)
100	5.3654 (1.1300)	0.6691 (0.1166)	-0.1110 (0.0606)	0.2855 (0.0258)
500	5.0840 (0.4763)	0.6441 (0.0540)	0.0621 (0.0161)	0.2079 (0.0054)
1000	5.0526 (0.3214)	0.6405 (0.0361)	0.0972 (0.0199)	0.2023 (0.0048)
5000	5.0346 (0.1411)	0.6387 (0.0157)	0.0949 (0.0063)	0.2034 (0.0019)
10000	5.0324 (0.0993)	0.6383 (0.0111)	0.0985 (0.0057)	0.2013 (0.0017)
Stvarne vrednosti: $p = 5, q = 2.9600, \alpha = 0.5, \beta = 0.6, p_1 = 0.7$				
10	7.1646 (4.0892)	4.2662 (2.5710)	0.0541 (0.2728)	0.3213 (0.2721)
50	5.2965 (1.1328)	3.1553 (0.6495)	0.3321 (0.1151)	0.5146 (0.1050)
100	5.1279 (0.7490)	3.0632 (0.4322)	0.4238 (0.1000)	0.6616 (0.0810)
500	5.0258 (0.3239)	3.0068 (0.1914)	0.4683 (0.0434)	0.6555 (0.0404)
1000	5.0415 (0.2296)	3.0076 (0.1342)	0.4710 (0.0312)	0.6370 (0.0278)
5000	5.0252 (0.1010)	3.0017 (0.0585)	0.4871 (0.0140)	0.6118 (0.0122)
10000	5.0267 (0.0730)	3.0036 (0.0428)	0.4994 (0.0100)	0.6010 (0.0090)

Tabela A.5: Ocene parametara $AB_{p,q}AR^*$ modela

N	\hat{p}	\hat{q}	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}$
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, \alpha = 0.7393, \beta = -0.05, p_2 = 0.8342$				
10	0.8310 (0.4562)	4.1609 (3.3483)	0.3641 (0.1768)	-0.2955 (0.1711)
50	0.6287 (0.1463)	2.7357 (0.7422)	0.6098 (0.1045)	-0.0925 (0.1346)
100	0.6115 (0.1023)	2.6425 (0.4922)	0.6299 (0.0541)	-0.0879 (0.0499)
500	0.5937 (0.0427)	2.5465 (0.2062)	0.6871 (0.0324)	-0.0790 (0.0247)
1000	0.5911 (0.0313)	2.5419 (0.1499)	0.7091 (0.0149)	-0.0521 (0.0194)
5000	0.5902 (0.0134)	2.5330 (0.0642)	0.7282 (0.0079)	-0.0560 (0.0097)
10000	0.5906 (0.0098)	2.5313 (0.0455)	0.7391 (0.0024)	-0.0499 (0.0022)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, \alpha = 0.6175, \beta = -0.1, p_2 = 0.7488$				
10	0.9208 (0.6580)	4.1725 (4.3645)	0.2915 (0.5149)	-0.3060 (0.3189)
50	0.6608 (0.1150)	2.5757 (0.6817)	0.4537 (0.2085)	-0.2392 (0.2141)
100	0.6403 (0.1018)	2.4871 (0.4263)	0.4887 (0.1579)	-0.2089 (0.1843)
500	0.6236 (0.0466)	2.4281 (0.1972)	0.5741 (0.0424)	-0.0741 (0.0645)
1000	0.6228 (0.0315)	2.4176 (0.1361)	0.5927 (0.0201)	-0.0894 (0.0244)
5000	0.6209 (0.0141)	2.4115 (0.0618)	0.6053 (0.0094)	-0.0914 (0.0102)
10000	0.6211 (0.0099)	2.4111 (0.0419)	0.6130 (0.0071)	-0.0945 (0.0061)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, \alpha = 0.5253, \beta = -0.15, p_2 = 0.6796$				
10	0.8717 (0.5089)	4.0959 (3.6868)	0.2861 (0.1740)	-0.3308 (0.1346)
50	0.6417 (0.1572)	2.7102 (0.7541)	0.3728 (0.1357)	-0.2537 (0.0859)
100	0.6311 (0.1049)	2.6065 (0.4956)	0.4172 (0.0915)	-0.2384 (0.0642)
500	0.6095 (0.0436)	2.4905 (0.1929)	0.4787 (0.0419)	-0.2088 (0.0387)
1000	0.6071 (0.0311)	2.4852 (0.1415)	0.5096 (0.0237)	-0.1659 (0.0318)
5000	0.6060 (0.0140)	2.4815 (0.0618)	0.5101 (0.0079)	-0.1591 (0.0094)
10000	0.6062 (0.0096)	2.4852 (0.0436)	0.5246 (0.0041)	-0.1499 (0.0046)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, \alpha = 0.4499, \beta = -0.20, p_2 = 0.6193$				
10	0.8629 (0.5280)	4.2800 (3.6869)	0.2781 (0.1654)	-0.3390 (0.1462)
50	0.6319 (0.1487)	2.7143 (0.7485)	0.3443 (0.1422)	-0.3261 (0.0917)
100	0.6040 (0.1009)	2.6067 (0.4828)	0.3675 (0.1152)	-0.3093 (0.0707)
500	0.5928 (0.0439)	2.5369 (0.2042)	0.3911 (0.0502)	-0.2783 (0.0331)
1000	0.5926 (0.0317)	2.5258 (0.1470)	0.4040 (0.0346)	-0.2381 (0.0220)
5000	0.5894 (0.0130)	2.5145 (0.0647)	0.4372 (0.0147)	-0.2149 (0.0113)
10000	0.5892 (0.0091)	2.5158 (0.0447)	0.4528 (0.0114)	-0.2046 (0.0094)

