Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet

Mimica R. Milošević

ITERATIVNI METODI ZA APROKSIMACIJU NULA POLINOMA

- doktorska disertacija -

Niš, jun 2011.

Mojim najmilijim

Uvod

Nema istine u onim naukama u
kojima se matematika ne primenjuje

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

Određivanje nula polinoma ima veliki teorijski i praktičan značaj ne samo u matematici već i drugim naučnim disciplinama. Rešavanje polinomskih jednačina je jedan od najstarijih i, istovremeno, najvažnijih matematičkih problema jer se, osim primenjene matematike, javlja i u matematičkim modelima inženjerskih disciplina, kompjuterskim naukama, ekonomiji, fizici, itd. Ogroman broj radova i knjiga koji obrađuju ovu temu potvrđuje aktuelnost ovog problema.

Razvoj elektronskih računara omogućio je razvoj i praktičnu primenu sofisticiranih numeričkih algoritama za rešavanje polinomskih jednačina, od kojih najznačajnije mesto imaju postupci za istovremeno određivanje prostih i višestrukih nula polinoma. Uprkos velikom broju knjiga na ovu temu i više desetine hiljada publikovanih radova, istraživanja u ovoj oblasti još uvek su aktuelna. Naime, svaki od razvijenih algoritama pored specifičnih prednosti ima i određene nedostatke, što predstavlja izazov i motivaciju za dalja istraživanja u ovoj oblasti. Osnovni motiv i cilj ove disertacije je konstrukcija i analiza novih metoda velike računske efikasnosti za određivanje aproksimacija nula polinoma velike tačnosti. Ovo je omogućeno korišćenjem naprednih računarskih aritmetika, pre svega aritmetike višestruke preciznosti i intervalne aritmetike. Dok aritmetika višestruke preciznosti daje rezultate visoke tačnosti, kontrola greške vrši se uz pomoć intervalne aritmetike.

U disertaciji su razmatrane tri grupe problema: istovremeno određivanje svih nula polinoma u običnoj kompleksnoj aritmetici, istovremena inkluzija svih nula polinoma u kružnoj kompleksnoj intervalnoj aritmetici (aritmetici diskova) i inkluzija izolovane nule polinoma u aritmetici diskova. Za svaki od predloženih metoda ustanovljeni su početni uslovi koji obezbeđuju konvergenciju. Ovi uslovi imaju praktični značaj jedino ako zavise od raspoloživih podataka (na primer, od početnih aproksimacija ili početnih diskova koji sadrže nule polinoma i koeficijenata datog polinoma) tako da je ovom problemu posvećena posebna pažnja.

Sva poglavlja disertacije, osim prvog koje sadrži osnovne definicije, pojmove i poznate rezultate, sastoje se od originalnih rezultata, od kojih je veći deo publikovan ili prihvaćen za publikovanje u renomiranim inostranim časopisima za primenjenu matematiku i računarske nauke: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (Elsevier, kategorija M21), *Applied Mathematics and Computation* (Elsevier, kategorija M21), *Applied Mathematical Letters* (Elsevier, kategorija M22) i *Numerical Algorithms* (Springer, kategorija M23) i domaćem časopisu *Novi Sad Journal of Mathematics*. Nekoliko radova koji sadrže originalne rezultate prikazane u disertaciji nalazi se u postupku recenzije.

Disetacija se sastoji od sledećih poglavlja:

Uvod;

Oznake;

1. Iterativni metodi u kompleksnoj i intervalnoj aritmetici;
2. Poboljšani Farmer-Loizouov metod;
3. Novi metod četvrtog reda - garantovana konvergencija;
4. Novi intervalni metod za proste nule polinoma;
5. Novi intervalni metod za višestruke nule polinoma;
6. Ubrzani metodi Gargantini-Henricijevog tipa;
7. Ubrzani metod Halleyevog tipa za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma;
8. Metod kvadratnog korena za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma;
9. Inkluzija izolovane kompleksne nule polinoma;

Literatura.

Numerisanje svih definicija, lema, teorema, primera, algoritama i tabela izvršeno je prema rednom broju poglavlja u kome se javljaju i redosledu javljanja u okviru samog poglavlja.

Prvo poglavlje je preglednog karaktera i sastoji se od osam odeljaka. U Odeljku 1.1 dat je kratak istorijat razvoja iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina i uveden je pojam računske efikasnosti. Dat je i kratak pregled najčešće korišćenih iterativnih metoda: Newtonov metod, Halleyev metod, Eulerov metod, Laguerreov metod, metod Ostrowskog, Schröderov razvoj, Čebiševljev metod i višekoračni metodi. Odeljak 1.2 je posvećen definiciji konvergencije i R-reda konvergencije iterativnih metoda.

Primena metoda za istovremeno određivanje svih nula polinoma prevazilazi probleme numeričke stabilnosti koji se javljaju u procesu deflacije. Konstrukcija metoda za istovremeno nalaženje nula polinoma zasnovana je na korišćenju tzv. *nula-relacija* koje su oblika

$$\zeta_i = \phi_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

pri čemu su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ proste ili višestruke nule polinoma. Ako su poznate aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ ovih nula, tada je metod u kompleksnoj aritmetici dat iterativnom formulom

$$z_i^{(k+1)} = \phi_i(z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

U Odeljku 1.3 navedeno je nekoliko primera nula-relacija koje su bile osnova za konstrukciju nekih od najčešće korišćenih iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma. Takođe su navedeni neki poznati iterativni metodi zasnovani na nula-relaciji u običnoj kompleksnoj aritmetici za simultano nalaženje svih nula polinoma: Weierstrassov metod, Ehrlich-Abertov metod, Börsch-Supanov metod, metod tipa Ostrowskog i Wang-Zhengov metod, a dat je i pregled najčešće korišćenih korekcija za ubrzavanje konvergencije osnovnih metoda (Newtonova, Weierstrassova i Halleyeva korekcija).

Problem lokalizacije nula polinoma razmatran je u Odeljku 1.4, a pregled osnovnih osobina i operacija kompleksne intervalne aritmetike dat je u Odeljku 1.5. Ukoliko su poznati diskovi $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)}$ koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ($\zeta_i \in Z_i^{(0)}$), tada se primenom osobine inkluzivne izotonosti iz nula-relacije konstruiše intervalni metod

$$Z_i^{(k+1)} = \Phi_i(Z_1^{(k)}, \ldots, Z_n^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

sa osobinom da $\zeta_i \in Z_i^{(k)}$ ($i = 1, \ldots, n$) u svakoj iteraciji. Na ovaj način obezbeđena je informacija o gornjoj granici greške aproksimacije (date centrom rezultujućeg inkluzivnog diska) preko poluprečnika inkluzivnog diska. Ova kontrola greške je najveća prednost intervalnih metoda. Najpoznatiji simultani inkluzivni metodi: Weierstrassov metod, Gargantini-Henricijev metod, Petkovićev metod, metod tipa Ostrowskog i metod Halleyevog tipa opisani su u Odeljku 1.6.

U analizi konvergencije iterativnih metoda Smaleova teorija ocene u tački i pojam aproksimativne nule predstavljaju prekretnicu. Osnovna definicija i kraći pregled nekih rezultata o aproksimativnim nulama Newtonovog metoda dati su u Odeljku 1.7. U poslednjem odeljku opisan je metod korekcija za utvrđivanje dovoljnih uslova za garantovanu konvergenciju simultanih metoda.

Drugo poglavlje se sastoji od tri odeljka i u njemu je predložen ubrzani iterativni metod za simultanu aproksimaciju svih prostih nula polinoma $P(z)$. Dokazano je da se može ubrzati red konvergencije Farmer-Loizouovog metoda sa 4 na 5 bez dodatnih numeričkih izračunavanja, čime je dobijen poboljšani metod visoke računske efikasnosti. U Odeljku 2.1 izvršena je analiza konvergencije modifikovanog Farmer-Loizouovog metoda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1-u_iA_{2,i})}{1-2u_iA_{2,i}+\frac{u_i^2}{2}\Big(A_{2,i}^2-\sum_{j\neq i}\frac{1}{(z_i-z_j+u_j)^2}\Big)} \quad (i=1,\dots,n),$$

gde je

$$u(z)=\frac{P(z)}{P'(z)},\quad A_k(z)=\frac{P^{(k)}(z)}{k!P'(z)}\quad (k=2,3,\dots).$$

U sledećem odeljku izveden je zaključak da se ne može izvršiti ubrzavanje konvergencije modifikovanog Farmer-Loizouovog metoda primenjujući bolje aproksimacije od Newtonove. Rezultati numeričkih eksperimenata dobijenih primenom Farmer-Loizouovog metoda i modifikovanog Farmer-Loizouovog metoda izloženi su u Odeljku 2.3.

U Poglavlju 3 predložen je novi iterativni metod za simultano izračunavanje nula polinoma

$$\hat{z}_i = z_i - u_i - \frac{u_i^2\Big(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)}-u_i\Big(S_{1,i}^2-S_{2,i}\Big)\Big)}{2(1-u_iS_{1,i})^2},$$

gde je

$$S_{\lambda,i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{(z_i-z_j)^\lambda}\quad (\lambda=1,2).$$

U Odeljku 3.1 analizirane su osobine konvergencije predloženog metoda. Modifikacijom navedenog metoda dobijenom korišćenjem Newtonove i Halleyeve aproksimacije, u Odeljku 3.2 dobijeni su ubrzani iterativni metodi. Izložena je analiza konvergencije dobijenih ubrzanih iterativnih metoda, korišćenjem pristupa koji se zasniva na Smaleovoj teoriji [182] i dati su numerički primeri koji prikazuju brzinu konvergencije ubrzanih metoda.

Loša računska efikasnost kvadratno konvergentnih inkluzivnih metoda je glavna motivacija za konstrukciju efikasnijih metoda izloženih u četvrtom poglavlju. Zbog toga su u Poglavlju 3 predloženi intervalni metodi velike efikasnosti za simultano određivanje nula polinoma. Za osnovni metod reda 4 u Odeljku 4.3 izvršena je analiza konvergencije pod računski proverljivim početnim uslovima. U cilju povećanja brzine konvergencije predloženog intervalnog metoda primenjene su Newtonova i Halleyeva korekcija (Odeljak 4.5). Analiza konvergencije ovih metoda sa korekcijama, razmatrana u Odeljku 4.6, pokazuje da metod sa Newtonovom korekcijom ima red 5, a sa Halleyevom red 6. Osnovni metod i metodi sa korekcijama konvergiraju pod istim početnim uslovima koji su računski proverljivi, što je od velike praktične važnosti. Numerički primeri u Odeljcima 4.4 i 4.7 prikazuju veliku brzinu konvergencije predloženih metoda.

U petom poglavlju je izložena varijanta intervalnog metoda za simultano određivanje svih nula polinoma iz Poglavlja 4 u slučaju višestrukih nula polinoma. Analiza konvergencije predloženog intervalnog metoda data je u Odeljku 5.2 kao u [114], [117] i [132], pokazujući da je red metoda četiri. Povećanje brzine konvergencije postignuto je korišćenjem Schröderove i Halleyeve korekcije. Analiza konvergencije poboljšanih metoda prikazana je u Odeljku 5.6, a prikaz numeričkih rezultata u Odeljcima 5.3 i 5.7.

U šestom poglavlju predloženi su intervalni metodi sa ubrzanom konvergencijom koja je dobijena korišćenjem samo nekoliko dodatnih numeričkih operacija, što značajno povećava njihovu računsku efikasnost. U Odeljku 6.1 dat je Gargantini-Henricijev metod za inkluziju svih prostih nula polinoma, koji je ubrzan u Odeljku 6.2 korišćenjem pristupa izloženog u [21] i [120] primenom pogodnih korekcija. Primenjena je korekcija koja se javlja u dvo-koračnim metodima za rešavanje nelinearnih jednačina i konstruisan je novi inkluzivni metod sa korekcijama u obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \cfrac{1}{\cfrac{1}{u_i} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \cfrac{1}{z_i - Z_j + u_j + h(t_j)\,\cfrac{P(z_j-u_j)}{P'(z_j)}}},$$

gde je

$$t_j = \frac{P(z_j-u_j)}{P(z_j)} \quad (i = 1,\dots,n)$$

i h proizvoljna bar dva puta diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslove $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$ i $|h''(0)| < \infty$. U Odeljku 6.3 ocenjen je red konvergencije predloženog metoda i dokazano je da je donja granica R-reda konvergencije uvedene familije iterativnih metoda 6. Konvergencija pomenutih metoda ubrzana je primenom Gauss-Seidelovog pristupa, koji koristi već izračunate kružne aproksimacije u istoj iteraciji (Odeljak 6.4). Simultani metod za inkluziju višestrukih nula prikazan je u Odeljku 6.5. Konvergencija ovog metoda ubrzana je primenom Gauss-Seidelovog pristupa u Odeljku 6.6. U Odeljku 6.7 ukazuje se na računsku efikasnost i izvodi zaključak da predložena familija generiše najefikasnije metode za simultanu inkluziju nula polinoma u klasi metoda koji se zasnivaju na nula-relaciji u kružnoj kompleksnoj aritmetici. Prikaz odgovarajućih numeričkih primera dat je u Odeljku 6.8.

Sedmo poglavlje posvećeno je familiji inkluzivnih metoda visokog reda konvergencije koja se zasniva na Halleyevom metodu. Dobijeni metodi poseduju visoku računsku efikasnost, jer se povećanje reda konvergencije osnovnog metoda sa 4 na 7 postiže bez dodatnih izračunavanja funkcije i njenih izvoda. U Odeljku 7.1 je dat sledeći total-step metod četvrtog reda za simultanu inkluziju svih nula polinoma:

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\biggl(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Bigl[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z})\Bigr]\biggr) \quad (i = 1,\dots \nu),$$

gde je

$$S_{\lambda,i}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W}) := \sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\Bigl(\mathrm{INV}_1(z - X_j)\Bigr)^{\lambda} + \sum_{j=i+1}^{\nu}\mu_j\Bigl(\mathrm{INV}_1(z - W_j)\Bigr)^{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2),$$

a $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_\nu)$ i $\boldsymbol{W} = (W_1,\dots,W_\nu)$ su vektori čije su komponente diskovi i $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2$ označavaju tip inverzije diska. Navedeni metod je ubrzan korišćenjem Schröderove i Halleyeve korekcije, kao i korekcije koje se dobijaju iz metoda četvrtog reda za rešavanje nelinearnih jednačina $f(z) = 0$, koju su nedavno predložili Zhou, Chen i Song u [206]. Korišćenjem Gauss-Seidelovog pristupa dodatno je ubrzana konvergencija predloženih total-step metoda i dobijene su njihove single-step varijante. Na kraju poglavlja su dati numerički primeri.

Intervalni metodi zasnovani na nula-relaciji tipa Ostrowskog razvijeni su u osmom poglavlju. U Odeljku 8.1 dati su total-step i single-step metodi tipa Ostrowskog. Korišćenjem pristupa koji uključuje korekcije konstruisani su u Odeljku 8.2 modifikovani intervalni metodi. Dobijeni metodi poseduju veoma brzu konvergenciju ostvarenu na račun samo nekoliko dodatnih numeričkih operacija. Analiza konvergencije ovih ubrzanih total-step metoda je data u Odeljku 8.3, a njihove single-step varijante su opisane u Odeljku 8.4. Na kraju su izloženi numerički rezultati, u kojima se ističu prednosti predloženih intervalnih metoda tipa Ostrowskog u odnosu na neke poznate intervalne metode istog reda konvergencije.

U mnogim primenama je potrebno odrediti samo jednu nulu datog polinoma. Zbog toga su u devetom poglavlju razvijene verzije intervalnih metoda iz petog i osmog poglavlja za određivanje samo jedne proste ili višestruke kompleksne nule polinoma. U Odeljcima 9.1 i 9.2 je izložena analiza konvergencije predloženih metoda pod računski proverljivim početnim uslovima, što je od velike praktične važnosti.

Spisak direktno korišćenje ili citirane literature, koji sadrži 207 referenci, nalazi se na kraju rada.

Koristim i ovu priliku da još jednom izrazim zahvalnost svom mentoru, profesoru dr Miodragu S. Petkoviću, na velikoj posvećenosti i neprocenjivoj pomoći u izradi disertacije koja je i nastala pod njegovim rukovodstvom.

Takođe se zahvaljujem na saradnji i međusobnim diskusijama profesoru dr Snežani Ilić. Ova disertacija je dobrim delom i plod saradnje sa profesorom dr Ljiljanom Petković, kojoj se zahvaljujem na dragocenim sugestijama. Zahvalnost dugujem koleginicama docentu dr Lidiji Rančić i Jovani Džunić i profesoru dr Đorđu Hercegu na saradnji prilikom izrade zajedničkih radova.

Svoju zahvalnost dugujem svojoj porodici na razumevanju i saradnji. Posebnu zahvalnost dugujem i svojim roditeljima koji su oduvek bili uz mene.

Na kraju, zadovoljstvo mi je da se zahvalim svom suprugu i kolegi docentu dr Dušanu Miloševiću na nepresušnoj podršci i pomoći koju mi je pružio.

U Nišu, juna 2011. *Mimica R. Milošević*

Oznake

U disertaciji ćemo koristiti sledeće oznake:

- $\mathbb{N}$ – skup prirodnih brojeva;
- $\mathbb{R}$ – skup realnih brojeva;
- $\mathbb{C}$ – skup kompleksnih brojeva;
- $\mathbb{R}^n$ - vektorski prostor uređenih n-torki realnih brojeva;
- $\mathbb{C}^n$ - vektorski prostor uređenih n-torki kompleksnih brojeva;
- $\mathbb{K}(\mathbb{C})$ – skup diskova u kompleksnoj ravni;
- $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ – skup intervala realnih brojeva;
- $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ – skup pravougaonika u kompleksnoj ravni, čije su stranice paralelne koordinatnim osama;
- $|c|$ – moduo kompleksnog broja c;
- $\bar{c}$ – konjugovano kompleksni broj kompleksnog broja c;
- $\{x_k\}$, $\{x^{(k)}\}$ – niz brojeva ili vektora;
- $x^{(m)}$ – vrednost promenljive x u m-toj iteraciji;
- $\{c\,;\,r\} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - c| \le r\}$ – disk sa centrom c i poluprečnikom r;
- $\operatorname{mid} Z$ – centar diska $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$;
- $\operatorname{rad} Z$ – poluprečnik diska $Z \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$;
- $\mathbb{I}_n = \{1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$;
- za prirodan broj $n \ge 3$, sa $P_n(z)$ označavaćemo monični polinom n-tog stepena sa kompleksnim koeficijentima a_i, $i = 0, \dots, n-1$ i prostim $(\zeta_j, j \in \mathbb{I}_n)$ ili višestrukim nulama $(\zeta_j,\, j \in \mathbb{I}_\nu,\, \mu_1 + \cdots + \mu_\nu = n)$, to jest

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gde $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ označavaju redove višestrukosti nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$;

- $P_n^{(k)}(z_i)$ – k-ti izvod polinoma $P_n(z)$ u tački z_i;
- $f^{(k)}(z_i)$ – k-ti izvod funkcije $f(z)$ u tački z_i;
- tačna inverzija diska $Z = \{c; r\}$, $Z^{-1} = \dfrac{\{\bar{c}; r\}}{|c|^2 - r^2}$;
- centralna inverzija diska $Z = \{c; r\}$, $Z^{I_c} = \left\{\dfrac{1}{c}; \dfrac{r}{|c|(|c| - r)}\right\}$;
- kada se veličina F izračunava jednom pomoću vrednosti $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$, a drugi put pomoću vrednosti $z_1^{(m+1)}, \ldots, z_n^{(m+1)}$ i pri tome nije bitno da se naglasi konkretna vrednost iteracije m, pisaćemo kratko $z_1, \ldots, z_n$, odnosno $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$;
- kada dva kompleksna broja w_1 i w_2 zadovoljavaju relaciju $|w_1| = \mathcal{O}(|w_2|)$ (isti red modula), pisaćemo $w_1 \sim w_2$ ili $w_1 = \mathcal{O}_M(w_2)$;
- $\delta_{1,i} = \dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ z_i \in \mathbb{C})$;
- $\delta_{2,i} = \dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ z_i \in \mathbb{C})$;
- $A_k(z) = \dfrac{P^{(k)}(z)}{k!P'(z)} \quad (k = 2, 3, \ldots)$;
- Newtonova korekcija
$$u(z_i) = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ z_i \in \mathbb{C});$$
- Schröderova korekcija
$$v(z_i) = \mu_i \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ z_i \in \mathbb{C});$$
- Halleyeva korekcija
$$h(z_i) = \frac{P(z_i)}{\Big(\dfrac{1 + 1/\mu_i}{2}\Big)P'(z_i) - \dfrac{P(z_i)P''(z_i)}{2P'(z_i)}} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ z_i \in \mathbb{C});$$
- Sve korekcije ćemo označavati sa $C^{(k)}(z_i) \quad (k = 1, 2, \ldots)$;
- $\boldsymbol{Z}^{(m)} = (Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)})$ - tekući inkluzivni diskovi;

- $\boldsymbol{Z}_N^{(m)} = (Z_{N,1}^{(m)}, \ldots, Z_{N,n}^{(m)}),\ Z_{N,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - u(z_i^{(m)})$ - Newtonovi diskovi;
- $\boldsymbol{Z}_H^{(m)} = (Z_{H,1}^{(m)}, \ldots, Z_{H,n}^{(m)}),\ Z_{H,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - h(z_i^{(m)})$ - Halleyevi diskovi;
- $O_R(IM)$ - R-red konvergencije iterativnog metoda IM;
- $\mu = \min\limits_{1\le i\le \nu} \mu_i \quad (i \in \mathbb{I}_\nu)$;
- $r^{(m)} = \max\limits_{1\le i\le \nu} r_i^{(m)} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu, m = 0,1,2,\ldots)$;
- $\varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i \quad (i \in \mathbb{I}_\nu, m = 0,1,2,\ldots)$;
- $\epsilon^{(m)} = \max\limits_{1\le i\le \nu} |\varepsilon_i^{(m)}| \quad (i \in \mathbb{I}_\nu, m = 0,1,2,\ldots)$;
- $\rho^{(m)} = \min\limits_{\substack{1\le i,j\le \nu\\ i\ne j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}| - r_j^{(m)}\} \quad (i,j \in \mathbb{I}_\nu, m = 0,1,2,\ldots)$;
- $\Sigma_{k,i} = \sum\limits_{j\ne i} \dfrac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^k} \quad (k = 1,2,\ i,j \in \mathbb{I}_\nu)$;
- $s_{k,i} = \sum\limits_{j\ne i} \dfrac{\mu_j}{(z_i - z_j)^k} \quad (k = 1,2,\ i,j \in \mathbb{I}_\nu)$;
- $S_{k,i}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{W}) = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(z - X_j)\Big)^k + \sum\limits_{j=i+1}^{\nu} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(z - W_j)\Big)^k$, za $k = 1,2$, gde su $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_\nu)$ i $\boldsymbol{W} = (W_1, \ldots, W_\nu)$ vektori, čije su komponente diskovi, a $\mathrm{INV}_1 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$ jedna od uvedenih inverzija;
- U tabelama $A(-h)$ znači $A \times 10^{-h}$.

Sadržaj

Poglavlje 1

Iterativni metodi u kompleksnoj i intervalnoj aritmetici

1.1 Razvoj i značaj iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina

Problem rešavanja polinomskih jednačina je veoma važan zbog toga što se osim matematike javlja u matematičkim modelima inženjerskih disciplina, računarskih nauka, fizike, ekonomije, pa čak i u društveno-humanističkim naukama. Nalaženje nula polinoma jeste jedan od najstarijih i istovremeno najznačajnijih matematičkih problema. Istorijat razvoja ove oblasti izuzetno je bogat. Kroz više vekova ulagani su napori da se nule polinoma izraze u funkciji koeficijenata, koristeći pritom operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja, odnosno putem radikala.

Polinomska jednačina ima oblik

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

gde su $a_0, \ldots, a_n$ realni ili kompleksni koeficijenti. Ako je $a_n \neq 0$ tada kažemo da je polinom $P(x)$ n-tog stepena. Broj ξ za koje je $P(\xi) = 0$ zove se nula polinoma. Termini nula polinoma i koren polinoma ravnopravno se koriste, mada je ispravnije reći koren polinomske jednačine. Nula ξ ima red ili višestrukost m, ako je moguća faktorizacija

$$P(x) = (x - \xi)^m Q(x),$$

gde je $Q(\xi) \neq 0$ i $Q(x)$ je polinom stepena $n - m$. Ako je $m = 1$, kaže se da je nula ξ prosta.

Vavilonci su znali da potpuna kvadratna jednačina ima dva rešenja (ukoliko su pozitivna). Pojam negativnog i kompleksnog broja nastao je upravo iz potrebe praktičnog rešavanja polinomskih jednačina. Uprkos činjenici da je razvijen veliki broj algoritama za nalaženje nula polinoma, nemoguće je izdvojiti neki algoritam kao najbolji. Značajne rezultate u algebarskom rešavanju jednačina dao je F. Viète (1540–1603). On je prvi koristio uopštene koeficijente i služio se samo algebarskim postupcima. Italijanski matematičari, G. Cardano (1501–1576) i N. Tartalja (1500–1577) dali su algebarsko rešenje jednačine trećeg stepena, a Ferrari (1522–1562) je rešio jednačinu četvrtog stepena. G. Cardano je dao algebarsko rešenje jednačine trećeg stepena bez posmatranja slučajeva u kojima su se javljali koreni iz negativnih brojeva. Te nedostatke ispravili su R. Bombeli i L. Ferrari koji su dali algebarsko rešenje jednačine četvrtog stepena. U daljim istraživanjima norveški matematičar N. H. Abel dokazao je u radu iz 1828. da se opšta algeraska jednačina petog stepena ne može rešiti putem radikala. Francuski matematičar E. Galois (1811–1832) je dokazao nemogućnost rešavanja, pomoću radikala, opšte algebarske jednačine stepena većeg od četiri. Nule algebarskog polinoma, stepena većeg od četiri, u opštem slučaju se ne mogu izraziti eksplicitnom formulom pomoću koeficijenata polinoma, a pri tom su formule već u slučaju polinoma trećeg i četvrtog stepena veoma komplikovane i gotovo neprimenljive.

Galoisovo otkriće bilo je prekretnica za razvoj numeričkih metoda za rešavanje algebarskih jednačina. Izvesno je da su najefikasniji numerički metodi iterativni procesi. Treba napomenuti da iterativni metodi nisu jedini praktično upotrebljivi metodi. Poslednjih godina konstruisani su postupci koji problem nalaženja nula polinoma svode na problem sopstvenih vrednosti odgovarajućih matrica. S obzirom da se za nalaženje sopstvenih vrednosti matrica koriste iterativni metodi, to se ni prethodno navedeni metodi ne mogu smatrati direktnim.

Kod rešavanja algebraskih jednačina prvi algoritmi bili su zasnovani na principu deflacije. U postupku deflacije, prvo se, nekim algoritmom, određuje jedna nula ζ_1 polinoma $P_n(z)$. Zatim se polinom $P_n(z)$ deli linearnom funkcijom $z-\zeta_1$ i dobijeni polinom je $P_{n-1}(z)$. Nule polinoma $P_{n-1}(z)$ su, ujedno, preostale nule polinoma $P_n(z)$. Postupak se dalje rekurzivno ponavlja dok sve nule polinoma nisu određene. Opisani postupak je numerički nestabilan. Tokom izračunavanja, u svakom koraku, se javljaju greške zaokruživanja i one se tokom postupka nagomilavaju. Aproksimativne vrednosti nula, koje se koriste u postupku deflacije, dovode do pogrešnih vrednosti koeficijenata redukovanog polinoma. Taj problem je moguće delimično ublažiti korišćenjem programskih paketa sa aritmetikom koja koristi veliki broj značajnih cifara, ali je cena drastično usporavanje brzine izvršavanja.

Navedeni nedostaci sukcesivne deflacije doprineli su, u novije vreme, usmerenosti sve veće pažnje ka iterativnim metodima kod kojih se sve nule polinoma određuju istovremeno, kao i implementaciju iterativnih metoda na paralelnim računarima. Pri tom se polazi od izvesnih polaznih aproksimacija za nule polinoma. Na taj način, omogućava se kontrola greške pri svim izračunavanjima i određuju se oblasti u kojima su tražene nule. S druge strane, implementacija na paralelnim računarima smanjuje vreme računanja.

Iterativni metodi zasnovani su na sukcesivnom izračunavanju aproksimacija $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ primenjujući neki algoritam

$$x_{k+1} = \Phi(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-r}) \tag{1.1}$$

iterativne prirode i polazeći od početnih aproksimacija $x_0, \ldots, x_r$ nule ζ date funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funkcija Φ je iterativna funkcija. Ako je $r = 0$, onda je sa (1.1) definisan jednotačkasti metod, a ako je $r \geq 1$, u pitanju je metod sa memorijom. Ukoliko niz $\{x_k\}$ generisan iterativnim procesom (1.1) konvergira ka rešenju ζ, to jest

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \zeta,$$

tada je iterativni proces (1.1) konvergentan. Ukoliko se iterativni metod konstruiše korišćenjem novih informacija $w_1(x_k), \ldots, w_n(x_k)$ u tački x_k pri izračunavanju nove aproksimacije

$$x_{k+1} = \Phi[x_k, w_1(x_k), \ldots, w_n(x_k)], \tag{1.2}$$

tada funkcija Φ definiše višetačkasti iterativni metod.

Iterativni metod IM je utoliko efikasniji ukoliko se postavljeni zadatak izvrši za što kraće vreme. Računska efikasnost nekog iterativnog metoda definiše se uvođenjem koeficijenta efikasnosti $E(\mathrm{IM})$. Efikasnost se može uvesti na više načina, ali tako da je proporcionalna redu konvergencije iterativnog metoda (to jest brzini izvršavanja algoritma do ispunjavanja nekog kriterijuma ili zadate tačnosti) i obrnuto proporcionalna obavljenom radu, recimo broju izračunavanja funkcija ili numeričkih operacija po iteraciji. Traub je u [188] definisao koeficijent efikasnosti pomoću formule

$$E(\mathrm{IM}) = \frac{r}{d},$$

gde je r red konvergencije iterativnog metoda IM za rešavanje jednačine $f(x) = 0$ i d ukupan broj izračunavanja funkcija i njenih izvoda po iteraciji.

Koristeći iste podatke Ostrowski je u [103] uveo efikasnost

$$E(\mathrm{IM}) = r^{1/d}.$$

Opširnija diskusija o meri efikasnosti iterativnih metoda data je u knjizi M. Petkovića [113, Pogl. 6].

Newtonov metod

Teorija iterativnih procesa za rešavanje jednačina bogata je značajnim rezultatima među kojima je svakako metod engleskog matematičara i fizičara I. Newtona (1643–1727) iz 1669. U modernom obliku Newtonov metod definisan je iterativnom formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.3}$$

startujući od početne aproksimacije x_0, podrazumevajući da je funkcija f definisana i neprekidna zajedno sa svojim prvim izvodom f' na intervalu $[a, b]$ i $f'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.

Prvu sistematsku analizu Newtonovog metoda dao je njegov savremenik J. Raphson 1690., pa se ovaj metod u literaturi sreće kao Newton-Raphsonov metod. Zbog geometrijske interpretacije naziva se i metodom tangente. Značaj i efikasnost Newtonovog metoda ima opšti karakter, jer se osim za nalaženje izolovanih korena nelinearnih jednačina može primeniti i za rešavanje sistema nelinearnih jednačina, diferencijalnih i integralnih jednačina, optimizacionih problema, itd. Red konvergencije ovog metoda je dva, što je prvi dokazao J. Fourier [36].

Za određivanje višestruke nule poznate višestrukosti μ Schröder je dao metod

$$x_{k+1} = x_k - \mu \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.4}$$

koji je jedna modifikacija Newtonovog metoda [102], [189].

Halleyev metod

Čuveni engleski astronom i matematičar E. Halley (1656–1742) je nastavio istraživanja Newtona i Raphsona u oblasti nelinearnih jednačina i 1694. je predložio iterativni metod koji je u modernoj terminologiji dat iterativnom formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.5}$$

sa kubnom konvergencijom. Metod se u ruskoj literaturi može naći pod imenom Salehovljev metod [174]. Zbog geometrijske interpretacije naziva se i metodom tangentnih hiperbola, a u upotrebi je i termin racionalni Halleyev metod (videti [174], [175], [188]). Uslove za globalnu konvergenciju ovog metoda dali su Davies i Dawson [25]. Odgovarajuća modifikacija metoda trećeg reda za određivanje višestruke nule reda μ data je iterativnom formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2\Big(1 + \dfrac{1}{\mu}\Big) - f(x_k)f''(x_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1.6}$$

Eulerov metod

Veliki švajcarski matematičar L. Euler (1707–1783) konstruisao je jedan vek posle Newtona iterativni metod korenskog tipa [188], oblika

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1.7}$$

U literaturi je ovaj metod poznat i kao iracionalni Halleyev metod. Za dovoljno malo $|f(x_k)|$ očigledno je da ispred korena treba izabrati znak $+$, koji vodi do metoda koji se ponaša slično Newtonovom metodu. Izbor znaka $-$ prouzrokovao bi oduzimanje bliskih vrednosti u imeniocu i deljenje vrlo malim brojem, što bi dovelo do prekida iterativnog procesa. O izboru znaka videti više u [46], [156].

Laguerreov metod

Francuski matematičar E. Laguerre (1834–1886) je izveo metod korenskog tipa sa kubnom konvergencijom [82]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\lambda f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2 f'(x_k)^2 - \lambda(\lambda-1)f(x_k)f''(x_k)}} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.8}$$

gde je $\lambda \neq 0, 1$ realan broj. Rezultat je objavljen tek 1898. u knjizi H. Poincarea. Osim kubne konvergencije ovaj metod poseduje i brojne dobre osobine, kao što su mala osetljivost na početne aproksimacije, dobro ponašanje za velike (po modulu) početne aproksimacije, globalnu konvergenciju u slučaju realnih polinoma sa realnim nulama. Osim toga, konstrukcija metoda za istovremeno nalaženje nula polinoma u običnoj i intervalnoj kompleksnoj aritmetici ima dobru osnovu upravo u Laguerreovoj iterativnoj formuli. Ovaj metod je dosta proučavan u literaturi, na primer u [11], [27], [35], [53], [67], [105].

Metod Ostrowskog

Ovaj metod razvijen je 1966. i spada u grupu korenskih metoda. Oblika je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\pm\sqrt{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}} \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.9}$$

i ima kubnu konvergenciju [102].

Schröderov razvoj

Schröderov razvoj je jedan od značajnijih rezultata na polju iterativnih procesa. Za nulu ζ funkcije f i njenu aproksimaciju a Schröderov razvoj ima oblik

$$\zeta = a - u - \frac{1}{2!}\,\gamma_2 u^2 + \frac{1}{3!}\,(3\gamma_2^2 - \gamma_3)u^3 + \cdots\,, \tag{1.10}$$

gde je $u = f(a)/f'(a)$ Newtonova korekcija, a $\gamma_k = f^{(k)}(a)/f'(a)$, $k = 2,3,\ldots$. Schröderov razvoj (1.10) naziva se još i osnovnim razvojem [179]. Uzimanjem r članova ovog razvoja i zamenom nule ζ novom aproksimacijom x_{k+1} dobija se iterativni metod reda konvergencije r. Specijalno, za $r = 2$ se dobija Newtonov metod. Osnovni razvoj se primenjuje pri konstrukciji iterativnih postupaka visokog reda konvergencije i kod analitičkog utvrđivanja reda konvergencije iterativnih metoda.

Čebiševljev metod

Čebiševljev metod se može dobiti iz osnovnog razvoja (1.10) za slučaj $r = 3$ i može se još sresti pod nazivom Euler-Čebiševljev metod, a oblika je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left(1 + \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)^2}\right) \quad (k = 0,1,\ldots). \tag{1.11}$$

Značajno je napomenuti da se ovi metodi mogu dobiti iz jednoparametarske familije iterativnih metoda prikazane u radu Hansena i Patrika [53].

Potreba za rešavanjem nelinearnih jednačina bila je prisutna uvek, naročito kod inženjera i naučnika u oblasti prirodnih nauka. Međutim, tek poslednjih šezdesetak godina, sa razvojem računara, pojavio se veliki broj iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina, kao i modifikacije postojećih. Analiza velikog broja tih metoda može se naći u monografijama Trauba [188], Ostrowskog [102], Ortege i Rheinboldtha [101] i Sendova, Andrejeva i Kyurkchieva [180].

Višekoračni metodi

Postizanje veće računske efikasnosti za nalaženje nule ξ funkcije $f(x)$ nije moguće čak i uvođenjem dodatnih izvoda višeg reda, videti Traubovu analizu u [188]. Iz ovih razloga uvode se višekoračni ili višetačkasti metodi (oba termina su ravnopravno zastupljena u literaturi). Sledeća teorema daje osnovnu ideju za njihovu konstrukciju [155]:

Teorema 1.1 *Neka su Φ_1 i Φ_2 iterativne funkcije čiji su redovi konvergencije r_1 i r_2. Tada iterativna funkcija konstruisana kompozicijom $\Phi_3(x) = \Phi_2(\Phi_1(x))$ ima red konvergencije $r_3 = r_1 r_2$.*

Uopštenje ove teoreme dato je sledećom teoremom:

Teorema 1.2 *Ako su iterativne funkcije $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ reda $r_1, r_2, \ldots, r_p$, tada je kompozitna iterativna funkcija (p-**koračni metod**)*

$$\Phi(x) = \Phi_p\Big(\Phi_{p-1}(\cdots(\Phi_1(x))\cdots)\Big)$$

reda $r_1 r_2 \cdots r_p$.

U literaturi su se pojavili brojni algoritmi koji su kombinovali različite metode u cilju dobijanja višekoračnih metoda. Mnogi od njih imaju manju računsku efikasnost nego pojedini jednokoračni metodi upotrebljeni u kompoziciji metoda. Da bi se održao visok red konvergencije i istovremeno povećala računska efikasnost višekoračnih metoda, razrađeni su različiti postupci koji daju bolje rezultate nego direktna kompozicija više metoda.

Kompoziciju iterativnih funkcija treba vršiti tako da se broj izračunavanja funkcije smanjuje i na taj način povećava računska efikasnost. Posmatrajmo modifikaciju Newtonovog metoda kod koga se f' izračunava u svakom drugom koraku, to jest neka je

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}. \tag{1.12}$$

Kombinovanjem formula (1.12) dobija se metod

$$x_{k+1} = x_k - u(x_k) - \frac{f(x_k - u(x_k))}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.13}$$

koji ima red konvergencije tri i pri tom je $u(x) = f(x)/f'(x)$.

Kombinovanjem Newtonovog metoda i metoda sečice

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad x_{k+1} = z_k - f(z_k)\left[\frac{z_k - x_k}{f(z_k) - f(x_k)}\right]$$

dobija se metod

$$x_{k+1} = x_k - u(x_k) + \frac{u(x_k) f(x_k - u(x_k))}{f(x_k - u(x_k)) - f(x_k)} = x_k + \frac{u(x_k) f(x_k)}{f(x_k - u(x_k)) - f(x_k)}. \tag{1.14}$$

Dvokoračni metodi (1.13) i (1.14) imaju red konvergencije tri i zahtevaju tri izračunavanja funkcija po iteraciji. Njihova računska efikasnost je

$$E(1.13) = E(1.14) = 3^{1/3} \approx 1.442,$$

što je jednako efikasnosti Halleyevog metoda (1.5). Ukoliko se kompozicija metoda sprovede pogodno može dovesti do veoma efikasnih metoda kao što je dvokoračni metod Ostrowskog [103]

$$x_{k+1} = \phi(x_k) := x_k - u(x_k) - \frac{u(x_k) f(x_k - u(x_k))}{f(x_k) - 2f(x_k - u(x_k))} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.15}$$

koji ima red konvergencije četiri. Metod Ostrowskog (1.15) zahteva samo tri izračunavanja funkcije i njegova računska efikasnost je

$$E(1.15) = 4^{1/3} \approx 1.587.$$

Mogu se konstruisati i višekoračni metodi interpolacionog tipa (Traub [188]). U postupku konstrukcije takvih metoda viši izvodi se zamenjuju izvodima nižeg reda funkcije f izračunatim u izvesnom broju tačaka. Navodimo neke višekoračne metode interpolacionog tipa

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k - u(x_k)/2)} \quad (k = 0, 1, \ldots), \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + f'(x_k - u(x_k))} \quad (k = 0, 1, \ldots), \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2}\left[u(x_k) + \frac{f(x_k)}{f'(x_k - u(x_k))}\right] \quad (k = 0, 1, \ldots).
\end{aligned}$$

Navedeni metodi su trećeg reda.

Višekoračni metodi mogu biti zasnovani na aproksimaciji izvoda. Kao primer se može navesti jednoparametarska dvokoračna familija iterativnih metoda, koja je razmatrana detaljno u radovima [109], [144]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\alpha+1)u(x_k)}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)\dfrac{f(x_k - u(x_k))}{f(x_k)}}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1.16}$$

Pri konstrukciji familije (1.16) podrazumevamo da je $\alpha \neq -1$. Za konačnu vrednost parametra $\alpha \neq 1$ red konvergencije familije (1.16) je tri, a za $\alpha = 1$ red konvergencije je jednak četiri (metod Eulerovog tipa). Svi metodi familije dvokoračnih metoda (1.16) zahtevaju tri izračunavanja po iteraciji i imaju efikasnost

$$E((1.16)_{\alpha \neq 1}) = 3^{1/3} \approx 1.442, \tag{1.17}$$

$$E((1.16)_{\alpha = 1}) = 4^{1/3} \approx 1.587. \tag{1.18}$$

Šezdesetih i sedamdesetih godina dvadesetog veka velika pažnja bila je posvećena višekoračnim metodima visokog reda konvergencije, videti Jarrat [65], King [72], Kung i Traub [80] i Traub [188]. U prvoj dekadi ovog milenijuma došlo je do neočekivane ekspanzije numeričkih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina, uglavnom višekoračnih metoda. Jedan deo ovih metoda je u stvari samo ponovo otkriven i može se naći u Traubovoj knjizi [188]. Pravi doprinos doneli su radovi u kojima su konstruisani metodi visoke računske efikasnosti.

Glavni cilj i motivacija u konstrukciji novih metoda je postizanje što je moguće veće računske efikasnosti, odnosno poželjno je ostvariti što je moguće veći red konvergencije sa fiksnim brojem izračunavanja funkcija po iteraciji. U slučaju višekoračnih metoda bez memorije, ovaj zahtev je blisko povezan sa optimalnim redom konvergencije razmatranim u hipotezi koju su postavili Kung i Traub [80]:

Kung-Traubova hipoteza. *Višekoračni iterativni metodi bez memorije, koji zahtevaju $n+1$ izračunavanja funkcija po iteraciji, imaju red konvergencije najviše 2^n.*

Navodimo primere dvo-koračnih metoda četvrtog reda:

- *Metod Ostrowskog* [103]:

$$O_f(x) = x - u(x) - \frac{f(x-u(x))}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - 2f(x-u(x))};$$

- *Jarrattov metod* [65]:

$$J_f(x) = x - \frac{1}{2}\, u(x) + \frac{f(x)}{f'(x) - 3f'(x - 2u(x)/3)};$$

- *Kingova familija* [72]:

$$K_f(\alpha; x) = x - u(x) - \frac{f(x-u(x))}{f'(x)} \cdot \frac{f(x) + \alpha f(x-u(x))}{f(x) + (\alpha-2)f(x-u(x))},$$

  gde je α parametar.

1.2 Definicija reda konvergencije i *R*-reda konvergencije

Brzina konvergencije iterativnog metoda

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1.19}$$

definiše se redom konvergencije.

Definicija 1.1 Za niz $\{x_k\}$ definisan iterativnom formulom (1.19), koji konvergira ka ξ, kaže se da ima red konvergencije r ako je

$$\|x_{k+1} - \xi\| = \mathcal{O}(\|x_k - \xi\|^r),$$

to jest, ako postoji konstanta C_r takva da je za dovoljno veliko k

$$\|x_{k+1} - \xi\| \le C_r \|x_k - \xi\|^r. \tag{1.20}$$

U literaturi se sreće i sledeća ekvivalentna definicija:

Definicija 1.2 Ako postoji realan broj r i konstanta $C_r \neq 0$ takva da

$$\frac{\|\Phi(x_k) - \xi\|}{\|x_k - \xi\|^r} \to C_r \quad \text{kad } k \to \infty \tag{1.21}$$

tada je r red konvergencije niza definisanog pomoću $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, a C_r je faktor konvergencije ili asimptotska konstanta greške.

Ukoliko red konvergencije postoji on je jedinstven. Napomenimo da je red konvergencije iterativnih procesa oblika (1.19) uvek ceo broj.

Korišćenje Definicija 1.1 i 1.2 u nekim slučajevima ne omogućava određivanje reda konvergencije. Dobra ilustracija za nedostatak ovih definicija je analiza konvergencije n zavisnih nizova, videti poglavlje 12 monografije [155]. Ortega i Rheinboltd su u knjizi [101] ukazali na nedostatke klasične definicije reda konvergencije i uveli jedan drugačiji pristup pojmu reda konvergencije iterativnih procesa u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.3 Neka je IM iterativni metod koji konvergira ka graničnoj tački $\boldsymbol{\xi}$ i neka je $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ proizvoljan niz u $\mathbb{R}^n$ koji konvergira ka tački $\boldsymbol{\xi}$. Tada se brojevi

$$R_m(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{\xi}\|^{1/k}, & \text{ako je } m = 1, \\ \limsup\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{\xi}\|^{1/m^k}, & \text{ako je } m > 1, \end{cases}$$

nazivaju korenski faktori konvergencije ili kraće R-faktori. Ako je $\mathcal{S}(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi})$ skup svih nizova generisanih pomoću IM koji konvergiraju ka $\boldsymbol{\xi}$, tada se veličina

$$R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = \sup\{R_m(\boldsymbol{x}^{(k)}) \,:\, \{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \in \mathcal{S}(\mathrm{IM}, \boldsymbol{x})\} \quad (1 \le m < +\infty)$$

zove R-faktor konvergencije iterativnog metoda u tački $\boldsymbol{\xi}$.

Ako niz $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ konvergira ka tački $\boldsymbol{\xi}$, tada postoji broj $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 \le \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{\xi}\| \le 1, \quad \text{za svako } k \ge k_0,$$

pa na osnovu Definicije 1.3 zaključujemo da je $0 \le R_m(\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}) \le 1$ za svako $m \ge 1$.

Navodimo, bez dokaza, sledeće teoreme (videti [101]):

Teorema 1.3 *Neka je* $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ *proizvoljan niz koji konvergira ka tački* $\boldsymbol{\xi}$. *Faktor* $R_m(\{\boldsymbol{x}^{(k)}\})$ *ne zavisi od izbora norme u* $\mathbb{R}^n$ *ni za jedno* $m \in [1, +\infty)$. *Pored toga, R-faktor* $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi})$ *iterativnog metoda* IM *je takođe nezavisan od izbora norme.*

Teorema 1.4 *Ako je* IM *iterativni metod koji konvergira ka tački* $\boldsymbol{\xi}$, *tada važi jedan od sledećih uslova:*

1. $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ *za svako* $m \in [1, +\infty)$.
2. $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 1$ *za svako* $m \in [1, +\infty)$.
3. *Postoji* $m_0 \in [1, +\infty)$ *takvo da je* $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ *za svako* $m \in [1, m_0)$ *i* $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 1$ *za svako* $m \in [m_0, +\infty)$.

Definicija R-reda konvergencije uvodi se korišćenjem pojma R-faktora na sledeći način:

Definicija 1.4 R-red konvergencije iterativnog metoda IM u tački $\boldsymbol{\xi}$ je veličina

$$O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} +\infty, \text{ ako je } R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ za svako } m \in [1, +\infty), \\[2ex] \inf\{m \in [1, +\infty) \ : \ R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = 1\} \text{ u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Izbor norme u $\mathbb{R}^n$ ne utiče na ovako definisan R-red konvergencije. Osim toga, napomenimo da važe i sledeća tvrđenja:

1) Ako je $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) < 1$ za neko $m \in [1, +\infty)$, tada je $O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) \geq m$.
2) Ako je $R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) > 0$ za neko $m \in [1, +\infty)$, tada je $O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) \leq m$.
3) Ako je $0 < R_m(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) < 1$ za neko $m \in [1, +\infty)$, tada je $O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\xi}) = m$.

Brzina konvergencije iterativnih metoda IM_1 i IM_2 se upoređuje korišćenjem sledećeg postupka:

1) Prvo upoređujemo R-redove, tj. veličine $O_R(\mathrm{IM}_1, \boldsymbol{\xi})$ i $O_R(\mathrm{IM}_2, \boldsymbol{\xi})$. Brži je onaj metod koji ima veći R-red.
2) Ako je $O_R(\mathrm{IM}_1, \boldsymbol{\xi}) = O_R(\mathrm{IM}_2, \boldsymbol{\xi})$, tada je neophodno uporediti R-faktore. Brži je onaj iterativni metod koji ima manji R-faktor.

Potreba za određivanjem R-reda konvergencije javlja se pri analizi konvergencije iterativnih metoda za istovremeno nalaženje svih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P. Neka su $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ aproksimacije svih nula dobijene u k-toj iteraciji i neka je

$$h_i^{(k)} = |x_i^{(k)} - \zeta_i| \quad (i \in \mathbb{I}_n, \ k = 0, 1, \ldots),$$

gde je $\mathbb{I}_n := \{1, \dots, n\}$ indeksni skup, a k redni broj iteracije. Pretpostavimo da za primenjeni iterativni metod IM važe sledeće relacije za $i \in \mathbb{I}_n$

$$h_i^{(k+1)} \leq \frac{1}{n-1}(h_i^{(k)})^p \left(\sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} (h_j^{(k)})^q \right) \quad (k = 0, 1, \dots), \tag{1.22}$$

gde su p i q prirodni brojevi.

Klasa iterativnih metoda za koje se može izvesti relacija (1.22) produkuje nizove $z^{(k)}$ sa graničnom tačkom $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Sledeća teorema daje jedan praktičan način za određivanje R-reda konvergencije (videti [4], [113], [155]).

Teorema 1.5 *Pretpostavimo da su početne aproksimacije $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ izabrane tako da je*

$$h_i^{(0)} \leq h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i^{(0)} < 1 \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Pretpostavimo dalje da za iterativni metod IM *važe nejednakosti* (1.22). *Tada je iterativni metod* IM *konvergentan i za njegov R-red konvergencije važi*

$$O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\zeta}) \geq p + t_n(p, q),$$

gde je $t_n(p, q)$ jedinstveni pozitivan koren jednačine

$$t^n - tq^{n-1} - pq^{n-1} = 0.$$

Donja granica R-reda konvergencije razmatrane klase iterativnih metoda date Teoremom 1.5 je oštra, ali zahteva rešavanje polinomske jednačine i iznosi $p + t_n(p, q)$. S druge strane, može se odrediti donja granica R-reda konvergencije, koja nije tako oštra, ali za čije nalaženje nije potrebno rešavanje jednačina. Jednostavna procena donje granice R-reda konvergencije, koja je sasvim zadovoljavajuća u praksi, data je sledećom teoremom (videti [147]).

Teorema 1.6 *Neka je* IM *iterativni metod za koji važe relacije* (1.22), *i neka je $\boldsymbol{\zeta}$ njegova granična tačka. Tada je*

$$O_R(\mathrm{IM}, \boldsymbol{\zeta}) > p + q + \frac{pq}{(n-1)(p+q)}.$$

Pri ispitivanju brzine konvergencije iterativnih metoda za istovremeno nalaženje nula polinoma, koji koriste korekcije, javlja se potreba za analizom konvergencije više međusobno zavisnih nizova (videti Poglavlje 12 u monografiji [155]). Neka su $\{x_1^{(k)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}$ (realni ili kompleksni) nizovi aproksimacija koji konvergiraju nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ datog polinoma P, tj., $x_i^{(k)} \to \zeta_i$ kada $k \to \infty$. Uvedimo nizove grešaka aproksimacija $\{|\varepsilon_i^{(k)}|\}$ pomoću

$$|\varepsilon_i^{(k)}| = |x_i^{(k)} - \zeta_i| \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 0, 1, \ldots)$$

i neka ovi nizovi zadovoljavaju sistem sledećih nejednakosti

$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leq \alpha_i \prod_{j=1}^{n} (|\varepsilon_j^{(k)}|)^{m_{ij}} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 0, 1, \ldots), \tag{1.23}$$

pri čemu je $m_{ij} \geq 0,\ \alpha_i > 0$.

R-red konvergencije iterativnih metoda najčešće određujemo korišćenjem Teoreme Herzberger-Metznera razmatrane u radu [60].

Teorema 1.7 *Neka za nizove grešaka $\{\varepsilon_i^{(k)}\}$ važe nejednakosti* (1.23) *i neka je $M = (m_{ij})$ matrica eksponenata. Ako nenegativna matrica M ima spektralni radijus $\rho(M) > 1$ i odgovarajući sopstveni vektor $\boldsymbol{x} > 0$, tada svi nizovi $\{|\varepsilon_i^{(k)}|\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ imaju R-red najmanje $\rho(M)$.*

Na kraju ovog odeljka pomenimo da je od interesa proveriti koliki je red konvergencije pri praktičnoj primeni nekog iterativnog metoda i koliko odstupa od reda dobijenog teorijskom analizom. Pretpostavimo da nam je poznata tačna nula ξ i neka su $x_{k-1},\ x_k$ i x_{k+1} tri sukcesivne aproksimacije ove nule dobijene u iterativnom procesu reda r. Ako logaritmujemo približne relacije

$$\frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^r} \approx C, \quad \frac{|x_k - \xi|}{|x_{k-1} - \xi|^r} \approx C$$

i eliminišemo $\log C$, dobijamo računski red konvergencije

$$\tilde{r} \approx \frac{\log(|x_{k+1} - \xi|/|x_k - \xi|)}{\log(|x_k - \xi|/|x_{k-1} - \xi|)}. \tag{1.24}$$

Ova približna vrednost uglavnom dobro aproksimira teorijski red konvergencije r, pod uslovom da nema „patološkog" ponašanja iterativnog metoda (spora konvergencija u početku iterativnog procesa, „oscilovanje" aproksimacija i slično). S obzirom da je nula ξ nepoznata, koristeći faktorizaciju $f(x_k) = (x_k - \xi)g(x_k)$, iz (1.24) dobijamo formulu od praktičnog značaja

$$\tilde{r} \approx \frac{\log(|f(x_{k+1})|/|f(x_k)|)}{\log(|f(x_k)|/|f(x_{k-1})|)}. \tag{1.25}$$

1.3 Simultani metodi

Zbog ranije navedenih nedostataka numeričkih metoda koji koriste sukcesivno određivanje nula polinoma metodom deflacije, danas se sve više upotrebljavaju iterativni metodi koji omogućavaju istovremeno nalaženje svih nula polinoma polazeći od izvesnih početnih aproksimacija.

Metodi kod kojih je moguće istovremeno naći sve nule polinoma mogu se predstaviti u obliku

$$z_i^{(k+1)} = \Phi(z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}) \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 0, 1, \ldots). \tag{1.26}$$

Navedeni metodi nazivaju se simultani metodi. Kada redni broj iteracije nije od značaja, tekuća aproksimacija $z_i^{(k)}$, označava se za z_i, a naredna iteracija sa $\hat{z}_i$. Relacija (1.26) se tada može napisati u obliku

$$\hat{z}_i = \Phi(z_1, \ldots, z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Postoji više pristupa za istovremeno određivanje svih nula polinoma: metod pretraživanja i isključivanja (Henrici [54]), metodi koji se zasnivaju na nula-relaciji (Börsch-Supan [12], [13], Ehrlich [29], Gargantini [40], [41], Henrici [56], Wang i Zheng [198], Petković i Rančić [149], Rančić i Petković [169], Rančić [167]), QD-algoritam (Henrici [56]).

Modifikacije metoda za nalaženje jedne nule pogodne funkcije razmatrali su Kanno, Kjurchiev i Yamamoto [68], Petković, Ilić i Tričković [130], Petković, Tričković i Herceg [156], Sakurai i Petković [171]. U razvoju metoda racionalnih aproksimacija značajan doprinos dali su Carstensen i Sakurai [22], Sakurai, Torii i Sugiura [172] i [173]. Metodi trodijagonalnih matrica su bili predmet proučavanja Brugnana i Trigiantea [18]. Matrični metodi sa svođenjem na problem sopstvenih vrednosti razmatrani su od strane Niua i Sakuraia [97], Fidlea [33], Maleka i Vaillancontoa [85], [86], Pana [104], Sakuraija, Kravanjae, Sugiureae i Braelaa [170]. Treba napomenuti i metode zasnovane na numeričkoj integraciji (Suzuki i Suzuki [185], [186], Suzuki, Suzuki, Muto [187]). Globalno konvergentne metode, koji se primenjuju interaktivno, dali su Farmer i Loizou [32].

Predmet našeg istraživanja su simultani metodi zasnovani na nula-relaciji. Nula relacije su oblika

$$\zeta_i = F(z_1, \ldots, z_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$

gde su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ proste kompleksne nule polinoma P, a $z_1, \ldots, z_n$ njihove aproksimacije. Kao osnov za konstrukciju simultanih metoda za određivanje nula polinoma posmatraćemo sledeća dva oblika nula-relacije:

$$\zeta_i = F_1(z_1, \dots, z_{i-1}, \zeta_i, z_{i+1}, \dots, z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.27}$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}, z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.28}$$

Kada tačne nule u relacijama (1.27) i (1.28) zamenimo njihovim aproksimacijama, tada stavljajući $z = z_i$ na desnoj strani u (1.28), dobijamo opšti oblik simultanih iterativnih metoda u kompleksnoj aritmetici

$$\hat{z}_i = F(z_1, \dots, z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.29}$$

Navešćemo nekoliko primera nula-relacija koje su bile osnova za konstrukciju nekih od najčešće korišćenih iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma (više detalja o izvođenju nula-relacija može se naći u monografiji [113]).

Primer 1.1 Nula-relacija Weierstrassovog tipa ([113], [155]), [198], je oblika

$$\zeta_i = z - \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z - \zeta_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.30}$$

Relacija (1.30) dobijena je iz polinoma P predstavljenog u faktorizovanom obliku

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j) = (z - \zeta_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z - \zeta_j).$$

Primer 1.2 Primenom logaritamskog izvoda na polinom P dobija se relacija

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{u(z)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} + \frac{1}{z - \zeta_i}. \tag{1.31}$$

Iz relacije (1.31) izvedena je nula-relacija Newtonovog tipa oblika

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{z - \zeta_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.32}$$

Primer 1.3 Neka su $z_1, \dots, z_n$ međusobno različiti kompleksni brojevi i neka važi da je $\zeta_i \notin \{z_1, \dots, z_n\}$, $i \in \mathbb{I}_n$. Primenom Lagrangeove interpolacije dobija se

$$P(z) = W_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z - z_j) + \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z - z_j) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W_j}{z - z_j} + 1 \right), \tag{1.33}$$

gde je

$$W_i(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z - z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Zamenom $z = \zeta_i$ i rešavanjem po $\zeta_i - z_i$ iz (1.33) dobija se nula-relacija Börsch-Supanovog tipa

$$\zeta_i = z - \frac{W_i}{1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.34}$$

gde je

$$W_i = \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z - z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Primer 1.4 Diferenciranjem identiteta (1.31) dobija se

$$-\frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}. \tag{1.35}$$

Rešavanjem (1.35) po ζ_i dobija se nula-relacija sa kvadratnim korenom, koja se još naziva nula-relacijom tipa Ostrowskog [40], [158]

$$\zeta_j = z - \frac{1}{\sqrt{\frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.36}$$

Primer 1.5 Polazeći od identiteta

$$\frac{P''(z)}{P(z)} = \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)^2 + \left(\frac{P'(z)}{P(z)} \right)', \tag{1.37}$$

zamenom suma iz (1.31) i (1.35) dobija se Wang-Zhengova nula-relacija (Halleyevog tipa) [113], [116], [200]

$$\zeta_i = z - \frac{1}{f(z) - \dfrac{P(z)}{2P'(z)}\left[\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}\right]} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.38}$$

gde je

$$f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}.$$

Pomenućemo neke poznate iterativne metode zasnovane na nula-relaciji u običnoj kompleksnoj aritmetici za simultano nalaženje svih nula polinoma.

1. **Weierstrassov metod** je metod drugog reda. Konstruisan je na osnovu relacija (1.28), (1.29) i (1.30), i glasi

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (z_i - z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.39}$$

Formulu (1.39) su više puta otkrivali autori Durand [28], Dochev [26], Börsch-Supan [12], Kerner [70], M. Prešić [163] i S. B. Prešić [164]. Malo je poznato da je ova formula imala svoju preteču u izlaganju Weierstrassa u Kenigsburškoj akademiji nauka 1891. Iterativni metod (1.39), naziva se i Durand-Kernerov ili metod Weierstrass-Docheva, a u literaturi se mogu naći i druge kombinacije imena.

2. **Ehrlich-Abertovov metod** ima kubnu konvergenciju i konstruisan je na osnovu (1.28), (1.29) i (1.32), i ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.40}$$

Iako je iterativni metod (1.40) prvi predložio Maehly u [84], još 1954. godine za poboljšanje Newtonovog postupka, a Börsch-Supan ga je prvi koristio za određivanje a posteriori ocene greške za nule polinoma [12], najčešće nosi ime Ehrlich-Abertovov metod. Ehrlich je u radu [29] dokazao njegovu kubnu konvergenciju, a Abert dao doprinos praktičnoj primeni ovog metoda.

3. **Börsch-Supanov metod** trećeg reda, dobijen je u [13], koristeći (1.27), (1.29) i (1.34), prostom aproksimacijom $\zeta_i = z_i$ i ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{W_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.41}$$

Metod (1.41) su kasnije razmatrali Nourein [98] i Werner [202].

4. Metod tipa Ostrowskog (metod kvadratnog korena) je dobijen korišćenjem (1.28), (1.29) i (1.36), i ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{(z_i - z_j)^2}}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.42}$$

Metod (1.42) ima red konvergencije četiri. Analiza metoda (1.42) i njegove modifikacije data je u [158], a analiza konvergencije ovog metoda sa računski proverljivim početnim uslovima urađena je u [148].

5. Wang-Zhengov metod (metod Halleyovog tipa) četvrtog reda je konstruisan pomoću (1.28) i (1.29), uzimajući $z = z_i$ i $\zeta_j = z_j$ u (1.38), i oblika je

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{z_i - z_j}\right)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{(z_i - z_j)^2}\right]} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.43}$$

gde je

$$f(z_i) = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)}.$$

Neke modifikacije metoda (1.43) sa ubrzanom konvergencijom razmatrane su u [159], [195].

Brzina konvergencije osnovnih metoda može se povećati uvođenjem korekcija. Najčešće korišćene korekcije su:

1. Newtonova korekcija drugog reda

$$u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)},$$

koja se javlja u Newtonovom metodu drugog reda

$$\hat{z}_i = z_i - u(z_i) = z_i - \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}.$$

2. Weierstrassova korekcija drugog reda

$$W(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z - z_j)},$$

koja se javlja u Weierstrassovom metodu drugog reda

$$\hat{z}_i = z_i - W(z_i) = z_i - \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_i - z_j)}.$$

3. Halleyeva korekcija trećeg reda

$$h(z) = \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}\right]^{-1},$$

koja se javlja u Halleyevom metodu trećeg reda

$$\hat{z}_i = z_i - h(z_i) = z_i - \left[\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)}\right]^{-1}.$$

Za ubrzavanje konvergencije osnovnih metoda primenjuje se i Gauss-Seidelov pristup i on se može kombinovati sa primenom korekcija. Kod Gauss-Seidelovog pristupa u tekućoj iteraciji koriste se vrednosti već izračunatih aproksimacija. Na taj način se dobijaju takozvane serijske ili *single-step* verzije metoda, za razliku od osnovnih metoda koje nazivamo paralelnim ili *total-step* metodima.

1.4 Geometrija nula

Da bi se primenio bilo koji metod za lokalizaciju nula polinoma potrebno je prethodno, naći početne inkluzivne oblasti, diskove ili pravougaonike, koji sadrže te nule. Nađeni inkluzivni diskovi mogu biti korišćeni u iterativnim metodama u intervalnoj aritmetici i u običnoj realnoj ili kompleksnoj aritmetici. Problemom lokalizacije nula ili „geometrije nula" i određivanjem njihove višestrukosti bavili su se mnogi matematičari. O ovoj problematici može se videti u knjigama Henricija [56] i Mardena [87].

Izbor početnih inkluzivnih oblasti, koje sadrže nule polinoma, usko je povezan sa uslovima za konvergenciju iterativnih metoda. U literaturi je prikazano, da mnogi od tih uslova zavise od nepoznatih podataka, na primer od funkcija traženih nula, što je bez praktične važnosti.

Izložićemo, u nastavku, jedan način izbora početnih oblasti koji ima opšti karakter.

Neka je P moničan polinom n-tog stepena sa prostim kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j) \quad (a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, \ldots, n-1).$$

Kod rešavanja algebarskih jednačina značajno je naći *inkluzivni poluprečnik* za dati polinom P, takav da za sve nule polinoma važi da je

$$|\zeta_i| \leq R \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Veliki značaj ima sledeća teorema Henricija [56]:

Teorema 1.8 *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pozitivni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1$ i neka je*

$$R := \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^{-1/k} |a_{n-k}|^{1/k}.$$

Tada je R inkluzivni poluprečnik za polinom P.

Ukoliko je $\lambda_k = 1/2^k$ $(k \in \mathbb{I}_n)$, iz Teoreme 1.8 dobijamo da disk sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom

$$R = 2 \max_{1 \leq k \leq n} |a_{n-k}|^{1/k} \tag{1.44}$$

sadrži sve nule polinoma P. Ovaj rezultat može se naći i u knjigama Knutha [74] i Henricija [56]. Na veoma jednostavan način moguće je odrediti poluprečnik r

$$r^{-1} = 2 \max_{1 \leq k \leq n} |a_k/a_0|^{1/k}, \tag{1.45}$$

za koji važi $r \leq |\zeta_i|$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Na taj način određuje se oblast u obliku kružnog prstena $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$, gde su R i r određeni sa (1.44) i (1.45), koja sadrži sve nule posmatranog polinoma P.

Rezultat (1.44) moguće je poboljšati ukoliko se za centar diska umesto koordinatnog početka izabere tačka $c = (\zeta_1 + \cdots + \zeta_n)/n = -a_{n-1}/n$. Tačka c je „težište" nula polinoma P koji se translacijom promenljive z transformiše u polinom

$$P(z + c) = z^n + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Težište nula $\xi_i = \zeta_i - c$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ transformisanog polinoma je u koordinatnom početku. Inkluzivni poluprečnik

$$R' = 2 \max_{2 \le k \le n} |b_{n-k}|^{1/k}$$

je najčešće manji od poluprečnika R određenog sa (1.44).

Za *a posteriori* ocenu greške izračunavanja za dati skup aproksimacija često se koristi Weierstrassova korekcija W_i, koja se javlja u poznatom Weierstrassovom metodu za simultano određivanje svih nula polinoma P

$$\hat{z} = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}} (z_i - z_j)} = z_i - W_i \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.46}$$

Smith [183] je pokazao da disk

$$|z - (z_i - W_i)| \le (n-1)|W_i|$$

sadrži najmanje jednu nulu polinoma P. Ovaj rezultat je neznatno poboljšanje rezultata Braessa i Hadelera [14] koji su pokazali da disk

$$|z - z_i| \le n|W_i|$$

takođe sadrži najmanje jednu nulu polinoma P.

Znatno poboljšanje ovog rezultata dato je sledećom teoremom koju dajemo bez dokaza (detalji se mogu naći u monografiji [127]).

Teorema 1.9 *Neka je za fiksirano* $n \ge 3$

$$c_n = \frac{1}{An + B}, \quad A \ge 2, \quad B \ge (2 - A)n$$

i neka važi

$$w^{(0)} \le c_n d^{(0)}.$$

Tada su diskovi

$$D_i = \left\{ z_i^{(0)} - W_i^{(0)}; \frac{n}{(A-1)n + B} |W_i^{(0)}| \right\} \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$

međusobno disjunktni i svaki od njih sadrži tačno jednu nulu polinoma P.

1.5 Kompleksna intervalna aritmetika

Neki od iterativnih metoda opisanih u ovoj disertaciji su realizovani u kružnoj intervalnoj kompleksnoj aritmetici. Pored toga, u analizi konvergencije neintervalnih metoda ocenjuju se neke kompleksne veličine primenom osnovnih osobina i operacija kompleksne kružne aritmetike. Zbog toga ćemo u ovom odeljku dati kratak pregled osnovnih osobina i operacija ove aritmetike. Detaljniji pregled se može naći u monografijama [6], [113], [118] i [142].

Kružni interval (disk) u kompleksnoj ravni

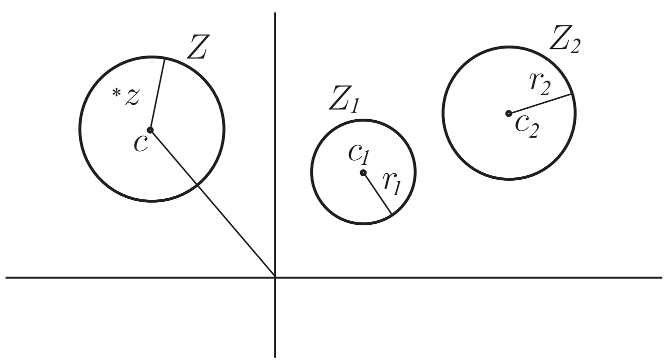
$$Z = \{z \,:\, |z - r| \le r\}$$

sa centrom $c = \operatorname{mid} Z \in \mathbb{C}$ i poluprečnikom $r = \operatorname{rad} Z$ označavaćemo simbolički sa $Z = \{c; r\}$. Skup svih kompleksnih kružnih intervala označavaćemo sa $\mathbb{K}(\mathbb{C})$.

Iz same definicije diska lako je videti da važe ekvivalencije:

$$z \in Z \iff |z - c| \le r, \tag{1.47}$$

$$z \notin Z \iff |z - c| > r. \tag{1.48}$$



Slika 1.1

Pod uslovom da je $z \in Z$, na osnovu geometrijske konstrukcije (Slika 1.1) vidimo da važi dvostruka nejednakost

$$|\operatorname{mid} Z| - \operatorname{rad} Z \le |z| \le |\operatorname{mid} Z| + \operatorname{rad} Z. \tag{1.49}$$

Takođe, za dva diska $Z_k = \{c_k; r_k\},\ k = 1, 2$, važe relacije

$$|c_1 - c_2| \le r_2 - r_1 \iff Z_1 \subseteq Z_2 \tag{1.50}$$

i

$$|c_1 - c_2| > r_1 + r_2 \Longleftrightarrow Z_1 \cap Z_2 = \emptyset. \tag{1.51}$$

Proizvod i zbir (razlika) proizvoljnog diska $Z = \{c; r\}$ i kompleksnog broja α definišu se sledećim relacijama:

$$\begin{aligned} \alpha Z &= \{\alpha c; |\alpha| r\}, \\ \alpha \pm Z &= \{\alpha \pm c; r\}. \end{aligned}$$

Za dva diska Z_1 i Z_2 u skupu $\mathbb{K}(\mathbb{C})$ mogu se definisati operacije sabiranja i oduzimanja na sledeći način

$$Z_1 \pm Z_2 := \{c_1 \pm c_2; r_1 + r_2\} = \{z_1 \pm z_2 \,:\, z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}. \tag{1.52}$$

Neka je $Z_k = \{c_k; r_k\}, k \in \mathbb{I}_n$. Formula (1.52) se može generalisati u slučaju sabiranja n diskova na

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k; \sum_{k=1}^{n} r_k \right\}.$$

Proizvod dva diska u opštem slučaju nije disk, već neka zatvorena oblast u kompleksnoj ravni. Zbog toga ćemo za proizvod dva diska $Z_1 \cdot Z_2$ koristiti definiciju koju su uveli Gargantini i Henrici u radu [42]

$$Z_1 \cdot Z_2 := \{c_1 c_2; |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2\} \supseteq \{z_1 z_2 \,:\, z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}. \tag{1.53}$$

Iz formule (1.53) se vidi da je u opštem slučaju proizvod diskova $Z_1 \cdot Z_2$ uvećani disk koji okružuje tačnu oblast.

Formula (1.53) u slučaju množenja n diskova postaje

$$\prod_{k=1}^{n} Z_k = \left\{ \prod_{k=1}^{n} c_k; \prod_{k=1}^{n} (|c_k| + r_k) - \prod_{k=1}^{n} |c_k| \right\}. \tag{1.54}$$

Ako $0 \notin Z$ (tj. $|c| > r$) može se, korišćenjem Möbiusove bilinearne transformacije, odrediti tzv. *tačna inverzija* diska Z

$$Z^{-1} = \{c; r\}^{-1} = \frac{\{\bar{c}; r\}}{|c|^2 - r^2} = \left\{ \frac{1}{z} : z \in Z \right\}. \tag{1.55}$$

Sabiranje, oduzimanje i tačna inverzija su tačne operacije u skupu $\mathbb{K}(\mathbb{C})$.

Pored tačne inverzije diska (1.55), u narednim poglavljima ćemo koristiti i inverziju diska Z u *centralnom* ili Taylorovom obliku

$$Z^{I_c} = \left\{ \frac{1}{c}; \frac{r}{|c|(|c| - r)} \right\} \supseteq Z^{-1}. \tag{1.56}$$

Korišćenjem formula (1.53) i (1.55) (odnosno (1.56)) možemo definisati deljenje diskova $Z_1 : Z_2$, pod uslovom da disk Z_2 ne sadrži koordinatni početak,

$$Z_1 : Z_2 = Z_1 \cdot \mathrm{INV} Z_2,$$

gde simbol INV označava jednu od uvedenih inverzija, to jest $\mathrm{INV} \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$. U disertaciji ćemo koristiti sledeće ocene:

$$|\mathrm{mid}\,(\mathrm{INV}(Z))| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - r^2}, \tag{1.57}$$

$$\mathrm{rad}\,(\mathrm{INV}(Z)) \leq \frac{r}{|z|(|z| - r)}. \tag{1.58}$$

Kvadratni koren diska $Z = \{c; r\}$ u centralnoj formi, gde je $c = |c|e^{i\theta}$ i važi relacija $|c| > r$ (disk Z ne sadrži koordinatni početak), definiše se kao unija dva diska (videti [40])

$$\sqrt{\{c; r\}} := \Big\{\sqrt{|c|}e^{i\theta/2}; \sqrt{|c|} - \sqrt{|c| - r}\Big\} \bigcup \Big\{-\sqrt{|c|}e^{i\theta/2}; \sqrt{|c|} - \sqrt{|c| - r}\Big\}. \tag{1.59}$$

Dobijeni uvećani disk sadrži tačnu oblast $\{z^{1/2} : z \in Z\}$. Generalizacijom formule (1.59), u smislu računanja n-tog korena diska Z ($0 \notin Z$), dobijamo uniju n diskova

$$Z^{1/n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Big\{|c|^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}; |c|^{1/n} - (|c| - r)^{1/n}\Big\}. \tag{1.60}$$

Važna osobina intervalne aritmetike je *inkluzivna izotonost* (svojstvo inkluzije). Ova osobina važi za prethodno definisane četiri osnovne računske operacije u kružnoj intervalnoj aritmetici: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje (videti na primer [6]). Naime, neka su $A_k, B_k \in \mathbb{K}(\mathbb{C}),\ k = 1, 2$ i neka važi da je $A_k \subseteq B_k$, za $k = 1, 2$. Tada važi da je

$$A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2,$$

gde je $* \in \{+, -, \cdot, :\}$.

Pretpostavimo da je f kompleksna funkcija koja je definisana na skupu diskova $\mathbb{K}(\mathbb{C})$. U opštem slučaju, skup $\{f(z) : z \in Z\}$ nije disk. Da bi se očuvala zatvorenost uvedenih operacija sa diskovima, neophodno je uvesti *kružno* proširenje F funkcije f. Kružno proširenje F se definiše na podskupu $D \subseteq \mathbb{K}(\mathbb{C})$, tako da za sve diskove $Z \in D$ važe svojstva:

$$\begin{aligned} &F(Z) \supseteq \{f(z) : z \in Z\} \quad &&\text{(inkluzija)},\\ &F(z) = f(z) &&\text{(restrikcija)}. \end{aligned}$$

Kružno intervalno proširenje je inkluzivno izotono ako za svako $Z_1, Z_2 \in D$ važi sledeća implikacija

$$Z_1 \subseteq Z_2 \Longrightarrow F(Z_1) \subseteq F(Z_2).$$

Specijalno, važi

$$z \in Z \Longrightarrow f(z) = F(z) \in F(Z).$$

Ova osobina predstavlja osnovu za konstrukciju intervalnih metoda.

Napomenimo da obe uvedene inverzije diska $\mathrm{INV} \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$ i glavna vrednost korena ne-nula diska poseduju osobinu inkluzivne izotonosti.

