УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Департман за математику и информатику

Мр Александар С. Настић

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА НЕНЕГАТИВНИМ ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА ГЕНЕРИСАНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИМ БРОЈАЧКИМ НИЗОВИМА

Докторска дисертација

Ниш, 2011

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Департман за математику и информатику

Мр Александар С. Настић

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА НЕНЕГАТИВНИМ ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА ГЕНЕРИСАНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИМ БРОЈАЧКИМ НИЗОВИМА

Докторска дисертација

Ментор
Проф. др Мирослав М. Ристић

Ниш, 2011

Подаци о аутору

Александар Настић је рођен 08.04.1978. у Београду. У Лесковцу је завршио основну школу као ђак генерације, као и гимназију са Вуковом дипломом. Школске 1997./98. године уписао је Филозофски факултет, сада Природно-математички факултет у Нишу, одсек Математика, смер Рачунарство и информатика, где је и дипломирао 15.05.2003. са просечном оценом 9,75. Током студија био је корисник стипендије ДИН Ниш која је додељивана најбољем студенту факултета универзитета у Нишу. Такође је добитник стипендије Норвешке Владе у оквиру пројекта "За генерацију која обећава", као и стипендије НВО "Лесковчани света". Школске 2003./04. године је уписао последипломске студије на смеру Математичка статистика и примене. Положио је све испите са просечном оценом 10,00. Магистарску тезу "Ауторегресивни процеси са ненегативним целобројним вредностима", под менторством проф. др Мирослава М. Ристића, одбранио је 29.12.2008. године и тиме стекао научни назив магистра математичких наука.

Дана 10.11.2004. године изабран је у звање асистента-приправника за ужу научну област Информатика, вероватноћа и статистика на Природно-математичком факултету у Нишу, а 08.04.2009. у звање асистента за ужу научну област Математика, за групу предмета из Математичке статистике. У периоду од 01.04.2003. до 01.09.2003. учествовао је на пројекту "Дискретни и непрекидни стохастички модели са применама", а од 2006. до 2010. на пројекту "Нумеричка линеарна алгебра, стохасика и статистика са применама". Од јануара 2011. ангажован је на пројекту "Развој метода израчунавања и процесирања информација: теорија и примене".

Научни допринос дисертације

У дисертацији су представљени најпознатији INAR модели генерисани различитим тининг операторима. Уведени су нови ИНАР модели првог реда засновани на геометријском бројачком низу, а са геометријском, негативном биномном и померeном геометријском маргиналном расподелом. Ови модели су даље уопштени у погледу реда и димензионалности и то увођењем комбиновног INAR(p) модела и дводимензионог INAR модела реда 1. Такође су презентовани нови мешовити INAR модели првог и другог реда као и њихово уопштење p-тог реда. За све уведене моделе дата су корелациона и регресиона својства. Посебна пажња је поклоњена параметарским и непараметарским методама за оцењивање непознатих параметара као и њиховој асимптотској карактеризацији. Ове методе су примењене над симулираним ненегативним целобројним низовима, а затим су модели упоређени са осталим референтним INAR моделима у примени над реалним подацима.

Садржај

Предговор

У овој дисертацији се истражују ауторегресивни процеси са ненегативним целобројним вредностима генерисани геометријским бројачким низовима. Поред уопштавања и продубљивања неких постојећих резултата, уведени су и нови модели засновани на геометријском бројачком низу, који су применом на подацима из стварног живота упоређени са постојећим актуелним моделима.

Целобројни ауторегресивни процеси су настали као круна вишедеценијских напора да се што боље моделирају целобројни низови података. Наиме, шездесетих година двадесетог века научници се, покушавајући да што боље моделирају природне појаве, веома често суочавају са целобројним ненегативним временским низовима који углавном представљају периодична пребројавања догађаја или елемената неке популације са међусобно корелираним вредностима. Овакви низови су примећени у медицини, осигурању, телекомуникацијама, метеорологији као и криминологији. То могу бити бројања пацијената, несрећа, пренетих порука, земљотреса или почињених кривичних дела. У то време долази и до значајног развоја теорије стандардних ауторегресивних (AR) процеса са непрекидним маргиналним расподелама и управо применом ових модела изведени су први покушаји целобројног моделирања. То је дало не тако лоше резултате само када се ради о процесима са изузетно великим вредностима појединих елемената, односно када је грешка настала услед заокруживања релативно мала. У осталим случајевима примена ових модела је била потпуно неоправдана и неадекватна. Након тога нешто бољи резултати су постигнути применом ланаца Маркова које су детаљно описали Cox и Miller (1965). Међутим, проблем са њиховом применом је био сувише велики број параметара. Деценију касније, Jacobs и Lewis (1978a-c) са истим циљем су дефинисали дискретне ауторегресивне моделе покретних средина (DARMA) који су структурално били засновани на добро познатим ARMA моделима. Коначно, независним приступом McKenzie (1985) и Al-Osh и Alzaid (1987) уводе INAR(1) (Integer-Valued AutoRegressive) процесе реда 1 засноване на биномном тининг оператору постављајући тако темеље савременом приступу моделирања ненегативних целобројних ауторегресивних процеса. Иначе, под INAR(1) процесом подразумевамо низ $\{X_n\}_{n\in N}$ дефинисан са

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

где је $\alpha \in (0,1)$, $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем μ_ε и коначном дисперзијом σ_ε^2, при чему су ε_n и X_{n-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. Тининг оператор "$\alpha\circ$" је дефинисан са $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$, где $\{Y_i\}$ представља низ независних једнако расподељених случајних променљивих са параметром расподеле α, независних од случајних променљивих X и ε_n, познатији као бројачки низ. Назив тининг оператора се заснива на расподели случајне променљиве $\alpha \circ X|X$. Касније, прилагођавајући се потребама моделирања целобројних низова различите природе настаје велики број уопштења INAR(1) модела у погледу реда, тининг оператора као и маргиналне расподеле.

Избор расподеле бројачког низа одређује саму суштину и примену њиме генерисаних INAR модела. Поред доминатног избора Бернулијеве расподеле и неких других уопштених расподела, Ristić, Bakouch и Nastić (2009) су увели INAR(1) процес заснован на геометријском бројачком низу. У дисертацији се проучавају уопштени постојећи и нови уведени модели, засновани управо на том геометријском бројачком низу. Коначно, упоређујући ове INAR моделе, са негативним биномним тинингом, са већ познатим моделима другачије структуре, оправдава се примена управо геометријског бројачког низа у многим реалним ситуацијама.

Дисертација, која се заснива на оригиналним објављеним и још увек необјављеним резултатима, састоји се из четири дела. Први део представља извесну систематизацију постојећих резултата у моделирању ненегативних целобројних временских низова. Наводећи моделе генерисане различитим тининг операторима дата је и мотивација за разматрање ненегативних целобројних процеса са геометријским бројачким низом.

У другом делу дисертације, у прва два одељка, ослањајући се на резултате из Ristić, Bakouch, Nastić (2009) и Ristić, Nastić, Bakouch (2010), разматрају се INAR(1) модели са геометријском и негативном биномном расподелом, засновани на негативном биномном тинингу. Након извођења особина овог тининг оператора одређени су моменти и аутокорелациона структура процеса. Статистичка својства и условне статистичке величине се разматрају. Посебна пажња се поклања непараметарским методама за оцењивање параметара модела и дата је њихова асимптотска карактеризација, док се метод максималне веродостојности посматра у контексту примене модела над реалним подацима. У трећем одељку ове главе уведена су два INAR(1) просеца са помереном геометријском маргиналном расподелом ради примене на серијама природних бројева. Доказана је егзистенција јединствених ергодичних и строго стационарних модела и након њихове комплетне карактеризације одређене су статистике за оцењивање непознатих параметара. На крају су ови модели упоређени са референтним моделима првог реда у примени над подацима из стварног живота. Резултати овог одељка су објављени у Nastić (2010).

У трећем делу дата су извесна уопштења у погледу реда и димензионалности модела. Најпре, полазећи од процеса реда p са биномним тинингом, уведеног у Weiß (2008c), проучавамо комбиновани INAR(p) модел са негативним биномним тинингом и геометријском маргиналном расподелом. Поред конструкције и корелационе структуре процеса одређујемо неке особине модела и условне статистичке величине процеса. Непознати параметри су оцењени методама момената, условних најмањих квадрата и максималне веродостојности. Изведене су асимптотске расподеле непараметарских оцена. Овај модел се упоређује са одговарајућим моделом из Weiß (2008c) у примени над стварним подацима. У другом делу ове главе, као и у Ristić, Nastić, Jayakumar, Bakouch, (2011), а полазећи од основа које су поставили Dewald, Lewis и McKenzie (1989), применом два негативна биномна тининг оператора "$\alpha *$" и "$\beta *$" уводимо дводимензиони INAR модел реда 1. Упознајући нека својства овог процеса изведен је и модификовани метод условних најмањих квадрата за оцењивање непознатих параметара модела.

У четвртом, последњем делу дисертације уводе се нови мешовити INAR модели првог и другог реда, као и њихово уопштење p-тог реда. Егзистенција, јединственост, стационарност и ергодичност процеса су доказани. Корелациона и регресиона својства модела се изводе, као и статистике за оцењивање непознатих параметара. Оригиналност ових модела се огледа у мешовитој примени биномног тининга за моделирање пасивне зависности елемената серије и негативног биномног тининга за представљање корелираности елемената, засноване на генерисању једних случајних догађаја од стране других. Према томе, њихова сврха је у описивању сложених података са вишеслојном зависношћу, што је и демонстрирано применом ових модела над подацима о броју почињених кривичних дела периодично кроз време.

Срдачно се захваљујем свом ментору, др Мирославу М. Ристићу, ванредном професору Природно-математичког факултета у Нишу на посвећеном времену, изузетном стрпљењу, као и саветима и несебичној помоћи у припреми ове дисертације.

Захваљујем се и професорки, др Биљани Ч. Поповић, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу на корисним сугестијама које су значајно унапредиле дисертацију.

Такође захвалност дугујем и професорима др Загорки С. Лозанов-Црвенковић, редовном професору Природно-математичког факултета у Новом Саду и др Миомиру С. Станковићу, редовном професору Факултета заштите на раду у Нишу, на великој пажњи коју су посветили мом раду.

Захвалио бих се и својој породици на пруженој подршци, моралној потпори и свим одрицањима која су била неминовна приликом израде дисертације.

Мр Александар С. Настић

Глава 1

INAR модели

Док је биномни тининг оператор са једне стране преовладавао у конструисању модела веома ефикасне примене, са друге стране било је покушаја уопштавања самог тининг оператора. Стога, у првом одељку ове главе представљамо F-INAR модел реда 1 дефинисан од стране Aly-a и Bouzara-a (1994, 2005). Значај овог модела је пре свега у општавању тининг оператора, али и формулисању општих дефиниција и тврђења са великим потенцијалом конкретних примењљивих интерпретација. На пример, процеси са биномним тинингом су вероватно најзначајнији специјалан случај ове уопштене класе INAR процеса. Међутим, сасвим природно, с обзиром на ниво уопштења, слабост самих F-INAR модела је у недовољној карактеризацији процедура за оцењивање непознатих параметара модела као и у непримењљивости на конкретне серије података.

У другом одељку ове главе представљамо најзначајније резултате који се тичу INAR модела са биномним тининг оператором. Овај оператор су увели Steutel и van Harn (1979), са циљем дефинисања дискретног случаја самодекомпозабилности. Будући да су засновани на бројачком низу Бернулијевих случајних променљивих, ови модели су веома погодни за представљање различитих врста бројачких процеса, при чему у сваком тренутку у посматрану популацију могу да пристигну нови елементи, али и постојећи да исчезну из ње. Због различите природе посматраних обележја, разматраћемо моделе са различитим маргиналним расподелама.

Садржај ове главе је у великој мери обухваћен магистарском тезом Nastić (2008), тако да су докази овде поновљених тврђења изостављени.

1.1 Модели са уопштеним тинингом. F-INAR(1) модели

INAR(1) модел са биномним тинингом који су увели McKenzie (1985) и Al-Osh и Alzaid (1987), уопштили су Aly и Bouzar (1994, 2005) применом генералисаног "$\circ_F$" тининг оператора, који су конструисали van Harn, Steutel и Vervaat (1982) за потребе дефинисања дискретне F-самодекомпозабилности. На тај начин су уведени F-INAR процеси.

За произвољну расподелу $\{p_n, n \geq 0\}$, на нулом проширеном скупу природних бројева $\mathbb{N}_0$, дефинишимо функцију генератрисе вероватноће $\Phi(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$, $|s| \leq 1$. Са F означимо полугрупу функција генератриса вероватноће $(F, \circ) = \{F_t, t \geq 0\}$, таквих да је $F_t \not\equiv 1$, $\delta_F = -\ln F_1'(1) > 0$ и за које су задовољени услови:

$$\lim_{t\to 0} F_t(s) = s, \quad \lim_{t\to\infty} F_t(s) = 1. \tag{1.1.1}$$

Оператор полугрупе "$\circ$" је дефинисан са $F_r \circ F_t(s) = F_{r+t}(s)$, $r, t \geq 0$, $|s| \leq 1$.

Дефиниција 1.1.1 (Aly, Bouzar, 2005) *Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива и $\alpha \in (0, 1)$. Генералисани оператор "$\circ_F$" дефинише се као*

$$\alpha \circ_F X = \sum_{i=1}^{X} Y_i, \tag{1.1.2}$$

где је $\{Y_i, i \geq 1\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од X, са функцијом генератрисе вероватноће F_t, $t = -\ln \alpha$, која испуњава услове (1.1.1).

Оператор "$\circ_F$" се може додефинисати са $0 \circ_F X = 0$ и $1 \circ_F X = X$. Даље, помоћу претходно уведеног оператора дефинишемо одговарајући процес.

Дефиниција 1.1.2 (Aly, Bouzar, 2005) *Низ случајних променљивих $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називамо F-INAR(1) процесом ако задовољава једначину*

$$X_n = \alpha \circ_F X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{1.1.3}$$

где је $\alpha \in [0,1]$, $\{\varepsilon_n\}$ *је низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих, независних од* X_m*, за* $m < n$*, са очекивањем* μ_ε *и коначном дисперзијом* σ_ε^2*. Случајна променљива* Y_i *је независна од* ε_n *и* X_n *за свако* n *и свако* i*.*

На основу претходне дефиниције се директно утврђује да је F-INAR(1) процес ланац Маркова, као и да је

$$\Phi_{X_n} = \Phi_{X_{n-1}}(F_t(s))\Phi_{\varepsilon_n}(s), \tag{1.1.4}$$

где је $t = -\ln\alpha$, а $\Phi_{X_n}(s)$ и $\Phi_{\varepsilon_n}(s)$ су функције генератрисе вероватноћа случајних променљивих X_n и ε_n, респективно. Aly и Bouzar (2005) су рекурентном применом претходне једнакости закључили да је

$$X_n \stackrel{d}{=} \alpha^k \circ_F X_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \circ_F \varepsilon_{n-i}, \tag{1.1.5}$$

за $n \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 1$. Затим, за $k \to \infty$ добили су MA(∞) репрезентацију у расподели

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \circ_F \varepsilon_{n-i}, \tag{1.1.6}$$

за неко $\alpha \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}$. На основу претходне релације имамо да су случајне променљиве F-INAR(1) процеса једнако расподељене.

О егзистенцији F-INAR процеса првог реда говори следећа веома важна теорема.

Теорема 1.1.1 (Latour, 1998) *За дато* $\alpha \in (0,1)$ *и низ* $\{\varepsilon_n\}$ *независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем* μ_ε *и коначном дисперзијом* σ_ε^2*, постоји слабо стационаран* F*-INAR*(1) *процес* $\{X_n\}$*, за који важи*

$$X_n = \alpha \circ_F X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

тако да је $Cov(X_m, \varepsilon_n) = 0$*, за* $m < n$*.*

С обзиром да је једнако расподељен INAR процес строго стационаран, на основу претходне теореме на даље можемо претпоставити и егзистенцију строго стационарних F-INAR(1) процеса. Пошто су

Du и Li (1991) показали да је сваки потпуно уопштени строго стационарни ненегативни целобројни ауторегресивни процес реда 1 ергодичан, онда је очигледно да је и F-INAR(1) процес ергодичан.

Говорећи о конструисању уопштеног "$\circ_F$" оператора уведен је и појам F-самодекомпозабилности.

Дефиниција 1.1.3 (Aly, Bouzar, 2005) *За расподелу на скупу $\mathbb{N}_0$, са функцијом генератрисе вероватноће $\Phi(s)$, кажемо да је F-самодекомпозабилна, ако за свако $t > 0$, постоји нека функција генератрисе вероватноће $\Phi_t(s)$ таква да је*

$$\Phi(s) = \Phi(F_t(s))\Phi_t(s), \quad |s| \leq 1. \tag{1.1.7}$$

С обзиром да су Alzaid и Al-Osh (1988) показали да код INAR(1) процеса са $E(\varepsilon) < \infty$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{X_n}(s)$, у могућности смо да детаљније опишемо везу између маргиналне расподеле F-INAR(1) процеса и F-самодекомпозабилне расподеле. Наиме, када пустимо да $n \to \infty$ у (1.1.4), добијамо да је $\Phi_X(s) = \Phi_X(F_t(s))\Phi_\varepsilon(s)$ за неко конкретно α дефинисано релацијом $t = -\ln\alpha$ и случајну променљиву X, такву да је $X_n \xrightarrow{d} X$. Одавде видимо да је гранична расподела маргиналне расподеле F-INAR(1) процеса "скоро" F-самодекомпозабилна. Наиме, она задовољава релацију (1.1.7), али не за свако $\alpha \in (0,1)$, што је услов Дефиниције 1.1.3, већ за једно, конкретно α. Такође, из (1.1.4) и једнаке расподељености променљивих F-INAR(1) процеса, следи да је и сама маргинална расподела "скоро" F-самодекомпозабилна. Са друге стране Aly и Bouzar су показали следеће тврђење.

Теорема 1.1.2 (Aly, Bouzar, 2005) *Нека је $F(x)$ F-самодекомпозабилна расподела. За свако $\alpha \in (0,1)$ постоји строго стационаран F-INAR(1) процес са маргиналном расподелом $F(x)$.*

Стога, свака F-самодекомпозабилна расподела може се појавити као маргинална расподела неког F-INAR(1) процеса, док обрат не важи. Захваљујући томе кандидати за маргиналне расподеле најчешће се траже међу F-самодекомпозабилним расподелама.

Коначно, анализу ових процеса заокружујемо једном веома важном особином.

Дефиниција 1.1.4 (Aly, Bouzar, 2005) *За случајни процес* $\{X_n\}$*, кажемо да је временски реверзибилан (инваријантан), ако за свако* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $k \geq 0$*,* $(k+1)$*-торке* $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ *и* $(X_{n+k}, X_{n+k-1}, \ldots, X_n)$ *имају једнаке заједничке расподеле.*

Захваљујући чињеници да је F-INAR(1) процес ланац Маркова, да бисмо потврдили његову временску реверзибилност, довољно је утврдити да за свако $n \in \mathbb{Z}$, (X_{n-1}, X_n) и (X_n, X_{n-1}) имају једнаке расподеле. О овоме говори следећа теорема.

Теорема 1.1.3 (Nastić, 2008) *F-INAR(1) процес је временски реверзибилан ако је*

$$\Phi_{X_n, X_{n-1}}(s_1, s_2) = \Phi_{X_n, X_{n-1}}(s_2, s_1).$$

На основу садржаја овог одељка може се уочити сличност између стандардних ауторегресивних процеса и уопштених F-INAR процеса и то како у форми одговарајућих модела, тако и у домену стацинарности и корелационој структури. Ово упућује на покушај примена метода, карактеристичних за стандардне AR моделе и у случају INAR модела.

1.2 INAR модели са биномним тинингом

У првом делу овог одељка представићемо особине биномног тининг оператора као и статистичка својства ове врсте ауторегресивних процеса првог реда на примеру два хронолошки фундаментална INAR(1) процеса са Пуасоновом и геометријском маргиналном расподелом. Као што је поменуто раније, биномни тининг је најчешће коришћени оператор који је заснован на Бернулијевом бројачком низу независних случајних променљивих. Међутим, постоје и INAR процеси генерисани другим тининг операторима насталим извесним модификацијама биномног тининга, али такође заснованим на Бернулијевом бројачком низу. С обзиром да то није предмет дисертације, неки од ових процеса ће бити само укратко представљени.

У другом делу овог одељка, увођењем одговарајућег матричног апарата, представљамо основна својства INAR модела реда p са уопштеном маргиналном расподелом. Упознајемо се такође са непараметарским методама за оцењивање непознатих параметара модела.

1.2.1 Модели првог реда

Користећи приступ Al-Osh-а и Alzaid-а (1987), овде најпре упознајемо ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда (INAR(1)) са уопштеном маргиналном расподелом, генерисан биномним тининг оператором "$\alpha\circ$", где је $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$. Низ независних случајних променљивих $\{Y_i\}$, помоћу кога се дефинише одговарајући тининг оператор, називамо бројачким низом.

Дефиниција 1.2.1 (Al-Osh, Alzaid, 1987) *INAR(1) процес је низ случајних променљивих $\{X_n\}$ који задовољава једначину*

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.1}$$

где је $\alpha \in (0,1)$, а $\{\varepsilon_n\}$ је иновациони низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих, таквих *да су* X_m *и* ε_n *независне за* $m < n$. $\{Y_i\}$ *је бројачки низ независних случајних променљивих са Бернулијевом расподелом* $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = \alpha$.

С обзиром да се назив тининг оператора добија на основу расподеле случајне променљиве $\alpha \circ X|X$, овај процес је генерисан биномним тининг оператором "$\alpha\circ$".

Примена овако дефинисаног модела одговара следећој, веома честој интерпретацији. Вредност случајне променљиве X_n означава број опсталих елемената неког система у тренутку n, параметар α одговара вероватноћи опстанка сваког појединачног елемента, док ε_n представља број новопридошлих елемената у систем у периоду $[n-1, n)$.

Посматрајући генералисани "$\circ_F$" оператор, лако се проверава да у случају Бернулијеве расподеле његовог бројачког низа $\{Y_i\}$ одговарајућа функција генератрисе вероватноће је облика $F_t(s) = 1 - \alpha + \alpha s$, где је $t = -\ln \alpha$. Будући да она задовољава неопходне услове (1.1.1), следи да је INAR(1) модел са биномним тинингом само специјалан случај F-INAR(1) модела. Стога, сви резултати претходног одељка важе и овде. Такође, ослањајући се на особине F-INAR(1) процеса, непосредно следи и следећа последица.

Последица 1.2.1 *Нека је дат INAR*(1) *процес и нека је* $|s| < 1$. *Тада је*

$$\Phi_X(s) = \Phi_X(1 - \alpha + \alpha s)\Phi_\varepsilon(s), \tag{1.2.2}$$

где α *одређује Бернулијеву расподелу одговарајућег бројачког процеса, а* X *је случајна променљива таква да* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Особине биномног тининг оператора:

1. $0 \circ X \overset{\text{с.и.}}{=} 0$.
2. $1 \circ X \overset{\text{с.и.}}{=} X$.
3. $\alpha \circ (\beta \circ X) = (\alpha\beta) \circ X$, α, $\beta \in (0,1)$, где су бројачки низови тининг оператора "$\alpha\,\circ$" и "$\beta\,\circ$" независни.
4. $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$, $\alpha \in (0,1)$.

5. $E(\alpha \circ X)^2 = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1-\alpha)E(X)$, $\alpha \in (0,1)$.
6. $E(\alpha \circ X)^3 = \alpha^3 E(X^3) + 3\alpha^2(1-\alpha)E(X^2) + \alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)E(X)$, $\alpha \in (0,1)$.
7. $E(X(\alpha \circ Y)) = \alpha E(XY)$, $\alpha \in (0,1)$, где је бројачки низ тининг оператора "$\alpha\circ$" независан од случајне променљиве X.
8. $E\left(X(\alpha \circ Y)^2\right) = \alpha^2 E(XY^2) + \alpha(1-\alpha)E(XY)$, $\alpha \in (0,1)$, где је бројачки низ тининг оператора "$\alpha\circ$" независан од случајне променљиве X.
9. $E((\alpha \circ X)(\beta \circ Y)) = \alpha\beta E(XY)$, ако су одговарајући бројачки низови међусобно независни и независни од X и Y, респективно.
10. $E((\alpha \circ X)^2(\beta \circ Y)) = \alpha^2\beta E(X^2Y) + \alpha(1-\alpha)\beta E(XY)$, ако су одговарајући бројачки низови међусобно независни и независни од X и Y, респективно.
11. $E(XY(\beta\circ Z)) = \beta E(XYZ)$, $\beta \in (0,1)$, где је бројачки низ тининг оператора "$\beta\circ$" независан од случајних променљивих X и Y.
12. $E(X(\beta \circ Y)(\gamma \circ Z)) = \beta\gamma E(XYZ)$, ако су одговарајући бројачки низови "$\beta\circ$" и "$\gamma\circ$" тининг оператора међусобно независни и независни од X, Y и Z.
13. $E((\alpha \circ X)(\beta \circ Y)(\gamma \circ Z)) = \alpha\beta\gamma E(XYZ)$, ако су одговарајући бројачки низови међусобно независни и независни од X, Y и Z.
14. $\alpha \circ (X+Y) \overset{d}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Y$, $\alpha \in (0,1)$.
15. $Cov(X, \alpha \circ Y) = \alpha Cov(X,Y)$, $\alpha \in (0,1)$, где је тининг оператор "$\alpha\circ$" независан од случајне променљиве X.
16. $E(\alpha \circ X|X) = \alpha X$, $\alpha \in (0,1)$.
17. $E\left((\alpha \circ X)^2|X\right) = \alpha^2 X^2 + \alpha(1-\alpha)X$, $\alpha \in (0,1)$.