Tabela A.6: Veza $ABAR(1)$ modela sa inverznom gama raspodelom

N	\hat{a}		\hat{b}	
	$a = 0.50, b = 0.05$	$a = 0.50, b = 0.025$	$a = 0.50, b = 0.025$	$a = 0.50, b = 0.025$
10	0.5844 (0.1515)	0.3021 (0.1194)	0.4962 (0.1518)	0.0974 (0.0182)
50	0.5045 (0.1028)	0.1260 (0.0931)	0.5055 (0.1113)	0.0769 (0.0150)
100	0.4996 (0.0975)	0.1140 (0.0742)	0.5025 (0.0914)	0.0634 (0.0116)
500	0.4856 (0.0928)	0.1062 (0.0686)	0.4997 (0.0871)	0.0657 (0.0064)
1000	0.4818 (0.0825)	0.1042 (0.0090)	0.4971 (0.0765)	0.0545 (0.0043)
5000	0.4721 (0.0434)	0.0979 (0.0041)	0.4892 (0.0398)	0.0410 (0.0021)
10000	0.4709 (0.0094)	0.0981 (0.0009)	0.4801 (0.0084)	0.0391 (0.0009)
	$a = 0.50, b = 0.0167$		$a = 0.50, b = 0.0125$	
10	0.5711 (0.1590)	0.2383 (0.0769)	0.5716 (0.1636)	0.0308 (0.0176)
50	0.5122 (0.1077)	0.0892 (0.0169)	0.5129 (0.1110)	0.0291 (0.0102)
100	0.5035 (0.0950)	0.0838 (0.0120)	0.5079 (0.0915)	0.0271 (0.0091)
500	0.4906 (0.0909)	0.0662 (0.0091)	0.4917 (0.0897)	0.0207 (0.0064)
1000	0.4972 (0.0814)	0.0563 (0.0048)	0.4971 (0.0799)	0.0200 (0.0059)
5000	0.4981 (0.0497)	0.0397 (0.0012)	0.4987 (0.0515)	0.0181 (0.0044)
10000	0.4913 (0.0091)	0.0241 (0.0007)	0.4961 (0.0095)	0.0129 (0.0001)