Na kraju ovog odeljka pomenimo da pored kružne intervalne aritmetike postoji i intervalna aritmetika pravougaonika. Neka su $A_1, A_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, gde smo sa $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ označili interval realnih brojeva. Skup $\{a_1 + ia_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$ kompleksnih brojeva se naziva kompleksnim intervalom. Ovaj skup definiše pravougaonik u kompleksnoj ravni sa stranicama paralelnim koordinatnim osama. Obeležićemo ga sa $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Za dva kompleksna pravougaona intervala $A, B \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, gde su $A = A_1 + iA_2$ i $B = B_1 + iB_2$, $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ osnovne operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja definišu se sledećim formulama:

$$\begin{aligned}
A \pm B &= A_1 \pm B_1 + i(A_2 \pm B_2), \\
A \cdot B &= A_1B_1 - A_2B_2 + i(A_1B_2 + A_2B_1), \\
A : B &= \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{B_1^2 + B_2^2} + i\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{B_1^2 + B_2^2} \quad (0 \notin B_1^2 + B_2^2).
\end{aligned}$$

Dobra osobina kod kompleksne aritmetike pravougaonika je činjenica da je presek dva pravougaonika uvek pravougaonik, tako da nema potrebe za uvođenjem proširenja.

1.6 Simultani intervalni metodi

Problem tačnosti dobijenih rezultata je aktuelan i u slučaju korišćenja simultanih metoda. Zbog rada sa aritmetikom konačne dužine, javljaju se greške, koje su svakako manje nego kod algoritama koji koriste princip deflacije, ali ipak postoje, tako da se postavlja pitanje njihovog ocenjivanja. Mnogi autori su razvili niz različitih tehnika za ocenu grešaka dobijenih aproksimacija nula polinoma. Uglavnom se pomenute tehnike zasnivaju na Gerschgorinovoj teoremi (Smith [183], Elzner [30], Braess i Hadeler [14]). Na Roushéovoj teoremi zasnovani su metodi koje su razmatrali Börsch-Supan [13] i Gutkneckt [47]. Tehnika koja se zasniva na nula-relaciji je bila predmet interesovanja mnogih autora, od koji su najpoznatiji: Börsch-Supan

[12], Schmidt [176], Schmidt i Dressel [177], Bini i Fiorentini [10]. U praksi se nalaženje granice greške dobijenih aproksimacija retko primenjuje, najčešće zbog neekonomičnosti sprovođenja kompletne analize greške u praktičnim problemima.

S druge strane, moguće je definisati intervale (na realnoj osi), odnosno diskove ili pravougaonike (u kompleksnoj ravni), tako da oni sigurno sadrže tačno rešenje posmatranog problema. Na taj način je obezbeđena informacija i o približnoj vrednosti rešenja (centar diska ili pravougaonika) i o gornjoj granici apsolutne vrednosti greške (datoj poluprečnikom diska ili poludijagonalom pravougaonika).

Cilj intervalne analize je da modifikuje postojeće numeričke algoritme ili da razvije nove koji daju intervale što je manje mogućih dimenzija. Iako intervalne tehnike ne proizvode uvek štedljive rezultate, intervalni metodi su korisno oruđe u primenjenoj matematici i inženjerskim disciplinama, koji su naročito primenljivi u kontroli i analizi grešaka izračunavanja, dajući samo-proverljive algoritme sa garantovano sigurnim granicama (gornje i donje granice na skupu rešenja ili izračunatim vrednostima). Više detalja o opštem principu intervalnog računanja i primenama mogu se naći u preglednom radu [7] i knjizi [6].

Prve radove iz oblasti intervalnog računa nalazimo šezdesetih godina prošlog veka u radovima Sunage [184], Moorea [92], Moorea i Yanga [94]. U svojim radovima, oni su prvi računali sa intervalima u cilju ograničavanja nastalih grešaka zaokruživanja, kod mašinskog izvođenja računskih programa. Mnogi autori, među kojima i Moore, smatraju za osnivača intervalnog računa Sesily Rozalie Young, koja je u svom radu [203] uvela operacije sa proizvoljnim skupovima realnih brojeva. Naš poznati matematičar Mihajlo Petrović primenjivao je intervale u raznim oblastima matematike [161]. O njegovom doprinosu intervalnoj matematici, može se videti u [107].

U utemeljivače intervalne matematike, pored Moorea svakako spadaju i Hansen, Nickel, Rall, Kulisch, Alefeld, Herzberger, Krawczyk i Ratschek. U naučnom svetu dobro je poznata niška škola intervalne matematike na čijem čelu je M. Petković sa Elektronskog fakulteta, koji je osim velikog broja radova u ovoj oblasti objavio i tri monografije na engleskom jeziku [113], [118] i [142]. Mnogi rezultati iz oblasti intervalne matematike mogu se naći u bibliografijama Garloffa [43] i McNameea [88].

U rešavanju problema u kojima se javljaju neizvesne promenljive (koje leže u nekim intervalima) i svuda gde je informacija o gornjoj granici greške bitna, dobrodošla je primena intervalne matematike. Intervalna matematika ima širok spektar primene u teoriji i praksi. Deo tog spektra su problem sopstvenih vrednosti, diferencijalne i diferencne jednačine, matematičko programiranje, analiza funkcija prenosa, proučavanje stabilnosti sistema, analiza električnih kola, matematička psihologija, geodetska istraživanja, finansije, simulacija procesa sa promenljivim parametrima, proučavanje stabilnosti sistema, opis haotičnih fenomena. Primenljivost ove oblasti je čak stigla i do proračuna svemirskih letova.

Osobina inkluzivne izotonosti predstavlja osnovu u konstrukciji intervalnih metoda za istovremeno određivanje nula polinoma. Ukoliko su svi poluprečnici diskova jednaki nuli, intervalni metodi se svode na simultane metode za istovremeno određivanje nula polinoma u kompleksnoj aritmetici, to jest „tačkastih" aproksimacija nula polinoma.

Konstrukcija simultanih intervalnih metoda zasnovana je na nula-relaciji datoj formulama (1.27) i (1.28).

Uz pretpostavku da znamo početne diskove (pravougaonike) $Z_1, \ldots, Z_n$, koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma n-tog stepena $P(z)$, zamenom tačnih nula na desnoj strani relacija (1.27) i (1.28) njihovim inkluzivnim intervalima i koristeći svojstvo inkluzije dobijamo

$$\zeta_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$
$$\zeta_i = F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Uzimajući inkluzivne intervale na desnoj strani gornjih relacija za nove intervalne aproksimacije $\hat{Z}_i$ nula ζ_i, dobijamo intervalne metode

$$\widehat{Z}_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.61}$$
$$\widehat{Z}_i = F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_n) \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.62}$$

Intervalni iterativni metodi, dobijeni na ovaj način, su lokalno konvergentni. Za određivanje dovoljno dobrih početnih aproksimacija nula ovim metodima neophodno je pridružiti neki sporo-konvergenti metod. Iterativni metodi (1.61) i (1.62) mogu se uspešno kombinovati sa simultanim metodima u kompleksnoj aritmetici, tako da se primene samo u završnom iterativnom koraku, a da se u ostalim koriste iterativni metodi u kompleksnoj aritmetici. Kombinovani metodi imaju veću računsku efikasnost, jer izračunavanja u kompleksnoj aritmetici zahtevaju manje numeričkih operacija u poređenju sa operacijama u intervalnoj aritmetici, a primena intervalnih metoda (1.61) i (1.62) u poslednjem iterativnom koraku daje ocenu gornje granice greške.

Navešćemo neke poznate intervalne metode zasnovane na nula-relacijama:

1. **Weierstrassov intervalni metod** drugog reda [4], [5], [113], [199], zasniva se na nula-relaciji (1.30) i oblika je

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_i - Z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.63}$$

2. Gargantini-Henricijev metod trećeg reda [39], [42], [55], [56], [111], za osnovu ima Newtonovu nula-relaciju (1.32) i ima oblik

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.64}$$

3. Petkovićev intervalni metod trećeg reda [14], [112], zasniva se na primeni nula-relacije Börsch-Supanovog tipa (1.34). Može se predstaviti na sledeći način

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{W_j}{z_i - Z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.65}$$

4. Intervalni metod tipa Ostrowskog četvrtog reda [40], [111], dobijen je iz nula-relacije sa kvadratnim korenom date formulom (1.36) i dat je sa

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\left[\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - Z_j)^2}\right]_*^{1/2}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.66}$$

Simbol $*$ označava da treba izabrati jedan od dva dobijena diska.

5. Intervalni metod Halleyevog tipa četvrtog reda [114], [198], izveden je korišćenjem nula-relacije Wang-Zenga (1.38) i predstavljen je formulom

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - Z_j)^2}\right]} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.67}$$

gde je

$$f(z_i) = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \frac{P''(z_i)}{2P'(z_i)}.$$

Brzina konvergencije osnovnih metoda, kao i kod neintervalnih metoda, može se povećati uvođenjem korekcija, koristeći ideju koju su razvili M. Petković i C. Carestensen u [21] i [120], koristeći rezultate Nouriena [98], [99] i [100].

Korišćenjem korekcija se koriguje položaj centra diska i ubrzava se konvergencija metoda. Ukoliko se na Gargantini-Henricijev metod (1.64) primeni Newtonova korekcija dobijeni metod ima oblik

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{u(z_i)^{-1} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathrm{INV}(z_i - Z_j + u(z_j))} \quad (i \in \mathbb{I}_n) \tag{1.68}$$

i ima red konvergencije 3.562 ili 4, zavisno od tipa primenjene inverzije diskova (Carstensen, Petković [21]). Oznaka INV označava jednu od inverzija diskova datih sa (1.55) i (1.56). Na taj način dobijena je ubrzana konvergencija bez dodatnog izračunavanja vrednosti funkcija, pa je samim tim znatno povećana računska efikasnost metoda.

Drugi način ubrzavanja konvergencije može se postići primenom Gauss-Seidelovog pristupa. Na primer, već pomenuti Gargantini-Henricijevi metodi (1.64) i (1.68) u single-step varijanti imaju oblike

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{u(z_i)^{-1} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \mathrm{INV}(z_i - \widehat{Z}_j) - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mathrm{INV}(z_i - Z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{u(z_i)^{-1} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \mathrm{INV}(z_i - \widehat{Z}_j) - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mathrm{INV}(z_i - Z_j + u(z_j))} \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

1.7 Aproksimativne nule i konvergencija iterativnih procesa

Kod rešavanja jednačine oblika $f(z) = 0$ primenom nekog iterativnog metoda, važno je izabrati početne uslove tako da iterativni metod konvergira. Početni uslovi razmatrani u literaturi uglavnom zavise od nepoznatih podataka. U tradicionalnom asimptotskom pristupu koristi se termin „tačne nule", a u literaturi se još pominju i „dovoljno dobre aproksimacije" ili „pogodno izabrane konstante", pa se može govoriti samo o njihovom teorijskom značaju. U cilju obezbeđivanja praktično primenljivih rezultata poslednjih godina se posvećuje značajna pažnja konstrukciji računski proverljivih početnih uslova, koji obezbeđuju garantovanu i brzu konvergenciju numeričkog algoritma. Pionir u ovoj oblasti istraživanja je Fourier [36], čiji rezultati potiču jos sa kraja 19. veka. Kantorovič [69] je dao značajan doprinos analizi konvergencije Newtonovog metoda u Banachovom prostoru koristeći pretpostavke koje treba da budu ispunjene u svakoj tački oblasti konvergencije. Čuveni američki matematičar Stephen Smale je dao fundamentalan doprinos ovoj teoriji [181] dajući računski proverljive uslove, koji se odnose na oblast konvergencije, a u [182] uveo je pojam *aproksimativne nule* kao početne tačke koja obezbeđuje konvergenciju Newtonovog metoda sledećom definicijom:

Definicija 1.5 Tačka $z_0 \in \mathbb{C}$ je aproksimativna nula funkcije f za iterativni metod reda konvergencije r oblika

$$z_{k+1} = \Phi_r(z_k) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

ako postoji pozitivan broj $p < 1$ tako da je ispunjen uslov

$$\left|\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}\right| \leq p^{r^k - 1}\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right| \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Kod testiranja aproksimativnih nula koristi se funkcija $\alpha(z, f)$ definisana pomoću

$$\alpha(z, f) = \left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|\gamma_f(z), \quad \text{gde je} \quad \gamma_f(z) = \sup_{r>1}\left|\frac{f^{(r)}(z)}{r!f'(z)}\right|^{1/(r-1)}.$$

Smaleova teorija koristi samo podatke o funkciji f u tački z_0 pri utvrđivanju konvergencije Newtonovog metoda (1.3) i njen osnovni rezultat je:

Teorema 1.10 (Smale [181]) *Ako je uslov*

$$\alpha(z_0, f) < \alpha_0 \cong 0.130707 \tag{1.69}$$

ispunjen, onda je Newtonov metod (1.3) *dobro definisan i važi*

$$|z_{k+1} - z_k| \leq p^{2^k - 1}|z_1 - z_0| \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.70}$$

pri čemu je p određeno sa

$$p = \frac{\alpha(z_0, f)}{\psi(\alpha(z_0, f))^2}\,, \quad \psi(t) = 2t^2 - 4t + 1.$$

Kada je početna aproksimacija dobro izabrana ocena (1.70) ukazuje na kvadratnu konvergenciju iterativnog metoda (1.3). Smaleov rezultat (1.69) poboljšala je najpre Kim [71] dobivši $\alpha_0 = 1/54$, a zatim $\alpha_0 = 1/48$ i Wang i Han [194] sa $\alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2} > 0.130707$. Kasnije su Wang i Zhao [197] pod slabijim uslovima poboljšali rezultat.

Za iterativne metode sa kvadratnom konvergencijom Chen [23] je dao generalizaciju ovog pristupa. Za Newtonov metod rezultat je specijalno dat teoremom:

Teorema 1.11 *Ako je za z_0 ispunjeno*

$$(\gamma_f(z_0) + 1)\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right| < 0.1423,$$

tada je z_0 aproksimativna nula funkcije f za Newtonov postupak.

Curry je u [24] razmatrao dva metoda Čebiševljev (1.11) i Halleyev (1.5) i dao dve teoreme koje se odnose na konvergenciju i aproksimativne nule tih metoda.

Veliki broj autora je, posle Smalea, proširio njegove rezultate razmatrajući metode za rešavanje nelinearnih jednačina i simultane metode za određivanje nula polinoma. O ovoj problematici se više detalja može videti u monografiji [118].

1.8 Garantovana konvergencija

U postupku nalaženja aproksimacija nula polinoma već je naglašeno da je potrebno konstruisati početne uslove koji obezbeđuju garantovanu i brzu konvergenciju iterativnih metoda. Kod Smaleovog pristupa uzimaju se samo informacije o funkciji f u tački z_0, pa je stoga Smaleov pristup poznat kao „teorija tačkaste ocene".

Ukoliko je funkcija $f(z)$ moničan algebarski polinom stepena n ($n \geq 3$)

$$f(z) \equiv P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

početni uslovi trebalo bi da budu neke funkcije koeficijenata $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, stepena polinoma n i početnih aproksimacija $\boldsymbol{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ nula polinoma $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. U opštem obliku, početni uslovi se mogu predstaviti u obliku nejednakosti

$$\Phi(\boldsymbol{z}^{(0)}, \boldsymbol{a}, n) < 0. \tag{1.71}$$

Raspored nula u kompleksnoj ravni usko je povezan sa konvergencijom iterativnih metoda za nalaženje nula polinoma. Ako su nule dobro razdvojene, algoritmi uglavnom pokazuju dobre osobine. Kada su nule „bliske" (grozdovi nula) odgovarajući algoritmi pokazuju usporenu konvergenciju, ne rade ili rade sa velikim teškoćama. Mera razdvojenosti nula mora se uzeti kao argument funkcije Φ date u (1.71). Tačne nule polinoma $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nisu poznate pa se stoga posmatra minimalno rastojanje između početnih aproksimacija

$$d^{(0)} = \min_{j \neq i} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|. \tag{1.72}$$

Bliskost početnih aproksimacija utiče na konvergenciju posmatranog metoda i kao mera te bliskosti uzima se funkcija

$$s(z) = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right|,$$

gde je $Q(z) \neq 0$ za z iz okoline nule ζ, to jest $z \in \Lambda(\zeta)$, gde je $\Lambda(\zeta)$ okolina proizvoljne nule ζ polinoma P.

Na osnovu klase uslova date sa (1.71), koristeći najmanje rastojanje između početnih aproksimacija (1.72) i funkciju $s(z)$, dobijamo praktično primenljivu klasu uslova oblika

$$\varphi(s^{(0)}, d^{(0)}, n) < 0, \tag{1.73}$$

gde $s^{(0)}$ zavisi od P i Q u početnoj tački $\boldsymbol{z}^{(0)}$.

Weierstrassova korekcija za aproksimaciju i-te nule u m-tom iterativnom koraku ima oblik

$$W_i^{(m)} = \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_i^{(m)} - z_j^{(m)})} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots) \tag{1.74}$$

i ima maksimalnu vrednost

$$w^{(m)} = \max_{1\leq i\leq n} |W_i^{(m)}| \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{1.75}$$

koja se često koristi pri analizi konvergencije.

Veliki broj radova posvećen je određivanju početnih uslova koji obezbeđuju garantovanu konvergenciju simultanih iterativnih metoda za određivanje nula polinoma [63], [64], [101], [115], [121], [125], [126], [196]. Pogodni početni uslovi koji obezbeđuju garantovanu konvergenciju mogu se iskazati relacijom

$$w^{(0)} \leq c_n\, d^{(0)}, \tag{1.76}$$

koja predstavlja specijalni slučaj relacije (1.73). Konstanta c_n, koja se javlja u (1.76), zavisi od stepena n polinoma i naziva se *n-faktor*. Izazov je naći što je moguće veću vrednost konstante c_n, zato što to omogućava veće vrednosti $w^{(0)}$, pa su uslovi koji garantuju konvergenciju oslabljeni.

Sada ćemo izložiti metod korekcija, koji je jedan od osnovnih postupaka za utvrđivanje garantovane konvergencije simultanih iterativnih metoda.

Metod korekcija

Pretpostavimo da su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ proste kompleksne nule polinoma P n-tog stepena. Odgovarajuće aproksimacije ovih nula dobijene u m-tom iterativnom koraku označene su sa $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i međusobno su različite. Većina simultanih iterativnih metoda za aproksimciju prostih nula polinoma P može biti predstavljena u sledećem obliku:

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - C_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}) \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots). \tag{1.77}$$

Formula (1.77) omogućava konstrukciju n nizova aproksimacija $\{z_i^{(m)}\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$, koji konvergiraju, to jest važi

$$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{1.78}$$

startujući od početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$, pod određenim uslovima.

Izraz $C_i^{(m)} = C_i(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}) \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \dots)$, ćemo zvati *iterativna korekcija* ili samo *korekcija*. Pretpostavimo da iterativne korekcije

$$C_i^{(m)} = \frac{P(z_i^{(m)})}{F_i(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})}, \tag{1.79}$$

zadovoljavaju sledeće uslove:

1° $F_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \neq 0$,

2° $F_i(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}) \neq 0$,

3° $F_i(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})$ je neprekidna funkcija u $\mathbb{C}^n$.

Funkcija g, definisana u sledećoj teoremi, ima značajno mesto u dokazu teoreme o konvergenciji.

Teorema 1.12 *Neka su funkcije $s_m(t)$ i $g(t)$ definisane sa*

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{m} t^k + t^m, \quad t \in (0,1), \quad (m = 1, 2, \dots)$$

i

$$g(t) = \begin{cases} 1 + 2t, & 0 < t \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1-t}, & \dfrac{1}{2} < t < 1 \end{cases}, \tag{1.80}$$

tada važi $s_m(t) \le g(t)$.

Na osnovu ideje izložene u [121], sledeća teorema dokazana je u radu [128]:

Teorema 1.13 *Pretpostavimo da iterativni postupak* (1.77) *ima korekcije oblika* (1.79), *za koje su zadovoljeni uslovi* $1° - 3°$, *i neka su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ date međusobno različite početne aproksimacije. Ako za neko $\beta \in (0,1)$ važe sledeće dve nejednakosti:*

(i) $|C_i^{(m+1)}| < \beta |C_i^{(m)}| \qquad (m = 0, 1, \dots)$,

(ii) $|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| > g(\beta)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|) \quad (i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{I}_n)$,

tada je iterativni proces (1.77) *konvergentan.*

Klasa iterativnih metoda za koje važe uslovi Teoreme 1.13 je prilično široka i uključuje najčešće korišćene metode za istovremeno nalaženje nula polinoma. Metod korekcija za utvrđivanje garantovane konvergencije može se opisati pomoću algoritma u 4 koraka. Pri tom se polazi od početnih uslova oblika (1.76).

Algoritam

1. Za pogodno izabranu vrednost konstante c_n, koja zadovoljava uslov (1.76), određujemo konstante β_n, λ_n i δ_n za koje važi

$$\beta_n < 1, \quad g(\beta_n) < \frac{1}{2\lambda_n}, \quad \delta_n \le 1 - 2\lambda_n. \tag{1.81}$$

2. Dokazujemo relacije:

$$\text{(W-D)} \qquad w^{(m+1)} \le c_n d^{(m+1)} \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

i

$$\text{(W-W)} \qquad |W_i^{(m+1)}| \le \delta_n |W_i^{(m)}| \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots).$$

3. Dokazujemo da važi prvo tvrđenje Teoreme 1.13:

$$\text{(C-C)} \qquad |C_i^{(m+1)}| \le \beta_n |C_i^{(m)}| \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots)$$

i

$$\text{(C-W)} \qquad |C_i^{(0)}| \le \frac{\lambda_n}{c_n} |W_i^{(0)}| \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{1.82}$$

4. Na osnovu (1.82) imamo

$$\frac{1}{\lambda} |C_i^{(0)}| \le \frac{|W_i^{(0)}|}{c_n} \le \frac{w^{(0)}}{c_n} \le d^{(0)} \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$

što zajedno sa (1.81), za svako $i \ne j$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$, obezbeđuje da važi drugo tvrđenje Teoreme 1.13

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \ge d^{(0)} \ge \frac{w^{(0)}}{c_n} \ge \frac{1}{2\lambda_n} (|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|) > g(\beta_n)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|).$$

Iz poslednje nejednakosti sledi da su diskovi $H_i = \left\{ z_i^{(0)}; g(\beta_n)|C_i^{(0)}| \right\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$, međusobno disjunktni. Na osnovu Teoreme 1.13 pri čemu je $\beta = \beta_n$, neposredno sledi konvergencija iterativnog postupka (1.77).

Kod ispitivanja garantovane konvergencije iterativnog metoda za istovremeno određivanje nula polinoma metodom korekcija sa početnim uslovom (1.76) treba za svaki konkretan iterativni metod primeniti Algoritam. Analiza garantovane konvergencije većeg broja metoda primenom metoda korekcija može se naći u [118], [148], [150] i [168].

Poglavlje 2
Poboljšani Farmer-Loizouov metod

U ovom poglavlju predložićemo ubrzani iterativni metod za simultanu aproksimaciju svih prostih nula polinoma. Farmer i Loizou su u [31] pokazali da zamena aproksimacija datog polinoma

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_0 a_n \neq 0$$

i njegovih izvoda u iterativnoj formuli za nalaženje proste nule funkcije dovodi do nove klase metoda za simultano određivanje nula polinoma proizvoljnog reda konvergencije. Red konvergencije poboljšanog metoda, koji se zasniva na simultanom metodu koga su predložili Farmer i Loizou [31], je povećan sa 4 na 5 bez dodatnih numeričkih izračunavanja, čime je dobijen poboljšani metod visoke računske efikasnosti. U nastavku je data teorema u kojoj se dokazuje konvergencija uz korišćenje početnih uslova, čime se dobija mnogo preciznija karakterizacija blizina nula od uobičajeno korišćenog termina „dovoljno bliske aproksimacije” [152].

Neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P i uvedimo sledeće skraćenice:

$$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i, \quad \varepsilon = \max_{1 \le i \le n} |\varepsilon_i|, \quad u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)}, \quad u_i = u(z_i),$$

$$A_k(z) = \frac{P^{(k)}(z)}{k! P'(z)}, \qquad A_{k,i} = A_k(z_i), \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$S_k(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z - z_j)^k}, \quad S_{k,i} = S_k(z_i), \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$T_k(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^k}, \quad T_{k,i} = T_k(z_i), \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Korišćenjem logaritamskog diferenciranja, startujući od faktorizacije

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j), \tag{2.1}$$

dobijamo

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j}, \tag{2.2}$$

odakle je

$$P'(z) = P(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j}. \tag{2.3}$$

Zamenjujući z sa z_i u (2.3), uz korišćenje (2.1) nalazimo

$$\begin{aligned} P'(z_i) &= a_n \varepsilon_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_i - z_j + \varepsilon_j) \Bigg(\frac{1}{\varepsilon_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j + \varepsilon_j} \Bigg) \\ &= a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Bigg((z_i - z_j) \Big(1 + \frac{\varepsilon_j}{z_i - z_j} \Big) \Bigg) \Bigg(1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\varepsilon_i}{z_i - z_j + \varepsilon_j} \Bigg), \end{aligned}$$

odakle je

$$P'(z_i) = a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_i - z_j) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.4}$$

Na sličan način mogu se dobiti relacije

$$A_{2,i} = S_{1,i} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{2.5}$$

$$A_{3,i} = \frac{1}{2}(A_{2,i}^2 - S_{2,i}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{2.6}$$

i relacije za $A_{4,i}$, $A_{5,i}$ i tako dalje.

Aproksimacije (2.4), (2.5), (2.6), i slične aproksimacije koje uključuju $A_{4,i}$, $A_{5,i}$ itd., se mogu primeniti u cilju dobijanja iterativnih procesa za nalaženje prostih nula polinoma. Na taj način može se dobiti klasa metoda proizvoljnog reda konvergencije. U tom cilju definišimo funkciju $\lambda_n(z)$ rekurzivno na sledeći način:

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= u(z), \\ \lambda_k(z) &= \frac{u(z)}{1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{k} A_i(z) \prod_{j=k-i+1}^{k-1} \lambda_j(z)} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}$$

Korišćenjem ovako definisane funkcije dobijamo familiju iterativnih metoda

$$\Psi_n \equiv z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \lambda_n(z_i^{(m)}) \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2.7}$$

koja ima red konvergencije $n + 1$.

Primedba 2.1 Interesantno je napomenuti da su M. Petković i D. Herceg pokazali u [124] da je klasa metoda (2.7) ekvivalentna drugim klasama iterativnih metoda, koji su izvedeni na različite načine i prikazani u različitim oblicima, od strane Gerlacha [44], Forda i Pennlinea [34], Wanga [192], Varjuhina i Kasjanjuka [191], Jovanovića [66] i Igarashija i Nagasake [62].

Zamenom izvoda najvišeg reda u (2.7), uz korišćenje aproksimacija (2.4), (2.5) i (2.6), dobijamo sledeće iterativne metode za simultano određivanje svih nula polinoma:

- Weierstrassov ili Durand-Kernerov metod drugog reda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{a_n \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z_j - z_j)} \quad (i \in \mathbb{I}_n);$$

- Ehrlich-Aberthov metod trećeg reda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i}{1 - u_i S_{1,i}} \quad (i \in \mathbb{I}_n);$$

- Farmer-Loizouov metod četvrtog reda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{u_i^2}{2}(A_{2,i}^2 - S_{2,i})} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{2.8}$$

U nastavku ćemo Farmer-Loizouov simultani metod (2.8) kraće zvati FL metodom.

Cilj ovog poglavlja je da pokažemo kako se može ubrzati red konvergencije FL metoda sa četiri na pet bez dodatnih numeričkih izračunavanja. Očigledno, na taj način se dobija ubrzani metod sa povećanom računskom efikasnošću. Ideja za ovo ubrzanje se zasniva na zameni aproksimacija z_j u sumi u (2.8) Newtonovom aproksimacijom $z_{N,j} = z_j - u_j$.

U tom cilju definišimo sumu

$$S_{2,i}^* = \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_{N,j})^2} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j + u_j)^2}.$$

U nastavku ćemo dokazati da modifikovani FL metod

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= z_i - \frac{u_i(1-u_iA_{2,i})}{1-2u_iA_{2,i}+\dfrac{u_i^2}{2}(A_{2,i}^2-S_{2,i}^*)}\\ &= z_i - \frac{u_i(1-u_iA_{2,i})}{1-2u_iA_{2,i}+\dfrac{u_i^2}{2}\left(A_{2,i}^2-\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{1}{(z_i-z_j+u_j)^2}\right)} \quad (i\in\mathbb{I}_n)\end{aligned} \tag{2.9}$$

ima red konvergencije pet. Očigledno je da se već izračunate vrednosti $u_1,\dots,u_n$ koriste u sumama, drugim rečima, iterativni metod (2.9) ne zahteva nova izračunavanja u odnosu na FL metod (2.8).

2.1 Analiza konvergencije poboljšanog metoda

Prvo ćemo dati neke ocene neophodne za dokazivanje teoreme o konvergenciji iterativnog metoda (2.9). Definišimo minimalno rastojanje

$$d=\min_{\substack{i,j\\ j\neq i}}|\zeta_i-\zeta_j|$$

i uvedimo greške $\varepsilon_i=z_i-\zeta_i$ i $\hat{\varepsilon}_i=\hat{z}_i-\zeta_i$.

Lema 2.1 *Ako je nejednakost*

$$|\varepsilon_i|<\frac{d}{3n}=\frac{1}{q}\quad (i\in\mathbb{I}_n) \tag{2.10}$$

zadovoljena, gde je $q=3n/d$, tada važe nejednakosti

$$\hat{\varepsilon}_i<\frac{1}{(n-1)^3}|\varepsilon_i|^3q^4\sum_{j\neq i}|\varepsilon_j|^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_i|^5q^4, \tag{2.11}$$

za svako $i\in\mathbb{I}_n$.

Dokaz. Polazeći od faktorizacije

$$P(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)$$

i koristeći logaritamsko diferenciranje, dobijamo

$$\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \frac{1}{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j} = \frac{1}{\varepsilon_i} + T_{1,i} = \frac{1}{\varepsilon_i}(1 + \varepsilon_i T_{1,i}) \tag{2.12}$$

i

$$\frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} = -\Big(\frac{P'(z)}{P(z)}\Big)'\Big|_{z=z_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + T_{2,i}. \tag{2.13}$$

Korišćenjem identiteta (2.12) i (2.13) i uvedenih skraćenica, nalazimo

$$A_{2,i} = \frac{2T_{1,i} + \varepsilon_i T_{1,i}^2 - \varepsilon_i T_{2,i}}{2(1 + \varepsilon_i T_{1,i})}. \tag{2.14}$$

Na osnovu (2.12) i (2.14) imamo

$$u_i A_{2,i} = \frac{\varepsilon_i(2T_{1,i} + \varepsilon_i T_{1,i}^2 - \varepsilon_i T_{2,i})}{2(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^2}, \tag{2.15}$$

pa polazeći od (2.9) nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{1}{2}\left((u_i A_{2,i})^2 - S_{2,i}^* u_i^2\right)} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{2.16}$$

Uvedimo skraćenicu

$$D_i = 8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 \Big(1 - 2u_i A_{2,i} + \frac{1}{2}\left((u_i A_{2,i})^2 - S_{2,i}^* u_i^2\right)\Big). \tag{2.17}$$

Sada formulu (2.16) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 u_i(1 - u_i A_{2,i})}{D_i} \\ &= \frac{\varepsilon_i D_i - 8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 u_i(1 - u_i A_{2,i})}{D_i} = \frac{G_i}{D_i} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \end{aligned} \tag{2.18}$$

gde je

$$G_i = \varepsilon_i D_i - 8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 u_i(1 - u_i A_{2,i}). \tag{2.19}$$

Polazeći od (2.17), na osnovu (2.12) i (2.15) dobijamo

$$\begin{aligned} D_i &= 8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 \Big(1 - 2u_i A_{2,i} + \frac{1}{2}\left((u_i A_{2,i})^2 - S_{2,i}^* u_i^2\right)\Big) \\ &= 8(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^4 \Big[1 - \frac{\varepsilon_i(2T_{1,i} + \varepsilon_i T_{1,i}^2 - \varepsilon_i T_{2,i})}{(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\varepsilon_i(2T_{1,i} + \varepsilon_i T_{1,i}^2 - \varepsilon_i T_{2,i})}{2(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^2}\Big)^2 - S_{2,i}^* \Big(\frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i T_{1,i}}\Big)^2\Big)\Big] \\ &= 8 + 16\varepsilon_i T_{1,i} + 4\varepsilon_i^2(3T_{1,i}^2 + T_{2,i}) + 4\varepsilon_i^3 T_{1,i}(T_{1,i}^2 + T_{2,i}) \\ &\quad + 4\varepsilon_i^2(1 + \varepsilon_i T_{1,i})^2(T_{2,i} - S_{2,i}^*) + \varepsilon_i^4(T_{1,i}^2 + T_{2,i})^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Korišćenjem identiteta (2.12) i uvedene notacije, imamo

$$u_j = \frac{\varepsilon_j}{1+\varepsilon_j T_{1,j}}\ . \tag{2.21}$$

Na osnovu (2.21) nalazimo greške $z_{N,j} - \zeta_j$,

$$z_{N,j} - \zeta_j = z_j - u_j - \zeta_j = \frac{\varepsilon_j^2 T_{1,j}}{1+\varepsilon_j T_{1,j}} = w_{N,j}\varepsilon_j^2, \tag{2.22}$$

gde je

$$w_{N,j} = \frac{T_{1,j}}{1+\varepsilon_j T_{1,j}}.$$

Uvedimo skraćenice

$$B_{ij} = \frac{(2z_i - z_{N,j} - \zeta_j)w_{N,j}}{(z_i-\zeta_j)^2(z_i-z_{N,j})^2} = \frac{w_{N,j}}{(z_i-\zeta_j)(z_i-z_{N,j})}\left(\frac{1}{z_i-\zeta_j} + \frac{1}{z_i - z_{N,j}}\right). \tag{2.23}$$

Nije teško videti da je

$$T_{2,i} - S_{2,i}^* = \sum_{j\neq i}\frac{1}{(z_i-\zeta_j)^2} - \sum_{j\neq i}\frac{1}{(z_i-z_{N,j})^2} = -\sum_{j\neq i} B_{ij}\varepsilon_j^2, \tag{2.24}$$

pa dobijamo

$$\begin{aligned} D_i = 8 &+ 16\varepsilon_i T_{1,i} + 4\varepsilon_i^2(3T_{1,i}^2 + T_{2,i}) + 4\varepsilon_i^3 T_{1,i}(T_{1,i}^2 + T_{2,i}) \\ &-4\varepsilon_i^2(1+\varepsilon_i T_{1,i})^2\sum_{j\neq i} B_{ij}\varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^4(T_{1,i}^2+T_{2,i})^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Sada, polazeći od (2.19), uz korišćenje (2.25), nalazimo

$$\begin{aligned} G_i &= \varepsilon_i D_i - 8(1+\varepsilon_i T_{1,i})^4 u_i(1-u_i A_{2,i}) \\ &= \varepsilon_i\Big(8 + 16\varepsilon_i T_{1,i} + 4\varepsilon_i^2(3T_{1,i}^2+T_{2,i}) + 4\varepsilon_i^3 T_{1,i}(T_{1,i}^2+T_{2,i}) \\ &\quad -4\varepsilon_i^2(1+\varepsilon_i T_{1,i})^2\sum_{j\neq i}B_{ij}\varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^4(T_{1,i}^2+T_{2,i})^2\Big) \\ &\quad -8(1+\varepsilon_i T_{1,i})^4\frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i T_{1,i}}\left(1 - \frac{\varepsilon_i(2T_{1,i}+\varepsilon_i T_{1,i}^2 - \varepsilon_i T_{2,i})}{2(1+\varepsilon_i T_{1,i})^2}\right) \end{aligned}$$

i posle kraćeg sređivanja

$$G_i = -4\varepsilon_i^3(1+\varepsilon_i T_{1,i})^2\sum_{j\neq i}B_{ij}\varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^5(T_{1,i}^2+T_{2,i})^2. \tag{2.26}$$

Iz (2.10) dobijamo

$$|z_i - \zeta_j| \geq |\zeta_i - \zeta_j| - |z_i - \zeta_i| > d - \frac{1}{3n}\, d = \frac{3n-1}{3n}\, d = \frac{3n-1}{q}, \tag{2.27}$$

pa je

$$|z_i - z_j| \geq |z_i - \zeta_j| - |z_j - \zeta_j| > \frac{3n-1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{3n-2}{q}. \tag{2.28}$$

Na osnovu (2.27) ocenjujemo

$$|T_{1,i}| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|} < \frac{(n-1)q}{3n-1}, \qquad |T_{2,i}| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|^2} < \frac{(n-1)q^2}{(3n-1)^2} \tag{2.29}$$

i

$$|T_{1,i}|^2 + |T_{2,i}| \leq \frac{(n-1)^2 q^2}{(3n-1)^2} + \frac{(n-1)q^2}{(3n-1)^2} = \frac{n(n-1)q^2}{(3n-1)^2}. \tag{2.30}$$

Imajući u vidu nejednakosti (2.10) i (2.29) odredimo gornju granicu apsolutne vrednosti korekcije $|u_i|$,

$$|u_j| \leq \frac{|\varepsilon_j|}{1 - |\varepsilon_j||T_{1,i}j|} < \frac{\frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q}\frac{(n-1)q}{(3n-1)}} = \frac{3n-1}{2nq}. \tag{2.31}$$

Na osnovu (2.28) i (2.31) dobijamo

$$|z_i - z_{N,j}| \geq |z_i - z_j| - |u_j| > \frac{3n-2}{q} - \frac{3n-1}{2nq} = \frac{1}{2}\Big(6n - 7 + \frac{1}{n}\Big)\frac{1}{q} = \frac{\gamma_n}{q}, \tag{2.32}$$

gde je

$$\gamma_n = \frac{1}{2}\Big(6n - 7 + \frac{1}{n}\Big).$$

Na osnovu (2.10), (2.22) i (2.29) nalazimo

$$|w_{N,j}| \leq \frac{|T_{1,j}|}{1 - |\varepsilon_j||T_{1,j}|} \leq \frac{(n-1)q}{2n}\ . \tag{2.33}$$

Korišćenjem nejednakosti (2.27), (2.32) i (2.33) dobijamo iz (2.23)

$$\begin{aligned} |B_{ij}| &\leq \frac{|w_{N,j}|}{|z_i - \zeta_j||z_i - z_{N,j}|}\left(\frac{1}{|z_i - \zeta_j|} + \frac{1}{|z_i - z_{N,j}|}\right) \\ &\leq \frac{(n-1)q^4}{2n(3n-1)\gamma_n}\left(\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{\gamma_n}\right) =: b_n q^4 \end{aligned} \tag{2.34}$$

gde je

$$b_n = \frac{12n^2 - 9n + 1}{(n-1)(3n-1)^2(6n-1)^2}.$$

Na osnovu (2.19) i nejednakosti (2.10) i (2.34) sledi

$$|T_{2,i} - S^*_{2,i}| \le \sum_{j\neq i} |B_{i,j}||\varepsilon_j|^2 \le b_n q^4 \sum_{j\neq i} |\varepsilon_j|^2 < \frac{(12n^2-9n+1)q^2}{(3n-1)^2(6n-1)^2} = \theta_n q^2, \quad (2.35)$$

gde je

$$\theta_n = \frac{12n^2 - 9n + 1}{(3n-1)^2(6n-1)^2}.$$

Koristeći nejednakosti (2.10), (2.29), (2.30) i (2.35) nađimo donju granicu apsolutne vrednosti od D_i. Prvo, polazeći od (2.25), ocenjujemo

$$\begin{aligned}
|D_i| \ge\ & 8 - 16|\varepsilon_i||T_{1,i}| - 4|\varepsilon_i|^2(3|T_{1,i}|^2 + |T_{2,i}|) - 4|\varepsilon_i|^3|T_{1,i}|(|T_{1,i}|^2 + |T_{2,i}|) \\
& -4|\varepsilon_i|^2(1+|\varepsilon_i||T_{1,i}|)^2 \sum_{j\neq i}|B_{i,j}||\varepsilon_j|^2 - |\varepsilon_i|^4(|T_{1,i}|^2 + |T_{2,i}|)^2 \\
\ge\ & 8 - 16\cdot\frac{1}{q}\frac{(n-1)q}{3n-1} - 4\cdot\frac{1}{q^2}\left(3\frac{(n-1)^2q^2}{(3n-1)^2} + \frac{(n-1)q^2}{(3n-1)^2}\right) \\
& -4\cdot\frac{1}{q^3}\frac{(n-1)q}{(3n-1)}\frac{n(n-1)q^2}{(3n-1)^2} \\
& -4\cdot\frac{1}{q^2}\left(1+\frac{1}{q}\frac{(n-1)q}{3n-1}\right)^2\theta_n q^2 - \frac{1}{q^4}\cdot\frac{n^2(n-1)^2q^4}{(3n-1)^4} \\
=\ & \frac{3420n^6 + 9012n^5 - 17341n^4 + 10950n^3 - 3409n^2 + 536n - 32}{(6n-1)^2(3n-1)^4} =: h_n. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Dalje, iz (2.10), (2.29), (2.30) i (2.34) nalazimo gornje granice

$$\begin{aligned}
B_i^* &= \left|-4\varepsilon_i^3(1+\varepsilon_i T_{1,i})^2 \sum_{j\neq i} B_{ij}\varepsilon_j\right| \\
&\le 4\left(1+\frac{1}{q}\cdot\frac{(n-1)q}{3n-1}\right)^2 \frac{(12n^2-9n+1)|\varepsilon_i|^3q^4}{(n-1)(3n-1)^2(6n-1)^2}\sum_{j\neq i}|\varepsilon_j|^2 \\
&= \frac{16(2n-1)^2(12n^2-9n+1)|\varepsilon_i|^3q^4}{(n-1)(3n-1)^4(6n-1)^2}\sum_{j\neq i}|\varepsilon_j|^2 \\
&= \alpha_n|\varepsilon_i|^3q^4\sum_{j\neq i}|\varepsilon_j|^2 \quad (2.37)
\end{aligned}$$

i

$$|\varepsilon_i^5(T_{1,i}^2 + T_{2,i})^2| \le \frac{n^2(n-1)^2}{(3n-1)^4}|\varepsilon_i|^5 q^4 = \beta_n|\varepsilon_i|^5 q^4, \tag{2.38}$$

gde smo označili

$$\alpha_n = \frac{16(2n-1)^2(12n^2-9n+1)}{(n-1)(3n-1)^4(6n-1)^2} \quad \text{i} \quad \beta_n = \frac{n^2(n-1)^2}{(3n-1)^4}.$$

Koristeći programski paket *Mathematica*, ocenjujemo

$$h_n > 1.1728 > 1, \qquad \alpha_n < \frac{64}{243(n-1)^3} < 1, \qquad \beta_n < \frac{1}{81} < \frac{1}{2},$$

za svako $n \ge 3$. Na osnovu toga, iz (2.18), (2.19) i nejednakosti (2.36), (2.37) i (2.38) dobijamo

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_i| = \frac{|G_i|}{|D_i|} &\le \frac{\alpha_n|\varepsilon_i|^3 q^4 \sum_{j\ne i}|\varepsilon_j|^2 + \beta_n|\varepsilon_i|^5 q^4}{h_n} \\ &< \frac{64}{243(n-1)^3}\,|\varepsilon_i|^3 q^4 \sum_{j\ne i}|\varepsilon_j|^2 + \frac{1}{81}|\varepsilon_i|^5 q^4. \end{aligned}$$

Dakle,

$$|\hat{\varepsilon}_i| < \frac{1}{(n-1)^3}\,|\varepsilon_i|^3 q^4 \sum_{j\ne i}|\varepsilon_j|^2 + \frac{1}{2}\,|\varepsilon_i|^5 q^4,$$

čime je dokaz Leme 2.1 završen. □

Pretpostavimo da su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ dovoljno dobre aproksimacije nula $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ polinoma P, i neka je

$$\varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad \varepsilon^{(m)} = \max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{(m)}|,$$

gde su $z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}$ aproksimacije dobijene u m-tom iterativnom koraku. Tada se relacije (2.11) mogu napisati u sledećem obliku:

$$|\varepsilon_i^{(m+1)}| < \frac{1}{(n-1)^3}\,|\varepsilon_i^{(m)}|^3 q^4 \sum_{j\ne i}|\varepsilon_j^{(m)}|^2 + \frac{1}{2}\,|\varepsilon_i^{(m)}|^5 q^4, \tag{2.39}$$

za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \dots$.

Pretpostavimo da su početni uslovi

$$|\varepsilon_i^{(0)}| < \frac{d}{3n} = \frac{1}{q} \quad (i \in \mathbb{I}_n) \tag{2.40}$$

zadovoljeni. Sada, korišćenjem Leme 2.1, ocenjujemo red konvergencije iterativnog metoda (2.9). Dokaz je izveden pod uslovom (2.40), što znači da se podrazumeva lokalna kovergencija metoda.

Teorema 2.1 *Ako važi uslov* (2.40)*, tada je iterativni metod* (2.9) *konvergentan sa redom konvergencije jednakim pet.*

Dokaz. Dokaz teoreme izvodimo matematičkom indukcijom. Relacija (2.12) je izvedena sa početnim uslovom (2.10). Na isti način, podrazumevajući da važi uslov (2.40), ocenjujemo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i^{(1)}| &< \frac{1}{(n-1)^3}\,|\varepsilon_i^{(0)}|^3 q^4 \sum_{j\neq i} |\varepsilon_j^{(0)}|^2 + \frac{1}{2}\,|\varepsilon_i^{(0)}|^5 q^4 \\ &\le \frac{1}{(n-1)^3}\,|\varepsilon_i^{(0)}|^3 q^4\, \frac{n-1}{q^2} + \frac{1}{2}\,|\varepsilon_i^{(0)}|^5 q^4 \le \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{q} < \frac{1}{q}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ovo znači da implikacije

$$|\varepsilon_i^{(0)}| < \frac{d}{3n} = \frac{1}{q} \quad \Longrightarrow \quad |\varepsilon_i^{(1)}| < \frac{d}{3n} = \frac{1}{q},$$

važe za svako $i \in \mathbb{I}_n$. Sada ćemo dokazati da iz uslova (2.40) sledi nejednakost $|\varepsilon_i^{(m)}| < 1/q$ za svako $m \ge 1$.

Pretpostavimo da je $|\varepsilon_i^{(k)}| < 1/q$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i za proizvoljno $k \ge 0$. Tada relacija (2.11) postaje

$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| < \frac{1}{(n-1)^3}\,|\varepsilon_i^{(k)}|^3 q^4 \sum_{j\neq i} |\varepsilon_j^{(k)}|^2 + \frac{1}{2}\,|\varepsilon_i^{(k)}|^5 q^4 < \frac{1}{q}$$

za svako $k = 0, 1, \ldots$ i $i \in \mathbb{I}_n$. Imajući u vidu da nejednakost važi za $k = 0$ (uslov (2.40) Teoreme 2.1), sledi indukcijom da je $|\varepsilon_i^{(m)}| < 1/q$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i proizvoljno $m \ge 1$ pod uslovom (2.40).

Zamenjujući $|\varepsilon_i^{(m)}| = t_i^{(m)}/q$ u (2.39), dobijamo

$$t_i^{(m+1)} < \frac{(t_i^{(m)})^3}{(n-1)^3} \sum_{j\neq i} (t_j^{(m)})^2 + \frac{1}{2}\,(t_i^{(m)})^5 \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{2.42}$$

Stavimo

$$t^{(m)} = \max_{1\le i\le n} t_i^{(m)}.$$

Prvo, iz (2.40) dobijamo

$$q|\varepsilon_i^{(0)}| = t_i^{(0)} \leq t^{(0)} < 1 \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Na osnovu poslednje nejednakosti i iz (2.42) dobijamo $t_i^{(m)} < 1$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 1, 2, \ldots$. Na osnovu toga dobijamo iz (2.42)

$$t_i^{(m+1)} < \frac{(t_i^{(m)})^3}{(n-1)^3}(n-1)(t^{(m)})^2 + \frac{1}{2}(t_i^{(m)})^5 \leq (t^{(m)})^5\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big) < (t^{(m)})^5, \quad (2.43)$$

i zaključujemo da nizovi $\{t_i^{(m)}\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ konvergiraju ka nuli. Posledica toga je da su nizovi $\{|\varepsilon_i^{(m)}|\}$ takođe konvergentni što znači da $z_i^{(m)} \to \zeta_i$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Konačno, iz (2.43), možemo da zaključimo da iterativni metod (2.9) ima red konvergencije pet. $\square$

Primedba 2.2 Konvergencija mnogih iterativnih metoda se dokazuje u literaturi korišćenjem termina „dovoljno bliske početne aproksimacije" bez precizne karakterizacije ove bliskosti. Naša Teorema 2.1 je dokazana pod mnogo preciznijim početnim uslovima oblika

$$|z_i^{(0)} - \zeta_i| < \frac{1}{3n} \min_{\substack{i,j \\ j \neq i}} |\zeta_i - \zeta_j| \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Iz poslednje nejednakosti primećujemo da je minimalno rastojanje između nula uvedeno kao mera razdvojenosti nula zajedno sa tačnosti početne aproksimacije date razlikom $|z_i^{(0)} - \zeta_i|$. Konačno, i stepen polinoma n je uzet u obzir. Iako su nule ζ_i, koje su uključene u (2.32), nepoznate i uslov (2.32) je samo dovoljan (razlike $|z_i^{(0)} - \zeta_i|$ su u praksi veće), ovi uslovi daju bliži pogled na početne uslove za konvergenciju kada se proučava lokalna konvergencija. Naredni korak u budućem istraživanju je formulisanje računski proverljivih početnih uslova u obliku:

$$|P(z_i^{(0)})| < c_n \min_{\substack{i,j \\ j \neq i}} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \quad (i \in \mathbb{I}_n),$$

gde je c_n konstanta koja zavisi od stepena polinoma n. Ovaj problem pripada Smaleovoj teoriji, videti [118] i [182] za detalje.

Primedba 2.3 Slična analiza konvergencije FL metoda pokazuje da je ovaj metod lokalno konvegentan sa redom konvergencije četiri pod istim početnim uslovima (2.40). Ovo znači da poboljšani metod (2.9) ne zahteva strožije početne uslove za konvergenciju.

2.2 Dalja poboljšanja

Kao što je pomenuto u prethodnom odeljku, povećanje reda konvergencije modifikovanog FL metoda (2.9) na pet je postignuto bez dodatnih izračunavanja, što direktno dovodi do veće računske efikasnosti ubrzanog metoda (2.9) u poređenju sa osnovnim metodom (2.8). Sledeće prirodno pitanje se samo nameće:

Da li je moguće postići dalje ubrzanje brzine konvergencije primenjujući bolje aproksimacije od Newtonove u sumi u (2.8)*?*

Ovo pitanje je važno iz dva razloga:

- postoji nekoliko poznatih metoda sa korekcijama gde aproksimacije višeg reda daju bržu konvergenciju (videti, na primer, [154], [158] i [195]);
- drugi izvod P'' se ionako računa tako da bi se metod trećeg reda, na primer Halleyev

$$\hat{z} = z - h(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z) - \dfrac{P''(z)P(z)}{2P'(z)}} = z - \frac{u(z)}{1 - u(z)A_2(z)}, \tag{2.44}$$

  mogao realizovati bez dodatnih izračunavanja i zatim primeniti umesto Newtonovog metoda.

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, pretpostavimo da je aproksimacija z_j u sumi u (2.8) zamenjena tačnom nulom ζ_j. Očigledno takva zamena odgovara korišćenju metoda (teorijski) beskonačnog reda konvergencije. U tom slučaju imamo da je $S_{2,i} = T_{2,i}$ i $\varepsilon_j = z_j - \zeta_j = 0$ $(j \neq i)$ u (2.26), što daje

$$G_i = \varepsilon_i^5 (T_{1,i}^2 + T_{2,i})^2.$$

Kako $D_i \to 8$ kada $\varepsilon \to 0$, iz (2.11) sledi

$$\hat{\varepsilon}_i = \mathcal{O}(\varepsilon_i^5).$$

Dakle, red konvergencije ne može da pređe 5 i pored korišćenja korekcije višeg reda od dva. Numerički primeri dati u sledećem odeljku potvrđuju ovaj zaključak. Ovo se može direktno videti iz izraza (2.11) gde se izdvaja član sa $|\varepsilon_i^5|$ kao dominantan. Ovaj član takođe ne dozvoljava ubrzanje reda konvergencije preko 5 ni u slučaju primene Gauss-Seidelove varijante (single-step moda), videti Tabele 2.1–2.3.

2.3 Numerički primeri

U ovom odeljku su izloženi rezultati numeričkih eksperimenata dobijenih primenom FL metoda (2.8) četvrtog reda i poboljšanog metoda (2.9) petog reda sa Newtonovom korekcijom. Da bismo potvrdili naš zaključak o nemogućnosti daljeg poboljšanja korišćenjem metoda višeg reda u sumi u (2.8) takođe smo testirali modifikovane FL metode sa Halleyevom korekcijom u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{u_i^2}{2}\left(A_{2,i}^2 - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_{H,j})^2}\right)} \quad (i \in \mathbb{I}_n), \tag{2.45}$$

gde je $z_{H,j} = h(z_j)$ (videti (2.44)). Dodatno, testirali smo single-step metode koji odgovaraju total-step metodima (2.8), (2.9) i (2.45)

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{u_i^2}{2}\left(A_{2,i}^2 - \displaystyle\sum_{j < i} \frac{1}{(z_i - \hat{z}_j)^2} - \sum_{j > i} \frac{1}{(z_i - z_j)^2}\right)}, \tag{2.46}$$

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{u_i^2}{2}\left(A_{2,i}^2 - \displaystyle\sum_{j < i} \frac{1}{(z_i - \hat{z}_j)^2} - \sum_{j > i} \frac{1}{(z_i - z_{N,j})^2}\right)}, \tag{2.47}$$

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{u_i(1 - u_i A_{2,i})}{1 - 2u_i A_{2,i} + \dfrac{u_i^2}{2}\left(A_{2,i}^2 - \displaystyle\sum_{j < i} \frac{1}{(z_i - \hat{z}_j)^2} - \sum_{j > i} \frac{1}{(z_i - z_{H,j})^2}\right)}. \tag{2.48}$$

Između više testiranih polinomskih jednačina, izabrali smo tri primera za ilustraciju. Kao meru tačnosti dobijenih aproksimacija koristili smo Euklidsku normu

$$e^{(m)} := \|z^{(m)} - \zeta\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i^{(m)} - \zeta_i|^2\right)^{1/2} \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

gde su $\boldsymbol{z}^{(m)} = (z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)})$, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ i $m = 0, 1, \ldots$ je indeks iteracije u primenjenim iterativnim metodima

$$z_i^{(m+1)} = \phi_i(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}).$$

Primer 2.1 Primenili smo simultane metode (2.8), (2.9), (2.45), (2.46), (2.47) i (2.48) u cilju određivanja aproksimacija nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = &z^{18} + 12z^{16} + 268z^{14} + 2\,784z^{12} + 34\,710z^{10} + 324\,696z^8 \\ &+620\,972z^6 - 2\,270\,592z^4 - 28\,303\,951z^2 - 25\,704\,900.\end{aligned}$$

Tačne nule polinoma P su $\pm 1 \pm 2i$, ± 2, $\pm i$, $\pm 3 \pm 2i$, $\pm 2 \pm 3i$ i $\pm 3i$. Za početne aproksimacije izabrali smo sledeće kompleksne brojeve

$$\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 1.1 + 2.1i, & z_2^{(0)} = 1.1 - 2.1i, & z_3^{(0)} = -1.1 + 2.1i, \\
z_4^{(0)} = -1.1 - 2.1i, & z_5^{(0)} = 2.2 + 0.1i, & z_6^{(0)} = -2.1 + 0.1i, \\
z_7^{(0)} = -0.2 + 0.9i, & z_8^{(0)} = 0.2 - 1.1i, & z_9^{(0)} = 3.1 + 1.9i, \\
z_{10}^{(0)} = 3.2 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -3.2 + 1.9i, & z_{12}^{(0)} = -3.2 - 1.9i, \\
z_{13}^{(0)} = 2.1 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = 2.1 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.1 + 2.9i, \\
z_{16}^{(0)} = -2.1 - 2.9i, & z_{17}^{(0)} = 0.1 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = -0.1 - 2.9i.
\end{array}$$

Početne aproksimacije su tako izabrane da je $e^{(0)} = 0.74$. Dobijene vrednosti grešaka u prve tri iteracije date su u Tabeli 2.1.

	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
(2.8)	8.69(−3)	1.29(−10)	2.47(−42)
(2.9)	7.61(−3)	2.50(−11)	2.19(−53)
(2.45)	7.33(−3)	2.08(−11)	8.63(−54)
(2.46)	8.08(−3)	8.95(−11)	1.14(−43)
(2.47)	7.44(−3)	2.34(−11)	1.54(−53)
(2.48)	7.26(−3)	2.03(−11)	7.44(−54)

Tabela 2.1: Greške aproksimacija - Primer 2.1

Primer 2.2 Iste metode kao u Primeru 2.1 smo primenili na nalaženje nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = &z^{19} - 3z^{18} + 12z^{17} - 36z^{16} + 268z^{15} - 804z^{14} + 2784z^{13} - 8352z^{12} \\ &+34710z^{11} - 104130z^{10} + 324696z^9 - 974088z^8 + 620972z^7 - 1862916z^6 \\ &-2270592z^5 + 6811776z^4 - 28303951z^3 + 84911853z^2 \\ &-25704900z + 77114700.\end{aligned}$$

Tačne nule ovog polinoma su $\pm 1 \pm 2i$, ± 2, $\pm i$, $\pm 3 \pm 2i$, $\pm 2 \pm 3i$, $\pm 3i$ i 3, dok su početne aproksimacije

$$\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 1.1 + 2.2i, & z_2^{(0)} = 1.1 - 2.1i, & z_3^{(0)} = -1.2 + 2.1i, \\
z_4^{(0)} = -1.1 - 2.1i, & z_5^{(0)} = 2.1 + 0.1i, & z_6^{(0)} = -2.1 + 0.1i, \\
z_7^{(0)} = -0.2 + 0.9i, & z_8^{(0)} = 0.2 - 1.1i, & z_9^{(0)} = 3.1 + 1.9i, \\
z_{10}^{(0)} = 3.2 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -3.2 + 1.9i, & z_{12}^{(0)} = -3.1 - 1.9i, \\
z_{13}^{(0)} = 2.2 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = 2.1 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.2 + 2.9i, \\
z_{16}^{(0)} = -2.2 - 2.9i, & z_{17}^{(0)} = 0.2 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = -0.1 - 2.9i, \\
z_{19}^{(0)} = 3.1 - 0.1i. & &
\end{array}$$

Početne aproksimacije su u ovom primeru izabrane na taj način da je $e^{(0)} = 0.83$. Greške $e^{(k)}$ aproksimacija u prva tri iterativna koraka date su u Tabeli 2.2

	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
(2.8)	2.12(−2)	7.64(−9)	1.14(−35)
(2.9)	1.92(−2)	4.64(−9)	3.63(−41)
(2.45)	1.87(−2)	4.05(−9)	1.72(−41)
(2.46)	1.94(−2)	4.52(−9)	2.57(−36)
(2.47)	1.90(−2)	4.25(−9)	2.31(−41)
(2.48)	1.89(−2)	4.22(−9)	2.16(−41)

Tabela 2.2: Greške aproksimacija - Primer 2.2

Primer 2.3 Isti metodi su primenjeni na primeru polinoma

$$\begin{aligned}
P(z) = {} & z^{20} - 7z^{19} + 49z^{18} - 241z^{17} + 835z^{16} - 2783z^{15} + 5883z^{14} - 11987z^{13} \\
& +14604z^{12} + 1006z^{11} - 42428z^{10} + 172372z^9 - 496192z^8 + 589640z^7 \\
& -874464z^6 + 1211456z^5 + 138752z^4 + 2166144z^3 - 2455040z^2 \\
& +1382400z + 9216000.
\end{aligned}$$

Njegove nule su 4, -1, ± 2, $\pm 2i$, $\pm 3i$, $-1 \pm 2i$, $\pm 1 \pm i$, $2 \pm i$, $1 \pm 3i$ i $\pm 4i$. Početne aproksimacije su

$$\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 4.1 + 0.1i, & z_2^{(0)} = -1.1 + 0.1i, & z_3^{(0)} = 2.1 + 0.1i, \\
z_4^{(0)} = -2.1 - 0.1i, & z_5^{(0)} = 0.1 + 2.1i, & z_6^{(0)} = 0.1 - 2.1i, \\
z_7^{(0)} = 0.1 + 3.1i, & z_8^{(0)} = 0.1 - 3.1i, & z_9^{(0)} = -1.1 + 2.1i, \\
z_{10}^{(0)} = -1.1 - 2.1i, & z_{11}^{(0)} = -1.1 + 1.1i, & z_{12}^{(0)} = -1.1 - 1.1i, \\
z_{13}^{(0)} = 1.1 + 1.1i, & z_{14}^{(0)} = 1.1 - 1.1i, & z_{15}^{(0)} = 2.1 + 1.1i, \\
z_{16}^{(0)} = 2.1 - 1.1i, & z_{17}^{(0)} = 1.1 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = 1.1 - 3.1i, \\
z_{19}^{(0)} = 0.1 + 4.1i, & z_{20}^{(0)} = 0.1 - 4.1i. &
\end{array}$$

Početne aproksimacije su tako izabrane da je $e^{(0)} = 0.64$. Greške $e^{(k)}$ aproksimacija u prva tri iterativna koraka date su u Tabeli 2.3.

	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
(2.8)	$5.55(-3)$	$2.91(-11)$	$7.24(-44)$
(2.9)	$4.99(-3)$	$7.54(-12)$	$3.66(-55)$
(2.45)	$4.87(-3)$	$8.20(-12)$	$7.33(-55)$
(2.46)	$5.47(-3)$	$2.27(-11)$	$2.69(-44)$
(2.47)	$5.05(-3)$	$8.94(-12)$	$1.18(-54)$
(2.48)	$4.93(-3)$	$8.85(-12)$	$1.18(-54)$

Tabela 2.3: Greške aproksimacija - Primer 2.3

Iz Tabela 2.1, 2.2 i 2.3 primećujemo da je modifikovani metod (2.9) brži od FL metoda (2.8). Brzina konvergencije se uglavnom dobro slaže sa teorijskim rezultatima datim u Teoremi 2.1 kada su početne aproksimacije dovoljno blizu tačnim nulama. Takođe, primećujemo da metod (2.45) sa Halleyevom korekcijom ne ubrzava dodatno konvergenciju, što potvrđuje teorijsku diskusiju datu na kraju prethodnog odeljka. Isto važi i za single-step metode (2.47) i (2.48).

Poglavlje 3

Novi metod četvrtog reda - garantovana konvergencija

U ovom poglavlju biće izložen novi originalni iterativni metod za simultano izračunavanje nula polinoma i analizirane njegove osobine konvergencije. Rezultati ovog poglavlja publikovani su u radu [151] (M. S. Petković, L. Z. Rančić, M. R. Milošević, *Journal of Computational and Applied Mathematics*).

3.1 Osnovni metod

Neka je f realna ili kompleksna funkcija koja ima izvode bar do trećeg reda i definišimo

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad A_k(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!f'(z)} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Prvih nekoliko članova Schröderovog osnovnog niza $\{\varphi_k\}$ su dati sledećim jednakostima (izostavljajući argumente na desnoj strani jednakosti)

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= z - u, \\ \varphi_3(z) &= z - u - A_2, \\ \varphi_4(z) &= z - u - u^2A_2 - u^3(2A_2^2 - A_3) \end{aligned} \tag{3.1}$$

(videti [188, str. 84]). Iterativna funkcija φ_4 četvrtog reda, data sa (3.1), može se napisati u obliku

$$\varphi_4(z) = z - u - u^2A_2(1 + 2uA_2) + A_3u^3. \tag{3.2}$$

Konkretno, neka je $f \equiv P$ monični polinom n-tog stepena koji ima proste realne ili kompleksne nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, to jest,

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j). \tag{3.3}$$

Uvedimo sledeće skraćenice

$$A_{k,i} = A_k(z_i), \quad u = u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)}, \quad u_i = u(z_i),$$

$$\Sigma_{k,i}(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^k}, \quad \Sigma_{k,i} = \Sigma_{k,i}(z_i) \quad (k = 1, 2).$$

Napomenimo, još jednom, da ako dva realna ili kompleksna broja w i z imaju module istog reda, to jest ako je $|w| = \mathcal{O}(|z|)$, pisaćemo $w = \mathcal{O}_M(z)$.

Primenom logaritamskog diferenciranja nalazimo iz (3.3)

$$\frac{d}{dz} \log P(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j}. \tag{3.4}$$

Napišimo (3.4) u obliku

$$P'(z) = P(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j}$$

i nađimo drugi izvod

$$P''(z) = P'(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} - P(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}.$$

Korišćenjem poslednje relacije i (3.4), imamo

$$\begin{aligned}
2A_2(z) = \frac{P''(z)}{P'(z)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} - \frac{P(z)}{P'(z)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} - \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} \Big)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2} \\
&= \Big(\frac{1}{z - \zeta_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} \Big) \\
&\quad - \Big(\frac{1}{z - \zeta_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} \Big)^{-1} \Big(\frac{1}{(z - \zeta_i)^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2} \Big).
\end{aligned}$$

Neka je $z = z_i$ dovoljno bliska aproksimacija nule ζ_i, i neka je $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$. Iz poslednje relacije sledi

$$
\begin{aligned}
2A_2(z_i) = 2A_{2,i} &= \frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i} - \frac{1/\varepsilon_i^2 + \Sigma_{2,i}}{1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i}} = \frac{(1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})^2 - 1/\varepsilon_i^2 - \Sigma_{2,i}}{1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i}} \\
&= \frac{2\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}^2 - \varepsilon_i \Sigma_{2,i}}{1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i}} = 2\Sigma_{1,i} + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
u(z_i) = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}} = \mathcal{O}_M(\varepsilon_i),
$$

iz (3.5) nalazimo

$$
\Sigma_{1,i} = A_{2,i} + \mathcal{O}_M(u_i) = A_{2,i} + c_1 u_i, \qquad (3.6)
$$

gde je c_1 konstanta. Posle sređivanja, na sličan način, dobijamo

$$
\Sigma_{2,i} = A_{2,i}^2 - 2A_{3,i} + \mathcal{O}_M(u_i) = A_{2,i}^2 - 2A_{3,i} + c_2 u_i, \qquad (3.7)
$$

gde je c_2 konstanta. Iz (3.6) i (3.7) imamo

$$
A_{2,i} = \Sigma_{1,i} + c_1' u_i \qquad (3.8)
$$

$$
A_{3,i} = \frac{A_{2,i}^2 - \Sigma_{2,i}}{2} + c_2' u_i, \qquad (3.9)
$$

gde su c_1' i c_2' konstante.

Na osnovu (3.8) i (3.9) sledi iz (3.2), za $z = z_i$,

$$
\begin{aligned}
\varphi_4(z_i) &= z_i - u_i - u_i^2 A_{2,i}(1 + 2u_i(\Sigma_{1,i} + c_1' u_i)) + u_i^3 \left(\frac{A_{2,i}^2 - \Sigma_{2,i}}{2} + c_2' u_i\right) \\
&= z_i - u_i - u_i^2 A_{2,i}(1 + 2u_i(\Sigma_{1,i} + c_1' u_i)) \\
&\quad + u_i^3 \left(\frac{(\Sigma_{1,i} + c_1' u_i)^2 - \Sigma_{2,i}}{2} + c_2' u_i\right) \\
&= z_i - u_i - u_i^2 A_{2,i}(1 + 2u_i \Sigma_{1,i}) + \frac{u_i^3}{2} (\Sigma_{1,i}^2 - \Sigma_{2,i}) + \mathcal{O}_M(u_i^4) \\
&= z_i - u_i - u_i^2 A_{2,i}(1 + 2u_i \Sigma_{1,i}) + \frac{u_i^3}{2} (\Sigma_{1,i}^2 - \Sigma_{2,i})(1 + 2u_i \Sigma_{1,i}) \\
&\quad - \frac{u_i^3}{2} (\Sigma_{1,i}^2 - \Sigma_{2,i}) 2u_i \Sigma_{1,i} + \mathcal{O}_M(u_i^4),
\end{aligned}
$$

odakle je

$$
\varphi_4(z_i) = z_i - u_i - (1 + 2u_i \Sigma_{1,i}) \Big(u_i^2 A_{2,i} - \frac{u_i^3}{2} (\Sigma_{1,i}^2 - \Sigma_{2,i})\Big) + \mathcal{O}_M(u_i^4). \qquad (3.10)
$$

Konačno, zamenom razvoja

$$\frac{1}{(1-u_i\Sigma_{1,i})^2}=1+2u_i\Sigma_{1,i}+\mathcal{O}_M(u_i^2)$$

u (3.10), dobijamo

$$\varphi_4(z_i)\approx\tilde{\varphi}_4(z_i):=z_i-u_i-\frac{u_i^2A_{2,i}}{(1-u_i\Sigma_{1,i})^2}+\frac{u_i^3}{2(1-u_i\Sigma_{1,i})^2}(\Sigma_{1,i}^2-\Sigma_{2,i})\quad(i\in\mathbb{I}_n),\tag{3.11}$$

gde smo zanemarili članove uz u_i^k, $k\geq 4$.

Diferencirajući (3.4) nalazimo

$$\frac{P'(z)^2-P''(z)P(z)}{P(z)^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(z-\zeta_j)^2}.\tag{3.12}$$

Iz (3.4) i (3.12) dobijamo za $z=z_i$

$$\Sigma_{1,i}=\frac{1}{u_i}-\frac{1}{\varepsilon_i},\quad 1-u_i\Sigma_{1,i}=\frac{u_i}{\varepsilon_i},\quad \Sigma_{2,i}=\frac{1}{u_i^2}-\frac{P''(z_i)}{P(z_i)}-\frac{1}{\varepsilon_i^2}.\tag{3.13}$$

Zamenjujući (3.13) u (3.12) nalazimo

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_4(z_i)&=z_i-u_i-\frac{u_i^2A_{2,i}}{(u_i/\varepsilon_i)^2}+\frac{u_i^3(\Sigma_{1,i}^2-\Sigma_{2,i})}{2(u_i/\varepsilon_i)^2}\\&=z_i-u_i-\varepsilon_i^2A_{2,i}+\frac{\varepsilon_i^2u_i(\Sigma_{1,i}^2-\Sigma_{2,i})}{2}\\&=z_i-u_i-\frac{\varepsilon_i^2P''(z_i)}{2P'(z_i)}+\frac{\varepsilon_i^2P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big[\Big(\frac{1}{u_i}-\frac{1}{\varepsilon_i}\Big)^2-\Big(\frac{1}{u_i^2}-\frac{P''(z_i)}{P(z_i)}-\frac{1}{\varepsilon_i^2}\Big)\Big]\\&=z_i-u_i-\frac{\varepsilon_i^2P''(z_i)}{2P'(z_i)}+\frac{\varepsilon_i^2P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big(\frac{2}{\varepsilon_i^2}-\frac{2}{u_i\varepsilon_i}+\frac{P''(z_i)}{P(z_i)}\Big)\\&=z_i-\varepsilon_i=z_i-(z_i-\zeta_i)=\zeta_i.\end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali da (3.11) definiše nula-relaciju, to jest,

$$\zeta_i=z_i-u_i-\frac{u_i^2}{2(1-u_i\Sigma_{1,i})^2}\Big(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)}-u_i(\Sigma_{1,i}^2-\Sigma_{2,i})\Big)\quad(i\in\mathbb{I}_n),\tag{3.14}$$

ili u obliku

$$\zeta_i=z_i-u_i-\frac{u_i^2}{2\Big(1-u_i\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-\zeta_j}\Big)^2}\left[\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)}-u_i\left(\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-\zeta_j}\Big)^2-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{(z_i-\zeta_j)^2}\right)\right],\tag{3.15}$$

za $i\in\mathbb{I}_n$.

Primedba 3.1 Nula-relacija (3.15) može se takođe izvesti korišćenjem drugih metoda (videti, na primer, Poglavlje 4), ali je izloženo izvođenje prirodno, i potiče iz Schröderovog metoda (3.1) četvrtog reda.

Relacija (3.15) je pogodna za konstrukciju simultanih metoda za nalaženje realnih ili kompleksnih prostih nula polinoma u kompleksnoj aritmetici i inkluziju prostih nula u kružnoj intervalnoj aritmetici (videti [113] za opšti pristup u konstrukciji simultanih metoda).

Uvedimo skraćenice

$$\delta_{\lambda,i} = \frac{P^{(\lambda)}(z_i)}{P(z_i)}, \qquad S_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j)^{\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2).$$

Umesto $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}$ i $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}$ često ćemo, zbog jednostavnosti pisati $\sum_{j\neq i}$ i $\prod_{j\neq i}$.

Zamenjujući nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ njihovim aproksimacijama $z_1, \ldots, z_n$ u (3.15), može se dobiti sledeći iterativni metod za simultanu inkluziju prostih nula polinoma P:

$$\hat{z}_i = z_i - u_i - \frac{u_i^2\left(\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(S_{1,i}^2 - S_{2,i})\right)}{2(1 - u_i S_{1,i})^2}, \tag{3.16}$$

gde je

$$u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\delta_{1,i}}.$$

Ovde $\hat{z}_i$ označava aproksimaciju u sledećoj iteraciji.

Pretpostavimo da znamo početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P. Tada iz (3.16) dobijamo novi iterativni metod

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - u_i^{(m)} - \frac{(u_i^{(m)})^2\left(\dfrac{P''(z_i^{(m)})}{P'(z_i^{(m)})} - u_i^{(m)}\left((S_{1,i}^{(m)})^2 - S_{2,i}^{(m)}\right)\right)}{2(1 - u_i^{(m)} S_{1,i}^{(m)})^2} \tag{3.17}$$

za svako $m = 0, 1, \ldots$ i $i \in \mathbb{I}_n$. Veličine $u_i^{(m)}$ i $S_{\lambda,i}^{(m)}$ $(\lambda = 1, 2)$ se odnose na m-ti iterativni korak.

Red konvergencije

U sledećoj teoremi ćemo dokazati da je red konvergencije iterativnog metoda (3.17) jednak četiri.

Teorema 3.1 *Ako su početne aproksimacije* $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ *dovoljno blizu nula* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *polinoma* P*, tada je red konvergencije iterativnog metoda* (3.17) *jednak četiri.*

Dokaz. Polazeći od faktorizacije $P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)$ i uvodeći logaritamske izvode, iz (3.4) i (3.13) dobijamo

$$\delta_{1,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}, \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}, \tag{3.18}$$

gde je $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$.

Uvedimo skraćenice

$$G_{ij} = \frac{1}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)}, \quad H_{ij} = \frac{2z_i - z_j - \zeta_j}{(z_i - \zeta_j)^2 (z_i - z_j)^2}. \tag{3.19}$$

Korišćenjem (3.18) i (3.19), nalazimo

$$\delta_{1,i} - S_{1,i} = \frac{1}{\varepsilon_i}\Big(1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big), \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i} = \frac{1}{\varepsilon_i^2}\Big(1 - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i} H_{ij}\varepsilon_j\Big). \tag{3.20}$$

Iterativna formula (3.16) se može predstaviti u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\delta_{1,i} - S_{1,i}}\left(1 + \frac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i} + (\delta_{1,i} - S_{1,i})^2}{2\delta_{1,i}(\delta_{1,i} - S_{1,i})}\right). \tag{3.21}$$

Polazeći od (3.21), uz korišćenje (3.20), imamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{\Big(1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)}\left[1 + \frac{\varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i} H_{ij}\varepsilon_j - 1 + \Big(1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)^2}{2(1+\varepsilon_i \Sigma_{1,i})\Big(1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_i^3\left(\Big(\sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)^2 - \sum_{j\neq i} H_{ij}\varepsilon_j + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i}\Big(\sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)^2 - 2\Sigma_{1,i}\sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)}{2(1+\varepsilon_i \Sigma_{1,i})\Big(1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\Big)^2}.$$

Neka je

$$|\varepsilon| = \max_{1\le j\le n} |\varepsilon_j|$$

i neka su apsolutne vrednosti svih grešaka ε_j ($j \in \mathbb{I}_n$) istog reda, to jest, $|\varepsilon_j| = \mathcal{O}(|\varepsilon|)$. Veličine G_{ij} i H_{ij} su ograničene, kao i imenilac poslednjeg izraza koji teži ka 2, kad $|\varepsilon| \to 0$. Na osnovu te činjenice, iz poslednje relacije imamo

$$|\hat{\varepsilon}| = \max_{1 \le j \le n} |\hat{\varepsilon}_j| = \mathcal{O}(|\varepsilon|^4),$$

čime je dokaz Teoreme 3.1 završen. $\square$

Analiza konvergencije – garantovana konvergencija

Teorema 3.1 obezbeđuje standardnu tehniku koja podrazumeva da su početne aproksimacije „dovoljno bliske” željenim nulama, bez bilo kog dostupnog podatka koji bi karakterisao ovu bliskost. Takva tehnika je jedino od teorijskog značaja. Ovaj nedostatak ćemo prevazići analizom konvergencije iterativnog metoda (3.17) korišćenjem pristupa koji se bazira na Smaleovoj teoriji [182]. Ovaj pristup uvodi računski proverljive početne uslove koji garantuju konvergenciju posmatranog metoda, što se može posmatrati kao značajan napredak u teoriji iterativnih procesa. Kao što je ranije pomenuto, u slučaju algebarskih polinoma

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

podrazumeva se da početni uslovi zavise samo od koeficijenata polinoma $a_1, \ldots, a_n$, početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ i stepena polinoma n. Naravno, ovo je od velikog značaja u praksi, jer su ovi uslovi računski proverljivi. Više detalja o Smaleovoj teoriji ocene koja se tiče iterativnih metoda za simultano određivanje nula polinoma može se naći u [126], [153], [154], [165], [166] i [197].