Silva и Oliveira (2004) доказали су већину ових особина тининг оператора, док су последње две изведене у Nastić (2008).

Корелациона структура процеса

Полазећи од Дефиниције 1.2.1 INAR(1) процеса и користећи особине биномног тининг оператора, директним израчунавањем добијамо релације између математичког очекивања и дисперзије маргиналне расподеле и расподеле иновационог процеса. Тако на основу особине 4 је $E(X_n) = \alpha E(X_{n-1}) + \mu_\varepsilon$, а одатле на основу једнаке расподељености случајних променљивих INAR(1) процеса добијамо да је

$$\mu = E(X) = \frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1. \tag{1.2.3}$$

Такође, на основу особине 5, добијамо да је

$$Var(X_n) = \alpha^2 Var(X_{n-1}) + \alpha(1-\alpha)E(X_{n-1}) + \sigma_\varepsilon^2,$$

одакле је

$$Var(X) = \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}, \quad \alpha \neq 1. \tag{1.2.4}$$

На основу репрезентације (1.1.5), Дефиниције 1.2.1 и особине 15 изводимо аутоковаријансну функцију реда k,

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= Cov(X_{n-k}, X_n) = Cov(X_{n-k}, \alpha^k \circ X_{n-k}) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i Cov(X_{n-k}, \varepsilon_{n-i}) \\ &= \alpha^k Var(X_{n-k}).\end{aligned}$$

Одавде добијамо да је

$$\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0), \quad k \geq 0, \tag{1.2.5}$$

као и да је аутокорелациона функција реда k облика

$$\rho(k) = \alpha^k, \quad k \geq 0. \tag{1.2.6}$$

Експоненцијални карактер претходне две функције оправдава истицану повезаност и сличност INAR(1) и стандардних AR(1) процеса.

Условне статистичке величине

Применом математичке индукције и особине 4, а полазећи од $E(X_{n+1}|X_n)=\alpha X_n+\mu_\varepsilon$, извођењем као у Nastić (2008) добијамо да је

$$E(X_{n+k}|X_n)=\alpha^k X_n+\mu_\varepsilon\left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right), \tag{1.2.7}$$

одакле директно следи да $E(X_{n+k}|X_n)\to E(X)$, када $k\to\infty$.

Са друге стране условну дисперзију за k-корака израчунавамо помоћу

$$Var(X_{n+k}|X_n)=E(X^2_{n+k}|X_n)-\left(E(X_{n+k}|X_n)\right)^2, \tag{1.2.8}$$

тако да остаје да се изведе први члан претходне једнакости. Такође извођењем као у Nastić (2008), полазећи од $E(X^2_{n+1}|X_n)=\alpha^2X_n^2+\alpha X_n(1-\alpha+2\mu_\varepsilon)+\mu_\varepsilon^2+\sigma_\varepsilon^2$, применом математичке индукције добијамо

$$\begin{aligned} E(X^2_{n+k}|X_n) &= \alpha^{2k}X_n^2+\alpha^k\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}X_n(1-\alpha+2\mu_\varepsilon)\\ &+ \mu_\varepsilon(1-\alpha)\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right)^2-\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)+\mu_\varepsilon^2\left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right)^2\\ &+ \sigma_\varepsilon^2\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

Зaменом претходног и (1.2.7) у (1.2.8), добијамо

$$Var(X_{n+k}|X_n)=\alpha^k(1-\alpha^k)X_n+\mu_\varepsilon\frac{\alpha(1-\alpha^k)(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha^2}+\sigma_\varepsilon^2\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}. \tag{1.2.9}$$

Одавде лако проверамо да важи $\lim\limits_{k\to\infty}Var(X_{n+k}|X_n)=Var(X)$.

Веома једноставно се може извести и условна функција генератрисе вероватноће за k корака. Најпре, за $k=1$ непосредним извођењем као у Nastić (2008), добијамо $\Phi_{X_{n+1}|X_n}(s)=\Phi_{\varepsilon_{n+1}}(s)\left(\Phi_Y(s)\right)^{X_n}$. Одавде, увођењем ознака $\Phi_Y^{(0)}(s)=s$ и $\Phi_Y^{(k)}(s)=\Phi_Y\left(\Phi_Y^{(k-1)}(s)\right)$, за $k\geq 1$ и применом математичке индукције, добија се

$$\Phi_{X_{n+k}|X_n}(s)=\prod_{i=0}^{k-1}\Phi_{\varepsilon_{n+k-i}}\left(\Phi_Y^{(i)}(s)\right)\left(\Phi_Y^{(k)}(s)\right)^{X_n}. \tag{1.2.10}$$

Значај ове функције је у алтернативном, веома ефикасном методу за извођење регресије и условне дисперзије процеса, применом познате везе имеђу момената случајне променљиве и вредности извода одговарајућег реда функције генератрисе вероватноће у 1.

За разлику од корелационе структуре, када говоримо о условним статистичким величинама примећујемо битну разлику ових процеса у односу на стандардне AR моделе. Наиме, код стандардних AR процеса регресија је такође линеарна функција случајне променљиве, али је условна дисперзија константна, док код INAR(1) процеса то није случај.

Пуасонов INAR(1) модел

Пуасонов INAR процес реда 1 (PoINAR(1)) је један од првих проучаваних ненегативних целобројних ауторегресивних процеса, који је и до данас најчешће примењиван у реалним ситуацијама. Он се може увести Дефиницијом 1.2.1, при чему је иновациони процес $\{\varepsilon_n\}$ са Пуасоновом $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелом. На основу Последице 1.2.1 и чињенице да је функција генератрисе вероватноће иновационог процеса дата са $\Phi_\varepsilon(s) = e^{\lambda(s-1)}$, директном провером добија се да је $\Phi_X(s) = e^{\frac{\lambda}{1-\alpha}(s-1)}$, односно да је маргинална расподела такође са Пуасоновом $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$ расподелом. Пуасонова расподела у случају INAR(1) процеса има улогу сличну Гаусовој расподели код стандардних AR(1) процеса. Наиме, као што AR(1) модел трансформише независне случајне променљиве са Гаусовом расподелом у зависне са истом расподелом, то исто ради и PoINAR(1) модел само са Пуасоновом расподелом.

Особине модела

С обзиром да се ради о ланцу Маркова, да бисмо одредили расподелу за (X_n, X_{n-1}), као и заједничке расподеле вектора са 3 и више узастопних чланова процеса, довољно је одредити матрицу вероватноћа прелаза. Као у Nastić (2008), како ε_n има $\mathcal{P}(\lambda)$

расподелу, а $\sum_{l=1}^{i} Y_l$, $i > 0$ расподелу $\mathcal{B}(i, \alpha)$, то је

$$\begin{aligned} p(i,j) &= P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P\left(\sum_{l=1}^{i} Y_l + \varepsilon_n = j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{min\{i,j\}} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}. \end{aligned}$$

Одавде је

$$P(X_n = j, X_{n-1} = i) = e^{-\frac{\lambda(2-\alpha)}{1-\alpha}} \lambda^{i+j} \sum_{k=0}^{min\{i,j\}} \left(\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\right)^k \frac{1}{k!(i-k)!(j-k)!},$$

из чега следи $P(X_n = j, X_{n-1} = i) = P(X_n = i, X_{n-1} = j)$. Стога, на основу Теореме 1.1.3, PoINAR(1) је временски реверзибилан процес.

Из $(X_{n-1}, X_n) \overset{d}{=} (X_n, X_{n-1})$ следи да је $E(X_n|X_{n-1}) = E(X_{n-1}|X_n)$ и $Var(X_n|X_{n-1}) = Var(X_{n-1}|X_n)$, односно важи да је регресија уназад линеарна функција. Ова особина је карактеристична само за Пуасонов ненегативни целобројни процес, о чему говори следећа теорема.

Теорема 1.2.1 (Alzaid, Al-Osh, 1988) *Пуасонов INAR(1) процес је једини строго стационаран INAR(1) процес са коначном дисперзијом код кога је регресија уназад линеарна.*

Оцењивање параметара PoINAR(1) модела

Полазећи од случајног узорка $X_1, X_2, \ldots, X_N$, представићемо неке методе за оцењивање непознатих параметара Пуасоновог INAR(1) модела. Од непараметарских упознаћемо метод момената и метод условних најмањих квадрата.

Yule-Walker-ова (YW) оцена параметра α се добија из једнакости $\rho(1) = \alpha$, одакле је

$$\hat{\alpha}_{yw} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \left(X_n - \overline{X}\right)\left(X_{n+1} - \overline{X}\right)}{\sum_{n=1}^{N} \left(X_n - \overline{X}\right)^2}, \qquad (1.2.11)$$

где је $\overline{X}$ узорачка средина. Такође, Al-Osh и Alzaid су 1987. године, у свом фундаменталном раду, овим методом оценили параметар λ, полазећи од чињенице да је $E(\varepsilon_n) = \lambda$. Међутим, због немогућности опсервирања шума, његове вредности су оцењене математичким очекивањем које фигурише у обрасцу линеарне регресије $E(X_n|X_{n-1}) = \alpha X_{n-1} + \mu_\varepsilon$, за $\mu_\varepsilon = \hat{\varepsilon}_n$, одакле је $\hat{E}(X_n|X_{n-1}) = \hat{\alpha} X_{n-1} + \hat{\varepsilon}_n$. С обзиром да се $\hat{E}(X_n|X_{n-1})$ може апроксимирати помоћу X_n, тада је коначно

$$\hat{\lambda}_{yw} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}(X_n - \hat{\alpha} X_{n-1}).$$

Уочимо да би други начин за оцену овог параметра био могућ помоћу $\hat{\lambda}'_{yw} = (1-\hat{\alpha})\overline{X}$, пошто је $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu$.

Непознате параметре PoINAR(1) модела су први оценили методом условних најмањих квадрата (CLS) Al-Osh и Alzaid (1987). Klimko и Nelson (1978) су увели овај метод који се заснива на минимизирању суме квадрата одступања процеса од његовог условног математичког очекивања. Међутим, за разлику од стандардних AR(1) модела, код INAR(1) модела условно очекивање је и даље случајна промењљива. Стога, одговарајућа сума квадрата одступања је облика $Q_N(\alpha,\lambda) = \sum\limits_{n=2}^{N}(X_n - \alpha X_{n-1} - \lambda)^2$, чијим минимизирањем добијамо оцене

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{cls} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2}, \\ \hat{\lambda}_{cls} &= \frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=2}^{N} X_n - \hat{\alpha}_{cls}\sum_{n=2}^{N} X_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Како бисмо ближе упознали особине ових оцена неопходно је навести следеће две веома важне теореме.

Теорема 1.2.2 (Tjøstheim, 1986, T.3.1) *Нека је* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ *вектор непознатих параметара d-димензионалног строго стационарног ергодичног процеса* $\{X_n\}$ *са коначним другим моментом, таквог да* *је функција* $g(\boldsymbol{\beta}, F_n)$ *скоро сигурно три пута непрекидно диференцијабилна на неком отвореном скупу који садржи стварни параметар* $\boldsymbol{\beta_0}$*, где је* $g(\boldsymbol{\beta}, F_n) = E(X_n|F_{n-1})$*, а* $F_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *је* σ*-алгебра генерисана са* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*. Шта више, нека су задовољени услови:*

- $C1.$ $E\left(\left|\frac{\partial g}{\partial \beta_i}\right|^2\right) < \infty,$ *за* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$,
  $E\left(\left|\frac{\partial^2 g}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right|^2\right) < \infty,$ *за* $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.
- $C2.$ *Линеарна независност у средње-квадратном смислу вектора* $\frac{\partial g}{\partial \beta_i}$, *где је* $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.
- $C3.$ *Постоје функције* $G_{n-1}^{ijk}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ *и* $H_n^{ijk}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *такве да је:*
  $\left|\frac{\partial g}{\partial \beta_i} \frac{\partial^2 g}{\partial \beta_j \partial \beta_k}\right| \leq G_{n-1}^{ijk}, \quad E\left(G_{n-1}^{ijk}\right) < \infty,$
  $\left|(X_n - g(X_{n-1})) \frac{\partial^3 g}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k}\right| \leq H_n^{ijk}, \quad E\left(H_n^{ijk}\right) < \infty,$
  за $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Тада постоји низ оцена $\{\boldsymbol{\beta_N}\}$ *који минимизира суму квадрата одступања* $Q_N(\boldsymbol{\beta})$*, такав да* $\boldsymbol{\beta_N} \overset{с.и.}{\to} \boldsymbol{\beta_0}$, $N \to \infty$.

Теорема 1.2.3 (Tjøstheim, 1986, T.3.2) *Претпоставимо да су задовољени услови Теореме* 1.2.2 *и нека важи:*

a) *Постоји* m*, такво да је за* $n \geq m + 1$,
$$E\left(X_n|\mathcal{F}_{n-1}^X\right) \overset{с.и.}{=} E\left(X_n|\mathcal{F}_{n-1}^X(m)\right).$$

b) *Постоји* m*, такво да је за* $n \geq m + 1$,
$$\begin{aligned} f_{n|n-1} &\overset{деф.}{=} E\left((X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2|\mathcal{F}_{n-1}^X\right) = \\ &= E\left((X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2|\mathcal{F}_{n-1}^X(m)\right), \end{aligned}$$

где је $\mathcal{F}_{n-1}^X$*,* σ*-алгебра генерисана са* $\{X_t|t \leq n-1\}$*, а* $\mathcal{F}_{n-1}^X(m)$*,* σ*-алгебра генерисана са* $\{X_t|n - m \leq t \leq n - 1\}$*. Ако је уз то задовољен и услов*

$$R \equiv E\left[\frac{\partial E(X_n|X_{n-1})}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_0) f_{n|n-1} \frac{\partial E(X_n|X_{n-1})}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_0)^T\right] < \infty,$$

тада за низ оцена из Теореме 1.2.2 *важи да је*

$$N^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{n}_{cls}-\boldsymbol{\beta}_0\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(\mathbf{0},U^{-1}RU^{-1}\right),$$

где је $U=\left[E\left(\frac{\partial E(X_n|X_{n-1})}{\partial\beta_i}\frac{\partial E(X_n|X_{n-1})}{\partial\beta_j}\right)\right]_{(p+1)\times(p+1)}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,p\}$, *а* " $\xrightarrow{d}$ " *је ознака кнвергенције у расподели.*

За процес се тривијално проверава да задовољава услове Теореме 1.2.2, на основу које следи да низ оцена $\left(\hat{\alpha}_{cls},\hat{\lambda}_{cls}\right)$ скоро извесно конвергира ка (α,λ). Ово доказује строгу постојаност CLS оцена. Настављајући даље асимптотску карактеризацију ових оцена, користимо Теорему 1.2.3. С обзиром да се директном провером утврђује да се и она може применити, на основу ње имамо да је одговарајући низ оцена асимптотски нормално расподељен, односно

$$N^{\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{c}\hat{\alpha}_{cls}-\alpha\\ \hat{\lambda}_{cls}-\lambda\end{array}\right]\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right],\left[\begin{array}{cc}\frac{\lambda(1-\alpha^2)+\alpha(\alpha-1)^2}{\lambda} & -\lambda(1+\alpha)\\ -\lambda(1+\alpha) & \frac{\lambda^2(\alpha+1)+\lambda(1-\alpha)}{1-\alpha}\end{array}\right]\right).$$

Говорећи о особинама Yule-Walker-ових оцена, као у Nastić (2008) услови

$$\begin{aligned}N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}^{N}_{yw}-\hat{\alpha}^{N}_{cls}\right)&=o(1),\ \text{са вероватноћом 1},\\ N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\lambda}^{N}_{yw}-\hat{\lambda}^{N}_{cls}\right)&=o(1),\ \text{са вероватноћом 1},\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

се директно проверавају. Из ових услова и строге постојаности CLS оцена директно следи строга постојаност YW оцена. Такође, они су довољни за примену следеће теореме.

Теорема 1.2.4 (Brockwell, Davis, 1987, T. 6.3.3) *Ако су* $\{\boldsymbol{X_n}\}$ *и* $\{\boldsymbol{Y_n}\}$ *два низа случајних вектора, такви да је* $\boldsymbol{X_n}-\boldsymbol{Y_n}=o_p(1)$ *и* $\boldsymbol{X_n}\xrightarrow{d}\boldsymbol{X}$, *тада и* $\boldsymbol{Y_n}\xrightarrow{d}\boldsymbol{X}$.

На основу ове теореме закључујемо да оцене добијене методом момената имају такође асимптотски нормалну расподелу и то баш исту као CLS оцене.

Са друге стране, параметарска метода коју ћемо користити за оцењивање непознатих параметара модела, а која је заснована на информацијама о расподели процеса и његовог шума, је метод условне максималне веродостојности (CML). Наиме, због једноставности претпостављамо да је x_1 нама позната реализација случајне променљиве X_1. Стога, ради оцењивања параметара α и λ, максимизирамо функцију веродостојности облика:

$$L(\boldsymbol{x}, \alpha, \lambda) = \prod_{n=2}^{N} P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}),$$

где је $P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = \sum\limits_{i=0}^{min\{x_{n-1}, x_n\}} \binom{x_{n-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{x_{n-1}-i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n-i}}{(x_n-i)!}$. Приметимо да је аналитичко одређивање максимума претходне функције веродостојности веома компликовано. Стога, у случају PoINAR(1), као и других INAR процеса, често се прибегава нумеричким процедурама за максимизирање, које су у виду различитих ефикасних функција имплементиране у многим математичким софтверским пакетима.

Геометријски INAR(1) модел

Овде разматрамо још један фундаментални ненегативни целобројни ауторегресивни процес који се конструише оператором биномног тининга. Реч је о ненегативном процесу првог реда са геометријском маргиналном расподелом или GINAR(1) процесу. Овај процес се може увести Дефиницијом 1.2.1, са датом маргиналном расподелом $P(X_n = j) = (1-q)q^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Полазећи од иницијалне опсервације X_0, потребно је одредити расподелу иновационог низа како бисмо конструисали дефинисани процес. Како случајна променљива X_n има геометријску расподелу са параметром q, то је њена функција генератрисе вероватноће $\Phi_{X_n}(s) = \frac{1-q}{1-qs}$. С обзиром да је $\Phi_Y(s) = 1 - \alpha + \alpha s$, добијамо

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\Phi_{X_n}(s)}{\Phi_{X_{n-1}}(\Phi_Y(s))} = \alpha + (1-\alpha)\frac{1-q}{1-qs},$$

одакле закључујемо да је

$$\varepsilon_n \overset{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в.} \quad \alpha, \\ G_n, & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \end{cases}$$

где G_n има геометријску расподелу са параметром q. Скраћеним записом "с.в." означавамо исказ "са вероватноћом". Тако смо добили да је ε_n мешавина дегенерисане случајне променљиве 0 са вероватноћом α и одговарајуће геометријске случајне променљиве са вероватноћом $1-\alpha$. Стога се ε_n може дефинисати са $\varepsilon_n = I_n G_n$, где I_n има Бернулијеву расподелу са параметром $1-\alpha$. Код GINAR(1) процеса могла би се увести нова параметризација, сменом $q = \frac{P}{1+P}$. Евентуална предност увођења параметра P, где је $P \in (0,\infty)$, би се огледала у краћем и једноставнијем записивању многих статистичких величина. Стога, нову параметризацију користимо при оцењивању непознатих параметара модела методом момената и условних најмањих квадрата, када њене позитивне стране нарочито долазе до изражаја.

Особине модела

Да бисмо одредили заједничку расподелу случајних променљивих GINAR процеса, као и раније, довољно је одредити матрицу вероватноћа прелаза. Уз извођење као у Nastić (2008) важи следеће. С обзиром да је $P\left(\sum_{l=1}^{i} Y_l = j\right) = \binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}I(i \geq j)$ и да важи $P\left(\sum_{l=1}^{i} Y_l + G_n = j\right) = \sum_{k=0}^{min\{i,j\}} \binom{i}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{i-k}(1-q)q^{j-k}$ и пошто се елемент матрице вероватноћа прелаза добија као $p(i,j) = P(X_n = j|X_{n-1} = i) = \alpha P\left(\sum_{l=1}^{i} Y_l = j\right) + (1-\alpha)\, P\left(\sum_{l=1}^{i} Y_l + G_n = j\right)$, тада је коначно

$$p(i,j) = \binom{i}{j}\alpha^{j+1}(1-\alpha)^{i-j}I(i \geq j) + (1-q)\sum_{k=0}^{min\{i,j\}} \binom{i}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{i-k+1}q^{j-k}.$$

Онда је заједничка дводимензиона расподела облика

$$\begin{aligned} P(X_n = j, X_{n-1} = i) &= \binom{i}{j}\alpha^{j+1}(1-\alpha)^{i-j}(1-q)q^i I(i \geq j) \\ &+ (1-q)^2 \sum_{k=0}^{min\{i,j\}} \binom{i}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{i-k+1}q^{i+j-k}. \end{aligned}$$

Видимо да она није симетрична, што је битна разлика у односу на Пуасонов процес првог реда. Takође на основу Теореме 1.2.1, директно следи да регресија уназад GINAR(1) процеса није линеарна функција. То је потврђено и извођењем аналитичког облика саме функције у Nastić (2008), где је за $x \geq 1$,

$$E(X_{n-1}|X_n = x) = \frac{q(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} + \frac{\alpha\left(1-\left(\frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)}\right)^x\right)}{(1-q)(1-\alpha)(1-q(1-\alpha))}.$$

Коначно, закључујемо да GINAR(1) процес има неколико карактеристика по којима се разликује од претходно представљеног Пуасоновог INAR(1) процеса. Наиме, поред асиметричности дводимензионе расподеле и нелинеарности регресије уназад постоји још једна особина специфична за геометријски процес. Она се односи на понашање његових реализација за велике вредности параметра α. Наиме, посматрајући овај процес дефинисан у облику:

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + I_n G_n, \quad I_n \overset{d}{=} \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \alpha & 1-\alpha \end{array}\right),$$

види се да је за $\alpha \sim 1$, I_n скоро увек једнако 0, а само ретко с вероватноћом $1-\alpha$ је једнако 1. То практично значи да реализације ових процеса бележе ретке изненадне скокове након чега имамо дуже и благо опадање вредности.

Оцењивање параметара GINAR(1) модела

Полазећи од узорка $X_1, X_2, \ldots, X_N$, поступком датим у Nastić (2008), овде наводимо статистике за оцењивање непознатих параметара модела. Као што је раније поменуто, користићемо алтернативну параметризацију уведену помоћу смене $q = \frac{P}{1+P}$, за $P \geq 0$, тако да је сада маргинална расподела процеса геометријска са параметром $\frac{P}{1+P}$.

Пошто је $E(X_n) = P$ и $\rho(k) = \alpha^k$, методом момената, на уобичајен начин изједначавајући теоријске и узорачке карактеристике расподеле добијамо

$$\hat{P}_{yw} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n,$$

$$\hat{\alpha}_{yw} \equiv \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N-1}\left(X_n - \hat{P}_{yw}\right)\left(X_{n+1} - \hat{P}_{yw}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\left(X_n - \hat{P}_{yw}\right)^2}.$$

Приступом, аналогним PoINAR(1) процесу, оцене параметара α и P добијене методом условних најмањих квадрата су редом,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{cls} &= \frac{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2},\\ \hat{P}_{cls} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} X_n - \hat{\alpha}_{cls}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(1-\hat{\alpha}_{cls})(N-1)}.\end{aligned}$$

Одговарајућа оцена параметра q, традиционалне параметризације се добија помоћу $\hat{q} = \frac{\hat{P}}{1+\hat{P}}$.

Асимптотска карактеризација непараметарских метода као и поступак добијања оцена методом максималне веродостојности у потпуности се поклапају са одговарајућом анализом Пуасоновог процеса, због чега их овде не наводимо.

Неки други модели засновани на Бернулијевом бројачком низу

Након претходно представљених INAR(1) процеса који су утемељили пут даљем развоју ненегативних целобројних ауторегресивних модела, овде ћемо кратко поменути само неке од значајнијих INAR(1) модела који су настали како уопштавањем тако и модификацијама тининг оператора заснованог на Бернулијевом бројачком низу.

INAR(1) модели засновани на тинингу очекивања

Zhu и Joe (2010) су систематизацијом и уопштавањем постојећих увели ову врсту ненегативних целобројних AR модела. Како бисмо их конструисали најпре уводимо неколико потребних појмова.