Tabela A.7: Ocene parametara $AR_{p,q}AB(1)$ modela

N	\hat{p}		\hat{q}		$\hat{\alpha}$		$\hat{\beta}$	
	Stvarne vrednosti: $p = 3/5, q = 2.5, \alpha = 0.1, \beta = 0.6175$							
10	0.8406 (0.4695)	3.9349 (3.0965)	0.1402 (0.1586)	0.0716 (0.6862)				
50	0.6407 (0.1471)	2.6790 (0.7163)	0.1 (0)	0.5293 (0.1955)				
100	0.6316 (0.1012)	2.5840 (0.4682)	0.1 (0)	0.5774 (0.1353)				
500	0.6121 (0.0444)	2.4928 (0.2006)	0.1 (0)	0.6060 (0.0615)				
1000	0.6119 (0.0313)	2.4949 (0.1440)	0.1 (0)	0.6136 (0.0428)				
5000	0.6104 (0.0138)	2.4846 (0.0632)	0.1 (0)	0.6173 (0.0192)				
10000	0.6102 (0.0100)	2.4835 (0.0462)	0.1 (0)	0.6176 (0.0137)				
	Stvarne vrednosti: $p = 3/5, q = 2.5, \alpha = 0.05, \beta = 0.7394$							
10	0.8463 (0.4981)	4.0727 (3.0148)	0.2114 (0.3175)	-0.4502 (2.0620)				
50	0.6273 (0.1544)	2.7467 (0.7871)	0.0508 (0.0242)	0.6558 (0.1630)				
100	0.6041 (0.1030)	2.6077 (0.4940)	0.0500 (0)	0.6979 (0.1103)				
500	0.5942 (0.0433)	2.5467 (0.2045)	0.0500 (0)	0.7326 (0.0463)				
1000	0.5929 (0.0307)	2.5298 (0.1465)	0.0500 (0)	0.7340 (0.0399)				
5000	0.5903 (0.0132)	2.5253 (0.0645)	0.0500 (0)	0.7383 (0.0149)				
10000	0.5904 (0.0097)	2.5249 (0.0458)	0.0500 (0)	0.7389 (0.0105)				
	Stvarne vrednosti: $p = 3/5, q = 2.5, \alpha = 0.15, \beta = 0.5254$							
10	0.8360 (0.4936)	4.1363 (3.3348)	0.1685 (0.0479)	0.0761 (0.5864)				
50	0.6272 (0.1485)	2.7001 (0.7581)	0.1500 (0)	0.4404 (0.2240)				
100	0.6104 (0.1022)	2.6021 (0.4878)	0.1500 (0)	0.4869 (0.1518)				
500	0.5912 (0.0435)	2.5280 (0.2108)	0.1500 (0)	0.5189 (0.0692)				
1000	0.5938 (0.0304)	2.5277 (0.1441)	0.1500 (0)	0.5212 (0.0470)				
5000	0.5898 (0.0141)	2.5119 (0.0668)	0.1500 (0)	0.5249 (0.0223)				
10000	0.5901 (0.0091)	2.5135 (0.0428)	0.1500 (0)	0.5253 (0.0157)				
	Stvarne vrednosti: $p = 3/5, q = 2.5, \alpha = 0.20, \beta = 0.4499$							
10	0.9085 (0.5416)	4.0466 (3.0912)	0.2034 (0.0384)	-0.0010 (0.4572)				
50	0.6538 (0.1562)	2.6613 (0.6936)	0.20 (0)	0.3567 (0.2304)				
100	0.6257 (0.1047)	2.5453 (0.4608)	0.20 (0)	0.4196 (0.1646)				
500	0.6229 (0.0443)	2.5201 (0.1956)	0.20 (0)	0.4383 (0.0742)				
1000	0.6204 (0.0308)	2.4969 (0.1362)	0.20 (0)	0.4463 (0.0529)				
5000	0.6179 (0.0139)	2.4913 (0.0642)	0.20 (0)	0.4484 (0.0236)				
10000	0.6177 (0.0097)	2.4880 (0.0427)	0.20 (0)	0.4488 (0.0163)				