Za različite kompleksne brojeve $z_1, \ldots, z_n$ definišimo

$$W_i = \frac{P(z_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} (z_i - z_j)}, \quad w = \max_{1 \le j \le n} |W_j|, \quad d = \min_{\substack{1 \le i,j \le n \\ j \ne i}} |z_i - z_j|.$$

Sledeće tvrđenje je dokazano u [118], gde $\{c; r\}$ označava disk sa centrom c i poluprečnikom r.

Teorema 3.2 *Neka su $z_1, \ldots, z_n$ različiti kompleksni brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti $w < c_n d$ i $c_n < 1/(2n)$. Tada su diskovi*

$$D_1 := \left\{ z_1; \frac{|W_1|}{1 - nc_n} \right\}, \ldots, D_n := \left\{ z_n; \frac{|W_n|}{1 - nc_n} \right\}$$

disjunktni i svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P, to jest

$$\zeta_i \in \left\{ z_i; \frac{1}{1-nc_n}\,|W_i| \right\} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{3.22}$$

U nastavku ćemo pretpostaviti da važi sledeći uslov:

$$w < c_n d, \quad c_n = \frac{1}{3n+1}. \tag{3.23}$$

Kako je $c_n = 1/(3n+1) < 1/(2n)$, važe sva tvrđenja Teoreme 3.2.

Na osnovu (3.22) nalazimo

$$|\varepsilon_i| = |z_i - \zeta_i| < \frac{1}{1-nc_n}\,|W_i| < \frac{c_n}{1-nc_n}\,d = \frac{1}{2n+1}\,d = \gamma_n d, \tag{3.24}$$

gde je $\gamma_n = 1/(2n+1)$. Tada je

$$|z_i - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| > d - \frac{1}{2n+1}\,d = \frac{2n}{2n+1}\,d. \tag{3.25}$$

S obzirom na (3.24) i (3.25), ocenjujemo

$$|\Sigma_{1,i}| \leq \sum_{j \neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|} < \frac{(n-1)(2n+1)}{2nd} \tag{3.26}$$

i

$$\begin{aligned} |1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}| &\geq 1 - |\varepsilon_i||\Sigma_{1,i}| \geq 1 - \frac{1}{(2n+1)}\,d \cdot \frac{(n-1)(2n+1)}{2nd} \\ &= 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n} = \alpha_n. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Polazeći od (3.19) i uzimajući u obzir (3.25), dobijamo

$$\left| \sum_{i \neq j} G_{ij} \varepsilon_j \right| \leq \sum_{j \neq i} \frac{|\varepsilon_j|}{|z_i - \zeta_j||z_i - z_j|} < \frac{(n-1)|\varepsilon_j|}{\dfrac{2n}{2n+1}\,d^2} < \frac{(n-1)\,\gamma_n}{\dfrac{2n}{2n+1}\,d} = \frac{n-1}{2nd} = \frac{a_n}{d} \tag{3.28}$$

i

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \neq j} H_{ij} \varepsilon_j \right| &\leq \sum_{j \neq i} \frac{|\varepsilon_j|}{|z_i - \zeta_j||z_i - z_j|} \left(\frac{1}{|z_i - \zeta_j|} + \frac{1}{|z_i - z_j|} \right) \\ &\leq \frac{(n-1)|\varepsilon_j|}{\dfrac{2n}{2n+1}\,d^2} \left(\frac{2n+1}{2nd} + \frac{1}{d} \right) \\ &\leq \frac{(n-1)\gamma_n}{\dfrac{2n}{2n+1}\,d^2} \left(\frac{2n+1}{2n} + 1 \right) = \frac{(n-1)(4n+1)}{4n^2 d^2} = \frac{b_n}{d^2}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

gde su

$$a_n = \frac{n-1}{2n} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{(n-1)(4n+1)}{4n^2}.$$

Uvedimo

$$T_i = 1 + \frac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i} + (\delta_{1,i} - S_{1,i})^2}{2\delta_{1,i}(\delta_{1,i} - S_{1,i})}.$$

Korišćenjem (3.20) nalazimo

$$T_i = 1 + \frac{\varepsilon_i\left(\varepsilon_i\left(\sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)^2 + \varepsilon_i \sum\limits_{j\neq i} H_{ij}\varepsilon_j - 2\sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)}{2(1+\varepsilon_i \varSigma_{1,i})\left(1 - \varepsilon_i \sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)} = 1 + t_i, \tag{3.30}$$

gde je

$$t_i = \frac{\varepsilon_i\left(\varepsilon_i\left(\sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)^2 + \varepsilon_i \sum\limits_{j\neq i} H_{ij}\varepsilon_j - 2\sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)}{2(1+\varepsilon_i \varSigma_{1,i})\left(1 - \varepsilon_i \sum\limits_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right)}.$$

Tada se iterativna formula (3.21) može napisati u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - C_i = z_i - T_i(\delta_{1,i} - S_{1,i})^{-1}. \tag{3.31}$$

Ovde C_i označava iterativnu korekciju u kojoj ima suma koje zavise od aproksimacija $z_1, \ldots, z_n$.

Neka je

$$q_n := \frac{\gamma_n(\gamma_n a_n^2 + \gamma_n b_n + 2a_n)}{2\alpha_n(1-\gamma_n a_n)}.$$

Na osnovu (3.24), (3.28) i (3.29) ocenjujemo za $n \geq 3$

$$\begin{aligned}\left|1 - \varepsilon_i \sum_{j\neq i} G_{ij}\varepsilon_j\right| &\geq 1 - |\varepsilon_i| \sum_{j\neq i} |G_{ij}||\varepsilon_j| > 1 - \gamma_n d \cdot \frac{a_n}{d} \\ &= 1 - \gamma_n a_n = 1 - \frac{n-1}{2n(2n+1)} \geq \frac{20}{21}\end{aligned} \tag{3.32}$$

i

$$|t_i| \le \frac{|\varepsilon_i|\biggl(|\varepsilon_i|\Bigl(\sum_{j\ne i}|G_{ij}||\varepsilon_j|\Bigr)^2 + |\varepsilon_i|\sum_{j\ne i}|H_{ij}||\varepsilon_j| + 2\sum_{j\ne i}|G_{ij}||\varepsilon_j|\biggr)}{2|1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i}|\Bigl|1-\varepsilon_i\sum_{j\ne i}G_{ij}\varepsilon_j\Bigr|}$$

$$< \frac{\gamma_n d\Bigl(\gamma_n d\cdot\dfrac{a_n^2}{d^2} + \gamma_n d\cdot\dfrac{b_n}{d^2} + \dfrac{2a_n}{d}\Bigr)}{2\alpha_n(1-\gamma_n a_n)} = q_n, \tag{3.33}$$

gde je imenilac ograničena veličina na osnovu (3.32). Pod uslovom (3.23) imamo

$$q_n = \frac{n(8n^2+n-9)}{2(n+1)(2n+1)(4n^2+n+1)} < 0.09.$$

Polazeći od (3.30) nalazimo

$$|T_i| < 1 + |t_i| < 1 + q_n, \tag{3.34}$$

$$|T_i| > 1 - |t_i| > 1 - q_n. \tag{3.35}$$

U sledećoj lemi dajemo neke neophodne ocene i granice.

Lema 3.1 *Neka nejednakost* (3.23) *važi. Tada je*

(i) $|\hat{z}_i - z_i| = |C_i| < 1.5|W_i|$;

(ii) $|\widehat{W}_i| < 0.3|W_i|$;

(iii) $\widehat{w} < c_n\hat{d}, \quad c_n = 1/(3n+1)$.

Dokaz. Za različite tačke $z_1,\ldots,z_n$ koristićemo Lagrangeovu interpolaciju da bismo dobili sledeću reprezentaciju polinoma P :

$$P(z) = \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{W_j}{z-z_j} + 1\right]\prod_{j=1}^{n}(z-z_j), \quad W_j = \frac{P(z_j)}{\prod\limits_{k\ne j}(z_j-z_k)}. \tag{3.36}$$

Stavljajući $z = \hat{z}_i$ u (3.36), dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = \left(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j\ne i}\frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right)\prod_{j=1}^{n}(\hat{z}_i - z_j).$$

Posle deljenja sa $\prod\limits_{j\ne i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)$, imamo

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)\Big(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big)\prod_{j\neq i}\Big(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\Big). \quad (3.37)$$

U našem razmatranju ćemo, takođe, koristiti identitet (videti [20])

$$\Big(\delta_{1,i} - \sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - z_j}\Big)W_i = 1 + \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i - z_j}. \quad (3.38)$$

Korišćenjem (3.23) i definicije minimalnog rastojanja dobijamo

$$|(\delta_{1,i} - S_{1,i})W_i| \leq 1 + \sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} < 1 + (n-1)c_n \quad (3.39)$$

i

$$|(\delta_{1,i} - S_{1,i})W_i| \geq 1 - \sum_{j\neq i}\frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} > 1 - (n-1)c_n. \quad (3.40)$$

Polazeći od iterativne formule (3.31) nalazimo

$$\hat{z}_i - z_i = -C_i = -T_i(\delta_{1,i} - S_{1,i})^{-1}.$$

Korišćenjem (3.34) i (3.40) ocenjujemo

$$|\hat{z}_i - z_i| = |C_i| = \frac{|T_i||W_i|}{|(\delta_{1,i} - S_{1,i})W_i|} < \frac{(1+q_n)|W_i|}{1-(n-1)c_n} = \frac{\lambda_n}{c_n}|W_i| < \lambda_n d, \quad (3.41)$$

gde smo označili

$$\lambda_n = \frac{(1+q_n)c_n}{1-(n-1)c_n}.$$

Niz λ_n/c_n ima složenu formu, pa smo njegovu gornju granicu našli korišćenjem programskog paketa *Mathematica*,

$$\frac{\lambda_n}{c_n} < 1.5, \quad \text{za svako} \quad n \geq 3.$$

Dakle, dokazali smo da je

$$|C_i| < 1.5|W_i|. \quad (3.42)$$

Na osnovu (3.41), imamo

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| > (1-\lambda_n)d \quad (3.43)$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > (1 - 2\lambda_n)d. \tag{3.44}$$

Nejednakost (3.44) daje

$$\hat{d} > (1 - 2\lambda_n)d, \quad \text{to jest,} \quad \frac{d}{\hat{d}} < \frac{1}{1 - 2\lambda_n}. \tag{3.45}$$

Zapazimo da je, pod uslovom (3.23), $\lambda_n < 0.14$.

Polazeći od iterativne formule (3.31), na osnovu (3.30) i (3.38), nalazimo

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -\frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i})W_i}{T_i} = -\frac{1}{1 + t_i}\Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\Big). \tag{3.46}$$

Da bismo dokazali tvrđenje (ii) koristimo (3.46) i dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} &= -\frac{1}{1 + t_i}\Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\Big) + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \\
&= \frac{-(\hat{z}_i - z_i)\displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\hat{z}_i - z_j)} + t_i\Big(1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big)}{1 + t_i}.
\end{aligned}$$

Korišćenjem (3.23), (3.33), (3.35), (3.41) i (3.43) ocenjujemo

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big| &\leq \frac{\lambda_n d\, \dfrac{(n-1)c_n d}{d(1 - \lambda_n)d} + q_n\Big(1 + \dfrac{(n-1)c_n d}{(1 - \lambda_n)d}\Big)}{1 - q_n} \\
&\leq \frac{\dfrac{(n-1)c_n\lambda_n}{1 - \lambda_n} + q_n\Big(1 + \dfrac{(n-1)c_n}{1 - \lambda_n}\Big)}{1 - q_n}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Na osnovu granica (3.41) i (3.44) nalazimo

$$\Big|\prod_{j \neq i}\Big(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\Big)\Big| \leq \prod_{j \neq i}\Big(1 + \frac{|\hat{z}_j - z_j|}{|\hat{z}_i - \hat{z}_j|}\Big) < \Big(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\Big)^{n-1}. \tag{3.48}$$

Polazeći od (3.37) i uzimajući u obzir nejednakosti (3.41), (3.47) i (3.48), dobijamo

$$\begin{aligned}
|\widehat{W}_i| &\leq |\hat{z}_i - z_i|\Big|\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big|\Big|\prod_{j \neq i}\Big(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\Big)\Big| \\
&< \frac{\lambda_n}{c_n}\,|W_i|\frac{\dfrac{(n-1)c_n\lambda_n}{1 - \lambda_n} + q_n\Big(1 + \dfrac{(n-1)c_n}{1 - \lambda_n}\Big)}{1 - q_n}\Big(1 + \frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_n}\Big)^{n-1} =: f_n|W_i|,
\end{aligned}$$

gde je

$$f_n = \frac{\lambda_n}{c_n} \cdot \frac{\dfrac{(n-1)c_n\lambda_n}{1-\lambda_n} + q_n\Big(1 + \dfrac{(n-1)c_n}{1-\lambda_n}\Big)}{1-q_n}\Big(1 + \frac{\lambda_n}{1-2\lambda_n}\Big)^{n-1}.$$

Korišćenjem programskog paketa *Mathematica* nalazimo da je $f_n < 0.3$. Dakle,

$$|\widehat{W}_i| < f_n|W_i| < 0.3|W_i|. \tag{3.49}$$

Kako je $f_n < 0.3$ i $\lambda_n < 0.14$, sledi da je

$$\frac{f_n}{1-2\lambda_n} < 0.42 < 1.$$

Sada, na osnovu (3.45) i (3.49), ocenjujemo

$$\widehat{w} < f_n w < f_n c_n d < \frac{f_n}{1-2\lambda_n} \cdot c_n\hat{d} < c_n\hat{d},$$

čime smo dokazali tvrđenje (iii) Leme 3.1. $\square$

Sada ćemo dati glavni rezultat koji se tiče početnih uslova koji garantuju konvergenciju simultanog metoda (3.17).

Teorema 3.3 *Ako početni uslov*

$$w^{(0)} < \frac{d^{(0)}}{3n+1} \tag{3.50}$$

važi, tada je iterativni metod (3.17) *konvergentan.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja (iii) Leme 3.1, važi sledeća implikacija:

$$w < c_n d \implies \hat{w} < c_n\hat{d}, \quad c_n = \frac{1}{3n+1}.$$

Na sličan način, možemo da dokažemo indukcijom da uslov (3.50) uslovljava nejednakost $w^{(m)} < c_n d^{(m)}$ za svako $m = 1, 2, \ldots$. Dakle, sva tvrđenja Leme 3.1 važe za svako $m = 1, 2, \ldots$, ako je početni uslov (3.50) zadovoljen. Konkretno, nejednakosti

$$|W_i^{(m+1)}| < 0.3|W_i^{(m)}| \tag{3.51}$$

i

$$|C_i^{(m)}| = |z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| < 1.5|W_i^{(m)}| \tag{3.52}$$

važe za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \dots$.

Iz iterativne formule (3.31) vidimo da su korekcije $C_i^{(m)}$ date sa

$$C_i^{(m)} = T_i^{(m)} \Big(\delta_{1,i}^{(m)} - S_{1,i}^{(m)} \Big)^{-1}, \tag{3.53}$$

gde se skraćenice $C_i^{(m)}$, $T_i^{(m)}$, $\delta_{1,i}^{(m)}$, $S_{1,i}^{(m)}$ odnose na m-ti iterativni korak.

Dokazaćemo da je iterativni proces (3.17) dobro definisan u svakoj iteraciji, ako pokažemo da funkcija $F_i(z_1, \dots, z_n) = P(z_i)/C_i$ koja se javlja u (1.79) i Teoremi 1.13 nije jednaka nuli. Iz (3.53) imamo

$$F_i(z_1, \dots, z_n) = \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}) W_i \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}{T_i} \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Na osnovu (3.34), (3.40) i definicije minimalnog rastojanja nalazimo

$$\begin{aligned} |F_i(z_1, \dots, z_n)| &= \left| \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}) W_i \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}{T_i} \right| > \frac{1 - (n-1)c_n}{1 + q_n} \cdot d^{n-1} \\ &> 0.6 d^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Dakle, iterativni proces (3.17) je dobro definisan.

Sledeći korak u našem dokazu je da dokažemo da su nizovi $\{|C_i^{(m)}|\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ monotono opadajući. Izostavljajući indekse iteracije dobijamo korišćenjem (3.30), (3.39), (3.42), (3.49) i (3.53)

$$\begin{aligned} |\widehat{C}_i| &< 1.5 |\widehat{W}_i| < 1.5 \cdot 0.3 |W_i| = 0.45 |W_i| = 0.45 |T_i (\delta_{1,i} - S_{1,i})^{-1}| \left| \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}) W_i}{T_i} \right| \\ &= 0.45 |C_i| \left| \frac{1}{1 + t_i} \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \right) \right|, \end{aligned}$$

to jest, na osnovu (3.35) i (3.39), nalazimo

$$|\widehat{C}_i| < 0.45 \, \frac{1 + (n-1)c_n}{1 - q_n} \, |C_i|.$$

Lako je oceniti

$$\frac{1 + (n-1)c_n}{1 - q_n} < 1.35,$$

tako da je

$$|\widehat{C}_i| < 0.45 \cdot 1.35|C_i| < 0.61|C_i|.$$

Na taj način smo našli da je konstanta β, koja se javlja u Teoremi 1.13, jednaka $\beta = 0.61$. Dakle, dokazali smo da nejednakost $|C_i^{(m+1)}| < 0.61|C_i^{(m)}|$ važi za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \dots$.

Veličina $g(\beta)$ koja se javlja u tvrđenju (ii) Teoreme 1.13 je jednaka $g(0.61) = 1/(1-0.61) \leq 2.57$. Korišćenjem ove činjenice neophodno je još dokazati disjunktnost inkluzivnih diskova

$$S_1 = \{z_1^{(0)}; g(0.61)|C_1^{(0)}|\}, \dots, S_n = \{z_n^{(0)}; g(0.61)|C_n^{(0)}|\}$$

(tvrđenje (ii) Teoreme 1.13).

Na osnovu (3.52) imamo da je $|C_i^{(0)}| < 1.5w^{(0)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$. Izaberimo indeks $p \in \mathbb{I}_n$ tako da je

$$|C_p^{(0)}| = \max_{1 \leq i \leq n} |C_i^{(0)}|.$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} d^{(0)} &> (3n+1)w^{(0)} > \frac{1}{1.5}\,(3n+1)|C_p^{(0)}| \geq \frac{3n+1}{2 \cdot 1.5}\,(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|) \\ &> g(0.61)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|), \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{3n+1}{2 \cdot 1.5} \geq 3.33 > 2.57 \geq g(0.61)$$

za svako $n \geq 3$. Ovo znači da je

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \geq d^{(0)} > g(0.61)(|C_i^{(0)}| + |C_j^{(0)}|) = \operatorname{rad} S_i + \operatorname{rad} S_j.$$

Dakle, na osnovu jednostavne geometrijske konstrukcije sledi da su dobijeni inkluzivni diskovi $S_1, \dots, S_n$ disjunktni, čime smo kompletirali dokaz Teoreme 3.3. □

Kombinovanjem Teorema 3.1 i 3.3, dobijamo sledeće tvrđenje:

Teorema 3.4 *Ako početne aproksimacije* $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ *zadovoljavaju uslov* (3.50), *tada iterativni metod* (3.17) *konvergira sa redom konvergencije četiri.*

Ubrzanje konvergencije i druge modifikacije

Prednosti nula-relacije (3.15) i iterativnog metoda (3.17) proizilaze iz sledećih osobina:

1) Metod (3.17) ima pogodnu strukturu koja dozvoljava značajno ubrzanje konvergencije sa zanemarljivim brojem dodatnih osnovnih operacija. Očigledno, računska efikasnost ovih ubrzanih metoda je time značajno poboljšana (videti sledeći Odeljak 3.2);
2) Korišćenjem pogodnih transformacija, iterativna formula (3.17) se može modifikovati na oblik pogodan za nalaženje višestrukih nula polinoma [123]

$$\hat{z}_i = z_i - \mu_i u_i - \frac{\mu_i u_i\left(1 - \mu_i + u_i\mu_i \dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(\widetilde{S}_{1,i}^2 - \mu_i\widetilde{S}_{2,i})\right)}{2(1 - u_i\widetilde{S}_{1,i})^2} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ \nu \le n),$$

gde su $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ višestrukosti nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ i

$$\widetilde{S}_{q,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{\mu_j}{(z_i - z_j)^q} \quad (q = 1, 2);$$

3) Nula-relacija (3.15) je pogodna za konstrukciju intervalnih metoda za simultanu inkluziju nula polinoma u kružnoj kompleksnoj aritmetici. Na primer, ako su $Z_1, \ldots, Z_n$ diskovi koji sadrže nule polinoma, tada se dobija sledeći inkluzivni metod četvrtog reda

$$\widehat{Z}_i = z_i - u_i - \frac{u_i^2\left[\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i\left(\left(\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}\right)^2 - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - Z_j)^2}\right)\right]}{2\left(1 - u_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j}\right)^2},$$

gde je $i \in \mathbb{I}_n$ i z_i centar diska Z_i. Podsetimo da se glavna prednost inkluzivnih metoda sastoji u automatskom određivanju gornje granice greške, date poluprečnicima dobijenih diskova koji sadrže željene nule u svakoj iteraciji. Štaviše, korišćenjem pristupa izloženog u [120], konvergencija gore pomenutog inkluzivnog metoda se može povećati na pet i šest bez dodatnih numeričkih operacija. Istaknimo da intervalna aritmetika, kao moćno oružje u kontroli grešaka zaokruživanja i inkluzije tačnog rezultata, postaje deo nove moderne kompjuterske aritmetike (videti [79] i sledeće Poglavlje 4).

Primedba 3.2 Mnogi simultani metodi, uključujući metod Weierstrass-Docheva [26], [201] (takođe poznat kao Durand-Kernerov metod [28], [70])

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} = z_i - W_i, \tag{3.54}$$

ne poseduju osobine 1) i 2). Štaviše, intervalna varijanta metoda Weierstrss-Docheva ima nisku računsku efikasnost, videti [113, Pogl. 6].

Numerički rezultati

Da bismo demonstrirali osobine konvergencije novog metoda (3.17), primenili smo ovaj metod na rešavanje mnogih polinomskih jednačina. U cilju upoređivanja, pored metoda (3.17), takođe smo testirali i sledeće simultane metode četvrtog reda:

- *Modifikovani Ehrlichov metod* [99]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i} - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j + u_j}}, \quad u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}; \tag{3.55}$$

- *Metod Halleyevog tipa* [198]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2\delta_{1,i}}{2\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i} - S_{1,i}^2}; \tag{3.56}$$

- *Metod tipa Ostrowskog* [157]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}}}; \tag{3.57}$$

- *Modifikovani metod Börsch-Supana* [100]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j + W_j}}, \quad W_i = \frac{P(z_i)}{\displaystyle\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}; \tag{3.58}$$

- *Metod Kyurkchieva* [73] (videti takođe [205])

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} + W_i \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}}; \tag{3.59}$$

- *Dvostruki metod Weierstrass-Docheva* [26], [201]

$$\hat{y}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\displaystyle\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}, \quad \hat{z}_i = y_i - \frac{P(y_i)}{\displaystyle\prod_{j\neq i}(y_i - y_j)}. \tag{3.60}$$

Primetimo da je metod (3.60) dobijen dvostrukom primenom metoda Weirstrass-Docheva (3.54). Posmatran kao dvo-koračni metod, metod (3.60) ima red konvergencije četiri. Ova veštačka kompozicija je napravljena zbog upoređivanja tako dobijenog metoda sa izloženim metodima četvrtog reda.

U našim numeričkim eksperimentima često smo koristili činjenicu da sve nule polinoma $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_n \neq 0)$ leže unutar prstena $\{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z| < R\}$, gde se r i R računaju po formulama

$$r = \frac{1}{2} \min_{1 \le k \le n} \left| \frac{a_n}{a_{n-k}} \right|^{1/k}, \quad R = 2 \max_{1 \le k \le n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|^{1/k} \tag{3.61}$$

(videti [56, Teoreme 6.4b i 6.4k]). Mera aproksimacija dobijenih u iterativnom procesu je data normom

$$e^{(m)} = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j^{(m)} - \zeta_j|^2 \right)^{1/2} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Primer 3.1 Novi metod (3.17) i navedeni metodi (3.55), (3.56), (3.57), (3.58), (3.59) i (3.60) su primenjeni za simultano određivanje aproksimacija nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = {} & z^{19} - 3z^{18} + 12z^{17} - 36z^{16} + 268z^{15} - 804z^{14} + 2784z^{13} - 8352z^{12} \\ & +34710z^{11} - 104130z^{10} + 324696z^{9} - 974088z^{8} + 620972z^{7} - 1862916z^{6} \\ & -2270592z^{5} + 6811776z^{4} - 28303951z^{3} + 84911853z^{2} \\ & -25704900z + 77114700. \end{aligned}$$

Nule ovog polinoma su $\pm 1 \pm 2i$, ± 2, $\pm i$, $\pm 3 \pm 2i$, $\pm 2 \pm 3i$, $\pm 3i$, 3. Početne aproksimacije su uzete tako da daju $e^{(0)} = 0.69$. Greške aproksimacija $e^{(k)}$ u prve tri iteracije su date u Tabeli 3.1.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
(3.17)	4.39(−3)	1.51(−11)	8.98(−45)
(3.55)	5.03(−3)	2.97(−11)	4.01(−44)
(3.56)	4.32(−3)	1.37(−11)	5.19(−45)
(3.57)	1.58(−3)	1.40(−13)	6.24(−54)
(3.58)	3.16(−3)	7.05(−12)	2.90(−47)
(3.59)	3.47(−3)	1.06(−11)	1.01(−45)
(3.60)	1.08(−2)	1.58(−9)	7.15(−37)

Tabela 3.1: Euklidska norma grešaka za Primer 3.1

Primer 3.2 U cilju nalaženja nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = z^{20} &+ 12z^{19} + 80z^{18} + 360z^{17} + 1356z^{16} + 4512z^{15} + 13440z^{14} + 35520z^{13} \\ &+84976z^{12} + 192192z^{11} + 416000z^{10} + 574080z^{9} - 153024z^{8} - 3283968z^{7} \\ &-8048640z^{6} - 15452160z^{5} - 20317184z^{4} - 15925248z^{3} - 38010880z^{2} \\ &-68812800z - 73728000,\end{aligned}$$

primenili smo iste metode kao u Primeru 3.1. Tačne nule polinoma su $1 \pm i$, $1 \pm 3i$, $2\pm2i$, ±2, $\pm2i$, $-1\pm i$, $-1\pm3i$, $-2\pm2i$, $-3\pm i$, $-3\pm3i$. Početne aproksimacije su izabrane tako da daju $e^{(0)} = 1.59$. Dobijene vrednosti grešaka u prva tri iterativna koraka date su Tabeli 3.2. Lošiji rezultati u poređenju sa onim iz Primera 3.1 su posledica grubljih početnih aproksimacija.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
(3.17)	2.09(−1)	1.02(−4)	6.59(−18)
(3.55)	2.06(−1)	1.21(−4)	3.10(−17)
(3.56)	2.30(−1)	1.65(−4)	9.61(−17)
(3.57)	divergira	–	–
(3.58)	1.27(−1)	1.69(−5)	6.82(−21)
(3.59)	1.25(−1)	1.73(−5)	1.83(−20)
(3.60)	3.51(−1)	1.13(−3)	2.60(−13)

Tabela 3.2: Euklidska norma grešaka za Primer 3.2

Primer 3.3 Novi metod (3.17) je primenjen za nalaženje nula moničnog polinoma P dvadesetog stepena datog sa

$$\begin{aligned}P(z) = z^{20} &+ (0.887 - 0.342i)z^{19} + (-0.569 + 0.909i)z^{18} + (0.109 + 0.855i)z^{17} \\ &+(0.294 - 0.651i)z^{16} + (-0.087 + 0.948i)z^{15} + (-0.732 + 0.921i)z^{14} \\ &+(0.801 - 0.573i)z^{13} + (0.506 - 0.713i)z^{12} + (-0.670 + 0.841i)z^{11} \\ &+(-0.369 - 0.682i)z^{10} + (0.177 - 0.946i)z^{9} + (-0.115 + 0.577i)z^{8} \\ &+(0.174 - 0.956i)z^{7} + (-0.018 - 0.438i)z^{6} + (0.738 + 0.645i)z^{5} \\ &+(-0.655 - 0.618i)z^{4} + (0.123 - 0.088i)z^{3} + (0.773 + 0.965i)z^{2} \\ &+(-0.757 + 0.109i)z + (0.223 - 0.439i).\end{aligned}$$

Koeficijenti $a_k \in \mathbb{C}$ (izuzev vodećeg jediničnog koeficijenta) su izabrani generatorom slučajnih brojeva kao $\mathrm{Re}(a_k) = \mathrm{random}(x)$, $\mathrm{Im}(a_k) = \mathrm{random}(x)$, gde je $\mathrm{random}(x) \in (-1, 1)$. Slučajni brojevi su zaokruženi odsecanjem na tri decimalne cifre.

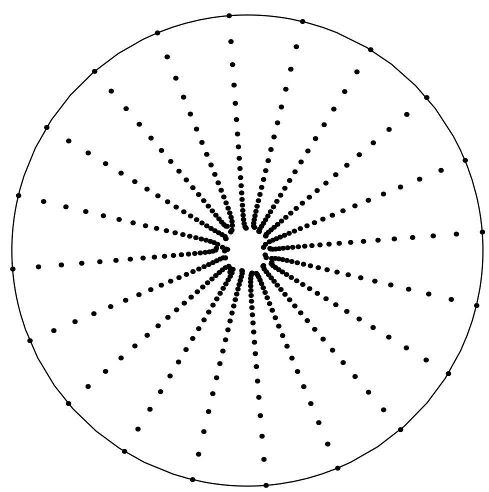
Korišćenjem (3.61) našli smo da sve nule polinoma leže u prstenu $\{z\ :\ r = 0.3155 < |z| < 2.0711 = R\}$. Mogli smo da startujemo sa početnim aproksimacijama ekvidistantno raspoređenim na krugu poluprečnika $r_0 \in (0.3155, 2.0711)$, ali smo želeli da testiramo novi metod (3.17) u slučaju kada su početne aproksimacije dosta udaljene od tačnih nula. Iz tog razloga, izabrali smo da početne aproksimacije leže na kružnici $|z| = 10$, određene na sledeći način:

$$z_\nu^{(0)} = r_0 \exp(i\theta_\nu), \quad i = \sqrt{-1}, \quad \theta_\nu = \frac{\pi}{n}\Big(2\nu - \frac{3}{2}\Big) \quad (\nu = 1, \dots, 20) \tag{3.62}$$

(takozvane Aberthove aproksimacije, videti [1]). Prekidali smo iterativni proces u trenutku kada je zadovoljen zaustavni kriterijum

$$\max_{1 \le i \le 20} |P(z_i^{(m)})| < \tau = 10^{-12}.$$

Ponašanje iterativnog metoda (3.17) pri rešavanju ovog polinoma je ilustrovano na Slici 3.1. Zaustavni kriterijum je ispunjen posle 23 iteracije. Na početku, metod konvergira linearno, ali gotovo pravolinijski prema tačnim nulama, pokazujući u nekoliko završnih iteracija četvrti red konvergencije. Može se primetiti da su aproksimacije radijalno raspoređene prema nulama polinoma.



Slika 3.1: Trajektorije aproksimacija nula

Na osnovu rezultata izloženih u Tabelama 3.1 i 3.2 i velikog broja drugih testiranih polinoma, možemo da zaključimo da je novi metod (3.17) uporediv sa postojećim simultanim metodima istog reda.

3.2 Ubrzani metodi

U ovom odeljku razmatraćemo ubrzane metode koji se dobijaju modifikacijom metoda (3.17), tako što se umesto tekuće iteracije $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$ koriste poboljšane aproksimacije $\boldsymbol{z}^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$ $(k = 1, 2)$, gde su:

$$z_j^{(1)} = z_j - u_j = z_j - \frac{P(z_j)}{P'(z_j)} \quad \text{(Newtonova aproksimacija)}$$

$$z_j^{(2)} = z_j - h_j = z_j - \frac{P(z_j)}{P'(z_j) - \dfrac{P(z_j)P''(z_j)}{2P'(z_j)}} \quad \text{(Halleyeva aproksimacija).}$$

Podsetimo da se Newtonova i Halleyeva aproksimacija javljaju u klasičnim iterativnim metodima

$$\hat{z}_j = z_j - u_j = z_j - \frac{P(z_j)}{P'(z_j)} = z_j - \frac{1}{\delta_{i,j}} \quad \text{(Newtonov metod),}$$

$$\hat{z}_j = z_j - h_j = z_j - \frac{P(z_j)}{P'(z_j) - \dfrac{P(z_j)P''(z_j)}{2P'(z_j)}} = z_j - \frac{2\delta_{1,j}}{2\delta_{1,j}^2 - \delta_{2,j}} \quad \text{(Halleyev metod),}$$

drugog i trećeg reda, respektivno.

Istaknimo da indeksi u eksponentu sada ukazuju na tip aproksimacije i da ih treba strogo razlikovati od indeksa iteracije.

Definišimo sume

$$S_{\lambda,i}^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j^{(k)})^{\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2,\ k = 1, 2),$$

gde indeks k ukazuje na tip aproksimacije $z_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$. Tada se iz nula-relacije (3.15) mogu konstruisati sledeći ubrzani iterativni metodi:

$$\hat{z}_i = z_i - u_i - \frac{u_i^2 \left[\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_I)} - u_i \Big((S_{1,i}^{(k)})^2 - S_{2,i}^{(k)} \Big) \right]}{2(1 - u_i S_{1,i}^{(k)})^2} \quad (k = 1, 2). \tag{3.63}$$

Red konvergencije metoda (3.63) je dat u sledećoj teoremi:

Teorema 3.5 *Ako su početne aproksimacije* $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ *dovoljno blizu odgovarajućih nula* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *polinoma* P*, tada je red konvergencije iterativnog metoda* (3.63) *jednak* $k + 4$ $(k = 1, 2)$.

Dokaz. Pre izvođenja dokaza, zapazimo da je ubrzanje konvergencije metoda (3.63) sa 4 na 5 i 6 postignuto korišćenjem već izračunatih veličina. Dakle, računska efikasnost ubrzanih metoda (3.63) je značajno povećana.

Polazeći od faktorizacije $P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)$, uz korišćenje logaritamskog diferenciranja, dobijamo

$$\delta_{1,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}, \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i-\zeta_j)^2} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}, \tag{3.64}$$

gde je $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$.

Korišćenjem identiteta (3.64) i uvedenih skraćenica, nalazimo

$$u_j = \frac{1}{\delta_{1,i}} = \frac{\varepsilon_j}{1+\varepsilon_j \Sigma_{1,j}} \tag{3.65}$$

i

$$h_j = \frac{2\delta_{1,i}}{2\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,j}} = \frac{2\varepsilon_j(1+\varepsilon_j\Sigma_{1,j})}{2+2\varepsilon_j\Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2 + \Sigma_{2,j})}. \tag{3.66}$$

Na osnovu (3.65) i (3.66) nalazimo greške $z_j^{(k)} - \zeta_j$,

$$z_j^{(1)} - \zeta_j = z_j - u_j - \zeta_j = \frac{\varepsilon_j^2 \Sigma_{1,j}}{1+\varepsilon_j\Sigma_{1,j}} = w_j^{(1)}\varepsilon_j^2, \tag{3.67}$$

$$z_j^{(2)} - \zeta_j = z_j - h_j - \zeta_j = \frac{\varepsilon_j^3(\Sigma_{1,j}^2 + \Sigma_{2,j})}{2+2\varepsilon_j\Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2+\Sigma_{2,j})} = w_j^{(2)}\varepsilon_j^3. \tag{3.68}$$

Dakle, ove greške se mogu napisati u istom obliku $z_j^{(k)} - \zeta_j = w_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1}$ $(k=1,2)$, gde je značenje $w_j^{(k)}$ očigledno iz izraza (3.67) i (3.68).

Uvedimo skraćenice

$$D_i^{(k)} = \sum_{j\neq i} \frac{w_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1}}{(z_i-\zeta_j)(z_i - z_j^{(k)})}\,, \quad B_i^{(k)} = \sum_{j\neq i} \frac{(2z_i - z_j^{(k)} - \zeta_j)w_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1}}{(z_i-\zeta_j)^2(z_i-z_j^{(k)})^2}\,.$$

Korišćenjem jednakosti (3.64) imamo

$$\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon_i}(1-\varepsilon_i D_i^{(k)}), \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon_i^2}(1-\varepsilon_i^2 B_i^{(k)}). \tag{3.69}$$

Polazeći od (3.63), na osnovu (3.69) dobijamo

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i D_i^{(k)}}\left[1 + \frac{\varepsilon_i^2 B_i^{(k)} - 1 + (1-\varepsilon_i D_i^{(k)})^2}{2(1+\varepsilon_i \Sigma_{1,i})(1-\varepsilon_i D_i^{(k)})}\right] \\ &= \frac{\varepsilon_i^3\Big((D_i^{(k)})^2 - B_i^{(k)} + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i}(D_i^{(k)})^2 - 2\Sigma_{1,i} D_i^{(k)}\Big)}{2(1+\varepsilon_i \Sigma_{1,i})(1-\varepsilon_i D_i^{(k)})^2}.\end{aligned}$$

Neka je $|\varepsilon| = \max_{1\le j\le n} |\varepsilon_j|$ i neka su apsolutne vrednosti svih nula ε_j $(j \in \mathbb{I}_n)$ istog reda, to jest, $|\varepsilon_j| = \mathcal{O}(|\varepsilon|)$. Veličine $D_i^{(k)}$ i $B_i^{(k)}$ su ograničene, kao i imenilac koji teži ka 2 kad $|\varepsilon| \to 0$. Na osnovu ovih činjenica, iz poslednje relacije imamo

$$|\hat{\varepsilon}| = \max_{1\le j\le n} |\hat{\varepsilon}_j| = \mathcal{O}(|\varepsilon|^{k+4}) \quad (k = 1, 2).$$

Dakle, primenom Newtonove aproksimacije u (3.63) dobijamo metod sa korekcijama reda pet, dok korišćenje Halleyeve aproksimacije daje metod reda šest. □

Analiza konvergencije – garantovana konvergencija

Teorema 3.5 je dokazana uz pretpostavku da su početne aproksimacije dovoljno blizu traženih nula, bez bilo kojih dostupnih podataka koji bi određivali ovu bliskost. Da bismo prevazišli ovaj nedostatak, kao i kod metoda bez korekcija izložićemo analizu konvergencije metoda (3.63) korišćenjem pristupa koji se bazira na Smaleovoj teoriji [182].

U nastavku ćemo podrazumevati da je zadovoljen sledeći uslov

$$w < c_n d, \quad c_n = \frac{1}{3n+2}. \tag{3.70}$$

Nejednakost (3.70) je strožija od nejednakosti $w < d/(2n)$ koja se javlja u Teoremi 3.2, pa sva tvrđenja Teoreme 3.2 važe.

Lema 3.2 *Ako* (3.70) *važi, tada je*

(i) $|z_i - z_j^{(k)}| \ge \alpha_n^{(k)} d$,

(ii) $|z_j^{(k)} - \zeta_j| \le \beta_n^{(k)} \dfrac{|\varepsilon_j|^{k+1}}{d^k}$,

gde su

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{2n^2+4n+3}{2(n+1)(n+2)}, \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{3n^3+8n^2+12n+4}{(n+1)(3n^2+11n+4)},$$
$$\beta_n^{(1)} = \frac{2(n-1)(n+1)}{n+2}, \quad \beta_n^{(2)} = \frac{4n(n-1)(n+1)^2}{3n^2+11n+4}.$$

Dokaz. Neka je $\gamma_n = 1/(2n+2)$. Iz (3.22) dobijamo

$$|\varepsilon_i| = |z_i - \zeta_i| < \frac{1}{1-nc_n}|W_i| < \frac{c_n}{1-nc_n}\,d = \frac{1}{2n+2}\,d = \gamma_n d. \tag{3.71}$$

Tada je

$$|z_i - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| > d - \frac{1}{2n+2}\,d = \frac{2n+1}{2n+2}\,d. \tag{3.72}$$

Na osnovu (3.72) ocenjujemo

$$|\Sigma_{1,i}| \leq \sum_{j\neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|} < \frac{2(n-1)(n+1)}{(2n+1)d}, \tag{3.73}$$

$$|\Sigma_{2,i}| \leq \sum_{j\neq i} \frac{1}{|z_i - \zeta_j|^2} < \frac{4(n-1)(n+1)^2}{(2n+1)^2 d^2} \tag{3.74}$$

i

$$\begin{aligned}|1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i}| &\geq 1 - |\varepsilon_i||\Sigma_{1,i}| \geq 1 - \frac{1}{(2n+2)}d\cdot\frac{(n-1)(2n+2)}{(2n+1)d} = 1 - \frac{n-1}{2n+1}\\ &= \frac{n+2}{2n+1} =: s_n. \end{aligned}\tag{3.75}$$

Imajući u vidu nejednakosti (3.70) i (3.73) nađimo gornje granice apsolutnih vrednosti korekcija u_i i h_i. Prvo, polazeći od (3.65), uz korišćenje (3.71) i (3.75) ocenjujemo

$$|u_j| \leq \frac{|\varepsilon_j|}{1-|\varepsilon_j|\Sigma_{1,j}} < \frac{\dfrac{d}{2n+2}}{\dfrac{n+2}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2(n+1)(n+2)}\,d. \tag{3.76}$$

Na osnovu (3.71) i (3.73) sada imamo

$$\begin{aligned}|2\varepsilon_j(1+\varepsilon_j\Sigma_{1,j})| &\leq 2|\varepsilon_j|(1+|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|) < \frac{2d}{2n+2}\left(1+\frac{d}{2n+2}\,\frac{(n-1)(2n+2)}{(2n+1)d}\right)\\ &= \frac{3n}{(n+1)(2n+1)}\,d \end{aligned}\tag{3.77}$$

i

$$\begin{aligned}\sigma_j &= |2+2\varepsilon_j\Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2 + \Sigma_{2,j})| \geq 2 - 2|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}| - |\varepsilon_j|^2(|\Sigma_{1,j}|^2 + |\Sigma_{2,j}|)\\ &> 2 - \frac{(n-1)(2n+2)}{(2n+1)(n+1)} - \frac{d^2}{(2n+2)^2}\left(\frac{(n-1)^2(2n+2)^2}{(2n+1)^2d^2} + \frac{(n-1)(2n+2)^2}{(2n+1)^2d^2}\right)\\ &= \frac{3n^2+11n+4}{(2n+1)^2}. \end{aligned}\tag{3.78}$$

Polazeći od (3.66), uz korišćenje nejednakosti (3.77) i (3.78) nalazimo

$$\begin{aligned}|h_j| \le \frac{|2\varepsilon_j(1+\varepsilon_j\Sigma_{1,j})|}{\sigma_j} &< \frac{\dfrac{3n}{(n+1)(2n+1)}\,d}{\dfrac{3n^2+11n+4}{(2n+1)^2}} \\ &= \frac{3n(2n+1)}{(n+1)(3n^2+11n+4)}\,d. \end{aligned} \tag{3.79}$$

S obzirom na (3.76), (3.79) i definicije minimalnog rastojanja d, imamo

$$|z_i - z_j^{(1)}| \ge |z_i - z_j| - |u_j| > d - \frac{2n+1}{2(n+1)(n+2)}\,d = \frac{2n^2+4n+3}{2(n+1)(n+2)}\,d = \alpha_n^{(1)} d \tag{3.80}$$

i

$$\begin{aligned}|z_i - z_j^{(2)}| \ge |z_i - z_j| - |h_j| &> d - \frac{3n(2n+1)}{(n+1)(3n^2+11n+4)}\,d \\ &= \frac{3n^3+8n^2+12n+4}{(n+1)(3n^2+11n+4)}\,d = \alpha_n^{(2)}\,d. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Na osnovu (3.67), (3.71) i (3.73) dobijamo

$$\begin{aligned}|z_j^{(1)} - \zeta_j| = |w_j^{(1)}||\varepsilon_j|^2 \le \frac{|\varepsilon_j|^2|\Sigma_{1,j}|}{1-|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|} &\le \frac{|\varepsilon_j|^2\dfrac{(n-1)(2n+2)}{(2n+1)d}}{1-\dfrac{d}{2n+2}\dfrac{(n-1)(2n+2)}{(2n+1)d}} \\ &= \frac{2(n^2-1)}{n+2}\frac{|\varepsilon_j|^2}{d} = \beta_n^{(1)}\frac{|\varepsilon_j|^2}{d}.\end{aligned}$$

Polazeći od (3.68) i uzimajući u obzir (3.70), (3.73) i (3.78), imamo

$$\begin{aligned}|z_j^{(2)} - \zeta_j| = |w_j^{(2)}||\varepsilon_j|^3 &\le \frac{|\varepsilon_j|^3(|\Sigma_{1,j}|^2+|\Sigma_{2,j}|)}{|2+2\varepsilon_j\Sigma_{1,j}+\varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2+\Sigma_{2,j})|} \\ &< \frac{|\varepsilon_j|^3\left(\dfrac{(n-1)^2(2n+2)^2}{(2n+1)^2d^2}+\dfrac{(n-1)(2n+2)^2}{(2n+1)^2d^2}\right)}{\dfrac{3n^2+11n+4}{(2n+1)^2}} \\ &= \frac{4n(n-1)(n+1)^2}{3n^2+11n+4}\frac{|\varepsilon_j|^3}{d^2} = \beta_n^{(2)}\frac{|\varepsilon_j|^3}{d^2},\end{aligned}$$

čime je dokaz Leme 3.2 završen. $\square$

Korišćenjem (3.72) i tvrđenja (i) i (ii) Leme 3.2 ocenjujemo

$$|D_i^{(k)}| \le \sum_{j\neq i} \frac{|w_j^{(k)}||\varepsilon_j|^{k+1}}{|z_i-\zeta_j||z_i-z_j^{(k)}|} < \frac{(n-1)\beta_n^{(k)}\dfrac{|\varepsilon_j|^{k+1}}{d^k}}{\dfrac{2n+1}{2n+2}\,d\alpha_n^{(k)}d} < \frac{(n-1)\beta_n^{(k)}\gamma_n^{k+1}}{\dfrac{2n+1}{2n+2}\,\alpha_n^{(k)}d} = \frac{a_n^{(k)}}{d} \tag{3.82}$$

i

$$\begin{aligned}
|B_i^{(k)}| &\le \sum_{j\neq i} \frac{|w_j^{(k)}||\varepsilon_j|^{k+1}}{|z_i-\zeta_j||z_i-z_j^{(k)}|}\left(\frac{1}{|z_i-\zeta_j|}+\frac{1}{|z_i-z_j^{(k)}|}\right)\\
&\le \frac{(n-1)\beta_n^{(k)}\dfrac{|\varepsilon_j|^{k+1}}{d^k}}{\dfrac{2n+1}{2n+2}\,d\alpha_n^{(k)}d}\left(\frac{2n+2}{(2n+1)\,d}+\frac{1}{\alpha_n^{(k)}d}\right)\\
&\le \frac{(n-1)\beta_n^{(k)}\gamma_n^{k+1}}{\dfrac{2n+1}{2n+2}\,\alpha_n^{(k)}d^2}\left(\frac{2n+2}{2n+1}+\frac{1}{\alpha_n^{(k)}}\right) = \frac{b_n^{(k)}}{d^2},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

gde su

$$\begin{aligned}
a_n^{(1)} &= \frac{2(n-1)^2(n+1)}{(2n+1)(2n^2+4n+3)}, \quad a_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(n-1)^2}{(2n+1)(3n^3+8n^2+12n+4)},\\
b_n^{(1)} &= \frac{4(4n+5)(n-1)^2(n+1)^3}{(2n+1)^2(2n^2+4n+3)^2},\\
b_n^{(2)} &= \frac{n(n-1)^2(n+1)^2(12n^3+41n^2+43n+12)}{(2n+1)^2(3n^3+8n^2+12n+4)^2}.
\end{aligned}$$

Uvedimo

$$T_i^{(k)} = 1 + \frac{\delta_{2,i}-\delta_{1,i}^2+S_{2,i}^{(k)}+(\delta_{1,i}-S_{1,i}^{(k)})^2}{2\delta_{1,i}(\delta_{1,i}-S_{1,i}^{(k)})} \quad (k=1,2).$$

Korišćenjem (3.65) i (3.69) nalazimo

$$T_i^{(k)} = 1 + \frac{\varepsilon_i[\varepsilon_i(D_i^{(k)})^2+\varepsilon_i B_i^{(k)}-2D_i^{(k)}]}{2(1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})(1-\varepsilon_i D_i^{(k)})} = 1 + t_i^{(k)}, \tag{3.84}$$

gde je

$$t_i^{(k)} = \frac{\varepsilon_i[\varepsilon_i(D_i^{(k)})^2+\varepsilon_i B_i^{(k)}-2D_i^{(k)}]}{2(1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})(1-\varepsilon_i D_i^{(k)})}.$$

Tada se iterativna formula (3.63) može napisati u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - C_{k,i} = z_i - T_i^{(k)}(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)})^{-1} \quad (k = 1, 2). \tag{3.85}$$

U (3.85) $C_{k,i}$ označavaju iterativne korekcije sa sumama koje zavise od poboljšanih aproksimacija $z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}$. Neka je

$$q_n^{(k)} := \frac{\gamma_n\Big(\gamma_n (a_n^{(k)})^2 + \gamma_n b_n^{(k)} + 2a_n^{(k)}\Big)}{2s_n(1 - \gamma_n a_n^{(k)})}.$$

Na osnovu (3.71), (3.75), (3.82) i (3.83) ocenjujemo

$$|1 - \varepsilon_i D_i^{(k)}| \geq 1 - |\varepsilon_i||D_i^{(k)}| > 1 - \gamma_n d \cdot \frac{a_n^{(k)}}{d} = 1 - \gamma_n a_n^{(k)} \tag{3.86}$$

i

$$\begin{aligned} |t_i^{(k)}| &\leq \frac{|\varepsilon_i|\Big[|\varepsilon_i||D_i^{(k)}|^2 + |\varepsilon_i||B_i^{(k)}| + 2|D_i^{(k)}|\Big]}{2|1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}||1 - \varepsilon_i D_i^{(k)}|} \\ &< \frac{\gamma_n d\Big(\gamma_n d \cdot \dfrac{(a_n^{(k)})^2}{d^2} + \gamma_n d \cdot \dfrac{b_n^{(k)}}{d^2} + \dfrac{2a_n^{(k)}}{d}\Big)}{2s_n(1 - \gamma_n a_n^{(k)})} = q_n^{(k)}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

gde je imenilac ograničen zbog (3.75) i (3.86). Pod uslovom (3.71) dobijamo

$$\begin{aligned} q_n^{(1)} &= \frac{(n-1)^2(8n^3 + 25n^2 + 27n + 12)}{2(n+2)(2n^2 + 4n + 3)(4n^3 + 9n^2 + 12n + 2)}, \\ q_n^{(2)} &= \frac{n(n-1)^2(24n^4 + 89n^3 + 167n^2 + 124n + 28)}{4(n+2)(3n^3 + 8n^2 + 12n + 4)(12n^4 + 37n^3 + 66n^2 + 39n + 8)}. \end{aligned}$$

Polazeći od (3.84) nalazimo

$$|T_i^{(k)}| < 1 + |t_i^{(k)}| < 1 + q_n^{(k)}, \tag{3.88}$$

$$|T_i^{(k)}| > 1 - |t_i^{(k)}| > 1 - q_n^{(k)}. \tag{3.89}$$

U sledećoj lemi odredićemo neke neophodne granice i ocene.

Lema 3.3 *Pretpostavimo da važi nejednakost* (3.70). *Tada je*

(i) $|\hat{z}_i - z_i| = |C_{k,i}| < 1.52|W_i| \quad (k = 1, 2);$

(ii) $|\widehat{W}_i| < 0.25|W_i|$;

(iii) $\widehat{w} < c_n\hat{d}, \quad c_n = 1/(3n+2)$.

Dokaz. Za različite tačke $z_1, \ldots, z_n$ koristićemo Lagrangeovu interpolaciju da bismo dobili sledeću reprezentaciju polinoma P :

$$P(z) = \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{W_j}{z - z_j} + 1\Big] \prod_{j=1}^{n} (z - z_j), \quad W_j = \frac{P(z_j)}{\prod\limits_{k \neq j} (z_j - z_k)}. \tag{3.90}$$

Stavljajući $z = \hat{z}_i$ u (3.90), dobijamo

$$P(\hat{z}_i) = \Big(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big) \prod_{j=1}^{n} (\hat{z}_i - z_j).$$

Zatim, posle deljenja sa $\prod\limits_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)$, nalazimo

$$\widehat{W}_i = \frac{P(\hat{z}_i)}{\prod\limits_{j \neq i} (\hat{z}_i - \hat{z}_j)} = (\hat{z}_i - z_i)\Big(\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\Big) \prod_{j \neq i} \Big(1 + \frac{\hat{z}_j - z_j}{\hat{z}_i - \hat{z}_j}\Big). \tag{3.91}$$

U našem razmatranju ćemo koristiti identitet

$$\Big(\delta_{1,i} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}\Big) W_i = 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \tag{3.92}$$

(videti [20]). Tada imamo

$$\Big(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)} + S_{1,i}^{(k)} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}\Big) W_i = \Big(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)} - R_i^{(k)}\Big) W_i,$$

gde je

$$R_i^{(1)} = \sum_{j \neq i} \frac{u_j}{(z_i - z_j)(z_i - z_j^{(1)})} \quad \text{i} \quad R_i^{(2)} = \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{(z_i - z_j)(z_i - z_j^{(2)})}.$$

Na osnovu poslednje jednakosti i (3.92) nalazimo

$$(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i = R_i^{(k)} W_i + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} \quad (k = 1, 2). \tag{3.93}$$

Kako je

$$|R_i^{(1)}| \le \sum_{j\ne i} \frac{|u_j|}{|z_i - z_j||z_i - z_j^{(1)}|}, \quad |R_i^{(2)}| \le \sum_{j\ne i} \frac{|h_j|}{|z_i - z_j||z_i - z_j^{(2)}|},$$

korišćenjem (3.76), (3.79), (3.80) i (3.81) ocenjujemo

$$|R_i^{(k)} W_i| \le |R_i^{(k)}| c_n d < r_n^{(k)}, \tag{3.94}$$

gde je

$$r_n^{(1)} = \frac{(n-1)(2n+1)}{(3n+2)(2n^2+4n+3)}, \quad r_n^{(2)} = \frac{3n(n-1)(2n+1)}{(3n+2)(3n^3+8n^2+12n+4)}.$$

Na osnovu (3.70), (3.88), (3.93), (3.94) i definicije minimalnog rastojanja d nalazimo

$$|(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i| \le |R_i^{(k)} W_i| + 1 + \sum_{j\ne i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} < r_n^{(k)} + 1 + (n-1)c_n \quad (k = 1,2) \tag{3.95}$$

i

$$|(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i| \ge 1 - |R_i^{(k)} W_i| - \sum_{j\ne i} \frac{|W_j|}{|z_i - z_j|} > 1 - r_n^{(k)} - (n-1)c_n \quad (k = 1,2). \tag{3.96}$$

Polazeći od iterativne formule (3.85), dobijamo

$$\hat{z}_i - z_i = -C_{k,i} = -T_i^{(k)} (\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)})^{-1} \quad (k = 1,2).$$

Korišćenjem (3.88) i (3.96) ocenjujemo

$$|\hat{z}_i - z_i| = |C_{k,i}| = \frac{|T_i^{(k)}||W_i|}{|(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i|} < \frac{(1 + q_n^{(k)})|W_i|}{1 - r_n^{(k)} - (n-1)c_n} = \frac{\lambda_n^{(k)}}{c_n} |W_i| < \lambda_n^{(k)} d, \tag{3.97}$$

gde je

$$\lambda_n^{(k)} = \frac{(1 + q_n^{(k)}) c_n}{1 - r_n^{(k)} - (n-1)c_n} \quad (k = 1,2).$$

Izraz za niz $\lambda_n^{(k)}/c_n$ je dosta komplikovan pa smo koristili programski paket *Mathematica* u cilju nalaženja gornje granice,

$$\frac{\lambda_n^{(k)}}{c_n} < 1.52 \quad (k = 1,2).$$

Dakle, dokazali smo nejednakost

$$|C_{k,i}| < 1.52|W_i|. \tag{3.98}$$

Na osnovu (3.97) dobijamo

$$|\hat{z}_i - z_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| > (1 - \lambda_n^{(k)})d \tag{3.99}$$

i

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > (1 - 2\lambda_n^{(k)})d. \tag{3.100}$$

Nejednakost (3.100) daje

$$\hat{d} > (1 - 2\lambda_n^{(k)})d, \quad \text{to jest,} \quad \frac{d}{\hat{d}} < \frac{1}{1 - 2\lambda_n^{(k)}}. \tag{3.101}$$

Zapazimo da je $\lambda_n^{(k)} < 0.14$, pod uslovom da nejednakost (3.70) važi.

Polazeći od iterativne formule (3.85), na osnovu (3.84) i (3.93), nalazimo

$$\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} = -\frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)})W_i}{T_i^{(k)}} = \frac{-\left(R_i^{(k)}W_i + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}\right)}{1 + t_i^{(k)}}. \tag{3.102}$$

Da bismo dokazali tvrđenje (ii) koristimo (3.102) i imamo

$$\begin{aligned}
\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} &= \frac{-R_i^{(k)}W_i - 1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}}{1 + t_i^{(k)}} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j} \\
&= \frac{-R_i^{(k)}W_i - (\hat{z}_i - z_i)\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\hat{z}_i - z_j)} + t_i^{(k)}\left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right)}{1 + t_i^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Sada, na osnovu (3.70), (3.87), (3.89), (3.94), (3.97) i (3.99), ocenjujemo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{W_i}{\hat{z}_i - z_i} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\hat{z}_i - z_j}\right| &\leq \frac{r_n^{(k)} + \lambda_n^{(k)} d \frac{(n-1)c_n d}{d(1 - \lambda_n^{(k)})d} + q_n^{(k)}\left(1 + \frac{(n-1)c_n d}{(1 - \lambda_n^{(k)})d}\right)}{1 - q_n^{(k)}} \\
&\leq \frac{r_n^{(k)} + \frac{(n-1)c_n \lambda_n^{(k)}}{1 - \lambda_n^{(k)}} + q_n^{(k)}\left(1 + \frac{(n-1)c_n}{1 - \lambda_n^{(k)}}\right)}{1 - q_n^{(k)}}. \qquad (3.103)
\end{aligned}$$

Korišćenjem dobijenih granica (3.97) i (3.100) nalazimo

$$\left|\prod_{j\neq i}\Big(1+\frac{\hat z_j - z_j}{\hat z_i - \hat z_j}\Big)\right| \le \prod_{j\neq i}\Big(1+\frac{|\hat z_j - z_j|}{|\hat z_i - \hat z_j|}\Big) < \Big(1+\frac{\lambda_n^{(k)}}{1-2\lambda_n^{(k)}}\Big)^{n-1}. \tag{3.104}$$

Polazeći od (3.91) i imajući u vidu nejednakosti (3.97), (3.103) i (3.104) dobijamo

$$\begin{aligned}|\widehat W_i| &\le |\hat z_i - z_i|\left|\frac{W_i}{\hat z_i - z_i} + 1 + \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{\hat z_i - z_j}\right|\left|\prod_{j\neq i}\Big(1+\frac{\hat z_j - z_j}{\hat z_i - \hat z_j}\Big)\right| \\ &< \frac{\lambda_n^{(k)}}{c_n}|W_i|\frac{r_n^{(k)} + \dfrac{(n-1)c_n\lambda_n^{(k)}}{1-\lambda_n^{(k)}} + q_n^{(k)}\Big(1+\dfrac{(n-1)c_n}{1-\lambda_n^{(k)}}\Big)}{1-q_n^{(k)}}\Big(1+\frac{\lambda_n^{(k)}}{1-2\lambda_n^{(k)}}\Big)^{n-1} \\ &= f_n^{(k)}|W_i|, \end{aligned} \tag{3.105}$$

gde smo stavili

$$f_n^{(k)} = \frac{\lambda_n^{(k)}}{c_n}\cdot\frac{r_n^{(k)} + \dfrac{(n-1)c_n\lambda_n^{(k)}}{1-\lambda_n^{(k)}} + q_n^{(k)}\Big(1+\dfrac{(n-1)c_n}{1-\lambda_n^{(k)}}\Big)}{1-q_n^{(k)}}\Big(1+\frac{\lambda_n^{(k)}}{1-2\lambda_n^{(k)}}\Big)^{n-1}.$$

Korišćenjem programskog paketa *Mathematica* našli smo da je $f_n^{(k)} < 0.25$. Dakle,

$$|\widehat W_i| < f_n^{(k)}|W_i| < 0.25|W_i| \quad (k=1,2).$$

Kako važe nejednakosti $f_n^{(k)} < 0.25$ i $\lambda_n^{(k)} < 0.14$, sledi

$$\frac{f_n^{(k)}}{1-2\lambda_n^{(k)}} < 0.35 < 1. \tag{3.106}$$

Sada je, na osnovu (3.79), (3.101), (3.105)i (3.106),

$$\widehat w < f_n^{(k)} w < f_n^{(k)} c_n d < \frac{f_n^{(k)}}{1-2\lambda_n^{(k)}}\cdot c_n \hat d < c_n \hat d,$$

čime smo dokazali tvrđenje (iii) Leme 3.3. □

U nastavku ćemo dati glavni rezultat koji se odnosi na početne uslove koji garantuju konvergenciju iterativnog metoda (3.63).

Teorema 3.6 *Pod početnim uslovom*

$$w^{(0)} < \frac{d^{(0)}}{3n+2} \tag{3.107}$$

iterativni metodi (3.63) *su konvergentni.*

Dokaz. U Lemi 3.3 (tvrđenje (iii)) dokazali smo implikaciju

$$w < c_n d \implies \hat{w} < c_n \hat{d}, \quad c_n = \frac{1}{3n+2}.$$

Slično, indukcijom dokazujemo da iz uslova (3.107) sledi nejednakost $w^{(m)} < c_n d^{(m)}$, za svako $m = 1, 2, \dots$. Dakle, sva tvrđenja Lema 3.2 i 3.3 važe za svako $m = 1, 2, \dots$, ako važi početni uslov (3.107). Konkretno, važe sledeće nejednakosti:

$$|W_i^{(m+1)}| < 0.25 |W_i^{(m)}| \tag{3.108}$$

i

$$|C_{k,i}^{(m)}| = |z_i^{(m+1)} - z_i^{(m)}| < 1.52 |W_i^{(m)}|, \tag{3.109}$$

za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \dots$.

Iz iterativne formule (3.85) vidimo da se korekcije $C_{k,i}$ u svakoj iteraciji mogu izraziti u obliku

$$C_{k,i} = T_i^{(k)} \Big(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)} \Big)^{-1}. \tag{3.110}$$

Da bismo dokazali da je iterativni proces (3.63) dobro definisan u svakoj iteraciji, dovoljno je pokazati da funkcija $F_{i,k}(z_1, \dots, z_n) = P(z_i)/C_{k,i}$ $(k = 1, 2)$, koja se javlja u (1.79) i Teoremi 1.13, ne može biti nula. Iz (3.110) imamo

$$F_{i,k}(z_1, \dots, z_n) = \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}{T_i^{(k)}} \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Na osnovu (3.88), (3.96) i definicije minimalnog rastojanja dobija se

$$\begin{aligned} |F_{i,k}(z_1, \dots, z_n)| &= \left| \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}{T_i^{(k)}} \right| > \frac{1 - r_n^{(k)} - (n-1)c_n}{1 + q_n^{(k)}} \cdot d^{n-1} \\ &> 0.66 d^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Dokažimo sada da su nizovi $\{|C_{k,i}^{(m)}|\}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ monotono opadajući.

Izostavljajući indekse iteracije nalazimo na osnovu (3.108) i (3.109)

$$\begin{aligned} |\widehat{C}_{k,i}| &< 1.52 |\widehat{W}_i| < 1.52 \cdot 0.25 |W_i| = 0.38 |W_i| \\ &= 0.38 |T_i^{(k)} (\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)})^{-1}| \left| \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i}{T_i^{(k)}} \right| = 0.38 |C_{k,i}| \left| \frac{(\delta_{1,i} - S_{1,i}^{(k)}) W_i}{T_i^{(k)}} \right|, \end{aligned}$$

to jest, korišćenjem (3.89) i (3.95), dobijamo

$$|\widehat{C}_{k,i}| < 0.38\,\frac{r_n^{(k)} + 1 + (n-1)c_n}{1 - q_n^{(k)}}\,|C_{k,i}|.$$

Sada ocenjujemo

$$\frac{r_n^{(k)} + 1 + (n-1)c_n}{1 - q_n^{(k)}} < 1.35,$$

tako da je

$$|\widehat{C}_{k,i}| < 0.38 \cdot 1.35|C_{k,i}| < 0.52|C_{k,i}|.$$

Dakle, konstanta β koja se javlja u Teoremi 1.13 je jednaka $\beta = 0.52$. Na taj način smo dokazali nejednakost $|C_{k,i}^{(m+1)}| < 0.52|C_{k,i}^{(m)}|$, koja važi sa svako $i \in \mathbb{I}_n$, $m = 0, 1, \ldots$ i $k = 1, 2$.

Veličina $g(\beta)$ koja se javlja u tvrđenju (ii) Teoreme 1.13 je jednaka $g(0.52) = 1/(1-0.52) < 2.084$. Ostaje da dokažemo disjunktnost inkluzivnih diskova

$$S_1 = \{z_1^{(0)}; g(0.52)|C_{k,1}^{(0)}|\}, \ldots, S_n = \{z_n^{(0)}; g(0.52)|C_{k,n}^{(0)}|\}$$

(tvrđenje (ii) Teoreme 1.13). Na osnovu (3.109) imamo $|C_{k,i}^{(0)}| < 1.52w^{(0)}$ za sve korekcije $|C_{k,i}^{(0)}|$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$, i $k = 1, 2$. Ako izaberemo indeks $p \in \mathbb{I}_n$ tako da je

$$|C_{k,p}^{(0)}| = \max_{1 \le i \le n} |C_{k,i}^{(0)}|,$$

tada je

$$\begin{aligned} d^{(0)} &> (3n+2)w^{(0)} > \frac{1}{1.52}\,(3n+2)|C_{k,p}^{(0)}| \ge \frac{3n+2}{2 \cdot 1.52}(|C_{k,i}^{(0)}| + |C_{k,j}^{(0)}|) \\ &> g(0.52)(|C_{k,i}^{(0)}| + |C_{k,j}^{(0)}|), \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{3n+2}{2 \cdot 1.52} > 3.618 > 2.084 > g(0.52),$$

za svako $n \ge 3$. Ovo znači da je

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| \ge d^{(0)} > g(0.52)(|C_{k,i}^{(0)}| + |C_{k,j}^{(0)}|) = \operatorname{rad} S_i + \operatorname{rad} S_j.$$

Korišćenjem proste geometrijske konstrukcije, zaključujemo da su inkluzivni diskovi $S_1, \ldots, S_n$ disjunktni, čime smo kompletirali dokaz Teoreme 3.6 $\square$

Kombinovanjem Teorema 3.5 i 3.6, dobijamo sledeće tvrđenje:

Teorema 3.7 *Ako početne aproksimacije* $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ *zadovoljavaju uslov* (3.107), *tada su iterativni metodi* (3.63) *konvergentni sa redom konvergencije* $k+4$ $(k = 1, 2)$.

Numerički primeri

Brzina konvergencije predloženih ubrzanih metoda (3.63) je testirana na velikom broju algebarskih polinoma. Istaknimo da je izračunavanje Newtonove i Halleyeve korekcije, koje se zahtevaju u realizaciji metoda sa korekcijama, izvedeno korišćenjem već izračunatih veličina P, P', P'' u tačkama $z_1, \ldots, z_n$. Ovo znači da je brzina konvergencije ovih iterativnih metoda ubrzana sa zanemarljivim brojem dodatnih numeričih izračunavanja. Dakle, primenjeni pristup obezbeđuje visoku računsku efikasnost predloženih metoda sa korekcijama.

Kao i kod osnovnih metoda bez korekcija i ovde smo, poređenja radi, posmatrali sledeće metode sa korekcijama:

- *Metod Halleyevog tipa* [198]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2\delta_{1,i}}{2\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}^{(k)} - \left(S_{1,i}^{(k)}\right)^2}; \tag{3.111}$$

- *Metod tipa Ostrowskog* [157]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\sqrt{\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}^{(k)}}}. \tag{3.112}$$

Izvedeni numerički eksperimetni demonstriraju veoma brzu konvergenciju predloženih metoda. Procesorsko vreme (CPU) ubrzanih metoda sa korekcijama je gotovo jednako procesorskom vremenu izvršenja osnovnog metoda (bez korekcija). Da bismo ilustrovali efikasnost ovih metoda, između velikog broja testiranih algebarskih polinoma, izabrali smo sledeća dva primera.

Primer 3.4 Novi metodi sa Newtonovom korekcijom $(3.63)_{k=1}$ (reda 5) i Halleyevom korekcijom $(3.63)_{k=2}$ (reda 6), i navedeni metodi Halleyevog tipa $(3.111)_{k=1}$ i $(3.111)_{k=2}$ i tipa Ostrowskog $(3.112)_{k=1}$ i $(3.112)_{k=2}$ su primenjeni za simultano određivanje aproksimacija nula polinoma iz Primera 3.1, sa istim startnim vrednostima. Greške aproksimacija $e^{(k)}$ u prve tri iteracije su date u Tabeli 3.3.

Primer 3.5 Isti metodi kao u Primeru 3.4 primenjeni su na rešavanje polinomske jednačine iz Primera 3.2, sa istim startnim vrednostima. Dobijeni rezultati su dati u Tabeli 3.4.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
$(3.63)_{k=1}$	$1.96(-3)$	$4.85(-15)$	$4.15(-72)$
$(3.63)_{k=2}$	$4.93(-4)$	$4.29(-21)$	$1.59(-122)$
$(3.111)_{k=1}$	$1.96(-3)$	$4.84(-15)$	$4.05(-72)$
$(3.111)_{k=2}$	$4.93(-4)$	$4.29(-21)$	$1.58(-122)$
$(3.112)_{k=1}$	$5.17(-4)$	$3.91(-19)$	$7.55(-94)$
$(3.112)_{k=2}$	$1.61(-4)$	$2.23(-25)$	$5.17(-149)$

Tabela 3.3: Euklidska norma grešaka za Primer 3.4

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$
$(3.63)_{k=1}$	$1.30(-1)$	$4.43(-6)$	$2.21(-27)$
$(3.63)_{k=2}$	$8.89(-2)$	$1.53(-8)$	$4.16(-49)$
$(3.111)_{k=1}$	$1.40(-1)$	$6.77(-6)$	$1.00(-26)$
$(3.111)_{k=2}$	$8.88(-2)$	$1.44(-8)$	$8.32(-49)$
$(3.112)_{k=1}$	divergira	–	–
$(3.112)_{k=2}$	divergira	–	–

Tabela 3.4: Euklidska norma grešaka za Primer 3.5

Iz Tabela 3.3 i 3.4, i velikog broja testiranih polinomskih jednačina, vidimo da su predloženi metodi uporedivi sa postojećim metodima po pitanju brzine konvergencije. Numerički primeri pokazuju da je njihova konvergencija veoma brza, naročito kod metoda sa korekcijama. Dva iterativna koraka su obično dovoljna u rešavanju većine praktičnih problema kada su početne aproksimacije dobre i kada su polinomi dobro uslovljeni. Prikazana treća iteracija demonstrira izuzetno brzu konvergenciju dobijenih aproksimacija, koja se retko zahteva danas u rešavanju praktičnih problema. Međutim, uključili smo treću iteraciju da bismo ilustrovali, s jedne strane, veoma brzu konvergenciju nove familije iterativnih metoda, i s druge strane, da bismo pokazali dobro slaganje reda konvergencije iterativnih metoda u numeričkim primerima sa dobijenim teorijskim rezultatima datim u Teoremama 3.4 i 3.7.

Poglavlje 4

Novi intervalni metod za proste nule polinoma

Naš glavni cilj u ovom poglavlju je da izvedemo nove intervalne iterativne metode visokog reda za simultanu inkluziju prostih nula polinoma. Novi inluzivni metodi se baziraju na novoj nula-relaciji i na osobini inkluzivne izotonosti. Dobijeni rezultati su publikovani u radu [139] (M. S. Petković, M. R. Milošević, D. M. Milošević, *Applied Mathematics and Computation*).

4.1 Dva važna pitanja od praktičnog značaja

U ovom poglavlju je izložen novi inkluzivni metod visokog reda koji ima veliku računsku efikasnost. Prirodna pitanja se sama nameću:

- Da li su postojeći kvadratno konvergentni intervalni metodi dovoljno efikasni za inkluziju kompleksnih nula?
- Postoji li potreba za konstrukcijom metoda višeg reda?

Neki autori tvrde da su kvadratno konvergentni metodi dovoljni za rešavanje sistema nelinearnih jednačina i da su oni takođe efikasni i za simultano određivanje nula polinoma u običnoj kompleksnoj aritmetici (iako postoje drugi metodi niže računske cene koji imaju bržu konvergenciju). S druge strane, intervalni metodi za simultanu inkluziju kompleksnih nula polinoma drugog reda nisu dovoljni, jer su značajno skupi.

Neka je P polinom n-tog stepena za prostim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, koje su sadržane u diskovima $Z_1, \ldots, Z_n$, respektivno. Razmotrimo Weierstrassov intervalni metod drugog reda za simultanu inkluziju nula polinoma (1.63). Svodeći kompleksne operacije na realne, ovaj kvadratno konvergentni metod zahteva:

$$23n^2 - 6n \text{ sabiranja + oduzimanja}, \quad 25n^2 - 6n \text{ množenja i } 8n^2 - n \text{ deljenja.}$$

S druge strane, Gargantini-Henricijev metod trećeg reda (1.64) zahteva samo

$$15n^2 - 4n \text{ sabiranja + oduzimanja}, \quad 11n^2 + 2n \text{ množenja i } 3n^2 + 2n \text{ deljenja.}$$

(videti [113, Pogl. 6] za ove podatke). Dakle, kubno konvergentni Gargantini-Henricijev metod poseduje ne samo bržu konvergenciju, već ima i manju računsku cenu. Zapazimo da postoje intervalni metodi (sa korekcijama) višeg reda od tri koji su mnogo efikasniji od Garganti-Henricijevog metoda i naravno od gore pomenutog metoda drugog reda. Loša računska efikasnost kvadratno konvergentnih inkluzivnih metoda je bila glavna motivacija za konstrukciju efikasnijih metoda počevši od 1972. do današnjih dana, uključujući metode izložene u ovom poglavlju.

Drugo važno pitanje se tiče mogućnosti konstrukcije inkluzivnih metoda proizvoljnog reda konvergencije. Uopšte govoreći, bilo koji numerički algoritam koji daje rezultate proizvoljne preciznosti je uvek dobrodošao, ali samo ako je njegova računska efikasnost dovoljno velika; u protivnom, njegova konstrukcija i primena nisu opravdane i takvi algoritmi su od malog praktičnog značaja.

U kružnoj kompleksnoj aritmetici su konstruisane dve familije proizvoljnog reda konvergencije: uopštene korenske iteracije $\mathbb{R}_k$ (Petković [111]) i Bellove disk iteracije $\mathbb{B}_k$ (Wang i Zheng [198]). Obe familije imaju red $k \geq 3$ i daju isti metod $\mathbb{R}_3 = \mathbb{B}_3$ za $k = 3$ koji je zapravo Gargantini-Henricijev metod [42] iz 1972. Nažalost, inkluzivni metodi koji se generišu za $k \geq 5$ nisu efikasni; štaviše, njihova računska efikasnost opada sa porastom k. Ovo je dodatna motivacija za konstrukciju efikasnih inlkuzivnih metoda, kao što je metod izložen u ovom poglavlju.

Glavni i veliki nedostatak u konstrukciji novih inkluzivnih metoda, i samim tim inkluzivnih metoda proizvoljnog reda, je specijalni pristup u njihovoj konstrukciji. Naime, kao što je pomenuto u Poglavlju 1, inkluzivni metodi se baziraju na osobini inkluzivne izotonosti i specijalnom obliku nula-relacija

$$\zeta_i = F(z_1, \ldots, z_n, \zeta_i, \ldots, \zeta_n), \tag{4.1}$$

gde su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nule datog polinoma n-tog stepena i $z_1, \ldots, z_n$ su centri inkluzivnih diskova $Z_1, \ldots, Z_n$ koji sadrže ove nule. Međutim, veoma je teško naći relacije oblika (4.1) koje mogu da daju intervalne procese dovoljno visoke računske efikasnosti. Potraga za novim nula-relacijama i novim inkluzivnim metodima koji iz njih proizilaze je stalni izazovni zadatak.