Дефиниција 1.2.2 (Zhu, Joe, 2010) *Нека су K и X целобројне ненегативне случајне променљиве. Нека су K_i, $i \geq 1$ независне једнако расподељене реплике случајне променљиве K. Оператор "$\odot$", за који је $K \odot X \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{X} K_j$, називамо оператором спајања ако за функцију генератрисе вероватноће случајне променљиве $K \odot X$ важи*

$$\Phi_{K\odot X}(s) = E\left(E\left(s^{\sum_{j=1}^{X} K_j}\Big|X\right)\right) = E\left(\Phi_K^X(s)\right) = \Phi_X(\Phi_K(s)).$$

Затим уведимо једну класу функција расподела ненегативних целобројних случајних променљивих.

Дефиниција 1.2.3 (Zhu, Joe, 2010) *Нека је $\{F(x,\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ фамилија расподела ненегативне целобројне случајне променљиве $K(\alpha)$. Нека је функција генератрисе вероватноће случајне променљиве K, $\Phi_k(s;\alpha) = E\left(s^{K(\alpha)}\right)$. Тада за фамилију расподела $\{F(x,\alpha)\}$ кажемо да је самогенеришућа у односу на параметар α, ако је*

$$\Phi_K(\Phi_K(s;\alpha);\alpha') = \Phi_K(s;\alpha\alpha'), \quad \text{за све } \alpha,\alpha' \in [0,1].$$

Фамилија $\{K(\alpha) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ се зове самогенеришућом фамилијом случајних променљивих.

Из претходне две дефиниције следи да за самогенеришуће случајне променљиве важи $K(\alpha) \odot K(\alpha') \overset{d}{=} K(\alpha\alpha')$, за све $\alpha, \alpha' \in [0,1]$. Како бисмо увели одговарајући ненегативни целобројни AR процес, најпре дефинишимо тининг очекивања, односно оператор којим га конструишемо.

Дефиниција 1.2.4 (Zhu, Joe, 2010) *Нека је* $\{K(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1\}$ *фамилија самогенеришућих ненегативних целобројних случајних променљивих са коначним очекивањем. Оператор спајања дефинисан са* $K(\alpha) \odot X = \sum\limits_{i=1}^{X} K_i(\alpha)$ *над фамилијом* $\{K(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1\}$*, а као у Дефиницији* 1.2.2*, се назива тининг очекивања ако је* $E(K(\alpha)) \leq 1$*, за свако* $\alpha \in [0,1]$.

Коначно смо увели све појмове, потребне за дефинисање следећег ненегативног целобројног ауторегресивног процеса.

Дефиниција 1.2.5 *Строго стационарни низ случајних променљивих* $\{X_n\}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, називамо ненегативним целобројним ауторегресивним процесом са тинингом очекивања, ако он задовољава једначину:*

$$X_n = (\alpha)_K \odot X_{n-1} + \varepsilon_n(\alpha), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{1.2.13}$$

где је $(\alpha)_K \odot X \overset{\text{деф}}{=} K(\alpha) \odot X$ *и* $\{\varepsilon_n(\alpha)\}$ *је иновациони низ независних једнако расподељених случајних променљивих таквих да је* $\varepsilon_n(\alpha)$ *независно од* X_m*, за* $m < n$ *и независно од тининга очекивања.*

С обзиром на општији карактер и могућност репрезентовања обележја са особином овердисперзије, односно обележја чија је дисперзија већа од математичког очекивања, негативна биномна $\mathcal{NB}(\theta, p)$ расподела задата законом расподеле $P(X_n = j) = \binom{\theta+j-1}{j} \times p^{\theta}(1-p)^j$, $j = 0, 1, \ldots$ је најчешћи избор за маргиналну расподелу ових процеса. Са друге стране, према расподели бројачког низа тининг оператора очекивања, постоје три типа овако уведеног негативног биномног ненегативног целобројног ауторегресивног процеса првог реда (NBINAR(1)):

(I1) Овде се користи биномни тининг. Наиме, $K(\alpha)$ има Бернулијеву расподелу са параметром $\alpha \in [0,1]$, те је $\Phi_K(s;\alpha) = 1 - \alpha + \alpha s$,

(I2) $\Phi_K(s;\alpha) = (1 - \alpha + (\alpha - \gamma)s)/(1 - \alpha\gamma - (1-\alpha)\gamma s)$, где је $\alpha \in [0,1]$, а $\gamma \in (0,1]$ је фиксирано. За $\gamma = 0$ ово се своди на тип (I1), док за $\gamma = 1$ функција генератрисе вероватноће постаје 1, дегенеришући случајну променљиву у константан број 0 са вероватноћом 1, (I3) $\Phi_K(s;\alpha) = \delta^{-1}(1+\delta-(1+\delta-\delta s)^{\alpha})$, за $\alpha \in [0,1]$ и $\delta \geq 0$. За $\delta \to 0$, овај тип се своди на (I1). За $\delta \to \infty$, одговарајућа случајна променљива се своди на константу 0, са вероватноћом 1.

Овако уведена класа INAR(1) модела поред оригиналних доприноса у моделирању појединих ненегативних целобројних низова, уопштила је, а уједно и систематизовала неке од постојећих ненегативних целобројних AR модела. Наиме, тип (I1) се своди на добро познате INAR(1) моделе са биномним тинингом. Тип (I2) је раније уведен независним приступом у радовима Zhu-a и Joe-a (2003) и Aly-a и Bouzar-a (1994). Међутим, тип (I3) представља нови модел Zhu-a и Joe-a (2010).

INAR(1) модели са случајним коефицијентом

Са појавом потребе моделирања временских низова са променљивом вероватноћом опстанка посматраних јединки, уводе се и ненегативни целобројни ауторегресивни процеси са променљивим коефицијентом. Наиме, коефицијент тининг оператора постаје случајна променљива. На тај начин долазимо до појма променљивог тининг оператора.

Дефиниција 1.2.6 (Zheng, Basawa, Datta, 2007) *Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива и нека је ϕ случајна променљива са вредностима у $[0,1)$. За случајну променљиву $\phi \circ X$ кажемо да је добијена тининг оператором променљивог коефицијента, ако је "$\circ$" биномни тининг оператор који не зависи од ϕ и X.*

Овде ћемо посматрати случај када ϕ има бета $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ расподелу, односно када је $P(\phi = t) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$, $t \in (0,1)$, где је $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$, $\alpha,\beta \geq 0$. Директно из претходне дефиниције важи да $\phi \circ X | X = x$ има бета биномну $\mathcal{B}(x;\alpha,\beta)$ расподелу, односно да је

$$P((\phi \circ X | X = x) = i) = \binom{x}{i}\frac{B(\alpha+i,\beta+x-i)}{B(\alpha,\beta)}.$$

На основу резултата из Joe (1996), познато је да се негативна биномна маргинална расподела, будући да припада класи расподела затвореној у односу на конволуциони производ, сасвим природно слаже са бета биномним тининг оператором. Због тога, овде уводимо следећи ненегативни целобројни процес.

Дефиниција 1.2.7 (Weiß, 2008b) *Негативни биномни ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда са бета биномним тинингом променљивог коефицијента* ($NBRCINAR(1)$), *је низ ненегативних целобројних случајних променљивих* $\{X_n\}$, *који задовољава једначину*

$$X_n = \phi_n \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \; n \in \mathbb{N}, \tag{1.2.14}$$

где X_n *има негативну биномну* $\mathcal{NB}(n,p)$ *расподелу,* $\{\varepsilon_n\}$ *је иновациони низ независних ненегативних целобројних случајних променљивих са* $\mathcal{NB}(n(1-\rho),p)$ *расподелом,* $\{\phi_n\}$ *је низ независних случајних променљивих са бета* $\mathcal{B}(n\rho, n(1-\rho))$ *расподелом, независних од* $\{\varepsilon_n\}$, *као и од* $\{X_m\}_{m<n}$. *За* n *и* $n\rho$ *се претпоставља да су ненегативни цели бројеви, а* p *је одговарајући параметар вероватноће.*

Будући да су X_n и ε_n случајне променљиве са негативном биномном расподелом, на основу резултата из Joe (1996), директно следи да је и $\phi \circ X_{n-1}$ случајна променљива са негативном биномном расподелом. Ово је такође последица дефиниције INAR процеса и чињенице да негативна биномна расподела припада класи расподела затвореној у односу на конволуциони производ.

Итеративни INAR(1) модели

Овај потпуно оригиналан приступ уопштавања биномног тининга су извели Al-Osh и Aly (1992). Наиме, композицијом два тининг оператора добијен је следећи, у применама веома ефикасан оператор.

Дефиниција 1.2.8 (Weiß, 2008b) *Нека је* X *ненегативна целобројна случајна променљива и* $\alpha, \rho \in (0,1)$. *Итеративни тининг оператор* $*_\alpha$ *се дефинише са*

$$\rho *_\alpha X = \sum_{i=1}^{(\alpha\rho)\circ X} Y_i, \tag{1.2.15}$$

где је " $\circ$ " *биномни тининг,* $\{Y_i, i \geq 1\}$ *низ независних случајних променљивих са геометријском* $Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ *расподелом, независних од* X *и* $(\alpha\rho) \circ X$.

У овом итеративном тинингу најпре се извршава биномни тининг који се интерпретира издвајањем $(\alpha\rho) \circ X$ од X јединки, а затим се над тих $(\alpha\rho) \circ X$ опсталих јединки поново обављају међусобно независни експерименти.

Као и раније, дефинишемо процес, помоћу ново-уведеног тининг оператора, користећи негативну биномну као маргиналну расподелу.

Дефиниција 1.2.9 (Weiß, 2008b) *Нека су* $\alpha, \rho \in (0,1)$, *нека* X_0 *има* $\mathcal{NB}(n, \alpha(1-\rho)/(1+\alpha(1-\rho)))$ *расподелу,* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *низ независних случајних промењљивих са* $\mathcal{NB}(n, \alpha/(1+\alpha))$ *расподелом. Тада под негативним биномним итеративним целобројним ауторегресивним процесом првог реда* (*NBIINAR*(1)) *подрзумевамо низ* $\{X_n, n \geq 0\}$ *ненегативних целобројних случајних промењљивих, који задовољава једначину*

$$X_n = \rho *_\alpha X_{n-1} + \varepsilon_n,\ n \geq 1, \tag{1.2.16}$$

где се сви тининг оператори примењују независно један од другог и независно од низа $\{\varepsilon_n\}$ *и где су* ε_n *и* X_m *независне случајне промењљиве за свако* $m < n$.

Al-Osh и Aly (1992) су показали да је маргинална расподела овог процеса управо $\mathcal{NB}(n, \alpha(1-\rho)/(1+\alpha(1-\rho)))$ расподела која је, као и код претходних процеса, нарочито прикладна за моделирање временских низова код којих је дисперзија већа од очекиване вредности.

Квази биномни INAR(1) процес са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом

Ову врсту ауторегресивних процеса су увели и детаљније описали Alzaid и Al-Osh (1993) и тако су испунили два веома важна задатка моделирања временских низова. Први се тиче могућности примене над подацима различитог односа величина математичког очекивања и дисперзије, што је остварено увођењем генералисане Пуасонове маргиналне расподеле $\mathcal{GP}(\lambda, \theta)$, задате законом расподеле $P(X = x) = \frac{\lambda(\lambda+x\theta)^{x-1}e^{-\lambda-x\theta}}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$, где је $\lambda > 0$, $0 < \theta < 1$. Други се састоји у описивању процеса код којих вероватноћа задржавања елемената није константна (као што је случај са α

код биномног тининга). У те сврхе је употребљен генералисани тининг оператор $S_n(\cdot)$, чија је вероватноћа задржавања елемената линеарна функција броја већ задржаних елемената у претходном кораку. Стога, следећи резултате Alzaida-а и Al-Osh-а (1993), овај ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом (GPQINAR(1)), конструишемо користећи низ $\{\varepsilon_n\}$ независних случајних променљивих са генералисаном Пуасоновом $\mathcal{GP}((1-\rho)\lambda, \theta)$ расподелом, помоћу рекурентне формуле

$$X_n = S_n(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.2.17}$$

Полазећи од чињенице да X_n има $\mathcal{GP}(\lambda, \theta)$ расподелу, добија се да је $\{S_n(\cdot) : n = 1, 2, \ldots\}$ низ независних оператора са квази биномном $\mathcal{QB}(x, \rho, \theta/\lambda)$ расподелом, где је

$$P(S_n(X_{n-1} = x) = j) = \frac{\rho(1-\rho)\binom{x}{j}\left(\rho + \frac{j\theta}{\lambda}\right)^{j-1}\left(1 + \rho + (x-j)\frac{\theta}{\lambda}\right)^{x-j-1}}{\left(1 + \frac{x\theta}{\lambda}\right)^{x-1}},$$

за $j = 0, 1, \ldots, x$, где је $\rho \in (0, 1)$, а вредности параметара θ и λ такве да је $x\theta/\lambda < min(\rho, 1-\rho)$. Такође, тининг оператор $S_n(\cdot)$ и случајна променљива ε_n су независни од X_m, за свако $m < n$.

Слични резултати о слагању $\mathcal{GP}$ маргиналне расподеле са $\mathcal{QB}$ расподелом тининг оператора се могу наћи у Joe (1996).

Због зависности $S_n(\cdot)$ од одговарајућих параметара, овај оператор је у Weiß (2008b) означен са "$\rho_{\theta,\lambda}\circ$", где је и сам GPQINAR(1) процес дефинисан са $X_n = \rho_{\theta,\lambda} \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \ n \geq 1$.

1.2.2 Модели вишег реда

Како би се што боље моделирали ненегативни целобројни ауторегресивни процеси сложеније корелационе структуре, односно процеси и са значајном зависношћу између удаљенијих елемената, научници уводе ненегативне целобројне ауторегресивне моделе вишег реда. Први пут је то учињено деведесетих година прошлог века и то на два начина. Један приступ су користили независно једни од других Du и Li (1991) са једне стране и Gauthier и Latour (1994) са друге. Други су увели Alzaid и Al-Osh (1990), претпостављајући да је условна расподела вектора $(\alpha_1 * X_t, \alpha_2 * X_t, \ldots, \alpha_p *$

$X_t|X_t = x_t$) мултиномна расподела са параметрима $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, x_t)$ и да је независна од прошлости процеса. Овако конструисан модел је аналогон стандардном ARMA$(p, p-1)$ моделу. Са друге стране првим приступом уведен је процес чија корелациона структура и многа друга својства одговарају непрекидном AR(p) процесу. Према томе, с обзиром на тему ове дисертације, у овом делу ближе упознајемо неке од особина INAR(p) процеса Du-a и Li-ja (1991).

INAR(p) процеси, уведени горе поменутим приступима, су у случају $p \geq 2$ прилично комплексни са знатно компликованијим апаратом, како за анализу самих процеса, тако и за примену у реалним ситуацијама. Да би превазишли ове проблеме, Zhu и Joe (2006) су предложили нови приступ у конструкцији INAR(p) модела, проучавајући ближе случај $p = 2$, док га је Weiß (2008c) даље уопштио за $p > 2$. Конструкција INAR(p) процеса, заснована на резултатима Weiß-а, биће изведена у трећој глави ове дисертације, због чега овде о овом приступу увођења INAR(p) модела више неће бити речи.

Du и Li (1991) су у својој дефиницији ненегативног целобројног AR процеса уопштили рад Al-Osh-a и Alzaida (1987) на случај INAR процеса са p зависности.

Дефиниција 1.2.10 (Du, Li, 1991) *INAR(p) процес је ненегативни целобројни случајни процес $\{X_n\}$ у дискретном времену који представља решење диференцне једначине:*

$$X_n = \alpha_1 \circ X_{n-1} + \alpha_2 \circ X_{n-2} + \cdots + \alpha_p \circ X_{n-p} + \varepsilon_n, \qquad (1.2.18)$$

где је $n \in \mathbb{Z}$, ε_n су независне једнако расподељене ненегативне целобројне случајне променљиве са очекивањем μ_ε и дисперзијом σ_ε^2, независне од свих бројачких низова $\{Y_{j,i}\}$, за које важи $P(Y_{j,i} = 1) = 1 - P(Y_{j,i} = 0) = \alpha_j$. Бројачки низови су међусобно независни, а оператор "$\circ$" је дефинисан са:

$$\alpha_j \circ X_{n-j} = \sum_{i=1}^{X_{n-j}} Y_{j,i}, \quad \alpha_j \in [0,1], \quad j \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Следећа теорема, слична одговарајућој теореми за стандардне AR(p) процесе, одређује параметарске услове под којима постоји слабо стационарно решење једначине (1.2.18).

Теорема 1.2.5 (Du, Li, 1991) *Нека је* $\{\varepsilon_n\}$ *низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем* μ_ε *и дисперзијом* σ_ε^2 *и нека је* $\alpha_i \in [0,1],\ i \in \{1,2,\ldots,p\}$. *Ако су корени једначине*

$$\lambda^p - \alpha_1\lambda^{p-1} - \cdots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p = 0$$

ван јединичног круга, онда постоји јединствена слабо стационарна ненегативна целобројна серија $\{X_n\}$, *која задовољава једначину:*

$$X_n = \alpha_1 \circ X_{n-1} + \alpha_2 \circ X_{n-2} + \cdots + \alpha_p \circ X_{n-p} + \varepsilon_n,$$

при чему је $Cov(X_s, \varepsilon_t) = 0$, *за* $s < t$.

Корелациона структура

У овом делу изостављамо доказе наведених тврђења, будући да су детаљно дати у Nastić (2008). Строго стационаран процес $\{X_n\}$ је ергодичан, тако да на даље у овом одељку претпостављамо строгу стационарност посматраног INAR(p) процеса. Стога, узорачка аутоковаријациона функција $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-k}(X_n - \overline{X}_N)(X_{n+k} - \overline{X}_N)$ и узорачка аутокорелациона функција реда k, $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$ су строго постојане оцене аутоковаријационе функције γ_k и аутокорелационе функције ρ_k, респективно.

Како бисмо рекли нешто више о корелационој структури, уводимо матрични биномни тининг оператор.

Дефиниција 1.2.11 *Ако је*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и случајни вектор } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix},$$

тада је $\mathbf{A} \circ \mathbf{X} = \left(\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j \circ X_j), X_1, \ldots, X_{p-1}\right)^T$.

За овако дефинисан матрични тининг оператор и случајне векторе $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ важи да је:

$$\begin{array}{ll} (i) & E(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X}), \\ (ii) & E\left((\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^T\right) = \boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^T\right). \end{array} \tag{1.2.19}$$

Такође, ако означимо са $\boldsymbol{X}_n = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1})^T$, тада се једначина (1.2.18) своди на

$$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X}_{n-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_n, \tag{1.2.20}$$

где је $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_n, 0, \dots, 0)^T$.

За аутоковаријансну матрицу

$$\boldsymbol{\gamma}_k = E\left((\boldsymbol{X}_n - E(\boldsymbol{X}_n)) \times (\boldsymbol{X}_{n-k} - E(\boldsymbol{X}_{n-k}))^T\right),$$

Du и Li (1991) су показали да важи да је $\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_{k-1}$, одакле изједначавајући елементе прве врсте и прве колоне са леве и десне стране једнакости добијамо да је

$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\gamma_{k-2} + \cdots + \alpha_p\gamma_{k-p}, \tag{1.2.21}$$

што даље дељењем дисперзијом γ_0 резултира са

$$\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{k-p}. \tag{1.2.22}$$

Претходне једначине задовољава и стандардни AR(p) процес, који се одликује и аналогним условима стационарности. Према томе, теорије и методе већ развијене за непрекидне AR(p) моделе, веома често се примењују и над ненегативним целобројним AR моделима вишег реда и то како у анализи њихових особина, тако и у оцењивању њихових непознатих параметара.

Оцењивање непознатих параметара

С обзиром на сложеност структуре INAR(p) модела и комплексност матричног тининг оператора, овде полазећи од случајног узорка $X_1, X_2, \dots, X_N$ дајемо карактеризацију оцена непознатих параметара, добијених основним непараметарским методама.

Метод момената

Полазећи од формуле (1.2.22) за $k = 1, 2, \ldots, p$ и решавајући тако добијени систем линеарних једначина добијамо параметарске оцене $\hat{\alpha}_1^{yw}, \hat{\alpha}_2^{yw}, \ldots, \hat{\alpha}_p^{yw}$ као непрекидне функције узорачких аутокорелација $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_p$. Одавде је строга постојаност овако добијених оцена евидентна.

Даље, ако прођемо математичким очекивањем кроз једначину (1.2.18), а затим $E(X)$ заменимо узорачком средином $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$, добијамо да је

$$\hat{\mu}_\varepsilon^{yw} = (1 - \hat{\alpha}_1^{yw} - \hat{\alpha}_2^{yw} - \cdots - \hat{\alpha}_p^{yw})\overline{X}_N, \tag{1.2.23}$$

што представља строго постојану оцену параметра μ_ε.

Поред очекивања иновационог процеса оцењује се и његова дисперзија σ_ε^2. С обзиром да је

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left(\varepsilon_n - \overline{\varepsilon}_N\right)^2, \tag{1.2.24}$$

где је $\overline{\varepsilon}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \varepsilon_n$, а истовремено низ $\{\varepsilon_n\}$ се не може опсервирати, неопходно је најпре оценити ε_n. Полазећи од једначине (1.2.18), директно се добија да је

$$\hat{\varepsilon}_n = X_n - \hat{\alpha}_1^{yw} X_{n-1} - \cdots - \hat{\alpha}_p^{yw} X_{n-p}. \tag{1.2.25}$$

Заменом претходне формуле у (1.2.24) коначно је Yule-Walker-ова оцена параметра σ_ε^2,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^{2\,yw} = \frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N} (\hat{\varepsilon}_n - \hat{\overline{\varepsilon}}_N), \tag{1.2.26}$$

где је $\hat{\overline{\varepsilon}}_N = \frac{1}{N-p}\sum\limits_{n=p+1}^{N} \hat{\varepsilon}_n$. Стога, статистика $\hat{\sigma}_\varepsilon^{2\,yw}$, дата као линеарна функција (1.2.26) строго постојаних оцена, је такође строго постојана.

Метод условних најмањих квадрата

Ако је $F_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ σ-алгебра генерисана случајним промењливама $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а $\boldsymbol{\beta}$ вектор непознатих параметара $(\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)^T$, тада се њихове оцене методом условних најмањих квадрата добијају минимизирањем суме квадрата одступања

$$Q_N(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{n=p+1}^{N} (X_n - E(X_n|F_{n-1}))^2,$$

где је $E(X_n|F_{n-1}) = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \cdots + \alpha_p X_{n-p} + \mu_\varepsilon$. Детаљно извођење, као и особине ових оцена дате су у Nastić (2008). Укратко, директним решавањем система линеарних једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_N}{\partial \mu} &= 0\,, \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \alpha_l} &= 0\,, \quad l = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

добијају се оцене непознатих параметара методом условних најмањих квадрата, односно $\hat{\mu}^{cls}, \hat{\alpha}_1^{cls}, \hat{\alpha}_2^{cls}, \ldots, \hat{\alpha}_p^{cls}$.

Како функција $E(X_n|F_{n-1})$ задовољава услове Теорема 1.2.2 и 1.2.3, тада њиховом применом следи да су оцене непознатих параметара INAR(p) модела добијене методом условних најмањих квадрата, респективно строго постојане и асимптотски нормално расподељене.

Глава 2

INAR(1) модели са геометријским бројачким низом

До сада најчешће употребљавани ненегативни целобројни ауторегресивни модели су засновани на биномном тининг оператору, генерисаном Бернулијевим бројачким низом. Модели ове врсте, укратко представљени у претходној глави су идеални за моделирање бројачких низова, код којих посматране јединке могу да допринесу укупној суми, односно вредностима елемената серије, са 0 или 1. У пракси има доста примера оваквих временских низова. На пример, то може бити пребројавање пацијената једне болнице сваког дана у подне, или рецимо број људи који чекају да буду услужени на бензинској станици, посматран сваких 5 минута и слично.

Међутим, у случају када посматрана јединка може да генерише две или више нових јединки, или да произведе два или више догађаја који су предмет посматрања, тада Бернулијев бројачки низ више није најпогоднији за конструисање потребних ненегативних целобројних AR модела. Због тога смо се одлучили за увођење новог бројачког низа $\{W_i\}$ са геометријском расподелом. Ово је разматрано у Ristić, Bakouch, Nastić (2009). С обзиром на расподелу случајне промењиве $\sum\limits_{i=1}^{x} W_i$, добијен је негативни биномни тининг оператор. Дефинишимо сада геометријску расподелу бројачког низа. Означимо са A случајни догађај када посматрана јединка популације генерише једну нову јединку. Нека је $P(A) = p$. Са $W_i = w$, за $w \in \{0, 1, \dots\}$, означавамо да је i-та јединка популације генерисала w нових јединки, односно реализацију низа од w успешних реализација догађаја A, окончаног једним неуспехом, тј. догађајем A^c. Одавде је коначно $P(W_i = w) = p^w(1 - p)$.