Tabela A.8: Veza $AR_{p,q}AB(1)$ modela sa inverznom gama raspodelom

N	\hat{a}		\hat{b}		\hat{a}		\hat{b}	
	$a = 0.50, b = 0.05$	$a = 0.50, b = 0.025$	$a = 0.50, b = 0.025$	$a = 0.50, b = 0.025$	$a = 0.50, b = 0.0167$	$a = 0.50, b = 0.0125$	$a = 0.50, b = 0.0125$	$a = 0.50, b = 0.0125$
10	0.5791 (0.1513)	0.3421 (0.1334)	0.5912 (0.1728)	0.1011 (0.0215)				
50	0.5107 (0.1101)	0.1556 (0.1265)	0.5224 (0.1203)	0.0913 (0.0167)				
100	0.4975 (0.0928)	0.1391 (0.1056)	0.5067 (0.1045)	0.0715 (0.0102)				
500	0.4716 (0.0864)	0.1262 (0.0609)	0.4913 (0.0987)	0.0659 (0.0087)				
1000	0.4700 (0.0795)	0.1002 (0.0290)	0.4856 (0.0814)	0.0527 (0.0057)				
5000	0.4653 (0.0413)	0.0912 (0.0088)	0.4812 (0.0134)	0.0407 (0.0024)				
10000	0.4616 (0.0092)	0.0851 (0.0010)	0.4801 (0.0089)	0.0324 (0.0008)				
	$a = 0.50, b = 0.0167$		$a = 0.50, b = 0.0125$		$a = 0.50, b = 0.0125$		$a = 0.50, b = 0.0125$	
10	0.5896 (0.1609)	0.2982 (0.0969)	0.5982 (0.1702)	0.0321 (0.0193)				
50	0.5348 (0.1123)	0.0902 (0.0158)	0.5498 (0.1204)	0.0301 (0.0121)				
100	0.5287 (0.0969)	0.0814 (0.0127)	0.5279 (0.1015)	0.0253 (0.0092)				
500	0.5131 (0.0871)	0.0715 (0.0101)	0.5117 (0.0901)	0.0203 (0.0066)				
1000	0.5072 (0.0817)	0.0604 (0.0047)	0.5038 (0.0717)	0.0198 (0.0061)				
5000	0.4981 (0.0400)	0.0309 (0.0011)	0.4972 (0.0424)	0.0179 (0.0035)				
10000	0.4932 (0.0089)	0.0233 (0.0008)	0.4912 (0.0090)	0.0127 (0.0002)				