4.2 Nova nula-relacija – osnova za konstrukciju novih simultanih metoda

Neka su $z_1, \ldots, z_n$ aproksimacije prostih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ moničnog polinoma P. Za tačku $z = z_i$ uvedimo sledeće skraćenice

$$\Sigma_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^\lambda}, \quad s_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j)^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2),$$

$$\delta_{1,i} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)}, \quad \delta_{2,i} = \frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}, \quad u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\delta_{1,i}},$$

$$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i.$$

Polazeći od faktorizacije

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j),$$

korišćenjem logaritamskog diferenciranja, dobijamo

$$\frac{d}{dz} \log P(z)\Big|_{z=z_i} = \frac{P'(z)}{P(z)}\Big|_{z=z_i} = \frac{1}{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i} \tag{4.2}$$

i

$$-\frac{d^2}{dz^2} \log P(z)\Big|_{z=z_i} = \frac{P'(z)^2 - P''(z)P(z)}{P(z)^2}\Big|_{z=z_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}. \tag{4.3}$$

Iz (4.2) imamo

$$2(1 - u_i \Sigma_{1,i})^2 = \frac{2u_i^2}{\varepsilon_i^2}. \tag{4.4}$$

Korišćenjem (4.3) nalazimo

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{u_i} - \frac{u_i}{\varepsilon_i^2} - u_i \Sigma_{2,i},$$

tako da, ponovnim korišćenjem (4.2), dobijamo

$$\left(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} + u_i \Sigma_{2,i} - u_i \Sigma_{1,i}^2\right) u_i^2 = \frac{2(\varepsilon_i - u_i) u_i^2}{\varepsilon_i^2}. \tag{4.5}$$

Deljenje (4.5) sa (4.4) daje

$$\frac{\left(\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} + u_i\Sigma_{2,i} - u_i\Sigma_{1,i}^2\right)u_i^2}{2(1-u_i\Sigma_{1,i})^2} = \varepsilon_i - u_i = z_i - \zeta_i - u_i.$$

Iz poslednje relacije dobijamo sledeću nula-relaciju

$$\zeta_i = z_i - u_i - \frac{u_i^2}{2(1-u_i\,\Sigma_{1,i})^2}\left[\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(\Sigma_{1,i}^2 - \Sigma_{2,i})\right] \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{4.6}$$

Ova relacija je osnova za konstrukciju iterativnih metoda za simultanu inkluziju kompleksnih nula polinoma koji su razmatrani u nastavku.

Primedba 4.1 Nula-relacija (4.6) se može izvesti, na prirodni način, polazeći od iterativne formule

$$\phi_4(z) = z - u(z) - u(z)^2A_2(z) - u(z)^3(2A_2(z)^2 - A_3(z)),$$

koja pripada Schröderovom osnovnom nizu (videti [188]), gde su

$$u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)} \quad \text{i} \quad A_k(z) = \frac{P^{(k)}}{k!P(z)}\ (k = 2, 3, \ldots).$$

Zamenjujući koeficijente A_2 i A_3 odgovarajućim sumama oblika $\Sigma_{\lambda,i}$, posle velikog broja elementarnih transformacija, dobijamo (4.6). Videti izvođenje nula-relacije (3.15) u Poglavlju 3. Kratko, izvođenje u ovom odeljku je bilo moguće samo zato što smo znali šta treba da dobijemo zahvaljujući analizi iz Poglavlja 3.

Pretpostavimo da smo pronašli međusobno disjunktne diskove $Z_1, \ldots, Z_n$ sa centrima $z_i = \operatorname{mid} Z_i$ i poluprečnicima $r_i = \operatorname{rad} Z_i$ takve da je $\zeta_i \in Z_i$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Zamenom nula ζ_j njihovim inkluzivnim diskovima Z_j u izrazu za $\Sigma_{\lambda,i}$ dobijamo kružno proširenje $S_{\lambda,i}$ od $\Sigma_{\lambda,i}$,

$$S_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\mathrm{INV}_1(z_i - Z_j))^{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2)$$

sa $\Sigma_{\lambda,i} \in S_{\lambda,i}$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$. Ovde je INV_1 jedna od inverzija diskova definisanih sa (1.55) i (1.56), to jest, $\mathrm{INV}_1 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$.

Primedba 4.2 Pisaćemo $(\mathrm{INV}(z_i - Z_j))^{\lambda}$ pre nego $\mathrm{INV}(z_i - Z_j)^{\lambda}$, zato što je $\operatorname{rad}(\mathrm{INV}Z)^{\lambda} \le \operatorname{rad}\mathrm{INV}(Z^{\lambda})$ $(0 \notin Z)$, za obe inverzije (1.55) i (1.56) (videti [106]).

Korišćenjem osobine inkluzivne izotonosti, iz nula-relacije (4.6), dobijamo

$$\zeta_i \in z_i - u_i - \frac{u_i^2}{2(1-u_i\, S_{1,i})^2}\left[\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i\,(S_{1,i}^2 - S_{2,i})\right] =: \widehat{Z}_i \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{4.7}$$

Ako je imenilac u (4.7) disk koji ne sadrži nulu, tada je $\widehat{Z}_i$ nova kružna aproksimacija nule ζ_i, to jest, $\zeta_i \in \widehat{Z}_i$ $(i \in \mathbb{I}_n)$.

Polazeći od (4.7), možemo konstruisati sledeći iterativni proces za simultanu inkluziju svih prostih nula polinoma

$$\begin{aligned} Z_i^{(m+1)} &= z_i^{(m)} - u_i^{(m)} - (u_i^{(m)})^2 \mathrm{INV}_2\Big(2(1-u_i^{(m)}\, S_{1,i}^{(m)})^2\Big) \\ &\quad\times\left[\frac{P''(z_i^{(m)})}{P'(z_i^{(m)})} - u_i^{(m)}\,\Big((S_{1,i}^{(m)})^2 - S_{2,i}^{(m)}\Big)\right], \end{aligned} \tag{4.8}$$

za $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \ldots,$ gde je $\mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$ i $u_i^{(m)} = u(z_i^{(m)})$. Veličine sa indeksom m se odnose na m-tu iteraciju.

4.3 Analiza konvergencije osnovnog inkluzivnog metoda

U ovom odeljku ćemo izložiti analizu konvergencije intervalnog metoda (4.8), sledeći logiku prezentovanu u radovima [41], [114] i [132]. U nastavku ćemo uvek podrazumevati da je $n \geq 3$ i da je primenjena centralna inverzija (1.56) (to jest, da je $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$) bez dodatnog naglašavanja. Zbog inkluzije (1.56) rezultati koji se tiču reda konvergencije takođe važe i u slučaju korišćenja tačne inverzije (1.55). Dodatni razlozi za korišćenje centralne inverzije diskutovani su u Primedbi 4.3.

Za disjunktne diskove $Z_1, \ldots, Z_n$ definišimo sledeće skraćenice

$$\begin{aligned} &z_i^{(m)} = \operatorname{mid} Z_i^{(m)}, \quad r_i^{(m)} = \operatorname{rad} Z_i^{(m)}, \\ &r^{(m)} = \max_{1\le i\le n} r_i^{(m)}, \quad \rho^{(m)} = \min_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}| - r_j^{(m)}\}, \\ &\varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad |\varepsilon^{(m)}| = \max_{1\le i\le n} |\varepsilon_i^{(m)}|, \\ &B_i^{(m)} = (u_i^{(m)})^2\left[\frac{P''(z_i^{(m)})}{P'(z_i^{(m)})} - u_i^{(m)}\,\Big((S_{1,i}^{(m)})^2 - S_{2,i}^{(m)}\Big)\right] \quad (m = 0, 1, \ldots). \end{aligned}$$

Veličina ρ se može posmatrati kao mera razdvojenosti inkluzivnih diskova.

Zbog jednostavnosti u nastavku ćemo izostavljati iterativni indeks m i označavaćemo veličine u sledećoj $(m+1)$-oj iteraciji sa $\widehat{\ }$. Pisaćemo $w_1 \sim w_2$ ili $w_1 =$

$\mathcal{O}_M(w_2)$ (isti red modula) za dva kompleksna broja w_1 i w_2 koja zadovoljavaju jednakost $|w_1| = \mathcal{O}(|w_2|)$. Takođe ćemo često pisati $\sum_{j\neq i}$ umesto $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}$.

Lema 4.1 *Neka važi nejednakost*

$$\rho > 5(n-1)r. \tag{4.9}$$

Tada važe sledeće inkluzije:

(i) $S_{1,i} \subseteq \left\{ s_{1,i}; \dfrac{(n-1)r}{\rho^2} \right\}$;

(ii) $S_{2,i} \subset \left\{ s_{2,i}; \dfrac{21(n-1)r}{10\rho^3} \right\}$;

(iii) $S_{1,i}^2 \subset \left\{ s_{1,i}^2; \dfrac{21(n-1)^2 r}{10\rho^3} \right\}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$|z_i - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - r_j \geq \rho, \tag{4.10}$$

imamo

$$\frac{1}{|z_i - \zeta_j|} \leq \frac{1}{\rho} \quad \text{i} \quad \frac{1}{|z_i - z_j|} < \frac{1}{\rho}. \tag{4.11}$$

Na osnovu definicije (1.56), uz korišćenje (4.10) i (4.11), dobijamo inkluziju

$$\{z_i - z_j; r_j\}^{I_c} = \left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r_j}{|z_i - z_j|(|z_i - z_j| - r_j)} \right\} \subset \left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2} \right\}. \tag{4.12}$$

Iz inkluzije (4.12) sada nalazimo

$$S_{1,i} \subseteq \sum_{j\neq i} \left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2} \right\} \subseteq \left\{ s_{1,i}; \frac{(n-1)r}{\rho^2} \right\}.$$

Za (ii): Korišćenjem početnog uslova (4.9), nejednakosti (4.11) i operacija kružne aritmetike (sa centralnom inverzijom (1.56)) imamo

$$\left\{ \frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2} \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{(z_i - z_j)^2}; \frac{2r}{|z_i - z_j|\rho^2} + \frac{r^2}{\rho^4} \right\} \subset \left\{ \frac{1}{(z_i - z_j)^2}; \frac{21r}{10\rho^3} \right\},$$

odakle dobijamo inkluziju

$$S_{2,i} \subset \sum_{j\neq i} \left\{ \frac{1}{(z_i - z_j)^2}; \frac{21r}{10\rho^3} \right\} \subseteq \left\{ s_{2,i}; \frac{21(n-1)r}{10\rho^3} \right\}.$$

Za (iii): S obzirom na (4.11) ocenjujemo

$$|s_{1,i}| \leq \frac{n-1}{\rho}, \tag{4.13}$$

i na osnovu (1.53), (4.9) i tvrđenja (i) dobijamo

$$\begin{aligned} S_{1,i}^2 &\subseteq \left\{ s_{1,i}; (n-1)\frac{r}{\rho^2} \right\}^2 \subseteq \left\{ s_{1,i}^2; \frac{2(n-1)^2 r}{\rho^3} + \frac{(n-1)^2 r^2}{\rho^4} \right\} \\ &\subset \left\{ s_{1,i}^2; \frac{21(n-1)^2 r}{10\rho^3} \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Zbog jednostavnosti u nastavku ćemo uvesti disk

$$Q_i = 2(1 - u_i S_{1,i})^2, \quad \text{sa centrom} \quad \operatorname{mid} Q_i = q_i = 2(1 - u_i s_{1,i})^2.$$

Lema 4.2 *Neka važi nejednakost* (4.9). *Tada je*

(i) $|u_i| < \dfrac{5}{4}\,|\varepsilon_i| \leq \dfrac{5}{4}\,r_i$;

(ii) $|1 - u_i s_{1,i}| < \dfrac{5}{4}$;

(iii) $|q_i| > \dfrac{7}{8}$;

(iv) $\eta_i = \dfrac{101(n-1)r^2}{16\rho^2} < \dfrac{7}{50}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_i} + \varSigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \varSigma_{1,i}},$$

korišćenjem nejednakosti $|\varepsilon_i| \leq r_i$, (4.9) i

$$|\varSigma_{1,i}| \leq \frac{n-1}{\rho} \quad \text{(dobijene iz (4.11))} \tag{4.14}$$

nalazimo da je

$$|u_i| = \frac{|\varepsilon_i|}{|1 + \varepsilon_i \varSigma_{1,i}|} \leq \frac{|\varepsilon_i|}{1 - |\varepsilon_i||\varSigma_{1,i}|} \leq \frac{|\varepsilon_i|}{1 - \dfrac{(n-1)r}{\rho}} < \frac{5}{4}\,|\varepsilon_i| \leq \frac{5}{4}\,r_i.$$

Za (ii): Na osnovu (4.9), (4.13) i tvrđenja (i) dobijamo

$$|1-u_is_{1,i}|\le 1+|u_i|\cdot|s_{1,i}|<1+\frac{5}{4}r\frac{n-1}{\rho}<\frac{5}{4}.$$

Za (iii): Slično kao u dokazu tvrđenja (i) i (ii) ocenjujemo

$$\begin{aligned}|q_i|&=|2(1-u_is_{1,i})^2|=|2(1-2u_is_{1,i}+u_i^2s_{1,i}^2|\ge 2-4|u_i||s_{1,i}|-2|u_i|^2|s_{1,i}|^2\\&>2-5\frac{(n-1)r}{\rho}-\frac{25}{8}\frac{(n-1)^2r^2}{\rho^2}>2-1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Za (iv): Korišćenjem uslova (4.9) nalazimo da je

$$\eta_i=\frac{101(n-1)r^2}{16\rho^2}<\frac{101}{400(n-1)}<\frac{7}{50}.$$

Na osnovu Lema 4.1 i 4.2 sada smo u mogućnosti da dokažemo da je red konvergencije metoda (4.8) jednak četiri.

Teorema 4.1 *Neka je niz intervala* $\{Z_i^{(m)}\}$ $(i\in\mathbb{I}_n)$ *definisan iterativnom formulom* (4.8). *Tada, pod početnim uslovom*

$$\rho^{(0)}>5(n-1)r^{(0)}, \tag{4.15}$$

za svako $i\in\mathbb{I}_n$ *i* $m=0,1,\ldots$ *važi:*

1° $\zeta_i\in Z_i^{(m)}$;

2° $r^{(m+1)}<\dfrac{41n(n-1)(r^{(m)})^4}{\left(\rho^{(0)}-\frac{7}{3}r^{(0)}\right)^3}$.

Dokaz. Tvrđenje 1° ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da je $\zeta_i\in Z_i^{(k)}$ za svako $i\in\mathbb{I}_n$ i svako $k\ge 1$. Tada, na osnovu (4.8), sledi

$$\zeta_i\in z_i^{(k)}-u_i^{(k)}-\frac{(u_i^{(k)})^2}{2(1-u_i^{(k)}S_{1,i}^{(k)})^2}\left[\frac{P''(z_i^{(k)})}{P'(z_i^{(k)})}-u_i^{(k)}\left((S_{1,i}^{(k)})^2-S_{2,i}^{(k)}\right)\right]=:Z_i^{(k+1)}.$$

Kako je $\zeta_i\in Z_i^{(0)}$, dobijamo indukcijom da je $\zeta_i\in Z_i^{(m)}$ za svako $m=0,1,2,\ldots$.

Dokažimo sada da intervalni metod (4.8) ima red konvergencije jednak četiri (tvrđenje 2°). Koristićemo indukciju i počećemo sa $m=0$. Zbog jednostavnosti ćemo izostaviti sve iterativne indekse i sve veličine u prvoj iteraciji ćemo označiti dodatnim simbolom $\widehat{\ }$.

Počnimo od diska u imeniocu od (4.8). Korišćenjem definicije (1.53), nejednakosti (4.9) i tvrđenja (i) Leme 4.1 i (ii) Leme 4.2, dobijamo

$$
\begin{aligned}
Q_i &= 2(1-u_iS_{1,i})^2 \subset 2\Big\{1-u_is_{1,i};\frac{5(n-1)r^2}{4\rho^2}\Big\}^2\\
&\subset \Big\{q_i;\frac{25(n-1)r^2}{4\rho^2}+\frac{25(n-1)^2r^4}{8\rho^4}\Big\} \subset \Big\{q_i;\frac{101(n-1)r^2}{16\rho^2}\Big\} = \{q_i;\eta_i\}.
\end{aligned}
$$

Na osnovu tvrđenja (iii) i (iv) Leme 4.2 sledi

$$
\eta_i < \frac{5}{40} < \frac{7}{8} < |q_i|
$$

i zaključujemo, korišćenjem (1.51), da disk Q_i ne sadrži nulu, tako da je iterativni proces (4.8) dobro definisan.

U nastavku ćemo naći inverziju dobijenog diska Q_i korišćenjem (1.56)

$$
Q_i^{I_c} = \{q_i;\eta_i\}^{I_c} = \Big\{\frac{1}{q_i};\frac{\eta_i}{|q_i|(|q_i|-\eta_i)}\Big\} =: D_i.
$$

Na osnovu tvrđenja (iii) i (iv) Leme 4.2 sada ocenjujemo

$$
\operatorname{rad} D_i = \frac{\eta_i}{|q_i|(|q_i|-\eta_i)} < \frac{\frac{101(n-1)r^2}{16\rho^2}}{\frac{7}{8}\Big(\frac{7}{8}-\frac{7}{50}\Big)} < \frac{10(n-1)r^2}{\rho^2}
$$

i

$$
\operatorname{mid} D_i = |d_i| = \frac{1}{|q_i|} < \frac{8}{7}.
$$

Kako je

$$
\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = u_i(\delta_{1,i}^2-\delta_{2,i}),
$$

disk B_i u imeniocu (4.8) može biti prikazan u obliku

$$
B_i = u_i^2\Big(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(S_{1,i}^2-S_{2,i})\Big) = u_i^3(\delta_{1,i}^2-\delta_{2,i}-(S_{1,i}^2-S_{2,i})).
$$

Korišćenjem tvrđenja (ii) i (iii) Leme 4.1 i tvrđenja (i) Leme 4.2 dobijamo

$$
B_i \subset \frac{125}{64}\,r\Big\{\varepsilon_i^2(\delta_{1,i}^2-s_{1,i}^2-(\delta_{2,i}-s_{2,i}));\frac{21n(n-1)r^3}{10\rho^3}\Big\}.
$$

Iz poslednje inkluzije nalazimo

$$\operatorname{rad} B_i < \frac{21n(n-1)r^4}{5\rho^3}.$$

Kako je

$$\delta_{1,i} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}, \quad \delta_{2,i} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}$$

(videti (4.2) i (4.3)), dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i^2(\delta_{1,i}^2 - s_{1,i}^2 - (\delta_{2,i} - s_{2,i})) &= \varepsilon_i^2\Big(\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big)^2 - s_{1,i}^2 - \Big(\frac{1}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i} - s_{2,i}\Big)\Big) \\
&= 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2\Sigma_{1,i}^2 - \varepsilon_i^2 s_{1,i}^2 + \varepsilon_i^2\Sigma_{2,i} - \varepsilon_i^2 s_{2,i}.
\end{aligned}$$

Dalje, korišćenjem nejednakosti

$$|\Sigma_{2,i}| \le \frac{n-1}{\rho^2} \quad \text{i} \quad |s_{2,i}| \le \frac{n-1}{\rho^2}$$

(dobijenih iz (4.11)) i nejednakosti (4.9), (4.13) i (4.14) ocenjujemo centar diska B_i,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{mid} B_i| = |b_i| &< \frac{125}{64}\, r \left(\frac{2(n-1)r}{\rho} + \frac{(n-1)^2r^2}{\rho^2} + \frac{(n-1)^2r^2}{\rho^2}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{(n-1)r^2}{\rho^2} + \frac{(n-1)r^2}{\rho^2}\right) \\
&< \frac{125(n-1)r^2}{64\rho}\left(2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) < \frac{26(n-1)r^2}{5\rho}.
\end{aligned}$$

Korišćenjem dobijenih granica za $|d_i|$ i $|b_i|$ ocenjujemo proizvod diskova D_i i B_i,

$$D_i \cdot B_i \subset \left\{d_i; \frac{10(n-1)r^2}{\rho^2}\right\} \cdot \left\{b_i; \frac{21n(n-1)r^4}{5\rho^3}\right\} \subset \left\{d_i b_i; \frac{41n(n-1)r^4}{\rho^3}\right\}.$$

Na osnovu toga intervalni metod (4.8) može biti prikazan u obliku

$$\hat{Z}_i = z_i - u_i - D_i B_i,$$

odakle nalazimo da je

$$\widehat{r} < \frac{41n(n-1)r^4}{\rho^3} \tag{4.16}$$

i posle kraćeg izračunavanja iz (4.9) i (4.16) dobijamo

$$\hat{r} < 41n(n-1)\frac{r^3}{\rho^3}\, r < \frac{41n}{125(n-1)^2}\, r < \frac{1}{4}\, r. \tag{4.17}$$

Na osnovu geometrijske konstrukcije i činjenice da diskovi $Z_i^{(m)}$ i $Z_i^{(m+1)}$ moraju imati bar jednu zajedničku tačku (nulu ζ_i), može se izvesti sledeća relacija (videti [41]):

$$\rho^{(m+1)} \geq \rho^{(m)} - r^{(m)} - 3r^{(m+1)}. \tag{4.18}$$

Korišćenjem nejednakosti (4.17) i (4.18) (za $m = 0$), nalazimo

$$\rho^{(1)} \geq \rho^{(0)} - r^{(0)} - 3r^{(1)} > 5(n-1)r^{(0)} - r^{(0)} - \frac{3}{4}\, r^{(0)} > 4\, r^{(1)}\Big(5(n-1) - 1 - \frac{3}{4}\Big),$$

odakle sledi

$$\rho^{(1)} > 5(n-1)r^{(1)}. \tag{4.19}$$

Ovo je uslov (4.9) za indeks $m = 1$, što znači da sva tvrđenja Lema 4.1 i 4.2 važe za $m = 1$.

Korišćenjem definicije za ρ i nejednakosti (4.19), za proizvoljni par indeksa $i, j \in \mathbb{I}_n$ $(i \neq j)$ imamo

$$|z_i^{(1)} - z_j^{(1)}| \geq \rho^{(1)} > 5(n-1)r^{(1)} > 2r^{(1)} \geq r_i^{(1)} + r_j^{(1)}. \tag{4.20}$$

Dakle, na osnovu (1.51), diskovi $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_n^{(1)}$ dobijeni metodom (4.8) su disjunktni po parovima.

Primenjujući matematičku indukciju sa argumentacijom korišćenom kod izvođenja relacija (4.16), (4.17), (4.19) i (4.20) (što čini deo dokaza za $m = 1$), dokazujemo da su za svako $m = 0, 1, \ldots$ diskovi $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}$ disjunktni po parovima i da važe sledeće nejednakosti:

$$r^{(m+1)} < \frac{41n(n-1)(r^{(m)})^4}{(\rho^{(m)})^3}, \tag{4.21}$$

$$r^{(m+1)} < \frac{1}{4}\, r^{(m)}, \tag{4.22}$$

$$\rho^{(m)} > 5(n-1)r^{(m)}. \tag{4.23}$$

Pored toga, zapazimo da poslednja nejednakost (4.23) znači da sva tvrđenja Lema 4.1 i 4.2 važe za svako $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Zbog kraćeg pisanja, neka je $\omega = 1/4$. Tada je

$$1 + 4(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^m) - \omega^m < 1 + \frac{4\omega}{1-\omega} = \frac{7}{3}. \tag{4.24}$$

Sukcesivnom primenom relacija (4.18) i (4.22) dobijamo

$$\begin{aligned}\rho^{(m)} &> \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)} - 3\omega r^{(m-1)}\\ &= \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)}(1+3\omega) > \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)} - 3\omega r^{(m-2)} - \omega r^{(m-2)}(1+3\omega)\\ &= \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)}(1+4\omega+4\omega^2-\omega^2)\\ &\vdots\\ &> \rho^{(0)} - r^{(0)}\Big(1+4\omega+4\omega^2+\cdots+4\omega^m-\omega^m)\\ &> \rho^{(0)} - \frac{7}{3}\,r^{(0)},\end{aligned}$$

gde smo koristili (4.24). Na osnovu poslednje nejednakosti i (4.21) nalazimo

$$r^{(m+1)} < \frac{41n(n-1)(r^{(m)})^4}{\Big(\rho^{(0)} - \dfrac{7}{3}\,r^{(0)}\Big)^3}.$$

Dakle, tvrđenje 2° Teoreme 4.1 važi. Poslednja relacija pokazuje da je red konvergencije inkluzivnog metoda (4.8) jednak četiri. □

4.4 Numerički primeri za osnovni metod

Inkluzivni metod (4.8) smo primenili za rešavanje velikog broja polinomskih jednačina, od kojih ćemo ilustracije radi ovde izložiti dva.

Primer 4.1 Inkluzivni metod (4.8) je primenjen za simultanu inkluziju nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = z^{19} &- 3z^{18} + 12z^{17} - 36z^{16} + 268z^{15} - 804z^{14} + 2784z^{13} - 8352z^{12}\\ &+34710z^{11} - 104130z^{10} + 324696z^{9} - 974088z^{8} + 620972z^{7} - 1862916z^{6}\\ &-2270592z^{5} + 6811776z^{4} - 28303951z^{3} + 84911853z^{2}\\ &-25704900z + 77114700.\end{aligned}$$

Tačne nule polinoma su $\pm1\pm2i$, ±2, $\pm i$, $\pm3\pm2i$, $\pm2\pm3i$, $\pm3i$, 3. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$ sa centrima

$$
\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 1.1 + 2.2i, & z_2^{(0)} = 1.2 - 2.1i, & z_3^{(0)} = -1.2 + 2.1i, \\
z_4^{(0)} = -1.2 - 2.1i, & z_5^{(0)} = 2.2 + 0.1i, & z_6^{(0)} = -2.1 + 0.1i, \\
z_7^{(0)} = -0.2 + 0.9i, & z_8^{(0)} = 0.2 - 1.1i, & z_9^{(0)} = 3.1 + 1.9i, \\
z_{10}^{(0)} = 3.2 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -3.2 + 1.9i, & z_{12}^{(0)} = -3.2 - 1.9i, \\
z_{13}^{(0)} = 2.2 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = 2.2 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.2 + 2.9i, \\
z_{16}^{(0)} = -2.2 - 2.9i, & z_{17}^{(0)} = 0.2 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = -0.2 - 2.9i, \\
z_{19}^{(0)} = 3.2 - 0.1i. & &
\end{array}
$$

Poluprečnici diskova dobijeni u prve tri iteracije su dati u Tabeli 4.1, gde oznaka $A(-q)$ znači $A \times 10^{-q}$.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
$z_1 = 1 + 2i$	2.94(−1)	6.53(−7)	3.11(−32)
$z_2 = 1 - 2i$	4.03(−1)	2.40(−7)	1.70(−33)
$z_3 = -1 + 2i$	2.53(−1)	4.83(−7)	8.04(−33)
$z_4 = -1 - 2i$	3.64(−1)	1.62(−7)	3.87(−34)
$z_5 = 2$	3.84(−1)	1.70(−7)	6.73(−36)
$z_6 = -2$	2.36(−2)	1.39(−8)	1.89(−39)
$z_7 = i$	9.77(−2)	1.04(−9)	2.41(−42)
$z_8 = -i$	1.48(−1)	6.49(−10)	2.67(−45)
$z_9 = 3 + 2i$	3.94(−2)	3.22(−8)	1.95(−37)
$z_{10} = 3 - 2i$	1.52(−1)	1.05(−7)	2.33(−35)
$z_{11} = -3 + 2i$	1.14(−1)	4.76(−8)	8.53(−37)
$z_{12} = -3 - 2i$	1.10(−1)	2.31(−7)	3.87(−33)
$z_{13} = 2 + 3i$	3.39(−1)	1.80(−6)	1.75(−30)
$z_{14} = 2 - 3i$	2.74(−1)	6.79(−8)	1.53(−34)
$z_{15} = -2 + 3i$	2.44(−1)	5.18(−8)	2.16(−35)
$z_{16} = -2 - 3i$	2.78(−1)	1.17(−6)	3.98(−31)
$z_{17} = 3i$	2.23(−1)	1.56(−6)	8.13(−32)
$z_{18} = -3i$	5.16(−1)	1.51(−5)	2.79(−29)
$z_{19} = 3$	3.83(−1)	3.04(−7)	3.93(−34)

Tabela 4.1: Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 4.1

Primer 4.2 Za nalaženje nula polinoma

$$
\begin{aligned}
P(z) = z^{20} &+ 12z^{19} + 80z^{18} + 360z^{17} + 1356z^{16} + 4512z^{15} + 13440z^{14} + 35520z^{13} \\
&+ 84976z^{12} + 192192z^{11} + 416000z^{10} + 574080z^{9} - 153024z^{8} - 3283968z^{7}
\end{aligned}
$$

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
$z_1 = 1 + i$	$1.94(-1)$	$1.70(-9)$	$6.65(-42)$
$z_2 = 1 - i$	$2.46(-1)$	$2.18(-11)$	$9.75(-48)$
$z_3 = 1 + 3i$	$7.13(-2)$	$2.64(-9)$	$5.75(-41)$
$z_4 = 1 - 3i$	$7.11(-2)$	$1.10(-8)$	$2.30(-40)$
$z_5 = 2 + 2i$	$7.75(-2)$	$2.94(-10)$	$6.59(-44)$
$z_6 = 2 - 2i$	$8.23(-2)$	$8.84(-10)$	$1.57(-42)$
$z_7 = -2$	$4.84(-1)$	$1.87(-8)$	$1.61(-39)$
$z_8 = 2$	$2.62(-1)$	$3.29(-7)$	$1.06(-35)$
$z_9 = 2i$	$5.29(-1)$	$8.59(-8)$	$2.52(-36)$
$z_{10} = -2i$	$4.76(-1)$	$3.20(-8)$	$2.26(-38)$
$z_{11} = -1 + i$	$2.65(-1)$	$2.95(-10)$	$7.49(-48)$
$z_{12} = -1 - i$	$2.27(-1)$	$5.15(-11)$	$1.56(-49)$
$z_{13} = -1 + 3i$	$3.27(-1)$	$2.43(-6)$	$1.39(-32)$
$z_{14} = -1 - 3i$	$2.76(-1)$	$4.12(-7)$	$1.20(-35)$
$z_{15} = -2 + 2i$	$7.40(-1)$	$9.60(-9)$	$2.73(-38)$
$z_{16} = -2 - 2i$	$6.52(-1)$	$7.85(-9)$	$1.02(-38)$
$z_{17} = -3 + i$	$2.60(-1)$	$1.48(-7)$	$1.41(-35)$
$z_{18} = -3 - i$	$1.07(-1)$	$5.02(-8)$	$2.55(-37)$
$z_{19} = -3 + 3i$	$4.03(-1)$	$4.19(-6)$	$7.17(-32)$
$z_{20} = -3 - 3i$	$3.18(-1)$	$4.12(-6)$	$9.79(-33)$

Tabela 4.2: Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 4.2

$$
\begin{aligned}
&-8048640z^6 - 15452160z^5 - 20317184z^4 - 15925248z^3 - 38010880z^2 \\
&-68812800z - 73728000
\end{aligned}
$$

primenili smo isti inkluzivni metod (4.8). Tačne nule polinoma su $1 \pm i$, $1 \pm 3i$, $2 \pm 2i$, ± 2, $\pm 2i$, $-1 \pm i$, $-1 \pm 3i$, $-2 \pm 2i$, $-3 \pm i$, $-3 \pm 3i$. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.5\}$ sa centrima

$$
\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 1.1 + 1.1i, & z_2^{(0)} = 1.1 - 1.1i, & z_3^{(0)} = 1.1 + 3.1i, \\
z_4^{(0)} = 1.1 - 3.1i, & z_5^{(0)} = 2.1 + 2.1i, & z_6^{(0)} = 2.1 - 2.1i, \\
z_7^{(0)} = -1.9 + 0.1i, & z_8^{(0)} = 1.9 - 0.1i, & z_9^{(0)} = 0.1 + 1.9i, \\
z_{10}^{(0)} = 0.1 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -1.1 + 1.1i, & z_{12}^{(0)} = -1.1 - 1.1i, \\
z_{13}^{(0)} = -0.9 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = -0.9 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.1 + 2.1i, \\
z_{16}^{(0)} = -2.1 - 1.9i, & z_{17}^{(0)} = -2.9 + 1.1i, & z_{18}^{(0)} = -3.1 - 1.1i, \\
z_{19}^{(0)} = -2.9 + 2.9i, & z_{20}^{(0)} = -2.9 - 2.9i. &
\end{array}
$$

Dobijeni poluprečnici diskova u prve tri iteracije su dati u Tabeli 4.2.

Iz Tabela 4.1 i 4.2 primećujemo veliku brzinu konvergencije predloženog metoda. Njihov red konvergencije se uglavnom poklapa sa teorijskim redom izloženim u Teoremi 4.1. Treća iteracija je data da bismo demonstrirali veliku tačnost dobijenih aproksimacija.

U oba izložena primera je izbor početnih diskova izveden pod slabijim uslovima od (4.15); štaviše, odnos $\rho^{(0)}/r^{(0)}$ je najčešće dva, tri i više puta manji od $5(n-1)$.

4.5 Ubrzani inkluzivni metodi sa korekcijama

Da bismo povećali brzinu konvergencije iterativnog metoda (4.8) primenićemo Newtonovu i Halleyevu korekciju, na sličan način kao u radovima [21] i [120]. Ovako dobijeni ubrzani metodi biće predmet proučavanja ovog odeljka.

Za iterativni indeks m uvedimo sledeće vektore:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}^{(m)} &= \Big(Z_1^{(m)}, \ldots, Z_n^{(m)}\Big) \quad \text{(tekuće kružne aproksimacije)},\\
\boldsymbol{Z}_N^{(m)} &= \Big(Z_{N,1}^{(m)}, \ldots, Z_{N,n}^{(m)}\Big),\ Z_{N,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - u(z_i^{(m)}) \quad \text{(Newtonove aproksimacije)},\\
\boldsymbol{Z}_H^{(m)} &= \Big(Z_{H,1}^{(m)}, \ldots, Z_{H,n}^{(m)}\Big),\ Z_{H,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - h(z_i^{(m)}) \quad \text{(Halleyeve aproksimacije)},
\end{aligned}$$

gde su

$$u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)} \quad \text{i} \quad h(z) = \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}\right]^{-1}$$

Newtonova i Halleyeva korekcija koje se javljaju u iterativnim metodima $\hat{z} = z - u(z)$ (Newtonov metod drugog reda) i $\hat{z} = z - h(z)$ (Halleyev metod trećeg reda).

U konstrukciji ubrzanih inkluzivnih metoda podrazumevaćemo izbor početnih diskova $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)}$, koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, na takav način da diskovi $Z_i^{(0)} - u\Big(\operatorname{mid}(Z_i^{(0)})\Big)$ i $Z_i^{(0)} - h\Big(\operatorname{mid}(Z_i^{(0)})\Big)$ takođe sadrže nule ζ_i ($i \in \mathbb{I}_n$). Rešavanje ovog zadatka je predmet razmatranja sledećeg tvrđenja gde su, zbog jednostavnosti, izostavljeni indeksi iteracija. Takođe ćemo u nastavku pisati $u_i = u(z_i)$ i $h_i = h(z_i)$.

Lema 4.3 *Neka su $Z_1, \ldots, Z_n$ inkluzivni diskovi za nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n,\ \zeta_i \in Z_i$, i neka je $z_i = \operatorname{mid} Z_i,\ r_i = \operatorname{rad} Z_i$. Inkluzivni diskovi $Z_1, \ldots, Z_n$ su izabrani tako da važi nejednakost*

$$\rho > 5(n-1)r. \tag{4.25}$$

Tada za svako $i \in \mathbb{I}_n$ važe sledeće implikacije:

(i) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{N,i} := Z_i - u_i$;
(ii) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{H,i} := Z_i - h_i$.

Dokaz. Za (i): Dovoljno je da dokažemo implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - u_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Polazeći od nejednakosti trougla

$$|z_i - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - r_j \ge \rho,$$

nalazimo

$$|\Sigma_{\lambda,i}| = \Big|\sum_{j\ne i}(z_i - \zeta_j)^{-\lambda}\Big| \le \sum_{j\ne i}|z_i - \zeta_j|^{-\lambda} \le \frac{n-1}{\rho^\lambda}, \quad (\lambda = 1, 2). \tag{4.26}$$

Na osnovu (4.25) i (4.26) (za $\lambda = 1$) dobijamo

$$r_i < \frac{\rho}{5(n-1)} \le \frac{1}{5|\Sigma_{1,i}|},$$

odakle sledi

$$\frac{r_i|\Sigma_{1,i}|}{1 - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{4}.$$

Kako je $|\varepsilon_i| = |z_i - \zeta_i| \le r_i$, korišćenjem poslednje nejednakost dobijamo

$$|z_i - u_i - \zeta_i| = |\varepsilon_i - u_i| = |\varepsilon_i - 1/\delta_{1,i}| = |\varepsilon_i|^2\Big|\frac{\Sigma_{1,i}}{1 + \varepsilon_i\Sigma_{1,i}}\Big| \le \frac{r_i^2|\Sigma_{1,i}|}{1 - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{4}\, r_i < r_i.$$

Za (ii): Kao i ranije, neophodno je da dokažemo implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - h_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Pođimo od

$$\begin{aligned} h_i = \frac{2\delta_{1,i}}{\delta_{1,i}^2 + \delta_{2,i}} &= \frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(z_i - \zeta_j)^{-1}}{\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(z_i - \zeta_j)^{-1}\Big)^2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(z_i - \zeta_j)^{-2}} \\ &= \frac{2(1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})}{(1/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})^2 + 1/\varepsilon_i^2 + \Sigma_{2,i}} = \frac{2\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{2 + 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i})}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Na osnovu (4.27) dobijamo

$$z_i - h_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{2\varepsilon_i(1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{2+2\varepsilon_i\Sigma_{1,i}+\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2+\Sigma_{2,i})} = \frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2+\Sigma_{2,i})}{2+2\varepsilon_i\Sigma_{1,i}+\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2+\Sigma_{2,i})},$$

tako da je

$$\begin{aligned}|z_i - h_i - \zeta_i| &= \left|\frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2+\Sigma_{2,i})}{2+2\varepsilon_i\Sigma_{1,i}+\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2+\Sigma_{2,i})}\right| \\ &\le \frac{\left(\dfrac{n-1}{\rho}\right)^2+\dfrac{n-1}{\rho^2}}{2-2\dfrac{n-1}{\rho}\,r_i-\left(\dfrac{n-1}{\rho}\right)^2 r_i^2-\dfrac{n-1}{\rho^2}r_i^2}\,r_i^3 \\ &= \frac{\dfrac{(n-1)nr_i^2}{\rho^2}}{\dfrac{8}{5}-\dfrac{n(n-1)r_i^2}{\rho^2}}\,r_i < \frac{\dfrac{n}{25(n-1)}}{\dfrac{8}{5}-\dfrac{n}{25(n-1)}}\,r_i < \frac{3}{77}\,r_i < r_i. \quad \square\end{aligned}$$

Polazeći od nula-relacije (4.6) možemo konstruisati inkluzivni metod sa Newtonovom i Halleyevom korekcijom. Analizu konvergencije ovih metoda razmatraćemo istovremeno. U tom cilju označićemo ove metode dodatnim indeksom $k = 1$ (za Newtonovu korekciju) i $k = 2$ (za Halleyevu korekciju), kao u prethodnom poglavlju. Na isti način, označićemo odgovarajuće vektore aproksimacija sa:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}^{(1)} &= (Z_1^{(1)},\dots,Z_n^{(1)}) = (Z_{N,1},\dots,Z_{N,n}),\\ \boldsymbol{Z}^{(2)} &= (Z_1^{(2)},\dots,Z_n^{(2)}) = (Z_{H,1},\dots,Z_{H,n}).\end{aligned}$$

Inkluzivni diskovi i vektori ovih diskova će biti označeni dodatnim simbolom $k \in \{1,2\}$. Kao i kod metoda u tačkastoj kompleksnoj aritmetici, treba ih strogo razlikovati od iterativnih indeksa.

U nastavku ćemo obe korekcije u_i i h_i označavati sa $C_{k,i}$ $(k = 1,2)$. Definišimo, takođe, diskove

$$\begin{aligned}S_{\lambda,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}(\mathrm{INV}_1(z_i - Z_j + C_{k,j}))^{\lambda} \quad (\lambda = 1,2),\\ B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= u_i^2\left(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))\right),\end{aligned}$$

gde je $\boldsymbol{Z}^{(k)} = (Z_{k,1},\dots,Z_{k,n})$ $(k = 1,2)$ vektor inkluzivnih diskova.

Sada smo u mogućnosti da oba metoda, sa Newtonovom i Halleyevom korekcijom, napišemo u jedinstvenom obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - u_i - \mathrm{INV}_2\Big(2(1-u_iS_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))^2\Big)B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{4.28}$$

Primedba 4.3 Ovde je neophodna važna diskusija koja se tiče korišćenja inverzije diskova. Na prvi pogled deluje logično da se koristi tačna inverzija (1.55) u iterativnoj formuli (4.28) i drugim formulama sa korekcijama koje su date u nastavku disertacije, zato što tačna inverzija (1.55) daje manje diskove od centralne inverzije (1.56). Iznenađujuće, centralna inverzija $()^{\mathbb{I}_c}$ primenjena na inkluzivne metode sa korekcijama daje bolje rezultate. Naime, primena centralne inverzije proizvodi nizove centara $\{\mathrm{mid}\, Z_i^{(m)}\}_{(i\in\mathbb{I}_n)}$ dobijenih diskova $Z_i^{(m)}$ koji se poklapaju sa veoma brzim iterativnim metodima u običnoj kompleksnoj aritmetici. Ovi brzi metodi značajno ubrzavaju kontrakciju diskova, jer su konvergencija centara i konvergencija poluprečnika povezane. Ovo očito vodi do ubrzane konvergencije intervalnih metoda. S druge strane, tačna inverzija daje „pomerene" centre invertovanih diskova, što uslovljava njihovu sporiju konvergenciju. Posledica toga je da korišćenje tačne inverzije (1.55) može ubrzati konvergenciju samo do izvesne granice kada se primenjuju korekcije u (4.28). Iz tog razloga, u nastavku ćemo raditi samo sa centralnom inverzijom (1.56), obično bez posebnog naglašavanja.

4.6 Analiza konvergencije inkluzivnih metoda sa korekcijama

Pre razmatranja osobina konvergencije simultanih intervalnih metoda (4.28) i početnih uslova za njihovu konvergenciju, dokazaćemo prvo neke neophodne leme. Zbog jednostavnosti, u nastavku ćemo koristiti sledeće skraćenice

$$\begin{aligned}
&\chi_{ij}^{(k)} = \mathrm{mid}\ (z_i - Z_j + C_{k,j}) = z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1},\\
&\xi_j^{(1)} = -\frac{\Sigma_{1,j}}{1+\varepsilon_j\Sigma_{1,j}}, \quad \xi_j^{(2)} = -\frac{\Sigma_{1,j}^2+\Sigma_{2,j}}{2+2\varepsilon_j\Sigma_{1,j}+\varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2+\Sigma_{2,j})},\\
&\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}|-r_j)}, \quad g_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}},\\
&s_{\lambda,i}^{(k)} = \mathrm{mid}\, S_{\lambda,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(g_{ij}^{(k)})^{\lambda} \quad (\lambda = 1,2),\\
&q_i^{(k)} = 2(1-u_is_{1,i}^{(k)})^2, \quad d_i^{(k)} = \frac{1}{q_i^{(k)}}, \quad \eta_i^{(k)} = \frac{9(n-1)|\varepsilon_i|r}{\rho^2},
\end{aligned}$$

$$b_i^{(k)} = u_i^2\Big(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i\Big((s_{1,i}^{(k)})^2 - s_{2,i}^{(k)}\Big)\Big).$$

Prvo ćemo dokazati dve Leme koje su neophodne za dokaz teoreme o konvergenciji.

Lema 4.4 *Neka važi nejednakost* (4.25)*. Tada je*

(i) $|u_i| < \dfrac{5}{4}\,|\varepsilon_i| \leq \dfrac{5}{4}\,r_i$;

(ii) $|1 - u_i s_{1,i}^{(k)}| < \dfrac{49}{39}$;

(iii) $|q_i^{(k)}| > \dfrac{4}{5}$;

(iv) $\eta_i^{(k)} < \dfrac{9}{50}$;

(v) $|b_i^{(k)}| < \dfrac{26(n-1)|\varepsilon_i|^2}{5\rho}$;

(vi) $|d_i^{(k)}| < \dfrac{5}{4}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}}, \tag{4.29}$$

ocenjujemo korišćenjem nejednakosti $|\varepsilon_i| \leq r_i$, (4.25) i (4.26) (za $\lambda = 1$) da je

$$|u_i| = \frac{|\varepsilon_i|}{|1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}|} \leq \frac{|\varepsilon_i|}{1 - |\varepsilon_i||\Sigma_{1,i}|} \leq \frac{|\varepsilon_i|}{1 - \dfrac{(n-1)r}{\rho}} < \frac{5}{4}\,|\varepsilon_i| \leq \frac{5}{4}\,r_i.$$

Za (ii): Lako je pokazati da je

$$z_i - Z_j + C_{k,j} = \{z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)} \varepsilon_j^{k+1}; r_j\},$$

gde je

$$\xi_j^{(1)} = -\frac{\Sigma_{1,j}}{1 + \varepsilon_j \Sigma_{1,j}} \quad \text{i} \quad \xi_j^{(2)} = -\frac{\Sigma_{1,j}^2 + \Sigma_{2,j}}{2 + 2\varepsilon_j \Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2 + \Sigma_{2,j})}.$$

Korišćenjem nejednakosti (4.25) i (4.26) ocenjujemo

$$|\xi_j^{(1)}| \le \frac{|\Sigma_{1,j}|}{1-|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|} \le \frac{\dfrac{n-1}{\rho}}{1-\dfrac{(n-1)r}{\rho}} < \frac{5(n-1)}{4\rho}$$

i

$$|\xi_j^{(2)}| \le \frac{|\Sigma_{1,j}|^2+|\Sigma_{2,j}|}{2-2|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|-|\varepsilon_j|^2(|\Sigma_{1,j}|^2+|\Sigma_{2,j}|)} \le \frac{\dfrac{(n-1)n}{\rho^2}}{2-2r\dfrac{n-1}{\rho}-r^2\dfrac{(n-1)n}{\rho^2}}$$
$$< \frac{50(n-1)n}{77\rho^2},$$

za svako $j \in \mathbb{I}_n$. Na osnovu toga nalazimo

$$|\chi_{ij}^{(1)}| = |z_i-\zeta_j+\xi_j^{(1)}\varepsilon_j^2| \ge |z_i-\zeta_j|-|\xi_j^{(1)}||\varepsilon_j|^2 > \rho-\frac{5(n-1)r^2}{4\rho} > \rho-\frac{r}{4} \tag{4.30}$$

i

$$|\chi_{ij}^{(2)}| = |z_i-\zeta_j+\xi_j^{(2)}\varepsilon_j^3| \ge |z_i-\zeta_j|-|\xi_j^{(2)}||\varepsilon_j|^3 > \rho-\frac{50n(n-1)r^3}{77\rho^2} > \rho-\frac{3}{77}r > \rho-\frac{r}{4}. \tag{4.31}$$

Na osnovu nejednakosti (4.30) i (4.31), ocenjujemo za obe korekcije

$$|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}|-r_j) > \Big(\rho-\frac{r}{4}\Big)\Big(\rho-\frac{5r}{4}\Big) = \rho^2\Big(1-\frac{r}{4\rho}\Big)\Big(1-\frac{5r}{4\rho}\Big) > \frac{3}{4}\rho^2. \tag{4.32}$$

Korišćenjem (4.32) dobijamo

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}|-r_j)} < \frac{4r}{3\rho^2},$$

odakle je

$$\sum_{j\ne i}\gamma_{ij}^{(k)} < \frac{4(n-1)r}{3\rho^2}. \tag{4.33}$$

Slično, iz (4.30) i (4.31) nalazimo

$$|g_{ij}^{(k)}| = \frac{1}{|\chi_{ij}^{(k)}|} < \frac{1}{\rho-r/4} < \frac{40}{39\rho}. \tag{4.34}$$

Korišćenjem nejednakosti (4.34) imamo

$$|s_{1,i}^{(k)}| \le \sum_{j\neq i} |g_{ij}^{(k)}| < \frac{40(n-1)}{39\rho} \tag{4.35}$$

i

$$|s_{2,i}^{(k)}| \le \sum_{j\neq i} |g_{ij}^{(k)}|^2 < \Big(\frac{40}{39}\Big)^2 \frac{(n-1)}{\rho^2}. \tag{4.36}$$

Na osnovu (4.25), (4.35) i tvrđenja (i) konačno dobijamo

$$|1 - u_i s_{1,i}^{(k)}| \le 1 + |u_i|\,|s_{1,i}^{(k)}| < 1 + \frac{5}{4}\, r \frac{40(n-1)}{39\rho} < \frac{49}{39}.$$

Za (iii): Slično kao u dokazima tvrđenja (i) i (ii) ocenjujemo

$$\begin{aligned}|q_i^{(k)}| &= |2(1 - u_i s_{1,i}^{(k)})^2| = |2(1 - 2u_i s_{1,i}^{(k)} + u_i^2 (s_{1,i}^{(k)})^2| \ge 2 - 4|u_i||s_{1,i}^{(k)}| - 2|u_i|^2 |s_{1,i}^{(k)}|^2 \\ &> 2 - \frac{200(n-1)r}{39\rho} - \frac{25}{8}\Big(\frac{40}{39}\Big)^2 \frac{(n-1)^2 r^2}{\rho^2} > 2 - \frac{40}{39} - \frac{1}{8}\Big(\frac{40}{39}\Big)^2 > \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Za (iv): Korišćenjem nejednakosti (4.25) nalazimo

$$\eta_i^{(k)} = \frac{9(n-1)|\varepsilon_i| r}{\rho^2} < \frac{9}{25(n-1)} < \frac{9}{50}.$$

Za (v): Kako je

$$\delta_{1,i} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \varSigma_{1,i}, \quad \delta_{2,i} = \frac{1}{\varepsilon_i^2} + \varSigma_{2,i}, \tag{4.37}$$

izvodimo relaciju

$$\delta_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 - (\delta_{2,i} - s_{2,i}^{(k)}) = \frac{2}{\varepsilon_i}\, \varSigma_{1,i} + \varSigma_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 + \varSigma_{2,i} - s_{2,i}^{(k)}. \tag{4.38}$$

S druge strane, kako je

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = u_i(\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}),$$

$b_i^{(k)}$ se može prikazati u obliku

$$b_i^{(k)} = u_i^2 \Big(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i\Big((s_{1,i}^{(k)})^2 - s_{2,i}^{(k)} \Big)\Big) = u_i^3 \Big(\delta_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 - (\delta_{2,i} - s_{2,i}^{(k)}) \Big). \tag{4.39}$$

Dalje, korišćenjem nejednakosti (4.25), (4.26), (4.35), (4.36) i tvrđenja (i), ocenjujemo iz (4.38) i (4.39)

$$|b_i^{(k)}| < \frac{125}{64}\,|\varepsilon_i|^2\left(\frac{2(n-1)}{\rho}+\frac{(n-1)^2r}{\rho^2}+\frac{40^2(n-1)^2r}{39^2\rho^2}+\frac{(n-1)r}{\rho^2}+\frac{40^2(n-1)r}{39^2\rho^2}\right)$$
$$< \frac{125(n-1)|\varepsilon_i|^2}{64\rho}\left(2+\frac{1}{5}+\frac{40^2}{5\cdot 39^2}+\frac{1}{10}+\frac{40^2}{10\cdot 39^2}\right) < \frac{26(n-1)|\varepsilon_i|^2}{5\rho}.$$

Za (vi): Iz tvrđenja (iii) direktno dobijamo

$$|d_i^{(k)}| = \frac{1}{|q_i^{(k)}|} < \frac{5}{4}. \quad \square$$

Lema 4.5 *Neka važi nejednakost* (4.25)*. Tada je*

(i) $S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subseteq \left\{s_{1,i}^{(k)};\ \dfrac{4(n-1)r}{3\rho^2}\right\}, \quad s_{1,i}^{(k)} = \operatorname{mid} S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)});$

(ii) $S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{s_{2,i}^{(k)};\ \dfrac{3(n-1)r}{\rho^3}\right\}, \quad s_{2,i}^{(k)} = \operatorname{mid} S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)});$

(iii) $S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{(s_{1,i}^{(k)})^2;\ \dfrac{3(n-1)^2r}{\rho^3}\right\};$

(iv) $B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{b_i^{(k)};\ \dfrac{6n(n-1)|\varepsilon_i|^3r}{\rho^3}\right\}, \quad b_i^{(k)} = \operatorname{mid} B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}).$

Dokaz. Za (i): Primenjujući centralnu inverziju (1.56), uz korišćenje operacija kružne aritmetike, dobijamo, s obzirom na (4.33),

$$\begin{aligned} S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j + C_{k,j}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\{\chi_{ij}^{(k)}; r_j\}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{g_{ij}^{(k)}; \gamma_{ij}^{(k)}\} \\ &\subset \left\{s_{1,i}^{(k)};\ \frac{4(n-1)r}{3\rho^2}\right\}. \end{aligned}$$

Za (ii): Primenjujući definiciju (1.53) imajući na umu nejednakosti (4.25), (4.33) i (4.34) ocenjujemo

$$\begin{aligned} S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{z_i - Z_j + C_{k,j}}\right)^2 = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \{g_{ij}^{(k)}; \gamma_{ij}^{(k)}\}^2 \\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left\{(g_{ij}^{(k)})^2; 2|g_{ij}^{(k)}|\,\gamma_{ij}^{(k)} + (\gamma_{ij}^{(k)})^2\right\} \subset \left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (g_{ij}^{(k)})^2;\ \frac{3(n-1)r}{\rho^3}\right\}. \end{aligned}$$

Za (iii): Polazeći od tvrđenja (i) Leme 4.4 i primenjujući definiciju (1.53) i nejednakosti (4.25) i (4.35), nalazimo

$$S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{(s_{1,i}^{(k)})^2; 2|s_{1,i}^{(k)}|\frac{4(n-1)r}{3\rho^2} + \Big(\frac{4(n-1)r}{3\rho^2}\Big)^2\right\} \subset \left\{(s_{1,i}^{(k)})^2; \frac{3(n-1)^2r}{\rho^3}\right\}.$$

Za (iv): Na osnovu tvrđenja (i) Leme 4.4 i tvrđenja (ii) i (iii) Leme 4.5 ocenjujemo, korišćenjem (4.25),

$$B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) = u_i^2\bigg(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i\Big(S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)})\Big)\bigg) \subset \left\{b_i^{(k)}; \frac{6n(n-1)|\varepsilon_i|^3r}{\rho^3}\right\}. \ \square$$

Za intervalne metode (4.28) važi sledeće tvrđenje:

Teorema 4.2 *Pretpostavimo da su početni diskovi* $Z_1^{(0)},\dots,Z_n^{(0)}$ *tako izabrani da je* $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ *i da važi nejednakost*

$$\rho^{(0)} > 5(n-1)r^{(0)}. \tag{4.40}$$

Tada su inkluzivni metodi (4.28) *konvergentni za svako* $i \in \mathbb{I}_n$ *i* $m = 1, 2, \dots$ *i važe sledeća tvrđenja:*

1° $\rho^{(m)} > 5(n-1)r^{(m)}$;

2° $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ *za svako* $i \in \mathbb{I}_n$ *i* $m = 1, 2, \dots$;

3° *donja granica R-reda konvergencije intervalnih metoda* (4.28) *je*

$$O_R(4.28) \geq k + 4.$$

Dokaz. Primetimo da iz Teoreme 4.2 dobijamo redove konvergencije intervalnih metoda (4.28) sa Newtonovom i Halleyevom korekcijom 5 i 6, respektivno. Ovo povećanje reda konvergencije u odnosu na red četiri osnovnog metoda (4.8) je uslovljeno veoma brzom konvergencijom niza centara diskova $\{z_i^{(m)}\}$ dobijenih sa (4.28). Zaista, stavljajući $Z_i^{(m)} = \{z_i^{(m)}; 0\}$ u (4.28), dobijamo metod *petog* $(k = 1)$ i *šestog* $(k = 2)$ reda u običnoj kompleksnoj aritmetici, videti relaciju (4.48) za $k = 1$ i 2.

Zapazimo da uslov (4.40) obezbeđuje disjunktnost početnih diskova $Z_1^{(0)},\dots,Z_n^{(0)}$. Zaista, za proizvoljni par indeksa $i, j \in \mathbb{I}_n$ $(i \neq j)$ imamo

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| > \rho^{(0)} > 5(n-1)r^{(0)} > 2r^{(0)} \geq r_i^{(0)} + r_j^{(0)},$$

što znači da je $Z_i^{(0)} \cap Z_j^{(0)} = \emptyset$ (na osnovu (1.51)).

Tvrđenja Teoreme 4.2 ćemo dokazati korišćenjem matematičke indukcije. Kao u Odeljku 4.2, često ćemo koristiti nejednakost (4.40) u obliku

$$\frac{r}{\rho} < \frac{1}{5(n-1)} \leq \frac{1}{10}, \tag{4.41}$$

bez posebnog naglašavanja.

Prvo, neka je $m = 0$, i razmotrimo početni uslov (4.40). Tada, prema Lemi 4.3, direktno dobijamo implikacije

$$\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{k,i} := Z_i - C_{k,i} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 1, 2).$$

Takođe treba dokazati da su novi inkluzivni diskovi $Z_{k,1}, \ldots, Z_{k,n}$ $(k = 1, 2)$ disjunktni po parovima. Korišćenjem (4.26) i (4.40) nalazimo

$$|u_i| = \left|\frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}}\right| < \frac{r_i}{1 - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{5}{4}\, r_i < 2r_i \leq 2r,$$

i

$$\begin{aligned} |h_i| &= \left|\frac{2\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}{2 + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i})}\right| \leq \frac{1}{\left|1 + \dfrac{\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i})}{2(1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}\right|}\, r_i \\ &< \frac{1}{1 - \dfrac{3}{80}}\, r_i = \frac{80}{77}\, r_i < 2r_i \leq 2r, \end{aligned}$$

jer je

$$\left|\frac{\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i})}{2(1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}\right| \leq \frac{r^2\Big(\Big(\dfrac{n-1}{\rho}\Big)^2 + \dfrac{n-1}{\rho^2}\Big)}{2\Big(1 - r\dfrac{n-1}{\rho}\Big)} = \frac{\dfrac{(n-1)nr^2}{\rho^2}}{2\Big(1 - \dfrac{(n-1)r}{\rho}\Big)} < \frac{3}{80}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} |\operatorname{mid} Z_{k,i} - \operatorname{mid} Z_{k,j}| &= |z_i - C_{k,i} - z_j + C_{k,j}| \geq |z_i - z_j| - |C_{k,i}| - |C_{k,j}| \\ &> \rho - 4r > 5(n-1)r - 4r \geq r_i + r_j. \end{aligned}$$

Prema tome, $Z_{k,i} \cap Z_{k,j} = \emptyset$ $(i \neq j)$ zbog (1.51). Poslednja nejednakost je neophodna da bi inkluzivni metod (4.28) bio dobro definisan.

Razmotrimo, prvo, disk u imeniocu izraza (4.28). Pomoću nejednakosti (4.40) i tvrđenja (i) i (ii) Leme 4.4 i tvrđenja (i) Leme 4.5, dobijamo

$$
\begin{aligned}
Q_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= 2(1-u_i S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))^2 \subset 2\Big\{1-u_i s_{1,i}^{(k)}; \frac{5(n-1)|\varepsilon_i|r}{3\rho^2}\Big\}^2 \\
&\subset 2\Big\{(1-u_i s_{1,i}^{(k)})^2; 2|1-u_i s_{1,i}^{(k)}|\,\frac{5(n-1)|\varepsilon_i|r}{3\rho^2} + \frac{25(n-1)^2|\varepsilon_i|^2 r^2}{9\rho^4}\Big\} \\
&\subset \Big\{q_i^{(k)}; \frac{9(n-1)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}\Big\} = \{q_i^{(k)}; \eta_i^{(k)}\}.
\end{aligned}
$$

Iz poslednje inkluzije i tvrđenja (iii) i (iv) Leme 4.4 imamo

$$
|q_i^{(k)}| > \frac{4}{5} > \frac{9}{50} > \eta_i^{(k)}
$$

i zaključujemo da disk Q_i ne sadrži nulu, tako da je iterativni proces (4.28) dobro definisan.

Primennjujući centralnu inverziju na disk Q_i, dobijamo

$$
Q_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})^{I_c} = \{q_i^{(k)}; \eta_i^{(k)}\}^{I_c} = \Big\{d_i^{(k)}; \frac{\eta_i^{(k)}}{|q_i^{(k)}|(|q_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)})}\Big\} =: D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}).
$$

Na osnovu tvrđenja (iii) i (iv) Leme 4.4 ocenjujemo gornju granicu poluprečnika dobijenog diska $D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$,

$$
\operatorname{rad} D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) = \frac{\eta_i^{(k)}}{|q_i^{(k)}|(|q_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)})} < \frac{\dfrac{9(n-1)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}}{\dfrac{4}{5}\Big(\dfrac{4}{5} - \dfrac{9}{50}\Big)} < \frac{19(n-1)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}.
$$

Sada ćemo naći disk koji sadrži proizvod diskova $D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$ i $B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$ korišćenjem dobijene granice za $\operatorname{rad} D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$, inkluzije (iv) Leme 4.5, nejednakosti (4.40) i dobijenih granica za $|d_i^{(k)}|$ i $|b_i^{(k)}|$, datih tvrđenjima (v) i (vi) Leme 4.4,

$$
\begin{aligned}
D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \cdot B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &\subset \Big\{d_i^{(k)}; \frac{19(n-1)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}\Big\} \cdot \Big\{b_i^{(k)}; \frac{6n(n-1)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3}\Big\} \\
&\subset \Big\{d_i^{(k)} b_i^{(k)}; \frac{76n(n-1)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Na osnovu ovoga se intervalni metod (4.28) može izraziti u obliku

$$
\hat{Z}_i = z_i - u_i - D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \cdot B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}), \tag{4.42}
$$

odakle nalazimo

$$
\hat{r} = \mathcal{O}(|\varepsilon|^3 r) \tag{4.43}
$$

i

$$\widehat{r} < \frac{76n(n-1)r^4}{\rho^3}. \tag{4.44}$$

Korišćenjem nejednakosti (4.44), ocenjujemo

$$\hat{r} < 76n(n-1)\frac{r^3}{\rho^3}\,r < \frac{76n}{125(n-1)^2}\,r < \frac{1}{2}\,r. \tag{4.45}$$

Za centar $\hat{z}_i$ diska $\hat{Z}_i$ dobijamo iz (4.42)

$$\hat{z}_i = \operatorname{mid}\widehat{Z}_i = z_i - u_i - d_i^{(k)}b_i^{(k)}, \tag{4.46}$$

tako da je

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - u_i - d_i^{(k)}b_i^{(k)}.$$

Posle sređivanja, nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - u_i - \frac{u_i^3\Big(\delta_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 - (\delta_{2,i} - s_{2,i}^{(k)})\Big)}{2(1-u_i s_{1,i}^{(k)})^2}. \tag{4.47}$$

Ispitajmo prvo razliku

$$\Sigma_{1,i} - s_{1,i}^{(k)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big(\frac{1}{z_i-\zeta_j} - g_{ij}^{(k)}\Big) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\xi_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1}}{(z_i-\zeta_j)\chi_{ij}^{(k)}} = \mathcal{O}_M(\alpha\varepsilon^{k+1}),$$

gde je α konstanta. Na osnovu toga imamo

$$\Sigma_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 = (\Sigma_{1,i} - s_{1,i}^{(k)})(\Sigma_{1,i} + s_{1,i}^{(k)}) = O_M(\alpha'\varepsilon^{k+1}).$$

Slično, nalazimo

$$\begin{aligned}\Sigma_{2,i} - \sum_{j\neq i}(g_{ij}^{(k)})^2 &= \sum_{j\neq i}\Big(\frac{1}{(z_i-\zeta_j)^2} - g_{ij}^{(k)}\Big)^2 = \sum_{j\neq i}\Big(\frac{1}{z_i-\zeta_j} - g_{ij}^{(k)}\Big)\Big(\frac{1}{z_i-\zeta_j} + g_{ij}^{(k)}\Big)\\ &= O_M(\alpha''\epsilon^{k+1}).\end{aligned}$$

Na osnovu ovoga i jednakosti (4.29) i (4.37) dobijamo iz (4.47)

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^3\mathcal{O}_M(\alpha'''\varepsilon^{k+1}). \tag{4.48}$$

U gornjim relacijama su α', α'' i α''' neke konstante.

Na osnovu tvrđenja (i), (v) i (vi) Leme 4.4 dobijamo iz (4.46), korišćenjem nejednakosti (4.25),

$$|\hat{z}_i - z_i| = |u_i - d_i b_i| < \frac{5}{4}\,r_i + \frac{5}{4}\cdot\frac{26(n-1)|\varepsilon_i|^2}{5\rho} < \frac{8}{3}\,r_i. \tag{4.49}$$

Iz nejednakosti (4.25), (4.45) i (4.49) nalazimo

$$\begin{aligned}|\hat{z}_i - \hat{z}_j| &\geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > \rho + r_j - \frac{8}{3}\,r_i - \frac{8}{3}\,r_j > 5(n-1)r - \frac{13}{3}\,r\\ &= 2\hat{r}\Big[5(n-1) - \frac{13}{3}\Big] \geq \frac{34}{3}\,\hat{r}.\end{aligned}$$

Na osnovu poslednje nejednakosti dobijamo za svaki par $i, j \in \mathbb{I}_n$ $(i \neq j)$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| > 2\hat{r} \geq \hat{r}_i + \hat{r}_j,$$

odakle sledi da su diskovi $\widehat{Z}_1, \ldots, \widehat{Z}_n$ disjunktni po parovima. Takođe, za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_n$ $(i \neq j)$ je

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| - \hat{r}_j > 2\hat{r}\Big[5(n-1) - \frac{13}{3}\Big] - \hat{r} > 5(n-1)\hat{r}.$$

Dakle,

$$\hat{\rho} > 5(n-1)\hat{r}.$$

Na taj način smo dokazali da iz početnog uslova (4.40) sledi nejednakost istog oblika za indeks $m = 1$. Konkretno, nejednakost (4.45) oblika $r^{(1)} < r^{(0)}/2$ ukazuje na kontrakciju novih kružnih aproksimacija $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_n^{(1)}$.

Ponavljajući gornju proceduru i argumentaciju za proizvoljnu vrednost indeksa $m \geq 0$ možemo dokazati sve gornje relacije za vrednost indeksa $m + 1$. Kako su ove relacije već dokazane za $m = 0$, na osnovu matematičke indukcije sledi da, pod uslovom (4.40), one važe za svako $m \geq 1$. Konkretno imamo

$$\rho^{(m)} > 5(n-1)r^{(m)} \tag{4.50}$$

(tvrđenje 1°) i

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{2}. \tag{4.51}$$

Na osnovu nejednakosti (4.51) zaključujemo da niz poluprečnika $\{r^{(m)}\}$ teži nuli, što znači da je inkluzivni metod (4.28) *konvergentan*. Dalje, kako (4.50) važi, tvrđenja Lema 4.4 i 4.5 važe za proizvoljno m što znači da je poboljšani metod (4.28) dobro definisan u svakom iterativnom koraku.

Pretpostavimo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$. Tada iz (4.7) i (4.28) dobijamo da $\zeta_i \in Z_i^{(m+1)}$ (na osnovu osobine inkluzivne izotonosti). Kako je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ (pretpostavka teoreme) sledi matematičkom indukcijom da $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \ldots$ (tvrđenje 2°).

Ostaje da izvedemo donju granicu R-reda konvergencije poboljšanog metoda (4.28) sa korekcijama (tvrđenje 3°). Nizovi $\{z_i^{(m)}\}$ i $\{r_i^{(m)}\}$ centara i poluprečnika diskova $Z_i^{(m)}$ dobijeni metodom (4.28) su međusobno zavisni. Zbog jednostavnosti, što je uobičajeno u ovakvom tipu analize, usvajamo da je $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$ što znači da radimo sa takozvanim modelom „najgoreg slučaja". Ova pretpostavka nema uticaja na konačni rezultat graničnog procesa koji primenjujemo u cilju dobijanja donje granice R-reda konvergencije. Na osnovu (4.43) i (4.48) primećujemo da se ovi nizovi ponašaju na sledeći način

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^{k+4}, \quad r^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^3 r^{(m)}.$$

Na osnovu ovih relacija formiramo R-matricu

$$Y_2 = \begin{bmatrix} k+4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

čiji je spektralni radijus $\rho(Y_2) = k + 4$ i odgovarajući sopstveni vektor $\boldsymbol{x}_\rho = ((k + 3)/3, 1) > 0$. Dakle, na osnovu Teoreme 1.7, imamo da je

$$O_R(4.28) \geq \rho\,(Y_2) = k + 4.$$

Dakle, red konvergencije metoda (4.28) je pet za $k = 1$ (Newtonova korekcija) i šest $k = 2$ (Halleyeva korekcija). $\square$

Primedba 4.4 Zapazimo da osnovni metod (4.8) i metodi sa korekcijama (4.28) konvergiraju pod istim početnim uslovima (4.15), to jest, (4.40). U praksi, metodi sa korekcijama zahtevaju strožije početne uslove jer korekcije $C_{k,i}$ moraju da zadovolje implikaciju datu u Lemi 4.3, što je dodatni zahtev. Bitno je napomenuti da su pomenuti početni uslovi računski proverljivi, što je od velike praktične važnosti.

Završićemo ovaj odeljak sa sledećim logičnim pitanjem:

Da li je moguće dobiti inkluzivni metod, koji se zasniva na nula-relaciji (4.6), *proizvoljnog reda konvergencije, korišćenjem korekcija višeg reda od Newtonove i Halleyeve korekcije?*

Odgovor je potvrdan. U ovom odeljku radili smo sa diskovima $Z_{k,j}$, za $k = 1$ i $k = 2$, određenim sa $Z_{k,j} = Z_j - C_{k,j}$, gde su $C_{1,j} = u_j$ i $C_{2,j} = h_j$ Newtonova i Halleyeva korekcija, respektivno. Razmotrimo uopšteni slučaj kada k uzima proizvoljne vrednosti $1, 2, 3, \ldots$. Neka

$$\varphi_{k+1}(z_j) \equiv z_j^* = z_j - C_{k,j}$$

definiše iterativni metod reda $k+1$ $(k \geq 1)$ za nalaženje nule, to jest, $z_j^* - \zeta_j = \mathcal{O}_M(\varepsilon_j^{k+1})$. Na primer, iterativne formule

$$\varphi_4(z) = z - \frac{u(z)(1 - A_2 u(z))}{1 - 2A_2 u(z) + A_3 u(z)^2}$$

i

$$\varphi_5(z) = z - \frac{u(z)(1 - A_2 u(z) + A_3 u(z)^2)}{1 - 3A_2 u(z) + (2A_3 + A_2^2) u(z)^2 - A_4 u(z)^3}$$

određuju metode reda 4 i 5. Ovde je $A_k = A_k(z)$, videti Primedbu 4.1.

Odgovarajući ubrzani inkluzivni metodi dati sa (4.28) daju diskove

$$Z_{k,j} = Z_j - C_{k,j} = \{z_j; \varphi_{k+1}(z_j)\} \quad (z_j = \operatorname{mid} Z_j),$$

gde je $k \geq 1$ proizvoljni ceo broj. Pri tome se podrazumeva korišćenje isključivo centralne inverzije. Na sličan način kao u ovom odeljku, možemo izvesti sledeće relacije

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^{k+4}, \quad r^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^3 r^{(m)} \quad (k \geq 1).$$

Odgovarajuća R-matrica je data sa Y_2 i donja granica R-reda konvergencije ubrzanog inkluzivnog metoda je $\rho(Y_2) \geq k+4$, gde je $k \geq 1$ proizvoljni ceo broj.

Upravo smo izložili uopšteni pristup za konstrukciju simultanih inkluzivnih metoda proizvoljnog reda konvergencije. Međutim, kao i u slučaju generalisanih k-iteracija $\mathbb{R}_k$ i Bellovih disk iteracija $\mathbb{B}_k$, koje su pomenute u Odeljku 4.1, ako je $k \geq 2$ javlja se potreba za izračunavanjem izvoda polinoma višeg reda $P''', P^{(4)}, \ldots$ (videti, na primer, izraze za φ_4 i φ_5 gore), što smanjuje računsku efikasnost odgovarajućih metoda. Očigledno je da samo oni metodi sa korekcijama (kao što su Newtonova i Halleyeva korekcija) koji koriste već izračunate izvode polinoma P imaju praktičan značaj. Na taj način je osigurana visoka računska efikasnost. Treba istaći da takav pristup obezbeđuje veliki praktični dobitak u odnosu na metode sa generalisanom familijom sa proizvoljnim redom konvergencije, ali sa smanjenom računskom efikasnošću.

4.7 Numerički primeri za metode sa korekcijama

Da bismo testirali osobine konvergencije predloženog inkluzivnog metoda (4.28), primenili smo ga na rešavanje polinomskih jednačina različitog stepena uz korišćenje centralne inverzije (1.56). Da bismo sačuvali sve značajne cifre dobijenih aproksimacija primenili smo odgovarajuće algoritme korišćenjem programskog paketa *Mathematica* 7.0 sa aritmetikom višestruke preciznosti. Zbog upoređivanja, testirali smo intervalni Halleyev metod, predložen u [198] i njegovu ubrzanu verziju [116], koji se mogu predstaviti iterativnom formulom

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{h_i} - \dfrac{u_i}{2}\left(S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)})\right)} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 0,1,2). \tag{4.52}$$

Drugi inkluzivni metod istog tipa je metod Eulerovog tipa [156]

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{2}{\delta_{1,i} + \left[2\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 - 2S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) + 2S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)})\right]_*^{1/2}} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ k = 0,1,2). \tag{4.53}$$

Uvedeni indeks $k = 0$ ukazuje na osnovni metod Halleyevog ili Eulerovog tipa bez korekcija, dok vrednosti $k = 1$ i $k = 2$ ukazuju na primenu Newtonove, odnosno Halleyeve korekcije. Red konvergencije metoda (4.52) i (4.53) je četiri ($C_{0,i} = 0$), pet ($C_{1,i} = u_i$) i šest ($C_{2,i} = h_i$), u zavisnosti od tipa primenjene korekcije.

Primer 4.3 Inkluzivni metodi za proste nule (4.28), (4.52) i (4.53) (za $k = 0,1,2$) su primenjeni za simultanu inkluziju nula polinoma iz Primera 4.1 sa početnim diskovima $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$ sa centrima

$$\begin{array}{lll}
z_1^{(0)} = 1.1 + 2.2i, & z_2^{(0)} = 1.2 - 2.1i, & z_3^{(0)} = -1.2 + 2.1i,\\
z_4^{(0)} = -1.2 - 2.1i, & z_5^{(0)} = 2.1 + 0.1i, & z_6^{(0)} = -2.1 + 0.1i,\\
z_7^{(0)} = -0.2 + 0.9i, & z_8^{(0)} = 0.2 - 1.1i, & z_9^{(0)} = 3.1 + 1.9i,\\
z_{10}^{(0)} = 3.2 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -3.2 + 1.9i, & z_{12}^{(0)} = -3.2 - 1.9i,\\
z_{13}^{(0)} = 2.2 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = 2.2 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.2 + 2.9i,\\
z_{16}^{(0)} = -2.2 - 2.9i, & z_{17}^{(0)} = 0.2 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = -0.2 - 2.9i,\\
z_{19}^{(0)} = 3.1 - 0.1i. & &
\end{array}$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka su dati u Tabeli 4.3. Metod Eulerovog tipa (4.53) je divergirao u svim varijantama.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(4.28), $k = 0$	5.16(−1)	1.27(−5)	2.37(−29)
(4.28), $k = 1$	9.62(−1)	8.56(−7)	2.68(−43)
(4.28), $k = 2$	9.14(−1)	9.73(−8)	7.81(−55)
(4.52), $k = 0$	1.01(−1)	4.90(−7)	3.42(−31)
(4.52), $k = 1$	1.09(−1)	1.18(−8)	2.76(−45)
(4.52), $k = 2$	1.20(−1)	2.88(−9)	8.66(−57)

Tabela 4.3: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 4.3

Primer 4.4 Za nalaženje nula polinoma iz Primera 4.2 primenili smo iste intervalne metode kao u Primeru 4.3. Dobijeni maksimalni poluprečnici diskova u prve tri iteracije dati su u Tabeli 4.4. Kao i u Primeru 4.3, metod Eulerovog tipa (4.53) je divergirao u svim varijantama.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(4.28), $k = 0$	7.40(−1)	4.19(−6)	7.17(−32)
(4.28), $k = 1$	8.00(−1)	2.08(−7)	4.14(−46)
(4.28), $k = 2$	5.85(−1)	3.35(−9)	1.07(−64)
(4.52), $k = 0$	2.26(−1)	1.14(−7)	1.18(−33)
(4.52), $k = 1$	1.57(−1)	1.01(−8)	1.13(−47)
(4.52), $k = 2$	1.27(−1)	1.29(−10)	1.28(−66)

Tabela 4.4: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 4.4

Iz Tabela 4.3 i 4.4 možemo uočiti veoma brzu konvergenciju predloženih metoda. Njihovi redovi konvergencije se uglavnom podudaraju sa teorijski dobijenim rezultatima datim Teoremom 4.2. Diskovi koji su dobijeni primenom odgovarajućih metoda Halleyevog tipa (4.52) su kompatibilni po svojoj veličini diskovima dobijenim predloženim metodima (4.28). Treća iteracija je data da demonstrira veoma veliku tačnost aproksimacija, mada treba napomenuti da se takva tačnost retko zahteva u praksi.

Poglavlje 5

Novi intervalni metod za višestruke nule polinoma

U ovom poglavlju je izložena varijanta intervalnog metoda za simultano određivanje svih nula polinoma, u slučaju određivanja višestrukih nula polinoma.