Оригиналност INAR процеса заснованих на геометријском бројачком низу се између осталог потврђује и чињеницом да ови процеси нису специјалан случај F-INAR процеса, иначе веома широке класе целобројних AR процеса уведених у Aly, Bouzar (1994), (2005). Наиме, код F-INAR(1) процеса посматра се полугрупа функција генератриса вероватноћа $\{F_t(s), t \geq 0\}$, где је $t = -\ln \alpha$. Одавде је $\alpha = e^{-t}$, тако да се добија да је одговарајућа функција генератрисе вероватноће у случају геометријског бројачког низа облика $F_t(s) = \frac{1}{1+e^{-t}-e^{-t}s}$. Даље, пошто је

$$\lim_{t \to 0} F_t(s) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1 + e^{-t}(1 - s)} = \frac{1}{2 - s} \neq s,$$

види се да непходан услов (1.1.1) није испуњен, тако да негативни биномни тининг оператор не може бити специјалан случај генералисаног " $\circ_F$ " оператора.

У овој глави упознаћемо се са особинама INAR(1) процеса заснованих на геометриском бројачком низу. Својства негативног биномног тининга, статистичке особине самих процеса као и њихову примену упознаћемо на оригинално уведеним моделима са конкретним маргиналним расподелама. Тако, одговарајући резултати који се односе на INAR(1) процесе са геометријском, негативном биномном и помереном геометријском расподелом, редом су презентовани у три одељка ове главе.

2.1 Геометријски INAR(1) модел

Након веома честе, а у почетку и доминантне примене Пуасонове маргиналне расподеле код INAR процеса са биномним тинингом, примећено је да код многих стварних података узорачка средина и дисперзија нису чак ни приближно једнаке. Због тога многи аутори уводе INAR процесе са геометријском и негативном биномном маргиналном расподелом. Значајни резултати о томе се могу наћи у Alazid, Al-Osh (1988), Al-Osh, Aly (1992) и McKenzie (1986).

Ослањајући се на Ristić, Bakouch, Nastić (2009), у овом одељку након конструкције посматраног процеса, представићемо особине негативног биномног тининга. Такође ћемо се упознати са корелационом структуром процеса и извешћемо неке условне статистичке особине. Методи за оцењивање непознатих параметара као и њихова примена над серијама података, презентовани су у следећем одељку, где се разматра општији случај негативне биномне маргиналне расподеле.

2.1.1 Конструкција и основна својства процеса

Најпре, уведимо негативни биномни тининг оператор ”$*$”.

Дефиниција 2.1.1 *Нека је X ненегативна целобројна случајна промењива и $\alpha \in (0,1)$. Оператор ”$*$” дефинише се као*

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i, \tag{2.1.1}$$

где је $\{W_i, i \geq 1\}$ бројачки низ независних случајних промењивих, независних од X, са геометријском рсподелом са параметром $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Нови ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда са геометријском маргиналном расподелом (NGINAR(1)) је низ $\{X_n\}$ који задовољава једначину

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{2.1.2}$$

где је $n \geq 1$, оператор "$*$" је дат претходном дефиницијом. $\{X_n\}$ је низ случајних променљивих са геометријском расподелом са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$, односно са законом расподеле $P(X_n = i) = \frac{\mu^i}{(1+\mu)^{i+1}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\{\varepsilon_n\}$ је иновациони низ ненегативних целобројних независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од $\{W_i\}$ и таквих да је ε_n независно од X_{n-l}, за $l > 0$. Приметимо да је $E(X_n) = \mu$ и $Var(X_n) = \mu(1+\mu)$. На основу (2.1.2) и дефиниције оператора "$*$", следи да је NGINAR(1) процес Маркова. На основу овог својства и једнаке расподељености његових случајних променљивих, произилази строга стационарност овог процеса, а одавде уз коначност другог момента и широка стационарност.

Како се информација о маргиналној расподели не користи у извођењу претходних особина, то оне важе за све INAR(1) процесе са негативним биномним тинингом. На исти начин се може говорити и о ергодичности ових процеса. Ово је дато следећом теоремом, за чији доказ су нам потребна два помоћна тврђења.

Лема 2.1.1 (Shiryaev, 1995, стр.379) *Нека је дат низ случајних променљивих* $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$ *Ако је* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$ σ*-алгебра генерисана са* $\{\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots\}$*, онда је* $\mathcal{X} = \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}_n$*, репна* σ*-алгебра.*

Лема 2.1.2 (Shiryaev, 1995, стр.381) *Ако је* $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$ *низ независних случајних променљивих и ако је* $A \in \mathcal{X}$*, где је* $\mathcal{X}$ *дефинисано у претходној Леми 2.1.1, тада је* $P(A) = 0$ *или* $P(A) = 1$*.*

Теорема 2.1.1 *INAR*(1) *процес са геометријским бројачким низом је ергодичан.*

Доказ. На основу Дефиниције 2 из Shiryaev (1995, стр.413), строго стасионаран процес $\{X_n\}$ је ергодичан, ако је вероватноћа произвољног инваријантног догађаја у односу на овај процес једнака 0 или 1. Нека је A произвољан догађај, инавријантан у односу на INAR(1) процес $\{X_n\}$. То значи да постоји скуп B, такав да је $A = \{\omega | (X_n, X_{n-1}, \ldots) \in B\}$, за свако $n \in \mathbb{Z}$. Ако је $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots)$ σ-алгебра генерисана са $\{X_n, X_{n-1}, \ldots\}$, тада је $A \in \mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots)$, за свако $n \in \mathbb{Z}$. На основу (2.1.2) следи да је

$$\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots) \subseteq \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{W}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{W}^{(n-1)}, \ldots\right),$$

где је $\boldsymbol{W}^{(n)}$ одговарајући бројачки низ $\{W_i\}$, којим је генерисана случајна променљива X_n. Тако је $A \in \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{W}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{W}^{(n-1)}, \dots\right)$, за свако $n \in \mathbb{Z}$, одакле је

$$A \in \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{W}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{W}^{(n-1)}, \dots\right). \tag{2.1.3}$$

Како је $\left\{\varepsilon_n, \boldsymbol{W}^{(n)}\right\}$ низ независних случајних променљивих, на основу Леме 2.1.1, десна страна (2.1.3) је репна σ-алгебра. Даље, на основу Леме 2.1.2, A је репни догађај и $P(A) = 0$ или 1. □

Даље, одредимо расподелу иновационог процеса $\{\varepsilon_n\}$. Ако су Φ_X, Φ_W и Φ_ε функције генератрисе вероватноћа случајних променљивих X_n, W_i и ε_n, респективно, тада из (2.1.2) добијамо

$$\Phi_X(s) = \Phi_X(\Phi_W(s))\Phi_\varepsilon(s). \tag{2.1.4}$$

Одавде користећи да су $\Phi_X(s) = \frac{1}{1+\mu-\mu s}$ и $\Phi_W(s) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha s}$, следи да је

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}{(1+\mu-\mu s)(1+\alpha-\alpha s)}, \tag{2.1.5}$$

за коју је у Nastić (2008) показано да је добро дефинисана функција генератрисе вероватноће за $\alpha \in \left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right]$. Према томе, на основу записа ове функције у облику

$$\Phi_\varepsilon(s) = \left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{1}{1+\mu-\mu s} + \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\cdot\frac{1}{1+\alpha-\alpha s},$$

закон расподеле иновационе случајне променљиве ε_n је

$$P(\varepsilon_n = j) = \left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\mu^j}{(1+\mu)^{j+1}} + \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\cdot\frac{\alpha^j}{(1+\alpha)^{j+1}}, j = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1.6}$$

односно ε_n је мешавина две случајне променљиве са геометријском расподелом. Одавде је $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu$, $\sigma_\varepsilon^2 = (1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)$. За $\alpha = \frac{\mu}{1+\mu}$, расподела случајне променљиве ε_n се своди на геометријску са параметром $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, а сам NGINAR(1) на модел са једним непознатим параметром.

2.1.2 Негативни биномни тининг

Наредном лемом су описана својства оператора "$*$", за произвољну дискретну расподелу случајне променљиве X.

Лема 2.1.3 *Негативни биномни оператор "$*$" има следеће особине:*

(i) $0 * X = 0,\ 1 * X \neq X.$

(ii) $E(\alpha * X) = \alpha E(X).$

(iii) $E(\alpha * X)^2 = \alpha^2 E\left(X^2\right) + \alpha(1+\alpha)E(X).$

(iv) $E\left((\alpha * X)\prod_{i=1}^{r} Y_i\right) = \alpha E\left(X\prod_{i=1}^{r} Y_i\right),\ r \geq 1,$ *ако су бројачки низови за* $\alpha * X$ *независни од* X *и* Y_i *за* $i = 1, 2, \ldots, r.$

(v) $E\left((\alpha * X)^2\prod_{i=1}^{r} Y_i\right) = \alpha^2 E\left(X\prod_{i=1}^{r} Y_i\right) + \alpha(1+\alpha)E\left(X\prod_{i=1}^{r} Y_i\right),\ r \geq 1,$ *ако су бројачки низови за* $\alpha * X$ *независни од* X *и* Y_i *за* $i = 1, 2, \ldots, r.$

(vi) $E\left(\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i * X_i)\right) = \prod_{i=1}^{r}\alpha_i E\left(\prod_{i=1}^{r} X_i\right),\ r \geq 1,$ *ако су бројачки низови за* $\alpha_i * X_i,\ i = 1, 2, \ldots, r$ *међусобно независни и независни од* X_i, *где је* $i = 1, 2, \ldots, r.$

(vii) $E(\alpha * X)^3 = \alpha^3 E\left(X^3\right) + 3\alpha^2(1+\alpha)E\left(X^2\right) + \alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)E(X),$ *ако су бројачки низови за* $\alpha * X$ *независни од* X.

(viii) $E\left((\alpha * X)^3\prod_{i=1}^{r} Y_i\right) = \alpha^3 E\left(X^3\prod_{i=1}^{r} Y_i\right) + 3\alpha^2(1+\alpha)E\left(X^2\prod_{i=1}^{r} Y_i\right)$ $+\, \alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)E\left(X\prod_{i=1}^{r} Y_i\right),\ r \geq 1,$ *ако су бројачки низови за* $\alpha * X$ *независни од* X *и* $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots, r.$

(ix) $E(\alpha * X - \alpha * Y)^2 = \alpha(1+\alpha)E|X-Y| + \alpha^2 E(X-Y)^2$, *ако бројачки низови за* $\alpha * X$ *и* $\alpha * Y$ *имају исту* $Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ *расподелу.*

(x) $E(X(\beta * Y)(\gamma * Z)) = \beta\gamma E(XYZ)$, *ако су бројачки низови за* $\beta * Y$ *и* $\gamma * Z$ *међусобно независни и независни од* X, Y *и* Z.

(*xi*) *$E((\alpha * X)(\beta * Y)(\gamma * Z)) = \alpha\beta\gamma E(XYZ)$, ако су бројачки низови за $\alpha * X$, $\beta * Y$ и $\gamma * Z$ међусобно независни и независни од X, Y и Z.*

(*xii*) *$E\left(\alpha * X | X\right) = \alpha X$, ако су бројачки низови за $\alpha * X$ независни од X.*

(*xiii*) *$E\left((\alpha * X)^2 | X\right) = \alpha^2 X^2 + \alpha(1+\alpha)X$, ако су бројачки низови за $\alpha * X$ независни од X.*

Доказ. Техника извођења свих особина је слична и одговара доказу Леме 1 из Silva и Oliveira (2004), где су дати аналогни резултати који се тичу биномног тининга. Стога, овде изводимо само особину (*vii*).

$$\begin{aligned}
E(\alpha * X)^3 &= \sum_{x=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{i=1}^{X} W_i\right)^3 |X = x\right) P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=0}^{x} W_i^3 + 3\sum_{i=0}^{x}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{x} W_i^2 W_j + \sum_{i=0}^{x}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{x}\sum_{\substack{k=0\\ j\neq k\neq i}}^{x} W_i W_j W_k\right) P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\alpha^3 x^3 + 3\alpha^2(1+\alpha)x^2 + \alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)x\right) P(X = x) \\
&= \alpha^3 E\left(X^3\right) + 3\alpha^2(1+\alpha)E\left(X^2\right) + \alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)E(X). \ \Box
\end{aligned}$$

Следећа теорема нас упознаје са додатним особинама негативног биномног тининга, које важе у случају NGINAR(1) процеса, будући да X_n има конкретну, геометријску расподелу.

Теорема 2.1.2 *Ако X има геометријску расподелу са параметром $\frac{p}{1+p}$, $p > 0$, тада важе следећи услови:*

(*i*) $$1 * X \overset{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{1}{1+p} \\ X, & \text{с.в. } \frac{p^2}{(1+p)^2} \\ X + Y, & \text{с.в. } \frac{p}{(1+p)^2} \end{cases}$$

где случајна промењива Y има геометријску расподелу са параметром $\frac{1+p}{2+p}$ и независна је од X, (*ii*) $\beta * (\alpha * X) \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \textit{с.в.}\ \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha p} \\ (\beta\alpha) * X + Y_1, & \textit{с.в.}\ \frac{\alpha^2 p^2}{(1+\alpha+\alpha p)(1+\alpha p)} \\ (\beta\alpha) * X + Y_2, & \textit{с.в.}\ \frac{\alpha p}{(1+\alpha+\alpha p)(1+\alpha p)} \end{cases}$

где независне случајне променљиве Y_1 *и* Y_2 *имају геометријске расподеле са параметрима* $\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha}$ *и* $\frac{\beta(1+\alpha+\alpha p)}{1+\beta(1+\alpha+\alpha p)}$*, респективно и независне су од* X*;* $\beta \in (0,1)$.

Доказ.

(*i*) Користећи познате особине функција генератрисе вероватноће добијамо да је

$$\begin{aligned} \Phi_{1*X}(s) &= \Phi_X\left(\frac{1}{1+1-1\cdot s}\right) = \frac{1}{1+p-p\left(\frac{1}{2-s}\right)} \\ &= \frac{1}{1+p} + \frac{p}{1+p}\cdot\frac{1}{2-s}\left(\frac{1}{1+p-\frac{p}{2-s}}\right) \\ &= \frac{1}{1+p} + \frac{p}{1+p}\cdot\frac{1}{2+p-(1+p)s}\,. \end{aligned}$$

Пошто је $\frac{1}{2+p-(1+p)s} = \frac{1}{1+p-ps}\left(\frac{p}{1+p} + \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{2+p-(1+p)s}\right)$, тада коначно следи да је

$$\Phi_{1*X}(s) = \frac{1}{1+p} + \frac{p}{1+p}\Phi_X(s)\left(\frac{p}{1+p} + \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{2+p-(1+p)s}\right),$$

чиме је ово тврђење доказано.

(*ii*) Нека су $\Phi_\alpha(s)$ и $\Phi_\beta(s)$ функције генератрисе вероватноћа одговарајућих бројачких низова, геометријски расподељених са параметрима $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ и $\frac{\beta}{1+\beta}$, респективно. Применом једнакости $\Phi_{(\beta\alpha)*X}(s) = \frac{1+\beta\alpha-\beta\alpha s}{1+\beta\alpha(1+\mu)-\beta\alpha(1+\mu)s}$ и $\Phi_{\beta*(\alpha*X)}(s) = \Phi_X(\Phi_\alpha(\Phi_\beta(s)))$, директним рачуном се проверава да је

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta*(\alpha*X)}(s) = \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha p} + \frac{\alpha p}{1+\alpha+\alpha p}\Phi_{(\beta\alpha)*X}(s)\left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\times\right. \\ \left.\times\frac{1}{1+\beta\alpha-\beta\alpha s} + \frac{1}{1+\alpha p}\cdot\frac{1}{1+\beta(1+\alpha+\alpha p)-\beta(1+\alpha+\alpha p)s}\right), \end{aligned}$$

одакле следи тврђење. □

Из претходне теореме имамо да је $1*X \overset{d}{\neq} X$ и $\beta*(\alpha*X) \overset{d}{\neq} (\beta\alpha)*X$, што се битно разликује од случаја биномног тининга " $\circ$ ", где је $1\circ X \overset{d}{=} X$ и $\beta\circ(\alpha\circ X) \overset{d}{=} (\beta\alpha)\circ X$. Са друге стране, иако случајне променљиве X и $1*X$ нису једнако расподељене, њихова очекивања су једнака μ.

2.1.3 Аутокорелациона структура и неке особине модела

Аутоковаријациона функција реда k NGINAR(1) процеса се применом особине (iv) Леме 2.1.3 израчунава као

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= Cov(\alpha*X_{n+k-1}+\varepsilon_{n+k},X_n)=Cov(\alpha*X_{n+k-1},X_n)\\ &= \alpha\gamma(k-1)=\cdots=\alpha^k\gamma(0).\end{aligned}$$

Одавде је аутокорелациона функција $\rho(k)=\alpha^k$, $\alpha\in(0,1)$, $k\geq 0$. Приметимо да је она истог облика као код непрекидних AR процеса, односно да експоненцијално тежи 0 са порастом реда k. С обзиром да је код NGINAR(1) процеса $\alpha\leq\mu/(1+\mu)$, аутокорелираност је мања и брже тежи 0 код реализованих серија са просечно мањим вредностима.

Како је NGINAR(1) процес Маркова, за одређивање заједничке расподеле k-торке његових узастопних случајних променљивих, довољно је познавати матрицу вероватноћа прелаза. Ако један њен елемент означимо са $p_{ij}=P(X_n=j|X_{n-1}=i)$, директним рачунањем се добија

$$\begin{aligned}p_{ij} &= P\left(\sum_{l=1}^{i}W_l+\varepsilon_n=j\right)=\sum_{k=0}^{j}P\left(\sum_{l=1}^{i}W_l=k\right)P(\varepsilon_n=j-k)\\ &= \sum_{k=0}^{j}\left[\binom{i+k-1}{i-1}\frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+i}}\times\right.\\ &\times \left.\left(\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\mu^{j-k}}{(1+\mu)^{j-k+1}}+\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\cdot\frac{\mu^{j-k}}{(1+\mu)^{j-k+1}}\right)\right].\end{aligned}$$

Даље, испитајмо временску реверзибилност процеса. Из дефиниције оператора " $*$ ", заједничка функција генератрисе вероватноће се рачуна као

$$\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2)=\Phi_\varepsilon(s_1)\Phi_X(s_2\Phi_W(s_1))=\Phi_\varepsilon(s_1)\Phi_X\left(\frac{s_2}{1+\alpha-\alpha s_1}\right),$$

где је $\Phi_\varepsilon(s_1)=\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s_1}{(1+\mu-\mu s_1)(1+\alpha-\alpha s_1)}$. Тада је коначно

$$\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2)=\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s_1}{(1+\mu-\mu s_1)((1+\mu)(1+\alpha-\alpha s_1)-\mu s_2)}.$$

Пошто ова функција није симетрична по s_1 и s_2, за $0<\alpha<\mu/(1+\mu)$, NGINAR(1) процес није временски реверзибилан, односно $(X_n,X_{n-1}) \overset{d}{\neq} (X_{n-1},X_n)$. Међутим, када је $\alpha=\mu/(1+\mu)$, тада је $\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2)=\frac{1}{1+2\mu-\mu(s_1+s_2)}$, односно NGINAR(1) процес је временски реверзибилан.

2.1.4 Условне статистичке величине

Као и у многим претходним резултатима овог одељка и овде најчешће не користимо информацију о маргиналној расподели. Најпре размотримо условно очекивање и условну дисперзију за k корака унапред.

На основу формуле (2.1.2) и особина негативног биномног тининга, а применом метода математичке индукције добијамо да је условно очекивање

$$E(X_{n+k}|X_n)=\alpha^k X_n+\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\mu_\varepsilon. \tag{2.1.7}$$

При томе, ако $k\to\infty$, онда $E(X_{n+k}|X_n)\to\frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}$, односно регресиона функција INAR(1) процеса са порастом реда конвергира безусловном математичком очекивању. Аналогном техником израчунавамо и k-корачну условну дисперзију:

$$\begin{aligned} Var(X_{n+k}|X_n) &= \frac{\alpha^k(1+\alpha)(1-\alpha^k)}{1-\alpha}X_n+\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\sigma_\varepsilon^2 \\ &+ \frac{\alpha(1+\alpha+2\mu_\varepsilon)}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}-\alpha^{k-1}\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right)\mu_\varepsilon \qquad (2.1.8) \\ &+ \left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}-\frac{1-2\alpha^k+\alpha^{2k}}{(1-\alpha)^2}\right)\mu_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

где такође за $k \to \infty$ добијамо да

$$Var(X_{n+k}|X_n) \to \frac{\alpha(1+\alpha)\mu_\varepsilon + (1-\alpha)\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \mu(1+\mu),$$

што је безусловна дисперзија процеса.

Одредимо сада условну функцију генератрисе вероватноће:

$$\begin{aligned} E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right) &= E\left(E\left(s^{\alpha * X_{n+k-1}+\varepsilon_{n+k}}|X_{n+k-1}\right)|X_n\right) = \\ &= \Phi_\varepsilon(s) E\left(\left(\Phi_W(s)\right)^{X_{n+k-1}}|X_n\right). \end{aligned}$$

Понављајући претходно извођење k пута, добијамо да је условна функција генератрисе вероватноће

$$E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right) = \prod_{i=0}^{k-1} \Phi_\varepsilon\left(\Phi_W^{(i)}(s)\right) \cdot \left(\Phi_W^{(k)}(s)\right)^{X_n},$$

где је $\Phi_W^{(k)}(s) = \Phi_W\left(\Phi_W^{(k-1)}(s)\right)$ и $\Phi_W^{(0)}(s) = s$. Даље, применом (2.1.4) и сукцесивним скраћивањем разломака следи да је

$$E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right) = \Phi_X(s)\Big(\Phi_X\left(\Phi_W^{(k)}(s)\right)\Big)^{-1}\left(\Phi_W^{(k)}(s)\right)^{X_n}. \tag{2.1.9}$$

Математичком индукцијом показујемо да је $\Phi_W^{(k)}(s) = \frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}$, а затим применом овог резултата, (2.1.9) трансформишемо у коначни облик условне функције генератрисе вероватноће,

$$\begin{aligned} E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right) &= \Phi_X(s)\Bigg(\Phi_X\left(\frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}\right)\Bigg)^{-1} \\ &\times \left(\frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}\right)^{X_n}, \end{aligned}$$

која конвергира ка функцији генератрисе вероватноће $\Phi_X(s)$, када $k \to \infty$.

Неке од особина NGINAR(1) процеса, које зависе и од информације садржане у маргиналној расподели, могу бити изведене као специјалан случај својстава процеса презентованог у следећем одељку, а који подразумева негативну биномну маргиналну расподелу. У вези са тим, посебна пажња у наредном одељку је између осталог поклоњена и карактеризацији метода за оцењивање непознатих параметара INAR(1) модела генерисаног геометријским бројачким низом, као и њиховој примени на симулираним и реалним подацима.

2.2 Негативни биномни INAR(1) модел

Будући да се особине негативног биномног тининга и корелациона структура INAR(1) процеса, представљеног у претходном одељку, односе и на овде уведен INAR(1) процес са негативном биномном маргиналном расподелом, у овом одељку нашу пажњу ћемо посветити особинама модела које произилазе из примене општије маргиналне расподеле. Наиме, након конструкције процеса, одређујемо условне статистичке величине и уводимо методе за оцењивање непознатих параметара, дајући њихову асимптотску карактеризацију. Даље, добијене статистике примењујемо како над симулираним, тако и над стварним подацима, упоређујући овде уведени модел са другим конкурентним INAR моделима првог реда. Резултати овог оделка су садржани у Ristić, Nastić, Bakouch (2010).

2.2.1 Конструкција и основна својства процеса

Уведимо сада ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда са негативном биномном маргиналном расподелом (NBINAR(1)). Под овим процесом подразумевамо низ $\{X_n\}$, случајних променљивих, који задовољава једначину

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{2.2.1}$$

за $n \geq 1$, $\alpha \in (0,1)$, где је "$*$" раније уведен негативни биномни тининг оператор, заснован на геометријском бројачком низу $\{W_i\}$, $\{X_n\}$ је строго стационарни процес са $\mathcal{NB}\left(\theta, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$ маргиналном расподелом, односно расподелом облика $P(X_n = i) = \frac{\Gamma(\theta+i)}{\Gamma(\theta)i!} \cdot \frac{\mu^i}{(1+\mu)^{\theta+i}}$, $\theta > 0$, $\mu > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Иновациони процес $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних, једнако расподељених случајних променљивих, независних од $\{W_i\}$, при чему је ε_n независно од X_{n-l}, за $l > 0$.