Tabela A.9: Ocene parametara $GABAR(1)$ modela

N	\hat{p}	\hat{q}	\hat{a}	\hat{c}	\hat{p}_3
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, a = 0.25, b = 0.35, c = 0.45, p_1 = 0.3, p_2 = 0.0807, p_3 = 0.6193$					
10	0.8771 (0.5133)	3.9359 (2.8359)	0.3131 (0.0517)	0.3171 (0.2517)	0.5020 (0.2413)
50	0.6550 (0.1522)	2.7145 (0.7059)	0.2718 (0.0314)	0.3671 (0.1017)	0.5481 (0.0521)
100	0.6353 (0.0981)	2.5764 (0.4558)	0.2581 (0.0101)	0.3971 (0.0617)	0.5746 (0.0241)
500	0.6236 (0.0431)	2.5181 (0.1974)	0.2515 (0.0014)	0.4171 (0.0412)	0.5918 (0.0109)
1000	0.6209 (0.0305)	2.5107 (0.1399)	0.25 (0)	0.4381 (0.0212)	0.6095 (0.0071)
5000	0.6180 (0.0144)	2.4944 (0.0632)	0.25 (0)	0.4479 (0.0091)	0.6176 (0.0012)
10000	0.6177 (0.0099)	2.4921 (0.0435)	0.25 (0)	0.4481 (0.0018)	0.6178 (0.0007)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, a = 0.15, b = 0.25, c = 0.3, p_1 = 0.4144, p_2 = 0.1, p_3 = 0.4856$					
10	0.7979 (0.4544)	0.1928 (0.1153)	0.0714 (0.0814)	0.1874 (0.1412)	0.3662 (0.2418)
50	0.6189 (0.1450)	0.0819 (0.0363)	0.1030 (0.0241)	0.2001 (0.1051)	0.3808 (0.2110)
100	0.5944 (0.0963)	0.0687 (0.0253)	0.1181 (0.0181)	0.2117 (0.0812)	0.3939 (0.1018)
500	0.5805 (0.0430)	0.0576 (0.0111)	0.1390 (0.0010)	0.2564 (0.0414)	0.4370 (0.0316)
1000	0.5771 (0.0302)	0.0561 (0.0076)	0.1502 (0.0004)	0.2714 (0.0201)	0.4573 (0.0214)
5000	0.5766 (0.0134)	0.0547 (0.0034)	0.15 (0)	0.2891 (0.0110)	0.4678 (0.0101)
10000	0.5766 (0.0092)	0.0546 (0.0024)	0.15 (0)	0.2994 (0.0061)	0.4850 (0.0014)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, a = 0.2, b = 0.3, c = 0.3150, p_1 = 0.25, p_2 = 0.25, p_3 = 0.50$					
10	0.8299 (0.4932)	3.9596 (3.2849)	0.0971 (0.1012)	0.0741 (0.2141)	0.2098 (0.3541)
50	0.6298 (0.1460)	2.7300 (0.7409)	0.1218 (0.0141)	0.1513 (0.1981)	0.3220 (0.2010)
100	0.6106 (0.1040)	2.6266 (0.5013)	0.1817 (0.0095)	0.2181 (0.1011)	0.4010 (0.1015)
500	0.5926 (0.0439)	2.5423 (0.2054)	0.1919 (0.0009)	0.2417 (0.0481)	0.4265 (0.0794)
1000	0.5917 (0.0313)	2.5285 (0.1456)	0.2 (0)	0.2929 (0.0241)	0.4787 (0.0212)
5000	0.5899 (0.0131)	2.5231 (0.0651)	0.2 (0)	0.3079 (0.0101)	0.4932 (0.0121)
10000	0.5899 (0.0095)	2.5190 (0.0449)	0.2 (0)	0.3101 (0.0079)	0.4953 (0.0071)
Stvarne vrednosti: $p = 0.6, q = 2.5, a = 0.1, b = 0.2, c = 0.8218, p_1 = 0.0611, p_2 = 0.05, p_3 = 0.8889$					
10	0.8852 (0.5642)	4.0972 (4.1100)	0.2020 (0.2121)	0.5012 (0.3141)	0.6607 (0.2000)
50	0.6664 (0.1562)	2.7111 (0.7449)	0.1241 (0.0181)	0.6041 (0.2027)	0.7390 (0.1518)
100	0.6342 (0.1069)	2.5652 (0.4862)	0.1121 (0.0091)	0.6910 (0.1295)	0.8011 (0.1279)
500	0.6219 (0.0443)	2.5027 (0.1989)	0.1 (0)	0.7558 (0.0507)	0.8454 (0.0315)
1000	0.6181 (0.0311)	2.4855 (0.1426)	0.1 (0)	0.7814 (0.0301)	0.8629 (0.0174)
5000	0.6175 (0.0136)	2.4788 (0.0607)	0.1 (0)	0.8071 (0.0122)	0.8793 (0.0069)
10000	0.6177 (0.0100)	2.4930 (0.0451)	0.1 (0)	0.8204 (0.0084)	0.8880 (0.0047)

Tabela A.10: Veza $GABAR(1)$ modela sa inverznom gama raspodelom

N	\hat{a}		\hat{b}	
	$a = 0.50, b = 0.05$	\hat{b}	$\hat{a} = 0.50, b = 0.025$	\hat{b}
10	0.5616 (0.1437)	0.4021 (0.1796)	0.6092 (0.1800)	0.1085 (0.0246)
50	0.5263 (0.1167)	0.1681 (0.1208)	0.5396 (0.1314)	0.0999 (0.0179)
100	0.5009 (0.0999)	0.1399 (0.1123)	0.5001 (0.1191)	0.0808 (0.0119)
500	0.4826 (0.0834)	0.1212 (0.0515)	0.4933 (0.1024)	0.0719 (0.0094)
1000	0.4693 (0.0752)	0.1133 (0.0207)	0.4809 (0.0701)	0.0601 (0.0061)
5000	0.4613 (0.0538)	0.1019 (0.0086)	0.4791 (0.0113)	0.0415 (0.0023)
10000	0.4604 (0.0105)	0.0812 (0.0011)	0.4746 (0.0075)	0.0304 (0.0007)
<hr/>				
$a = 0.50, b = 0.0167$				
<hr/>				
10	0.6000 (0.1791)	0.2871 (0.0929)	0.5913 (0.1713)	0.0315 (0.0181)
50	0.5491 (0.1201)	0.0915 (0.0161)	0.5555 (0.1391)	0.0299 (0.0110)
100	0.5117 (0.0909)	0.0791 (0.0111)	0.5189 (0.1015)	0.0241 (0.0089)
500	0.5091 (0.0715)	0.0699 (0.0099)	0.5086 (0.0871)	0.0201 (0.0063)
1000	0.4999 (0.0614)	0.0581 (0.0045)	0.5001 (0.0695)	0.0183 (0.0059)
5000	0.4901 (0.0355)	0.0313 (0.0012)	0.4910 (0.0401)	0.0152 (0.0041)
10000	0.4856 (0.0080)	0.0228 (0.0007)	0.4909 (0.0081)	0.0126 (0.0002)