5.1 Nula-relacija

Neka je $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ monični polinom sa prostim ili višestrukim kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ $(2 \le \nu \le n)$, višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ $(\mu_1 + \ldots + \mu_\nu = n)$ respektivno i neka su $z_1, \ldots, z_\nu$ njihove aproksimacije. Za tačku $z = z_i$ uvedimo skraćenice

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^\lambda}, \quad s_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i - z_j)^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2),\\
&\delta_{1,i} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)}, \quad \delta_{2,i} = \frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2}, \quad u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\delta_{1,i}},\\
&\varepsilon_i = z_i - \zeta_i.
\end{aligned}$$

Polazeći od faktorizacije

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\nu} (z - \zeta_j)^{\mu_j},$$

korišćenjem logaritamskog diferenciranja, nalazimo

$$\delta_{1,i} = \frac{1}{u_i} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i} \tag{5.1}$$

i

$$\delta_{2,i} = \frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^2} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}. \tag{5.2}$$

U radu [123] smo izveli nula-relaciju

$$\zeta_i = z_i - \mu_i u_i - \frac{\mu_i u_i \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i \dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i^2 (\Sigma_{1,i}^2 - \mu_i \Sigma_{2,i})\Big)}{2(1 - u_i\, \Sigma_{1,i})^2} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu). \tag{5.3}$$

Pretpostavimo da smo našli međusobno disjunktne diskove $Z_1, \dots, Z_\nu$ sa centrima $z_i = \operatorname{mid} Z_i$ i poluprečnicima $r_i = \operatorname{rad} Z_i$ takve da je $\zeta_i \in Z_i$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$. Zamenjujući tačne nule ζ_j njihovim inkluzivnim diskovima Z_j u izrazu za $\Sigma_{\lambda,i}$, dobijamo kružno proširenje $S_{\lambda,i}$ veličine $\Sigma_{\lambda,i}$

$$S_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \Big(\frac{1}{z_i - Z_j}\Big)^{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2),$$

gde je $\Sigma_{\lambda,i} \in S_{\lambda,i}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$.

Primedba 5.1 Pisaćemo $\Big(\dfrac{1}{z_i - Z_j}\Big)^{\lambda}$ umesto $\dfrac{1}{(z_i - Z_j)^{\lambda}}$, jer je $\operatorname{rad} \Big(\dfrac{1}{Z}\Big)^{\lambda} \le \operatorname{rad} \dfrac{1}{Z^{\lambda}}$ $(0 \notin Z)$, videti [106].

Korišćenjem osobine inkluzivne izotonosti, iz nula-relacije (5.3), dobijamo

$$\zeta_i \in z_i - \mu_i u_i - \frac{\mu_i u_i \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i \dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i^2 (S_{1,i}^2 - \mu_i S_{2,i})\Big)}{2(1 - u_i\, S_{1,i})^2} =: \widehat{Z}_i \quad (i \in \mathbb{I}_\nu). \tag{5.4}$$

Ako je imenilac u (5.4) disk koji ne sadrži nulu, tada je $\widehat{Z}_i$ nova kružna aproksimacija nule ζ_i, to jest, $\zeta_i \in \widehat{Z}_i$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$.

Polazeći od (5.4) dobijamo iterativni proces za simultanu inkluziju svih višestrukih nula polinoma

$$\begin{aligned} Z_i^{(m+1)} &= z_i^{(m)} - \mu_i u_i^{(m)} \\ &\quad - \frac{\mu_i u_i^{(m)} \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i^{(m)} \dfrac{P''(z_i^{(m)})}{P'(z_i^{(m)})} - (u_i^{(m)})^2 [(S_{1,i}^{(m)})^2 - \mu_i S_{2,i}^{(m)}]\Big)}{2(1 - u_i^{(m)}\, S_{1,i}^{(m)})^2}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

za $i \in \mathbb{I}_\nu$.

5.2 Analiza konvergencije

U ovom odeljku daćemo analizu konvergencije intervalnog metoda (5.5), kao u radovima [114], [117] i [132]. U nastavku ćemo podrazumevati da je $n \geq 3$. Kao i u slučaju prostih nula (videti prethodno Poglavlje 4) radićemo samo sa centralnom inverzijom (1.56).

Za disjunktne diskove $Z_1, \ldots, Z_\nu$ definišimo

$$
\begin{aligned}
& z_i^{(m)} = \operatorname{mid} Z_i^{(m)}, \quad r_i^{(m)} = \operatorname{rad} Z_i^{(m)}, \\
& r^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq \nu} r_i^{(m)}, \quad \rho^{(m)} = \min_{\substack{1 \leq i,j \leq \nu \\ i \neq j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}| - r_j^{(m)}\}, \\
& \varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad |\varepsilon^{(m)}| = \max_{1 \leq i \leq \nu} |\varepsilon_i^{(m)}|, \\
& B_i^{(m)} = (u_i^{(m)})^2 \left[\frac{P''(z_i^{(m)})}{P'(z_i^{(m)})} - u_i^{(m)} \left((S_{1,i}^{(m)})^2 - S_{2,i}^{(m)} \right) \right] \quad (m = 0, 1, \ldots).
\end{aligned}
$$

Prvo ćemo dokazati dva tvrđenja, koja su nam neophodna za dokazivanje teoreme o konvergenciji.

Lema 5.1 *Neka važi nejednakost*

$$\rho > 5(n - \mu)r. \tag{5.6}$$

Tada je

(i) $S_{1,i} \subseteq \left\{ s_{1,i}; \dfrac{(n - \mu_i)r}{\rho^2} \right\}$;

(ii) $S_{2,i} \subset \left\{ s_{2,i}; \dfrac{21(n - \mu_i)r}{10\rho^3} \right\}$;

(iii) $S_{1,i}^2 \subset \left\{ s_{1,i}^2; \dfrac{21(n - \mu_i)^2 r}{10\rho^3} \right\}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$|z_i - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \geq |z_i - z_j| - r_j \geq \rho, \tag{5.7}$$

imamo da je

$$\frac{1}{|z_i - \zeta_j|} \leq \frac{1}{\rho} \quad \text{i} \quad \frac{1}{|z_i - z_j|} \leq \frac{1}{\rho}. \tag{5.8}$$

Na osnovu definicije (1.56), uz korišćenje (5.7) i (5.8), dobijamo inkluziju

$$\{z_i - z_j; r_j\}^{I_c} = \left\{\frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r_j}{|z_i - z_j|(|z_i - z_j| - r_j)}\right\} \subseteq \left\{\frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2}\right\} \tag{5.9}$$

Iz inkluzije (5.9) sada nalazimo

$$S_{1,i} \subseteq \sum_{j\neq i} \mu_j \left\{\frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2}\right\} \subseteq \left\{s_{1,i}; \frac{(n-\mu_i)r}{\rho^2}\right\}.$$

Za (ii): Na osnovu (5.6) i (5.8), uz korišćenje operacija kružne aritmetike sa centralnom inverzijom (1.56), imamo

$$\left\{\frac{1}{z_i - z_j}; \frac{r}{\rho^2}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{(z_i - z_j)^2}; 2\,\frac{1}{|z_i - z_j|}\,\frac{r}{\rho^2} + \frac{r^2}{\rho^4}\right\} \subset \left\{\frac{1}{(z_i - z_j)^2}; \frac{21r}{10\rho^3}\right\},$$

odakle dobijamo inkluziju

$$S_{2,i} \subset \sum_{j\neq i} \mu_j \left\{\frac{1}{(z_i - z_j)^2}; \frac{21r}{10\rho^3}\right\} \subseteq \left\{s_{2,i}; \frac{21(n-\mu_i)r}{10\rho^3}\right\}.$$

Za (iii): Korišćenjem (5.8) dobiijamo da je

$$|s_{1,i}| \leq \frac{n-\mu_i}{\rho} \tag{5.10}$$

i na osnovu (1.53), (5.6) i tvrđenja (i) nalazimo

$$\begin{aligned} S_{1,i}^2 &\subseteq \left\{s_{1,i}; (n-\mu_i)\frac{r}{\rho^2}\right\}^2 \subseteq \left\{s_{1,i}^2; \frac{2(n-\mu_i)^2 r}{\rho^3} + \frac{(n-\mu_i)^2 r^2}{\rho^4}\right\} \\ &\subset \left\{s_{1,i}^2; \frac{21(n-\mu_i)^2 r}{10\rho^3}\right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Uvedimo disk

$$Q_i = 2(1 - u_i S_{1,i})^2, \quad \operatorname{mid} Q_i = q_i = 2(1 - u_i s_{1,i})^2.$$

Lema 5.2 *Neka važi nejednakost* (5.6). *Tada je*

(i) $|u_i| < \dfrac{5}{4}\,\dfrac{|\varepsilon_i|}{\mu_i} \leq \dfrac{5}{4}\,\dfrac{r_i}{\mu_i}$;

(ii) $|1 - u_i s_{1,i}| < \dfrac{5}{4}$;

(iii) $|q_i| > \dfrac{7}{8}$;

(iv) $\eta_i = \dfrac{101(n-\mu_i)r^2}{16\rho^2} < \dfrac{7}{50}$.

Dokaz. Za (i): Iz (5.1) nalazimo

$$u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\dfrac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i\Big(1 + \dfrac{\varepsilon_i \Sigma_{1,i}}{\mu_i}\Big)}. \tag{5.11}$$

S druge strane iz nejednakosti (5.8) dobijamo

$$|\Sigma_{1,i}| \le \frac{n-\mu_i}{\rho}, \tag{5.12}$$

pa korišćenjem (5.6), (5.11) i (5.12) ocenjujemo

$$|u_i| = \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big|1 + \dfrac{\varepsilon_i \Sigma_{1,i}}{\mu_i}\Big|} \le \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big(1 - \dfrac{|\varepsilon_i||\Sigma_{1,i}|}{\mu_i}\Big)} \le \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big(1 - \dfrac{(n-\mu_i)r}{\mu_i\rho}\Big)} < \frac{5}{4}\,\frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i} \le \frac{5}{4}\,\frac{r_i}{\mu_i}.$$

Za (ii): Na osnovu (5.6), (5.10) i tvrđenja (i) imamo

$$|1 - u_i s_{1,i}| \le 1 + |u_i| \cdot |s_{1,i}| < 1 + \frac{5}{4}\,\frac{r}{\mu_i}\,\frac{n-\mu_i}{\rho} < \frac{5}{4}.$$

Za (iii): Slično kao u dokazu tvrđenja (i) i (ii) ocenjujemo

$$\begin{aligned} |q_i| &= |2(1 - u_i s_{1,i})^2| = |2(1 - 2u_i s_{1,i} + u_i^2 s_{1,i}^2| \ge 2 - 4|u_i||s_{1,i}| - 2|u_i^2||s_{1,i}^2| \\ &> 2 - 5\frac{(n-\mu_i)r}{\mu_i\rho} - \frac{25}{8}\,\frac{(n-\mu_i)^2 r^2}{\mu_i^2\rho^2} > 2 - 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Za (iv): Korišćenjem (5.6) nalazimo

$$\eta_i = \frac{101(n-\mu_i)r^2}{16\rho^2} < \frac{101}{400(n-\mu)} < \frac{7}{50}.$$

Korišćenjem Lema 5.1 i 5.2 sada smo u mogućnosti da dokažemo da je red konvergencije inkluzivnog metoda (5.5) jednak četiri.

Teorema 5.1 *Neka je niz intervala* $\{Z_i^{(m)}\}$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$ *definisan iterativnom formulom* (5.5)*. Tada, pod uslovom*

$$\rho^{(0)} > 5(n-\mu)r^{(0)}, \tag{5.13}$$

za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$ *i* $m = 0, 1, \ldots$ *imamo*

1° $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$;

2° $r^{(m+1)} < \dfrac{41n(n-\mu)(r^{(m)})^4}{\left(\rho^{(0)} - \frac{7}{3}r^{(0)}\right)^3}$.

Dokaz. Tvrđenje 1° ćemo dokazati indukcijom. Pretpostavimo da je $\zeta_i \in Z_i^{(k)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$ i $m \geq 1$. Tada, na osnovu (5.5) sledi

$$\zeta_i \in z_i^{(k)} - \mu_i u_i^{(k)} - \frac{\mu_i u_i^{(k)}\Big(1-\mu_i+\mu_i u_i^{(k)}\dfrac{P''(z_i^{(k)})}{P'(z_i^{(k)})} - (u_i^{(k)})^2\Big((S_{1,i}^{(k)})^2 - \mu_i S_{2,i}^{(k)}\Big)\Big)}{2(1-u_i^{(k)}\,S_{1,i}^{(k)})^2}$$
$$=: Z_i^{(k+1)}.$$

Kako je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$, dobijamo indukcijom da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokažimo sada da intervalni metod (5.5) ima red konvergencije jednak četiri (tvrđenje 2°). Koristićemo indukciju i počećemo sa $m = 0$. Zbog kraćeg pisanja svi iterativni indeksi će biti izostavljeni i sve veličine u prvoj iteraciji će biti označene sa $\widehat{\ \ }$.

Posmatrajmo disk u imeniocu. Korišćenjem definicije (1.53), nejednakosti (5.6) i tvrđenja (i) Leme 5.1 i (ii) Leme 5.2, dobijamo

$$\begin{aligned} Q_i &= 2(1-u_iS_{1,i})^2 \subset 2\left\{1-u_is_{1,i}; \frac{5(n-\mu_i)r^2}{4\mu_i\rho^2}\right\}^2 \\ &\subset \left\{q_i; \frac{25(n-\mu_i)r^2}{4\mu_i\rho^2} + \frac{25(n-\mu_i)^2r^4}{8\mu_i^2\rho^4}\right\} \subset \left\{q_i; \frac{101(n-\mu_i)r^2}{16\rho^2}\right\} = \{q_i;\eta_i\}. \end{aligned}$$

Iz poslednje inkluzije i tvrđenja (iii) i (iv) Leme 5.2 vidimo da je

$$|q_i| > \frac{7}{8} > \frac{7}{50} > \eta_i$$

što znači da disk Q_i ne sadži nulu, tako da je iterativni proces (5.5) dobro definisan.

U nastavku ćemo naći inverz dobijenog diska Q_i, korišćenjem centralne inverzije (1.56),

$$Q_i^{I_c} = \{q_i;\eta_i\}^{I_c} = \left\{\frac{1}{q_i}; \frac{\eta_i}{|q_i|(|q_i|-\eta_i)}\right\} =: D_i.$$

Na osnovu tvrđenja (iii) i (iv) Leme 5.2 nalazimo

$$\operatorname{rad} D_i = \frac{\eta_i}{|q_i|(|q_i| - \eta_i)} < \frac{\dfrac{101(n-\mu_i)r^2}{16\rho^2}}{7/8(7/8 - 7/50)} < \frac{10(n-\mu_i)r^2}{\rho^2}$$

i

$$\operatorname{mid} D_i = |d_i| = \frac{1}{|q_i|} < \frac{8}{7}.$$

Kako je

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = u_i(\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}),$$

disk u brojiocu može se izraziti u obliku

$$\begin{aligned} B_i &= \mu_i u_i \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i \frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i^2 (S_{1,i}^2 - \mu_i S_{2,i})\Big) \\ &= \mu_i u_i (1 - \mu_i) + \mu_i^2 u_i^3 (\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}) - \mu_i u_i^3 ((S_{1,i}^2 - \mu_i S_{2,i})). \end{aligned} \tag{5.14}$$

U nastavku, nađimo gornju granicu poluprečnika diska B_i. Iz (5.14), korišćenjem tvrđenja (ii) i (iii) Leme 5.1 i tvrđenja (i) Leme 5.2 nalazimo da je

$$\operatorname{rad} B_i \leq \mu_i \frac{125}{64} \frac{r^3}{\mu_i^3} \Big(\frac{21(n-\mu_i)^2 r}{10\rho^3} + \mu_i \frac{21(n-\mu_i) r}{10\rho^3} \Big) \leq \frac{21}{5} \frac{n(n-\mu_i)}{\rho^3} r^4.$$

Kako je

$$\delta_{1,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}, \quad \delta_{2,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}, \quad u_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}},$$

imamo

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \mu_i(1-\mu_i) + \mu_i^2 u_i^2 (\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}) \\ &= \mu_i(1-\mu_i) + \frac{\mu_i^2 \varepsilon_i^2}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2} \Big[\Big(\frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i} \Big)^2 - \Big(\frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i} \Big) \Big] \\ &= \frac{2\mu_i^2 \varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2 \mu_i \Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2 \varepsilon_i^2 \Sigma_{2,i}}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2} \end{aligned}$$

i centar diska B_i se može izraziti u obliku

$$\operatorname{mid} B_i = u_i \frac{2\mu_i^2 \varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2 \mu_i \Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2 \varepsilon_i^2 \Sigma_{2,i}}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2} - \mu_i u_i^3 ((s_{1,i}^2 - \mu_i s_{2,i})).$$

Dalje, korišćenjem nejednakosti

$$|\Sigma_{2,i}| \le \frac{n-\mu_i}{\rho^2} \quad \text{i} \quad |s_{2,i}| \le \frac{n-\mu_i}{\rho^2}$$

(dobijene iz (5.8)) i nejednakosti (5.6), (5.8) i (5.12) ocenjujemo

$$\begin{aligned}|2\mu_i^2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2\mu_i\Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2\varepsilon_i^2\Sigma_{2,i}| &\le 2\mu_i^2\frac{(n-\mu_i)r}{\rho} + \mu_i r^2\frac{(n-\mu_i)^2}{\rho^2} + \mu_i^2 r^2\frac{n-\mu_i}{\rho^2}\\ &< \frac{23}{10}\frac{(n-\mu_i)\mu_i^2 r}{\rho},\end{aligned}$$

$$|\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i}| \ge \mu_i - |\varepsilon_i\Sigma_{1,i}| \ge \mu_i\Big(1 - \frac{(n-\mu_i)r}{\mu_i\rho}\Big) > \frac{4}{5}\mu_i$$

i

$$\mu_i u_i^2((s_{1,i}^2 - \mu_i s_{2,i})) < \frac{25}{16}\frac{r^2}{\mu_i^2}\mu_i\Big(\frac{(n-\mu_i)^2}{\rho^2} + \mu_i\frac{n-\mu_i}{\rho^2}\Big) < \frac{15}{32}\frac{(n-\mu_i)r}{\rho}.$$

Na osnovu ovih nejednakosti i tvrđenja (i) Leme 5.2 dobijamo granicu za centar diska B_i

$$|\operatorname{mid} B_i| = |b_i| < \frac{26(n-\mu_i)r^2}{5\rho}.$$

Proizvod diskova D_i i B_i, s obzirom na definiciju (1.53) i dobijene granice za $|d_i|$ i $|b_i|$, je sadržan u disku

$$D_i \cdot B_i \subset \Big\{d_i; \frac{10(n-\mu_i)r^2}{\rho^2}\Big\} \cdot \Big\{b_i; \frac{21n(n-\mu_i)r^4}{5\rho^3}\Big\} \subset \Big\{d_i b_i; \frac{41n(n-\mu_i)r^4}{\rho^3}\Big\}.$$

Intervalni metod (5.5) se može predstaviti u obliku

$$\hat{Z}_i = z_i - \mu_i u_i - D_i B_i,$$

odakle dobijamo

$$\widehat{r} = \operatorname{rad}\widehat{Z}_i < \frac{41n(n-\mu)r^4}{\rho^3} \tag{5.15}$$

i posle kraćeg računanja

$$\hat{r} < 41n(n-\mu)\frac{r^3}{\rho^3}\, r < \frac{41n}{125(n-\mu)^2}\, r < \frac{1}{4}\, r. \tag{5.16}$$

Na osnovu geometrijske konstrukcije i činjenice da diskovi $Z_i^{(m)}$ i $Z_i^{(m+1)}$ moraju da imaju bar jednu zajedničku tačku (nulu ζ_i), može se izvesti sledeća relacija (videti [41]):

$$\rho^{(m+1)} \ge \rho^{(m)} - r^{(m)} - 3r^{(m+1)}. \tag{5.17}$$

Korišćenjem nejednakosti (5.16) i (5.17) (za $m = 0$), nalazimo

$$\rho^{(1)} \geq \rho^{(0)} - r^{(0)} - 3r^{(1)} > 5(n-\mu)r^{(0)} - r^{(0)} - \frac{3}{4}\,r^{(0)} > 4\,r^{(1)}\Big(5(n-\mu) - 1 - \frac{3}{4}\Big),$$

odakle sledi

$$\rho^{(1)} > 5(n-\mu)r^{(1)}. \tag{5.18}$$

Ovo je uslov (5.13) za vrednost indeksa $m = 1$, što znači da sva tvrđenja Lema 5.1 i 5.2 važe za $m = 1$.

Korišćenjem definicije za ρ i (5.18), za proizvoljni par indeksa $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$, imamo

$$|z_i^{(1)} - z_j^{(1)}| \geq \rho^{(1)} > 5(n-\mu)r^{(1)} > 2r^{(1)} \geq r_i^{(1)} + r_j^{(1)}. \tag{5.19}$$

Odavde, na osnovu (1.51) zaključujemo da su diskovi $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\nu^{(1)}$ dobijeni metodom (5.5) disjunktni po parovima.

Primenjujući matematičku indukciju sa argumentacijom korišćenom pri izvođenju relacija (5.15), (5.16), (5.18) i (5.19) (što čini deo dokaza kada je $m = 1$), dokazali smo da su, za svako $m = 0, 1, \ldots$, diskovi $Z_1^{(m)}, \ldots, Z_\nu^{(m)}$ disjunktni po parovima i da su sledeće nejednakosti tačne:

$$r^{(m+1)} < \frac{41n(n-\mu)(r^{(m)})^4}{(\rho^{(m)})^3}, \tag{5.20}$$

$$r^{(m+1)} < \frac{1}{4}\,r^{(m)}, \tag{5.21}$$

$$\rho^{(m)} > 5(n-\mu)r^{(m)}. \tag{5.22}$$

Zapazimo da poslednja nejednakost (5.22) znači da sva tvrđenja Lema 5.1 i 5.2 važe za svako $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Zbog jednostavnosti, stavimo da je $\omega = 1/4$. Tada je

$$1 + 4(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^m) - \omega^m < 1 + \frac{4\omega}{1-\omega} = \frac{7}{3}. \tag{5.23}$$

Sukcesivnom primenom relacija (5.17) i (5.21) dobijamo

$$\begin{aligned}
\rho^{(m)} &> \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)} - 3\omega r^{(m-1)} = \rho^{(m-1)} - r^{(m-1)}(1+3\omega)\\
&> \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)} - 3\omega r^{(m-2)} - \omega r^{(m-2)}(1+3\omega)\\
&= \rho^{(m-2)} - r^{(m-2)}(1 + 4\omega + 4\omega^2 - \omega^2)\\
&\;\vdots\\
&> \rho^{(0)} - r^{(0)}\Big(1 + 4\omega + 4\omega^2 + \cdots + 4\omega^m - \omega^m\Big)\\
&> \rho^{(0)} - \frac{7}{3}\,r^{(0)},
\end{aligned}$$

gde smo koristili (5.23). Na osnovu poslednje nejednakosti i (5.20) imamo da je

$$r^{(m+1)} < \frac{41n(n-\mu)(r^{(m)})^4}{\left(\rho^{(0)} - \frac{7}{3}\, r^{(0)}\right)^3}.$$

Dakle, tvrđenje 2° Teoreme 5.1 važi. Poslednja nejednakost ujedno pokazuje da je red konvergencije inkluzivnog metoda (5.5) jednak četiri. □

5.3 Numerički primeri za osnovni metod

Inkluzivni metod (5.5) smo testirali na više primera, od kojih ćemo ovde dati dva.

Primer 5.1 Metod (5.5) je primenjen na nalaženje simultanih aproksimacija nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = z^{18} &+ (2-2i)z^{17} - 14z^{16} - (18-26i)z^{15} + (80-12i)z^{14} + (26-118i)z^{13} \\ &-(238-136i)z^{12} + (146+182i)z^{11} + (307-476i)z^{10} - (380-160i)z^9 \\ &+(236+320i)z^8 + (32-712i)z^7 - (804-880i)z^6 + (512+96i)z^5 \\ &-(80+832i)z^4 - (1024-1152i)z^3 - (448-256i)z^2 \\ &-(1024-512i)z + (-768+1024i). \end{aligned}$$

Tačne nule polinom su -1, -2, $1 \pm i$, $\pm i$, 2, $-2+i$, višestrukosti 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, respektivno. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$, sa centrima

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = -1.1 + 0.1i, & z_2^{(0)} = -2.2 - 0.1i, & z_3^{(0)} = 1.1 + 1.2i, \\ z_4^{(0)} = 0.9 - 1.1i, & z_5^{(0)} = -0.1 + 0.8i, & z_6^{(0)} = 0.1 - 1.1i, \\ z_7^{(0)} = 2.2 - 0.1i, & z_8^{(0)} = -2.2 + 0.9i. & \end{array}$$

Dobijeni poluprečnici inkluzivnih diskova u prve tri iteracije dati su u Tabeli 5.1.

Primer 5.2 U cilju nalaženja nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = z^{20} &+ 4z^{19} - 20z^{18} - 72z^{17} + 252z^{16} + 664z^{15} - 2092z^{14} - 3440z^{13} \\ &+12450z^{12} + 9520z^{11} - 51476z^{10} - 1264z^9 + 142360z^8 - 82488z^7 \\ &-228612z^6 + 279376z^5 + 117237z^4 - 337300z^3 + 77400z^2 \\ &+135000z - 67500 \end{aligned}$$

primenjen je isti metod.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
$z_1 = -1$	$4.04(-2)$	$4.97(-9)$	$6.35(-40)$
$z_2 = -2$	$9.86(-2)$	$1.30(-7)$	$6.94(-34)$
$z_3 = 1 + i$	$1.14(-1)$	$3.53(-7)$	$2.91(-34)$
$z_4 = 1 - i$	$1.14(-1)$	$1.04(-7)$	$1.49(-34)$
$z_5 = i$	$6.37(-1)$	$1.01(-6)$	$8.11(-33)$
$z_6 = -i$	$9.52(-2)$	$4.46(-8)$	$4.29(-37)$
$z_7 = 2$	$2.40(-2)$	$7.33(-9)$	$6.28(-40)$
$z_8 = -2 + i$	$5.98(-1)$	$4.62(-6)$	$6.14(-29)$

Tabela 5.1: Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 5.1

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
$z_1 = -1$	$1.36(-1)$	$1.66(-9)$	$3.17(-40)$
$z_2 = -3$	$8.22(-2)$	$2.60(-8)$	$1.02(-35)$
$z_3 = 1 + i$	$1.68(-1)$	$1.63(-8)$	$2.43(-35)$
$z_4 = 1 - i$	$1.45(-1)$	$1.28(-8)$	$2.35(-36)$
$z_5 = 1$	$5.14(-2)$	$2.55(-9)$	$2.96(-40)$
$z_6 = -2 + i$	$1.50(-1)$	$6.20(-7)$	$1.23(-33)$
$z_7 = -2 - i$	$1.98(-1)$	$1.51(-7)$	$2.55(-34)$
$z_8 = 2 + i$	$4.07(-1)$	$5.03(-6)$	$2.87(-30)$
$z_9 = 2 - i$	$7.76(-2)$	$8.18(-8)$	$1.34(-35)$

Tabela 5.2: Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 5.2

Tačne nule ovog polinoma su -1, -3, $1 \pm i$, 1, $\pm 2 \pm i$, višestrukosti 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, respektivno. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$, sa centrima

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = -1.1 + 0.2i, & z_2^{(0)} = -2.8 - 0.1i, & z_3^{(0)} = 1.1 + 1.1i, \\ z_4^{(0)} = 0.9 - 1.1i, & z_5^{(0)} = 0.8 - 0.1i, & z_6^{(0)} = -1.9 + 1.2i, \\ z_7^{(0)} = -1.8 - 1.1i, & z_8^{(0)} = 1.9 + 0.9i, & z_9^{(0)} = 1.9 - 1.1i. \end{array}$$

Dobijeni poluprečnici inkluzivnih diskova u prve tri iteracije dati su u Tabeli 6.2.

5.4 Ubrzani inkluzivni metod sa korekcijama

Uvešćemo sledeće vektore:

$\boldsymbol{Z}^{(m)} = \left(Z_1^{(m)}, \ldots, Z_\nu^{(m)}\right)$ (tekuće aproksimacije),

$$\boldsymbol{Z}_N^{(m)} = \Big(Z_{N,1}^{(m)},\dots,Z_{N,\nu}^{(m)}\Big),\ Z_{N,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - v(z_i^{(m)}) \quad \text{(Schröderove aproksimacije)},$$
$$\boldsymbol{Z}_H^{(m)} = \Big(Z_{H,1}^{(m)},\dots,Z_{H,\nu}^{(m)}\Big),\ Z_{H,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - h(z_i^{(m)}) \quad \text{(Halleyeve aproksimacije)},$$

gde su

$$v(z_i) = \mu_i \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} \quad \text{i} \quad h(z_i) = \frac{P(z_i)}{\Big(\dfrac{1+1/\mu_i}{2}\Big)P'(z_i) - \dfrac{P(z_i)P''(z_i)}{2P'(z_i)}}.$$

Dalje povećanje brzine konvergencije iterativnih metoda (5.5) može se postići korišćenjem Schröderove ili Halleyeve korekcije, na sličan način kao u slučaju metoda za proste nule. U njihovoj konstrukciji podrazumevaćemo izbor početnih diskova da $Z_1^{(0)},\dots,Z_\nu^{(0)}$ sadrže nule $\zeta_1,\dots,\zeta_\nu$, na takav način da svaki disk $Z_i^{(0)} - v(\mathrm{mid}\,(Z_i^{(0)}))$ ili $Z_i^{(0)} - h(\mathrm{mid}\,(Z_i^{(0)}))$ takođe sadrži nulu ζ_i $(i \in \mathbb{I}_\nu)$. Ovo je predmet razmatranja sledećeg tvrđenja gde su, zbog jednostavnosti, izostavljeni iterativni indeksi. Takođe, pisaćemo $v_i = v(z_i)$ i $h_i = h(z_i)$.

Lema 5.3 *Neka su $Z_1,\dots,Z_\nu$ inkluzivni diskovi nula $\zeta_1,\dots,\zeta_\nu$, $\zeta_i \in Z_i$, i neka je $z_i = \mathrm{mid}\ Z_i$, $r_i = \mathrm{rad}\ Z_i$. Ako su inkluzivni diskovi $Z_1,\dots,Z_\nu$ tako izabrani da važi nejednakost*

$$\rho > 5(n-\mu)r, \tag{5.24}$$

tada ze svako $(i \in \mathbb{I}_\nu)$ važi

(i) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{N,i} := Z_i - v_i$;

(ii) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{H,i} := Z_i - h_i$.

Dokaz. Za (i): Kao i u slučaju prostih nula, dovoljno je da dokažemo implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - v_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Na osnovu nejednakosti trougla

$$|z_i - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - r_j \ge \rho,$$

nalazimo

$$|\Sigma_{\lambda,i}| = \Big|\sum_{j\ne i} \mu_j (z_i - \zeta_j)^{-\lambda}\Big| \le \sum_{j\ne i} \mu_j |z_i - \zeta_j|^{-\lambda} \le \frac{n-\mu_i}{\rho^\lambda}, \quad (\lambda = 1,2). \tag{5.25}$$

Prema (5.24) i (5.25) (za $\lambda = 1$) dobijamo

$$r_i < \frac{\rho}{5(n-\mu)} \le \frac{1}{5|\Sigma_{1,i}|},$$

odakle sledi

$$\frac{r_i|\Sigma_{1,i}|}{\mu_i - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{4}.$$

Kako je $|\varepsilon_i| = |z_i - \zeta_i| \le r_i$, korišćenjem poslednje nejednakosti, imamo da je

$$|z_i - v_i - \zeta_i| = |\varepsilon_i - v_i| = |\varepsilon_i - \mu_i/\delta_{1,i}| = |\varepsilon_i|^2 \left|\frac{\Sigma_{1,i}}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}}\right| \le \frac{r_i^2|\Sigma_{1,i}|}{\mu_i - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{4}\, r_i < r_i.$$

Za (ii): Treba pokazati implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - h_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Pođimo od

$$\begin{aligned} h_i = \frac{2\delta_{1,i}}{\delta_{1,i}^2/\mu_i + \delta_{2,i}} &= \frac{2\sum\limits_{j=1}^{\nu} \dfrac{\mu_j}{z_i - \zeta_j}}{\dfrac{1}{\mu_i}\Big(\sum\limits_{j=1}^{\nu} \dfrac{\mu_j}{z_i - \zeta_j}\Big)^2 + \sum\limits_{j=1}^{\nu} \dfrac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^2}} \\ &= \frac{2(\mu_i/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})}{(\mu_i/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})^2/\mu_i + \mu_i/\varepsilon_i^2 + \Sigma_{2,i}} \\ &= \frac{2\varepsilon_i(\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Korišćenjem (5.26) dobijamo

$$\begin{aligned} z_i - h_i - \zeta_i &= \varepsilon_i - \frac{2\varepsilon_i(\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})} \\ &= \frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}, \end{aligned}$$

tako da je

$$\begin{aligned} |z_i - h_i - \zeta_i| &= \left|\frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}\right| \\ &< \frac{\dfrac{1}{\mu_i}\Big(\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)^2 + \dfrac{n-\mu_i}{\rho^2}}{2\mu_i - 2\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\, r_i - \dfrac{1}{\mu_i}\Big(\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)^2 r_i^2 - \dfrac{n-\mu_i}{\rho^2}\, r_i^2}\, r_i^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{(n-\mu_i)n\,r_i^2}{\mu_i\rho^2}}{\dfrac{8}{5}-\dfrac{n(n-\mu_i)\,r_i^2}{\mu_i\rho^2}}\,r_i < \frac{\dfrac{n}{25\mu_i(n-\mu_i)}}{\dfrac{8}{5}-\dfrac{n}{25\mu_i(n-\mu_i)}}\,r_i < \frac{3}{77}\,r_i < r_i. \quad \square$$

Polazeći od nula-relacije (5.3) možemo konstruisati total-step inkluzivne metode sa Schröderovom i Halleyevom korekcijom. Proučavanje konvergencije ovih metoda ćemo obaviti istovremeno. U tom cilju oba metoda ćemo predstaviti u jedinstvenom obliku uz korišćenje dodatnog indeksa $k = 1$ (za Schröderovu korekciju) i $k = 2$ (za Halleyevu korekciju). Kao i kod prostih nula, odgovarajuće vektore aproksimacija ćemo označiti sa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}^{(1)} &= (Z_1^{(1)}, \dots, Z_\nu^{(1)}) = (Z_{N,1}, \dots, Z_{N,\nu}), \\ \boldsymbol{Z}^{(2)} &= (Z_1^{(2)}, \dots, Z_\nu^{(2)}) = (Z_{H,1}, \dots, Z_{H,\nu}). \end{aligned}$$

Obe korekcije v_i i h_i ćemo takođe označiti sa $C_{k,i}$. Zbog kraćeg pisanja, izostavićemo iterativne indekse u m-toj iteraciji i sve veličine u $(m+1)$-oj iteraciji ćemo označiti dodatnim simbolom $\widehat{\ }$.

Sada možemo da oba metoda prikažemo u istom obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mu_i u_i - B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})\mathrm{INV}_2\Big(2(1 - u_i\, S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)})^2\Big) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu), \tag{5.27}$$

gde smo uveli diskove

$$\begin{aligned} S_{\lambda,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} (\mathrm{INV}_1(z_i - Z_j + C_{k,j}))^\lambda \quad (\lambda = 1, 2), \\ B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= u_i^2\left(\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i(S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))\right). \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{Z}^{(k)} = (Z_{k,1}, \dots, Z_{k,\nu})$ $(k = 1, 2)$ je, kao i kod prostih nula, vektor inkluzivnih diskova.

5.5 Neke ocene

Pre razmatranja osobina konvergencije simultanih intervalnih metoda (5.27) i početnih uslova za njihovu konvergenciju, dokazaćemo neke neophodne leme. Zbog preglednosti koristićemo sledeće skraćenice:

$$\chi_{ij}^{(k)} = \text{mid }(z_i - Z_j + C_{k,j}) = z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1},$$
$$\xi_j^{(1)} = -\frac{\Sigma_{1,j}}{\mu_j + \varepsilon_j \Sigma_{1,j}}, \quad \xi_j^{(2)} = -\frac{\Sigma_{1,j}^2/\mu_j + \Sigma_{2,j}}{2\mu_j + 2\varepsilon_j \Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2/\mu_j + \Sigma_{2,j})},$$
$$\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j)}, \quad g_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}}, \quad s_{\lambda,i}^{(k)} = \sum_{j \neq i} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^\lambda \quad (\lambda = 1, 2),$$
$$q_i^{(k)} = 2(1 - u_i s_{1,i}^{(k)})^2, \quad d_i^{(k)} = \frac{1}{q_i^{(k)}}, \quad \eta_i^{(k)} = \frac{9(n-\mu_i)|\varepsilon_i| r}{\rho^2},$$
$$b_i^{(k)} = \mu_i u_i \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i \frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i^2\Big((s_{1,i}^{(k)})^2 - \mu_i s_{2,i}^{(k)}\Big)\Big).$$

Prvo ćemo dokazati sledeća dva tvrđenja:

Lema 5.4 *Neka važi nejednakost* (5.24). *Tada je*

(i) $|u_i| < \dfrac{5}{4}\dfrac{|\varepsilon_i|}{\mu_i} \le \dfrac{5}{4}\dfrac{r_i}{\mu_i}$;

(ii) $|1 - u_i s_{1,i}^{(k)}| < \dfrac{49}{39}$;

(iii) $|q_i^{(k)}| > \dfrac{4}{5}$;

(iv) $\eta_i^{(k)} < \dfrac{9}{50}$;

(v) $|b_i^{(k)}| < \dfrac{26(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^2}{5\rho}$;

(vi) $|d_i^{(k)}| < \dfrac{5}{4}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$u_i = \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{1}{\dfrac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}} = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i\Big(1 + \dfrac{\varepsilon_i \Sigma_{1,i}}{\mu_i}\Big)}, \tag{5.28}$$

ocenjujemo korišćenjem nejednakosti $|\varepsilon_i| \le r_i$, (5.24) i (5.25) (za $\lambda = 1$) da je

$$|u_i| = \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big|1 + \dfrac{\varepsilon_i \Sigma_{1,i}}{\mu_i}\Big|} \le \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big(1 - \dfrac{|\varepsilon_i||\Sigma_{1,i}|}{\mu_i}\Big)} \le \frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i\Big(1 - \dfrac{(n-\mu_i)r}{\mu_i \rho}\Big)} < \frac{5}{4}\frac{|\varepsilon_i|}{\mu_i} \le \frac{5}{4}\frac{r_i}{\mu_i}.$$

Za (ii): Lako je pokazati da je

$$z_i - Z_j + C_{k,j} = \{z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)} \varepsilon_j^{k+1}; r_j\},$$

pa na osnovu nejednakosti (5.24) i (5.25) dobijamo

$$|\xi_j^{(1)}| \le \frac{|\Sigma_{1,j}|}{\mu_j - |\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|} \le \frac{\dfrac{n-\mu_j}{\rho}}{\mu_j - \dfrac{(n-\mu_j)r}{\rho}} < \frac{5(n-\mu_j)}{4\rho}$$

i

$$\begin{aligned} |\xi_j^{(2)}| &\le \frac{|\Sigma_{1,j}|^2/\mu_j + |\Sigma_{2,j}|}{2\mu_j - 2|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}| - |\varepsilon_j|^2(|\Sigma_{1,j}|^2/\mu_j + |\Sigma_{2,j}|)} \\ &\le \frac{\dfrac{(n-\mu_j)n}{\mu_j\rho^2}}{2\mu_j - 2r\dfrac{n-\mu_j}{\rho} - r^2\dfrac{(n-\mu_j)n}{\mu_j\rho^2}} < \frac{50(n-\mu_j)n}{77\mu_j\rho^2}, \end{aligned}$$

za svako $j \in \mathbb{I}_\nu$. Na osnovu toga nalazimo

$$|\chi_{ij}^{(1)}| = |z_i - \zeta_j + \xi_j^{(1)}\varepsilon_j^2| \ge |z_i - \zeta_j| - |\xi_j^{(1)}||\varepsilon_j|^2 > \rho - \frac{5(n-\mu_j)r^2}{4\rho} > \rho - \frac{r}{4} \quad (5.29)$$

i

$$|\chi_{ij}^{(2)}| = |z_i - \zeta_j + \xi_j^{(2)}\varepsilon_j^3| \ge |z_i - \zeta_j| - |\xi_j^{(2)}||\varepsilon_j|^3 > \rho - \frac{50n(n-\mu_j)r^3}{77\mu_j\rho^2} > \rho - \frac{3}{77}r > \rho - \frac{r}{4}. \quad (5.30)$$

Dakle, na osnovu nejednakosti (5.29) i (5.30), ocenjujemo za obe korekcije

$$|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j) > \Big(\rho - \frac{r}{4}\Big)\Big(\rho - \frac{5r}{4}\Big) = \rho^2\Big(1 - \frac{r}{4\rho}\Big)\Big(1 - \frac{5r}{4\rho}\Big) > \frac{3}{4}\rho^2. \quad (5.31)$$

Korišćenjem (5.31) dobijamo

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j)} < \frac{4r}{3\rho^2},$$

odakle je

$$\sum_{j \ne i} \mu_j \gamma_{ij}^{(k)} < \frac{4(n-\mu_i)r}{3\rho^2}. \quad (5.32)$$

Slično, iz (5.29) i (5.30) nalazimo

$$|g_{ij}^{(k)}| = \frac{1}{|\chi_{ij}^{(k)}|} < \frac{1}{\rho - r/4} < \frac{40}{39\rho}. \tag{5.33}$$

Korišćenjem nejednakosti (5.33) imamo

$$|s_{1,i}^{(k)}| \leq \sum_{j \neq i} \mu_j |g_{ij}^{(k)}| < \frac{40(n-\mu_i)}{39\rho} \tag{5.34}$$

i

$$|s_{2,i}^{(k)}| \leq \sum_{j \neq i} \mu_j |g_{ij}^{(k)}|^2 < \Big(\frac{40}{39}\Big)^2 \frac{(n-\mu_i)}{\rho^2}. \tag{5.35}$$

Na osnovu (5.24), (5.34) i tvrđenja (i) konačno dobijamo

$$|1 - u_i s_{1,i}^{(k)}| \leq 1 + |u_i|\,|s_{1,i}^{(k)}| < 1 + \frac{5}{4}\,\frac{r}{\mu_i}\,\frac{40(n-\mu_i)}{39\rho} < \frac{49}{39}.$$

Za (iii): Slično kao u dokazu tvrđenja (i) i (ii) ocenjujemo

$$\begin{aligned} |q_i^{(k)}| &= |2(1 - u_i s_{1,i}^{(k)})^2| = |2(1 - 2u_i s_{1,i}^{(k)} + u_i^2 (s_{1,i}^{(k)})^2| \geq 2 - 4|u_i||s_{1,i}^{(k)}| - 2|u_i|^2 |s_{1,i}^{(k)}|^2 \\ &> 2 - \frac{200(n-\mu_i)r}{39\mu_i\rho} - \frac{25}{8}\Big(\frac{40}{39}\Big)^2 \frac{(n-\mu_i)^2 r^2}{\mu_i^2 \rho^2} > 2 - \frac{40}{39} - \frac{1}{8}\Big(\frac{40}{39}\Big)^2 > \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Za (iv): Korišćenjem (5.24) nalazimo da je

$$\eta_i^{(k)} = \frac{9(n-\mu_i)|\varepsilon_i| r}{\rho^2} < \frac{9}{25(n-\mu)} < \frac{9}{50}.$$

Za (v): Kako je

$$\delta_{1,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}, \quad \delta_{2,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}, \quad u_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}}, \tag{5.36}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \mu_i(1-\mu_i) + \mu_i^2 u_i^2 (\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}) \\ &= \mu_i(1-\mu_i) + \frac{\mu_i^2 \varepsilon_i^2}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2}\Big[\Big(\frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big)^2 - \Big(\frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}\Big)\Big] \\ &= \frac{2\mu_i^2 \varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2 \mu_i \Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2 \varepsilon_i^2 \Sigma_{2,i}}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2}. \end{aligned}$$

Na osnovu toga i jednakosti

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = u_i(\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i}),$$

centar diska $B_i^{(k)}$ može se prikazati u obliku

$$b_i^{(k)} = u_i\left(\frac{2\mu_i^2\varepsilon_i\Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2\mu_i\Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2\varepsilon_i^2\Sigma_{2,i}}{(\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i})^2} - \mu_i u_i^2((s_{1,i}^{(k)})^2 - \mu_i s_{2,i}^{(k)})\right).$$

Dalje, korišćenjem nejednakosti (5.24) i (5.25) ocenjujemo

$$\begin{aligned}|2\mu_i^2\varepsilon_i\Sigma_{1,i}+\varepsilon_i^2\mu_i\Sigma_{1,i}^2-\mu_i^2\varepsilon_i^2\Sigma_{2,i}| &\le 2\mu_i^2\frac{(n-\mu_i)|\varepsilon_i|}{\rho}+\mu_i|\varepsilon_i|r\frac{(n-\mu_i)^2}{\rho^2}+\mu_i|\varepsilon_i|r\frac{n-\mu_i}{\rho}\\ &< \frac{23}{10}\frac{(n-\mu_i)\mu_i^2|\varepsilon_i|}{\rho} \qquad (5.37)\end{aligned}$$

i

$$|\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i}| \ge \mu_i - |\varepsilon_i\Sigma_{1,i}| \ge \mu_i\Big(1 - \frac{r(n-\mu_i)}{\mu_i\rho}\Big) > \frac{4}{5}\,\mu_i. \qquad (5.38)$$

Koristeći granice

$$|s_{1,i}^{(k)}| \le \frac{n-\mu_i}{\rho} \quad \text{i} \quad |s_{2,i}^{(k)}| \le \frac{n-\mu_i}{\rho^2}$$

i nejednakosti (5.24), nalazimo

$$|\mu_i u_i^2((s_{1,i}^{(k)})^2 - \mu_i s_{2,i}^{(k)})| < \frac{25}{16}\Big(\frac{40}{39}\Big)^2\frac{|\varepsilon_i|^2}{\mu_i^2}\,\mu_i\Big(\frac{(n-\mu_i)^2}{\rho^2} + \mu_i\frac{n-\mu_i}{\rho^2}\Big) < \frac{1}{2}\frac{(n-\mu_i)|\varepsilon_i|}{\rho}. \qquad (5.39)$$

Na osnovu dobijenih ocena (5.37), (5.38) i (5.39) i tvrđenja (i) dobijamo granicu za centar diska $B_i^{(k)}$

$$|b_i^{(k)}| < \frac{26(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^2}{5\rho}.$$

Za (vi): Iz tvrđenja (iii) direktno dobijamo

$$|d_i^{(k)}| = \frac{1}{|q_i^{(k)}|} < \frac{5}{4}. \quad \square$$

Lema 5.5 *Neka važi nejednakost* (5.24). *Tada važe sledeće inkluzije:*

(i) $S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subseteq \left\{s_{1,i}^{(k)}; \frac{4(n-\mu_i)r}{3\rho^2}\right\}$;

(ii) $S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{ s_{2,i}^{(k)}; \dfrac{3(n-\mu_i)r}{\rho^3} \right\}$;

(iii) $S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{ (s_{1,i}^{(k)})^2; \dfrac{3(n-\mu_i)^2 r}{\rho^3} \right\}$;

(iv) $B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{ b_i^{(k)}; \dfrac{6n(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3} \right\}$.

Dokaz. Za (i): Primenjujući centralnu inverziju (1.56) i operacije kružne aritmetike, dobijamo na osnovu (5.32)

$$\begin{aligned} S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j}{z_i - Z_j + C_{k,j}} = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{\{\chi_{ij}^{(k)}; r_j\}} \\ &= \sum_{j\neq i} \mu_j \{g_{ij}^{(k)}; \gamma_{ij}^{(k)}\} \subset \left\{ s_{1,i}^{(k)}; \frac{4(n-\mu_i)r}{3\rho^2} \right\}. \end{aligned}$$

Za (ii): Korišćenjem nejednakosti (5.24), (5.32) i (5.33) nalazimo inkluziju

$$\begin{aligned} S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{j\neq i} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - Z_j + C_{k,j}} \right)^2 = \sum_{j\neq i} \mu_j \{g_{ij}^{(k)}; \gamma_{ij}^{(k)}\}^2 \\ &= \sum_{j\neq i} \mu_j \Big\{ (g_{ij}^{(k)})^2; 2|g_{ij}^{(k)}|\, \gamma_{ij}^{(k)} + (\gamma_{ij}^{(k)})^2 \Big\} \subset \left\{ \sum_{j\neq i} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2; \frac{3(n-\mu_i)r}{\rho^3} \right\}. \end{aligned}$$

Za (iii): Polazeći od tvrđenja (i), uz primenu definicije (1.53) i nejednakosti (5.24) i (5.34), imamo

$$S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \subset \left\{ (s_{1,i}^{(k)})^2; 2|s_{1,i}^{(k)}| \frac{4(n-\mu_i)r}{3\rho^2} + \Big(\frac{4(n-\mu_i)r}{3\rho^2} \Big)^2 \right\} \subset \left\{ (s_{1,i}^{(k)})^2; \frac{3(n-\mu_i)^2 r}{\rho^3} \right\}.$$

Za (iv): Na osnovu (5.24) i tvrđenja (i) Leme 5.4 i tvrđenja (ii) i (iii) Leme 5.5 dobijamo

$$\begin{aligned} B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \mu_i u_i \Big(1 - \mu_i + \mu_i u_i \frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u_i^2 ((S_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))^2 - \mu_i S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)})) \Big) \\ &\subset \left\{ b_i^{(k)}; \frac{6n(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3} \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

5.6 Analiza konvergencije poboljšanog metoda

Za total-step metod (5.27) važi sledeća teorema.

Teorema 5.2 *Pretpostavimo da su početni diskovi* $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ *tako izabrani da je* $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$ *i da važi nejednakost*

$$\rho^{(0)} > 5(n-\mu)r^{(0)}. \tag{5.40}$$

Tada je inkluzivni metod (5.27) *konvergentan i važe sledeća tvrđenja za svako* $i \in \mathbb{I}_\nu$ *i* $m = 1, 2, \ldots$:

1° $\rho^{(m)} > 5(n-\mu)r^{(m)}$;

2° $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$;

3° *donja granica R-reda konvergencije intervalnog metoda* (5.27) *je:*

$$O_R(5.27) \geq k+4.$$

Dokaz. Prvo, uočimo da početni uslov (5.40) obezbeđuje da su početni diskovi $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ disjunktni po parovima. Zaista, za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$ imamo

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| > \rho^{(0)} > 5(n-\mu)r^{(0)} > 2r^{(0)} \geq r_i^{(0)} + r_j^{(0)},$$

što znači da je $Z_i^{(0)} \cap Z_j^{(0)} = \emptyset$ (na osnovu (1.51)).

Tvrđenja Teoreme 5.2 ćemo izvesti matematičkom indukcijom. U nastavku ćemo često koristiti nejednakost (5.24) u obliku

$$\frac{r}{\rho} < \frac{1}{5(n-\mu)} \leq \frac{1}{10}. \tag{5.41}$$

Prvo, za $m = 0$ razmotrimo početni uslov (5.40). Na osnovu Leme 5.3, direktno dobijamo implikaciju

$$\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_i^{(k)} := Z_i - C_{k,i} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ k = 1, 2).$$

Takođe je neophodno da dokažemo da su novi inkluzivni diskovi $\boldsymbol{Z}^{(k)}$, $k = 1, 2$, takođe disjunktni po parovima. Korišćenjem granica iz dokaza Leme 5.3 nalazimo

$$|v_i| = \left|\frac{\mu_i \varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \varSigma_{1,i}}\right| \leq \frac{r_i}{1 - r_i|\varSigma_{1,i}|/\mu_i} < \frac{5}{4}\, r_i < 2r_i \leq 2r$$

i

$$
\begin{aligned}
|h_i| &= \left|\frac{2\varepsilon_i(\mu_i+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{2\mu_i+2\varepsilon_i\Sigma_{1,i}+\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i+\Sigma_{2,i})}\right| \le \frac{1}{\left|1+\dfrac{\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i+\Sigma_{2,i})}{2(\mu_i+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})}\right|}\, r_i \\
&< \frac{1}{1-\dfrac{3}{80}}\, r_i = \frac{80}{77}\, r_i < 2r_i \le 2r,
\end{aligned}
$$

jer je

$$
\left|\frac{\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i+\Sigma_{2,i})}{2(\mu_i+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})}\right| < \frac{r^2\Big(\dfrac{1}{\mu_i}\Big(\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)^2+\dfrac{n-\mu_i}{\rho^2}\Big)}{2\Big(\mu_i-r\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)} = \frac{\dfrac{(n-\mu_i)nr^2}{\mu_i\rho^2}}{2\Big(\mu_i-\dfrac{(n-\mu_i)r}{\rho}\Big)} < \frac{3}{80}.
$$

Na osnovu toga dobijamo

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{mid} Z_i^{(k)} - \operatorname{mid} Z_j^{(k)}| &= |z_i - C_{k,i} - z_j + C_{k,j}| \ge |z_i - z_j| - |C_{k,i}| - |C_{k,j}| \\
&> \rho - 4r > 5(n-\mu)r - 4r \ge r_i + r_j.
\end{aligned}
$$

Dakle, $Z_i^{(k)} \cap Z_j^{(k)} = \emptyset \quad (i \ne j)$ zbog (1.51). Poslednja nejednakost je neophodna da bi inkluzivni metod (5.27) bio dobro definisan.

Posmatrajmo disk u imeniocu. Pomoću definicije (1.53), nejednakosti (5.24) i (5.34) i tvrđenja (i) i (ii) Leme 5.4 i (i) Leme 5.5, imamo

$$
\begin{aligned}
Q_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \{q_i^{(k)}; \eta_i^{(k)}\} = 2(1-u_iS_{1,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}))^2 \subset 2\Big\{1-u_is_{1,i}^{(k)}; \frac{5(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{3\rho^2}\Big\}^2 \\
&\subset 2\Big\{(1-u_is_{1,i}^{(k)})^2; 2|1-u_is_{1,i}^{(k)}|\,\frac{5(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{3\rho^2}+\frac{25(n-\mu_i)^2|\varepsilon_i|^2r^2}{9\rho^4}\Big\} \\
&\subset \Big\{q_i^{(k)}; \frac{9(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Iz poslednje inkluzije i tvrđenja (iii) i (iv) Leme 5.4 nalazimo

$$
|q_i^{(k)}| > \frac{4}{5} > \frac{9}{50} > \eta_i^{(k)}
$$

i zaključujemo da disk Q_i ne sadrži nulu, tako da je iterativni proces (5.27) dobro definisan. U nastavku ćemo naći inverz dobijenog diska Q_i korišćenjem definicije (1.56),

$$
Q_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})^{I_c} = \{q_i^{(k)}; \eta_i^{(k)}\}^{I_c} = \Big\{d_i^{(k)}; \frac{\eta_i^{(k)}}{|q_i^{(k)}|(|q_i^{(k)}|-\eta_i^{(k)})}\Big\} =: D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}).
$$

Korišćenjem tvrđenja (iii) i (iv) Leme 5.4 ocenjujemo poluprečnik dobijenog diska $D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$,

$$\operatorname{rad} D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) = \frac{\eta_i^{(k)}}{|q_i^{(k)}|(|q_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)})} < \frac{\frac{9(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}}{4/5(4/5 - 9/50)} < \frac{19(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{\rho^2}.$$

Za proizvod diskova $D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$ i $B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)})$, na osnovu definicije (1.53) i dobijenih granica za $|d_i^{(k)}|$ i $|b_i^{(k)}|$ (tvrđenja (v) i (vi) Leme 5.4), imamo

$$\begin{aligned} D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \cdot B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) &\subset \left\{ d_i^{(k)}; \frac{19(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{\rho^2} \right\} \cdot \left\{ b_i^{(k)}; \frac{6n(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3} \right\} \\ &\subset \left\{ d_i^{(k)} b_i^{(k)}; \frac{76n(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{\rho^3} \right\}. \end{aligned}$$

Intervalni metod (5.27) se može prikazati u obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mu_i u_i - D_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}) \cdot B_i(\boldsymbol{Z}^{(k)}), \tag{5.42}$$

odakle nalazimo da je

$$\hat{r} = \mathcal{O}(|\varepsilon|^3 r) \tag{5.43}$$

i

$$\widehat{r} < \frac{76n(n-\mu)r^4}{\rho^3}. \tag{5.44}$$

Iz nejednakosti (5.44) sledi

$$\hat{r} < 76n(n-\mu)\frac{r^3}{\rho^3}\, r < \frac{76n}{125(n-\mu)^2}\, r < \frac{1}{2}\, r. \tag{5.45}$$

Za centar $\hat{z}_i$ diska $\hat{Z}_i$ dobijamo iz (5.42)

$$\hat{z}_i = \operatorname{mid} \widehat{Z}_i = z_i - \mu_i u_i - d_i^{(k)} b_i^{(k)}, \tag{5.46}$$

pa je

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \mu_i u_i - d_i^{(k)} b_i^{(k)}, \tag{5.47}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \mu_i u_i - \frac{u_i \dfrac{2\mu_i^2 \varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2 \mu_i \Sigma_{1,i}^2 - \mu_i^2 \varepsilon_i^2 \Sigma_{2,i}}{(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^2} - \mu_i u_i^3 ((s_{1,i}^{(k)})^2 - \mu_i s_{2,i}^{(k)})}{2(1 - u_i s_{1,i}^{(k)})^2} \\ &= \varepsilon_i - \mu_i u_i - \frac{2\mu_i^2 \varepsilon_i^2 \Sigma_{1,i} + \mu_i \varepsilon_i^3 (\Sigma_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2) - \mu_i^2 \varepsilon_i^3 (\Sigma_{2,i} - s_{2,i}^{(k)})}{2(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})^3 (1 - u_i s_{1,i}^{(k)})^2}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Ispitajmo sada razliku

$$\Sigma_{1,i} - s_{1,i}^{(k)} = \sum_{j \neq i} \mu_j \Big(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - g_{ij}^{(k)} \Big) = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \xi_j^{(k)} \varepsilon_j^{k+1}}{(z_i - \zeta_j)\chi_{ij}^{(k)}} = \mathcal{O}_M(\alpha \varepsilon^{k+1}),$$

gde je α konstanta. Odavde je

$$\Sigma_{1,i}^2 - (s_{1,i}^{(k)})^2 = (\Sigma_{1,i} - s_{1,i}^{(k)})(\Sigma_{1,i} + s_{1,i}^{(k)}) = \mathcal{O}_M(\alpha' \varepsilon^{k+1})$$

i

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2,i} - \sum_{j \neq i} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2 &= \sum_{j \neq i} \mu_j \Big(\frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - g_{ij}^{(k)} \Big)^2 \\
&= \sum_{j \neq i} \mu_j \Big(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - g_{ij}^{(k)} \Big)\Big(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + g_{ij}^{(k)} \Big) \\
&= \mathcal{O}_M(\alpha'' \epsilon^{k+1}).
\end{aligned}$$

Pomoću dobijenih ocena i (5.28) dobijamo iz (5.48)

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^3 \mathcal{O}_M(\alpha''' \varepsilon^{k+1}). \tag{5.49}$$

Na osnovu tvrđenja (i), (v) i (vi) Leme 5.4 nalazimo iz (5.46), korišćenjem nejednakosti (5.24),

$$|\hat{z}_i - z_i| = |\mu_i u_i - d_i^{(k)} b_i^{(k)}| < \frac{5}{4}\, r_i + \frac{5}{4} \cdot \frac{26(n - \mu_i)|\varepsilon_i|^2}{5\rho} < \frac{8}{3}\, r_i. \tag{5.50}$$

S obzirom na nejednakosti (5.24), (5.45) i (5.50) imamo

$$\begin{aligned}
|\hat{z}_i - \hat{z}_j| \geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| &> \rho + r_j - \frac{8}{3}\, r_i - \frac{8}{3}\, r_j > 5(n - \mu) r - \frac{13}{3}\, r \\
&> 2\hat{r}\Big[5(n - \mu) - \frac{13}{3} \Big].
\end{aligned}$$

Na osnovu poslednje nejednakosti dobijamo za proizvoljni par indeksa $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| > 2\hat{r} \geq \hat{r}_i + \hat{r}_j,$$

što ukazuje da su diskovi $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_\nu$ disjunktni po parovima. Takođe, za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$ važi

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| - \hat{r}_j > 2\hat{r}\Big[5(n - \mu) - \frac{13}{3} \Big] - \hat{r} > 5(n - \mu)\hat{r}.$$

Dakle,

$$\hat{\rho} > 5(n-\mu)\hat{r}.$$

Na taj način smo dokazali da početni uslov (5.40) dovodi do nejednakosti istog oblika samo za vrednost indeksa $m = 1$. Konkretno, nejednakost (5.45) u obliku $r^{(1)} < r^{(0)}/2$ ukazuje na kontrakciju novih kružnih aproksimacija $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\nu^{(1)}$.

Ponavljajući gornju proceduru i argumentaciju za proizvoljnu vrednost indeksa $m \geq 0$ možemo da izvedemo sve gornje relacije za vrednost indeksa $m+1$. Kako su ove relacije već dokazane za $m = 0$, matematičkom indukcijom zaključujemo da one važe, pod uslovom (5.40), za svako $m \geq 1$. Konkretno, imamo

$$\rho^{(m)} > 5(n-\mu)r^{(m)} \tag{5.51}$$

(tvrđenje 1°) i

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{2}. \tag{5.52}$$

Na osnovu nejednakosti (5.52) zaključujemo da niz poluprečnika $\{r^{(m)}\}$ teži ka nuli, što znači da je inkluzivni metod (5.27) *konvergentan.* Dalje, kako (5.51) važi, sva tvrđenja Lema 5.4 i 5.5 važe za proizvoljno m što znači da je poboljšani metod (5.27) dobro definisan u svakom iterativnom koraku.

Pretpostavimo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$. Tada iz (5.3) i (5.27) dobijamo da $\zeta_i \in Z_i^{(m+1)}$ (na osnovu osobine inkluzivne izotonosti). Kako je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ (pretpostavka teoreme) sledi indukcijom da $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$ i $m = 0, 1, \ldots$ (tvrđenje 2°).

Ostaje da odredimo donju granicu R-reda konvergencije poboljšanog metoda (5.27) (tvrđenje 3°). Nizovi centara $\{z_i^{(m)}\}$ i poluprečnika $\{r_i^{(m)}\}$ diskova $Z_i^{(m)}$ dobijenih metodom (5.27) su međusobno zavisni. Zbog jednostavnosti, kao i u slučaju jednostrukih nula, usvojićemo da je $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$. Na osnovu (5.43) i (5.49) primećujemo da se ovi nizovi ponašaju po sledećim asimptotskim relacijama

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim \left(\varepsilon^{(m)}\right)^{k+4}, \quad r^{(m+1)} \sim \left(\varepsilon^{(m)}\right)^3 r^{(m)}.$$

Iz ovih relacija formiramo R-matricu $P_2 = \begin{bmatrix} k+4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sa spektralnim radijusom $\rho(P_2) = k+4$ i odgovarajućim sopstvenim vektorom $\boldsymbol{x}_\rho = ((k+3)/3, 1) > 0$. Odavde, na osnovu Teoreme 1.7, dobijamo

$$O_R(5.27) \geq \rho\left(P_2\right) = k+4. \quad \square$$

5.7 Numerički primeri za metod sa korekcijama

Da bismo testirali osobine konvergencije predloženog inkluzivnog metoda (5.42) primenićemo ga na rešavanje polinomskih jednačina uz korišćenje centralne inverzije (1.56). Da bismo sačuvali sve značajne cifre dobijenih aproksimacija, primenili smo odgovarajuće algoritme korišćenjem programskog paketa *Mathematica* 7.0 sa aritmetikom višestruke preciznosti.

Primer 5.3 Intervalne metode za nalaženje višestrukih nula (5.27) smo primenili na određivanje nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = {} & z^{15} - (8-3i)z^{14} + (28-24i)z^{13} - (58-86i)z^{12} + (81-190i)z^{11} \\ & -(86-287i)z^{10} + (82-278i)z^{9} - (68-72i)z^{8} + (20+320i)z^{7} \\ & +(104-692i)z^{6} - (312-760i)z^{5} + (464-384i)z^{4} - (320+256i)z^{3} \\ & -(128-576i)z^{2} + (384-384i)z - 256. \end{aligned}$$

Tačne nule polinoma su -1, 2, $1 \pm i$, i, $-2i$, višestrukosti 2, 3, 2, 2, 3, 3, respektivno. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$, sa centrima

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = -1.1 + 0.2i, & z_2^{(0)} = 2.2 - 0.1i, & z_3^{(0)} = 0.9 + 1.1i, \\ z_4^{(0)} = 0.8 - 1.1i, & z_5^{(0)} = 0.1 + 1.2i, & z_6^{(0)} = 0.2 - 1.9i. \end{array}$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 5.3.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(5.27), $k = 0$	$4.24(-1)$	$3.82(-7)$	$7.94(-33)$
(5.27), $k = 1$	$2.17(-1)$	$8.97(-9)$	$4.08(-50)$
(5.27), $k = 2$	$2.23(-1)$	$6.56(-11)$	$1.43(-72)$

Tabela 5.3: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 5.3

Primer 5.4 Iste metode kao u Primeru 5.3 smo primenili na primeru polinoma iz Primera 5.1 sa početnim diskovima $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$, sa centrima

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = -1.1 + 0.1i, & z_2^{(0)} = -2.2 - 0.1i, & z_3^{(0)} = 1.1 + 1.2i, \\ z_4^{(0)} = 0.9 - 1.1i, & z_5^{(0)} = -0.1 + 0.9i, & z_6^{(0)} = 0.1 - 1.1i, \\ z_7^{(0)} = 2.2 - 0.1i, & z_8^{(0)} = -2.1 + 0.9i. & \end{array}$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 5.4.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(5.27), $k=0$	$1.17(-1)$	$9.99(-8)$	$1.20(-34)$
(5.27), $k=1$	$2.45(-1)$	$8.12(-9)$	$4.11(-50)$
(5.27), $k=2$	$2.23(-1)$	$7.31(-11)$	$2.29(-73)$

Tabela 5.4: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u Primeru 5.4

Poglavlje 6
Ubrzani metodi Gargantini-Henricijevog tipa

Cilj ovog poglavlja je da predstavi dva metoda višeg reda za simultanu inkluziju prostih ili višestrukih nula polinoma. Predloženi algoritmi poseduju primetno brzu konvergenciju sa samo nekoliko dodatnih numeričkih operacija, što značajno povećava njihovu računsku efikasnost. Rezultati izloženi u ovom poglavlju predstavljaju originalni doprinos i publikovani su u radu [140] (M. S. Petković, M. R. Milošević, D. M. Milošević, *Numerical Algorithms*).

6.1 Algoritam 1: Gargantinijev inkluzivni metod

Prvo ćemo izložiti Gargantini-Henricijev iterativni metod [42] za simultanu inkluziju prostih nula polinoma. Ovaj metod predstavlja osnovu za razvoj nove familije ubrzanih inkluzivnih metoda koji će ovde biti predloženi.

Razmotrimo monični polinom n-tog stepena ($n \geq 3$)

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j), \quad (a_i \in \mathbb{C},\ i \in \{0, \ldots, n-1\})$$

sa prostim (realnim ili kompleksnim) nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, i neka je $u(z) = P(z)/P'(z)$ Newtonova korekcija. Korišćenjem logaritamskog diferenciranja nalazimo

$$\frac{d}{dz}(\log P(z)) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{z - \zeta_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j}.$$

Rešavanjem poslednje jednakosti po ζ_i dobijamo sledeću nula-relaciju:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\dfrac{1}{u(z)} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}}. \tag{6.1}$$

Neka je $\mathbb{I}_n := \{1,\ldots,n\}$ indeksni skup. Pretpostavimo da imamo n disjunktnih diskova $Z_1,\ldots,Z_n$ takvih da je $\zeta_j \in Z_j$ $(j \in \mathbb{I}_n)$. Stavimo da je $z = z_i = \operatorname{mid} Z_i$ u (6.1). Kako je $\zeta_j \in Z_j$ $(j \in \mathbb{I}_n)$, na osnovu osobine inkluzivne izotonosti iz (6.1) sledi

$$\zeta_i \in z_i - \frac{1}{\dfrac{1}{u(z_i)} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-Z_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_n). \tag{6.2}$$

Neka su $Z_1^{(0)},\ldots,Z_n^{(0)}$ početni disjunktni diskovi koji sadrže nule $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, to jest, $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_n$. Relacija (6.2) sugeriše sledeći metod za simultanu inkluziju svih prostih nula polinoma P:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)}}} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0,1,\ldots). \tag{6.3}$$

Ovde su $z_i^{(m)} = \operatorname{mid} Z_i^{(m)}$ centri diskova $Z_i^{(m)}$ u m-toj iteraciji i $u_j^{(m)} = u(z_i^{(m)})$. Dobijeni intervalni metod (6.3) je trećeg reda i razmatran je od strane Gargantini-jeve i Henricija u [42]. Zapazimo da je red konvergencije metoda (6.3) jednak tri, nezavisno od tipa primenjene inverzije diskova. Ovo neće biti slučaj kod inkluzivnih metoda sa korekcijama, što će biti pokazano kasnije.

6.2 Algoritam 2: Inkluzivni metod šestog reda

Intervalni iterativni metod (6.3) se može ubrzati korišćenjem pristupa izloženog u [21] i [120] koji se baziraju na primeni pogodnih korekcija koje proizilaze iz iterativnih metoda za nalaženje prostih nula nelinearnih jednačina. Povećanje računske efikasnosti bi trebalo da bude postignuto uz korišćenje što je manje moguće dodatnih operacija, na primer, korišćenjem već izračunatih vrednosti. Ovaj pristup je ilustrovan na primeru Gargantini-Henricijevog metoda (6.3).

Intervalni inkluzivni metod (6.3) može se ubrzati korišćenjem pogodnih korekcija $C_i^{(m)}$ koje se javljaju u iterativnoj formuli

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - C_i^{(m)} \quad (m = 0,1,\ldots),$$

koja definiše iterativni metod za nalaženje nule. Tada, ako je

$$\zeta_j \in Z_j^{(m)} \implies \zeta_j \in Z_j^{(m)} - C_j^{(m)}$$

za svako $j \in \mathbb{I}_n$ u svakom iterativnom koraku m, inkluzivni metod (6.3) postaje

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathrm{INV}\left(z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + C_j^{(m)}\right)} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots). \tag{6.4}$$

Ovde $\mathrm{INV} \in \{()^{-1}, ()^{\mathbb{I}_c}\}$ označava jednu od inverzija datih sa (1.55) i (1.56).

Na primer, stavljajući $C_j^{(m)} = u_j^{(m)}$ u (6.4), dobija se sledeći inkluzivni metod četvrtog reda sa Newtonovom korekcijom za inkluziju svih prostih nula (podrazumevajući korišćenje centralne inverzije (1.56))

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + u_j^{(m)}}} \quad (i \in \mathbb{I}_n,\ m = 0, 1, \ldots). \tag{6.5}$$

O prednosti korišćenja centralne inverzije nad tačnom videti Primedbu 4.3. Napomenimo još da korišćenje tačne inverzije (1.55) može ubrzati konvergenciju samo do izvesne granice kada se primenjuju korekcije u (6.4). Kao ilustarciju, primetimo da primena tačne inverzije u (6.5) daje R-red $(3 + \sqrt{17})/2 \approx 3.562$, videti [21]. Iz tog razloga, u nastavku ćemo raditi samo sa centralnom inverzijom (1.56), obično bez posebnog naglašavanja.

U ovom odeljku ćemo primeniti korekcije koje se javljaju u dvo-koračnim metodima za rešavanje nelinearnih jednačina. Prvo ćemo razmotriti široku klasu dvo-koračnih metoda u obliku

$$\phi(z) = z - C(z), \quad C(z) = u(z) + h(t)\,\frac{P(z - u(z))}{P'(z)}, \quad t = t(z) = \frac{P(z - u(z))}{P(z)}, \tag{6.6}$$

gde je h najmanje dva-puta diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslove $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$ i $|h''(0)| < \infty$ [145]. Zapazimo da se gornja iterativna formula $z_{m+1} = \phi(z_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ može primeniti ne samo na algebarske polinome, već na bilo koju diferencijabilnu funkciju.

Neka je $C_i^{(m)} = C(z_i^{(m)})$ korekcija definisana sa (6.6) u m-tom iterativnom koraku. Ako je

$$\zeta_j \in Z_j^{(m)} \implies \zeta_j \in Z_j^{(m)} - C_j^{(m)},$$

za svako $j \in \mathbb{I}_n$ u svakom iterativnom koraku m, tada, na osnovu (6.4), možemo konstruisati novi inkluzivni metod sa korekcijama

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + u_j^{(m)} + h(t_j^{(m)})\dfrac{P(z_j^{(m)} - u_j^{(m)})}{P'(z_j^{(m)})}}}, \tag{6.7}$$

gde je $t_j^{(m)} = P(z_j^{(m)} - u_j^{(m)})/P(z_j^{(m)}),\ i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \ldots$. Kao što je ranije pomenuto, primenjena je centralna inverzija u (6.7) i svim iterativnim formulama u nastavku.

Primedba 6.1 Izborom odgovarajuće funkcije $h(t)$ u (6.6) možemo dobiti neke nove i neke poznate iterativne metode za nalaženje prostih nula polinomskih jednačina (videti, na primer, metod (6.7) sa funkcijama (6.34) do (6.39) u Odeljku 6.6). U specijalnom slučaju se dobija samo-proverljivi metod koji je proučavan u [119].

Primedba 6.2 Da bi se smanjilo ukupno vreme izvršavanja programa, u svakom iterativnom koraku je neophodno prvo izračunati sve korekcije $C_j^{(m)}$.

6.3 Analiza konvergencije poboljšanih inkluzivnih metoda

U ovom odeljku ćemo izložiti analizu konvergencije intervalnog metoda (6.7). Zbog jednostavnosti, izostavićemo sve iterativne indekse m i označićemo sve veličine u $(m+1)$-oj iteraciji dodatnim simbolom $\widehat{\ }$. Takođe, da bismo ocenili red konvergencije iterativnog metoda (6.7), uvešćemo greške

$$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i, \quad \hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i \quad (i \in \mathbb{I}_n).$$

Ovde podrazumevamo da je $\varepsilon_i = \mathcal{O}_M(\varepsilon_j)$ za svaki par $i, j \in \mathbb{I}_n$. Simbol $\mathcal{O}_M$ ukazuje na činjenicu da dva kompleksna broja w_1 i w_2 imaju module istog reda, to jest da je, $|w_1| = \mathcal{O}(|w_2|)$.

Prvo ćemo dokazati sledeće dve leme:

Lema 6.1 *Iterativni metod*

$$\hat{z}_i = z_i - u_i - h(t_i)\frac{P(z_i - u_i)}{P'(z_i)}, \tag{6.8}$$

gde je

$$t_i = \frac{P(z_i - u_i)}{P(z_i)}$$

i h proizvoljna dva puta diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslove $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$ i $|h''(0)| < \infty$, ima red konvergencije jednak četiri.