Одредимо расподелу иновационе променљиве ε_n. Због сличне структуре, овде разматрани процес задовољава једначину (2.1.4) NGINAR(1) процеса. Како је функција генератрисе вероватноће случајне промењиве X_n NBINAR(1) процеса $\Phi_X(s)=\left(\frac{1}{1+\mu-\mu s}\right)^{\theta}$, то је

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(s) &= \frac{\Phi_X(s)}{\Phi_X(\Phi_W(s))}\\ &= \left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)^{\theta}\left(\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}{1+\mu-\mu s}\right)^{\theta}. \qquad (2.2.2)\end{aligned}$$

Као у претходном одељку, $\Phi_\varepsilon(s)$ је добро дефинисана функција за $\alpha\in\left(0,\frac{\mu}{1+\mu}\right]$. На основу ове функције генератрисе вероватноће израчунавамо $\mu_\varepsilon=\theta\mu(1-\alpha)$ и $\sigma_\varepsilon^2=\theta\mu(1+\alpha)((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)$, односно средину и дисперзију иновационог процеса, респективно. Такође, приметимо да се овај процес, за $\theta=1$, своди на NGINAR(1). На основу (2.2.2) је $\varepsilon_n\stackrel{d}{=}Y_n+Z_n$, где је $Y_n:\mathcal{NB}\left(\theta,\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, док је променљива Z_n одређена наредном лемом.

Лема 2.2.1 *Случајна променљива* $Z_n=\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{R_i}\circ V_i$*, где је* $N\stackrel{d}{=}\mathcal{P}\left(-\theta\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)$, $R_i\stackrel{d}{=}\mathcal{U}(0,1)$, $V_i\stackrel{d}{=}Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu>0$, $0<\alpha<0$, $\theta>0$, *"$\circ$" је оператор биномног тининга и* N, R_i, V_i *су независне случајне променљиве, има функцију генератрисе вероватноће*

$$\Phi_{Z_n}(s)=\left(\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}{1+\mu-\mu s}\right)^{\theta}.$$

Доказ. Применом дефиниције функције генератрисе вероватноће, као и чињеница о расподели случајних променљивих, $R_i\stackrel{d}{=}R_1$, $V_i\stackrel{d}{=}V_1$, полазећи од леве стране тражене једнакости еквивалентним трансформацијама дајемо следеће извођење.

$$\Phi_{Z_n}(s)=E\left(s^{Z_n}\right)=E\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{R_i}\circ V_i}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{R_i}\circ V_i}\right)P(N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[E\left(s^{\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{R_1}\circ V_1}\right)\right]^{n}P(N=n)=\Phi_N\left(\int_0^1 E\left(s^{\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{r}\circ V_1}\right)dr\right)$$

$$= \Phi_N\left(\int_0^1 \Phi_{V_1}\left(1-\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r+\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r s\right)dr\right)$$

$$= \Phi_N\left(\int_0^1 \frac{dr}{1+\mu-\mu\left(1-\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r+\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r s\right)}\right)$$

$$= \Phi_N\left(\int_0^1 \frac{dr}{1+\mu(1-s)\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r}\right).$$

Одговарајући интеграл, односно аргумент функције генератрисе вероватноће $\Phi_N(\cdot)$ даље трансформишемо сменом $u = \left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^r$. Тако је

$$= \Phi_N\left(\int_1^{\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}} \frac{du}{(1+\mu(1-s)u)u\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\right)$$

$$= \Phi_N\left(\frac{1}{\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\int_1^{\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\left[\frac{1}{u}-\frac{\mu(1-s)}{1+\mu(1-s)u}\right]du\right),$$

што се решавањем одговарајућег одређеног интеграла и применом дефиниције функције генератрисе вероватноће случајне променљиве са Пуасоновом расподелом даље своди на

$$= \Phi_N\left(\frac{1}{\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\left[\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}-\ln\left(1+\alpha(1-s)(1+\mu)\right)+\ln(1+\mu(1-s))\right]\right)$$

$$= \Phi_N\left(1+\frac{\ln\frac{1+\mu(1-s)}{1+\alpha(1+\mu)(1-s)}}{\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\right) = e^{-\theta\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}\left(1+\frac{\ln\frac{1+\mu(1-s)}{1+\alpha(1+\mu)(1-s)}}{\ln\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}}-1\right)$$

$$= e^{-\theta\ln\frac{1+\mu(1-s)}{1+\alpha(1+\mu)(1-s)}} = \left(\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}{1+\mu-\mu s}\right)^\theta. \,\square$$

Иако је случајна променљива Z_n на исти начин разматрана у McKenzie (1987) и Zhu, Joe (2006), у овим изворима није дато извођење резултата, које је овде презентовано.

На основу (2.2.2) изводимо закон расподеле иновационог процеса. Тако је

$$\ln\Phi_\varepsilon(s) = -\theta\ln(1+\alpha-\alpha s)+\theta\ln(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s)-\theta\ln(1+\mu-\mu s).$$

Одавде је

$$\frac{\Phi'_\varepsilon(s)}{\Phi_\varepsilon(s)} = \frac{\alpha\theta}{1+\alpha-\alpha s} - \frac{\alpha(1+\mu)\theta}{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s} + \frac{\mu\theta}{1+\mu-\mu s}. \qquad (2.2.3)$$

Увођењем функције $H(s) = \frac{\Phi'_\varepsilon(s)}{\Phi_\varepsilon(s)}$ следи да је

$$H^{(k)}(s) = \frac{k!\alpha^{k+1}\theta}{(1+\alpha-\alpha s)^{k+1}} - \frac{k!\alpha^{k+1}(1+\mu)^{k+1}\theta}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s)^{k+1}} + \frac{k!\mu^{k+1}\theta}{(1+\mu-\mu s)^{k+1}}.$$

Ово се може показати математичком индукцијом. Наиме, на основу (2.2.3), претходна формула очигледно важи за $k=0$. Даље претпоставимо да важи за $k=n$ и покажимо је за $k=n+1$. Тако је

$$\begin{aligned}
H^{(n+1)}(s) &= \left(H^{(n)}(s)\right)' \\
&= \left(\frac{n!\alpha^{n+1}\theta}{(1+\alpha-\alpha s)^{n+1}} - \frac{n!\alpha^{n+1}(1+\mu)^{n+1}\theta}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s)^{n+1}} + \frac{n!\mu^{n+1}\theta}{(1+\mu-\mu s)^{n+1}}\right)' \\
&= \frac{(n+1)!\alpha^{n+2}\theta}{(1+\alpha-\alpha s)^{n+2}} - \frac{(n+1)!\alpha^{n+2}(1+\mu)^{n+2}\theta}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s)^{n+2}} + \frac{(n+1)!\mu^{n+2}\theta}{(1+\mu-\mu s)^{n+2}} \\
&= H^{(n+2)}(s)\,.
\end{aligned}$$

Даље, l-ти извод функције $\Phi'_\varepsilon(s) = \Phi_\varepsilon(s)H(s)$ израчунавамо као

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon^{(l+1)}(s) &= \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\Phi_\varepsilon^{(j)}(s)H^{(l-j)}(s) = \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\Phi_\varepsilon^{(j)}(s)\left\{\frac{(l-j)!\alpha^{l-j+1}\theta}{(1+\alpha-\alpha s)^{l-j+1}}\right. \\
&- \left.\frac{(l-j)!\alpha^{l-j+1}(1+\mu)^{l-j+1}\theta}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s)^{l-j+1}} + \frac{(l-j)!\mu^{l-j+1}\theta}{(1+\mu-\mu s)^{l-j+1}}\right\} \\
&= \sum_{j=0}^{l}\frac{l!\Phi_\varepsilon^{(j)}(s)\theta}{j!}\left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha-\alpha s}\right)^{l-j+1}\right. \\
&- \left.\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}\right)^{l-j+1} + \left(\frac{\mu}{1+\mu-\mu s}\right)^{l-j+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Коначно, из $P(\varepsilon_n = l) = \frac{\Phi_\varepsilon^{(l)}(0)}{l!}$ и претходне једнакости закон расподеле иновационог процеса је

$$P(\varepsilon_n = 0) = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^\theta \left(\frac{1+\alpha(1+\mu)}{1+\mu}\right)^\theta,$$

$$P(\varepsilon_n\!=\!l)\!=\!\frac{\theta}{l}\sum_{j=0}^{l-1} P(\varepsilon_n\!=\!j)\left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{l-j}\!-\!\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^{l-j}\!+\!\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{l-j}\right\},$$

где је $l \in \{1,2,\dots\}$. Како се производ два разломка који фигуришу у вероватноћи $P(\varepsilon_n = 0)$ може записати као $\frac{1+\alpha+\alpha\mu}{1+\alpha+\mu+\alpha\mu}$, где су $\mu > 0$ и $0 < \alpha \leq \mu/(1+\mu)$, то је очигледно да је ова вероватноћа добро дефинсана са вредношћу у интервалу $(0,1)$. Када је у питању вероватнћа $P(\varepsilon_n = l)$, за $l \in \{1,2,\dots\}$, уведимо функцију $h(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^m$, за $m \in \{1,2,\dots,l\}$. С обзиром да је $h(x)$ растућа функција за $x \geq 0$ и да је $\alpha(1+\mu) \leq \mu$, то је $\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^{l-j} \leq \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{l-j}$, односно сви сабирци којима се дефинише посматрана вероватноћа су ненегативни. Са друге стране, из начина дефинисања закона расподеле иновационог процеса важи да је

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(\varepsilon_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Phi_\varepsilon^{(j)}(0)}{j!} = \Phi_\varepsilon(1) = 1\,.$$

Према томе, показали смо да је закон расподеле иновационог процеса $\{\varepsilon_n\}$ добро дефинисан.

Дефинишимо сада оператор A_k као $A_k(X) = \sum_{i=1}^{X} A_{i,k}$, за $k \geq 1$, где је $\{A_{i,k}\}$ низ независних случајних променљивих, са расподелом

$$A_{i,k} \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha^k} \\ Geom\left(\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha^{k+1}}\right), & \text{с.в. } \frac{\alpha^{k-1}(1-\alpha)}{1-\alpha^k} \end{cases},$$

и $A_0(X) = X$. За овако уведени оператор важи следеће тврђење. Најпре, због једноставности, означимо $\alpha * (\alpha * \dots (\alpha * X) \dots)$ са $\alpha^{(k)} * X$, где је тининг "$\alpha *$" примењен k пута, за $k \geq 1$. Такође, нека је $\alpha^{(0)} * X = X$.

Тврђење 2.2.1 *Оператор* A_k *задовољава следећу једнакост.*

$$\alpha * A_{k-1}(X) \stackrel{d}{=} A_k(X), \;\; k \geq 1. \tag{2.2.4}$$

Доказ. Тврђење показујемо применом математичке индукције и својстава функције генератрисе вероватноће. Најпре, доказујемо случај за $k = 1$. Како је $A_{i,1} \stackrel{d}{=} Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, то из дефиниције негативног биномног тининга важи да је $\alpha * X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{X} A_{i,1} = A_1(X)$. Даље, претпоставимо да тврђење важи за $k = m-1$ и докажимо га за $k = m$. Како на основу дефиниције оператора $A_m(X)$ дате изнад, следи да је $\Phi_{A_{m-1}(X)}(s) = \Phi_X\left(\Phi_{A_{1,m-1}}(s)\right)$, то је даље

$$\Phi_{A_{m-1}(X)}(s) = \Phi_X\left(\frac{1-\alpha^{m-2}}{1-\alpha^{m-1}} + \frac{(1-\alpha)\alpha^{m-2}}{1-\alpha^{m-1}} \cdot \frac{1}{1+\alpha\frac{1-\alpha^{m-1}}{1-\alpha} - \alpha\frac{1-\alpha^{m-1}}{1-\alpha}s}\right).$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha * A_{m-1}(X)}(s) &= \Phi_{A_{m-1}(X)}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right) \\
&= \Phi_X\left(\frac{1-\alpha^{m-2}}{1-\alpha^{m-1}} + \frac{(1-\alpha)\alpha^{m-2}}{1-\alpha^{m-1}} \cdot \frac{1}{1+\alpha\frac{1-\alpha^{m-1}}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)}\right) \\
&= \Phi_X\left(\frac{1-\alpha^{m-1}}{1-\alpha^{m}} + \frac{(1-\alpha)\alpha^{m-1}}{1-\alpha^{m}} \cdot \frac{1}{1+\alpha\frac{1-\alpha^{m}}{1-\alpha} - \alpha\frac{1-\alpha^{m}}{1-\alpha}s}\right) \\
&= \Phi_X(\Phi_{A_{1,m}}(s)) = \Phi_{A_m(X)}(s).
\end{aligned}$$

Из добијене једнакости одговарајућих функција генератриса вероватноћа следи доказ. □

Директна последица овог тврђења је

$$\alpha^{(k)} * X \stackrel{d}{=} A_k(X). \tag{2.2.5}$$

Користећи из претходног одељка да је $\Phi_W^{(k)}(s) = \frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}$, даље израчунавамо

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha^{(k)} * X}(s) &= \Phi_X\left(\Phi_W^{(k)}(s)\right) = \frac{1}{1+\mu-\mu\Phi_W^{(k)}(s)} \\
&= \frac{1+\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1})(1-s)}{1+\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-1})(1-s)}.
\end{aligned}$$

Претходни разломак се трансформише у

$$\frac{1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1}}{1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-1}}+B\frac{1}{1+\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-1})(1-s)},$$

где је $B=\frac{\mu\alpha^{k-1}}{1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-1}}$. Тако добијамо

$$\alpha^{(k)}*X\overset{d}{=}\begin{cases}0, & \text{с.в. } \frac{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}}{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k-1}}\\ Geom\left(\frac{\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha}+\mu\alpha^k}{1+\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha}+\mu\alpha^k}\right), & \text{с.в. } \frac{\mu\alpha^{k-1}}{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k-1}}\end{cases}. \qquad (2.2.6)$$

Одавде, када $k\to\infty$,

$$\alpha^{(k)}*X\xrightarrow{d}\begin{cases}0, & \text{с.в. } 1\\ Geom(\alpha), & \text{с.в. } 0\end{cases}\overset{\text{с.и.}}{=}0. \qquad (2.2.7)$$

Примедба 2.2.1 *На основу претходног резултата закључујемо да када се "$\alpha*$" примени бесконачно много пута над случајном променљивом X, тада се она трансформише у 0, у расподели. Стога, и даље је оправдано користити назив "тининг" (истањивање) за оператор генерисан геометријским бројачким низом.*

Како се бројачки низ састоји од независних једнако расподељених случајних променљивих, то из дефиниције негативног биномног тининга следи да је $\alpha*(X+Y)\overset{d}{=}\alpha*X+\alpha*Y$, где су X и Y ненегативне целобројне случајне променљиве. Примењујући ову дистрибутивност у расподели негативног биномног тининга, на основу (2.2.1) имамо да је

$$X_n=\alpha*(\alpha*X_{n-2}+\varepsilon_{n-1})+\varepsilon_n\overset{d}{=}\alpha^{(2)}*X_{n-2}+\alpha*\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n \qquad (2.2.8)$$

Рекурентним понављањем овог извођења k пута, добијамо да је

$$X_n\overset{d}{=}\alpha^{(k)}*X_{n-k}+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^{(i)}*\varepsilon_{n-i}. \qquad (2.2.9)$$

Затим, применом (2.2.7), следи да је $MA(\infty)$ репрезентација у расподели овог процеса

$$X_n\overset{d}{=}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^{(i)}*\varepsilon_{n-i}, \qquad (2.2.10)$$

што је, захваљујући (2.2.5), еквивалентно са

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\varepsilon_{n-i}). \tag{2.2.11}$$

2.2.2 Условне статистичке величине

Условне статистичке величине овог процеса се могу добити применом следеће теореме.

Теорема 2.2.1 *Условна расподела случајне променљиве* X_{n+k} *за дато* X_n, $k \geq 1$, *је конволуција расподела случајних променљивих* $A_k(X_n)$, $\mathcal{NB}\left(\theta, \frac{\alpha(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha^{k+1}}\right)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\alpha-\alpha^{k+1}-\alpha^{k+1}\mu+\alpha^k\mu}{\mu(1-\alpha)}\right)^{R_i} \circ V_i$, $\theta > 0$, $\mu > 0$, $0 < \alpha < \mu/(1+\mu)$, *где су* $R_i \stackrel{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$, $N \stackrel{d}{=} \mathcal{P}\left(-\theta \log \frac{\alpha-\alpha^{k+1}-\alpha^{k+1}\mu+\alpha^k\mu}{\mu(1-\alpha)}\right)$, $V_i \stackrel{d}{=} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, *"*$\circ$*" је биномни тининг, а* N, R_i, V_i *су независне случајне променљиве.*

Доказ. Као што је дато при извођењу условних статистичких величина NGINAR(1) процеса, разматраног у претходном одељку, условна функција генератрисе вероватноће је

$$E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right)=\left(\frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}\right)^{X_n}\prod_{i=0}^{k-1}\Phi_\varepsilon\left(\frac{1-\alpha^i-\alpha(1-\alpha^{i-1})s}{1-\alpha^{i+1}-\alpha(1-\alpha^i)s}\right)$$

Даље, применом (2.2.2), добијамо да је

$$\begin{aligned} E\left(s^{X_{n+k}}|X_n\right) &= \left(\frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}\right)^{X_n}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}\right)^{\theta} \\ &\times \left(\frac{1-\alpha^{k+1}-\alpha^{k+1}\mu+\alpha^k\mu-(\alpha-\alpha^{k+1}-\alpha^{k+1}\mu+\alpha^k\mu)s}{(1-\alpha)(1+\mu-\mu s)}\right)^{\theta}. \end{aligned}$$

Први фактор на десној страни претходне једнакости је функција генератрисе вероватноће случајне променљиве $\sum\limits_{i=1}^{X_n} A_{i,k}$. Други представља функцију генератрисе вероватноће случајне променљиве са расподелом $\mathcal{NB}\left(\theta, \frac{\alpha(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha^{k+1}}\right)$. Коначно, слично Леми 2.2.1, добија се да је трећи фактор функција генератрисе вероватноће случајне променљиве $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\alpha-\alpha^{k+1}-\alpha^{k+1}\mu+\alpha^k\mu}{\mu(1-\alpha)}\right)^{R_i}\circ V_i$. □

Директном применом ове теореме, добијамо да су условно очекивање и дисперзија случајне променљиве X_{n+k} за дато X_n, редом

$$\begin{aligned}E(X_{n+k}|X_n) &= \alpha^k X_n+\theta\mu(1-\alpha^k),\\ Var(X_{n+k}|X_n) &= \frac{(1+\alpha)(1-\alpha^k)\alpha^k}{1-\alpha}X_n\\ &+ \frac{\theta\mu(1-\alpha^k)(1+\mu-\alpha-\alpha\mu+\mu\alpha^k-2\alpha^{k+1}-\mu\alpha^{k+1})}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Очигледно, у случају када $k\to\infty$, добијамо $E(X_{n+k}|X_n)=\theta\mu$ и $Var(X_{n+k}|X_n)=\theta\mu(1+\mu)$, што су очекивање и дисперзија NBINAR(1) процеса.

2.2.3 Оцењивање непознатих параметара

У овом одељку представићемо неке методе за оцењивање непознатих параметара NBINAR(1) модела. Статистике, које ћемо том приликом дефинисати, су засноване на случајном узорку процеса $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Размотрићемо асимптотске расподеле неких од оцена, као и њихову примену над симулираним серијама различитих обима.

Метод момената

С обзиром да су

$$\rho(1)=\alpha,\quad \mu_X=E(X_n)=\theta\mu,$$

$$\gamma(0)=Var(X_n)=\theta\mu(1+\mu),\quad \gamma(1)=Cov(X_n,X_{n+1})=\alpha\theta\mu(1+\mu),$$

оцене параметара NBINAR(1) модела добијене Yule-Walker-овом методом су

$$\hat{\alpha}^{yw}=\frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)},\quad \hat{\mu}^{yw}=\frac{\hat{\gamma}(0)}{\overline{X}_N}-1,\quad \hat{\theta}^{yw}=\frac{\overline{X}_N^2}{\hat{\gamma}(0)-\overline{X}_N},$$

где су $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ и $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=h+1}^{N}\left(X_n - \overline{X}_N\right)\left(X_{n-h} - \overline{X}_N\right)$, $h = 0, 1$.

Silva и Silva (2006) су Теоремом 1 разматрали асимптотску расподелу оцена у случају уопштених INAR(p) процеса са бројачким низом независних једнако расподељених случајних променљивих са коначним моментима прва четири реда. Формулишући ово тврђење у специјалном случају за $p = 1$, добијамо следећу теорему.

Теорема 2.2.2 *Ако је* $\{X_n\}$ *INAR*(1) *процес са* (2.2.10) *репрезентацијом, где је* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha^i < \infty$*, тада је*

$$\sqrt{N}\left[\overline{X}_N - E(X), \hat{\gamma}(0) - \gamma(0), \hat{\gamma}(1) - \gamma(1)\right]^T \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{V}\right),$$

где је $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} [V_{11}]_{1\times 1} & [V_{12}]_{1\times 2} \\ [V_{12}]_{1\times 2}{}^T & [V_{22}]_{2\times 2} \end{bmatrix}_{3\times 3}$*, таква да је* $V_{11} = \lim\limits_{N\to\infty} NVar(\overline{X_N})$, $[V_{12}]_{k+1} = \lim\limits_{N\to\infty} NCov\left(\overline{X}_N, \gamma^*(k)\right)$ *и* $[V_{22}]_{k+1,j+1} = \lim\limits_{N\to\infty} NCov\left(\gamma^*(k), \gamma^*(j)\right)$, *где је* $\gamma^*(k) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n - E(X))(X_{n+k} - E(X))$, *за* $k, j = 0, 1$.

Како су услови ове теореме задовољени за NBINAR(1) процес, тада $\left(\overline{X}_n, \hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)\right)^T$ има $\mathcal{AN}\left([\theta\mu, \theta\mu(1+\mu, \alpha\theta\mu(1+\mu))]^T, N^{-1}\boldsymbol{V}\right)$ расподелу. Како бисмо одредили асимптотску расподелу добијених оцена $\left(\hat{\alpha}^{yw}, \hat{\mu}^{yw}, \hat{\theta}^{yw}\right)^T$, најпре дефинишимо пресликавање $\boldsymbol{g}(x_1, x_2, x_3) = (x_3/x_2, x_2/x_1 - 1, x_1^2/(x_2 - x_1))^T$. Одавде важи да је $\left(\hat{\alpha}^{yw}, \hat{\mu}^{yw}, \hat{\theta}^{yw}\right)^T = \boldsymbol{g}\left(\overline{X}_N, \hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)\right)^T$. Наведимо сада веома важно тврђење.

Теорема 2.2.3 (Brockwell, Davis, 1987, Тврђење 6.4.3) *Нека је* $\boldsymbol{X}_n$ *са* $\mathcal{AN}\left(\boldsymbol{\mu}, c_N^2\Sigma\right)$ *расподелом, где је* Σ *симетрична ненегативно дефинитна матрица и* $c_N \to 0$*, када* $N \to \infty$*. Ако је* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) = (g_1(\boldsymbol{X}), \ldots, g_m(\boldsymbol{X}))$ *пресликавање из* $\mathbb{R}^k$ *у* $\mathbb{R}^m$*, такво да је свака* $g_i(\boldsymbol{X})$ *непрекидно диференцијабилна функција у околини* $\boldsymbol{\mu}$ *и ако је* $D\Sigma D^T$ *матрица са свим дијагоналним елементима различитим од нуле, где је* D *матрица* $[(\partial g_i/\partial g_j)(\boldsymbol{\mu})]_{m\times k}$*, тада је* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_N)$ *са* $\mathcal{AN}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}), c_N^2 D\Sigma D^T\right)$ *расподелом.*

У случају NBINAR(1) процеса, $\left(\overline{X}_N, \hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)\right)^T$ је вектор $\boldsymbol{X}_N$ ове теореме, $\boldsymbol{\mu}$ је дато са $(\theta\mu, \theta\mu(1+\mu), \alpha\theta\mu(1+\mu))^T$, c_N^2 је N^{-1}, матрица Σ је $\boldsymbol{V}$, док пресликавање $\boldsymbol{g}$ одговара нашем пресликавању $\boldsymbol{g}(x_1, x_2, x_3)$ дефинисаном изнад. Дакле, применом ове теореме добијамо да је $\boldsymbol{g}\left(\overline{X}_N, \hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)\right)^T = \left(\hat{\alpha}^{yw}, \hat{\mu}^{yw}, \hat{\theta}^{yw}\right)^T$ асимптотски нормално расподељено са "средином" $(\alpha, \mu, \theta)^T$ и "дисперзијом" $N^{-1}D\boldsymbol{V}D^T$, где је D матрица $[(\partial g_i/\partial g_j)(\alpha, \mu, \theta)]_{3\times 3}$. Строга постојаност YW-оцена следи из Теореме о ергодичности 2.1.1, односно из чињенице да $(\overline{X}_N, \hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)) \overset{\text{с.и.}}{\longrightarrow} (\mu_X, \gamma(0), \gamma(1))$, када $N \to \infty$.