Indeks pojmove

Disperzija, 68, 103

Funkcija raspodele

n - dimenziona, 4

beta, 34

inverzna gama, 50

Kumaraswamy, 35

uslovna $ABAR(1)$ i $AB_{p,q}AR^*(1)$ modela, 106

uslovna $ARAB(1)$ i $AR_{p,q}AB^*(1)$ modela, 118

uslovna $ARAB(1)$ i $GABAR(1)$ modela, 124

uslovna WIGAR(1) i $LAB_{p,q}AR(1)$ modela, 89

Gustina raspodele

aproksimirana beta, 37

aproksimirana inverzne gama, 54

diskretna, 17

Konvergencija

skoro sigurna, 1, 67–74

u raspodeli, 1, 70, 93

u srednjem, 1

u verovatnoći, 1, 70–72, 92, 93, 121

Moment

beta raspodele, 34

inverzne gama raspodele, 53

Ocena gustine metodom jezgra, 25

Raspodela

beta, 79

aproksimirana beta, 35, 86, 87, 95, 97, 98, 100–103, 110, 111, 113, 115, 122

aproksimirana inverzna gama, 53, 86, 87, 95, 111

beta, 34, 97

inverzna gama, 50, 79, 86, 110, 122, 129

Kumaraswamy, 35, 82, 115

marginalna, 3

Pearson-ov tip I, 32

Pearson-ov tip V, 49

uniformna diskretna, 81, 82, 102, 114, 115

Slučajna promenljiva, 3, 84

Slučajni proces, 3

autokorelaciona funkcija, 58, 75, 89, 91, 105, 118, 124

autokovarijansna funkcija, 4, 58, 75, 89, 105, 118, 124

- autoregresivni, 6
 diskretni, 3
 ergodičnost, 5, 61, 62, 67–70, 72, 73
 filtracija, 3
 linearni, 8, 79, 80, 102
 $LAB_{1,q}AR(1)$ model, 81
 $LAB_{p,q}AR(1)$ model, 80, 82, 84
 $WIGAR(1)$ model, 87
 nelinearni, 8, 97
 $ABAR(1)$ model, 98, 105
 $AB_{1,q}AR^*(1)$ model, 101
 $AB_{p,q}AR^*(1)$ model, 102, 105
 $ARAB(1)$ model, 111
 $AR_{1,q}^*AB(1)$ model, 113, 114
 $AR_{p,q}^*AB(1)$ model, 115
 $GABAR(1)$ model, 122
 $ABAR(1)$ model, 100
 ocenjivanje
 metod minimalnog količnika, 92, 121
 UNK metoda, 60, 61, 63, 92, 108,
 120
 Yule–Walker-ova metoda, 60, 75, 77,
 121
 pokretnih sredina, 6
 sa slučajnim koeficijentima reda p , 57
 sa slučajnim koeficijentima reda 1, 105,
 118, 124
 slabo stacionaran, 4
 strogo stacionaran, 4
 trajektorija, 3, 82, 84, 85, 88, 100,
 105, 113, 115, 117, 123
 Specijalne funkcije
 beta, 15
 Delta Dirac, 16, 82
 digama, 14
 gama, 13
 Heavisideova, 16
 Hipergeometrijska, 17
 konfluentna hipergeometrijska, 18
 Krätzelova, 15
 nekompletna
 regularna beta, 15
 beta, 15
 donja gama, 14
 gornja gama, 14
 Wright-ova hipergeometrijska, 83, 103,
 104, 116, 120
 Wrightova hipergeometrijska, 18
 Transformacije
 inverzna Laplaceova, 21
 Laplace-ova, 79–83, 85–87, 89, 98, 99,
 102, 108, 112–114, 116, 120, 123,
 126
 beta raspodele, 34
 inverzne gamma raspodele, 52
 Laplaceova, 20
 dvostrana, 21, 23
 numeričko invertovanje, 27
 Mellinova, 23, 104