Dokaz. Neka je

$$A_{k,i} = \frac{P^{(k)}(\zeta_i)}{k!P'(\zeta_i)} \quad (k \geq 2).$$

Korišćenjem Taylorovog razvoja oko nule ζ_i, nalazimo

$$P(z_i) = P'(\zeta_i)\,\varepsilon_i + \frac{1}{2}\,P''(\zeta_i)\,\varepsilon_i^2 + \frac{1}{6}\,P'''(\zeta_i)\,\varepsilon_i^3 + \frac{1}{24}\,P^{(4)}(\zeta_i)\,\varepsilon_i^4 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5), \tag{6.9}$$

$$P'(z_i) = P'(\zeta_i) + P''(\zeta_i)\,\varepsilon_i + \frac{1}{2}\,P'''(\zeta_i)\,\varepsilon_i^2 + \frac{1}{6}\,P^{(4)}(\zeta_i)\,\varepsilon_i^3 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^4), \tag{6.10}$$

Na osnovu (6.9) i (6.10) nalazimo

$$\begin{aligned}\eta_i &= z_i - \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} - \zeta_i \\ &= A_{2,i}\,\varepsilon_i^2 + (2A_{3,i} - 2A_{2,i}^2)\,\varepsilon_i^3 + (3A_{4,i} - 7A_{2,i}A_{3,i} + 4A_{2,i}^3)\,\varepsilon_i^4 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5),\end{aligned} \tag{6.11}$$

Primenom Taylorovog razvoja dobijamo

$$P(z_i - u_i) = P'(\zeta_i)(\eta_i + A_{2,i}\eta_i^2 + A_{3,i}\eta_i^3 + A_{4,i}\eta_i^4 + \mathcal{O}_M(\eta_i^5)),$$

odakle, uz korišćenje (6.11), posle kraćeg izračunavanja imamo

$$P(z_i-u_i) = P'(\zeta_i)(A_{2,i}\varepsilon_i^2+(2A_{3,i}-2A_{2,i}^2)\varepsilon_i^3+(5A_{2,i}^3-7A_{2,i}A_{3,i}+3A_{4,i})\varepsilon_i^4+\mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5)). \tag{6.12}$$

Na osnovu (6.10) i (6.12) nalazimo

$$\frac{P(z_i - u_i)}{P'(z_i)} = A_{2,i}\varepsilon_i^2 + (2A_{3,i} - 4A_{2,i}^2)\varepsilon_i^3 + (13A_{2,i}^3 - 14A_{2,i}A_{3,i} + 3A_{4,i})\varepsilon_i^4 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5). \tag{6.13}$$

Funkcija h se može aproksimirati svojim Taylorovim polinomom drugog reda u okolini tačke $t = 0$ na sledeći način

$$h(t) \approx h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2}\,t^2. \tag{6.14}$$

Korišćenjem relacija (6.9) i (6.12) dobijamo

$$t_i = \frac{P(z_i - u_i)}{P(z_i)} = A_{2,i}\varepsilon_i + (2A_{3,i} - 3A_{2,i}^2)\varepsilon_i^2 + (8A_{2,i}^3 - 10A_{2,i}A_{3,i} + 3A_{4,i})\varepsilon_i^3 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^4),$$

tako da je, iz (6.14),

$$\begin{aligned} h(t_i) &= h(0) + A_{2,i}h'(0)\varepsilon_i + (2A_{3,i}h'(0) + A_{2,i}^2(h''(0)/2 - 3h'(0)))\varepsilon_i^2 \\ &\quad + (3A_{4,i}h'(0) + A_{2,i}^3(8h'(0) - 3h''(0)) + 2A_{2,i}A_{3,i}(h''(0) - 5h'(0)))\varepsilon_i^3 \\ &\quad + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^4). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Sada iz relacija (6.13) i (6.15), koristeći programski paket *Mathematica*, dobijamo relaciju greške

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - u_i - h(t_i)\,\frac{P(z_i - u_i)}{P'(z_i)} - \zeta_i = \eta_i - h(t_i)\,\frac{P(z_i - u_i)}{P'(z_i)} \\ &= \Big[A_{2,i}(1 - h(0))\Big]\varepsilon_i^2 + \Big[-2A_{3,i}(h(0) - 1) + A_{2,i}^2(4h(0) - h'(0) - 2)\Big]\varepsilon_i^3 \\ &\quad + \Big[-3A_{4,i}(h(0) - 1) + A_{2,i}A_{3,i}(-7 + 14h(0) - 4h'(0)) \\ &\quad + A_{2,i}^3(4 - 13h(0) + 7h'(0) - h''(0)/2)\Big]\varepsilon_i^4 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5). \end{aligned}$$

Zamenjujući početne uslove leme $h(0) = 1$ i $h'(0) = 2$ u poslednjem izrazu za $\hat{\varepsilon}_i$, nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = \Big[A_{2,i}^3(5 - h''(0)/2) - A_{2,i}A_{3,i}\Big]\varepsilon_i^4 + \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^5).$$

Kako je $h''(0)$ ograničena veličina, iz poslednje relacije zaključujemo da je red konvergencije familije dvo-koračnih metoda (6.8) jednak četiri. □

U nastavku ćemo koristiti sledeće skraćenice:

$$\varepsilon = \max_{1 \le i \le n} |\varepsilon_i|, \quad r = \max_{1 \le i \le n} r_i, \quad v_{ij} = z_i - z_j + C_j,$$

$$Y_i = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{1}{z_i - Z_j + c_j} =: \{y_i; \rho_i\},$$

gde je $C_j = C(z_j)$ dato sa (6.6).

Lema 6.2 *Za inluzivni metod* (6.7) *važe sledeća tvrđenja:*

(i) $\hat{r} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^2 r)$;

(ii) $\hat{\varepsilon} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^6)$.

Dokaz. Neka je $Z_j = \{z_j; r_j\}$. Tada je $z_i - Z_j + C_j = \{v_{ij}; r_j\}$ i korišćenjem relacije

$$\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j}$$

i operacija kružne aritmetike (uz primenu centralne inverzije (1.56)), nalazimo

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left\{ \frac{1}{v_{ij}}; \frac{r_j}{|v_{ij}|(|v_{ij}| - r_j)} \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left\{ \frac{C_j + \zeta_j - z_j}{(z_i - \zeta_j)\, v_{ij}}; \frac{r_j}{|v_{ij}|(|v_{ij}| - r_j)} \right\}. \end{aligned}$$

Kako je $C_j + \zeta_j - z_j = \mathcal{O}_M(\varepsilon_j^4)$ (videti Lemu 6.1), $v_{ij} = \mathcal{O}_M(1)$ i $z_i - \zeta_j = \mathcal{O}_M(1)$, imamo

$$y_i = \operatorname{mid} Y_i = \frac{1}{\varepsilon_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{C_j + \zeta_j - z_j}{(z_i - \zeta_j)\, v_{ij}} = \frac{1}{\varepsilon_i} + \mathcal{O}_M(\varepsilon^4) \tag{6.16}$$

i

$$\rho_i = \operatorname{rad} Y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{r_j}{|v_{ij}|(|v_{ij}| - r_j)} = \mathcal{O}_M(r). \tag{6.17}$$

Korišćenjem uvedenih skraćenica, diskovi dobijeni inkluzivnim metodom (6.7) se mogu prikazati u obliku

$$\widehat{Z}_i := \{\hat{z}_i; \hat{r}_i\} = z_i - \frac{1}{\{y_i; \rho_i\}} = \left\{ z_i - \frac{1}{y_i}; \frac{\rho_i}{|y_i|(|y_i| - \rho_i)} \right\}.$$

Na osnovu toga uz korišćenje (6.14) i (6.15) dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{1}{y_i} = \varepsilon_i - \frac{1}{1/\varepsilon_i + \mathcal{O}_M(\varepsilon^4)} = \frac{\varepsilon_i^2 \mathcal{O}_M(\varepsilon_i^4)}{1 + \mathcal{O}_M(\varepsilon^5)} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^6)$$

i

$$\hat{r}_i = \frac{\rho_i}{|y_i|(|y_i| - \rho_i)} = \frac{\rho_i}{|1/\varepsilon_i + \mathcal{O}_M(\varepsilon^4)|(|1/\varepsilon_i + \mathcal{O}_M(\varepsilon^4)| - \rho_i)} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^2 r). \quad \square$$

Za familiju inkluzivnih metoda (6.7) možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 6.1 *Neka su $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)}$ dovoljno mali početni inkluzivni diskovi takvi da je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Tada je donja granica R-reda konvergencije familije intervalnih metoda* (6.7) *jednaka šest.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti, što je uobičajeno u ovom tipu analize, usvojićemo da je $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$, što znači da radimo sa modelom „najgoreg slučaja”. Ova pretpostavka nema uticaja na konačni rezultat graničnog procesa koji primenjujemo u cilju dobijanja donje granice R-reda konvergencije. Dalje, pretpostavka teoreme da su početni diskovi dovoljno mali, ukazuje da su njihovi centri dovoljno blizu pravim nulama. Dakle, dvo-koračni metod (6.8) ima red četiri.

Na osnovu Leme 6.2 primećujemo da se nizovi centara i poluprečnika ponašaju po sledećim pravilima:

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^6, \quad r^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^2 r^{(m)},$$

gde oznaka $a \sim b$ znači $a = \mathcal{O}(b)$. Iz ovih relacija i Teoreme 1.7, formiramo R-matricu

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

sa spektralnim radijusom $\rho(Q_2) = 6$ i odgovarajućim sopstvenim vektorom $\boldsymbol{x}_\rho = (5/2, 1) > 0$. Dakle, na osnovu Teoreme 1.7, dobijamo

$$O_R(6.7) \geq \rho\,(Q_2) = 6. \quad \square$$

6.4 Algoritam 3: Single-step metodi

Konvergencija metoda (6.3), (6.5) i (6.7) se može ubrzati primenom Gauss-Seidelovog pristupa koji koristi već izračunate kružne aproksimacije u istoj iteraciji. Na taj način, polazeći od uopštenog metoda (6.4) i korekcija $C_j = 0$, $C_j = u_j$ i C_j datim sa (6.6), dobijamo sledeće metode u serijskom modu:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)}}}, \tag{6.18}$$

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + u_j^{(m)}}}, \tag{6.19}$$

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{1}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + C_j^{(m)}}}, \tag{6.20}$$

gde je $i \in \mathbb{I}_n$ i $m = 0, 1, \ldots$. Inkluzivni iterativni metodi (6.4) i (6.7) su realizovani u paralelnom modu i poznati su još kao total-step metodi. Metodi (6.18), (6.19) i (6.20) sa Gauss-Seidelovim pristupom su single-step metodi. Single-step metod (6.18) je razmatran u [111], metod (6.19) u [21], dok je metod (6.20) nov.

Da bi se odredio R-red konvergencije single-step metoda (6.19) i (6.20) neophodno je raditi sa $2n$ međusobno zavisnih nizova centara i poluprečnika diskova, što je veoma težak zadatak. Dodatna otežavajuća okolnost je da se broj nula n javlja kao parametar. Međutim, lako možemo oceniti granice R-reda konvergencije razmatrajući granične slučajeve $n = 2$ i veoma veliko n.

Kako red konvergencije single-step metoda postaje gotovo jednak redu konvergencije odgovarajućeg total-step metoda kada je stepen polinoma veoma veliki, na osnovu Teoreme 6.1 i rezultata datim u radovima [42] i [21] za total-step metode, dobijamo

$$\begin{aligned} &O_R((6.18), n) \approx O_R((6.18), \infty) = O_R(6.3) \geq 3,\\ &O_R((6.19), n) \approx O_R((6.19), \infty) = O_R(6.5) \geq 4,\\ &O_R((6.20), n) \approx O_R((6.20), \infty) = O_R(6.7) \geq 6. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Razmotrimo sada single-step metode (6.18)–(6.20) za $n = 2$ što, praktično, predstavlja trivijalni slučaj kvadratnog polinoma sa nulama ζ_1 i ζ_2. Pretpostavimo pritom da je $|\varepsilon_1^{(0)}| = |\varepsilon_2^{(0)}| = r_1^{(0)} = r_2^{(0)} < 1$ („model najgoreg slučaja"). Uvedimo greške

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= z_i - \zeta_1, \quad \varepsilon_2 = z_2 - \zeta_2,\\ w_2^{(1)} &= z_2 - \zeta_2 = \varepsilon_2, \quad w_2^{(2)} = z_2 - u(z_2) - \zeta_2 = \mathcal{O}_M(\varepsilon_2^2),\\ w_2^{(3)} &= z_2 - c(z_2) - \zeta_2 = \mathcal{O}_M(\varepsilon_2^4), \end{aligned}$$

koji se tiču metoda (6.18), (6.19) i (6.20), respektivno, i označimo ih indeksima $k = 1, 2, 3$. U stvari, veličine $w_2^{(1)}$, $w_2^{(2)}$ i $w_2^{(3)}$ ocenjuju respektivno blizinu centara diskova Z_2, $Z_2 - u(z_2)$ i $Z_2 - C(z_2)$ do nule ζ_2.

Posle dosta elementarnog računa izveli smo sledeće ocene:

$$|\hat{\varepsilon}_1| \sim |\varepsilon_1|^2 |w_2^{(k)}|, \quad |\hat{\varepsilon}_2| \sim |\varepsilon_1|^2 |\varepsilon_2|^2 |w_2^{(k)}|, \quad \hat{r}_1 \sim |\varepsilon_1|^2 r_2, \quad \hat{r}_2 \sim |\varepsilon_1|^2 |\varepsilon_2|^2 r_2.$$

Odgovarajuće R-matrice i njihovi spektralni radijusi su:

$$Q_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\rho(Q_4^{(1)}) = 4,\\ &\boldsymbol{x}_\rho = (1, 2, 1, 2) > 0, \end{aligned}$$

$$Q_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \rho(Q_4^{(2)}) = 5.236, \\ \boldsymbol{x}_\rho = (0.809, 1.309, 0.5, 1) > 0, \end{array}$$

$$Q_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \rho(Q_4^{(3)}) = 7.464, \\ \boldsymbol{x}_\rho = (1.366, 1.866, 0.5, 1) > 0. \end{array}$$

Na osnovu (6.21) i dobijenih R-matrica, možemo formulisati sledeće tvrđenje:

Teorema 6.2 *Opsezi donjih granica R-redova konvergencije single-step metoda* (6.18), (6.19) *i* (6.20) *su*

$$O_R(6.18) \in (3, 4), \quad O_R(6.19) \in (4, 5.236), \quad O_R(6.20) \in (6, 7.464).$$

6.5 Algoritam 4: Inkluzija višestrukih nula

Neka su $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ $(2 \le \nu \le n)$ proste ili višestruke nule respektivne višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ $(\mu_1 + \cdots + \mu_\nu = n)$ moničnog polinoma

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\nu} (z - \zeta_j)^{\mu_j}.$$

Na sličan način kao u Odeljku 6.1, polazeći od logaritamskog izvoda od P, izvodimo nula-relaciju

$$\zeta_i = z - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u(z)} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j}} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu := \{1, \ldots, \nu\}). \tag{6.22}$$

Ova relacija sugeriše sledeći simultani inkluzivni metod za nalaženje svih prostih ili višestrukih nula polinoma P:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)}}}, \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ m = 0, 1, \ldots), \tag{6.23}$$

gde je $z_i^{(m)} = \operatorname{mid} Z_i^{(m)}$. Ovaj metod je predložen u [41] i ima red konvergencije tri.

Polazeći od Schröderovog metoda drugog reda

$$\hat{z} = z - \mu \frac{f(z)}{f'(z)}$$

za dobijanje višestrukih nula višestrukosti μ funkcije f i nula-relacije (6.22), u radu [21] je dobijen sledeći simultani metod četvrtog reda sa Schröderovom korekcijom za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma u obliku:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + \mu_j u(z_j^{(m)})}}, \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ m = 0, 1, \ldots). \tag{6.24}$$

Naš cilj je dalje ubrzanje konvergencije metoda (6.24) korišćenjem samo nekoliko dodatnih numeričkih operacija. Na taj način se povećava računska efikasnost novog metoda. U Odeljku 2.2 je izveden simultani inkluzivni metod šestog reda korišćenjem optimalnog dvo-koračnog metoda četvrtog reda. U ovom odeljku razmotrićemo drugi izazovni zadatak, konstrukciju simultanog metoda istog tipa, ali za inkluziju višestrukih nula. Do pre par godina izvođenje takvog metoda nije bilo moguće, zato što optimalni metodi za višestruke nule četvrtog reda, slični metodu (6.8), nisu bili razvijeni. U međuvremenu, 2009. godine su Li i njegovi koautori u [83] razvili sledeći dvo-koračni metod za nalaženje višestrukih nula

$$\hat{z} = z - u(z) \cdot \frac{\beta + \gamma s(z)}{1 + \delta s(z)}, \quad s(z) = \frac{f'(z - \tau u(z))}{f'(z)}, \tag{6.25}$$

gde su

$$\tau = \frac{2\mu}{\mu + 2}, \quad \beta = -\frac{\mu^2}{2}, \quad \gamma = \frac{\mu(\mu - 2)}{2} \Big(\frac{\mu}{\mu + 2}\Big)^{-\mu}, \quad \delta = -\Big(\frac{\mu}{\mu + 2}\Big)^{-\mu}$$

i μ je višestrukost tačne nule ζ funkcije f (ne neophodno algebarskog polinoma u opštem slučaju). Red konvergencije iterativnog metoda (6.25) je četiri, to jest, relacija greške je

$$\hat{z} - \zeta = \mathcal{O}_M((z - \zeta)^4). \tag{6.26}$$

(za dokaz, videti [83]).

Sledeći konstrukciju simultanih metoda (6.7) i nula-relacije (6.22), možemo konstruisati nov iterativni intervalni metod za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma. Disk Z_j koji se javlja u (6.23) se sada zamenjuje novim diskom $\widetilde{Z}_j$ izračunatim na sledeći način:

$$\widetilde{Z}_j = Z_j - u_j \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j s_j}{1 + \delta_j s_j},$$

gde smo stavili da je $z_j = \operatorname{mid} Z_j,\ u_j = u(z_j),\ s_j = P'(z_j - \tau_j u_j)/P'(z_j)$ i

$$\tau_j = \frac{2\mu_j}{\mu_j + 2},\quad \beta_j = -\frac{\mu_j^2}{2},\quad \gamma_j = \frac{\mu_j(\mu_j - 2)}{2}\Big(\frac{\mu_j}{\mu_j + 2}\Big)^{-\mu_j},\quad \delta_j = -\Big(\frac{\mu_j}{\mu_j + 2}\Big)^{-\mu_j}.$$

Na taj način dobijamo novi metod za simultanu inkluziju svih višestrukih nula datog polinoma,

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + u_j^{(m)} \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j s_j^{(m)}}{1 + \delta_j s_j^{(m)}}}} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ m = 0, 1, \ldots), \tag{6.27}$$

gde je

$$s_j^{(m)} = \frac{P'(z_j^{(m)} - \tau_j u_j^{(m)})}{P'(z_j^{(m)})}.$$

Na sličan način kao u dokazu Teoreme 6.1, korišćenjem (6.26), može se dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 6.3 *Neka su $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ dovoljno mali početni diskovi takvi da je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$. Donja granica R-reda konvergencije familije intervalnih metoda* (6.27) *je u tom slučaju jednaka šest.*

6.6 Algoritam 5: Single-step metodi za višestruke nule

Kao u Odeljku 6.4 za proste nule, konvergencija metoda (6.23), (6.24) i (6.27) se može ubrzati primenom Gauss-Seidelovog pristupa korišćenjem već izračunatih kružnih aproksimacija u istoj iteraciji. Na taj način dobijamo sledeće single-step metode:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)}}}, \tag{6.28}$$

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \sum_{j=i+1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + \mu_j u_j^{(m)}}}, \tag{6.29}$$

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\mu_i}{\dfrac{1}{u_i^{(m)}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}} - \sum_{j=i+1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z_i^{(m)} - Z_j^{(m)} + \widetilde{C}_j^{(m)}}}, \tag{6.30}$$

gde je

$$\widetilde{C}_j^{(m)} = u_j^{(m)} \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j s_j^{(m)}}{1 + \delta_j s_j^{(m)}} \quad \text{(videti (6.25))},$$

$i \in \mathbb{I}_\nu$ i $m = 0, 1, \ldots$.

Kako je $z_2 - \mu_2\, u(z_2) - \zeta_2 = \mathcal{O}_M(\varepsilon_2^2)$ i $z_2 - \widetilde{C}(z_2) - \zeta_2 = \mathcal{O}_M(\varepsilon_2^4)$, kao u dokazu Teoreme 6.2, direktno dobijamo:

Teorema 6.4 *Opsezi donje granice R-reda konvergencije single-step metoda* (6.28), (6.29) *i* (6.30) *su*

$$O_R(6.28) \in (3, 4), \quad O_R(6.29) \in (4, 5.236), \quad O_R(6.30) \in (6, 7.464).$$

Primedba 6.3 Izloženi metodi (6.23), (6.24) i (6.27)–(6.30) zahtevaju određivanje početnih diskova koji sadrže željene nule i poznavanje njihove višestrukosti. Oba zadatka su veoma važna u teoriji iterativnih intervalnih procesa. Problem dobijanja početnih diskova koji sadrže željene nule je proučavan, na primer, u [19], [57] i [121], dok se efikasne procedure za određivanje reda višestrukosti mogu naći u [75], [76], [95] i [97].

6.7 Računska efikasnost

U ovom odeljku ćemo uporediti ponašanje konvergencije i računsku efikasnost simultanih metoda (6.3), (6.5) i (6.7) za proste nule. Odgovarajući rezultati su veoma slični i za višestruke nule (metodi (6.23), (6.24) i (6.27)) tako da će oni biti izostavljeni. Poznavanje računske efikasnosti je od praktičnog značaja u dizajniranju paketa za nalaženje nula. Izbor inkluzivnog metoda (6.5) sa Newtonovom korekcijom u komparativnim procedurama je potpuno opravdan s obzirom da, do danas, ovaj metod poseduje najveću računsku efikasnost u klasi simultanih inkluzivnih metoda koji se baziraju na nula-relaciji.

Kao što je izloženo u [15], [89, Pogl. 1] i [113, Pogl. 6] računska efikasnost iterativnog metoda IM (bilo u običnoj aritmetici bilo u intervalnoj aritmetici) može se uspešno oceniti korišćenjem koeficijenta efikasnosti, koji je dat sa

$$E(\mathrm{IM}) = \frac{\log r}{\theta}, \tag{6.31}$$

gde r predstavlja R-red konvergencije iterativnog metoda IM, a θ je cena izračunavanja vrednosti funkcije. Merenjem procesorskog vremena na različitim digitalnim računskim mašinama i personalnim računarima sa različitim procesorima, potvrđeno je da se rang lista metoda koji su dobijeni formulom (6.31) uglavnom podudara sa realnim CPU vremenom.

Da bi se izvela cena izračunavanja θ, poželjno je koristiti aritmetičke operacije po iteraciji uzete sa izvesnim *težinama* koje zavise od vremena izvršenja operacije, razlikujući pri tom operacije sa realnim i kompleksnim brojevima. Označimo ove težine sa w_s, w_m, w_d i w_k za sabiranje/oduzimanje, množenje, deljenje i traženje kvadratnog korena, respektivno, za realne operacije, i w_s^*, w_m^*, w_d^* i w_k^* za kompleksne operacije. Primetimo da se kvadratni koren pojavljuje u izračunavanju modula kompleksnih brojeva

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Neka su, respektivno, $S(n)$, $M(n)$, $D(n)$ i $K(n)$ brojevi realnih operacija sabiranja/oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja po jednoj iteraciji za svih n nula datog polinoma n-tog stepena. Oznake $S^*(n)$, $M^*(n)$, $D^*(n)$ i $K^*(n)$ se odnose na kompleksne aritmetičke operacije. U tom slučaju cena izračunavanja $\theta = \theta(n)$ se može (aproksimativno) izraziti u obliku

$$\begin{aligned}\theta(n) = w_s S(n) + w_m M(n) + w_d D(n) + w_k K(n) + w_s^* S^*(n) + w_m^* M^*(n)\\ + w_d^* D^*(n) + w_k^* K^*(n).\end{aligned} \tag{6.32}$$

Iz (6.31) i (6.32) sledi

$$E(\mathrm{IM}, n) = \frac{\log r}{\theta(n)}. \tag{6.33}$$

Primedba 6.4 Poslednja formula (6.33) može se izvesti na prirodni način. Pretpostavimo da su (kompleksne) nule testiranog polima normalizovane i da leže na jediničnom disku. Polazeći od početnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ kriterijum zaustavljanja je dat sa

$$\max_{1 \le i \le n} |z_i^{(m)} - \zeta_i| < \tau = 10^{-q},$$

gde je m indeks iteracije, τ zahtevana tačnost i q broj značajnih decimalnih cifara aproksimacija $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$. Ako je

$$|z_i^{(0)} - \zeta_i| \approx 10^{-1}$$

za svako $i \in \mathbb{I}_n$ i r je red konvergencije primenjenog simultanog metoda, tada se (teorijski) broj iterativnih koraka, neophodan za postizanje tačnosti τ, može aproksimativno izračunati sa

$$m \approx \frac{\log q}{\log r},$$

što sledi iz relacije $10^q = 10^{-r^m}$. Kako je računska efikasnost E proporcionalna recipročnoj vrednosti ukupne cene izračunavanja $m\theta(n)$ kompletnog iterativnog procesa koji se sastoji od m iterativnih koraka, dobija se

$$E = \frac{1}{m\theta(n)} = \frac{1}{\log q} \cdot \frac{\log r}{\theta(n)}.$$

Da bismo ocenili iterativni metod za zadatu tačnost $\tau = 10^{-q}$, dovoljno je uporediti vrednosti $\log r/\theta(n)$, što je ekvivalentno sa (6.33).

Primedba 6.5 Primetimo da je korišćenje formule (6.33) za ocenu računske efikasnosti neophodno. Zaista, nemoguće je meriti vreme izvršenja iterativnog procesa na modernim računarima, jer oni izvršavaju ogroman broj matematičkih operacija u sekundi koji se izražava u gigaFLOPSima (10^9 operacija u pokretnom zarezu po sekundi).

Broj potrebnih numeričkih aritmetičkih operacija u realizaciji inkluzivnih metoda (6.3), (6.5) i (6.7), odvojeno u kompleksnoj i realnoj aritmetici, dat je u Tabelama 6.1 i 6.2, respektivno. Naime, radeći sa diskovima, neke operacije se izvode u realnoj aritmetici, što smo iskoristili da smanjimo ukupnu računsku cenu.

Izračunali smo težine (koje se javljaju u (6.32)) na osnovu složenosti osnovnih operacija u aritmetici višestruke preciznosti koristeći rezultate date u [16] i [17]. Podrazumeva se da je korišćena reprezentacija brojeva u pokretnom zarezu u binarnom sistemu od b bitova, to jest, korišćena je „b preciznost" brojeva (terminologija korišćena u [17]) koja daje rezultat sa relativnom greškom aproksimativno 2^{-b}. Sledeći rezultate date u [16] i [17], vreme izvršenja $t_b(S)$ sabiranja i oduzimanja je reda $\mathcal{O}(b)$. Korišćenjem Schönhage-Strassenovog množenja (videti [37] i [178]), dobija se da je $t_b(M) = \mathcal{O}(b \log b \log(\log b))$. Težine koje se javljaju u (6.32) se tada određuju proporcionalno ovim vremenima izvršenja i normalizovane su na $t_b(S)$ kao što sledi (videti [16] za detalje):

metodi	$S(n)$	$M(n)$	$D(n)$	$K(n)$
(6.3)	$3n^2 - n$	$3n^2$	n^2	n^2
(6.5)	$3n^2 - n$	$3n^2$	n^2	n^2
(6.7)	$3n^2 - n$	$3n^2$	n^2	n^2

Tabela 6.1: Broj realnih operacija

metodi	$S^*(n)$	$M^*(n)$	$D^*(n)$
(6.3)	$4n^2 - 2n$	$2n^2 - n$	$n^2 + n$
(6.5)	$4n^2 - n$	$2n^2 - n$	$n^2 + 2n$
(6.7)	$5n^2$	$3n^2$	$n^2 + 3n$

Tabela 6.2: Broj kompleksnih operacija

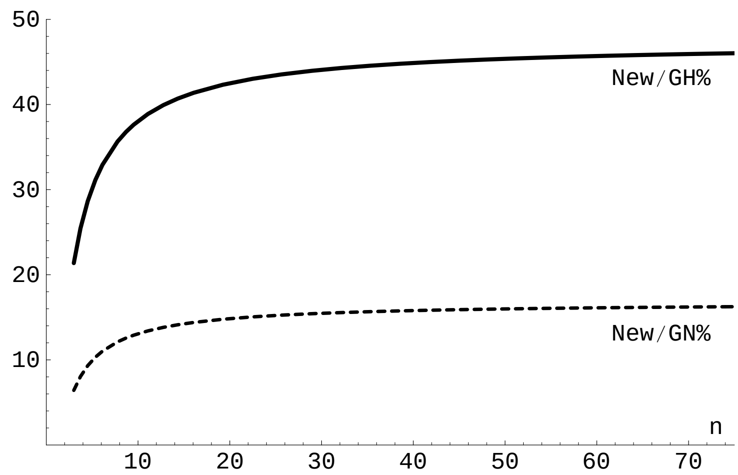
$$w_m = \log b \log(\log b), \quad w_m^* = 3w_m, \quad w_d = 4w_m, \quad w_d^* = 10w_m, \quad w_k = 5.5w_m.$$

Primenjujući (6.33) izračunali smo u procentima odnose za 128-bitnu arhitekturu ($b = 128$)

$$\rho_{9,5}(n) = \Big(E((6.7), n)/E((6.3), n) - 1\Big) \cdot 100(\text{u }\%), \qquad (\text{novi}/GH\%)$$
$$\rho_{9,7}(n) = \Big(E((6.7), n)/E((6.5), n) - 1\Big) \cdot 100(\text{u }\%), \qquad (\text{novi}/GN\%),$$

gde GH, GN i novi ukazuju na Gargantini-Henricijev metod (6.3), Gargantinijev metod sa Newtonovom korekcijom (6.5) i novu familiju (6.7), respektivno. Odnosi $\rho_{9,5}(n)$ (puna linija) i $\rho_{9,7}(n)$ (isprekidana linija) su grafički prikazani na Slici 6.1 kao funkcije stepena polinoma n. Ovi odnosi pokazuju poboljšanje računske efikasnosti novog metoda (6.7) u odnosu na metode (6.3) i (6.5), izraženo u procentima. Gotovo iste krive su dobijene i za 64-bitnu arhitekturu ($b = 64$). Primetimo da se samo zanemarljiva promena odnosa javlja sa korišćenjem težina proporcionalnim vremenima izvršenja osnovnih operacija za osmostruku preciznost (mašinska preciznost 10^{-67}) za Pentium M 2.8 GHz koji radi sa dFedora core 3 i Opteron 64-bitnim procesorom (podaci uzeti iz [38]).

Sa Slike 6.1 primećujemo da je nova familija intervalnih metoda (6.7) mnogo efikasnija od metoda (6.3) i (6.5). Poboljšanje je značajno posebno u odnosu na Gargantini-Henricijev metod (6.3). Imajući na umu da je metod (6.5) sa Newtonovom korekcijom rangiran kao najefikasniji inkluzivni metod u posmatranoj klasi metoda, zaključujemo da predložena familija (6.7) generiše najefikasnije metode za simultanu inkluziju nula polinoma u klasi metoda koji se baziraju na nula-relaciji i koji su realizovani u kružnoj kompleksnoj aritmetici.



Slika 6.1

6.8 Numerički primeri

Da bismo demonstrirali ponašanje konvegencije izloženih metoda, daćemo u ovom odeljku dva numerička primera za proste i višestruke nule.

Inkluzivni metodi (6.3), (6.5) i (6.7) za proste nule i metodi (6.23), (6.24) i (6.27) za višestruke nule i njihove single-step varijante su testirane za rešavanje više polinomskih jednačina. Novi metod (6.7) i njegova single-step modifikacija (6.20) su primenjeni koristešćenjem sledećih šest funkcija h:

$$h(t) = \frac{1 + a_1 t}{1 + (a_1 - 2)t}, \tag{6.34}$$

$$h(t) = \left(1 + \frac{2}{a_2}\, t\right)^{a_2}, \tag{6.35}$$

$$h(t) = \frac{1 + a_3 t^2}{1 - 2t}, \tag{6.36}$$

$$h(t) = \frac{1}{1 - 2t + a_4 t^2}, \tag{6.37}$$

$$h(t) = \frac{t^2 + (a_5 - 2)t - 1}{a_5 t - 1}, \tag{6.38}$$

$$h(t) = \frac{1}{t}\Big(\frac{2}{1+\sqrt{1-4t}} - 1\Big), \tag{6.39}$$

gde su a_1, a_3, a_4, a_5 proizvoljni parametri i $a_2 \neq 0$ je proizvoljni racionalni broj. Navedene funkcije, koje se javljaju u (6.6), su tako izabrane da zadovoljavaju pomenute uslove $h(0) = 1$, $h'(0) = 2$ i $|h''(0)| < \infty$, imaju jednostavni oblik i poseduju promenljivi parametar (izuzev (6.39)). Postoje drugi različiti oblici za h, ali su oni dati komplikovanijim izrazima.

U cilju obezbeđivanja inkluzije nula u drugoj i trećoj iteraciji, koje proizvode veoma male diskove, koristili smo programski paket *Mathematica* 7 sa aritmetikom višestruke preciznosti.

Primer 6.1 U cilju nalaženja kružnih aproksimacija nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = z^{18} &+ 12z^{16} + 268z^{14} + 2\,784z^{12} + 34\,710z^{10} + 324\,696z^8 \\ &+620\,972z^6 - 2\,270\,592z^4 - 28\,303\,951z^2 - 25\,704\,900 \end{aligned}$$

primenili smo intervalne metode (6.3), (6.5) i (6.7) i njihove single-step varijante (6.18), (6.19) i (6.20). Nule polinoma P su $\zeta_{1,2} = 1 \pm 2i$, $\zeta_{3,4} = -1 \pm 2i$, $\zeta_{5,6} = \pm 2$, $\zeta_{7,8} = \pm i$, $\zeta_{9,10} = 3 \pm 2i$, $\zeta_{11,12} = -3 \pm 2i$, $\zeta_{13,14} = 2 \pm 3i$, $\zeta_{15,16} = -2 \pm 3i$, $\zeta_{17,18} = \pm 3i$. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.5\}$, sa centrima u tačkama

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = 1.1 + 2.2i, & z_2^{(0)} = 1.2 - 2.1i, & z_3^{(0)} = -1.2 + 2.1i, \\ z_4^{(0)} = -1.2 - 2.1i, & z_5^{(0)} = 2.2 + 0.1i, & z_6^{(0)} = -2.1 + 0.1i, \\ z_7^{(0)} = -0.2 + 0.9i, & z_8^{(0)} = 0.2 - 1.1i, & z_9^{(0)} = 3.1 + 1.9i, \\ z_{10}^{(0)} = 3.2 - 1.9i, & z_{11}^{(0)} = -3.2 + 1.9i, & z_{12}^{(0)} = -3.2 - 1.9i, \\ z_{13}^{(0)} = 2.2 + 2.9i, & z_{14}^{(0)} = 2.2 - 2.9i, & z_{15}^{(0)} = -2.2 + 2.9i, \\ z_{16}^{(0)} = -2.2 - 2.9i, & z_{17}^{(0)} = 0.2 + 3.1i, & z_{18}^{(0)} = -0.2 - 2.9i. \end{array}$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su u Tabelama 6.3 i 6.4.

Primer 6.2 Total-step metodi (6.23), (6.24) i (6.27) i njihove single-step varijante (6.28), (6.29) i (6.30) su primenjeni na simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = z^{18} &+ (2-2i)z^{17} - 14z^{16} - (18-26i)z^{15} + (80-12i)z^{14} + (26-118i)z^{13} \\ &-(238-136i)z^{12} + (146+182i)z^{11} + (307-476i)z^{10} - (380-160i)z^9 \\ &+(236+320i)z^8 + (32-712i)z^7 - (804-880i)z^6 + (512+96i)z^5 \\ &-(80+832i)z^4 - (1024-1152i)z^3 - (448-256i)z^2 \\ &-(1024-512i)z + (-768+1024i). \end{aligned}$$

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(6.3)	1.70(−1)	6.35(−5)	3.08(−16)
(6.5)	2.20(−1)	1.66(−5)	5.06(−24)
(6.7)–(6.34), $a_1 = -1$	1.92(−1)	3.56(−6)	1.41(−33)
(6.7)–(6.34), $a_1 = 1$	2.26(−1)	5.09(−5)	2.54(−27)
(6.7)–(6.34), $a_1 = 2$	2.61(−1)	4.10(−5)	4.97(−27)
(6.7)–(6.35), $a_2 = -1$	2.00(−1)	3.19(−6)	2.44(−37)
(6.7)–(6.35), $a_2 = 1$	2.61(−1)	4.10(−5)	4.97(−27)
(6.7)–(6.35), $a_2 = 2$	2.52(−2)	5.18(−5)	8.48(−27)
(6.7)–(6.36), $a_3 = -1$	2.07(−1)	2.12(−6)	1.15(−36)
(6.7)–(6.36), $a_3 = 1$	1.93(−1)	1.00(−5)	4.69(−34)
(6.7)–(6.36), $a_3 = 2$	1.92(−1)	2.08(−5)	8.41(−31)
(6.7)–(6.37), $a_4 = -1$	1.92(−1)	1.51(−6)	1.14(−38)
(6.7)–(6.37), $a_4 = 1$	2.18(−1)	4.27(−5)	2.75(−28)
(6.7)–(6.37), $a_4 = 2$	3.62(−1)	9.88(−5)	1.29(−25)
(6.7)–(6.38), $a_5 = -1$	2.69(−1)	2.00(−5)	8.75(−28)
(6.7)–(6.38), $a_5 = 1$	2.31(−1)	4.48(−5)	3.07(−27)
(6.7)–(6.38), $a_5 = 2$	2.07(−1)	2.12(−6)	1.15(−36)
(6.7)–(6.39)	1.97(−1)	6.01(−7)	3.40(−40)

Tabela 6.3: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – proste nule, total-step metodi

Nule polinoma su -1, -2, $1 \pm i$, $\pm i$, 2, $-2+i$ višestrukosti 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, respektivno. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.4\}$, sa centrima

$$\begin{aligned} z_1^{(0)} &= -1.2 + 0.1i, & z_2^{(0)} &= -2.2 - 0.1i, & z_3^{(0)} &= 1.1 + 1.2i, \\ z_4^{(0)} &= 0.9 - 1.1i, & z_5^{(0)} &= -0.1 + 0.8i, & z_6^{(0)} &= 0.1 - 1.1i, \\ z_7^{(0)} &= 2.2 - 0.1i, & z_8^{(0)} &= -2.2 + 0.9i. \end{aligned}$$

Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova, dobijeni u prva tri iterativna koraka, dati su u Tabelama 6.5 i 6.6.

Iz Tabela 6.3 – 6.6 i velikog broja testiranih polinomskih jednačina možemo zaključiti da predloženi metodi (6.7) i (6.20) daju primetno manje inkluzivne diskove u poređenju sa postojećim metodima (6.3), (6.5), (6.18) i (6.19). Isto važi i za nove metode (6.27) i (6.30).

Završimo ovaj odeljak sa nekim komentarima koji se tiču primene iterativnih metoda veoma visokog reda. Primenjujući metode za nalaženje nula, neophodno je napraviti kompromis između njihove brzine i njihove računske cene. Za većinu

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(6.18)	1.67(−1)	2.30(−5)	2.12(−18)
(6.19)	2.20(−1)	5.11(−6)	7.94(−25)
(6.20)–(6.34), $a_1 = -1$	1.87(−1)	1.02(−6)	6.90(−37)
(6.20)–(6.34), $a_1 = 1$	2.26(−1)	1.72(−5)	2.55(−29)
(6.20)–(6.34), $a_1 = 2$	2.57(−1)	1.50(−5)	1.29(−29)
(6.20)–(6.35), $a_2 = -1$	2.00(−1)	5.92(−7)	2.03(−39)
(6.20)–(6.35), $a_2 = 1$	2.57(−1)	1.50(−5)	1.29(−29)
(6.20)–(6.35), $a_2 = 2$	2.48(−1)	1.87(−5)	3.68(−29)
(6.20)–(6.36), $a_3 = -1$	2.07(−1)	6.93(−7)	2.11(−40)
(6.20)–(6.36), $a_3 = 1$	1.93(−1)	1.85(−6)	5.12(−36)
(6.20)–(6.36), $a_3 = 2$	1.87(−1)	3.78(−6)	1.59(−32)
(6.20)–(6.37), $a_4 = -1$	1.87(−1)	5.91(−7)	6.23(−40)
(6.20)–(6.37), $a_4 = 1$	2.18(−1)	1.37(−5)	8.05(−30)
(6.20)–(6.37), $a_4 = 2$	3.56(−1)	4.00(−5)	1.06(−27)
(6.20)–(6.38), $a_5 = -1$	2.64(−1)	7.49(−6)	1.98(−30)
(6.20)–(6.38), $a_5 = 1$	2.30(−1)	1.57(−5)	1.55(−29)
(6.20)–(6.38), $a_5 = 2$	2.07(−1)	6.93(−7)	2.11(−40)
(6.20)–(6.39)	1.97(−1)	1.60(−7)	2.52(−43)

Tabela 6.4: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – proste nule, single-step metodi

	(6.23)	(6.24)	(6.27)
$r^{(1)}$	2.41(−1)	3.10(−1)	4.24(−1)
$r^{(2)}$	1.28(−4)	1.92(−5)	1.26(−6)
$r^{(3)}$	1.28(−14)	2.20(−22)	9.44(−38)

Tabela 6.5: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – višestruke nule, total-step metodi

praktičnih problema, rezultati dobijeni u dvostrukoj preciznosti (tačnost od oko 15 – 16 decimalnih cifara) je savim zadovoljavajuća. Ukoliko se metod višeg reda može primeniti:

(i) sa istom ili (poželjno) nižom računskom cenom,

(ii) bez pooštravanja početnih uslova za konvergenciju u poređenju sa metodima nižeg reda,

tada je njegova primena potpuno opravdana, jer se željena tačnost aproksimacije nule postiže u manje iterativnih koraka. U takvom slučaju dobitak je očigledan

	(6.28)	(6.29)	(6.30)
$r^{(1)}$	2.41(−1)	3.10(−1)	4.24(−1)
$r^{(2)}$	5.44(−5)	3.87(−6)	3.22(−7)
$r^{(3)}$	3.27(−17)	4.87(−25)	8.42(−39)

Tabela 6.6: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – višestruke nule, single-step metodi

i može se oceniti koeficijentom efikasnosti koji je dat sa (6.33). Pokazali smo da je koeficijent efikasnosti predloženih inkluzivnih metoda sa korekcijama dovoljno visok, tako da zadovoljava osobinu (i).

Da bismo proučili osobinu (ii), pretpostavimo da smo pronašli početne inkluzivne diskove $Z_1 = \{z_1; r_1\}, \ldots, Z_n = \{z_n; r_n\}$. Početni uslovi koji garantuju konvergenciju simultanih inkluzivnih metoda se najčešće daju u obliku

$$\rho := \min_{\substack{1 \le i,j \le n \\ j \ne i}} \{|z_i - z_j| - r_j\} \le c_n \max_{1 \le i \le n} r_i, \tag{6.40}$$

gde je c_n konstanta koja zavisi od stepena polinoma n i karakteristika primenjenog metoda, videti knjigu [113] i njene reference. Uslov (6.40) je potpuno prirodan zato što uzima u obzir meru odvojenosti između diskova ρ i veličinu samih diskova. Podsetimo da se simultani metodi sa korekcijama, izloženi u ovoj disertaciji i drugim radovima (videti, na primer, [133] i [135]), uvek odnose na neki osnovni metod nižeg reda konvergencije. Dobra osobina ubrzanih metoda sa korekcijama je da je njihova konstanta c_n u (6.40) veoma blizu konstanti c_n osnovnog metoda. Drugim rečima, početni uslovi ostaju gotovo nepromenjeni kada se red konvergencije ovog tipa metoda povećava. Zajedno, zaključujemo da je primena predloženih inkluzivnih metoda visokog reda prikladna.

Napomenimo da postoje metodi visokog reda čije ubrzanje se dobija na račun sužavanja oblasti konvergencije (zahtevaju manje početne diskove u slučaju inkluzivnih metoda).

Poglavlje 7

Ubrzani metod Halleyevog tipa za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma

U ovom poglavlju predložena je familija inlkuzivnih metoda visokog reda konvergencije koja se zasniva na Halleyevom metodu. Dobijeni metodi poseduju visoku računsku efikasnost, jer se povećanje reda konvergencije osnovnog metoda sa 4 na 7 postiže bez dodatnih izračunavanja funkcije i njenih izvoda. Rezultati ovog poglavlja deo su rada [138] (M. S. Petković, M. R. Milošević, *Reliable Computing*).

7.1 Halleyev metod sa korekcijama višeg reda – total-step metod

Neka je P monični polinom n-tog stepena ($n \geq 3$) sa prostim ili višestrukim kompleksnim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ ($2 \leq \nu \leq n$), respektivne višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ ($\mu_1 + \ldots + \mu_\nu = n$) i neka je

$$\begin{aligned} \varDelta_{0,i} &= 1, \\ \varDelta_{k,i}(z) &= \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \frac{1}{\mu_i}\left(\frac{1}{\mu_i}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{\mu_i}+\nu-1\right) \sum \prod_{\lambda=1}^{k} \frac{1}{p_\lambda!}\left(\frac{f^{(\lambda)}(z)}{\lambda! f(z)}\right)^{p_\lambda}, \end{aligned}$$

gde je $k = 1, 2, \ldots$ i druga suma na desnoj strani jednakosti ide preko svih nenegativnih celih brojeva $(p_1, \ldots, p_k)$ koji zadovoljavaju jednakosti

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_2 + \cdots + kp_k &= k, \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k &= \nu, \quad (1 \leq \nu \leq k). \end{aligned}$$

Na primer, imamo

$$\varDelta_{1,i}(z) = \frac{1}{\mu_i}\frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \varDelta_{2,i}(z) = \frac{1}{2\mu_i}\left(\frac{1}{\mu_i}+1\right)\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_i}\frac{f''(z)}{f(z)}.$$

Primetimo da se funkcija

$$v_i(z) = \frac{\Delta_{0,i}(z)}{\Delta_{1,i}(z)} = \mu_i \, \frac{f(z)}{f'(z)}$$

javlja u Schröderovom iterativnom metodu $\hat{z} = z - v_i(z)$ drugog reda, a funkcija

$$h_i(z) = \frac{\Delta_{1,i}(z)}{\Delta_{2,i}(z)} = \left(\left(\frac{1 + 1/\mu_i}{2} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f''(z)}{2f'(z)} \right)^{-1}$$

u kubno konvergentnoj Halleyevoj iterativnoj formuli $\hat{z} = z - h_i(z)$.

U našem razmatranju koristićemo skraćenice

$$\Sigma_{k,i} := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z - \zeta_j)^k} \quad (k = 1, 2).$$

Sledeća nula-relacija je izvedena u [198]:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{h_i(z)^{-1} - \dfrac{f(z)}{2f'(z)} \left(\dfrac{1}{\mu_i} \Sigma_{1,i}^2 + \Sigma_{2,i} \right)}. \tag{7.1}$$

Definišimo disk

$$S_{\lambda,i}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{W}) := \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(z - X_j) \Big)^{\lambda} + \sum_{j=i+1}^{\nu} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(z - W_j) \Big)^{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2),$$

gde su $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_\nu)$ i $\boldsymbol{W} = (W_1, \ldots, W_\nu)$ vektori čije su komponente diskovi i $\mathrm{INV}_1 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$. U Primedbi 4.2 je objašnjen razlog zašto se inverzija diskova vrši pre stepenovanja.

Uzimajući diskove $Z_1, \ldots, Z_\nu$ koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ umesto samih nula i stavljajući $z = z_i := \mathrm{mid}\ Z_i$ u (7.1), dobijamo sledeću inkluziju:

$$\zeta_i \in z_i - \mathrm{INV}_2 \bigg(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)} \Big[\frac{1}{\mu_i} S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}) \Big] \bigg), \tag{7.2}$$

gde je $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_\nu)$ i $\mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$. Zbog jednostavnosti ćemo u nastavku izostavljati iterativne indekse u m-toj iteraciji i označavaćemo veličine u kasnijoj $(m+1)$-oj iteraciji sa $\widehat{\ }$.

Neka su $(Z_1, \ldots, Z_\nu) := Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ početni inkluzivni diskovi koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, to jest, $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$, i neka je $z_i = \mathrm{mid}\, Z_i$. Relacija (7.2) sugeriše sledeći *total-step* metod za simultanu inkluziju svih nula polinoma P:

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z})\Big]\Big) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu). \tag{7.3}$$

Iterativni metod (7.3) ima red konvergencije jednak *četiri* (videti [113]). U nastavku ćemo raditi samo sa centralnom inverzijom (1.56), to jest $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$, iz razloga koji su navedeni u Primedbi 4.3.

Primedba 7.1 Izloženi metodi zahtevaju poznavanje višestrukosti nula. Efikasne procedure za određivanje reda višestrukosti mogu se naći, na primer, u [73], [75], [76], [95] i [97].

Primedba 7.2 Halleyeva korekcija $h(z)$ je sastavni deo iterativne formule (7.3). Zbog toga ćemo ovaj metod kao i njegove modifikacije koje će biti razmatrane u nastavku nazivati inkluzivnim metodima *Halleyevog tipa.*

Ubrzanje konvergencije iterativnog metoda (7.3) korišćenjem Schröderove korekcije $v(z_i)$ i Halleyeve korekcije $h_i(z_i)$ je izvedeno u [137] na sličan način kao u radovima [21] i [120]. U cilju obeležavanja ovih metoda na jedinstven način, uvešćemo dodatni simbol $k = 1$ (za Schröderovu korekciju) i $k = 2$ (za Halleyevu korekciju), to jest,

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)},\boldsymbol{Z}^{(k)}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)},\boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]\Big) \tag{7.4}$$

za $i \in \mathbb{I}_\nu$. U radu [137] je dokazano da je red konvergencije dobijenog poboljšanog metoda (7.4) jednak $k+4$. Obe korekcije $v(z_i)$ i $h(z_i)$ su označene sa $C_{k,i}$, $(k = 1, 2)$.

Dalje ubrzanje konvergencije se može dobiti korišćenjem korekcija višeg reda za nalaženje višestrukih nula. Ovde ćemo koristiti korekcije koje se dobijaju iz metoda četvrtog reda za rešavanje nelinearnih jednačina $f(z) = 0$, koji su nedavno predložili Zhou, Chen i Song u [206],

$$\hat{z} = z - u(z) \cdot \varphi(t(z)), \tag{7.5}$$

gde su

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad t(z) = \frac{f'(z - \theta u(z))}{f'(z)}, \quad \theta = \frac{2m}{m+2}, \quad \eta = \Big(\frac{m}{2+m}\Big)^{m-1}$$

i φ je najmanje dva puta diferencijabilna funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:

$$\varphi(\eta) = m, \quad \varphi'(\eta) = -\frac{1}{4}m^{3-m}(2+m)^m, \quad \varphi''(\eta) = \frac{1}{4}\,m^4\Big(\frac{m}{2+m}\Big)^{-2m}. \tag{7.6}$$

Ovde je m višestrukost tražene nule ζ funkcije f (ne neophodno algebarskog polinoma). Metod (7.5) ćemo zvati ZCS-metodom po imenima njegovih autora, a odgovarajuću korekciju $u(z)\varphi(t(z))$ ZCS-korekcijom.

Red konvergencije iterativnog metoda (7.5) je četiri, to jest,

$$\hat{z} - \zeta = \mathcal{O}_M((z-\zeta)^4), \tag{7.7}$$

za dokaz videti [206].

U nastavku ćemo zameniti z aproksimacijom z_j od ζ_j i m odgovarajućom višestrukošću μ_j od ζ_j. Aproksimacija Z_j se menja sa Z_j^* koja se računa kao

$$Z_j^* = Z_j - u_j \cdot \varphi(t_j) = Z_j - C_{3,j},$$

gde smo označili $u_j = u(z_j)$, $t_j = f'(z_j - \theta_j u_j)/f'(z_j)$, $\theta_j = 2\mu_j/(\mu_j + 2)$ i φ je proizvoljna funkcija koja zadovoljava uslove (7.6). Konkretni primeri funkcije φ su dati u Odeljku 7.4 (metodi 1 – 5)).

Na taj način smo dobili novi metod za simultanu inkluziju svih prostih ili višestrukih nula datog polinoma u obliku (7.4), za $k = 3$, to jest, radimo sa diskovima

$$\boldsymbol{Z}^{(3)} = (Z_1^{(3)}, \dots, Z_\nu^{(3)}), \quad Z_j^{(3)} = Z_j - u_j\varphi(t_j) = Z_j - C_{3,j}.$$

Primedba 7.3 Da bi se smanjilo ukupno vreme izvršavanja algoritma neophodno je u svakoj iteraciji prvo izračunati sve korekcije $C_{3,j}$.

7.2 Analiza konvergencije

Uvedimo skraćenice

$$r = \max_{1\le i\le \nu} r_i, \quad \varepsilon_i = z_i - \zeta_i, \quad \varepsilon = \max_{1\le i\le\nu} |\varepsilon_i|,$$

$$\chi_{ij} = \mathrm{mid}\,(z_i - Z_j + C_{3,j}), \quad d_{ij} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}|(|\chi_{ij}| - r_j)}, \quad g_{ij} = \frac{1}{\chi_{ij}}, \tag{7.8}$$

$$s_{\lambda,i} = \sum_{j\ne i} \mu_j g_{ij}^\lambda \quad (\lambda = 1,2), \quad \rho_{1,i} = \sum_{j\ne i}\mu_j d_{ij}, \quad \rho_{2,i} = \sum_{j\ne i}\mu_j(2|g_{ij}|d_{ij} + d_{ij}^2). \tag{7.9}$$

Prvo ćemo dokazati sledeće tvrđenje:

Lema 7.1 *Za inkluzivni metod* $(7.4)_{k=3}$ *važe sledeća tvrđenja:*

(i) $\hat{r} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^3 r)$;

(ii) $\hat{\varepsilon} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^7)$.

Dokaz. Neka je $Z_j = \{z_j; r_j\}$. Tada je $z_i - Z_j + C_{3,j} = \{\chi_{ij}; r_j\}$. Korišćenjem operacija kružne aritmetike dobijamo

$$S_{1,i} = \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j}{\{\chi_{ij}; r_j\}} = \sum_{j\neq i} \mu_j \{g_{ij}; d_{ij}\} = \{s_{1,i}; \rho_{1,i}\} \tag{7.10}$$

i

$$\begin{aligned} S_{2,i} &= \sum_{j\neq i} \mu_j \Big(\frac{1}{\{\chi_{ij}; r_j\}}\Big)^2 = \sum_{j\neq i} \mu_j \{g_{ij}; d_{ij}\}^2 = \sum_{j\neq i} \mu_j \{g_{ij}^2; 2|g_{ij}|d_{ij} + d_{ij}^2\} \\ &= \{s_{2,i}; \rho_{2,i}\}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

pa polazeći od (7.10) nalazimo

$$S_{1,i}^2 = \{s_{1,i}; \rho_{1,i}\}^2 = \{s_{1,i}^2; 2|s_{1,i}|\rho_{1,i} + \rho_{1,i}^2\}. \tag{7.12}$$

Uvedimo skraćenice

$$\delta_{1,i} = \frac{f'(z_i)}{f(z_i)} \quad \text{i} \quad \delta_{2,i} = \frac{f'(z_i)^2 - f(z_i)f''(z_i)}{f(z_i)^2}.$$

Korišćenjem identiteta

$$h_i(z_i) = \frac{f(z_i)}{\Big(\dfrac{1 + 1/\mu_i}{2}\Big)f'(z_i) - \dfrac{f(z_i)f''(z_i)}{2f'(z_i)}} = \Big(\frac{\delta_{1,i}}{2\mu_i} + \frac{\delta_{2,i}}{2\delta_{1,i}}\Big)^{-1}$$

dobijamo

$$h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i} S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(3)}, \boldsymbol{Z}^{(3)}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(3)}, \boldsymbol{Z}^{(3)})\Big] = \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\{y_i; \eta_i\}, \tag{7.13}$$

gde je

$$\{y_i; \eta_i\} = \frac{1}{\mu_i}(\delta_{1,i}^2 - S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(3)}, \boldsymbol{Z}^{(3)})) + (\delta_{2,i} - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(3)}, \boldsymbol{Z}^{(3)})).$$

Sada se metod $(7.4)_{k=3}$ se može napisati u obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{2f'(z_i)/f(z_i)}{\{y_i; \eta_i\}} = z_i - \frac{2\delta_{1,i}}{\{y_i; \eta_i\}} = z_i - 2\delta_{1,i}\Big\{\frac{1}{y_i}; \frac{\eta_i}{|y_i|(|y_i| - \eta_i)}\Big\}. \tag{7.14}$$

Iz uvedenih skraćenica (7.8) i (7.9) dobijamo ocene

$$\begin{aligned} &\chi_{ij} = \mathcal{O}_M(1), \quad g_{ij} = \mathcal{O}_M(1), \quad d_{ij} = \mathcal{O}_M(r), \\ &\rho_{1,i} = \mathcal{O}_M(r), \quad \rho_{2,i} = \mathcal{O}_M(r), \quad s_{k,i} = \mathcal{O}_M(1)\ (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{7.15}$$

S druge strane, iz razlike

$$\varSigma_{1,i} - s_{1,i} = \sum_{j \neq i} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - g_{ij} \right) = -\sum_{j \neq i} \mu_j \, \frac{z_j - \zeta_j + C^{(3)}(z_j)}{(z_i - \zeta_j)\chi_{ij}},$$

korišćenjem relacije (7.7) nalazimo

$$\varSigma_{1,i} - s_{1,i} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^4).$$

Na osnovu toga imamo

$$\varSigma_{1,i}^2 - s_{1,i}^2 = (\varSigma_{1,i} - s_{1,i})(\varSigma_{1,i} + s_{1,i}) = \mathcal{O}_M(\varepsilon^4) \tag{7.16}$$

i

$$\begin{aligned}\varSigma_{2,i} - s_{2,i} &= \sum_{j \neq i} \mu_j \left(\frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - g_{ij} \right)^2 = \sum_{j \neq i} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - g_{ij} \right) \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + g_{ij} \right) \\ &= \mathcal{O}_M(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Na osnovu dobijenih ocena (7.15), (7.16) i (7.17) i identiteta

$$\delta_{1,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \varSigma_{1,i} \quad \text{i} \quad \delta_{2,i} = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \varSigma_{2,i}$$

dobijamo iz (7.13)

$$y_i = \frac{1}{\mu_i}(\delta_{1,i}^2 - s_{1,i}^2) + (\delta_{2,i} - s_{2,i}) = \frac{2\mu_i + 2\varepsilon_i \varSigma_{1,i} + \mathcal{O}_M(\varepsilon^6)}{\varepsilon_i^2} = \mathcal{O}_M(1/\varepsilon^2) \tag{7.18}$$

i

$$\eta_i = \frac{1}{\mu_i}(2|s_{1,i}|\rho_{1,i} + \rho_{1,i}^2) + \rho_{2,i} = \mathcal{O}_M(r). \tag{7.19}$$

Korišćenjem (7.18) i (7.19) nalazimo iz (7.14)

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{2(\mu_i/\varepsilon_i + \varSigma_{1,i})}{\dfrac{2\mu_i + 2\varepsilon_i \varSigma_{1,i} + \mathcal{O}_M(\varepsilon^6)}{\varepsilon_i^2}} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^7)$$

i

$$\hat{r}_i = \frac{2(\mu_i/\varepsilon_i + \varSigma_{1,i})\eta_i}{|y_i|(|y_i| - \eta_i)} = \mathcal{O}_M(\varepsilon^3 r). \quad \square$$

Analiza konvergencije inkluzivnog metoda $(7.4)_{k=3}$ sa ZCS-korekcijama je data u sledećoj teoremi:

Teorema 7.1 *Ako su $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ dovoljno mali početni diskovi takvi da je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ i da važe implikacije $\zeta_i \in Z_i^{(0)} \Longrightarrow \zeta_i \in Z_i^{(0)} - u(z_i^{(0)})\varphi(t(z_i^{(0)}))$, za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$, tada je donja granica R-reda konvergencije familije inkluzivnih metoda $(7.4)_{k=3}$ jednaka sedam.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti, kao i do sada, usvojićemo relaciju $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$, što znači da ćemo raditi sa modelom „najgoreg slučaja". Na osnovu Leme 7.1 zaključujemo da važe sledeće relacije:

$$\hat{\varepsilon} \sim \varepsilon^7, \quad \hat{r} \sim \varepsilon^3 r.$$

Iz ovih relacija i Teoreme 1.7 formiramo R-matricu

$$T_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sa spektralnim radijusom $\rho(T_2) = 7$ i odgovarajućim sopstvenim vektorom $\boldsymbol{x}_\rho = (2, 1) > 0$. Na osnovu Teoreme 1.7 sledi

$$O_R((7.4)_{k=3}) \geq \rho\,(T_2) = 7. \quad \square$$

7.3 Single-step metodi

Konvergencija metoda (7.3) i (7.4) se može ubrzati korišćenjem Gauss-Seidelovog pristupa, što znači da već izračunate inkluzivne diskove koristimo u istoj iteraciji čim postanu dostupni. Na taj način, iz (7.3) dobijamo *single-step* metod

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}) + S_{2,i}(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z})\Big]\Big) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu) \tag{7.20}$$

i iz (7.4) *single-step* metod sa korekcijama

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(h_i(z_i)^{-1} - \frac{f(z_i)}{2f'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) + S_{2,i}(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]\Big) \tag{7.21}$$

za $i \in \mathbb{I}_\nu$ i $k = 1, 2, 3$. Ovde je $\widehat{\boldsymbol{Z}}$ vektor čije su komponente već izračunati inkluzivni diskovi u istoj iteraciji, videti definiciju suma $S_{k,i}$ u Odeljku 7.1.

Inkluzivni metodi (7.20) i (7.21) (za $k = 1, 2$) su proučavani u [137], gde je dokazano da je R-red konvergencije single-step metoda (7.20) najmanje jednak

$3 + x_\nu$, gde je $x_\nu > 1$ jedinstven, pozitivni koren jednačine $x^\nu - x - 3 = 0$ i da je opseg donje granice R-reda konvergencije metoda (7.21) jednak

$$\Omega^{(1)} = (5, 6.646), \quad \Omega^{(2)} = (6, 7.855),$$

za metod sa Schröderovom ($k = 1$) i Halleyom korekcijom ($k = 2$), respektivno.

Razmotrimo sada single-step metod (7.21) (za $k = 3$). Nalaženje R-reda konvergencije ovog metoda za konkretno ν je veoma težak zadatak zato što su 2ν nizova centara i poluprečnika i broj nula ν uključeni u analizi konvergencije. Međutim, možemo lako da odredimo opseg granica R-reda konvergencije uzimajući za granične slučajeve $\nu = 2$ i veoma veliko ν.

Prvo, kako je red konvergencije single-step metoda gotovo jednak redu konvergencije odgovarajućeg total-step metoda kada je stepen polinoma veliki, na osnovu Teoreme 7.1 zaključujemo da je $O_R((7.21)_{k=3}, \nu) \geq 7$ za veoma veliko ν.

Razmotrimo sada single-step metod $(7.21)_{k=3}$ za $\nu = 2$ i pretpostavimo da je $|\varepsilon_1^{(0)}| = |\varepsilon_2^{(0)}| = r_1^{(0)} = r_2^{(0)}$ (model „najgoreg slučaja”). Dobijamo sledeće relacije:

$$|\hat{\varepsilon}_1| \sim |\varepsilon_1|^3 |\varepsilon_2|^4, \quad |\hat{\varepsilon}_2| \sim |\varepsilon_1|^3 |\varepsilon_2|^7, \quad \hat{r}_1 \sim |\varepsilon_1|^3 r_2, \quad \hat{r}_2 \sim |\varepsilon_1|^3 |\varepsilon_2|^3 r_2.$$

Odgovarajuća R-matrica i njen spektralni radijus i sopstveni vektori su:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T_4) = 9, \quad \boldsymbol{x}_\rho = (1, 1.5, 0.4375, 0.9375) > 0.$$

Na osnovu prethodno dobijenih rezultata, možemo da formulišemo sledeće tvrđenje:

Teorema 7.2 *Opseg donje granice R-reda konvergencije familije single-step metoda* $(7.21)_{k=3}$ *je*

$$\Omega^{(3)} = (7, 9).$$

S obzirom da se povećanje reda konvergencije dobija bez dodatnih izračunavanja funkcija zaključujemo da inkluzivni metod (7.21) poseduje veliku računsku efikasnost.

7.4 Numerički primeri

Izloženi algoritmi (7.3), (7.4), (7.20) i (7.21) su testirani za rešavanje velikog broja polinomskih jednačina. Da bismo obezbedili da tačne nule budu okružene diskovima u drugoj i trećoj iteraciji, koje daju veoma male diskove, koristili smo programski paket *Matematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti. U primeni metoda (7.4) i (7.21) za ($k=3$) koristili smo različite funkcije $\varphi(x)$ koje zadovoljavaju uslove (7.6). Na taj način smo dobili različite metode definisane različitim izborima $\varphi := \varphi_j$:

Metod 1. $\varphi_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, gde su

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8}\, m^4 \Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{2m},\\
B &= -\frac{1}{4}\, m^3 (m+3) \Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{m},\\
C &= \frac{1}{8}\, m(m^3 + 6m^2 + 8m + 8).
\end{aligned}
$$

Metod 2. $\varphi_2(x) = Ax + \dfrac{B}{x} + C$, gde su

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8}\, m^4 \Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{m},\\
B &= \frac{1}{8}\, m(m+2)^3 \Big(\frac{m}{m+2}\Big)^{m},\\
C &= -\frac{1}{4}\, m(m^3 + 3m^2 + 2m - 4).
\end{aligned}
$$

Metod 3. $\varphi_3(x) = \dfrac{B + Cx}{1 + Ax}$, gde su

$$
\begin{aligned}
A &= -\Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{m},\\
B &= -\frac{m^2}{2},\\
C &= \frac{1}{2}\, m(m-2) \Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{m}.
\end{aligned}
$$

Metod 4. $\varphi_4(x) = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}$, gde su

$$A = \frac{1}{8}\, m(m^3 - 4m + 8),$$
$$B = -\frac{m}{4}\,(m-1)(m+2)^2\Big(\frac{m}{m+2}\Big)^m,$$
$$C = \frac{m}{8}\,(m+2)^3\Big(\frac{m}{m+2}\Big)^{2m}.$$

Metod 5. $\varphi_5(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{1}{B + Cx}$, gde su

$$A = -\frac{1}{2}\,\frac{m(m-2)(m+2)^3\Big(\dfrac{m}{m+2}\Big)^m}{m^3 - 4m + 8},$$
$$B = -\frac{(m^3 - 4m + 8)^2}{m(m^2 + 2m - 4)^3},$$
$$C = \frac{m^2(m^3 - 4m + 8)\Big(\dfrac{m+2}{m}\Big)^m}{(m^2 + 2m - 4)^3}.$$

Primedba 7.4 Dvo-koračni metod (7.5), sa $\varphi_3(x)$ (datim gore u Metodu 3), je proučavan u [83].

U realizaciji svih metoda korišćena je isključivo centralna inverzija, to jest, $\mathrm{INV}_1 = \mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$.

Primer 7.1 U cilju nalaženja kružnih aproksimacija višestrukih nula polinoma

$$P(z) = z^9 - 8z^8 + 25z^7 - 34z^6 + 64z^4 - 76z^3 + 8z^2 + 48z - 32,$$

primenili smo intervalne metode (7.3), (7.4) (za $k = 1, 2, 3$), (7.20) i (7.21) (za $k = 1, 2, 3$). Tačne nule polinoma P su $\zeta_1 = -1$, $z_2 = 2$, $\zeta_3 = 1 + i$, $\zeta_4 = 1 - i$, respektivne višestrukosti $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = \mu_4 = 2$. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.5\}$, sa centrima

$$z_1^{(0)} = -1.1 + 0.2i, \quad z_2^{(0)} = 2.1 - 0.2i, \quad z_3^{(0)} = 0.8 + 1.2i, \quad z_4^{(0)} = 0.9 - 1.2i.$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su Tabeli 7.1.

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(7.3)	1.89(−2)	2.48(−9)	9.34(−39)
(7.20)	6.03(−3)	3.38(−12)	7.57(−50)
$(7.4)_{k=1}$	2.69(−2)	3.18(−11)	1.81(−60)
$(7.21)_{k=1}$	8.43(−3)	3.27(−14)	1.28(−69)
$(7.4)_{k=2}$	2.77(−2)	3.41(−14)	1.05(−86)
$(7.21)_{k=2}$	9.55(−3)	3.48(−16)	4.76(−96)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 1)	2.77(−2)	2.57(−14)	7.83(−100)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 1)	9.65(−3)	3.60(−16)	1.28(−108)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 2)	2.76(−2)	1.60(−14)	6.99(−102)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 2)	9.67(−3)	2.26(−16)	1.12(−110)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 3)	2.76(−2)	7.21(−15)	3.96(−105)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 3)	9.71(−3)	9.72(−17)	4.16(−114)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 4)	2.76(−2)	1.17(−14)	3.42(−103)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 4)	9.69(−3)	1.65(−16)	4.89(−112)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 5)	2.76(−2)	7.46(−15)	5.74(−105)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 5)	9.71(−3)	9.89(−17)	4.38(−114)

Tabela 7.1: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova

Primer 7.2 Primenili smo iste intervalne metode kao u Primeru 7.1 za nalaženje inkluzivnih diskova višestrukih nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = {} & z^{13} - 8z^{12} + 27z^{11} - 50z^{10} + 51z^9 - 12z^8 - 51z^7 + 102z^6 - 104z^5 \\ & +48z^4 + 20z^3 - 56z^2 + 48z - 32.\end{aligned}$$

Njegove tačne nule su $\zeta_1 = -1$, $z_{2,3} = 1 \pm i$, $\zeta_{4,5} = \pm i$, $\zeta_6 = 2$, respektivne višestrukosti $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 2$, $\mu_6 = 3$. Početni inkluzivni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.5\}$, sa centrima

$$\begin{aligned}& z_1^{(0)} = -1.1 + 0.2i, \quad z_2^{(0)} = 1.1 + 0.9i, \quad z_3^{(0)} = 0.9 - 1.1i, \\ & z_4^{(0)} = 0.1 + 0.9i, \qquad z_5^{(0)} = 0.1 - 1.2i, \quad z_6^{(0)} = 2.2 - 0.1i.\end{aligned}$$

Maksimalni poluprečnici dobijenih diskova u prve tri iteracije dati su u Tabeli 7.2.

Primer 7.3 Iste intervalne metode smo primenili za nalaženje nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = {} & z^{18} + (2-2i)z^{17} - 14z^{16} - (18-26i)z^{15} + (80-12i)z^{14} + (26-118i)z^{13} \\ & -(238-136i)z^{12} + (146+182i)z^{11} + (307-476i)z^{10} - (380-160i)z^9 \\ & +(236+320i)z^8 + (32-712i)z^7 - (804-880i)z^6 + (512+96i)z^5\end{aligned}$$

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(7.3)	2.53(−1)	1.22(−7)	3.90(−33)
(7.20)	4.29(−2)	5.60(−10)	3.04(−42)
$(7.4)_{k=1}$	1.44(−1)	1.44(−9)	1.45(−49)
$(7.21)_{k=1}$	4.14(−2)	1.04(−10)	7.58(−56)
$(7.4)_{k=2}$	1.21(−1)	8.18(−12)	7.09(−73)
$(7.21)_{k=2}$	3.55(−2)	7.05(−13)	1.30(−79)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 1)	1.19(−1)	8.92(−12)	9.13(−81)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 1)	3.58(−2)	1.30(−12)	4.32(−86)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 2)	1.20(−1)	4.62(−12)	3.77(−83)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 2)	3.58(−2)	6.30(−13)	1.22(−88)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 3)	1.20(−1)	1.59(−12)	2.23(−87)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 3)	3.58(−2)	2.25(−13)	5.67(−93)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 4)	1.20(−1)	3.10(−12)	9.02(−85)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 4)	3.58(−2)	3.99(−13)	2.54(−90)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 5)	1.20(−1)	1.57(−12)	2.06(−87)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 5)	3.58(−2)	2.23(−13)	5.38(−93)

Tabela 7.2: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova

$$\begin{aligned}&-(80+832i)z^4-(1024-1152i)z^3-(448-256i)z^2\\&-(1024-512i)z-(768-1024i).\end{aligned}$$

Tačne nule polinoma su $\zeta_1=-1$, $z_2=-2$, $\zeta_{3,4}=1\pm i$, $\zeta_{5,6}=\pm i$, $\zeta_7=2$, $\zeta_8=-2+i$, višestrukosti $\mu_1=2$, $\mu_2=3$, $\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=2$, $\mu_7=3$, $\mu_8=2$. Početni diskovi su $Z_i^{(0)}=\{z_i^{(0)};0.4\}$, sa centrima

$$\begin{aligned}&z_1^{(0)}=-1.2+0.1i, && z_2^{(0)}=-2.2-0.1i, && z_3^{(0)}=1.1+1.2i,\\&z_4^{(0)}=0.9-1.1i, && z_5^{(0)}=-0.1+0.8i, && z_6^{(0)}=0.1-1.1i,\\&z_7^{(0)}=2.2-0.1i, && z_8^{(0)}=-2.2+0.9i.\end{aligned}$$

Dobijeni maksimalni poluprečnici su dati u Tabeli 7.3.

Iz dobijenih Tabela 7.1 – 7.3 i više drugih numeričkih eksperimenata vidimo da se brzine konvergencije razmatranih metoda, dobijene u Teoremama 7.1 i 7.2, uglavnom podudaraju sa brzinama konvergencije metoda u praksi, posebno u kasnijim iteracijama. Izuzetno mali diskovi koji su dobijeni u trećoj iteraciji nisu neophodni u praksi, ali su izloženi da bi se istakla osobina inkluzivnih metoda sa korekcijama da se dobija velika tačnost disk-aproksimacija.

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(7.3)	9.47(−2)	3.91(−7)	8.87(−31)
(7.20)	2.55(−2)	4.76(−9)	1.73(−38)
$(7.4)_{k=1}$	1.64(−1)	8.96(−8)	3.10(−42)
$(7.21)_{k=1}$	1.45(−1)	6.98(−9)	3.22(−48)
$(7.4)_{k=2}$	2.32(−1)	8.34(−10)	1.04(−62)
$(7.21)_{k=2}$	2.32(−1)	2.95(−11)	7.04(−67)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 1)	2.34(−1)	1.57(−8)	3.10(−61)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 1)	2.34(−1)	2.65(−9)	7.95(−67)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 2)	2.38(−1)	2.36(−9)	4.06(−66)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 2)	2.38(−1)	3.97(−10)	3.14(−71)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 3)	2.37(−1)	7.57(−10)	5.98(−70)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 3)	2.37(−1)	1.21(−10)	2.15(−75)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 4)	2.38(−1)	1.09(−9)	3.17(−68)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 4)	2.38(−1)	1.79(−10)	3.80(−73)
$(7.4)_{k=3}$ (Metod 5)	2.36(−1)	7.55(−10)	5.90(−70)
$(7.21)_{k=3}$ (Metod 5)	2.36(−1)	1.20(−10)	8.31(−75)

Tabela 7.3: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova

Istaknimo, takođe, veoma visoku računsku efikasnost predloženih metoda kao njihovu drugu značajnu prednost. Poboljšanje efikasnosti je postignuto korišćenjem pogodnih korekcija koje se dobijaju iz dvo-koračnih metoda za nalaženje nula četvrtog reda. Kao rezultat ove kombinacije, dobija se povećanje reda konvergencije sa 4 na 7 bez dodatnih izračunavanja vrednosti polinoma.

Poglavlje 8

Metod kvadratnog korena za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma

U ovom poglavlju ćemo se koncentrisati na intervalne metode koji se zasnivaju na nula-relaciji tipa Ostrowskog. Glavni cilj je da izvršimo preciznu analizu konvergencije koja uključuje računski proverljive početne uslove. Korišćenjem pristupa koji uključuje korekcije, predloženog prvi put u [21] i [120], konstruisaćemo modifikovane intervalne metode tipa Ostrowskog sa veoma brzom konvergencijom na račun samo nekoliko dodatnih numeričkih operacija. Na taj način se dobijaju metodi sa visokom računskom efikasnošću. Rezultati izloženi u ovom poglavlju publikovani su u radu [91] (D. M. Milošević, M. S. Petković, Đ. D. Herceg, M. R. Milošević, *Novi Sad Journal of Mathematics*).

8.1 Nula-relacija i osnovni metod

Neka je $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ monični polinom n-tog stepena $(n \geq 3)$ sa višestrukim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, $\mu_1 + \ldots + \mu_\nu = n$ $(2 \leq \nu \leq n)$, to jest,

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\nu} (z - \zeta_j)^{\mu_j} \tag{8.1}$$

i neka je

$$\delta_1(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}, \quad \delta_2(z) = \frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2}.$$

Iz faktorizacije (8.1) nalazimo

$$\delta_1(z) = \frac{d}{dz}(\log P(z)) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j} = \frac{\mu_i}{z - \zeta_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j},$$

$$\delta_2(z) = -\frac{d}{dz}(\delta_1(z)) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z-\zeta_j)^2} = \frac{\mu_i}{(z-\zeta_i)^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z-\zeta_j)^2}.$$

Izdvajanjem $z - \zeta_i$ iz poslednje relacije dobijamo sledeću nula-relaciju:

$$\zeta_i = z - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left[\delta_2(z) - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \Big(\dfrac{1}{z-\zeta_j}\Big)^2\right]_*^{1/2}}, \quad (i \in \mathbb{I}_\nu), \tag{8.2}$$

gde je $\mathbb{I}_\nu = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ indeksni skup. Simbol $*$ ukazuje da samo jedan od dobijena dva diska treba da bude izabran. Ova vrednost se bira na taj način da se desna strana jednakosti svede na ζ_i.

Pretpostavimo da imamo ν disjunktnih diskova $Z_1, \ldots, Z_\nu$ takvih da je $\zeta_j \in Z_j$ $(j \in \mathbb{I}_\nu)$. Stavimo $z = z_i = \operatorname{mid} Z_i$ u (8.2). Kako je $\zeta_j \in Z_j$ $(j \in \mathbb{I}_\nu)$, na osnovu osobine inkluzivne izotonosti nalazimo

$$\zeta_i \in z_i - \sqrt{\mu_i}\,\mathrm{INV}_2\left[\delta_2(z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(z_i - Z_j)\Big)^2\right]_*^{1/2} =: \hat{Z}_i \quad (i \in \mathbb{I}_\nu), \tag{8.3}$$

gde je $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$. Indeksi 1 i 2 ukazuju na red primene inverzije diskova; prvo se primenjuje inverzija INV_1 u sumi, a zatim inverzija INV_2 u završnom koraku.

Uvedimo sledeće vektore:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Z}^{(m)} = (Z_1^{(m)}, \ldots, Z_\nu^{(m)}) \quad \text{(tekući inkluzivni diskovi)},\\
&\boldsymbol{Z}_N^{(m)} = (Z_{N,1}^{(m)}, \ldots, Z_{N,\nu}^{(m)}),\ Z_{N,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - v(z_i^{(m)}) \quad \text{(Schröderovi diskovi)},\\
&\boldsymbol{Z}_H^{(m)} = (Z_{H,1}^{(m)}, \ldots, Z_{H,\nu}^{(m)}),\ Z_{H,i}^{(m)} = Z_i^{(m)} - h(z_i^{(m)}) \quad \text{(Halleyevi diskovi)},
\end{aligned}$$

gde su

$$v(z_i) = \mu_i \frac{P(z_i)}{P'(z_i)}, \quad h(z_i) = \frac{P(z_i)}{\Big(\dfrac{1+1/\mu_i}{2}\Big)P'(z_i) - \dfrac{P(z_i)P''(z_i)}{2P'(z_i)}},$$

i $m = 0, 1, \ldots$ je iterativni indeks. Korekcije $v(z)$ i $h(z)$ se javljaju u Schröderovom iterativnom metodu $\hat{z} = z - v(z)$ drugog reda i Halleyevom metodu $\hat{z} = z - h(z)$ trećeg reda.