Метод условних најмањих квадрата

Овде применом методе условних најмањих квадрата најпре оцењујемо параметре α, μ_X и $\sigma_X^2 = Var(X_n)$. При томе користимо двокорачни CLS метод, који је детаљније разматран у Karlsen, Tjøstheim (1988). У првом кораку оцењујемо параметре α и μ_X. То изводимо минимизирањем суме квадрата

$$Q_N(\alpha, \mu_X) = \sum_{n=2}^{N} (X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2 = \sum_{n=2}^{N} (X_n - \alpha X_{n-1} - (1-\alpha)\mu_X)^2.$$

Одговарајући систем једначина $\partial Q_N/\partial\alpha = 0$, $\partial Q_N/\partial\mu_X = 0$ се своди на

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{N} (X_n - \alpha X_{n-1} - \mu_X(1-\alpha)) = 0, \\ &\sum_{n=2}^{N} (X_n - \alpha X_{n-1} - \mu_X(1-\alpha)) X_{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Одавде, оцене параметара α и μ_X су

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{cls} &= \frac{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2}, \\ \hat{\mu}_X^{cls} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} X_n - \hat{\alpha}^{cls}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}^{cls})}. \end{aligned}$$

У другом кораку оцењујемо параметар σ_X^2. Уводимо нову случајну променљиву

$$V_n = (X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2 = (X_n - \alpha X_{n-1} - (1-\alpha)\mu_X)^2.$$

Даље је $E(V_n|X_{n-1}) = E\left((X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2|X_{n-1}\right) = Var(X_n|X_{n-1}) = \alpha(1+\alpha)(X_{n-1}-\mu_X) + (1-\alpha^2)\sigma_X^2$. Сада, CLS-оцену параметра σ_X^2 израчунавамо минимизирањем суме квадрата

$$\begin{aligned} S_N(\sigma_X^2) &= \sum_{n=2}^{N} (V_n - E(V_n|X_{n-1}))^2 \\ &= \sum_{n=2}^{N} \left(V_n - \alpha(1+\alpha)(X_{n-1}-\mu_X) - (1-\alpha^2)\sigma_X^2\right)^2. \end{aligned}$$

Тако је одговарајућа статистика за оцену дисперзионог параметра

$$\hat{\sigma}_X^{2\,cls} = \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} \left(\left(X_n - \hat{\alpha}^{cls} X_{n-1} - (1-\hat{\alpha}^{cls})\hat{\mu}_X^{cls}\right)^2 - \hat{\alpha}^{cls}(1+\hat{\alpha}^{cls})(X_{n-1} - \hat{\mu}_X^{cls})\right)}{\left(1-(\hat{\alpha}^{cls})^2\right)(N-1)}.$$

Применом чињенице да су α^{cls} и μ_X^{cls} решења система (2.2.12), изведену оцену $\hat{\sigma}_X^{2\,cls}$ записујемо као

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_X^{2\,cls} &= \frac{1}{(N-1)\left(1-(\hat{\alpha}^{cls})^2\right)} \left(\sum_{n=2}^{N} X_n^2 - \hat{\alpha}^{cls} \sum_{n=2}^{N} X_n X_{n-1}\right) \\ &\quad - \frac{\hat{\alpha}^{cls}}{1-\hat{\alpha}^{cls}} \left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_{n-1} - \hat{\mu}_X^{cls}\right) - \frac{\hat{\mu}_X^{cls}}{(1+\hat{\alpha}^{cls})(N-1)} \sum_{n=2}^{N} X_n. \end{aligned}$$

Коначно, из већ познатих једнакости $\mu_X = \theta\mu$ и $\sigma_X^2 = \mu_X(1+\mu)$, следи да су тражене оцене параметара μ и θ, редом

$$\hat{\mu}^{cls} = \frac{\hat{\sigma}_X^{2\,cls}}{\hat{\mu}_X^{cls}} - 1, \quad \hat{\theta}^{cls} = \frac{\left(\hat{\mu}_X^{cls}\right)^2}{\hat{\sigma}_X^{2\,cls} - \hat{\mu}_X^{cls}}.$$

Како бисмо одредили асимптотску расподелу ових оцена, доказаћемо следећу теорему.

Теорема 2.2.4 *Оцене непознатих параметара NBINAR*(1) *модела добијене* Yule-Walker*-овом и методом условних најмањих квадрата задовољавају следеће услове:*

(i) $\hat{\mu}_X^{cls} - \hat{\mu}_X^{yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, *са вероватноћом* 1,

(ii) $\hat{\alpha}^{cls} - \hat{\alpha}^{yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, *са вероватноћом* 1,

(iii) $\hat{\sigma}_X^{2\,cls} - \hat{\sigma}_X^{2\,yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, *са вероватноћом* 1,

(iv) $\hat{\mu}^{cls} - \hat{\mu}^{yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, *са вероватноћом* 1,

(v) $\hat{\theta}^{cls} - \hat{\theta}^{yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, *са вероватноћом* 1.

Доказ. (i) Приметимо најпре да се YW-оцене параметара μ_X и σ_X^2 изводе као добро позната узорачка средина $\overline{X}_N$ и узорачка дисперзија $\hat{\gamma}_0$, уведена раније. Такође, CLS-оцена параметра μ_X може се записати у облику

$$\hat{\mu}_X^{cls} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_N}{(1-\hat{\alpha}^{cls})(N-1)} - \frac{\hat{\alpha}^{cls} X_1}{(1-\hat{\alpha}^{cls})(N-1)}\,.$$

Из овога следи да је

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\left(\hat{\mu}_X^{cls}-\hat{\mu}_X^{yw}\right)=\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\left(\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=2}^{N-1}X_n\frac{X_N-\hat{\alpha}^{cls}X_1}{(1-\hat{\alpha}^{cls})(N-1)}-\frac{X_1+X_N}{N}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\sqrt{N-1}}\sum_{n=2}^{N-1}X_n=0.$$

Према томе, $\sqrt{N-1}\left(\hat{\mu}_X^{cls} - \hat{\mu}_X^{yw}\right) = o(1)$, односно $\hat{\mu}_X^{cls} - \hat{\mu}_X^{yw} = o\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$.
(ii) Након једноставних трансформација и множења бројиоца и имениоца статистике $\hat{\alpha}^{yw}$ разломком $N/(N-1)$, добија се

$$\hat{\alpha}^{cls} = \frac{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \frac{1}{(N-1)^2}\sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \left(\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2} \equiv \frac{S_1 - S_2}{S_3 - S_4},$$

$$\hat{\alpha}^{yw} = \frac{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \left(\overline{X}_N \frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N}(X_{n-1}+X_n) - \overline{X}_N^2\right)}{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n^2 - \left(2\overline{X}_N \frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n - \frac{N}{N-1}\overline{X}_N^2\right)} \equiv \frac{S_1' - S_2'}{S_3' - S_4'},$$

где су

$$S_1 = S_1' = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_n X_{n-1}, \quad S_2 = -\frac{1}{(N-1)^2}\sum_{n=2}^{N} X_n \sum_{n=2}^{N} X_{n-1},$$

$$S_3 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_{n-1}^2, \quad S_4 = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2,$$

$$S_2' = \overline{X}_N \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}(X_{n-1}+X_n) - \overline{X}_N^2,$$

$$S_3' = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} X_n^2, \quad S_4' = 2\overline{X}_N \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} X_n - \frac{N}{N-1}\overline{X}_N^2.$$

Како је $S_1 = S_1'$, то је $\lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_1 = \lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_1'$. Са друге стране добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_2 &= \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_N}{N-1}\right) \\
&\times \left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_1}{N-1}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sqrt{N-1}}{(N-1)^2}\left(\sum_{n=2}^{N-1} X_n\right)^2
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
S_2' &= \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_1+X_N}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_1}{N-1}\right) \\
&+ \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_1+X_N}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_N}{N-1}\right)
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{N-1}{N}\right)^2\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1} X_n + \frac{X_1+X_N}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_n + \frac{X_1+X_N}{N-1}\right),$$

одакле даље следи да је

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_2' = \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\frac{1}{(N-1)^2}\left(\sum_{n=2}^{N-1}X_n\right)^2.$$

Тако смо добили да је $\lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_2 = \lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}S_2'$. Аналогним поступком изведене су и следеће две једнакости: $\lim\limits_{N\to\infty}S_3 = \lim\limits_{N\to\infty}S_3'$ и $\lim\limits_{N\to\infty}S_4 = \lim\limits_{N\to\infty}S_4'$. Стога, имамо да је

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\alpha}^{cls} &= \lim_{N\to\infty}\frac{\sqrt{N-1}S_1 - \sqrt{N-1}S_2}{S_3 - S_4}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{\sqrt{N-1}S_1' - \sqrt{N-1}S_2'}{S_3' - S_4'} = \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\alpha}^{yw}.\end{aligned}$$

(iii) Приступом, аналогним случајевима (i) и (ii), директно се изводи да је $\lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\sigma}_X^{2\,cls} = \lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\sigma}_X^{2\,yw}$, односно $\hat{\sigma}_X^{2\,cls} - \hat{\sigma}_X^{2\,yw} = o(N^{-\frac{1}{2}})$.
Оцене параметара μ и θ добијене методом момената и методом условних најмањих квадрата су дефинисане помоћу истих непрекидних функција одговарајућих оцена параметара μ_X и σ_X^2. Према томе, услови (iv) и (v) су директна последица услова (i) и (iii). $\square$

Из ове теореме следи да је

$$\sqrt{N-1}(\hat{\alpha}^{cls} - \alpha) - \sqrt{N-1}(\hat{\alpha}^{yw} - \alpha) = o_p(1),$$

$$\sqrt{N-1}(\hat{\mu}^{cls} - \mu) - \sqrt{N-1}(\hat{\mu}_{yw} - \mu) = o_p(1),$$

$$\sqrt{N-1}(\hat{\theta}_{cls} - \theta) - \sqrt{N-1}(\hat{\theta}_{yw} - \theta) = o_p(1).$$

С обзиром да су ово довољни услови Теореме 1.2.4, оцене добијене методом условних најмањих квадрата имају исту асимптотску расподелу као и Yule-Walker-ове оцене. Са друге стране строга постојаност ових оцена следи из Теореме 2.2.4 и строге постојаности оцена изведених методом момената.

Нумерички резултати

У овом делу упоређујемо претходно представљене непараметарске методе за оцењивање, примењујући одговарајуће статистике над симулираним подацима. При томе, упоређујемо их такође и са оценама добијеним методом максималне веродостојности (maximum likelihood, ML). Ове оцене непознатих параметара α, μ и θ, NBINAR(1) модела добијене су максимизирањем логаритмоване функције веродостојности:

$$\begin{aligned}\ln L(x_1,\ldots,x_n;\alpha,\mu,\theta) &= \ln\frac{\Gamma(\theta+x_1)}{\Gamma(\theta)x_1!}+x_1\ln\mu-(x_1+\theta)\ln(1+\mu)+\\ &+\sum_{n=2}^{N}\ln P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1}),\end{aligned}$$

где је $P(X_n=x_n|X_{n-1}=0)=P(\varepsilon_n=x_n)$, односно

$$P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1})=\sum_{k=0}^{x_n}\binom{x_{n-1}+x_n-k+1}{x_{n-1}-1}\frac{\alpha^{x_n-k}}{(1+\alpha)^{x_n+x_{n-1}-k}}\,P(\varepsilon_n=k),$$

где је $x_{n-1}\geq 1$. Овај проблем се своди на решавање система $\partial\ln L/\partial\alpha=0$, $\partial\ln L/\partial\mu=0$ и $\partial\ln L/\partial\theta=0$. Због комплексности добијених једначина ово се може извести различитим стандардним нумеричким процедурама, уграђеним у већини софтверских пакета за статистичку анализу података.

Како бисмо применили статистике за оцењивање, симулирано је 100 реализованих узорака NBINAR(1) процеса, обима 10000. Симулације су изведене за следеће стварне вредности параметара: (*a*) $\mu=0,5$, $\theta=0,5$, $\alpha=0,1$; (*b*) $\mu=1$, $\theta=1$, $\alpha=0,2$ и (*c*) $\mu=5$, $\theta=2$, $\alpha=0,6$. У сваком од случаја, за подузорке обима 100, 500, 1000, 5000 и 10000, израчунате су узорачке средине и стандардне грешке добијених оцена. Резултати су презентовани у табели 2.1. Као што се може видети, све оцене, осим у случају параметра θ за обим узорка 100, су конвергентне са веома малим стандардним грешкама. Такође, све стандардне грешке опадају са порастом обима узорка. У првом случају, за најмање вредности параметара, најмање стандардне грешке при оцењивању параметра μ се јављају применом оцена добијених методом условних најмањих квадрата.

Са друге стране, у случају узорака обима 100, при оцењивању параметара α и θ, најмање стандардне грешке су постигнуте применом Yule-Walker-ових и оцена добијених методом условних најмањих квадрата, респективно, док се за узорке обима 500 и више, најмање грешке остварују методом максималне веродостојности. У случају (b), за најмање подузорке, најбољи резултати у оцењивању параметара μ, θ и α су остварени применом YW, CLS і ML-оцена, респективно. Међутим, за све остале подузорке методом максималне веродостојности се ипак добијају најмање стандардне грешке. Коначно, у случају највећих стварних вредности параметара, за све обиме подузорака, најбоље су се показале оцене добијене методом максималне веродостојности. Са друге стране, CLS-оцене параметра μ су израчунате са највећим стандардним грешкама и то са десетак пута већим вредностима од грешака насталих применом осталих метода. Тако, није тешко закључити да су у већини разматраних случајева најмање стандардне грешке настале применом метода максималне веродостојности.

2.2.4 Примена на реалним подацима

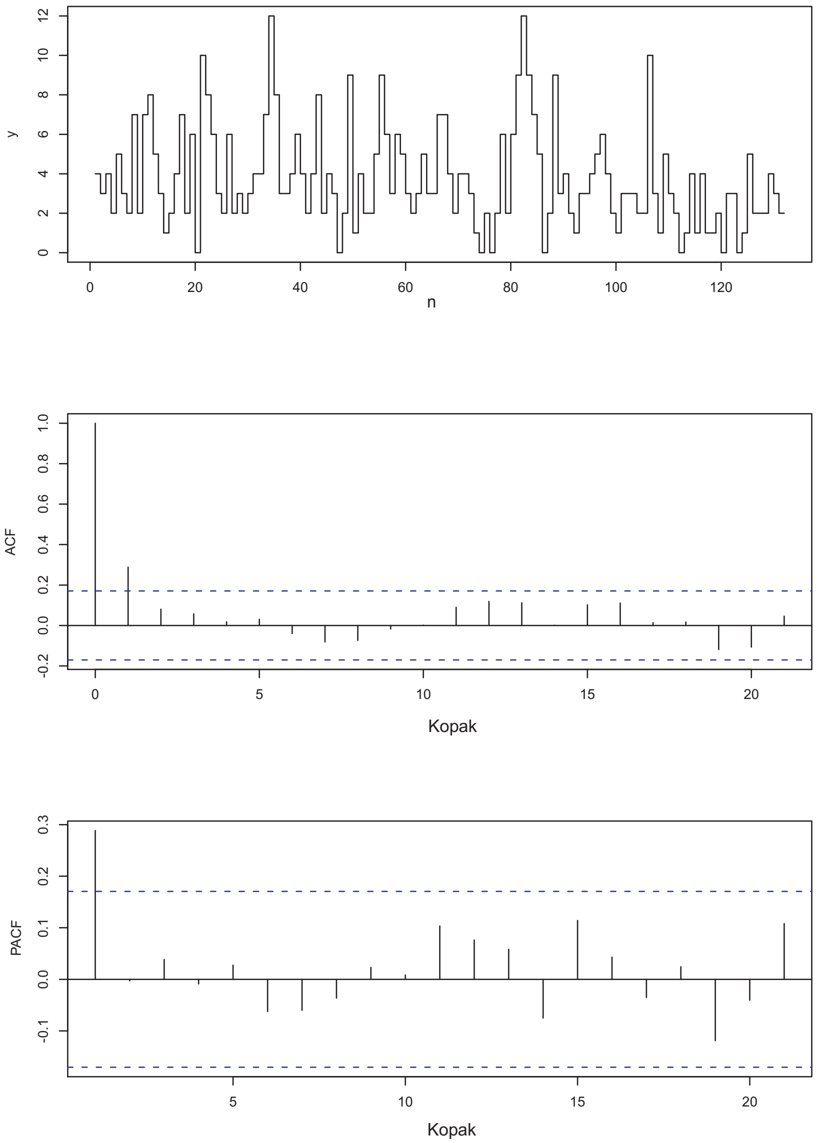
Овде се упознајемо са могућом применом уведеног модела у моделирању стварних ненегативних целобројних података, упоређујући га при томе са конкурентним и савременим INAR моделима. Разматрани низ је доступан на веб адреси http://www.forecasting-principles.com интернет сајта The Forecasting Principles, у секцији криминолошких података и представља месечно бројање извршених провала, које су се одиграле у Rochester-у, у реону под јурисдикцијом полицијске станице број 36055008702, а у периоду од јануара 1991. до децембра 2001. Дакле, разматрамо 132 ненегативне целобројне опсервације, чији графички приказ вредности, узорачке аутокорелационе (ACF) и парцијалне аутокорелационе (PACF) функције су дати на слици 2.1. Одавде се лако закључује да је ауторегресивни процес реда 1 погодан за анализу посматраног бројачког низа. Узорачка аутокорелација је $0,289$, док су узорачка средина и дисперзија редом $3,7424$ и $6,5744$, тако да је присутна овердисперзија. Над овако окарактерисаним подацима NBINAR(1) модел упоређујемо са следећим моделима:

Табела 2.1: Средине и стандардне грешке оцена за неке стварне вредности параметара μ, θ и α.

Обим	$\hat{\mu}^{yw}$	$\hat{\theta}^{yw}$	$\hat{\alpha}^{yw}$	$\hat{\mu}^{yw}$	$\hat{\theta}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{ml}$	$\hat{\theta}^{ml}$	$\hat{\alpha}^{ml}$
a) Стварне вредности $\mu = 0,5$, $\theta = 0,5$ и $\alpha = 0,1$									
100	0,45286	0,68789	0,06464	0,47318	1,51737	0,06559	0,50848	6,31784	0,11010
Ст. гр.	0,03529	0,24694	0,00948	0,01358	0,45867	0,00959	0,03557	2,83889	0,03739
500	0,50061	0,58650	0,10728	0,50468	0,58083	0,10746	0,50344	0,55911	0,10996
Ст. гр.	0,01902	0,03355	0,00575	0,00725	0,03343	0,00576	0,01654	0,02611	0,00500
1000	0,50284	0,52444	0,10377	0,50490	0,52220	0,10389	0,49788	0,52313	0,10566
Ст. гр.	0,01192	0,01557	0,00432	0,00479	0,01559	0,00432	0,01102	0,01286	0,00380
5000	0,50335	0,50197	0,09961	0,50377	0,50152	0,09962	0,50248	0,50147	0,10001
Ст. гр.	0,00595	0,00565	0,00207	0,00242	0,00564	0,00207	0,00529	0,00498	0,00188
10000	0,50255	0,50107	0,10030	0,50276	0,50085	0,10031	0,50275	0,50047	0,10072
Ст. гр.	0,00380	0,00356	0,00140	0,00169	0,00355	0,00140	0,00351	0,00326	0,00128
b) Стварне вредности $\mu = 1$, $\theta = 1$ и $\alpha = 0,2$									
100	0,95186	1,26343	0,18448	0,99218	1,17382	0,18633	1,01532	1,17088	0,20134
Ст. гр.	0,03835	0,06106	0,01016	0,05906	0,05001	0,01030	0,03865	0,05789	0,00968
500	0,96823	1,07467	0,19912	0,97621	1,06398	0,19965	0,99819	1,03736	0,19953
Ст. гр.	0,01707	0,01838	0,00546	0,02677	0,01769	0,00546	0,01602	0,01616	0,00502
1000	0,99394	1,02557	0,20013	0,99798	1,02088	0,20032	1,00159	1,01713	0,20010
Ст. гр.	0,01197	0,01201	0,00404	0,01850	0,01181	0,00404	0,01185	0,01157	0,00354
5000	0,99837	1,00451	0,20040	0,99919	1,00357	0,20045	1,00293	0,99928	0,20036
Ст. гр.	0,00556	0,00547	0,00157	0,00853	0,00540	0,00157	0,00495	0,00494	0,00149
10000	0,99952	1,00219	0,19902	0,99993	1,00173	0,19904	1,00030	1,00071	0,19925
Ст. гр.	0,00451	0,00438	0,00121	0,00642	0,00435	0,00121	0,00368	0,00353	0,00107
c) Стварне вредности $\mu = 5$, $\theta = 2$ и $\alpha = 0,6$									
100	4,57732	2,32010	0,55746	4,81675	2,20098	0,56266	4,79172	2,19170	0,57072
Ст. гр.	0,13447	0,06084	0,00854	1,97728	0,05811	0,00845	0,12908	0,05244	0,00664
500	4,88593	2,07535	0,58771	4,93609	2,05467	0,58854	4,92855	2,04715	0,59198
Ст. гр.	0,06781	0,02793	0,00432	0,85439	0,02805	0,00432	0,05784	0,02332	0,00304
1000	4,98386	2,02284	0,59682	5,00898	2,01263	0,59730	4,99295	2,01403	0,59850
Ст. гр.	0,04997	0,02043	0,00276	0,59845	0,02034	0,00275	0,04154	0,01681	0,00198
5000	4,97752	2,01103	0,59854	4,98267	2,00891	0,59865	4,98910	2,00478	0,59886
Ст. гр.	0,02200	0,00937	0,00120	0,26830	0,00935	0,00120	0,01647	0,00694	0,00090
10000	4,98006	2,00925	0,59829	4,98257	2,00824	0,59834	4,98292	2,00780	0,59856
Ст. гр.	0,01448	0,00586	0,00084	0,19208	0,00586	0,00085	0,01194	0,00480	0,00065

- INAR(1) модел са Пуасоновом маргиналном расподелом (Al-Osh, Alzaid, 1987),
- INAR(1) модел са геометријском маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1988),
- Нови геометријски INAR(1) модел (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),
- INAR(1) модели I1, I2, I3 са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006, 2010),
- Итеративни INAR(1) модел са негативном маргиналном расподелом (Al-Osh, Aly, 1992),
- Негативни биноми INAR(1) модел са случајним коефицијентом (Weiß, 2008b),
- Квази-биномни INAR(1) модел са генерализованом Пуасоновом маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1993).

Иако Пуасонова маргинална расподела није одговарајућа, Пуасонов INAR(1) модел се разматра ради комплетности поређења. За сваки од модела набројаних изнад, оцењени су непознати параметри методом максималне веродостојности. При томе су одређене вредности којима меримо квалитет примењеног модела и то квадратни корен одступања опсервираних и прогнозираних вредности дате серије, RMS, као и Акаикеов информациони критеријум $AIC = -2\ln(maxL) + 2M$ и Бајесов информациони критеријум $BIC = -2\ln(maxL) + M\ln N$, где је $maxL$ максимална вредност функције веродостојности, M је број непознатих параметара, а N је обим узорка. Ови резултати су презентовани у табели 2.2, при чему мање вредности карактеристика модела значе боље перформансе. Према томе, као што се види најмање вредности су добијене у случају овде уведеног модела, односно NBINAR(1) модел је најприкладнији за дате податке од свих разматраних модела. Такође се може приметити да у случају NBINAR(1) модела, ML-оцена параметра α најмање одступа од узорачке аутокорелације првог реда.



Слика 2.1: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о броју провала.

Табела 2.2: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о извршеним провалама.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
PoINAR(1)	$\hat{\lambda} = 3,0053$			
	$\hat{\alpha} = 0,1964$	608,4666	614,2322	2,4659
GINAR(1)	$\hat{q} = 0,7447$			
	$\hat{\alpha} = 0,3921$	634,7491	640,5147	2,5174
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 3,2974$			
	$\hat{\alpha} = 0,5901$	622,9606	628,7263	2,5777
NBINAR(1)	$\hat{\mu} = 0,6829$			
	$\hat{\theta} = 5,4768$			
	$\hat{\alpha} = 0,2620$	590,3774	599,0258	2,4554
NBINAR(1) I1	$\hat{p} = 0,6058$			
	$\hat{\theta} = 5,7458$			
	$\hat{\alpha} = 0,2394$	591,0816	599,7300	2,4577
NBINAR(1) I2	$\hat{p} = 0,5908$			
	$\hat{\theta} = 5,3990$			
	$\hat{\alpha} = 0,2606$			
	$\hat{\gamma} = 0,3239$	592,3278	603,8590	2,4555
NBINAR(1) I3	$\hat{p} = 0,5928$			
	$\hat{\theta} = 5,4431$			
	$\hat{\alpha} = 0,2574$			
	$\hat{\delta} = 0,8859$	592,4228	603,9540	2,4557
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 5,4299$			
	$\hat{p} = 1,9562$			
	$\hat{\rho} = 0,2575$	590,4714	599,1198	2,4557
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 5,6671$			
	$\hat{p} = 0,6035$			
	$\hat{\rho} = 0,2416$	590,6264	599,2748	2,4574
GPQINAR(1)	$\hat{\lambda} = 2,2634$			
	$\hat{\theta} = 0,2142$			
	$\hat{\rho} = 0,2263$	591,0633	599,7117	2,5472

2.3 Померени геометријски INAR(1) модел

У многим ситуацијама из реалног живота постоје временске серије које не садрже нуле у току појединих временских интервала, или су чак стално позитивне. Такви примери се могу наћи у медицини, индустрији или праву и то су редом, дневно бројање пацијената у болницама, периодично бројање грешака у производњи и месечни број почињених кривичних дела у одређеној општини. У оваквим случајевима употреба позитивних дискретних расподела је логичнији избор од неких других стандардних ненегативних целобројних расподела. О овоме је било више речи у Bakouch, Ristić (2010), где је уведен позитиван Пуасонов INAR(1) процес, заснован на биномном тининг оператору. Са друге стране, у случају анализе позитивних целобројних процеса, који се односе на бројање случајних догађаја са особином самогенерисања, односно стварања 0, 1 или више других, нових догађаја, оправдано је користити тининг оператор заснован на геометријском бројачком низу.