U cilju lakšeg čitanja i pisanja, kao što je ranije naglašeno, često ćemo izostavljati iterativne indekse, na primer pisaćemo $z_i, r_i, \hat{z}_i, \hat{r}_i, Z_i, \hat{Z}_i, Z_{N,i}, Z_{H,i}$ umesto $z_i^{(m)}, r_i^{(m)}, z_i^{(m+1)}, r_i^{(m+1)}, Z_i^{(m)}, Z_i^{(m+1)}, Z_{N,i}^{(m)}, Z_{H,i}^{(m)}$.

Definišimo diskove

$$S_{q,i}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(x_i - X_j)\Big)^q, \quad \sum_{j=1+1}^{\nu} \mu_j \Big(\mathrm{INV}_1(x_i - Y_j)\Big)^q, \tag{8.4}$$

gde je $q = 1, 2$, $\mathrm{INV}_1 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$, a $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_\nu)$ i $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_\nu)$ su vektori čije su komponente diskovi.

Pretpostavimo da smo pronašli početne disjunktne diskove $Z_1^{(0)}, \dots, Z_\nu^{(0)}$ koji sadrže nule $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$, to jest za koje važi da je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$, za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$. Relacija (8.3) sugeriše sledeći *total-step* metod za simultanu inkluziju svih višestrukih nula polinoma P:

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \sqrt{\mu_i}\ \mathrm{INV}_2\bigg(\Big[\delta_2(z_i^{(m)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(m)}, \boldsymbol{Z}^{(m)})\Big]_*^{1/2}\bigg) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu), \tag{8.5}$$

gde su $\mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$ i $m = 0, 1, \dots$. U realizaciji iterativne formule (8.5) prvo primenjujemo inverziju INV_1 u sumama (8.4), a zatim inverziju INV_2 u završnom koraku. Red konvergencije intervalnog metoda (8.5) je *četiri*, nezavisno od tipa primenjene inverzije (videti [40]).

Prema formuli (1.59), kvadratni koren diska u (8.5) daje dva diska; simbol $*$ ukazuje da treba izabrati samo jedan od njih. Kriterijum za izbor „pravog" diska može se naći u [40] i glasi:

Neka je $\Big[\delta_2(z_i^{(m)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(m)}, \boldsymbol{Z}^{(m)})\Big]^{1/2} = D_{1,i}^{(m)} \bigcup D_{2,i}^{(m)}$. *Od diskova* $D_{1,i}^{(m)}$ *i* $D_{2,i}^{(m)}$ *treba izabrati onaj disk čiji centar minimizira*

$$\left| \frac{P'(z_i^{(m)})}{\mu_i P(z_i^{(m)})} - \mathrm{mid}\, D_{q,i}^{(m)} \right| \quad (q = 1, 2).$$

Konvergencija metoda (8.5) se može ubrzati primenom Gauss-Seidelovog pristupa [113]. Koristeći već izračunate kružne aproksimacije u istoj iteraciji. Na taj način dobijamo single-step metod

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \sqrt{\mu_i}\ \mathrm{INV}_2\bigg(\Big[\delta_2(z_i^{(m)}) - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(m+1)}, \boldsymbol{Z}^{(m)})\Big]_*^{1/2}\bigg) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu). \tag{8.6}$$

R-red konvergencije single-step metoda (8.6) je najmanje $3 + x_\nu$, gde je x_ν jedinstven pozitivni koren jednačine $x^\nu - x - 3 = 0$, videti [113, Pogl. 4]. Vrednost R-reda pripada opsegu $(4, 5.303)$ za $\nu \geq 2$.

Primedba 8.1 Izostavljajući sumu u iterativnim formulama (8.5) i (8.6) dobijamo iterativnu formulu Ostrowskog [103]

$$z^{(m+1)} = z^{m)} - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left[\delta_2\big(z^{(m)}\big)\right]_*^{1/2}}$$

sa kubnom konvergencijom, takođe poznatu kao metod kvadratnog korena. Iz tog razloga ćemo metode (8.5) i (8.6), kao i njihove modifikacije koje će biti razmatrane u ovom poglavlju, nazivati metodima *tipa Ostrowskog* ili *metodima kvadratnog korena.*

8.2 Inkluzivni metodi sa korekcijama

Uvedimo sledeće skraćenice

$$r^{(m)} = \max_{1\le i\le \nu} r_i^{(m)}, \quad \rho^{(m)} = \min_{\substack{1\le i,j\le \nu \\ i\neq j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}| - r_j^{(m)}\},$$

$$\varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i, \quad |\varepsilon^{(m)}| = \max_{1\le i\le \nu} |\varepsilon_i^{(m)}|, \quad \mu = \min_{1\le i\le \nu} \mu_i,$$

$$\varSigma_{q,i}^{(m)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i^{(m)} - \zeta_j)^q} \quad \delta_{q,i}^{(m)} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i^{(m)} - \zeta_j)^q}, \quad (q = 1, 2).$$

Dalje povećanje brzine konvergencije iterativnog metoda (8.5) može se postići korišćenjem Schröderove i Halleyeve korekcije na sličan način kao u radovima [21], [108] i [120]. U toj konstrukciji podrazumevamo da su početni diskovi $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$, koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, izabrani na takav način da diskovi $Z_i^{(0)} - v(\operatorname{mid}(Z_i^{(0)}))$ ili $Z_i^{(0)} - h(\operatorname{mid}(Z_i^{(0)}))$ takođe sadrže nule ζ_i $(i \in \mathbb{I}_\nu)$. Ovo je predmet razmatranja sledećeg tvrđenja. U nastavku ćemo zbog bolje preglednosti pisati $v_i = v(z_i)$ i $h_i = h(z_i)$.

Lema 8.1 *Neka su $Z_1, \ldots, Z_\nu$ inkluzivni diskovi za nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, $\zeta_i \in Z_i$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$ i neka je $z_i = \operatorname{mid} Z_i$, $r_i = \operatorname{rad} Z_i$, $r := \max\{r_1, \ldots, r_\nu\}$, $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$. Ako su inkluzivni diskovi $Z_1, \ldots, Z_\nu$ tako izabrani da važi nejednakost*

$$\rho > 3(n - \mu)r, \tag{8.7}$$

tada važe sledeća tvrđenja za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$:

(i) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{N,i} := Z_i - v_i$;

(ii) $\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_{H,i} := Z_i - h_i$.

Dokaz. *Za* (i): Na osnovu osobina kružne aritmetike, dovoljno je da dokažemo implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - v_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Korišćenjem nejednakosti trougla

$$|z_i - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - |z_j - \zeta_j| \ge |z_i - z_j| - r_j \ge \rho,$$

nalazimo

$$|\Sigma_{q,i}| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^q}\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{|z_i - \zeta_j|^q} \le \frac{n-\mu_i}{\rho^q} \quad (q = 1, 2). \tag{8.8}$$

S obzirom na (8.7) i (8.8) (za $q = 1$) imamo

$$r_i < \frac{\rho}{3(n-\mu_i)} \le \frac{1}{3|\Sigma_{1,i}|},$$

odakle je

$$\frac{r_i|\Sigma_{1,i}|}{\mu_i - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{2}.$$

Kako je $|\varepsilon_i| = |z_i - \zeta_i| \le r_i$, na osnovu poslednje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} |z_i - v_i - \zeta_i| &= |\varepsilon_i - v_i| = |\varepsilon_i - \mu_i/\delta_{1,i}| = |\varepsilon_i|^2\left|\frac{\Sigma_{1,i}}{\mu_i + \varepsilon_i\Sigma_{1,i}}\right| \\ &\le \frac{r_i^2|\Sigma_{1,i}|}{\mu_i - r_i|\Sigma_{1,i}|} < \frac{1}{2}\cdot r_i < r_i. \end{aligned}$$

Za (ii): Slično kao u dokazu tvrđenja (i), dokazaćemo implikaciju

$$|z_i - \zeta_i| \le r_i \Longrightarrow |z_i - h_i - \zeta_i| \le r_i.$$

Korišćenjem oznaka

$$\delta_{q,i} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^q} \quad (q = 1, 2),$$

nalazimo

$$h_i = \frac{2\delta_{1,i}}{\dfrac{1}{\mu_i}\,\delta_{1,i}^2 + \delta_{2,i}} = \frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\mu_j}{z_i - \zeta_j}}{\dfrac{1}{\mu_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\mu_j}{z_i - \zeta_j}\right)^2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2(\mu_i/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})}{(\mu_i/\varepsilon_i + \Sigma_{1,i})^2/\mu_i + \mu_i/\varepsilon_i^2 + \Sigma_{2,i}} \\
&= \frac{2\varepsilon_i(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}.
\end{aligned}
$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
z_i - h_i - \zeta_i &= \varepsilon_i - \frac{2\varepsilon_i(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})} \\
&= \frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})},
\end{aligned}
$$

tako da je na osnovu (8.7) i (8.8)

$$
\begin{aligned}
|z_i - h_i - \zeta_i| &= \left| \frac{\varepsilon_i^3(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})} \right| \\
&< \frac{\dfrac{1}{\mu_i}\Big(\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)^2 + \dfrac{n-\mu_i}{\rho^2}}{2\mu_i - 2\dfrac{n-\mu_i}{\rho} r_i - \dfrac{1}{\mu_i}\Big(\dfrac{n-\mu_i}{\rho}\Big)^2 r_i^2 - \dfrac{n-\mu_i}{\rho^2} r_i^2} \cdot r_i^3 \\
&< \frac{\dfrac{(n-\mu_i) n r_i^2}{\mu_i \rho^2}}{\dfrac{4}{3} - \dfrac{n(n-\mu_i) r_i^2}{\mu_i \rho^2}} \cdot r_i < \frac{\dfrac{n}{9\mu_i(n-\mu_i)}}{\dfrac{4}{3} - \dfrac{n}{9\mu_i(n-\mu_i)}} \cdot r_i \\
&\le \frac{1}{7} \cdot r_i < r_i. \quad \square
\end{aligned}
$$

Polazeći od nula-relacije (8.2) možemo konstruisati inkluzivni total-step metod tipa Ostrowskog sa Schröderovom i Halleyevom korekcijom za inkluziju svih višestrukih nula polinoma. Da bismo proučavali konvergencije oba metoda istovremeno, uvešćemo dodatni indeks $k = 1$ (za Schröderovu korekciju) i $k = 2$ (za Halleyevu korekciju). Odgovarajuće vektore aproksimacija diskova ćemo označiti sa

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}^{(0)} &= (Z_1, \ldots, Z_\nu), \\
\boldsymbol{Z}^{(1)} &= (Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\nu^{(1)}) = (Z_{N,1}, \ldots, Z_{N,\nu}), \\
\boldsymbol{Z}^{(2)} &= (Z_1^{(2)}, \ldots, Z_\nu^{(2)}) = (Z_{H,1}, \ldots, Z_{H,\nu}),
\end{aligned}
$$

a korekcije sa $v_i = C_{1,i}$ i $h_i = C_{2,i}$. Ako radimo bez korekcija ($k = 0$), tada ćemo vektor aproksimacija diskova označavati sa $\boldsymbol{Z}^{(0)}$.

Kao i ranije, u nastavku ćemo izostavljati iterativne indekse u m-toj iteraciji i označavati veličine u $(m+1)$-oj iteraciji dodatnim simbolom $\widehat{\ }$. Sada smo u mogućnosti da metode tipa Ostrowskog sa i bez korekcija možemo da predstavimo u jedinstvenom obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \sqrt{\mu_i}\ \mathrm{INV}_2\Big(\Big[\delta_{2,i} - S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]_*^{1/2}\Big) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ k = 0,1,2). \qquad (8.9)$$

8.3 Analiza konvergencije

Pre formulisanja teoreme o konvergenciji i početnih uslova za sigurnu konvergenciju intervalnog simultanog metoda (8.9) sa $k = 1$ i 2, daćemo u Lemi 8.2 neke neophodne ocene.

Prvo nalazimo

$$z_i - Z_j + C_{k,j} = \{z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1}; r_j\},$$

gde su

$$\xi_j^{(1)} = -\frac{\Sigma_{1,j}}{\mu_j + \varepsilon_j \Sigma_{1,j}} \quad \text{i} \quad \xi_j^{(2)} = -\frac{\Sigma_{1,j}^2/\mu_j + \Sigma_{2,j}}{2\mu_j + 2\varepsilon_j\Sigma_{1,j} + \varepsilon_j^2(\Sigma_{1,j}^2/\mu_j + \Sigma_{2,j})}.$$

U cilju bolje preglednosti uvedimo sledeće skraćenice (uzimajući $k = 1,2$):

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}^{(k)} &= \mathrm{mid}\ (z_i - Z_j + c_k(z_j)) = z_i - \zeta_j + \xi_j^{(k)}\varepsilon_j^{k+1},\\
d_{ij}^{(k)} &= \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j)}, \quad g_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}},\\
s_i^{(k)} &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \frac{1}{(z_i - z_j + C_{k,j})^2}, \quad t_i^{(k)} = \delta_{2,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2,\\
\eta_i^{(k)} &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j\Big[2|g_{ij}^{(k)}|d_{ij}^{(k)} + (d_{ij}^{(k)})^2\Big], \quad \omega_i^{(k)} = \frac{\eta_i^{(k)}}{\sqrt{|t_i^{(k)}|} + \sqrt{|t_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)}}}.
\end{aligned}$$

U dokazu Leme 8.1 našli smo sledeće granice:

$$|z_i - \zeta_j| \geq \rho \quad \text{i} \quad |\Sigma_{k,j}| \leq \frac{n - \mu_j}{\rho^q} \quad (q = 1,2),$$

tako da se za $\xi_j^{(1)}$ i $\xi_j^{(2)}$ dobijaju sledeće granice:

$$|\xi_j^{(1)}| \le \frac{|\Sigma_{1,j}|}{\mu_j - |\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}|} \le \frac{\dfrac{n-\mu_j}{\rho}}{\mu_j - \dfrac{(n-\mu_j)r}{\rho}} < \frac{3(n-\mu_j)}{2\rho}$$

i

$$\begin{aligned}|\xi_j^{(2)}| &\le \frac{\dfrac{|\Sigma_{1,j}|^2}{\mu_j} + |\Sigma_{2,j}|}{2\mu_j - 2|\varepsilon_j||\Sigma_{1,j}| - |\varepsilon_j|^2\Big(\dfrac{|\Sigma_{1,j}|^2}{\mu_j} + |\Sigma_{2,j}|\Big)} \\ &\le \frac{\dfrac{(n-\mu_j)n}{\mu_j\rho^2}}{2\mu_j - 2r\dfrac{n-\mu_j}{\rho} - r^2\dfrac{(n-\mu_j)n}{\mu_j\rho^2}} < \frac{6}{7}\frac{(n-\mu_j)n}{\mu_j\rho^2},\end{aligned}$$

za svako $j \in \mathbb{I}_\nu$. Na osnovu poslednje dve nejednakosti sada ocenjujemo

$$\begin{aligned}|\chi_{ij}^{(1)}| &= |z_i - \zeta_j + \xi_j^{(1)}\varepsilon_j^2| \ge |z_i - \zeta_j| - |\xi_j^{(1)}||\varepsilon_j|^2 \\ &> \rho - \frac{3(n-\mu_j)r^2}{2\rho} > \rho - \frac{r}{2}, \\ |\chi_{ij}^{(2)}| &= |z_i - \zeta_j + \xi_j^{(2)}\varepsilon_j^3| \ge |z_i - \zeta_j| - |\xi_j^{(2)}||\varepsilon_j|^3 \\ &> \rho - \frac{6}{7}\frac{(n-\mu_j)nr^3}{\mu_j\rho^2} > \rho - \frac{1}{7}r.\end{aligned}$$

Prema tome, za $k = 1, 2$, je

$$|\chi_{ij}^{(k)}| > \rho - \frac{r}{2} \tag{8.10}$$

i

$$|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j) > \Big(\rho - \frac{r}{2}\Big)\Big(\rho - \frac{3r}{2}\Big) = \rho^2\Big(1 - \frac{r}{2\rho}\Big)\Big(1 - \frac{3r}{2\rho}\Big) > \frac{3}{5}\rho^2.$$

Korišćenjem nejednakosti (8.7) nalazimo

$$d_{ij}^{(k)} = \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j)} < \frac{5r}{3\rho^2}. \tag{8.11}$$

Slično, iz (8.7) i (8.10) dobijamo

$$|g_{ij}^{(k)}| = \frac{1}{|\chi_{ij}^{(k)}|} < \frac{1}{\rho - \dfrac{r}{2}} < \frac{12}{11\rho}. \tag{8.12}$$

Lema 8.2 *Ako nejednakost* (8.7) *važi, tada je:*

(i) $|\delta_{2,i}| > \dfrac{17\mu_i}{18|\varepsilon_i|^2} \geq \dfrac{17\mu_i}{18r_i^2}$;

(ii) $|t_i^{(k)}| > \dfrac{4\mu_i}{5|\varepsilon_i|^2} \geq \dfrac{4\mu_i}{5r_i^2}$;

(iii) $|t_i^{(k)}| > \eta_i^{(k)}$;

(iv) $\omega_i^{(k)} < \dfrac{12(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{5\rho^3}$;

(v) $\omega_i^{(k)}|\varepsilon_i| < \dfrac{1}{45}$.

Dokaz. *Za* (i): Sledeća ocena dobijena je korišćenjem (8.7):

$$
\begin{aligned}
|\delta_{2,i}| &= \Big|\frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i}\Big| \geq \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\mu_j}{|z_i-\zeta_j|^2} \geq \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(1 - \frac{(n-\mu_i)r^2}{\rho^2}\Big)\\
&> \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(1 - \frac{n-\mu}{\big(3(n-\mu)\big)^2}\Big) = \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(1 - \frac{1}{9(n-\mu)}\Big) \geq \frac{17\mu_i}{18|\varepsilon_i|^2} \geq \frac{17\mu_i}{18r_i^2}.
\end{aligned}
$$

Za (ii): Na osnovu (8.12) dobijamo

$$
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} |g_{ij}^{(k)}|^2 \leq \frac{144(n-\mu_i)}{121\rho^2},
$$

pa korišćenjem ove nejednakosti, (8.7) i tvrđenja (i) imamo da je

$$
\begin{aligned}
|t_i^{(k)}| &= \Big|\delta_{2,i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2\Big| \geq |\delta_{2,i}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j |g_{ij}^{(k)}|^2\\
&> \frac{17\mu_i}{18|\varepsilon_i|^2} - \frac{144(n-\mu_i)}{121\rho^2} \geq \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(\frac{17}{18} - \frac{144(n-\mu_i)}{121}\cdot\frac{r^2}{\rho^2}\Big)\\
&> \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(\frac{17}{18} - \frac{144}{121\cdot 9(n-\mu)}\Big) \geq \frac{\mu_i}{|\varepsilon_i|^2}\Big(\frac{17}{18} - \frac{8}{121}\Big) > \frac{4\mu_i}{5|\varepsilon_i|^2} \geq \frac{4\mu_i}{5r_i^2}.
\end{aligned}
$$

Za (iii): Imajući u vidu (8.11) i (8.12) nalazimo

$$
\eta_i^{(k)} < \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \Big[2\frac{12}{11\rho}\cdot\frac{5r}{3\rho^2} + \Big(\frac{5r}{3\rho^2}\Big)^2\Big] < \frac{41(n-\mu)r}{10\rho^3} =: \gamma_n r, \tag{8.13}
$$

gde je

$$\gamma_n = \frac{41(n-\mu)}{10\rho^3}.$$

Korišćenjem granice (8.13), uslova (8.7) i tvrđenja (ii) dobijamo

$$|t_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)} > |t_i^{(k)}| - \gamma_n r > \frac{4\mu_i}{5r_i^2} - \frac{41(n-\mu)r}{10\rho^3} > \frac{27}{\rho^2},$$

što znači da je $|t_i^{(k)}| > \eta_i^{(k)}$.

Za (iv) i (v): Na osnovu (8.7), (8.13), tvrđenja (ii) i granice

$$\gamma_n r|\varepsilon_i|^2 \le \frac{41(n-\mu)r^3}{10\rho^3} < \frac{41(n-\mu)}{10} \cdot \frac{1}{\left(3(n-\mu)\right)^3} = \frac{41}{10\cdot 27(n-\mu)^2} < \frac{1}{25}$$

nalazimo

$$\omega_i^{(k)} = \frac{\eta_i^{(k)}}{\sqrt{|t_i^{(k)}|} + \sqrt{|t_i^{(k)}| - \eta_i^{(k)}}} < \frac{12(n-\mu_i)|\varepsilon_i|r}{5\rho^3},$$

odakle je

$$\omega_i^{(k)}|\varepsilon_i| < \frac{12(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^2 r}{5\rho^3} \le \frac{12(n-\mu)r^3}{5\rho^3} < \frac{4}{45(n-\mu)^2} \le \frac{1}{45}. \qquad \square$$

Pod računski proverljivim početnim uslovima, za total-step metod (8.9) možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 8.1 *Pretpostavimo da su početni diskovi* $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ *tako izabrani da* $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ $(i \in \mathbb{I}_\nu)$ *i da nejednakost*

$$\rho^{(0)} > 3(n-\mu)r^{(0)} \tag{8.14}$$

važi. Tada je intervalni metod (8.9) *konvergentan i za svako* $i \in \mathbb{I}_\nu$ *i* $m = 1, 2, \ldots$ *važe sledeća tvrđenja:*

1° $\rho^{(m)} > 3(n-\mu)r^{(m)}$;

2° $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$;

3° *donja granica R-reda konvergencije intervalnog metoda* (8.9) *je*

$$O_R(8.9) \ge \begin{cases} k+4 \quad (k=1,2), \ \textit{ako je} \ \ \mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}, \\ 2+\sqrt{7} \cong 4.646, \ \ \textit{ako je} \ \ \mathrm{INV}_1 = ()^{-1}. \end{cases}$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da početni uslov (8.14) obezbeđuje da su početni diskovi $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ disjunktni po parovima. Zaista, za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$ imamo

$$|z_i^{(0)} - z_j^{(0)}| > \rho^{(0)} > 3(n-\mu)r^{(0)} > 2r^{(0)} \geq r_i^{(0)} + r_j^{(0)},$$

što znači da $Z_i^{(0)} \cap Z_j^{(0)} = \emptyset$ (na osnovu (1.51)).

Tvrđenja Teoreme 8.1 ćemo dokazati indukcijom. Često ćemo izostavljati iterativne indekse i podrazumevaćemo da indeksi $k \in \{1, 2\}$ ukazuju na tip primenjene korekcije. Prvo, neka je $m = 0$ i uzmimo u obzir početni uslov (8.14). Tada, na osnovu Leme 8.1, direktno dobijamo implikaciju

$$\zeta_i \in Z_i \Longrightarrow \zeta_i \in Z_i^{(k)} := Z_i - C_{k,i} \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ k = 1, 2),$$

koja je neophodna da bi se očuvala osobina inkluzivne izotonosti intervalnog metoda (8.9). Treba još dokazati da su dobijeni inkluzivni diskovi $Z_1^{(k)}, \ldots, Z_\nu^{(k)}$ disjunktni po parovima. Korišćenjem nekih granica iz dokaza Leme 8.1 nalazimo

$$|v_i| = \left|\frac{\mu_i \varepsilon_i}{\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1.i}}\right| \leq \frac{r_i}{1 - r_i|\Sigma_{1.i}|/\mu_i} \leq \frac{3}{2}\, r_i < 2r_i \leq 2r$$

i

$$\begin{aligned}|h_i| &= \left|\frac{2\varepsilon_i(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}{2\mu_i + 2\varepsilon_i \Sigma_{1,i} + \varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}\right| \\ &< \frac{1}{\left|1 + \dfrac{\varepsilon_i^2(\Sigma_{1,i}^2/\mu_i + \Sigma_{2,i})}{2(\mu_i + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}\right|} \cdot r_i < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{8}} \cdot r_i = \frac{8}{7}\, r_i < 2r_i \leq 2r,\end{aligned}$$

tako da je

$$\begin{aligned}|\operatorname{mid} Z_i^{(k)} - \operatorname{mid} Z_j^{(k)}| &= |z_i - C_{k,i} - z_j + C_{k,j}| \\ &\geq |z_i - z_j| - |C_{k,i}| - |C_{k,j}| \\ &> \rho - 4r > 3(n-\mu)r - 4r \geq r_i + r_j.\end{aligned}$$

Dakle, $Z_i^{(k)} \cap Z_j^{(k)} = \emptyset$ $(i \neq j)$ zbog (1.51). Navedene nejednakosti su neophodne da bi inkluzivni metod (8.9) bio dobro definisan.

Podsetimo da u iterativnoj formuli (8.9) kombinujemo dva tipa inverzije. Iz tog razloga, koristićemo indekse „e" (exact) i „c" (central) da bismo ukazali na tip korišćene inverzije u formuli (8.9).

1) *Slučaj* $\mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}$

Razmotrimo prvo slučaj kada je $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$. Primenjujući operacije kružne aritmetike i centralnu inverziju (1.56), dobijamo

$$\begin{aligned} S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - Z_j + C_{k,j}} \right)^2 \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \left\{ g_{ij}^{(k)}; \frac{r_j}{|\chi_{ij}^{(k)}|(|\chi_{ij}^{(k)}| - r_j)} \right\}^2 \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \left\{ g_{ij}^{(k)}; d_{ij}^{(k)} \right\}^2 = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2; \eta_i^{(k)} \right\}. \end{aligned}$$

Sada se iterativna formula (8.9) može napisati u obliku

$$\widehat{Z}_i = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left\{ \delta_{2,i} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2; \eta_i^{(k)} \right\}_*^{1/2}} = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left\{ (t_i^{(k)})^{1/2}; \omega_i^{(k)} \right\}}. \tag{8.15}$$

Primenjujući centralnu inverziju (1.56) još jednom ($\mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$), dobijamo iz (8.15)

$$\widehat{Z}_i = z_i - \sqrt{\mu_i} \left\{ \frac{1}{(t_i^{(k)})^{1/2}}; \frac{\omega_i^{(k)}}{|t_i^{(k)}|^{1/2}(|t_i^{(k)}|^{1/2} - \omega_i)} \right\}. \tag{8.16}$$

Na osnovu tvrđenja (ii), (iv) i (v) Leme 8.1, iz (8.16), nalazimo

$$\begin{aligned} \hat{r}_i = \operatorname{rad} \widehat{Z}_i &= \frac{\sqrt{\mu_i}\, \omega_i^{(k)}}{|t_i^{(k)}|^{1/2}(|t_i^{(k)}|^{1/2} - \omega_i^{(k)})} < \frac{\dfrac{12\sqrt{\mu_i}\,(n-\mu_i)|\varepsilon_i| r}{5\rho^3}}{\dfrac{\sqrt{4/5}}{|\varepsilon_i|}\left(\dfrac{\sqrt{4/5}}{|\varepsilon_i|} - \omega_i^{(k)} \right)} \\ &= \frac{12\sqrt{\mu_i}\,(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{5\rho^3 \sqrt{4/5}(\sqrt{4/5} - |\varepsilon_i|\omega_i^{(k)})} < \frac{7\sqrt{\mu_i}\,(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{2\rho^3}. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo ocene

$$\hat{r} = \mathcal{O}(\epsilon^3 r) \tag{8.17}$$

i

$$\hat{r}_i < \frac{r_i}{25}. \tag{8.18}$$

Iz (8.16) imamo

$$\hat{z}_i = \operatorname{mid} \widehat{Z}_i = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{(t_i^{(k)})^{1/2}} = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left[\delta_{2,i} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2\right]_*^{1/2}}, \tag{8.19}$$

i na osnovu tvrđenja (ii) Leme 8.1 nalazimo

$$|\hat{z}_i - z_i| = \frac{\sqrt{\mu_i}}{|t_i^{(k)}|^{1/2}} < \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{4/5}} < \frac{3}{2} r_i. \tag{8.20}$$

Neka je $A_i = \Sigma_{2,i} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2$, tada je

$$\begin{aligned} A_i = \Sigma_{2,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \left[\frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - \frac{1}{(\chi_{ij}^{(k)})^2}\right] \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}}\right)\left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}}\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \left(\frac{\zeta_j^{(k)} \varepsilon_j^{k+1}}{(z_i - \zeta_j)\chi_{ij}^{(k)}}\right)\left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + \frac{1}{\chi_{ij}^{(k)}}\right), \end{aligned}$$

odakle sledi

$$|A_i| = \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) \quad (k = 1, 2). \tag{8.21}$$

Kako je

$$\delta_{2,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2 = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2} + \Sigma_{2,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2 = \frac{\mu_i}{\varepsilon_i^2}(1 + \varepsilon_i^2 A_i),$$

iz (8.19) dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \sqrt{\mu_i}/(t^{(k)})^{1/2} = \varepsilon_i - \frac{\sqrt{\mu_i}\, \varepsilon_i}{\left[1 + \varepsilon_i^2 A_i\right]_*^{1/2}}. \tag{8.22}$$

Smatrajući da su aproksimacije dovoljno blizu nula (što je obezbeđeno sa (8.14)) i uzimajući u obzir da je $|\varepsilon_i^2 A_i| = \mathcal{O}(|\varepsilon_i|^{k+3})$ veoma mala veličina, možemo da koristimo aproksimaciju

$$\left[1 + \varepsilon_i^2 A_i\right]_*^{1/2} \cong 1 + \frac{\varepsilon_i^2 A_i}{2}.$$

Na osnovu prethodne aproksimacije dobijamo iz (8.22)

$$\hat{\varepsilon}_i \cong \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1 + \dfrac{\varepsilon_i^2 A_i}{2}} = \frac{\varepsilon_i^3 A_i}{2 + \varepsilon_i^2 A_i}.$$

Imenilac je očito ograničena veličina i teži 2 kada $\varepsilon_i \to 0$. Na osnovu ove činjenice i (8.21) dobijamo

$$|\hat{\varepsilon}_i| = |\varepsilon_i|^3 \mathcal{O}_M(|\varepsilon|^{k+1}). \tag{8.23}$$

Korišćenje nejednakosti (8.14), (8.18) i (8.20) daje

$$\begin{aligned}|\hat{z}_i - \hat{z}_j| &\geq |z_i - z_j| - |\hat{z}_i - z_i| - |\hat{z}_j - z_j| > \rho + r_j - \frac{3}{2} r_i - \frac{3}{2} r_j \\ &> 3(n-\mu)r - 2r > 25\hat{r}\Big[3(n-\mu) - 2\Big].\end{aligned}$$

Na osnovu poslednje nejednakosti dobijamo da je za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| > 2\hat{r} \geq \hat{r}_i + \hat{r}_j \quad (i \neq j),$$

što znači da su diskovi $\widehat{Z}_1, \ldots, \widehat{Z}_\nu$ disjunktni po parovima (na osnovu (1.51)). Dalje, imamo za proizvoljni par $i, j \in \mathbb{I}_\nu$ $(i \neq j)$

$$|\hat{z}_i - \hat{z}_j| - \hat{r}_j > 25\hat{r}[3(n-\mu) - 2] - \hat{r} > 3(n-\mu)\hat{r}.$$

Odavde sledi

$$\hat{\rho} > 3(n-\mu)\hat{r}.$$

Prema tome dokazali smo da početni uslov (8.14) dovodi do nejednakosti istog oblika, samo za vrednost indeksa $m = 1$. Pored toga, zapazimo da nejednakost (8.18) u obliku $r^{(1)} < r^{(0)}/25$ ukazuje na činjenicu da nove kružne aproksimacije $Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\nu^{(1)}$ imaju manji poluprečnik.

Ponavljajući gornju analizu i argumentaciju za proizvoljnu vrednost indeksa $m \geq 0$, možemo dokazati sve prethodno dobijene relacije za vrednost indeksa $m + 1$. Kako su ove relacije već dokazane za $m = 0$, matematičkom indukcijom konstatujemo da, pod pretpostavkom (8.14), one važe za svako $m \geq 1$. Izdvajamo sledeće dve relacije

$$\rho^{(m)} > 3(n-\mu)r^{(m)} \tag{8.24}$$

(tvrđenje 1°) i

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{25}. \tag{8.25}$$

Iz nejednakosti (8.25) zaključujemo da niz maksimalnih poluprečnika $\{r^{(m)}\}$ teži nuli, što znači da je inkluzivni metod (8.9) *konvergentan.* Dalje, kako važi nejednakost (8.24), zaključujemo da implikacije razmatrane u Lemi 8.1 važe za proizvoljno m. Dakle, metod tipa Ostrowskog (8.9) sa korekcijama je dobro definisan u svakom iterativnom koraku.

Pretpostavimo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$. Tada iz (8.3) i (8.9) dobijamo da je $\zeta_i \in Z_i^{(m+1)}$ (na osnovu osobine inkluzivne izotonosti). Kako je $\zeta_i \in Z_i^{(0)}$ (pretpostavka Teoreme 8.2) sledi matematičkom indukcijom da je $\zeta_i \in Z_i^{(m)}$ za svako $i \in \mathbb{I}_\nu$ i $m = 0, 1, \ldots$ (tvrđenje 2°).

Ostaje da se odredi donja granica R-reda konvergencije metoda (8.9) (tvrđenje 3°). Iz (8.17) primećujemo da su nizovi $\{r_i^{(m)}\}$ i $\{\varepsilon_i^{(m)}\}$ poluprečnika i grešaka međusobno zavisni. Zbog jednostavnosti, što je uobičajeno u ovom tipu analize, usvojićemo da je $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$ što znači da radimo sa modelom „najgoreg slučaja". Ova pretpostavka nema uticaja na konačni rezultat s obzirom da se donja granica R-reda konvergencije dobija u graničnom procesu.

Iz (8.17) i (8.23) primećujemo da se nizovi $\{\varepsilon^{(m)}\}$ i $\{r^{(m)}\}$ ponašaju po sledećim relacijama

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^{k+4}, \quad r^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^3 r^{(m)} \quad (k = 1, 2).$$

Korišćenjem ovih relacija formirajmo R-matricu $T_2^{(c)} = \begin{bmatrix} k+4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sa spektralnim radijusom $\rho(T_2^{(c)}) = k + 4$ i odgovarajućim karakterističnim vektorom $\boldsymbol{x}_\rho = ((k+3)/3, 1) > 0$. Sada, prema Teoremi 1.7, imamo

$$O_R((8.9)_c) \ge \rho\,(T_2^{(c)}) = k + 4 \quad (k = 1, 2).$$

Ostaje da diskutujemo slučaj kada se tačna inverzija (1.55) primeni u završnom koraku, to jest, $\mathrm{INV}_2 = (\,)^{-1}$. Primenjujući ovu inverziju dobijamo iz (8.15)

$$\widehat{Z}_i = z_i - \sqrt{\mu_i}\, \frac{\left\{(\bar{t}_i^{(k)})^{1/2}; \omega_i^{(k)}\right\}}{|t_i^{(k)}| - (\omega_i^{(k)})^2}, \tag{8.26}$$

što daje

$$\begin{aligned} \hat{r}_i = \operatorname{rad} \widehat{Z}_i &= \frac{\sqrt{\mu_i}\,\omega_i^{(k)}}{|t_i^{(k)}| - (\omega_i^{(k)})^2} < \frac{\dfrac{12\sqrt{\mu_i}\,(n-\mu_i)|\varepsilon_i| r}{5\rho^3}}{\dfrac{4}{5|\varepsilon_i|^2} - (\omega_i^{(k)})^2} \\ &< \frac{7\sqrt{\mu_i}\,(n-\mu_i)|\varepsilon_i|^3 r}{2\rho^3}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\hat{r} = \mathcal{O}(\varepsilon^3 r). \tag{8.27}$$

Iz (8.26) nalazimo

$$\begin{aligned} \hat{z}_i = \operatorname{mid} \widehat{Z}_i &= z_i - \sqrt{\mu_i}\ \frac{(\bar{t}_i^{(k)})^{1/2}}{|t_i^{(k)}| - (\omega_i^{(k)})^2} \\ &= z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{(t_i^{(k)})^{1/2}\Big(1 - (\omega_i^{(k)})^2/|t_i^{(k)}|\Big)}. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Korišćenjem do sada dobijenih ocena, nalazimo $|\omega_i^{(k)}| = \mathcal{O}(r|\varepsilon|)$ i $c_i^{(k)} = \mathcal{O}_M(1/|\varepsilon|^2)$ tako da je $|\omega_i^{(k)}|^2/|t_i^{(k)}| = \mathcal{O}(r^2|\varepsilon|^4)$. Razvijanjem u geometrijski red u (8.28) imamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{(t_i^{(k)})^{1/2}}\left(1 + \frac{(\omega_i^{(k)})^2}{|t_i^{(k)}|} + \cdots\right) = z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{(t_i^{(k)})^{1/2}} + \mathcal{O}_M(r^2|\varepsilon|^5).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{(t_i^{(k)})^{1/2}} + \mathcal{O}_M(r^2|\varepsilon|^5) = \varepsilon_i^3 \mathcal{O}_M(|\varepsilon|^{k+1}) + \mathcal{O}_M(r^2|\varepsilon|^5) \\ &= \varepsilon_i^3 \mathcal{O}_M(\alpha|\varepsilon|^{k+1} + \beta r^2|\varepsilon|^2), \end{aligned}$$

gde su α i β kompleksne konstante takve da je $|\alpha| = \mathcal{O}(1)$ i $\beta = \mathcal{O}(1)$. Prema tome,

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^3 \mathcal{O}_M(|\varepsilon|^{k+1}) \quad (k = 1, 2), \tag{8.29}$$

što znači da se relacije (8.27) i (8.29) poklapaju sa (8.17) i (8.23). Dakle, donja granica R-reda konvergencije inkluzivnog metoda (8.9), u slučaju kada je $\mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}$, $\mathrm{INV}_2 = ()^{-1}$, je ista kao i u slučaju kada je $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 = ()^{I_c}$.

2) *Slučaj* $\mathrm{INV}_1 = ()^{-1}$

Primenimo tačnu inverziju (1.55) (to jest, $\mathrm{INV}_1 = ()^{-1}$) u sumama (8.4) koje su uključene u iterativnu formulu (8.9). Tada dobijamo

$$\begin{aligned} A_i = \varSigma_{2,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j (g_{ij}^{(k)})^2 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \left[\frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - \left(\frac{\bar{\chi}_{ij}^{(k)}}{|\chi_{ij}^{(k)}|^2 - r_j^2}\right)^2\right] \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \mu_j \left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} - \frac{\bar{\chi}_{ij}^{(k)}}{|\chi_{ij}^{(k)}|^2 - r_j^2}\right)\left(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + \frac{\bar{\chi}_{ij}^{(k)}}{|\chi_{ij}^{(k)}|^2 - r_j^2}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu} \mu_j \Big(\frac{\xi_j^{(k)} \bar{\chi}_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^2 - r_j^2}{(z_i - \zeta_j)(|\chi_{ij}^{(k)}|^2 - r_j^2)} \Big) \Big(\frac{1}{z_i - \zeta_j} + \frac{\bar{\chi}_{ij}^{(k)}}{|\chi_{ij}^{(k)}|^2 - r_j^2} \Big)$$
$$= \mathcal{O}_M(\alpha' |\varepsilon|^2 + \beta' r^2),$$

gde su α' i β' realne konstante. Dakle,

$$|\hat{\varepsilon}_i| = |\varepsilon_i|^3 \mathcal{O}_M(\alpha' \epsilon^2 + \beta' r^2).$$

Na sličan način kao kod izvođenja relacija (8.17) i (8.27), može se pokazati da je $\hat{r} = \mathcal{O}(\epsilon^3 r)$. Prema tome, nizovi $\{\varepsilon^{(m)}\}$ i $\{r^{(m)}\}$ se ponašaju po sledećim pravilima:

$$\varepsilon^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^3 (r^{(m)})^2, \quad r^{(m+1)} \sim (\varepsilon^{(m)})^3 r^{(m)}$$

i odgovarajuća R-matrica je $T_2^{(e)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, nezavisno od tipa korišćene korekcije (Schröderove ili Halleyeve). Spektralni radijus ove matrice je $\rho(T_2^{(e)}) = 2 + \sqrt{7}$, a odgovarajući sopstveni vektor $\boldsymbol{x}_\rho = ((1+\sqrt{5})/2, 1)$ ima pozitivne komponente. Dakle, na osnovu Teoreme 1.7, dobijamo

$$O_R((8.9)_e) \geq \rho\,(T_2^{(e)}) = 2 + \sqrt{7} \approx 4.646. \qquad \square$$

Primedba 8.2 Teorema 8.1 i brojni numerički primeri pokazuju da primena tačne inverzije (1.55) daje manje ubrzanje konvergencije intervalnog metoda (8.9) u poređenju sa centralnom inverzijom (1.56) (uporediti Tabele 8.1 i 8.2). Objašnjenje ovog paradoksa, imajući u vidu da tačna inverzija daje manje diskove (videti (1.56)), leži u činjenici da centralna inverzija obezbeđuje bolju konvergenciju centara diskova generisanim formulom (8.9), što uslovljava bržu konvergenciju poluprečnika diskova, videti Primedbu 4.3. Više detalja o ovome može se naći u [21].

Primedba 8.3 Teorema 8.1 je dokazana pod računski proverljivim početnim uslovom (formula (8.14))

$$\rho^{(0)} > 3(n-\mu) r^{(0)}.$$

Uslovi ovog oblika su logični i prirodni s obzirom da maksimalni poluprečnik $r^{(0)}$ daje informaciju o veličini početnih inkluzivnih diskova, dok je veličina $\rho^{(0)}$ mera razdvojenosti diskova $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_\nu^{(0)}$ jednog od drugog. Gornji uslov (8.14) i uslovi sličnog oblika su samo dovoljni; u praksi, simultani intervalni metodi mogu konvergirati iako odgovarajući početni uslovi nisu zadovoljeni. Drugim rečima, u praksi odnos $r^{(0)}/\rho^{(0)}$ može biti veći (ili ponekad značajno veći u slučajevima polinoma višeg stepena) od $1/(3(n-\mu)r^{(0)})$, što se može videti iz Primera 8.1 i 8.2. Praktično, stroži uslovi su neophodni u analizi konvergencije zato što mora biti zadovoljen veliki broj nejednakosti i inkluzija. Teorijski, intervalni metod može biti izvodljiv u slučaju kada su početni diskovi disjunktni, to jest, ako je $\rho^{(0)} > r^{(0)}$. Međutim, mnogi drugi uslovi (na primer, deljenje diskom koji sadrži nulu se mora izbeći) zahtevaju mnogo strožije uslove od uslova oblika $\rho^{(0)} > \alpha r^{(0)}$, gde je $\alpha > 1$ realna konstanta. Određivanje vrednosti α je još uvek otvoren problem; možemo samo reći da dobro razdvojeni diskovi obezbeđuju manje vrednosti α i obrnuto: veoma bliski diskovi, slično kao veoma bliske (kompleksne) aproksimacije u kompleksnoj aritmetici, usporavaju konvergenciju iterativnog metoda. Efikasan pristup u nalaženju aproksimativne vrednosti za α je dat u [143].

8.4 Single-step metodi sa korekcijama

Primenom Gauss-Seidelovog pristupa na metode (8.9) dobijamo single-step metode

$$\widehat{Z}_i = z_i - \sqrt{\mu_i}\ \mathrm{INV}_2\Big(\Big[\delta_{2,i} - S_i(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]_*^{1/2}\Big) \quad (i \in \mathbb{I}_\nu,\ k = 0, 1, 2), \tag{8.30}$$

gde je $\mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$. Kao što je već ranije napomenuto, veoma je teško odrediti R-red konvergencije single-step metoda (8.30) sa korekcijama ($k = 1, 2$) kao funkciju broja nula ν. Međutim, možemo lako oceniti granice R-reda konvergencije uzimajući granične slučajeve $\nu = 2$ i veoma veliko ν.

Korišćenjem dobro poznate činjenice da red konvergencije single-step metoda postaje gotovo jednak redu konvergencije odgovarajućeg total-step metoda kada je stepen polinoma veoma veliki, na osnovu Teoreme 8.1 imamo za veoma velike vrednosti ν

$$O_R((8.30, k)) \cong O_R(8.9) \geq \begin{cases} 2 + \sqrt{7} \cong 4.646, \text{ ako je } \mathrm{INV}_1 = ()^{-1}, \\ k + 4\ (k = 1, 2), \text{ ako je } \mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}. \end{cases}$$

Razmotrimo sada single-step metode (8.30) za $\nu = 2$, podrazumevajući da je $|\varepsilon_1^{(0)}| = |\varepsilon_2^{(0)}| = r_1^{(0)} = r_2^{(0)} < 1$ (model „najgoreg slučaja"). Posle sređivanja dobijamo sledeće ocene:

(i) Slučaj kada je $\mathrm{INV}_1 = ()^{-1}$:

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_1| &\sim |\varepsilon_1|^3 r_2^2, \quad & |\hat{\varepsilon}_2| &\sim |\varepsilon_1|^3 |\varepsilon_2|^3 r_2^2, \\ \hat{r}_1 &\sim |\varepsilon_1|^3 r_2, \quad & \hat{r}_2 &\sim |\varepsilon_1|^3 |\varepsilon_2|^3 r_2. \end{aligned}$$

Odgovarajuće R-matrica i njen spektralni radijus i vektor su

$$T_4^{(e)} = \begin{bmatrix} 3\,0\,0\,2 \\ 3\,3\,0\,2 \\ 3\,0\,0\,1 \\ 3\,3\,0\,1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \rho(T_4^{(e)}) = 6.29654, \\ \boldsymbol{x}_\rho^{(e)} = (1, 1.91, 0.7382, 1.6483) > 0. \end{array}$$

(ii) Slučaj kada je $\mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}$:

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_1| &\sim |\varepsilon_1|^3|\varepsilon_2|^{k+1}, \quad & |\hat{\varepsilon}_2| &\sim |\varepsilon_1|^3|\varepsilon_2|^{k+4}, \\ \hat{r}_1 &\sim |\varepsilon_1|^3 r_2, & \hat{r}_2 &\sim |\varepsilon_1|^3|\varepsilon_2|^3 r_2, \end{aligned}$$

sa spektralnim radijusom i vektorom

$$T_4^{(c)} = \begin{bmatrix} 3 & k & 0\,0 \\ 3 & k+4 & 0\,0 \\ 3 & 0 & 0\,1 \\ 3 & 3 & 0\,1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T_4^{(c)}) = \begin{cases} 6.64575, k = 1, \\ 7.8541, \quad k = 2, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_\rho^{(c)} = \begin{cases} (1, 1.8229, 0.6771, 1.5) > 0, & k = 1, \\ (1, 1.6180, 0.5279, 1.1459) > 0, & k = 2. \end{cases}$$

Indeksi „e” (exact) i „c” (central) su korišćeni da bismo ukazali na tip korišćene inverzije u (8.4).

Na osnovu ovako dobijenih rezultata i opsega R reda kovergencije metoda (8.30) bez korekcije ($k = 0$, videti kraj Odeljka 8.1) možemo formulisati sledeće tvrđenje:

Teorema 8.2 *Opsezi donjih granica R-redova konvergencije single-step metoda* (8.30) *su*

$$\begin{aligned} &O_R(8.30) \in (4, 5.303), \quad (k = 0), \\ &O_R(8.30) \in (4.646, 6.297), \quad (k = 1, 2), \quad \textit{ako je} \quad \mathrm{INV}_1 = ()^{-1}, \\ &O_R(8.30) \in \begin{cases} (5, 6.646) \ (k = 1), \\ (6, 7.855) \ (k = 2), \end{cases} \qquad \textit{ako je} \quad \mathrm{INV}_1 = ()^{I_c}. \end{aligned}$$

8.5 Numerički primeri

Izloženi inkluzivni metod tipa Ostrowskog je testiran na većem broju polinomskih jednačina. Zbog poređenja, takođe smo testirali sledeće intervalne metode [90]:

Total-step inkluzivni metod Halleyevog tipa:

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(H(z_i)^{-1} - \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) + S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]\Big). \quad (8.31)$$

Single-step inkluzivni metod Halleyevog tipa:

$$\widehat{Z}_i = z_i - \mathrm{INV}_2\Big(H(z_i)^{-1} - \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big[\frac{1}{\mu_i}S_{1,i}^2(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) + S_{2,i}(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big]\Big). \quad (8.32)$$

Total-step inkluzivni metod Laguerreovog tipa:

$$\begin{aligned}\widehat{Z}_i = z_i - n\mathrm{INV}_2\Big(\delta_1 + \Big[\frac{n-\mu_i}{\mu_i}\Big(n\delta_2 - \delta_1^2 - nS_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\\ + \frac{n}{n-\mu_i}S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big)\Big]_*^{1/2}\Big).\end{aligned} \quad (8.33)$$

Single-step inkluzivni metod Laguerreovog tipa:

$$\widehat{Z}_i = z_i - n\mathrm{INV}_2\Big(\delta_1 + \Big[\frac{n-\mu_i}{\mu_i}\Big(n\delta_2 - \delta_1^2 - nS_{2,i}(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) + \frac{n}{n-\mu_i}S_{1,i}^2(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)})\Big)\Big]_*^{1/2}\Big). \quad (8.34)$$

Total-step inkluzivni metod Eulerovog tipa:

$$\widehat{Z}_i = z_i - 2\mu_i\mathrm{INV}_2\Big(\delta_1 + \Big[2\mu_i\delta_2 - \delta_1^2 - 2(\mu_i S_{2,i}(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) - S_{1,i}^2(\boldsymbol{Z}^{(k)}, \boldsymbol{Z}^{(k)}))\Big]_*^{1/2}\Big). \quad (8.35)$$

Single-step inkluzivni metod Eulerovog tipa:

$$\widehat{Z}_i = z_i - 2\mu_i\mathrm{INV}_2\Big(\delta_1 + \Big[2\mu_i\delta_2 - \delta_1^2 - 2(\mu_i S_{2,i}(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)}) - S_{1,i}^2(\widehat{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}^{(k)}))\Big]_*^{1/2}\Big). \quad (8.36)$$

U svim metodima (8.31)–(8.36) je $i \in \mathbb{I}_\nu$, $\mathrm{INV}_1, \mathrm{INV}_2 \in \{()^{-1}, ()^{I_c}\}$ i korekcije $c(z)$ su $c(z) = 0$ (za $k = 0$), $c(z) = v(z)$ ($k = 1$) i $c(z) = h(z)$ ($k = 2$). R-red konvergencije total-step metoda (8.31), (8.33) i (8.35) je isti kao i R-red metoda

(8.9), datim u Teoremi 8.2. Opsezi donjih granica R-reda konvergencije single-step metoda (8.32), (8.34) i (8.36) su isti kao i kod metoda (8.32), datim u Teoremi 8.3.

Primer 8.1 Primenili smo total-step intervalne metode (8.9), (8.31), (8.33) i (8.35) za $k = 0, 1$ i 2 za inkluziju višestrukih nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = z^{20} - 3z^{19} - 3z^{18} - z^{17} - 34z^{16} + 144z^{15} + 184z^{14} + 184z^{13} + 448z^{12} \\ -1648z^{11} - 2992z^{10} - 5392z^{9} - 8352z^{8} - 20864z^{7} - 33536z^{6} \\ -52224z^{5} - 98304z^{4} - 47104z^{3} - 73728z^{2} - 110592z - 221184. \end{aligned}$$

Nule polinoma P su $\zeta_1 = 3$, $\zeta_2 = -2$, $\zeta_3 = 1+i$, $\zeta_4 = 1-i$, $\zeta_5 = -1-i$, $\zeta_6 = -1+i$, $\zeta_7 = -2i$, $\zeta_8 = 2i$, višestrukosti $\mu_1 = \mu_2 = 3$, $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 2$, $\mu_7 = \mu_8 = 3$. Početni diskovi su $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.5\}$, sa centrima

$$\begin{aligned} &z_1^{(0)} = 3.2 + 0.1i, \quad z_2^{(0)} = -2.1 + 0.2i, \quad z_3^{(0)} = 0.9 + 1.2i, \\ &z_4^{(0)} = 0.8 - 1.2i, \quad z_5^{(0)} = -1.2 - 0.9i, \quad z_6^{(0)} = -0.9 + 0.8i, \\ &z_7^{(0)} = 0.1 - 2.2i, \quad z_8^{(0)} = 0.2 + 2.1i. \end{aligned}$$

Primenili smo odvojeno tačnu i centralnu inverziju u odgovarajućim sumama u svim testiranim metodima.

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(8.9) $k = 0$	$2.32(-2)$	$2.41(-9)$	$1.69(-38)$
(8.9) $k = 1$	$3.31(-2)$	$7.66(-9)$	$1.04(-42)$
(8.9) $k = 2$	$3.45(-2)$	$1.01(-8)$	$1.08(-43)$
(8.31) $k = 0$	$1.05(-2)$	$1.05(-5)$	$3.25(-25)$
(8.31) $k = 1$	$1.43(-1)$	$2.96(-5)$	$2.26(-26)$
(8.31) $k = 2$	$1.47(-1)$	$3.07(-5)$	$3.05(-26)$
(8.33) $k = 0$	$2.96(-2)$	$4.25(-9)$	$5.66(-39)$
(8.33) $k = 1$	$4.34(-2)$	$2.72(-8)$	$9.16(-41)$
(8.33) $k = 2$	$4.59(-2)$	$3.75(-8)$	$1.70(-40)$
(8.35) $k = 0$	$7.59(-2)$	$1.10(-6)$	$1.47(-28)$
(8.35) $k = 1$	$1.42(-1)$	$5.78(-5)$	$8.21(-23)$
(8.35) $k = 2$	divergira	–	–

Tabela 8.1: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – tačne inverzije

Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijenih u prva tri iterativna koraka dati su u Tabelama 8.1 i 8.2. Primetimo da metodi Eulerovog tipa (8.35) i (8.36) divergiraju u ovom primeru.

metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(8.9) $k=0$	3.15(−2)	1.67(−9)	1.04(−40)
(8.9) $k=1$	4.63(−2)	6.61(−11)	1.03(−57)
(8.9) $k=2$	4.84(−2)	1.96(−13)	5.41(−82)
(8.31) $k=0$	2.09(−1)	5.47(−7)	3.70(−32)
(8.31) $k=1$	3.46(−1)	1.57(−8)	3.19(−45)
(8.31) $k=2$	3.70(−1)	1.38(−10)	5.85(−73)
(8.33) $k=0$	4.25(−2)	2.96(−9)	3.56(−41)
(8.33) $k=1$	6.56(−2)	1.03(−10)	1.48(−58)
(8.33) $k=2$	6.96(−2)	4.50(−13)	6.32(−82)
(8.35) $k=0$	1.96(−1)	2.18(−7)	3.14(−34)
(8.35) $k=1$	divergira	–	–
(8.35) $k=2$	divergira	–	–

Tabela 8.2: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – centralne inverzije

Upoređujući rezultate iz Tabela 8.1 i 8.2 primećujemo da centralna inverzija obezbeđuje značajno manje inkluzivne diskove od tačne inverzije, što se poklapa sa tvrđenjima datim u Teoremi 8.2. Rezultati prikazani u Tabelama 8.1 i 8.2 i mnogi drugi numerički primeri pokazuju da se metodi tipa Ostrowskog bolje ponašaju od metoda tipa Halleya i Eulera.

Primer 8.2 U cilju nalaženja kružnih aproksiomacija nula polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = z^{12} &- (2-3i)z^{11} + (16-6i)z^{10} - (26-38i)z^9\\ &+(101-58i)z^8 - (120-131i)z^7 + (250-76i)z^6\\ &-(72+20i)z^5 - (84-432i)z^4 + (864-292i)z^3\\ &-504z^2 + 432iz + 864,\end{aligned}$$

primenili smo total-step intervalne metode (8.9) (sa $k = 0,1,2$), i single-step metode (8.32) (sa $k = 0,1,2$). Zbog poređenja, takođe smo testirali metode Halleyevog tipa, Laguerreovog tipa i Eulerovog tipa (8.31)–(8.36). Total-step metodi bez korekcija i sa Newtonovom i Halleyevom korekcijom su dodatno označeni sa TS, TSN i TSH, respektivno (videti Tabelu 8.3), dok su odgovarajući single-step metodi označeni sa SS, SSN i SSH. U svim testiranim primerima je korišćena centralna inverzija koja daje značajno bolje inkluzivne diskove u poređenju sa tačnom inverzijom, kao što se tvrdi u Teoremama 8.1 i 8.2.

Nule polinoma P su $\zeta_1 = -1,\ \zeta_2 = 2i,\ \zeta_3 = 1+i,\ \zeta_4 = 1-i,\ \zeta_5 = -3i$ višestrukosti $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 3,\ \mu_3 = 2,\ \mu_4 = 2,\ \mu_5 = 3$, respektivno. Za početne diskove smo izabrali diskove $Z_i^{(0)} = \{z_i^{(0)}; 0.6\}$, sa centrima:

$$\begin{array}{lll} z_1^{(0)} = -1.1 + 0.2i, & z_2^{(0)} = -0.1 + 2.3i, & z_3^{(0)} = 0.9 + 1.1i, \\ z_4^{(0)} = 0.8 - 1.2i, & z_5^{(0)} = 0.2 - 2.8i. & \end{array}$$

Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova dobijeni u prve tri iteracije dati su u Tabeli 8.3.

	metodi	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
TS	(8.9) $k=0$	1.29(−2)	6.31(−12)	5.95(−50)
	(8.31) $k=0$	4.33(−2)	1.50(−9)	2.18(−41)
	(8.33) $k=0$	1.81(−2)	1.54(−11)	1.91(−50)
	(8.35) $k=0$	5.20(−2)	7.77(−10)	6.19(−45)
SS	(8.30) $k=0$	8.42(−3)	5.85(−13)	3.36(−54)
	(8.32) $k=0$	2.24(−2)	7.16(−11)	1.21(−45)
	(8.34) $k=0$	1.39(−2)	5.12(−13)	3.88(−56)
	(8.36) $k=0$	3.60(−2)	8.81(−12)	1.15(−50)
TSN	(8.9) $k=1$	1.01(−2)	2.60(−14)	6.07(−71)
	(8.31) $k=1$	3.74(−2)	3.80(−12)	9.32(−62)
	(8.33) $k=1$	1.51(−2)	1.45(−13)	6.10(−72)
	(8.35) $k=1$	3.79(−2)	9.23(−12)	1.45(−64)
SSN	(8.30) $k=1$	5.60(−3)	3.57(−15)	7.46(−75)
	(8.32) $k=1$	1.53(−2)	7.13(−13)	3.41(−64)
	(8.34) $k=1$	1.01(−2)	2.78(−15)	5.36(−77)
	(8.36) $k=1$	2.59(−2)	2.02(−13)	7.04(−68)
TSN	(8.9) $k=2$	1.03(−2)	5.39(−16)	7.69(−99)
	(8.31) $k=2$	3.76(−2)	3.18(−14)	4.45(−89)
	(8.33) $k=2$	1.52(−2)	2.09(−15)	1.29(−98)
	(8.35) $k=2$	3.74(−2)	5.83(−14)	1.90(−89)
SSH	(8.30) $k=2$	5.75(−3)	8.72(−18)	4.59(−104)
	(8.32) $k=2$	1.52(−2)	1.74(−15)	8.94(−93)
	(8.34) $k=2$	1.03(−2)	6.82(−17)	1.85(−102)
	(8.36) $k=2$	2.64(−2)	9.66(−15)	4.00(−92)

Tabela 8.3 Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova – centralne inverzije

Primećujemo da predloženi metodi sa korekcijama daju veoma male diskove. Ovo se posebno vidi kada se primenjuje centralna inverzija (uporediti Tabele 8.1 i 8.2). U nekim slučajevima predloženi metodi sa korekcijama daju u prvom iterativnom koraku diskove koji nisu manji u poređenju sa onim koji su dobijeni odgovarajućim inkluzivnim metodima bez korekcija. Objašnjenje leži u činjenici da Schröderov i Halleyev metod ne popravljaju obavezno početnu aproksimaciju na početku iterativnog procesa. U kasnijim iteracijama red konvergencije inkluzivnih metoda sa korekcijama raste i približava se teorijskom koji je dobijen u izloženoj analizi konvergencije.

Na osnovu rezultata datim u Tabelama 8.1, 8.2 i 8.3 i velikog broja drugih testiranih polinoma, možemo da zaključimo da su predloženi iterativni metodi tipa Ostrowskog za simultanu inkluziju nula polinoma bolji ili bar jednaki u poređenju sa postojećim metodima istog reda. Jednostavna analiza računske efikasnosti pokazuje da su, u opštem slučaju, inkluzivni metodi sa korekcijama uz primenu centralne inverzije, mnogo efikasniji od odgovarajućih metoda bez korekcija. Ova prednost je direktna posledica značajnog povećanja brzine konvergencije koja je postignuta bez dodatnih izračunavanja funkcija.

Na kraju poglavlja dajemo komentar koji se odnosi na pitanje uporedivih karakteristika simultanih intervalnih metoda i odgovarajućih „tačkastih" verzija (realizovanih u običnoj kompleksnoj aritmetici). Istaknemo da su ovi metodi različitih struktura i da su u suštini neuporedivi. Obe klase imaju svoje prednosti i nedostatke. Značajna prednost intervalnih metoda je što daju rezultate koji uključuju i grešku. S druge strane metodi koji su implementirani u običnoj (realnoj ili kompleksnoj) aritmetici imaju manju računsku cenu. Štaviše, izbor najprikladnijeg metoda od ovih dveju klasa zavisi od prirode problema koji se rešava i specifičnih zahteva (na primer, da li se traži informacija o grešci izračunavanja, kontrola grešaka zaokruživanja, da li se obrađuju nesigurni podaci i tako dalje).

Poglavlje 9
Inkluzija izolovane kompleksne nule polinoma

U ovom poglavlju razmatrane su varijante inkluzivnih metoda za simultanu inkluziju svih prostih ili višestrukih nula polinoma koje su izložene u Poglavljima 5 i 8. Ideja je bila da se razviju originalni intervalni metodi za određivanje samo jedne proste ili višestruke nule datog polinoma.

R. E. Moore je u svojoj knjizi *Interval Analysis* [93] iz 1966., koja je imala odlučujući uticaj na dalji razvoj intervalne matematike, definisao Newtonov intervalni operator

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}, \quad m(X) = \operatorname{mid} X,$$

gde je $F'(X)$ realno intervalno proširenje funkcije $f'(x)$ nad intervalom X, koje sadrži realnu prostu nulu ζ funkcije f, a $\operatorname{mid} X$ je sredina intervala X. Za ovako definisan operator $N(X)$ važi osobina

$$\zeta \in X \Longrightarrow \zeta \in N(X).$$

Na osnovu toga, Moore je konstruisao intervalnu verziju Newtonovog metoda

$$X_{k+1} = N(X_k) \cap X_k \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

koja startuje od početnog intervala X_0 koji sadrži nulu ζ. Pod određenim uslovima ovaj metod ima kvadratnu konvergenciju. Ovako dobijeni intervalni metod se često naziva Mooreov metod. Modifikacije i poboljšanja ovog metoda kasnije su dali Alefeld [2], Hansen [49], [50], Hanson [54], Herzberger [59] i M. Petković [111].

Mooreov intervalni metod se može koristiti isključivo za nalaženje prostih realnih nula, što je ozbiljan nedostatak. Poboljšanja ovog metoda mogu se naći u radovima Arthura [8], Granta i Hitchinsa [45], Hansena [48] i Krawczyka [77]. U njima je problem nalaženja kompleksnih nula rešen primenom intervalnih metoda na rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Postupak nalaženja kompleksne nule funkcije

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

se svodi na rešavanje sistema jednačina $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$. Red konvergencije tako dobijenih metoda je veći od jedan, u najboljem slučaju je jednak dva. Efikasne algoritme sa kvadratnom konvergencijom za inkluziju kompleksne nule polinoma poznate višestrukosti dao je M. Petković u radovima [122] i [129]. Takozvani metodi nagiba sa redom konvergencije bar dva, takođe se mogu primeniti za inkluziju jedne proste nule, videti Moore [93, Pogl. 7], Alefeld [3], Hansen [51], [52], Krawczyk [73], Krawczyk i Neumaier [78], Neumaier [96], Lj. Petković, Tričković i Živković [110].

U našem razmatranju interesuje nas samo jedna nula polinoma P, za koju ćemo pretpostaviti da leži unutar inkluzivnog diska

$$\{a;R\} = \{z \,:\, |z-a| \le R\},$$

a da sve ostale nule leže van tog diska u otvorenoj oblasti $W = \{z \,:\, |z-a| > R\}$. Korišćenjem osobine inkluzivne izotonosti imamo za svako $z \in \{a;R\}$

$$(z-\zeta_j)^{-\lambda} \in \Big(\frac{1}{z-W}\Big)^{\lambda} \quad (j=1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n,\ \lambda \in \mathbb{N}). \tag{9.1}$$

Ako $z \notin W$, to jest $|z-a| < R$, inverzija oblasti

$$z - W = \{w \,:\, w-(z-a) > R\}$$

je zatvorena unutrašnjost kruga

$$V = (z-W)^{-1} = \left\{ w \,:\, \left| w + \frac{\bar{z}-\bar{a}}{R^2-|z-a|^2} \right| \le \frac{R}{R^2-|z-a|^2} \right\} =: \{h;d\}, \tag{9.2}$$

gde su

$$h = \operatorname{mid} V = \frac{\bar{a}-\bar{z}}{R^2-|z-a|^2} \tag{9.3}$$

i

$$d = \operatorname{rad} V = \frac{R}{R^2-|z-a|^2} \tag{9.4}$$

(videti [41]).

Petković i njegovi koautori su u knjizi [127] konstruisali kvadratno konvergentni modifikovani Gargantini-Henricijev metod za inkluziju samo jedne kompleksne nule polinoma P (videti takođe i [155])

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\mu}{\dfrac{P'(z^{(m)})}{P(z^{(m)})} - (N-\mu)\{h^{(m)}; d^{(m)}\}} \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{9.5}$$

gde se $h^{(m)}$ i $d^{(m)}$ izračunavaju pomoću formula (9.3) i (9.4), stavljajući da je $z = z^{(m)}$.

9.1 Metod Ostrowskog

Neka je P monični polinom N-tog stepena ($N \geq 3$)

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j)^{\mu_j} \tag{9.6}$$

sa n ($2 \leq n \leq N$) različitih realnih ili kompleksnih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, respektivne višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_n$, gde je $\mu_1 + \ldots + \mu_n = N$ i neka je

$$\delta_2(z) = \frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2}$$

i

$$s_{2,i}(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\mu_j}{(z - \zeta_j)^2}. \tag{9.7}$$

Iz faktorizacije (9.6) nalazimo

$$\delta_2(z) = -\frac{d^2}{dz^2}(\log P(z)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{(z - \zeta_j)^2} = \frac{\mu_i}{(z - \zeta_i)^2} + s_{2,i}(z).$$

Rešavajući poslednju jednačinu po ζ_i dobijamo sledeću nula-relaciju:

$$\zeta_i = z - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\left[\delta_2(z) - s_{2,i}(z)\right]_*^{1/2}}. \tag{9.8}$$

Podrazumeva se da je uzeta samo jedna kompleksna vrednost (od dve) kvadratnog korena u poslednjoj formuli, što je označeno sa $*$. Ova vrednost se bira na takav način da se desna strana jednakosti svede na ζ_i.

Pretpostavimo da smo pronašli inkluzivni disk $\{z : |z - a| \leq R\}$ sa centrom a i poluprečnikom R koji sadrži samo jednu nulu ζ_i polinoma P. Sve ostale nule se nalaze u oblasti $W = \{z : |z - a| > R\}$.

Na osnovu osobine inkluzivne izotonosti, (9.1), (9.2) i (9.7) imamo

$$s_{2,i}(z) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z-W)^{-2} = (N-\mu_i)\, V(z)^2 =: S_{2,i}(z) \quad (i \in \mathbb{I}_n := \{1,2,\ldots\}).$$

Na osnovu toga, iz nula-relacije (9.8) dobijamo za $z = z_i$

$$\zeta_i \in z_i - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\Big[\delta_2(z_i) - S_{2,i}(z_i)\Big]_*^{1/2}} =: \widehat{Z}_i. \tag{9.9}$$

$\widehat{Z}_i$ je nova kružna aproksimacija nule ζ_i.

U našem razmatranju se zahteva nalaženje samo jedne nule tako da, bez gubitka opštosti možemo tu nulu da označimo sa ζ_1, a sve ostale nule koje leže van oblasti $\{a; R\}$ sa $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Štaviše, zbog bolje preglednosti, pisaćemo u nastavku ζ umesto ζ_1, i takođe s_2 i S_2 umesto $s_{2,1}$ i $S_{2,1}$.

Neka je $Z^{(m)} = \{z^{(m)}; r^{(m)}\}$ disk sa centrom u $z^{(m)} = \operatorname{mid} Z^{(m)}$ i poluprečnikom $r^{(m)} = \operatorname{rad} Z^{(m)}$ za svako $m = 0, 1, \ldots$. Za početni inkluzivni disk $Z^{(0)}$ imamo $Z^{(0)} = \{a; R\}$, to jest, $z^{(0)} = a$, $r^{(0)} = R$. Dalje, uvešćemo skraćenice

$$V^{(m)}(z) = (z^{(m)} - W)^{-1} = \{h(z^{(m)}); d(z^{(m)})\}$$

i

$$S_2^{(m)}(z) = (N-\mu)(V^{(m)}(z))^2.$$

Polazeći od izolovanog inkluzivnog diska $Z^{(0)} = \{a; R\}$, relacija (9.9) sugeriše sledeći iterativni metod za određivanje jedne višestruke nule polinoma $P(z)$:

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\sqrt{\mu}}{\Big[\delta_2(z^{(m)}) - (N-\mu)\{h(z^{(m)}); d(z^{(m)})\}^2\Big]_*^{1/2}} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9.10}$$

Na osnovu (1.59), kvadratni koren diska u (9.10) daje dva diska; simbol $*$ ukazuje da jedan od ta dva diska treba da bude izabran. Kriterijum za izbor „pravog” diska je razmatran u [40] (videti takođe [111]) i glasi:

Neka je $\Big[\delta_2(z^{(m)}) - (N-\mu)\{h(z^{(m)}); d(z^{(m)})\}^2\Big]^{1/2} = D_1^{(m)} \bigcup D_2^{(m)}$. *Između diskova* $D_1^{(m)}$ *i* $D_2^{(m)}$ *treba izabrati onaj disk čiji centar minimizira*

$$\left| \frac{P'(z^{(m)})}{\mu P(z^{(m)})} - \operatorname{mid} D_p^{(m)} \right| \quad (p = 1, 2).$$

Analiza konvergencije

U nastavku ćemo dati analizu konvergencije iterativnog metoda (9.10). On se može izraziti u obliku

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\sqrt{\mu}}{\left\{c(z^{(m)}); \eta(z^{(m)})\right\}_*^{1/2}} = z^{(m)} - \frac{\sqrt{\mu}}{\left\{\sqrt{c(z^{(m)})}; u(z^{(m)})\right\}} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{9.11}$$

gde su

$$\begin{aligned}
c(z) &= \delta_2(z) - (N-\mu)h(z)^2 = \delta_2(z) - (N-\mu)\frac{(\bar{a}-\bar{z})^2}{\left(R^2 - |z-a|^2\right)^2},\\
\eta(z) &= (N-\mu)(2|h(z)|d(z) + d(z)^2) = (N-\mu)\frac{2|a-z|R + R^2}{\left(R^2 - |z-a|^2\right)^2},\\
u(z) &= \frac{\eta(z)}{|c(z)| + \sqrt{|c(z)| - \eta(z)}}.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da smo pronašli početni disk $Z^{(0)} = \{a; R\}$ tako da je zadovoljen uslov

$$|\delta_2(a)| > \frac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2}. \tag{9.12}$$

Takođe, za $m = 1, 2, \ldots$ uvedimo

$$\rho^{(m)} = R - |z^{(m)} - a|.$$

Na početku razmotrimo prvu iteraciju ($m = 0$). Korišćenjem inverzije (9.2) dobijamo

$$\begin{aligned}
\{c(a); \eta(a)\} &= \delta_2(a) - (N-\mu)\{h(a); d(a)\}^2 = \delta_2(a) - (N-\mu)\left\{0; \frac{1}{R}\right\}^2\\
&= \left\{\delta_2(a); \frac{N-\mu}{R^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Kako je $(N-\mu)\mu \geq 2$, iz (9.13) ocenjujemo

$$\eta(a) = \frac{N-\mu}{R^2} \leq \frac{(N-\mu)^2\mu}{2R^2}. \tag{9.14}$$

Na osnovu nejednakosti (9.12) i (9.14) i jednakosti $c(a) = \delta_2(a)$ (videti (9.13)) dobijamo da je

$$|c(a)| > \frac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2} > \frac{(N-\mu)^2\mu}{2R^2} \geq \eta(a),$$

što znači da disk $\{c(a); \eta(a)\}$ ne sadrži nulu kad je $m = 0$ i da možemo da izračunamo kvadratni koren

$$\{c(a); \eta(a)\}_*^{1/2} = \left\{\sqrt{c(a)}; u(a)\right\}.$$

Korišćenjem formule (1.59) i ocena (9.12) i (9.14) imamo

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{\eta(a)}{\sqrt{|c(a)|} + \sqrt{|c(a)| - \eta(a)}} < \frac{\dfrac{(N-\mu)^2\mu}{2R^2}}{\sqrt{\dfrac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2}} + \sqrt{\dfrac{2(N-\mu)^2\mu}{R^2}}} \\ &< \frac{17}{100} \cdot \frac{(N-\mu)\sqrt{\mu}}{R}. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Primenjujući (1.55) i (9.11), nalazimo gornju granicu za $r^{(1)}$ na osnovu nejednakosti (9.12) i (9.15),

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \operatorname{rad} Z^{(1)} = \operatorname{rad} \frac{\sqrt{\mu}}{\left\{\sqrt{c(a)}; u(a)\right\}} = \sqrt{\mu}\, \frac{u(a)}{|c(a)| - u(a)^2} \\ &< \sqrt{\mu}\, \frac{\dfrac{17(N-\mu)\sqrt{\mu}}{100R}}{\dfrac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2} - \dfrac{17^2(N-\mu)^2\mu}{10^4R^2}}, \end{aligned}$$

odakle je

$$r^{(1)} < \frac{7}{100} \cdot \frac{R}{N-\mu}. \tag{9.16}$$

Slično, iz ocene

$$|z^{(1)} - a| = \sqrt{\mu}\, \frac{|\sqrt{c(a)}|}{|c(a)| - u(a)^2} < \sqrt{\mu}\, \frac{\sqrt{\dfrac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2}}}{\dfrac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2} - \dfrac{17^2(N-\mu)^2\mu}{10^4R^2}}$$

dobijamo

$$|z^{(1)} - a| < \frac{16}{25} \cdot \frac{R}{N-\mu}. \tag{9.17}$$

Sada ćemo dokazati da (9.12) dovodi do nejednakosti

$$\rho^{(1)} > 5(N-\mu)r^{(1)}. \tag{9.18}$$

Korišćenjem nejednakosti (9.17) imamo da je

$$\rho^{(1)} = R - |z^{(1)} - a| > R - \frac{16R}{25(N-\mu)} = R\Big[1 - \frac{16}{25(N-\mu)}\Big],$$

tako da je, na osnovu (9.16) i (9.18), dovoljno pokazati da je

$$R\Big[1 - \frac{16}{25(N-\mu)}\Big] > 5(N-\mu)\frac{7R}{100(N-\mu)}$$

ili

$$1 - \frac{16}{25(N-\mu)} > \frac{35}{100}.$$

Poslednja nejednakost je očigledna zbog

$$\min_{1\le\mu<N}\Big(1 - \frac{16}{25(N-\mu)}\Big) = \frac{9}{25} = \frac{36}{100}.$$

Analiza prvog iterativnog koraka pokazuje da je:

(i) nova aproksimacija diska $Z^{(1)}$ sadži nulu ζ;

(ii) novi disk $Z^{(1)}$ je manjeg poluprečnika od diska $Z^{(0)}$, jer je

$$r^{(1)} < \frac{7R}{100}. \tag{9.19}$$

Pored toga, početni uslov (9.12) indukuje uslov (9.18).

Sada ćemo analizirati iterativni proces (9.11) počevši sa $m \ge 1$ i startujući od inkluzivnog diska $Z^{(1)}$ uz pretpostavku da je uslov (9.18) zadovoljen. Zbog jednostavnosti, u daljoj analizi ćemo izostaviti iterativne indekse uvek kad ne postoji mogućnost zabune.