У овом одељку, ослањајући се у значајној мери на Nastić (2010), представљамо два INAR модела, мотивисана самогенеришућим серијама природних бројева. Један од њих својом структуром одговара моделима претходно презентованим у овој глави и за њега важе сви резултати из претходна два одељка. Према томе, разматрајући први модел, овде ћемо представити само неке нове резултате, који се односе уопште на INAR(1) моделе са негативним биномним тинингом, па тако и на раније уведене NGINAR(1) и NBINAR(1) моделе. Међутим, други модел је мешавина иновационог процеса и INAR(1) модела, тако да ће извођењу и представљању његових особина у овом одељку бити посвећено више пажње.

2.3.1 Конструкција и основна својства процеса

У циљу што природнијег моделирања природних ауторегресивних процеса првог реда, уводимо два померена (shifted) геометријска ИНАР(1) модела заснована на геометријском бројачком низу. Нека је, као и раније оператор "$\alpha *$" дефинисан са $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i$, где је $\alpha \in (0,1)$ и $\{W_i\}$ је низ независних случајних промењивих са $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ расподелом, $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ је природан временски низ са помереном геометријском $SGeom(\mu/(1+\mu))$ расподелом, где је $P(X_n = j) = \frac{\mu^{j-1}}{(1+\mu)^j}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, $\mu > 0$.

Дефиниција 2.3.1 *Процес $\{X_n\}$ дефинисан са $X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n$, где је $\{\varepsilon_n\}$ низ независних једнако расподељених случајних промењивих, таквих да је $E(\varepsilon_n) = \mu_\varepsilon$ и $Var(\varepsilon_n) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, независних од W_i и X_{n-l}, за $l > 0$, зове се померени геометријски $INAR(1)$ процес типа* I, *односно* $SGINAR(1)$-I.

Дефиниција 2.3.2 *Процес $\{X_n\}$ дефинисан са*

$$X_n = \begin{cases} \eta_n, & \text{с.в. } \frac{1}{1+\mu} \\ \alpha * X_{n-1} + \eta_n, & \text{с.в. } \frac{\mu}{1+\mu} \end{cases},$$

где је $\{\eta_n\}$ низ независних једнако расподељених случајних промењивих, таквих да је $E(\eta_n) = \mu_\eta$ и $Var(\eta_n) = \sigma_\eta^2 < \infty$, независних од W_i и X_{n-l}, за $l > 0$, зове се померени геометријски $INAR(1)$ процес типа II, *односно* $SGINAR(1)$-II.

Сада ћемо ближе одредити својства иновационих процеса. Како бисмо окарактерисали низ $\{\varepsilon_n\}$, најпре изводимо његову функцију генератрисе вероватноће $\Phi_\varepsilon(s)$. На основу $\Phi_X(s) = \Phi_X(\Phi_W(s))\Phi_\varepsilon(s)$ и Дефиниције 2.3.1, важи да је

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}s + \frac{\mu - \alpha(1+\mu)}{\mu} \cdot \frac{s}{1+\mu-\mu s}.$$

Како је $\Phi_X(s) = \frac{s}{1+\mu-\mu s}$, то је

$$\varepsilon_n \overset{d}{=} \begin{cases} 1, & \text{с.в. } \frac{\alpha(1+\mu)}{\mu} \\ SGeom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & \text{с.в. } \frac{\mu-\alpha(1+\mu)}{\mu} \end{cases}. \tag{2.3.1}$$

Са друге стране, следећи дефиницију процеса SGINAR(1)-II, добијамо да је

$$\Phi_{\eta_n}(s) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}s + \frac{\mu-\alpha(1+\mu)}{\mu}\cdot\frac{s}{1+\mu-\mu s}\right).$$

Стога, на основу (2.3.1) и $\Phi_W(s) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha s}$, имамо да је

$$\eta_n \stackrel{d}{=} W_1 + \varepsilon_n. \tag{2.3.2}$$

У складу са Ristić, Bakouch, Nastić (2009), услов $0 < \alpha \leq \mu/(1+\mu)$ обезбеђује добру дефинисаност вероватноћа претходних мешавина. У случају $\alpha = \frac{\mu}{1+\mu}$, случајна променљива ε_n се у расподели дегенерише у 1. Такође расподела бројачког низа се своди на $Geom\left(\frac{\mu}{1+2\mu}\right)$. Одавде и из (2.3.2) следи да је $\eta_n \stackrel{d}{=} W_1 + 1$, тј. $\eta_n \stackrel{d}{=} SGeom\left(\frac{\mu}{1+2\mu}\right)$. Иако $\alpha * X$ може да има и 0 као своју вредност, из $\Phi_\varepsilon(0) = 0$ и $\Phi_\eta(0) = 0$ редом следи да је $\varepsilon_n \geq 1$ и $\eta_n \geq 1$, што обезбеђује строгу позитивност оба уведена SGINAR(1) процеса.

Из $\mu_X = E(X) = 1 + \mu$ и $\mu_\varepsilon = \Phi'_\varepsilon(1) = (1-\alpha)(1+\mu)$, следи добро позната INAR(1) једанкост, $\mu_X = (1-\alpha)\mu_\varepsilon$. Такође, на основу (2.3.2) имамо да је $\mu_\eta = \mu_\varepsilon + \alpha = 1 + \mu - \alpha\mu$, а одавде да из $\mu_\varepsilon \geq 1$ следи $\mu_\eta \geq 1 + \alpha$. Израчунавајући вредности других извода функција генератриса вероватноћа иновационих процеса за $s = 1$, добијамо њихове дисперзије, $\sigma^2_\varepsilon = (1+\mu)(\mu - \alpha - \alpha^2(1+\mu))$ и $\sigma^2_\eta = \mu(1 - \alpha + \mu - \alpha^2\mu - 2\alpha^2)$. Одавде је $\sigma^2_\eta = \sigma^2_\varepsilon + \alpha(1+\alpha)$, што се такође може добити и из (2.3.2). Како је $\alpha > 0$, то је $\sigma^2_\varepsilon < \sigma^2_\eta$.

Егзистенција процеса

Постојање решења у расподели једначине из Дефиниције 2.3.1, односно MA(∞) репрезентације SGINAR(1)-I процеса у расподели се може директно показати на основу одговарајућих резултата за NGINAR(1) процес, до којих су дошли Ristić, Bakouch, Nastić (2009). Међутим, овде изводимо решење модела у знатно јачем, средње квадратном смислу. Према томе, као и у првом одељку ове главе, на основу Ristić, Bakouch, Nastić (2009) имамо да је

$$\Phi^{(k)}_W(s) = \frac{1-\alpha^k-\alpha(1-\alpha^{k-1})s}{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s},$$

где је $\Phi_W^{(k)}(s) = \Phi_W(\Phi_W \dots (\Phi_W(s)) \dots)$, за k-пута примењену функцију $\Phi_W(\cdot)$. Такође, означимо $\alpha * (\alpha * \dots (\alpha * X) \dots)$ са $\alpha^{(k)} * X$, $k \geq 1$, где је оператор "$\alpha *$" примењен k пута. Затим, имамо да је

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha^{(k)} * X}(s) &= \Phi_X\left(\Phi_W^{(k)}(s)\right) = \frac{\Phi_W^{(k)}(s)}{1 + \mu - \mu\Phi_W^{(k)}(s)} \\
&= \frac{1 + \alpha(1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-2})(1 - s)}{1 + \alpha(1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1} + \mu\alpha^{k-1})(1 - s)}.
\end{aligned}$$

Претходни разломак је једнак

$$\frac{1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-2}}{1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1} + \mu\alpha^{k-1}} + A \cdot \frac{1}{1 + \alpha(1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1} + \mu\alpha^{k-1})(1 - s)},$$

где је $A = \frac{\alpha^{k-1}(1+\mu)}{1+\alpha+\dots+\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-1}}$. Тако, добијамо да је

$$\alpha^{(k)} * X \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{\frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}}{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k-1}} \\ Geom\left(\frac{\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha}+\mu\alpha^k}{1+\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha}+\mu\alpha^k}\right), & \text{с.в. } \frac{\alpha^{k-1}(1+\mu)}{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k-1}}. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Одавде, када $k \to \infty$, тада

$$\alpha^{(k)} * X \xrightarrow{d} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } 1 \\ Geom\,(\alpha), & \text{с.в. } 0 \end{cases} \overset{\text{с.в.}1}{=} 0. \tag{2.3.4}$$

Сада, рекурентном применом модела $X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n$, k пута, добијамо да је

$$X_n \stackrel{d}{=} \alpha^{(k)} * X_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{(i)} * \varepsilon_{n-i}\,, \tag{2.3.5}$$

где се "$\alpha^{(0)} *$" дефинише са $\alpha^{(0)} * X = X$. С обзиром да други момент случајне промењливе са $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ расподелом износи $\mu + 2\mu^2$, то се применом (2.3.3) и (2.3.5), други момент $E\left(X_n - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{(i)} * \varepsilon_{n-i}\right)^2$ рачуна на следећи начин:

$$E\left(\alpha^{(k)} * X_{n-k}\right)^2 = \frac{\alpha^{k-1}(1+\mu)}{\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k-1}} \left(\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha} + \mu\alpha^k + 2\left(\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{1-\alpha} + \mu\alpha^k\right)^2\right). \tag{2.3.6}$$

Десна страна претходне једнакости конвергира ка нули, када k тежи ка ∞, тако да је средње квадратно решење SGINAR(1)-I модела

$$X_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{(i)} * \varepsilon_{n-i}. \tag{2.3.7}$$

Даље показујемо егзистенцију процеса типа II. Његова, одговарајућа једначина из Дефиниције 2.3.2, може се записати као

$$X_n = \alpha_n * X_{n-1} + \eta_n, \tag{2.3.8}$$

где је $\{\alpha_n\}$ низ независних случајних променљивих, Бернулијеве расподеле са параметром $\mu/(1+\mu)$, независних од $\{X_n\}$ и иновационог процеса $\{\varepsilon_n\}$. Овакав приступ у дефинисању процеса су користили Bakouch и Ristić (2010). Међутим, због разлика насталих услед увођења општијег бројачког низа са геометријском расподелом, овде наводимо следеће извођење. Рекурентном применом (2.3.8) добијамо

$$X_n \overset{d}{=} \alpha_n * (\alpha_{n-1} * \ldots (\alpha_{n-k+1} * X_{n-k}) \ldots) + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_n * (\alpha_{n-1} * \ldots (\alpha_{n-i+1} * \eta_{n-i}) \ldots) + \eta_n. \tag{2.3.9}$$

Због овог гломазног и непрегледног записа, уводимо оператор $A_n^{(l)}(\cdot)$ дефинисан са

$$A_n^{(l)}(X) = \alpha_n * (\alpha_{n-1} * \ldots (\alpha_{n-l+1} * X) \ldots), \quad l > 0. \tag{2.3.10}$$

Такође, додефинишимо $A_n^{(0)}(X) = X$, тако да се (2.3.9) може записати као

$$X_n \overset{d}{=} A_n^{(k)}(X_{n-k}) + \sum_{i=0}^{k-1} A_n^{(i)}(\eta_{n-i}).$$

Како је

$$A_n^{(l)}(X) = \begin{cases} \alpha^{(l)} * X, & \text{с.в. } \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^l \\ 0, & \text{с.в. } 1 - \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^l, \end{cases}$$

то је

$$E\left(X_n - \sum_{i=0}^{k-1} A_n^{(i)}(\eta_{n-i})\right)^2 = E\left(A_n^{(k)}(X_{n-k})\right)^2 = \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k E\left(\alpha^{(k)} * X_{n-k}\right)^2$$

$$\leq E\left(\alpha^{(k)} * X_{n-k}\right)^2,$$

што на основу (2.3.6), конвергира ка 0, када k тежи ка бесконачности. Према томе,

$$X_n = \sum_{i=0}^{\infty} A_n^{(i)}(\eta_{n-i}) \tag{2.3.11}$$

представља средње квадратно решење SGINAR(1)-II модела.

Сада, покажимо строгу стационарност, ергодичност и јединственост ових SGINAR(1) решења. Строга стационарност се веома кратко може констатовати на примеру процеса типа II. На основу Дефиниције 2.3.2 и својства независности и једнаке расподељености низа $\{\eta_n\}$, условне расподеле случајних променљивих X_{i+1} за дато X_i и X_{n+i+1} за дато X_{n+i} су једнаке за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ и произвољне $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Одавде и из чињенице да се ради о процесу Маркова добијамо да су заједничке расподеле случајних вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+k})$ међусобно једнаке за свако $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

Док се ергодичност, у оба случаја процеса, изводи на исти начин као у доказу Теореме 2.1.1, јединственост ћемо показати на примеру процеса типа II. Ако је $\{X_n\}$ разматрани померени геометријски INAR(1) процес, онда претпоставимо да постоји још један процес типа II, $\{X'_n\}$ који представља друго решење једначине Дефиниције 2.3.2. Према томе је $E(X_n) = 1 + \mu = E(X'_n)$, одакле следи да је $E|X_n - X'_n| = 0$. Сада, применом Дефиниције 2.3.2 и својства (ix) Леме 2.1.3, добијамо да је

$$\begin{aligned}
E\left(X_n - X'_n\right)^2 &= \frac{\mu}{1+\mu} E\left(\alpha * X_{n-1} - \alpha * X'_{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{\mu}{1+\mu}\alpha(1+\alpha)E|X_{n-1} - X'_{n-1}| + \frac{\mu}{1+\mu}\alpha^2 E\left(X_{n-1} - X'_{n-1}\right)^2 \\
&< \alpha^2 E\left(X_{n-1} - X'_{n-1}\right)^2 < \alpha^{2m} E\left(X_{n-m} - X'_{n-m}\right)^2.
\end{aligned}$$

Одавде следи јединственост решења $\{X_n\}$. Претходним параграфима смо управо доказали следећу теорему.

Теорема 2.3.1 *SGINAR*(1) *модели уведени помоћу Дефиниција* 2.3.1 *и* 2.3.2, *имају јединствена, строго стационарна и ергодична решења, редом дата са* (2.3.7) *и* (2.3.11).

2.3.2 Аутокорелациона структура и неке особине модела

Овде разматрамо аутокорелациону структуру уведених процеса. Занемарујући разлику у маргиналној расподели између процеса NGINAR(1), разматраног у првом одељку ове главе и SGINAR(1)-I, а на основу њихове исте структуре закључујемо да ови процеси имају такође исту аутоковаријансну функцију. Тако је $\gamma(k) = \alpha^k\gamma(0)$, где је $\gamma(0) = \sigma_X^2 = \mu(1+\mu)$, одакле даље следи да је

$$\rho(k) = \alpha^k. \tag{2.3.12}$$

Међутим, у случају SGINAR(1)-II процеса, извођење је другачије. Наиме,

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= Cov(X_n, X_{n-k}) = \frac{\mu}{1+\mu}Cov(\alpha * X_{n-1}, X_{n-k}) \\ &= \frac{\alpha\mu}{1+\mu}Cov(X_{n-1}, X_{n-k}) = \cdots = \left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k\gamma(0),\end{aligned}$$

што је довољан услов за

$$\rho(k) = \left(\frac{\mu\alpha}{1+\mu}\right)^k. \tag{2.3.13}$$

Примедба 2.3.1 *За велике вредности параметра μ, фактор $\frac{\mu}{1+\mu}$ се приближава јединици, тако да су у овом случају вредности аутокорелација оба типа процеса приближно једнаке. Међутим, за мање вредности μ, односно када је μ блиско 0, тада се вредност $\frac{\mu}{1+\mu}$ такође приближава нули, па су онда аутокорелационе вредности $SGINAR(1)$-II процеса значајно мање него за процес првог типа. Ова информација може бити од помоћи када се на основу узорачког аутокорелограма треба одлучити у избору између ова два модела у применама на стварним подацима.*

Посматрајмо сада заједничке функције генератрисе вероватноће за оба типа процеса. У случају SGINAR(1)-II, важи следеће:

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2) &= E\left(s_1^{X_n} s_2^{X_{n-1}}\right)\\
&= \frac{\mu}{1+\mu} E\left(s_1^{\eta_n}\right) E\left(s_1^{\alpha * X_{n-1}} s_2^{X_{n-1}}\right) + \frac{1}{1+\mu} E\left(s_1^{\eta_n}\right) E\left(s_2^{X_{n-1}}\right)\\
&= \frac{1}{1+\mu} \Phi_\eta(s_1) \left(\Phi_X(s_2) + \mu \Phi_X\left(\Phi_W(s_1) s_2\right)\right)\\
&= \frac{s_1(1+\alpha+\alpha\mu-\alpha s_1-\alpha\mu s_1)}{(1+\alpha-\alpha s_1)(1+\mu-\mu s_1)(1+\mu)}\\
&\times \left(\frac{s_2}{1+\mu-\mu s_2} + \frac{\frac{\mu s_2}{1+\alpha-\alpha s_1}}{1+\mu-\frac{\mu s_2}{1+\alpha-\alpha s_1}}\right)\\
&= \frac{s_1 s_2}{(1+\mu-\mu s_1)(1+\mu-\mu s_2)}\\
&\times \left(1 + \frac{\mu^2\alpha(1-s_1)(1-s_2)}{(1+\alpha-\alpha s_1)((1+\mu)(1+\alpha-\alpha s_1)-\mu s_2)}\right).
\end{aligned}$$

С обзиром да се исти приступ користи и у случају процеса типа I, без извођења наводимо да је његова функција генератрисе вероватноће

$$\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2) = \frac{s_1 s_2}{1+\mu-\mu s_1}\left(1 + \frac{\mu(s_2-1)}{(1+\mu)(1+\alpha-\alpha s_1)-\mu s_2}\right).$$

Из претходне две једнакости закључујемо да функције генератрисе вероватноће нису симетричне у односу на s_1 и s_2, за $0 < \alpha < \frac{\mu}{(1+\mu)}$, тако да ни одговарајући процеси нису временски реверзибилни. Међутим, у случају $\alpha = \frac{\mu}{1+\mu}$, заједничка функција генератрисе вероватноће процеса првог типа се своди на $\Phi_{X_n,X_{n-1}}(s_1,s_2) = \frac{s_1 s_2}{1+2\mu-\mu(s_1+s_2)}$, која је симетрична. Стога, за ову граничну вредност параметра α, SGINAR(1)-I је временски реверзибилан процес, односно заједничка расподела његових узастопних елемената X_{n-1} и X_n је једнака заједничкој расподели случајних променљивих X_n и X_{n-1}.

2.3.3 Условне статистичке величине

Најпре изводимо условно очекивање уведених процеса. Као и раније у неким случајевима, када је у питању процес првог типа, овде диретно користимо резултате о NGINAR(1) моделу, уведеном у Ristić, Bakouch, Nastić (2009). Тако је

$$E(X_{n+k}|X_n) = \alpha^k X_n + \mu_\varepsilon \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}, \tag{2.3.14}$$

одакле је $\lim\limits_{k\to\infty} E(X_{n+k}|X_n) = \mu_X = 1+\mu$. Са друге стране, у случају SGINAR(1)-II процеса, рекурентном применом регресионе формуле

$$E(X_{n+k}|X_n) = \frac{\alpha\mu}{1+\mu} E(X_{n+k-1}|X_n) + \mu_\eta\,,$$

k пута, добија се

$$E(X_{n+k}|X_n) = \left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k X_n + \mu_\eta \frac{1-\left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\alpha\mu}{1+\mu}}, \tag{2.3.15}$$

одакле следи да $\lim\limits_{k\to\infty} E(X_{n+k}|X_n) = \mu_X$. Примећујемо да за мале вредности параметра μ, односно за $\mu \sim 0$, условно очекивање за k корака унапред, процеса типа II конвергира брже ка μ_X него у случају SGINAR(1)-I процеса.

Такође, изводимо k-корачну условну дисперзију. Као и у случају регресије, користећи раније добијене резултате, за SGINAR(1) процес типа I имамо да је

$$\begin{aligned} Var(X_{n+k}|X_n) &= \frac{\alpha^k(1-\alpha^k)(1+\alpha)}{1-\alpha} X_n + \frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\sigma_\varepsilon^2 + \alpha(1+\alpha+2\mu_\varepsilon)\frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha} \\ &\times \left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} - \alpha^{k-1}\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right) + \mu_\varepsilon^2 \left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} - \left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right)^2\right), \end{aligned}$$

што конвергира ка σ_X^2, када k тежи ка ∞.

Како се извођење условне дисперзије SGINAR(1)-II процеса не ослања директно ни на један познати резултат, презентоваћемо га са нешто више детаља. Полазећи од

$$Var(X_{n+k}|X_n) = E\left(X_{n+k}^2|X_n\right) - (E(X_{n+k}|X_n))^2, \tag{2.3.16}$$

најпре израчунавамо следеће:

$$\begin{aligned} E\left(X_{n+k}^2|X_n\right) &= \frac{1}{1+\mu} E\left(\eta_{n+k}^2\right) + \frac{\mu}{1+\mu} E\left((\alpha * X_{n+k-1} + \eta_{n+k})^2|X_n\right) \\ &= \frac{\mu}{1+\mu}\left(\alpha^2 E(X_{n+k-1}^2|X_n) + \alpha(1+\alpha+2\mu_\eta)E(X_{n+k-1}|X_n)\right) \\ &+ E\left(\eta_{n+k}^2\right). \end{aligned}$$

Затим, рекурентним понављањем претходног извођења још $k-1$ пута, добијамо условни други момент као

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+k}^2|X_n\right) &= \left(\tfrac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k X_n^2 + (1+\alpha+2\mu_\eta)\left(\tfrac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k \tfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha} X_n \\
&+ \mu\alpha(1+\alpha+2\mu_\eta)\left(\frac{1-\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}} - \left(\tfrac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^{k-1}\tfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right) \\
&+ E\left(\eta_{n+k}^2\right)\frac{1-\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}} .
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Сада, замењујући (2.3.17) и (2.3.15) у (2.3.16) добија се

$$\begin{aligned}
Var(X_{n+k}|X_n) &= \left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k\left(1-\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k\right)X_n^2 + 2\mu_\eta\left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k \\
&\times \left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} - \frac{1-\left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\alpha\mu}{1+\mu}}\right)X_n + (1+\alpha)\left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}X_n \\
&+ \mu\alpha(1+\alpha+2\mu_\eta)\left(\frac{1-\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}} - \left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^{k-1}\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right) \\
&+ \mu_\eta^2\left(\frac{1-\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}} - \left(\frac{1-\left(\frac{\alpha\mu}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\alpha\mu}{1+\mu}}\right)^2\right) + \sigma_\eta^2\frac{1-\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k}{1-\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}}.
\end{aligned}$$

Ова условна дисперзија такође конвергира дисперзији временског низа.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} Var(X_{n+k}|X_n) &= \frac{1+\alpha(1+\alpha+2\mu_\eta)+\mu_\eta^2+\sigma_\eta^2}{\frac{1+\mu-\mu\alpha^2}{1+\mu}} - \frac{\mu_\eta^2}{\frac{(1+\mu-\alpha\mu)^2}{(1+\mu)^2}} \\
&= \frac{(1+\mu)(\mu+\mu^2-\alpha^2\mu^2)}{1+\mu-\mu\alpha^2} = \mu(1+\mu) = Var(X).
\end{aligned}$$

Примедба 2.3.2 *За разлику од типа* I, *условна дисперзија процеса типа* II *зависи од* X_n^2, *односно зависи квадратно од прошлости временског низа. Како је фактор ове зависности* $\left(\frac{\mu\alpha^2}{1+\mu}\right)^k\left(1-\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k\right)$, *овај квадратни утицај на условну дисперзију нестаје када параметар μ тежи ка граничним вредностима, тј. када је у близини нуле или бесконачности, док са друге стране може бити доста значајнији за неке коначне вредности μ, веће од 0.*

2.3.4 Оцењивање непознатих параметара

У овом делу представљамо методе за оцењивање непознатих параметара μ и α, SGINAR(1) модела. Такође ћемо дати и асимптотску карактеризацију добијених статистика, заснованих на случајном узорку $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

Оцењивање параметара SGINAR(1)-I модела

Овде се у неким аспектима ослањамо на NGINAR(1) модел, уведен у Ristić, Bakouch, Nastić (2009). Тако и поред одсечене маргиналне расподеле, као и појединих другачијих техника примењених у описивању добијених оцена, без детаљнијег извођења наводимо одговарајуће резултате. Најпре, оцењујемо параметре модела методом условних најмањих квадрата (CLS), где се оцене добијају минимизирањем суме квадрата

$$Q_N(\alpha, \mu) = \sum_{n=2}^{N} (X_n - \alpha X_{n-1} - (1-\alpha)(1+\mu))^2.$$

Статистике, изведене на овај начин су

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^I_{cls} &= \frac{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2}, \\
\hat{\mu}^I_{cls} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} X_n - \hat{\alpha}^I_{cls} \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}^I_{cls})} - 1.
\end{aligned}$$

Говорећи о асимптотским особинама ових статистика, примећујемо да су сви услови Теореме 1.2.2 испуњени, тако да $(\hat{\alpha}^I_{cls}, \hat{\mu}^I_{cls}) \xrightarrow{\text{с.в.1}}$

(α, μ), када N тежи ка ∞. Такође, може се применити и Теорема 1.2.3 на основу које, као у Ristić, Bakouch, Nastić (2009), следи да

$$N^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^I_{cls} - \alpha \\ \hat{\mu}^I_{cls} - \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)(\mu+\mu^2+\alpha+\alpha\mu-\alpha\mu^2)}{\mu(1+\mu)} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & \frac{\mu(1+\mu)(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{bmatrix} \right).$$

Из добијене коваријансне матрице асимптотске расподеле видимо колико износе граничне вредности одговарајућих дисперзија и коваријанси статистика којима оцењујемо непознате параметре. Међутим, уколико је корелираност у процесу веома мала, односно када $\alpha \to 0$, тада се једноставно добија да су коваријансе оцена параметара асимптотски близу нули, односно зависност између оцена такође опада са опадањем корелираности између елемената процеса. У истом случају дисперзија оцене параметра α је блиска јединици, док дисперзија оцене $\hat{\mu}^I_{cls}$ конвергира ка дисперзији маргиналне расподеле. Са друге стране, ако је корелираност значајна, односно када тежи горњој граници од $\frac{\mu}{1+\mu}$, онда дисперзије оцена параметара α и μ конвергирају ка вредностима $\frac{(1+2\mu)(2+2\mu+\mu)}{(1+\mu)^3}$ и $\mu(1+\mu)(1+2\mu)$, респективно. Истовремено су граничне коваријансе статистика добијених методом условних најмањих квадрата блиске вредности $\frac{\mu(1+2\mu)}{1+\mu}$.