Lema 9.1 *Ako važi nejednakost*

$$\rho > 5(N-\mu)r, \tag{9.20}$$

tada $0 \notin \{c(z); \eta(z)\}$ *i*

$$\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{|c(z)|}}{|c(z)| - u(z)^2} < \frac{13}{10}\,r. \tag{9.21}$$

Dokaz. Prvo, kako je $|z - \zeta_j| > \rho$, za svako $j = 2, \ldots, n$ pod uslovom (9.20) ocenjujemo

$$\left|\frac{P(z)}{P'(z)}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{z-\zeta_j}\right|^{-1} \le \left(\frac{\mu}{|z-\zeta|} - \sum_{j=2}^{n}\frac{\mu_j}{|z-\zeta_j|}\right)^{-1} < \left(\frac{\mu}{r} - \frac{N-\mu}{\rho}\right)^{-1}$$
$$= \frac{r}{\mu - (N-\mu)\dfrac{r}{\rho}} < \frac{r}{\mu - \dfrac{1}{5}} = \frac{5r}{5\mu - 1} \quad (\mu_1 = \mu)$$

i
$$\frac{|a-z|}{R^2 - |z-a|^2} = \frac{R-\rho}{R^2 - (R-\rho)^2} < \frac{1}{\rho}.$$

Prema tome,
$$(N-\mu)\left(\frac{|a-z|}{R^2 - |z-a|^2}\right)^2 < \frac{N-\mu}{\rho^2}.$$

Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}\left|\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{P'(z)}\right| &= \left|\left(\frac{P'(z)^2 - P''(z)P(z)}{P(z)^2}\right)\Big/\left(\frac{P'(z)}{P(z)}\right)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{(z-\zeta_j)^2}\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{z-\zeta_j}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{z-\zeta}\cdot\frac{1+\beta(z)}{1+\gamma(z)}\right|,\end{aligned}$$

gde su
$$\beta(z) = \frac{(z-\zeta)^2}{\mu}\sum_{j=2}^{n}\frac{\mu_j}{(z-\zeta_j)^2} \quad \text{i} \quad \gamma(z) = \frac{z-\zeta}{\mu}\sum_{j=2}^{n}\frac{\mu_j}{z-\zeta_j}.$$

Korišćenjem nejednakosti (9.20) nalazimo

$$|\beta(z)| < \frac{r^2}{\mu}\sum_{j=2}^{n}\frac{\mu_j}{|z-\zeta_j|^2} < \frac{r^2}{\mu}\cdot\frac{N-\mu}{\rho^2} < \frac{1}{25\mu(N-\mu)} \le \frac{1}{50}$$

i
$$|\gamma(z)| < \frac{r}{\mu}\sum_{j=2}^{n}\frac{\mu_j}{|z-\zeta_j|} < \frac{r}{\mu}\cdot\frac{N-\mu}{\rho} < \frac{1}{5},$$

tako da je
$$\left|\frac{1+\beta(z)}{1+\gamma(z)}\right| > \frac{1-\frac{1}{50}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{49}{60}.$$

Na osnovu poslednje ocene i nejednakosti $|z-\zeta| \le r$ dobijamo

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{P'(z)}\right| > \frac{1}{|z-\zeta|}\left|\frac{1+\beta(z)}{1+\gamma(z)}\right| > \frac{49}{60r}.$$

Uzimajući u obzir prethodne ocene nalazimo

$$
\begin{aligned}
|c(z)| &= \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{P'(z)}\right) - (N-\mu)\left(\frac{|a-z|}{R^2 - |z-a|^2}\right)^2\right| \\
&> \frac{5\mu - 1}{5r}\cdot\frac{49}{60r} - \frac{N-\mu}{\rho^2},
\end{aligned}
$$

odakle je

$$
|c(z)| > \frac{49}{60}\left(\mu - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2} > \frac{3}{5r^2}. \tag{9.22}
$$

Nađimo sada gornju granicu za $\eta(z)$,

$$
\eta(z) = (N-\mu)\frac{2|a-z|R + R^2}{(R^2 - |z-a|^2)^2} < \frac{N-\mu}{\rho^2} < \frac{1}{25r^2}. \tag{9.23}
$$

Iz nejednakosti (9.22) i (9.23) dobijamo

$$
|c(z)| > \frac{3}{5r^2} > \frac{1}{25r^2} > \eta(z)
$$

i da $0 \notin \{c(z); \eta(z)\}$, što dokazuje prvi deo leme.

Sada ćemo dokazati nejednakost (9.21). Korišćenjem (9.20), (9.22) i (9.23) ocenjujemo

$$
u(z) = \frac{\eta(z)}{\sqrt{|c(z)|} + \sqrt{|c(z)| - \eta(z)}} < \frac{\dfrac{N-\mu}{\rho^2}}{\sqrt{\dfrac{3}{5r^2}} + \sqrt{\dfrac{3}{5r^2} - \dfrac{1}{25r^2}}} < \frac{2}{3}\,\frac{(N-\mu)r}{\rho^2} < \frac{2}{75r} \tag{9.24}
$$

i konačno

$$
\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{|c(z)|}}{|c(z)| - u(z)^2} < \frac{\sqrt{\dfrac{49}{60}\mu\left(\mu - \dfrac{1}{4}\right)}}{\dfrac{49}{60}\left(\mu - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{4}{75^2}}\, r < \frac{13}{10}\, r. \quad \square
$$

Uz pomoć Leme 9.1 u mogućnosti smo da dokažemo da je red konvergencije inkluzivnog metoda (9.10) jednak tri.

Teorema 9.1 *Neka je niz kružnih intervala* $\{Z^{(m)}\}_{m=1,2,\ldots}$ *definisan iterativnom formulom* (9.10) *i neka je početni disk* $Z^{(0)} = \{a; R\}$ *tako izabran da je uslov* (9.12) *zadovoljen. Tada su, u svakom iterativnom koraku, sledeća tvrđenja tačna:*

(i) $\zeta \in Z^{(m)}$;

(ii) $r^{(m+1)} < \dfrac{17(N-\mu)}{R^2}(r^{(m)})^3$.

Dokaz. Tvrđenje (i) sledi iz nula-relacije (9.8), osobine inkluzivne izotonosti i činjenice da je $z^{(m)} \in \{a; R\}$ za svako $m = 0, 1, \dots$, što je očigledno zbog toga što je

$$R - |z^{(m)} - a| = \rho^{(m)} > 5(N-\mu)r^{(m)} > 0.$$

Dokažimo da je red konvergencije iterativnog metoda (9.10) jednak tri (tvrđenje (ii)). Korišćenjem nejednakosti (9.18), koja sledi iz uslova (9.12) i granica (9.22) i (9.24), dobijamo

$$r^{(2)} = \operatorname{rad} Z^{(2)} = \frac{u^{(1)}}{|c^{(1)}| - (u^{(1)})^2} < \frac{\dfrac{2(N-\mu)r^{(1)}}{3(\rho^{(1)})^2}}{\dfrac{3}{5(r^{(1)})^2} - \left[\dfrac{2}{75r^{(1)}}\right]^2} < \frac{28}{25} \cdot \frac{(N-\mu)(r^{(1)})^3}{(\rho^{(1)})^2},$$

odakle je

$$r^{(2)} < \frac{1}{20}\, r^{(1)}. \tag{9.25}$$

Korišćenjem nejednakosti (9.17) ocenjujemo

$$\rho^{(1)} = R - |z^{(1)} - a| > R - \frac{16}{25}\, R = \frac{9}{25}\, R \tag{9.26}$$

i

$$\begin{aligned}
\rho^{(2)} = R - |z^{(2)} - a| &= R - \left| z^{(1)} - a - \sqrt{\mu}\, \frac{\sqrt{\bar{c}^{(1)}}}{|c^{(1)}| - (u^{(1)})^2} \right| \\
&> R - |z^{(1)} - a| - \sqrt{\mu}\, \frac{|\sqrt{c^{(1)}}|}{|c^{(1)}| - (u^{(1)})^2} = \rho^{(1)} - \sqrt{\mu}\, \frac{|\sqrt{c^{(1)}}|}{|c^{(1)}| - (u^{(1)})^2},
\end{aligned}$$

Na osnovu ovih granica i (9.21) nalazimo da je

$$\rho^{(2)} > \rho^{(1)} - \frac{13}{10}\, r^{(1)}.$$

Primenjujući nejednakosti (9.18) i (9.25) imamo

$$\begin{aligned}
\rho^{(2)} &> \rho^{(1)} - \frac{13}{10}\, r^{(1)} > 5(N-\mu)r^{(1)} - \frac{13}{10}\, r^{(1)} = \Big[5(N-\mu) - \frac{13}{10}\Big] r^{(1)} \\
&> 20\Big[5(N-\mu) - \frac{13}{10}\Big] r^{(2)} > 5(N-\mu)r^{(2)}.
\end{aligned}$$

Korišćenjem istog postupka kao za $m = 2$ indukcijom dokazujemo da za svako $m \geq 2$ važe sledeće relacije (koje su već dokazane za $m = 2$):

$$r^{(m+1)} < \frac{28(N-\mu)}{25(\rho^{(m)})^2}(r^{(m)})^3, \tag{9.27}$$

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{20}, \tag{9.28}$$

$$\rho^{(m)} > 5(N-\mu)r^{(m)} \tag{9.29}$$

i

$$\rho^{(m+1)} > \rho^{(m)} - \frac{13}{10}\,r^{(m)}. \tag{9.30}$$

Sukcesivnom primenom nejednakosti (9.28) i (9.30), uz korišćenje nejednakosti (9.19) i (9.26), nalazimo

$$\begin{aligned}\rho^{(m)} &> \rho^{(m-1)} - \frac{13}{10}\,r^{(m-1)} > \cdots > \rho^{(1)} - \frac{13}{10}\,r^{(1)}\Big(1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \ldots\Big)\\ &\geq \rho^{(1)} - \frac{26}{19}\,r^{(1)} > \frac{9}{25}\,R - \frac{26}{19}\cdot\frac{7}{100}\,R > \frac{13}{50}\,R.\end{aligned}$$

Na osnovu toga iz nejednakosti (9.27) sledi

$$r^{(m+1)} < \frac{17(N-\mu)}{R^2}(r^{(m)})^3.$$

Završićemo dokaz Teoreme 9.1 dokazom da je iterativni metod (9.10) dobro definisan u svakom iterativnom koraku pod početnim uslovom (9.12), to jest, $0 \notin \{c^{(m)}; r^{(m)}\}$ za svako $m = 1, 2, \ldots$. Zaista, iz uslova (9.12) sledi nejednakost (9.29) za svako $m = 1, 2, \ldots$ tako da, za svako m, važe sva tvrđenja Leme 9.1. $\square$

Primedba 9.1 U slučaju prostih nula Teorema 9.1 se može dokazati pod oslabljenim uslovom

$$|\delta_2(a)| > \frac{3(N-1)^2}{2R^2}. \tag{9.31}$$

Na taj način dobijamo nejednakost

$$r^{(m+1)} < \frac{15(N-1)}{R^2}(r^{(m)})^3.$$

Numerički primeri

Predloženi algoritam (9.10) je testiran na rešavanju velikog broja polinomskih jednačina. Poređenja radi, testirali smo i metod trećeg reda Halleyevog tipa za inkluziju jedne višestruke nule polinoma [127]

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{1}{f(z^{(m)}) - \dfrac{P(z^{(m)})}{2P'(z^{(m)})}\,\dfrac{N(N-\mu)}{\mu}\{h^{(m)}; d^{(m)}\}^2}, \tag{9.32}$$

gde je

$$f(z) = \Big(1 + \frac{1}{\mu}\Big)\frac{P'(z)}{2P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)},$$

metod Eulerovog tipa trećeg reda [134] (videti takođe i [132], [141] i [160])

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{2\mu}{\delta_1(z^{(m)}) + [E(z^{(m)})]_*^{1/2}}, \tag{9.33}$$

gde je

$$E(z^{(m)}) = 2\mu\delta_2(z^{(m)}) - \delta_1(z^{(m)})^2 + 2N(N-\mu)\{h(z^{(m)}); d(z^{(m)})\}^2$$

i metod trećeg reda [132], [134]

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{3\mu}{\delta_1(z^{(m)}) + [F(z^{(m)})]_*^{1/2}}, \tag{9.34}$$

gde je

$$F(z^{(m)}) = 6\delta_2(z^{(m)}) - 2\delta_1(z^{(m)})^2 + 3(N-\mu)(N-3\mu)\{h(z^{(m)}); d(z^{(m)})\}^2.$$

Primer 9.1 Za nalaženje kružne aproksimacije proste nule polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = {} & (z-1)(z-(6+7i))(z-(6-7i))(z-(-6+8i))(z-(-6-8i)) \\ & (z-(7+6i))(z-(7-6i))(z-(-7+7i))(z-(-7-7i))(z-9)(z+9) \\ & (z-9i)(z+9i)(z-8)(z+8)(z-8i)(z+8i) \end{aligned}$$

primenili smo intervalne metode (9.10), (9.32), (9.33) i (9.34). Izolovana prosta nula polinoma P je $\zeta_1 = 1$. Za početni disk je izabran disk $Z_1^{(0)} = \{0.9 + 0.1i; 6\}$.

Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijeni u prva tri iterativna koraka su dati u Tabeli 9.1, gde oznaka $A(-q)$ znači $A \times 10^{-q}$. U ovom slučaju je početni uslov (9.31) zadovoljen, jer je

$$|\delta_2(a)| \approx 50 > \frac{3(N-1)^2}{2R^2} \approx 10.67.$$

Ispitajmo sada šta se dešava kada početni uslov (9.31) nije ispunjen. Konkretno, pomeraćemo centar početnog inkluzivnog diska $z^{(0)}$ dalje od tačne nule $z = 1$. Kada

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.10)	6.30(−4)	6.69(−17)	4.45(−56)
(9.32)	1.08(−2)	2.07(−9)	8.75(−36)
(9.33)	4.85(−2)	3.66(−9)	1.12(−34)
(9.34)	1.33(−2)	2.98(−11)	9.50(−41)

Tabela 9.1: Poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.1

je centar diska u tački $z_1^{(0)} = \{0.8 + 0.3i\}$ početni uslov (9.31) nije zadovoljen, jer je

$$|\delta_2(a)| \approx 7.69 < \frac{3(N-1)^2}{2R^2} \approx 10.67.$$

Pored toga, metod (9.10) konvergira. Dobijeni poluprečnici inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 9.2.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.10)	1.06(−2)	4.77(−12)	1.09(−41)
(9.32)	2.31(−1)	6.32(−3)	2.47(−10)
(9.33)	divergira	–	–
(9.34)	4.09(−1)	3.32(−4)	2.03(−18)

Tabela 9.2: Poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.1

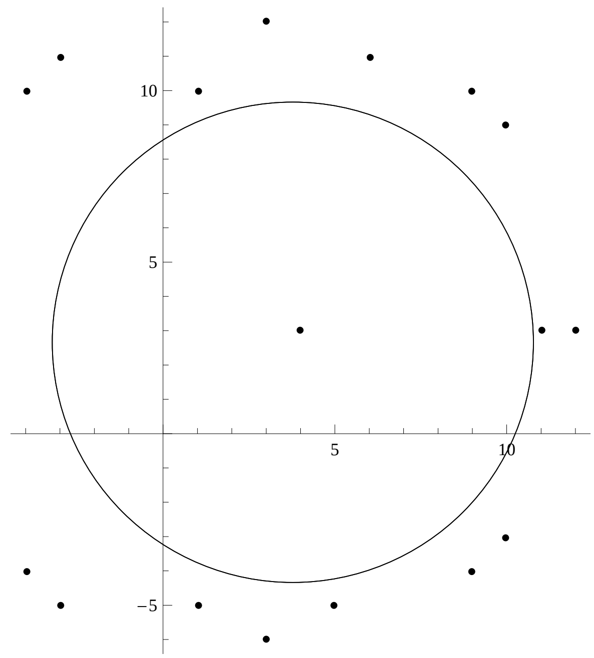
Iz dobijenih rezultata može se uočiti dominantnost predloženog metoda u odnosu na ostale, koja je u drugom slučaju još uočljivija. Kada nastavimo sa pomeranjem centra početnog inkluzivnog diska $z^{(0)}$ dalje od tačne nule, konvergencija metoda (9.10) se održava najduže. Konkretno, kada je centar u tački $z_1^{(0)} = \{1.8 + 1.1i\}$, metod (9.10) i dalje konvergira, dok svi ostali upoređivani metodi divergiraju. Ovde je

$$|\delta_2(a)| \approx 0.53 \ll \frac{3(N-1)^2}{2R^2} \approx 10.67.$$

Primer 9.2 Za nalaženje kružnih aproksimacija prostih nula polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = {} & (z-(4+3i))(z-(9+10i))(z-(9-4i))(z-(-3+11i))(z-(-3-5i)) \\ & (z-(10+9i))(z-(10-3i))(z-(-4+10i))(z-(-4-4i)) \\ & (z-(12+3i))(z-(6+11i))(z-(3+12i))(z-(3-6i))(z-(11+3i)) \\ & (z-(5-5i))(z-(1-5i))(z-(1+10i)) \end{aligned}$$

primenili smo iste metode kao u Primeru 9.1. Izolovana prosta nula polinoma P je $\zeta_1 = 4+3i$. Za početni disk je izabran disk $Z_1^{(0)} = \{3.8+2.7i; 7\}$. Nule polinoma i početni disk su prikazani na Slici 9.1. Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijeni u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 9.3.



Slika 9.1 Distribucija nula polinoma u Primeru 9.2

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.10)	7.71(−3)	2.28(−10)	4.47(−33)
(9.32)	1.41(−1)	3.62(−4)	1.71(−16)
(9.33)	divergira	–	–
(9.34)	2.31(−1)	1.44(−5)	5.73(−20)

Tabela 9.3: Poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.2

Primer 9.3 Za nalaženje kružnih aproksimacija višestruke nule polinoma

$$P(z) = (z-1)^3(z-6)^3(z+6)^2(z-6i)^3(z+6i)^3$$

primenili smo iste metode kao u Primeru 9.1. Izolovana višestruka nula polinoma P je u ovom slučaju $\zeta_1 = 1$ (višestrukosti $\mu_1 = 3$). Početni inkluzivni disk je

$Z_1^{(0)} = \{0.9 + 0.1i; 2\}$. I u ovom slučaju početni uslov (9.12) nije ispunjen

$$|\delta_2(a)| \approx 150 < \frac{5(N-\mu)^2\mu}{2R^2} \approx 227.$$

Poluprečnici inkluzivnih diskova dobijeni u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 9.4.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.10)	1.31(−3)	4.34(−16)	5.27(−54)
(9.32)	6.03(−3)	4.05(−11)	1.50(−38)
(9.33)	2.60(−2)	5.70(−11)	7.21(−39)
(9.34)	8.51(−3)	1.38(−12)	9.60(−45)

Tabela 9.4: Poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.3

Iz Tabela 9.1 – 9.4 primećujemo da se teorijski rezultati, koji se tiču reda konvergencije razmatranog metoda, uglavnom podudaraju sa ponašanjem metoda u praksi. Istaknimo da je treća iteracija prikazana samo da bismo demonstrirali veliku preciznost predloženog metoda, koja se inače retko zahteva u praksi. Takođe istaknimo da su uslovi (9.12) i (9.31) samo dovoljni. To znači da će intervalni metod (9.10) konvergirati uvek kada su uslovi (9.12) i (9.31) zadovoljeni, ali da može da konvergira i u slučajevima kada nisu, kao što se može videti iz navedenih primera.

9.2 Intervalni metod za inkluziju jedne nule – novi metod

Neka je $P(z) = z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ monični polinom sa prostim ili višestrukim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ $(2 \le n \le N)$, višestrukosti $\mu_1, \ldots, \mu_n$ $(\mu_1 + \cdots + \mu_n = N)$ respektivno, i neka je

$$s_{k,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{\mu_j}{(z_i - \zeta_j)^k} \quad (k = 1, 2), \quad u(z) = \frac{P(z)}{P'(z)}. \tag{9.35}$$

U [123] je dobijena sledeća nula-relacija:

$$\zeta_i = z_i - \mu_i u(z_i) - \frac{\mu_i u(z_i)\Big(1 - \mu_i + \mu_i u(z_i)\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u(z_i)^2(s_{1,i}^2 - \mu_i s_{2,i})\Big)}{2\big(1 - u(z_i)\, s_{1,i}\big)^2}, \tag{9.36}$$

za $i \in \mathbb{I}_n := \{1, 2, \ldots\}$.

Pretpostavimo da smo pronašli inkluzivni disk $\{z : |z-a| \le R\}$, sa centrom u a i poluprečnikom R koji sadrži samo jednu nulu ζ_i polinoma P. Sve ostale nule leže u oblasti $W = \{z : |z-a| > R\}$.

Na osnovu osobine inkluzivne izotonosti i formula (9.1), (9.2) i (9.35) imamo

$$s_{k,i} \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} (z-W)^{-k} = (N-\mu_i)\, V(z)^k =: S_{k,i} \quad (k=1,2,\ i \in \mathbb{I}_n).$$

Na osnovu toga, iz nula-relacije (9.36), nalazimo za $z = z_i$

$$\zeta_i \in z_i - \mu_i u(z_i) - \frac{\mu_i u(z_i)\Big(1-\mu_i+\mu_i u(z_i)\dfrac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - u(z_i)^2(S_{1,i}^2-\mu_i S_{2,i})\Big)}{2\big(1-u(z_i)\, S_{1,i}\big)^2} =: \hat{Z}_i, \tag{9.37}$$

za $i \in \mathbb{I}_n$. S obzirom da je ideja da razvijemo algoritam za određivanje samo jedne nule, kao u prethodnom odeljku pretpostavićemo da je to nula ζ_1 i da ostale nule $\zeta_2, \dots, \zeta_n$ leže u oblasti izvan kruga $\{a; R\}$. Zbog jednostavnosti, pisaćemo ζ umesto ζ_1 i s_1, s_2, S_1 i S_2 umesto $s_{1,1}, s_{2,1}, S_{1,1}$ i $S_{2,1}$, respektivno.

Neka je $Z^{(m)} = \{z^{(m)}; r^{(m)}\}$ disk sa centrom u $z^{(m)} = \operatorname{mid} Z^{(m)}$ i poluprečnikom $r^{(m)} = \operatorname{rad} Z^{(m)}$ za $m = 0, 1, \dots$. Za početni inkluzivni disk $Z^{(0)}$ uzimamo $Z^{(0)} = \{a; R\}$, to jest, $z^{(0)} = a$, $r^{(0)} = R$. Dalje, uvedimo skraćenice

$$V^{(m)} = (z^{(m)} - W)^{-1} = \{h^{(m)}; d^{(m)}\}$$

i

$$S_k^{(m)} = (N-\mu)(V^{(m)})^k \quad (k=1,2).$$

Polazeći od izolovanog inkluzivnog diska $Z^{(0)} = \{a; R\}$, relacija (9.37) sugeriše sledeći iterativni metod za nalaženje proste ili višestruke kompleksne nule polinoma $P(z)$:

$$Z^{(m+1)} = z^{(m)} - \mu u(z^{(m)}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\{b(z^{(m)}); \eta(z^{(m)})\}}{\{c(z^{(m)}); \gamma(z^{(m)})\}^2} \quad (m = 1, 2, \dots), \tag{9.38}$$

gde su

$$\begin{aligned}
b(z) &= \mu u(z)\left(1-\mu+\mu u(z)\frac{P''(z)}{P'(z)} - u(z)^2(N-\mu)(N-2\mu)\left(\frac{\bar{a}-\bar{z}}{R^2-|z-a|^2}\right)^2\right),\\
\eta(z) &= \mu|u(z)|^3(N-\mu)(N-2\mu)\frac{2|a-z|R+R^2}{(R^2-|z-a|)^2},\\
\gamma(z) &= |u(z)|(N-\mu)\frac{R}{R^2-|z-a|^2},\\
c(z) &= 1-u(z)(N-\mu)\frac{\bar{a}-\bar{z}}{R^2-|z-a|^2}.
\end{aligned}$$

Analiza konvergencije

U ovom delu ćemo analizirati iterativni metod (9.38) sa stanovišta brzine konvergencije. Pretpostavimo da smo pronašli početni inkluzivni disk $Z^{(0)} = \{a; R\}$ tako da su zadovoljeni početni uslovi

$$|u(a)| = \left|\frac{P(a)}{P'(a)}\right| < \frac{R}{8(N-\mu)\mu^2} \quad \text{i} \quad \left|\frac{P''(a)}{P'(a)}\right| < \frac{8(N-\mu)}{R}. \tag{9.39}$$

Takođe, za $m = 1, 2, \dots$, uvedimo skraćenicu

$$\rho^{(m)} = R - |z^{(m)} - a|.$$

Razmotrimo, najpre, prvu iteraciju ($m = 0$). Na osnovu (9.35), (9.39) i nejednakosti $(N - 2\mu)/(N - \mu) < 1$, dobijamo

$$\eta(a) = \mu|u(a)|^3(N-\mu)(N-2\mu)\frac{1}{R^2} < \frac{R}{8^3(N-\mu)\mu^5}$$

i

$$|b(a)| \le \mu|u(a)|\left(1 + \mu + \mu|u(a)|\left|\frac{P''(a)}{P'(a)}\right|\right) < \frac{\mu^2+\mu+1}{\mu^2}\,\frac{R}{8(N-\mu)} \le \frac{3R}{8(N-\mu)}.$$

Slično,

$$c(a) = 1$$

i

$$\gamma(a) < |u(a)|(N-\mu)\frac{1}{R} < \frac{1}{8\mu^2} \le \frac{1}{8}.$$

Za disk u imeniocu u prvoj iteraciji koristimo formule (1.53) i dobijene granice za $\gamma(a)$ i ocenjujemo

$$\{1; \gamma(a)\}^2 = \{1; 2\gamma(a) + \gamma(a)^2\} \subset \left\{1; \frac{17}{64}\right\}.$$

Dobijeni disk ne sadrži koordinatni početak, jer je $1 > 17/64$ i možemo da nađemo inverziju korišćenjem formule (1.55),

$$\left\{1; \frac{17}{64}\right\}^{-1} = \frac{\left\{1; \frac{17}{64}\right\}}{1 - \left(\frac{17}{64}\right)^2} < \frac{6}{5}\left\{1; \frac{17}{64}\right\}.$$

Dalje, korišćenjem formula (1.53), (9.38) i dobijenih granica za $|b(a)|$ i $\eta(a)$, nalazimo gornju granicu za $r^{(1)}$,

$$r^{(1)} = \operatorname{rad} Z^{(1)} = \frac{3}{5}\Big(|b(a)|\frac{17}{64} + \eta(a) + \eta(a)\frac{17}{64}\Big),$$

odakle je

$$r^{(1)} < \frac{2}{25} \cdot \frac{R}{N-\mu}. \tag{9.40}$$

Pod uslovima (9.39) i na osnovu dobijene granice za $|b(a)|$ ocenjujemo

$$|z^{(1)} - a| \le \mu|u(a)| + \frac{3}{5}\,|b(a)| < \frac{R}{8(N-\mu)\mu} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3R}{8(N-\mu)}$$

i nalazimo

$$|z^{(1)} - a| < \frac{7}{20} \cdot \frac{R}{N-\mu}. \tag{9.41}$$

Dokažimo sada da (9.39) implicira nejednakost

$$\rho^{(1)} > 8(N-\mu)r^{(1)}. \tag{9.42}$$

Korišćenjem nejednakosti (9.41) dobijamo

$$\rho^{(1)} = R - |z^{(1)} - a| > R - \frac{7R}{20(N-\mu)} = R\Big[1 - \frac{7}{20(N-\mu)}\Big],$$

tako da je, na osnovu (9.40) i (9.42), dovoljno dokazati

$$R\Big[1 - \frac{7}{20(N-\mu)}\Big] > 8(N-\mu)\frac{2R}{25(N-\mu)}.$$

Poslednja nejednakost sledi direktno iz nejednakosti

$$1 - \frac{7}{20(N-\mu)} \ge \frac{13}{20} = \frac{65}{100} > \frac{64}{100} = \frac{16}{25}.$$

Analiza prvog iterativnog koraka pokazuje da

(i) nova aproksimacija diska $Z^{(1)}$ sadrži nulu ζ;

(ii) poluprečnik diska $Z^{(1)}$ je manji od poluprečnika diska $Z^{(0)}$, jer je

$$r^{(1)} < \frac{2R}{25}. \tag{9.43}$$

Pored toga, početni uslovi (9.39) obezbeđuju da uslov (9.42) važi.

Analizirajmo sada iterativni proces (9.38) polazeći sa $m \ge 1$ i od inkluzivnog diska $Z^{(1)}$ uz pretpostavku da uslov (9.42) važi. Zbog jednostavnosti, u daljoj analizi izostavljamo iterativne indekse uvek kad ne postoji mogućnost zabune i koristimo skraćenice

$$\{c_2(z);\gamma_2(z)\} = \{c_1(z);\gamma_1(z)\}^{-1} = (\{c(z);\gamma(z)\}^2)^{-1}, \quad \varepsilon = z-\zeta.$$

Lema 9.2 *Ako nejednakost*

$$\rho > 8(N-\mu)r \tag{9.44}$$

važi, tada je

(i) $|u(z)| = \Big|\dfrac{\varepsilon}{\mu+\varepsilon s_1}\Big| < \dfrac{8r}{7\mu}$;

(ii) $\dfrac{8}{7} > |c(z)| > \dfrac{6}{7}$;

(iii) $|\gamma(z)| < \dfrac{8(N-\mu)r}{7\mu\rho} < \dfrac{1}{7\mu}$;

(iv) $|c_2(z)| < \dfrac{9}{5}$;

(v) $\gamma_2(z) < \dfrac{7(N-\mu)r}{\mu\rho} < \dfrac{7}{8\mu}$;

(vi) $|b(z)| < \dfrac{18(N-\mu)r^2}{5\rho}$;

(vii) $\eta(z) < \dfrac{3(N-\mu)(N-2\mu)r^3}{2\mu^2\rho^2}$.

Dokaz. Za (i): Kako je

$$|s_k| < \frac{N-\mu}{\rho^k} \quad (k=1,2),$$

pod uslovom (9.44) ocenjujemo

$$\begin{aligned}|u(z)| &= \Big|\frac{P(z)}{P'(z)}\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{z-\zeta_j}\Big|^{-1} = \Big|\frac{\mu}{\varepsilon}+s_1\Big|^{-1} = \Big|\frac{\varepsilon}{\mu+\varepsilon s_1}\Big| \le \frac{|\varepsilon|}{\mu\Big(1-\dfrac{|\varepsilon s_1|}{\mu}\Big)}\\ &< \frac{r}{\mu\Big(1-\dfrac{1}{8\mu}\Big)} < \frac{8r}{7\mu}.\end{aligned}$$

Za (ii): Korišćenjem ocene

$$\frac{|a-z|}{R^2-|z-a|^2} = \frac{R-\rho}{R^2-(R-\rho)^2} < \frac{1}{\rho} \tag{9.45}$$

i tvrđenja (i) iz jednakosti

$$c(z) = 1 - u(z)(N-\mu)\frac{\bar{a}-\bar{z}}{R^2 - |z-a|^2}$$

dobijamo

$$|c(z)| > 1 - \frac{8r}{7\mu}\frac{N-\mu}{\rho} > \frac{6}{7}$$

i

$$|c(z)| < 1 + \frac{8r}{7\mu}\frac{N-\mu}{\rho} < \frac{8}{7}.$$

Za (iii): Polazeći od jednakosti

$$\gamma(z) = u(z)(N-\mu)\frac{R}{R^2 - |z-a|^2}$$

korišćenjem tvrđenja (i) i nejednakosti

$$\frac{R}{R^2 - |z-a|^2} < \frac{1}{\rho},$$

dobijamo da je

$$\gamma(z) < \frac{8(N-\mu)r}{7\mu\rho} < \frac{1}{7\mu}.$$

Za (iv) i (v): Na osnovu formule (1.53) imamo da je

$$\{c_1(z); \gamma_1(z)\} = \{c(z); \gamma(z)\}^2 = \{c(z)^2; 2|c(z)|\gamma(z) + \gamma(z)^2\}.$$

S obzirom na tvrđenje (ii) ocenjujemo iz poslednje jednakosti da je

$$|c_1(z)| > \frac{36}{49} \tag{9.46}$$

i slično, na osnovu tvrđenja (ii) i (iii), da važi

$$\gamma_1(z) < 2\,\frac{8}{7}\,\frac{8r}{7\mu}\,\frac{N-\mu}{\rho} + \left(\frac{8r}{7\mu}\,\frac{N-\mu}{\rho}\right)^2 < \frac{14r(N-\mu)}{5\mu\rho} < \frac{7}{20}. \tag{9.47}$$

Kako je $|c_1(z)| > 36/49 > 7/20 > \gamma_1(z)$, zaključujemo da $0 \notin \{c_1; \gamma_1\}$ i nalazimo inverziju diska $\{c_1(z); \gamma_1(z)\}$,

$$\{c_2(z); \gamma_2(z)\} = \{c_1(z); \gamma_1(z)\}^{-1} = \frac{\{\bar{c}_1(z); \gamma_1(z)\}}{|c_1(z)|^2 - \gamma_1(z)^2}.$$

Iz poslednje jednakosti i (9.46) i (9.47) imamo da je

$$|c_2(z)| = \frac{1}{|c_1(z)| - \gamma_1(z)^2/|c_1(z)|} < \frac{1}{\dfrac{36}{49} - \dfrac{49/400}{36/49}} < \frac{9}{5}$$

i

$$\gamma_2(z) = \frac{\gamma_1(z)}{|c_1(z)|^2 - \gamma_1(z)^2} < \frac{\dfrac{14r(N-\mu)}{5\mu\rho}}{\left(\dfrac{36}{49}\right)^2 - \left(\dfrac{7}{20}\right)^2} < \frac{7r(N-\mu)}{\mu\rho} < \frac{7}{8\mu}.$$

Za (vi) i (vii): Ocenimo sada $|b(z)|$ i $\eta(z)$. Korišćenjem identiteta

$$\delta_1(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} \quad \text{i} \quad \delta_2(z) = \frac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2}$$

dobijamo

$$\frac{P''(z)}{P'(z)} = u(z)(\delta_1^2(z) - \delta_2(z)). \tag{9.48}$$

Kako je

$$\delta_1(z) = \frac{d}{dz}(\log P(z)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j} = \frac{\mu}{\varepsilon} + s_1$$

i

$$\delta_2(z) = -\frac{d^2}{dz^2}(\log P(z)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{(z - \zeta_j)^2} = \frac{\mu}{\varepsilon^2} + s_2,$$

nalazimo na osnovu (9.48) da je

$$\begin{aligned} 1 - \mu + \mu u(z)\frac{P''(z)}{P'(z)} &= 1 - \mu + \mu\frac{\varepsilon^2}{(\mu + \varepsilon s_1)^2}\left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon} + s_1\right)^2 - \frac{\mu}{\varepsilon^2} - s_2\right) \\ &= \frac{2\mu\varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_1^2 - \mu\varepsilon^2 s_2}{(\mu + \varepsilon s_1)^2}. \end{aligned} \tag{9.49}$$

S obzirom na granice

$$|\varepsilon| \le r \quad \text{i} \quad s_k \le \frac{N - \mu}{\rho^k} \quad (k = 1, 2),$$

ocenjujemo

$$|2\mu\varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_1^2 - \mu\varepsilon^2 s_2| \le 2\mu\frac{(N-\mu)r}{\rho} + r^2\frac{(N-\mu)^2}{\rho^2} + \mu r^2\frac{N-\mu}{\rho^2} < \frac{9r\mu(N-\mu)}{4\rho} \tag{9.50}$$

i

$$|\mu + \varepsilon s_1| \geq \mu - \frac{(N-\mu)r}{\rho} = \mu\Big(1 - \frac{(N-\mu)r}{\mu\rho}\Big) \geq \frac{7\mu}{8}. \tag{9.51}$$

Korišćenjem nejednakosti (9.50) i (9.51) dobijamo iz (9.49)

$$\left|1 - \mu + \mu u(z)\frac{P''(z)}{P'(z)}\right| < \frac{144(N-\mu)r}{49\mu\rho}. \tag{9.52}$$

Na osnovu tvrđenja (i) i nejednakosti (9.45) i (9.52) odredimo gornju granicu za $|b(z)|$,

$$|b(z)| \leq \frac{8r}{7}\left(\frac{144r(N-\mu)}{49\mu\rho} + \frac{64r^2(N-\mu)(N-2\mu)}{49\mu^2\rho^2}\right) < \frac{18(N-\mu)r^2}{5\rho}.$$

Slično, iz jednakosti

$$\eta(z) = \mu u(z)^3(N-\mu)(N-2\mu)\frac{2|a-z|R+R^2}{\left(R^2-|z-a|\right)^2},$$

na osnovu (9.45) i tvrđenja (i), nalazimo

$$\eta(z) < \frac{3(N-\mu)(N-2\mu)r^3}{2\mu^2\rho^2}. \quad \square$$

Sada smo u mogućnosti da dokažemo da je red konvergencije intervalnog metoda (9.38) jednak tri.

Teorema 9.2 *Neka je niz kružnih intervala* $\{Z^{(m)}\}_{m=1,2,\dots}$ *definisan iterativnom formulom* (9.38). *Pretpostavimo da je početni disk* $Z^{(0)} = \{a; R\}$ *izabran na taj način da su uslovi* (9.39) *zadovoljeni. Tada u svakom iterativnom koraku važi:*

(i) $\zeta \in Z^{(m)}$;

(ii) $r^{(m+1)} < \dfrac{68(N-\mu)}{R^2}(r^{(m)})^3$.

Dokaz. Tvrđenje (i) sledi direktno iz nula-relacije (9.36), na osnovu osobine inkluzivne izotonosti i činjenice da je $z^{(m)} \in \{a; R\}$ za svako $m = 0, 1, \dots$, što je očigledno zbog

$$R - |z^{(m)} - a| = \rho^{(m)} > 8(N-\mu)r^{(m)} > 0.$$

Dokažimo sada da je red konvergencije iterativnog metoda (9.38) jednak tri (tvrđenje (ii)). Korišćenjem nejednakosti (9.42) i granica dobijenih u Lemi 9.2, nalazimo

$$\begin{aligned} r^{(2)} &= \operatorname{rad} Z^{(2)} = \frac{1}{2}(|b(z)|\gamma_2(z) + |c_2(z)|\eta(z) + \eta(z)\gamma_2(z)) \\ &< \frac{1}{2}\Big(\frac{18(N-\mu)(r^{(1)})^2}{5\rho^{(1)}} \cdot \frac{7(N-\mu)r^{(1)}}{\mu\rho^{(1)}} + \frac{9}{5} \cdot \frac{3(N-\mu)(N-2\mu)(r^{(1)})^3}{2\mu^2(\rho^{(1)})^2} \\ &\quad + \frac{3(N-\mu)(N-2\mu)(r^{(1)})^3}{2\mu^2(\rho^{(1)})^2} \cdot \frac{7(N-\mu)r^{(1)}}{\mu\rho^{(1)}}\Big) \\ &< \frac{15(N-\mu)^2(r^{(1)})^3}{(\rho^{(1)})^2} \end{aligned}$$

i

$$r^{(2)} < \frac{1}{4} r^{(1)}. \tag{9.53}$$

Korišćenjem nejednakosti (9.41) ocenjujemo

$$\rho^{(1)} = R - |z^{(1)} - a| > R - \frac{7}{20}\, R = \frac{13}{20}\, R. \tag{9.54}$$

Dalje, polazeći od nejednakosti

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} &= R - |z^{(2)} - a| = R - \Big|z^{(1)} - a - \mu u(z) - \frac{1}{2}\, c_2(z) b(z)\Big| \\ &> R - |z^{(1)} - a| - \Big|\mu u(z) + \frac{1}{2}\, c_2(z) b(z)\Big|, \end{aligned}$$

nalazimo

$$\Big|\mu u(z) + \frac{1}{2}\, c_2(z) b(z)\Big| < \frac{8}{7}\, r^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{18(N-\mu)(r^{(1)})^2}{5\mu\rho^{(1)}} < \frac{8}{5}\, r^{(1)}$$

i zaključujemo da je

$$\rho^{(2)} > \rho^{(1)} - \frac{8}{5}\, r^{(1)}.$$

Primenjujući nejednakosti (9.42) i (9.53), imamo

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} &> \rho^{(1)} - \frac{8}{5}\, r^{(1)} > 8(N-\mu) r^{(1)} - \frac{8}{5}\, r^{(1)} = \Big[8(N-\mu) - \frac{8}{5}\Big] r^{(1)} \\ &> 4\Big[8(N-\mu) - \frac{8}{5}\Big] r^{(2)} > 8(N-\mu) r^{(2)}. \end{aligned}$$

Korišćenjem iste tehnike za $m = 2$ indukcijom možemo dokazati da za $m \geq 2$ važe sledeće nejednakosti (koje su već dokazane za $m = 2$):

$$r^{(m+1)} < \frac{15(N-\mu)^2}{\left(\rho^{(m)}\right)^2}\left(r^{(m)}\right)^3, \tag{9.55}$$

$$r^{(m+1)} < \frac{r^{(m)}}{4}, \tag{9.56}$$

$$\rho^{(m)} > 8(N-\mu)r^{(m)} \tag{9.57}$$

i

$$\rho^{(m+1)} > \rho^{(m)} - \frac{8}{5}\,r^{(m)}. \tag{9.58}$$

Sukcesivnom primenom nejednakosti (9.56) i (9.58) i korišćenjem granica (9.43) i (9.54), dobijamo

$$\begin{aligned}\rho^{(m)} &> \rho^{(m-1)} - \frac{8}{5}\,r^{(m-1)} > \cdots > \rho^{(1)} - \frac{8}{5}\,r^{(1)}\Big(1 + \frac{1}{4} + \Big(\frac{1}{4}\Big)^2 + \ldots\Big)\\ &> \rho^{(1)} - \frac{32}{15}\,r^{(1)} > \frac{13}{20}\,R - \frac{32}{15}\cdot\frac{2}{25}\,R > \frac{47}{100}\,R.\end{aligned}$$

Na osnovu toga iz nejednakosti (9.55) sledi

$$r^{(m+1)} < \frac{68(N-\mu)^2}{R^2}\left(r^{(m)}\right)^3.$$

Pokažimo još da je iterativni metod (9.38) definisan u svakom iterativnom koraku pod početnim uslovima (9.39), to jest, da $0 \notin \{c^{(m)}; r^{(m)}\}$ za svako $m = 1, 2, \ldots$. Zaista, iz uslova (9.39) sledi nejednakost (9.57) za svako $m = 1, 2, \ldots$ tako da tvrđenja Leme 9.2 važe u svakom iterativnom koraku. $\square$

Numerički primeri

Izloženi algoritam (9.38) je primenjen za rešavanje polinomskih jednačina. Da bi se obezbedila inkluzija nula u drugoj i trećoj iteraciji, koje daju veoma male diskove, koristili smo programski paket *Mathematica 7.0* sa aritmetikom višestruke preciznosti. Poređenja radi, testirali smo i metod trećeg reda Halleyevog tipa za inkluziju jedne nule polinoma (9.32) i metod trećeg reda Eulerovog tipa (9.33).

Primer 9.4 Za nalaženje kružne inkluzivne aproksimacije proste nule polinoma

$$\begin{aligned}P(z) = {} & z^{17} - z^{16} + 28z^{15} - 390z^{14} + 6.002z^{13} - 10.762z^{12} - 29.484z^{11}\\ & +846.040z^{10} - 76.809.707z^{9} + 130.583.427z^{8} - 2.113.327.216z^{7}\\ & +24.795.890.990z^{6} - 339.342.802.696z^{5} + 178.957.763.336z^{4}\\ & +7.226.702.364.672z^{3} - 88.957.569.392.640z^{2}\\ & +1.984.671.888.998.400z - 1.902.803.374.080.000\end{aligned}$$

primenili smo intervalne metode (9.32), (9.33) i (9.38). Izolovana tačna nula polinoma P je $\zeta_1 = 1$. Početni disk je $Z_1^{(0)} = \{0.9 + 0.1i; 6\}$. Poluprečnici dobijenih inkluzivnih diskova u prva tri iterativna koraka dati su u Tabeli 9.5.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.32)	1.08(−2)	2.07(−9)	8.75(−36)
(9.33)	4.85(−2)	3.66(−9)	1.12(−34)
(9.38)	9.01(−2)	1.01(−7)	3.58(−30)

Tabela 9.5: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.4

Primer 9.5 Za nalaženje višestruke nule polinoma

$$\begin{aligned} P(z) = {} & z^{14} - 9z^{13} + 57z^{12} - 343z^{11} - 1830z^{10} + 22\,644z^9 - 147.528z^8 + 889.056z^7 \\ & -295.488z^6 - 13.343.616 + 95.178.240z^4 - 576.108.288z^3 \\ & +1.279.867.392z^2 - 1.148.857.344z + 362.797.056 \end{aligned}$$

primenili smo iste intervalne metode kao u Primeru 9.4. Izlovana tačna višestruka nula polinoma P je u ovom slučaju $\zeta_1 = 1$ (višestrukosti $\mu_1 = 3$). Početni disk je $Z_1^{(0)} = \{0.9 + 0.1i; 2\}$. Poluprečnici inkluzivnih diskova u prve tri iteracije dati su u Tabeli 9.6.

	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
(9.32)	6.03(−3)	4.05(−11)	1.50(−38)
(9.33)	2.60(−2)	5.70(−11)	7.21(−39)
(9.38)	9.04(−3)	2.01(−10)	4.29(−37)

Tabela 9.6: Maksimalni poluprečnici inkluzivnih diskova - Primer 9.5

Iz Tabela 9.5 i 9.6 primećujemo da se teorijski rezultati, koji se tiču reda konvergencije razmatranih metoda, dobro podudaraju sa ponašanjem metoda u praksi. Uz to primetimo i da su diskovi dobijeni metodom (9.38) i diskovi dobijeni sa (9.32) i (9.33) uporedivi po svojoj veličini.

Literatura

1. O. Aberth, Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, *Math. Comp.* **27** (1973), 339–344.
2. G. Alefeld, Eine Modifikation des Newtonverfahres zur Bestimmung der reellen Nulstellen einer reellen Funktion, *Z. Angew. Math. Mech.* **50** (1970), 32–33.
3. G. Alefeld, Bounding the slope of polynomial operators and some applications, *Computing* **26** (1981), 227–237.
4. G. Alefeld, J. Herzberger, On the convergence speed of some algorithm for the simultaneous approximations of polynomial zeros, *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974), 237–243.
5. G. Alefeld, J. Herzberger, Über Simultanverfahren zur Bestimmung reeller Polynomwurzeln, *Z. Angew. Math. Mech.* **54** (1974), 413–420.
6. G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.
7. G. Alefeld, G. Mayer, Interval analysis: theory and applications, *J. Comput. Appl. Math.* **121** (2000), 421–464.
8. D. Arthur, The use of interval arithmetic to bound the zeros of real polynomials, *J. Inst. Math. Appl.* **10** (1972), 231–237.
9. P. Batra, Improvement of a convergence condition for the Durand-Kerner iteration, *J. Comput. Appl. Math.* **96** (1998), 117–125.
10. D. A. Bini, G. Fiorentini, Design, analysis and implementation of a multiprecision polynomial rootfinder, *Numer. Algorithms* **23** (2000), 127–173.
11. E. Bodewig, Sur la méthode Laguerre pour l'approximation des racines de certaines équations algébriques et sur la critique d'Hermite, *Indag. Math.* **8** (1946), 570–580.
12. W. Börsch-Supan, A posteriori error bounds for the zeros of a polynomials, *Numer. Math.* **5** (1963), 380–398.
13. W. Börsch-Supan, Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange Interpolation, *Numer. Math.* **14** (1970), 287–296.
14. D. Braess, K. P. Hadeler, Simultaneous inclusion of the zeros of a polynomial, *Numer. Math.* **21** (1973), 161–165.
15. R. P. Brent, Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 327–344.
16. R. P. Brent, Multi-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation, In: J. F. Traub (ed) *Analytic Computational Complexity*, pp. 151–176. Academic, New York (1975) (Reprinted with minor corrections in 1999).
17. R. Brent, P. Zimmermann, *Modern Computer Arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge 2011.
18. L. Brugnano, D. Trigiante, Polynomial roots: The ultimate answer? *Linear Algebra Appl.* **225** (1995), 207–219.
19. C. Carstensen, Anwendungen von Begleitmatrizen, *Z. Angew. Math. Mech.* **71** (1991) 809-812.

20. C. Carstensen, On quadratic-like convergence of the means for two metods for simultaneous root finding of polynomials, *BIT* **33** (1993), 64–73.
21. C. Carstensen, M. S. Petković, An improvement of Gargantini's simultaneous inclusion metod for polynomial roots by Schroeder's correction, *Appl. Numer. Math.* **13** (1994), 453–468.
22. C. Carstensen, T. Sakurai, Simultaneous factorization of a polynomial by rational approximation, *J. Comput. Appl. Math.* **61** (1995), 165–178.
23. P. Chen, Approximate zeros of quadratically convergent algorithms, *Math. Comp.* **63** (1994), 247–270.
24. J. H. Curry, On zero finding methods of higher order from data at one point, *J. Complexity* **5** (1989), 219–237.
25. M. Davies, B. Dawson, On the global convergence of Halley's iteration formula, *Numer. Math.* **24** (1975), 133–135.
26. K. Dočev, Modified Newton method for the simultaneous approximate calculation of all roots of a given algebraic equation (na bugarskom), *Math. Spis. Bulgar. Akad. Nauk* **5** (1962), 136–139.
27. Q. Du, M. Jin, T. Y. Li, Z. Zeng, The Quasi-Laguerre Iteration, *Math. Comp.* **66** No 217 (1997), 345–361.
28. E. Durand, *Solution numériques des équations algébraiques*, Tom I: Équations du Type $F(x) = 0$; Racines d'un Polynôme, Masson, Paris 1960.
29. L. W. Ehrlich, A modified Newton metod for polynomials, *Comm. ACM* **10** (1967), 107–108.
30. L. Elzner, A remark on simultaneous inclusions of the zeros of a polynomial by Gerschgorin's theorem, *Numer. Math.* **21** (1973), 425–427.
31. M. R. Farmer, G. Loizou, A class of iteration functions for improving, simultaneously, approximations to the zeros of polynomial, *BIT* **15** (1975), 250–258.
32. M. R. Farmer, G. Loizou, Locating multiple zeros interactively, *Comput. Math. Appl.* **11** (1985), 595–603.
33. M. Fiedler, Expressing a polynomial as the characteristic polynomial of a symmetric matrix, *Linear Algebra Appl.* **141** (1990), 265–270.
34. W. F. Ford, J. A. Pennline, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.*, **38**, (1996), 658–659.
35. L. V. Foster, Generalizations of Laguerre's Method: Higher order Methods, *SIAM J. Numer. Anal.* **18** No. 6 (1981), 1004–1018.
36. J. B. J. Fourier, Oeuvres de Fourier, *Gauthier-Villars*, Vol. II., Paris, (1890), 249–250.
37. L. Fousse, G. Hanrot, V. Lefèvre, P. Pèlissier, P. Zimmermann, MPFR: a multiple-precision binary floating-point library with correct rounding, *ACM Trans. Math. Softw.* 33, article 13 2007.
38. J. Fujimoto, T. Ishikawa, D. Perret-Gallix, *High Precision Numerical Computations*, Technicall report, ACCP-N-1 2005.
39. I. Gargantini, Parallel algorithms for the determination of polynomial zeros, *Proc. III Manitoba Conf. on Numer. Math.*, Winnipeg 1973 (eds. R. Thomas and H. C. Williams), Utilitas Mathematica Publ. Inc., Winnipeg 1974, pp. 195–215.
40. I. Gargantini, Parallel Laguerre iterations: The complex case, *Numer. Math.* **26** (1976), 317–323.
41. I. Gargantini, Further application of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bound for finding zeros of polynomials, *SIAM J. Numer. Anal.* **15** (1978), 497–510.
42. I. Gargantini, P. Henrici, Circular arithmetic i the determination of polynomial zeros, *Numer. Math.* **18** (1972), 305–320.
43. J. Garloff, Interval mathematics : A Bibliography, *Freiburger Intervall-Berichte* **3** (1982), 1–169.
44. J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* **36**, (1994), 272–276.
45. J. A. Grant, G. D. Hitchins, The solution of polynomial equations in interval arithmetic, *Comput. J.* **16** (1973), 69–72.
46. S. P. Gordon, E. R. von Escen, A parabolic extension of Newton's method, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.* **21** (1990), 519–525.
47. M. Gutknecht, A posteriori error bounds for the zeros of a polynomial, *Numer. Math.* **20** (1972), 139–148.
48. E. Hansen, On solving systems of equations using interval arithmetic, *Math. Comp.* **22** (1968), 374–384.

49. E. Hansen, A globally convergent interval method for computing and bounding real roots, *BIT* **18** (1978), 415–424.
50. E. Hansen, Interval forms of Newtons method, *Computing* **20** (1978), 153–163.
51. E. Hansen, *Global Optimization using Interval Analysis*, Marsel Dekker, New York, 1992.
52. E. Hansen, Computing zeros of functions using generalized interval arithmetic, *Interval Comput.* **3** (1993), 1–28.
53. E. Hansen, M. Patrick, A family of root finding metods, *Numer. Math.* **27** (1977), 257–269.
54. R. Hanson, Automatic error bounds for real roots of polynomials having interval coefficients, *Comput. J.* **13** (1970), 284–288.
55. P. Henrici, Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros, *Proc. Conf. on Applications of Numerical Analysis*, Lecture Notes in Math. **228**, Springer Verlag, Berlin 1971, pp. 86–92.
56. P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. I, John Wiley i Sons Inc., New York 1974.
57. Đ. D. Herceg, *Computer implemention in interpretation of iterative metods for solving equations,* Magistarska teza, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.
58. Đ. D. Herceg, *Konvergencija simultanih postupaka za nalaženje nula polinoma*, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1999.
59. J. Herzberger, Über ein Verfahren zur Bestimmung reeller Nullstellen mit Anwendung uaf Parallelrechnung, *Elektron. Rechenanl* **14** (1972), 250–254.
60. J. Herzberger, L. Metzner, On the Q-order i R-order of convergence for coupled sequences arising u iterative numerical processes, In: Numerical Metods i Error Bounds (eds G. Alefeld i J. Herzberger), *Math. Res.* **Vol. 89**, Akademie Verlag, Berlin 1996, pp. 120-131.
61. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Camridge University Press, Camridge 1985.
62. M. Igarashi, H. Nagasaka, Relationships between the iteration times and the convergence order for Newton-Raphson like methods (na japanskom), *J. Inform. Process.* **22** (1991), 1349–1354.
63. S. Ilić, L. Rančić, On the fourth order zero-finding methods for polynomials, *Filomat* **17** (2003), 35–46.
64. S. Ilić, L. Rančić, On the modification of the Ehrlich-Aberth method for simultaneous approximation of polynomial zeros, *Int. J. Comput. Math.* **81** (2004), 455–471.
65. P. Jarratt, Some fourth order multipoint methods for solving equations, *Math. Comp.* **20** (1966), 434-437.
66. B. Jovanović, A method for obtaining iterative formulas of higher order, *Mat. Vesnik,* **9**, (1972), 365–369.
67. W. Kahan, Laguerre's method and a circle which contains at least one zero of a polynomial, *SIAM J. Numer. Anal.* **4** No. 3 (1967), 474–482.
68. S. Kanno, N. Kjurkchiev, T. Yamamoto, On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **2** (1996), 267–288.
69. L. V. Kantorovich, Functional analysis and applied mathematics (na ruskom), *Uspekhi Mat. Nauk.* **3** (1948), 89–185.
70. I. O. Kerner, Ein gesamtschrittverfahren zur berechnung der nullstellen von polynomen, *Numer. Math.* **8** (1966), 290–294.
71. M. Kim, *Computational complexity of the Euler type algorithms for the roots of complex polynomials*, doktorska disertacija, City University of New York, New York 1985.
72. R. King, A family of fourth order methods for nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), 876–879.
73. R. F. King, Improving the Van de Vel root-finding metod, *Computing* **30** (1983), 373–378.
74. D. Knuth, *The Art of Programming*, Vol. 2. Addison-Wesley, New York 1969.
75. P. Kravanja, *On computing zeros of analytic functions i related problems u structured numerical linear algebra*, doktorska disertacija, Katholieke Universiteit Leuven, Lueven, 1999.
76. P. Kravanja, A modification of Newton's metod for analytic mappings having multiple zeros, *Computing* **62** (1999), 129–145.
77. R. Krawczyk, Iterationsverfahren zur Bestimmung komplexer Nullstellenn, *Z. Angew. Math. Mech.* **50** (1970), 58–61.

78. R. Krawczyk, A Neumaier, Interval slopes for rational functions and associated centered forms, *SIAM J. Numer. Anal.* **22** (1985), 604–616.
79. U. Kulisch, *Computer Arithmetic and Validity*, Studies in Mathematics, vol. 33, Walter de Gruyter, Berlin-New-York, 2008.
80. H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *J. ACM* **21** (1974), 643–651.
81. N. V. Kyurkchiev, Some modifications of L. Ehrlich's method for the approximate solution of algebraic equations (na ruskom), *Pliska Stud. Math. Bulgar.* **5** (1983), 43–50.
82. E. Laguerre, Sur la résolution des équations numériques, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, sér. 2. 17 1878 Vol. **1**, Paris 1898, 46–48.
83. S. Li, X. Liao, L. Cheng, A new fourth-order iterative metod for finding multiple roots of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* **215** (2009), 1288–1292.
84. V. H. Maehly: Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen, *Z. Angew. Math. Phys.* **5** (1954), 260–263.
85. F. Malek, R. Vaillancourt, A composite polynomial zerofinding matrix algorithms, *Comput. Math. Appl.* **30** (1995), 37–47.
86. F. Malek, R. Vaillancourt, Polynomial zerofinding iterative matrix algorithms, *Comput. Math. Appl.* **29** (1995), 1–13.
87. M. Marden, *Geometry of polynomials*, AMS Mathematical Surveys 3, 1996.
88. J. M. McNamee, A bibliography on roots of polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **47** (1993), 391–394.
89. J. M. McNamee, *Numerical Methods for Roots of Polynomials, Part I*, Elsevier, Amsterdam, 2007.
90. D. M. Milošević, *Iterativni metodi za simultanu inkluziju nula polinoma*, doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Niš, 2005.
91. D. Milošević, M. S. Petković, Đ. Herceg, M. Milošević, The improved square-root methods for the inclusion of multiple zeros of polynomials, *Novi Sad J. Math.* **Vol. 40**, No. 1, (2010), 77–101.
92. R. E. Moore, *Automatic error analysis in digital computation*, LMSD-48421, Lockeed Missiles and Space Co., Palo Alto, California 1959.
93. R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey 1966.
94. R. E. Moore, C. T. Yang, *Interval analysis*, LMSD-285875, Lockeed Missiles and Spaces Co., Palo Alto, California 1959.
95. A. Neumaier, An existence test for root clusters i multiple roots, *Z. Angew. Math. Mech.* **68** (1988), 256–257.
96. A. Neumaier, *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
97. X. M. Niu, T. Sakurai, A metod for finding the zeros of polynomials using a companion matrix, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **20** (2003), 239-256.
98. A. W. M. Nourein, An iteration formula for the simultaneous determination of the zeroes of a polynomial, *J. Comput. Appl. Math.* **4** (1975), 251–254.
99. A. W. M. Nourein, An improvement on two iteration metods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial, *J. Comput. Math.* **6** (1977), 241–252.
100. A. W. M. Nourein, An improvement on Nourein's method for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial (an algorithm), *J. Comput. Appl. Math.* **3** (1977), 109 – 110.
101. J. M. Ortega, W. C. Rheiboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations u Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
102. A. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York, 1966.
103. A. M. Ostrowski, *Solution of Equations u Euclidean and Banach Space*, Academic Press, New York 1973.
104. V. Y. Pan, Solving a polynomial equation: some history and recent progress, *SIAM Rev.* **39** (1997), 187–220.
105. B. Parlett, Laguerre's method applied to the matrix eigenvalue problem, *Math. Comput.* **18** (1964), 464–485.
106. Lj. D. Petković, A note on the evaluation u circular arithmetic, *Z. Angew. Math. Mech.* **66** (1986), 371–373.

107. Lj. D. Petković, Ž. M. Mitrović, M. S. Petković, Contribution of Petrović to development of interval arithmetic, *Freiburger Intervall-Bèrichte* **8** (1981), 37–42.
108. Lj. D. Petković, M. S. Petković, D. M. Milošević, Weierstrass-like metods with corrections for the inclusion of polynomial zeros, *Computing* **75** (2005), 55–69.
109. Lj. D. Petković, M. S. Petković, D. Živković, Interval root-finding methods of Laguerre-like type, *Computing* **16** (2002) 199–211.
110. Lj. D. Petković, S. Tričković, D. Živković, Secant slope method for inclusion of complex zeros of polynomials, *In: Numerical Methods and Error Bounds* (eds. G. Alefeld and J. Herzberger), Mathematical Research 89, Academie Verlag, Berlin 1996, 172–177.
111. M. S. Petković, On a generalization of the root iterations for polynomial complex zeros u circular interval arithmetic, *Computing* **27** (1981), 37–55.
112. M. S. Petković, On an iterative method for simultaneous inclusion of polynomial complex zeros, *J. Comput. Appl. Math.* **8** (1982), 51–56.
113. M. S. Petković, *Iterative Metods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
114. M. S. Petković, On the Halley-like algorithms for the simultaneous approximation of polynomial complex zeros, *SIAM J. Numer. Anal.* **26** (1989), 740–763.
115. M. S. Petković, On initial conditions for the convergence of simultaneous root finding methods, *Computing* **57** (1996), 163–177.
116. M. S. Petković, Halley-like metod with corrections for the inclusion of polynomial zeros, *Computing* **62** (1999), 69–88.
117. M. S. Petković, Laguerre-like inclusion method for polynomial zeros, *J. Comput. Appl. Math.* **152** (2003), 451–465.
118. M. S. Petković, *Point Estimation of Root Finding Metod*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2008.
119. M. S. Petković, The self-validated method for polynomial zeros of high efficiency, *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2009), 1175–1186.
120. M. S. Petković, C. Carstensen, On some improved inclusion metods for polynomial roots with Weierstrass' correction, *J. Comput. Appl. Math.* **25** (1993), 59–67.
121. M. S. Petković, C. Carstensen, M. Trajković, Weierstrass' formula i zero-finding metods, *Numer. Math.* **69** (1995), 353–372.
122. M. S. Petković, Lj. Cvetković, On a hybrid method for a polynomial complex zero, *Comput. Math. Appl.* **21** (1991), 181–186.
123. M. S. Petković, J. Džunić, M. R. Milošević, Traub's accelerating generator of iterative root finding methods, *Appl. Math. Lett.* (2011) (u štampi).
124. M. S. Petković, D. Herceg, On rediscovered iteration methods for solving equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **107**, (1999), 275–284
125. M. S. Petković, Đ. Herceg, Point estimation and safe convergence of root-finding simultaneous methods, *Scientific Review* **21–22** (1996), 117–130.
126. M. S. Petković, Đ. Herceg, Point estimation of simultaneous metods for solving polynomial equations: a survey, *J. Comput. Appl. Math.* **136** (2001), 183–207.
127. M. Petković, Đ. Herceg, S. Ilić, *Point Estimation Theory and its Applications*, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.
128. M. Petković, Đ. Herceg, S. Ilić, Safe convergence of simultaneous methods for polynomials zeros, *Numer. Algorithms* **17** (1998), 313–331.
129. M. S. Petković, J. Herzberger, Hybrid inclusion algorithms for polynomial complex zeros in rectangular arithmetic, *Appl. Numer. Math.* **7** (1991), 241–262.
130. M. S. Petković, S. Ilić, S. Tričković, A family of simultaneous zero finding methods, *Comput. Math. Appl.* **34** (1997), 49–59.
131. M. S. Petković, D. M. Milošević, Ostrowski-like metod with corrections for the inclusion of polynomial zeros, *Reliab. Comput.* **10** (2004), 437–467.
132. M. S. Petković, D. M. Milošević, A new higher-order family of inclusion zero-finding methods, *J. Comput. Appl. Math.* **182** (2005), 416–432.
133. M. S. Petković, D. M. Milošević, Improved Halley-like metods with centered inversion, *Appl. Math. Comput.* **169** (2005), 417–436.

134. M. S. Petković, D. M. Milošević, A higher order family for the simultaneous inclusion of multiple zeros of polynomials, *Numer. Algorithms* **39** (2005), 415–435.
135. M. S. Petković, D. M. Milošević, On a new family of simultaneous metods with corrections for the inclusion of polynomial zeros, *Internat. J. Comput. Math.* **83** (2006), 299–317.
136. M. S. Petković, D. M. Milošević, Improvement of convergence condition of the square-root metod for the inclusion of multiple zeros, *Novi Sad J. Math.*, **Vol. 36**, No. 2, (2006), 101–109.
137. M. S. Petković, D. M. Milošević, Higher order methods for the inclusion of multiple zeros of polynomials, *Reliab. Comput.* (2011) (u štampi).
138. M. S. Petković, M. R. Milošević, Efficient Halley-like methods for the inclusion of multiple zeros of polynomials, *Reliab. Comput.*
139. M. S. Petković, M. R. Milošević, D. M. Milošević, Efficient methods for the inclusion of polynomial zeros, *Appl. Math. Comput.* **217** (2011) 7636–7652.
140. M. S. Petković, M. R. Milošević, D. M. Milošević, New higher-order methods for the simultaneous inclusion of polynomial zeros, *Numer. Algorithms* (2011) (u štampi).
141. M. S. Petković, D. M. Milošević, Lj. D. Petković, High order Euler-like metod for the inclusion of polynomial zeros, *Appl. Math. Comput.* **196** (2008), 762–773.
142. M. S. Petković, Lj. D. Petković, *Complex Interval Arithmetic i its Applications*, Wiley-VCH, Berlin-Weinheim-New York, 1998.
143. M. S. Petković, Lj. D. Petković, On the convergence of the sequences of Gerschgorin-like disks, *Numer. Algorithms* **42** (2006), 363–377.
144. M. S. Petković, Lj. D. Petković, A one parameter square root family of two-step root-finders, *Appl. Math. Comput.* **188** (2007), 339–344.
145. M. S. Petković, Lj. D. Petković, Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey, *AADM* **4** (2010), 1–22.
146. M. S. Petković, Lj. D. Petković, Đ. Herceg, Point estimation of a family of simultaneous zero-finding metods, *Comput. Math. Appl.* **36** (1998), 1–12.
147. M. S. Petković, Lj. D. Petković, L. Stefanović, On the R-order of a class of simultaneous iterative processes, *Z. Angew. Math. Mech.* **69** (1989), 199-201.
148. M. S. Petković, L. Rančić, On the guaranteed convergence of the square-root iteration method, *J. Comput. Appl. Math.* **170** (2004), 169–179.
149. M. S. Petković, L. Rančić, A new-fourth order family of simultaneous methods for finding polynomial zeros, *Appl. Math. Comput.* **164** (2005), 227–248.
150. M. S. Petković, L. Rančić, On the guaranteed convergence of the Chebyshev–like method for computing polynomial zeros, *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* **21** (2006) 77–86.
151. M. S. Petković, L. Z. Rančić, M. R. Milošević, On the new fourth-order methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros, *J. Comput. Appl. Math.*, (2011) (u štampi).
152. M. S. Petković, L. Z. Rančić, M. R. Milošević, On the improved Farmer-Loizou method for finding polynomial zeros, *J. Comput. Math.*
153. M. S. Petković, L. Z. Rančić, Lj. D. Petković, Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations: a survey (II), *J. Comput. Appl. Math.* **205** (2007), 32–52.
154. M. S. Petković, L. Z. Rančić, Lj. D. Petković, S. Ilić, Chebyshev-like root-finding methods with accelerated convergence, *Numer. Linear Algebra Appl.* **16** (2009), 971–994.
155. M. S. Petković, L. Z. Rančić, D. M. Milošević, *Numeričko rešavanje nelinearnih jednačina*, Monografija, UNIGRAF Niš, 2009.
156. M. S. Petković, S. Tričković, Đ. Herceg, On Euler-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **15** (1998), 295–315.
157. M. S. Petković, L. V. Stefanović, On the convergence order of accelerated root iteration, *Numer. Math.* **44** (1984), 463–476.
158. M. S. Petković, L. V. Stefanović, On some improvements of square root iteration for polynomial complex zeros, *J. Comput. Appl. Math.* **15** (1986), 13–25.
159. M. S. Petković, L. V. Stefanović, On some parallel higher-order methods of Halley's type for finding multiple polynomial zeros, In: Milovanović, G. V. (ed.) *Numerical Methods and Approximation Theory*, Faculty of Electronic Engineering, Niš (1988), 329–337.
160. M. S. Petković, D. V. Vranić, The convergence of Euler-like method for the simultaneous inclusion of polynomial zeros, *Comput. Math. Appl.* **39** (2000), 95–105.

161. M. Petrović, *Računanje sa brojnim razlomcima*, Građevinska knjiga, Beograd 1969. (Prvo izdanje: Fond L. Ćelovića, Beograd 1932).
162. F. A. Potra, On Q-order and R-order of convergence, *J. Optim. Theory Appl.* **63** (1989), 415–431.
163. M. Prešić, *Iterativne procedure za određivanje k korena polinoma*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Beograd 1971.
164. S. B. Prešić, Un procédé itératif pour la factorisation des polynômes, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris,* Sér. A, **262** (1966), 862–863.
165. P. D. Proinov, Semi local convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* **59** (2006), 705–712.
166. P. D. Proinov, New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, *J. Complexity* **26** (2010), 3–42.
167. L. Z. Rančić, A new family of root-finders, *Proceedings of the XVI Conference on Applied Mathematics*, Budva 2004, (N. Krejić, Z. Lužanin, eds.) Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad, (2004), 119–127.
168. L. Z. Rančić, *Simultani metodi za rešavanjealgebarskih jednačina,* doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Niš 2005.
169. L. Z. Rančić, M. S. Petković, Square-root families for the simultaneous approximation of polynomial multiple zeros, *Novi Sad J. Math.* Vol **35** No 1 (2005), 59–70.
170. T. Sakurai, P. Kravanja, H. Sigiura, M. Van Barel, An error analysis of two related quadrature methods for computing zeros of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* (u štampi).
171. T. Sakurai, M. S. Petković, On some simultaneous metods based on Weierstrass-Dochev correction, *J. Comput. Appl. Math.* **72** (1996), 275–291.
172. T. Sakurai, T. Torii, H. Sugiura, An iterative method for algebraic equation by Padé approximation, *Computing* **46** (1991), 131–141.
173. T. Sakurai, T. Torii, H. Sugiura, A high-order iterative formula for simultaneous determination of zeros of a polynomial, *J. Comput. Appl. Math.* **38** (1991), 387–397.
174. G. S. Salehov, On the convergence of the procers of tangent hyperbolas (na ruskom), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **82** (1952), 525–528.
175. J. W. Schmidt, Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen. II, *Z. Angew. Math. Mech.* **43** (1963), 97–110.
176. J. W. Schmidt, Eine Anwendung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes zur Gewinnung von Fehlerschranken für Näherungen von Polynomnullstellen, *Beitr. zur Numer. Math.* **6** (1977), 158–163.
177. J. W. Schmidt, H. Dressel, Fehlerabschätzung bei Polynomgleichungen mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, *Numer. Math.* **10** (1967), 42–50.
178. A Schönhage, V. Strassen, Schnelle multiplication grosser Zahlen, *Computing* **7** (1971), 281–292.
179. E. Schröder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Ann.* **2** (1970), 317–365.
180. B. Sendov, A. Andreev, N. Kyurkchiev, *Numerical Solution of Polynomial Equations*, (Handbook of Numerical Analysis), Vol. VIII, Elsevier Science, New York 1994.
181. S. Smale, The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **4** (1981), 1–35.
182. S. Smale, Newton's method estimates from data at one point, In: R. E. Ewing, K. I. Gross, C. F. Martin (Eds.) *The Merging Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 185–196.
183. B. T. Smith, Error bounds for zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorem, *J. Assoc. Comput. Math.* **17** (1970), 661–674.
184. T. Sunaga, Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis, *RAAG Memoirs* **2** (1958), 29–46.
185. T. Suzuki, T. Suzuki, Numerical integration error method - a new method for polynomial root-finding, *Nonlinear Anal.* **47/6** (2001), 3859–3868.
186. T. Suzuki, T. Suzuki, Numerical integration error method for zeros of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* **152** (2003), 493–505.
187. T. Suzuki, T. Suzuki, H. Muto, A new method to compute zeros of polynomials using the errors of numerical integration (na japanskom), *Trans. JSIAM* **9** (2) (1999), 65–76.

188. J. F. Traub, *Iterative Methods for Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
189. J. F. Traub, H. Wozniakowski, Convergence and complexity of Newton iteration for operator equations, *J. Assoc. Comp. Mach.* **29** (1979), 250–258.
190. S. B. Tričković, *Iterativni metodi za nalaženje nula polinoma*, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.
191. V. A. Varjuhin, S. A. Kasjanjuk, On iterative methods for refinement of roots of equations (na ruskom), *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **9** (1969), 684–687.
192. X. Wang, Journal of Hangzhou University (Natural Science) (na kineskom), **3** (1966), 63–70.
193. X. Wang, Convergence of Newton's metod i inverse function theorem, *Math. Comp.* **68** (1999), 169–186.
194. X. Wang, D. Han, On dominating sequence metod u the point estimate i Smale's theorem, *Scientia Sinica, Ser. A*, (1989), 905–913.
195. D. Wang, Y. Wu, Some modifications of the parallel Halley iteration method and their convergence, *Computing* **38** (1987), 75–87.
196. D. Wang D, F. Zhao, On the determination of the safe initial approximation for the Durand-Kerner algorithm, *J. Comput. Appl. Math.* **38** (1991), 447–456.
197. D. Wang D, F. Zhao, The theory of Smale's point estimation i its application, *J. Comput. Appl. Math.* **60** (1995), 253–269.
198. X. Wang, S. Zheng, A family of parallel iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence (I), *J. Comput. Math.* **4** (1984), 70–76.
199. X. Wang, S. Zheng, The quasi-Newton method in parallel circular iteration, *J. Comput. Math.* **4** (1984), 305 – 309.
200. X. Wang, S. Zheng, Parallel Halley iteration method with circular arithmetic for finding all zeros of a polynomial, *Numer. Math. J. Chin. Univ.* **4** (1985), 308–314.
201. K. Weierstrass, Neuer beweis des satzes, dass jede ganze rationale function einer veränderlichen dargestellt werden kann ais ein produkt aus linearen functionen derselben veränderlichen, *Ges. Werke* **3** (1903), 251–269. (Johnson Reprint Corp., New York, 1967).
202. W. Werner, On the simultaneous determination of polynomial roots, In: Iterative Solution of Nonlinear Systems of Equations, *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin **953** (1982), 188–202.
203. R. C. Young, The algebra of many-valued quantities, *Math. Ann.* **104** (1931), 260–290.
204. F. Zhao F, D. Wang, The theory of Smale's point estimation i the convergence of Durand-Kerner program (na kineskom), *Math. Numer. Sin.* **15** (1993), 196–206.
205. S. Zheng, F. Sun, Some simultaneous iterations for finding all zeros of polynomial with high order of convergence, *Appl. Math. Comput.* **99** (1999), 233–240.
206. X. Zhou, X. Chen, Y. Song, Construction of higher order metod for multiple roots of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* (2011) (u štampi).
207. D. N. Živković, *Iterativni metodi Lagerovog tipa za rešavanje nelinearnih jednačina*, doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Niš, 2008.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Мимица Р. Милошевић
Ментор, **МН**:	Миодраг С. Петковић, Снежана Илић
Наслов рада, **НР**:	**ИТЕРАТИВНИ МЕТОДИ ЗА АПРОКСИМАЦИЈУ НУЛА ПОЛИНОМА**
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2011.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/	238 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	нумеричка математика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	нуле полинома, симултани методи, брзина конвергенције, кружна интервална аритметика
УДК	519.6
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:		Решавање полиномских једначина је једна од најважнијих области нумеричке анализе јер се, осим примењене математике, јавља и у математичким моделима инжењерских дисциплина, физике, рачунарских наука, економије, друштвено-хуманистичких наука, итд. Главна тема и циљ дисертације је конструкција нових итеративних метода високе рачунске ефикасности за решавање полиномских једначина. Истраживања су усмерена ка конструкцији нових метода за истовремено налажење нула алгебарских полинома у комплексној аритметици и у комплексној кружној интервалној аритметици (аритметици дискова). Интервални методи имају велики значај јер дискови добијени у итеративном процесу садрже тражене нуле, чиме је обезбеђена горња граница грешке добијене апроксимације - центра диска. Висока рачунска ефикасност се добија применом погодних корекција које су саставни део алгоритама велике ефикасности за налажење простих или вишеструких нула дате функције. Сви методи су тестирани на нумеричким примерима и упоређени са познатим методима.
Датум прихватања теме, **ДП**:		6.06.2011.
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан, ментор:	
	Члан,	
	Члан,	

Образац **Q4.09.13** - Издање 1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Mimica R. Milošević
Mentor, **MN**:	Miodrag S. Petković, Snežana Ilić
Title, **TI**:	**ITERATIVE METHODS FOR APPROXIMATION OF POLYNOMIAL ZEROS**
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2011.
Publisher, **PB**:	author’s reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	238 p.
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	numerical mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:	zeros of polynomials, simultaneous methods, convergence rate, circular interval arithmetic
UC	519.6
Holding data, **HD**:	Library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		Solving polynomial equations is one of the most important areas of numerical analysis since, beside in applied mathematics, it also appears in mathematical models of engineering disciplines, physics, computer science, economics, socio-humanistic sciences, etc. Main theme and aim of dissertation is construction of new iterative methods of high computational efficiency for solving polynomial equations. Research is directed to construction of new methods for simultaneous determination of zeros of algebraic polynomials in the complex arithmetic, and in complex circular interval arithmetic (arithmetic of discs). Interval methods have great significance, because the disks obtained in the iterative process contain the required zeros, which provides the upper error bound of the obtained approximations - the center of discs. High computational efficiency is obtained by using convenient corrections which are an integral part of the algorithm of great efficiency for finding a simple or multiple zeros of a given function. All methods are tested on numerical examples and compared with known methods.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		6.06.2011.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member, Mentor	
	Member,	
	Member,	

Образац **Q4.09.13** - Издање 1