Као што је добро познато, изједначавањем узорачких и теоријских момената, а полазећи од једнакости $\rho(0) = \alpha$ и $E(X) = \mu + 1$, добијају се Yule-Walker-ове оцене непознатих параметара. Тражене статистике су

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^I_{yw} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N}(X_n - \overline{X}_N)(X_{n-1} - \overline{X}_N)}{\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n - \overline{X}_N)^2}, \\ \hat{\mu}^I_{yw} &= \overline{X}_N - 1, \end{aligned}$$

где је $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$. Као у доказу Теореме 2.2.4 следећи услови се директно проверавају:

(*i*) $N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}^I_{cls} - \hat{\alpha}^I_{yw}\right) = o(1)$, с.в.1, (*ii*) $N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mu}^{I}_{cls}-\hat{\mu}^{I}_{yw}\right)=o(1),$ с.в.1.

Одавде следи строга постојаност Yule-Walker-ових оцена. Такође, ово су довољни услови за Теорему 1.2.4, по којој $\hat{\alpha}^{I}_{yw}$ и $\hat{\mu}^{I}_{yw}$ имају асимптотски нормалну расподелу са истом "средином" и "дисперзијом" као одговарајуће оцене добијене методом условних најмањих квадрата.

Оцењивање параметара SGINAR(1)-II модела

Слично као у случају модела типа I, овде полазећи од једнакости $\rho(0)=\frac{\alpha\mu}{1+\mu}$, методом момената добијамо следеће оцене непознатих параметара:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{II}_{yw} &= \frac{\overline{X}_N\sum\limits_{n=2}^{N}(X_n-\overline{X}_N)(X_{n-1}-\overline{X}_N)}{(\overline{X}_N-1)\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n-\overline{X}_N)^2},\\ \hat{\mu}^{II}_{yw} &= \overline{X}_N-1.\end{aligned}$$

Из особине ергодичности процеса следи строга постојаност ових оцена. Даље, на основу средње квадратне репрезентације (2.3.11) и чињенице да је $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_{n-i+1}\leq\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha^i<\infty$, може се применити Теорема 2.2.2, одакле добијамо да је

$$\begin{bmatrix}\overline{X}_N\\ \hat{\gamma}(0)\\ \hat{\gamma}(1)\end{bmatrix}:\mathcal{AN}\left(\begin{bmatrix}\mu_X\\ \gamma(0)\\ \gamma(1)\end{bmatrix},N^{-1}\boldsymbol{V}\right),$$

где је $[\mu_X,\gamma(0),\gamma(1)]^T=[1+\mu,\mu(1+\mu),\mu^2\alpha]^T$ и $\boldsymbol{V}$ је одговарајућа матрица дефинисана као у Теореми 2.2.2. Затим уводимо непрекидно пресликавање $f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-1,\frac{x_1x_3}{x_2(x_1-1)}\right)=(f_1,f_2)$, тако да можемо дефинисати Yule-Walker-ове оцене параметара као $\left(\hat{\mu}^{II}_{yw},\hat{\alpha}^{II}_{yw}\right)$ $=f\left(\overline{X}_N,\hat{\gamma}(0),\hat{\gamma}(1)\right)$. Очигледно је да су сви услови Теореме 2.2.3 испуњени, на основу које имамо да је

$$\begin{bmatrix}\hat{\mu}^{II}_{yw}\\ \hat{\alpha}^{II}_{yw}\end{bmatrix}:\ \mathcal{AN}\left(\begin{bmatrix}\mu\\ \alpha\end{bmatrix},N^{-1}D\boldsymbol{V}D^T\right),$$

где је D матрица формата 2×3, изграђена од елемената $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(1+\mu, \mu(1+\mu), \mu^2\alpha)$, за $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$.

Када су у питању оцене изведене методом условних најмањих квадрата, тада је згодније увести следећу репараметризацију:

$$\begin{array}{rcl} \mu_\eta & = & 1+\mu-\alpha\mu, \\ \rho & = & \frac{\alpha\mu}{1+\mu}. \end{array} \tag{2.3.18}$$

Стога, минимизирајући одговарајућу функцију

$$Q_N(\mu_\eta, \rho) = \sum_{n=2}^{N} (X_n - \rho X_{n-1} - \mu_\eta)^2 \,,$$

добијамо следеће статистике:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\rho}^{II}_{cls} & = & \dfrac{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X^2_{n-1} - \left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2}, \\ \hat{\mu}^{II}_{\eta cls} & = & \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_n - \hat{\rho}^{II}_{cls}\dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}. \end{array}$$

Према томе, на основу (2.3.18), CLS-оцене параметара SGINAR(1)-II модела се изводе као

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mu}^{II}_{cls} & = & \dfrac{\hat{\mu}^{II}_{\eta cls} + \hat{\rho}^{II}_{cls} - 1}{1 - \hat{\rho}^{II}_{cls}}, \\ \hat{\alpha}^{II}_{cls} & = & \dfrac{\hat{\mu}^{II}_{\eta cls}\hat{\rho}^{II}_{cls}}{\hat{\mu}^{II}_{\eta cls} + \hat{\rho}^{II}_{cls} - 1}. \end{array}$$

Да бисмо дали асимптотску карактеризацију ових оцена, следећа два услова су од пресудне важности:

(*i*) $(N-1)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}^{II}_{cls} - \hat{\alpha}^{II}_{yw}\right) = o(1)$, с.в.1,

(*ii*) $(N-1)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mu}^{II}_{cls} - \hat{\mu}^{II}_{yw}\right) = o(1)$, с.в.1 .

Даље доказујемо (ii) услов, док се први изводи аналогно.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\mu}_{cls}^{II} &= \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\frac{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N}X_n-\hat{\rho}_{cls}^{II}\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N}X_{n-1}+\hat{\rho}_{cls}^{II}-1}{1-\hat{\rho}_{cls}^{II}}\\
&= \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\frac{\left(1-\hat{\rho}_{cls}^{II}\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N-1}X_n-1\right)}{1-\hat{\rho}_{cls}^{II}}\\
&+ \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\frac{\frac{1}{N-1}\left(X_N-\hat{\rho}_{cls}^{II}X_1\right)}{1-\hat{\rho}_{cls}^{II}}\\
&= \lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N-1}X_n-1\right)=\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\hat{\mu}_{yw}^{II},
\end{aligned}$$

где сабирак у трећем реду једнакости тежи 0, када $N\to\infty$. Како су YW-оцене строго постојане, то на основу претходних услова важи иста особина и за параметарске оцене добијене методом условних најмањих квадрата. Такође, као и код процеса првог типа и овде CLS-оцене имају исту асимптотски нормалну расподелу као и оцене изведене методом момената.

Нумерички резултати

Овде представљамо резултате примене претходно уведених процедура за оцењивање непознатих параметара на симулираним природним временским низовима. У случају оба типа SGINAR(1) модела, симулирано је 100 узорака од по 10000 позитивних реализација за сваку од следећих вредности параметара: (a) $\mu=1,\alpha=0,1$; (b) $\mu=2,\alpha=0,2$; (c) $\mu=6,\alpha=0,6$. У сваком од претходних случаја, разматрано је по пет подузорака различитих обима, 100, 500, 1000, 5000 и 10000. Затим су параметри оба типа модела оцењени методама момената, условних најмањих квадрата и условне максималне веродостојности. Узорачке средине и стандардне грешке добијених оцена параметара модела SGINAR(1)-I и SGINAR(1)-II су презентоване редом у табелама 2.3 и 2.4.

Као што се може приметити, са порастом обима узорака, све оцене конвергирају ка стварним вредностима параметара, док њихове стандардне грешке опадају ка 0. При томе, ове стандардне грешке равномерно опадају у случају непараметарских оцена, док у случају CML-оцена опадају знатно брже. Према томе, код узорака мањих обима ове грешке су веће код оцена условне максималне веродостојности него код YW и CLS оцена, док се у случају узорака обима 10000 њихове најмање вредности опажају баш у случају параметарских CML-оцена.

2.3.5 Примена на реалним подацима

У овом делу говоримо о могућој примени уведених померених модела на стварним подацима, упоређујући их при томе са различитим и такође применљивим INAR моделима. Анализиран временски низ је узет из секције о криминолошким подацима са интернет сајта Forecasting Principles (http://www.forecastingprinciples.com). Он представља месечно бројање пријављених превара у 12.-тој полицијској станици у Питсбургу у периоду од јануара 1990. до децембра 2001. Низ се састоји од 144 опсервације, а одговарајућа узорачка средина, дисперзија и аутокорелација редом износе $1,65$, $3,05341$ и $0,258$. Како ови подаци садрже и нуле, у њиховом моделирању користимо приступ Bakouch-а и Ristić-а (2010). Наиме, да бисмо могли да применимо наше моделе, најпре транслирамо податке за један корак у десно, односно све елементе серије увећавамо за 1, што резултира узорачком средином од $2,65$. Графички приказ оригиналног временског низа и његове узорачке аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције су дати на слици 2.2. С обизром да су INAR(1) модели очигледно одоварајући за дате податке, овде примењујемо следеће:

- Нулом одсечен (Zero truncated) Пуасонов INAR(1) модел (Bakouch, Ristić, 2010),

- Пуасонов INAR(1) модел (Al-Osh, Alzaid, 1987),

- Квази-биномни INAR(1) модел са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1993),

- Геометријски INAR(1) модел (Alzaid, Al-Osh, 1988),

- Нови геометријски INAR(1) модел (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009), Табела 2.3: Средине и стандардне грешке оцена за неке стварне вредности параметара SGINAR(1)-I модела.

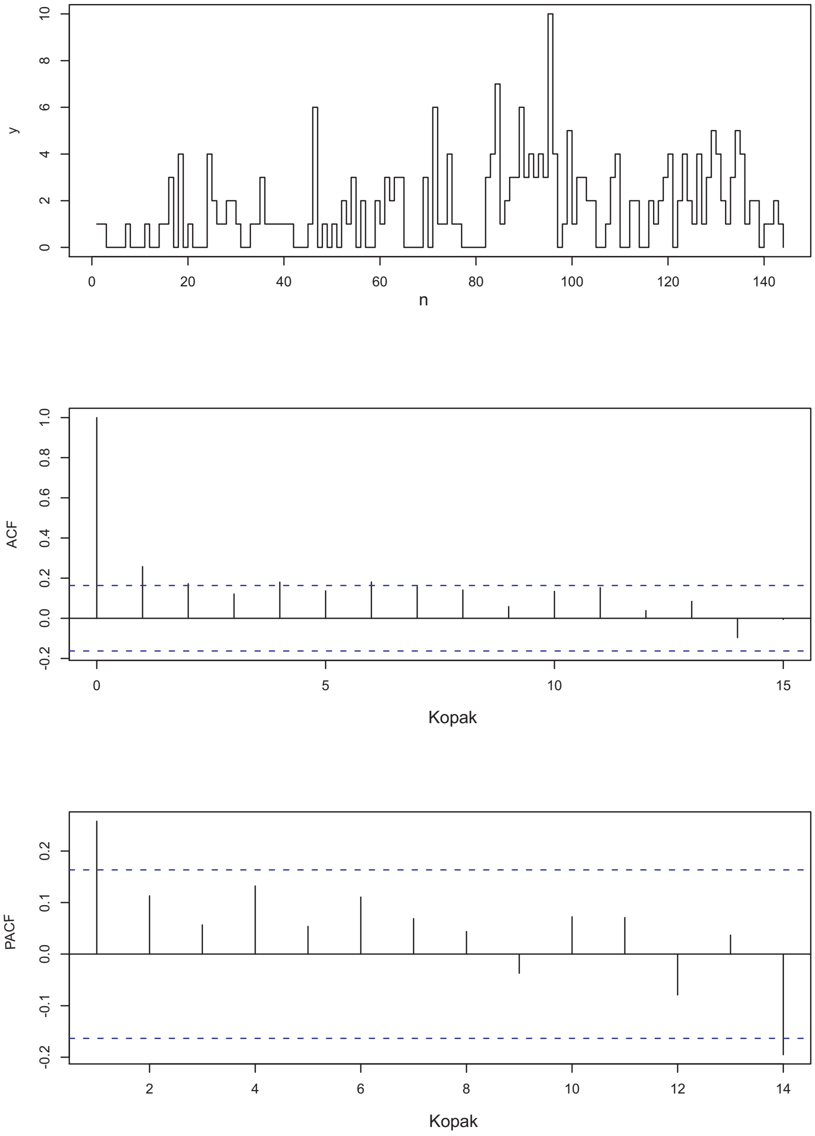
Обим	$\hat{\mu}^I_{yw}$	$\hat{\alpha}^I_{yw}$	$\hat{\mu}^I_{cls}$	$\hat{\alpha}^I_{cls}$	$\hat{\mu}^I_{ml}$	$\hat{\alpha}^I_{ml}$
a) Стварне вредности $\mu = 1$, и $\alpha = 0,1$						
100	0,989500	0,072141	0,834804	0,072873	1,010779	0,059165
Ст. гр.	0,015883	0,010810	0,025485	0,010892	0,001427	0,014042
500	1,004980	0,098013	0,893011	0,098157	1,006834	0,114513
Ст. гр.	0,006448	0,005093	0,012441	0,005097	0,000367	0,001995
1000	1,006610	0,095902	0,991802	0,095998	1,007966	0,098338
Ст. гр.	0,005006	0,003505	0,008920	0,003509	0,000286	0,000028
5000	0,999714	0,099291	0,973712	0,099318	1,007315	0,098283
Ст. гр.	0,002293	0,001534	0,003666	0,001533	0,000074	0,000005
10000	0,999876	0,099764	0,989224	0,099772	1,007022	0,098262
Ст. гр.	0,001628	0,001017	0,002409	0,001017	0,000055	0,000004
b) Стварне вредности $\mu = 2$, и $\alpha = 0,2$						
100	1,977600	0,181138	1,764896	0,183364	2,001523	0,325010
Ст. гр.	0,025714	0,010369	0,040442	0,010437	0,002583	0,068585
500	1,993460	0,198400	2,141552	0,198820	2,007245	0,171314
Ст. гр.	0,013216	0,004996	0,025856	0,005003	0,000627	0,005288
1000	2,004450	0,197783	2,115728	0,197923	2,002554	0,323301
Ст. гр.	0,009421	0,003480	0,015770	0,003482	0,000294	0,000909
5000	1,998994	0,198922	1,956041	0,198947	2,007518	0,196179
Ст. гр.	0,004042	0,001349	0,006369	0,001349	0,000257	0,000011
10000	2,001063	0,199850	1,941161	0,199878	2,007930	0,196195
Ст. гр.	0,003136	0,000966	0,004300	0,000967	0,000213	0,000009
c) Стварне вредности $\mu = 6$, и $\alpha = 0,6$						
100	6,032900	0,561016	5,379978	0,566631	5,989774	0,486438
Ст. гр.	0,124551	0,009452	0,174424	0,009614	0,006597	0,074065
500	6,002200	0,591086	5,881604	0,591912	5,999078	0,560061
Ст. гр.	0,065099	0,004215	0,087143	0,004194	0,000900	0,011433
1000	6,001630	0,592774	6,205556	0,593455	5,997877	0,565178
Ст. гр.	0,038823	0,003090	0,060782	0,003108	0,000243	0,002295
5000	5,987264	0,599509	5,967042	0,599607	5,997959	0,551479
Ст. гр.	0,017403	0,001381	0,027006	0,001378	0,000131	0,001492
10000	5,988466	0,600110	6,078331	0,600165	5,996592	0,592924
Ст. гр.	0,012560	0,000974	0,019818	0,000974	0,000066	0,000468

Табела 2.4: Средине и стандардне грешке оцена за неке стварне вредности параметара SGINAR(1)-II модела.

Обим	$\hat{\mu}^I_{yw}$	$\hat{\alpha}^I_{yw}$	$\hat{\mu}^I_{cls}$	$\hat{\alpha}^I_{cls}$	$\hat{\mu}^I_{ml}$	$\hat{\alpha}^I_{ml}$
a) Стварне вредности $\mu = 1$, и $\alpha = 0,1$						
100	1,013300	0,064657	1,014455	0,064037	1,004722	0,142119
Ст. гр.	0,014916	0,020407	0,014990	0,020693	0,001057	0,011341
500	1,010400	0,095705	1,010683	0,095879	1,004429	0,149869
Ст. гр.	0,006300	0,009660	0,006318	0,009675	0,001006	0,010354
1000	1,005760	0,093543	1,005875	0,093588	1,004786	0,145355
Ст. гр.	0,004536	0,006293	0,004541	0,006296	0,000869	0,010148
5000	0,998804	0,096694	0,998829	0,096712	1,007148	0,114421
Ст. гр.	0,002108	0,002749	0,002109	0,002749	0,000677	0,009287
10000	0,998461	0,097661	0,998474	0,097672	1,007570	0,108544
Ст. гр.	0,001532	0,002062	0,001532	0,002062	0,000559	0,006434
b) Стварне вредности $\mu = 2$, и $\alpha = 0,2$						
100	2,033200	0,200796	2,034421	0,203246	2,002000	0,134142
Ст. гр.	0,027641	0,016420	0,028087	0,016495	0,000870	0,032478
500	2,002100	0,207622	2,002415	0,208224	2,002847	0,121748
Ст. гр.	0,011726	0,007335	0,011778	0,007396	0,000841	0,030912
1000	2,002070	0,203232	2,002100	0,203403	2,002106	0,143446
Ст. гр.	0,008916	0,005376	0,008937	0,005376	0,000688	0,025515
5000	2,002296	0,202041	2,002315	0,202069	2,001230	0,178974
Ст. гр.	0,003977	0,002303	0,003987	0,002302	0,000341	0,023608
10000	1,998443	0,201815	1,998450	0,201836	2,000763	0,207495
Ст. гр.	0,002578	0,001587	0,002584	0,001586	0,000022	0,000001
c) Стварне вредности $\mu = 6$, и $\alpha = 0,6$						
100	5,810800	0,554812	5,818154	0,559992	6,000139	0,635533
Ст. гр.	0,099548	0,012919	0,101878	0,013056	0,000522	0,101552
500	5,955980	0,590252	5,956193	0,591393	6,003697	0,319208
Ст. гр.	0,046519	0,006053	0,046182	0,006065	0,000243	0,006209
1000	5,897230	0,589649	5,898432	0,590616	6,001853	0,497882
Ст. гр.	0,031320	0,004459	0,031160	0,004469	0,000143	0,001440
5000	5,987542	0,597052	5,987633	0,597171	6,002295	0,543813
Ст. гр.	0,017597	0,001939	0,017586	0,001940	0,000087	0,000434
10000	5,983856	0,598282	5,983763	0,598318	6,001538	0,593453
Ст. гр.	0,011385	0,001336	0,011389	0,001337	0,000035	0,000007

- I1,I2 и I3 INAR(1) модели са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006, 2010),
- Итеративни INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Al-Osh, Aly, 1992),
- Негативни биномни INAR(1) модел са случајним коефицијентом (Weiß, 2008b).

Иако је овердисперзија евидентна, INAR модели са Пуасоновом маргиналном расподелом су разматрани ради комплетности поређења. Код свих примењених модела добијене су оцене параметара методом максималне веродостојности, при чему су оцене условних најмањих квадрата употребљене као иницијалне вредности. У циљу поређења израчунати су информациони критеријуми, AIC и BIC, као и квадратни корен суме квадрата одступања између опсервираних и прогнозираних вредности, RMS. Ови резултати су презентовани у табелама 2.5 и 2.6, које се односе редом на померене и оригиналне податке и при томе мање вредности одговарају бољим моделима. Оба типа SGINAR(1) модела су примењена само на транслираним серијама, при чему су директно упоређени са моделима наведеним горе. Међутим, резултати примене SGINAR(1) модела на помереним подацима се могу упоређивати и са резултатима примене свих осталих модела на оригиналним подацима. Тако се може видети у наведеним табелама да су AIC, BIC и RMS вредности, добијене за оба типа SGINAR(1) модела, мање него код осталих модела. Такође, интересантно је да су ове вредности мање и од AIC, BIC и RMS вредности, израчунатих приликом примене свих осталих модела на оригиналним подацима. Према томе, закључујемо да су SGINAR(1) модели најбољи избор међу свим посматраним моделима у анализи датих криминолошких података. На крају, међусобно упоређујући типове SGINAR(1) модела, видимо на основу AIC и BIC вредности, да модел типа II има нешто боље перформансе.



Слика 2.2: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о броју превара.

Табела 2.5: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о преварама.

	Шифтовани подаци			
Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
ZTPINAR(1)	$\hat{\lambda} = 2,3963$			
	$\hat{\alpha} = 0,2541$	508,3574	514,297	1,6879
PoINAR(1)	$\hat{\lambda} = 1,9716$			
	$\hat{\alpha} = 0,2553$	530,0571	535,9967	1,6871
GPQINAR(1)	$\hat{\lambda} = 1,7395$			
	$\hat{\theta} = 0,0623$			
	$\hat{\rho} = 0,3043$	530,6280	539,5374	1,7781
SGINAR(1)-I	$\hat{\mu} = 1,6544$			
	$\hat{\alpha} = 0,2537$	444,0838	450,0234	1,6871
SGINAR(1)-II	$\hat{\mu} = 1,6599$			
	$\hat{\alpha} = 0,4234$	433,9609	439,9006	1,6871
GINAR(1)	$\hat{q} = 0,6603$			
	$\hat{\alpha} = 0,5021$	575,9017	581,8413	1,7745
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 2,8734$			
	$\hat{\alpha} = 0,8443$	566,2495	572,1891	1,9713
NBINAR(1) I1	$\hat{p} = 0,8858$			
	$\hat{\theta} = 20,5162$			
	$\hat{\alpha} = 0,2926$	530,835	539,7445	1,6881
NBINAR(1) I2	$\hat{p} = 0,9488$			
	$\theta = 50,5322$			
	$\hat{\alpha} = 0,6223$			
	$\hat{\gamma} = 0,9386$	532,334	544,2133	1,8019
NBINAR(1) I3	$\hat{p} = 0,9718$			
	$\hat{\theta} = 91,6440$			
	$\hat{\alpha} = 0,4210$			
	$\hat{\delta} = 21,5516$	531,2447	543,1239	1,7104
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 33,3868$			
	$\hat{p} = 17,4263$			
	$\hat{\rho} = 0,2759$	531,0597	539,9692	1,6873
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 18,039$			
	$\hat{p} = 0,8717$			
	$\hat{\rho} = 0,3042$	530,7816	539,6910	1,6889

Табела 2.6: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о преварама.

	Оригинални подаци			
Модел	MLE	AIC	BIC	RMS
PoINAR(1)	$\hat{\lambda} = 1,3135$			
	$\hat{\alpha} = 0,2033$	521,8007	527,7403	1,6899
GPQINAR(1)	$\hat{\lambda} = 0,8740$			
	$\hat{\theta} = 0,2676$			
	$\hat{\rho} = 0,2941$	495,2622	504,1716	1,7192
GINAR(1)	$\hat{q} = 0,6097$			
	$\hat{\alpha} = 0,1959$	502,7285	508,6681	1,6924
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 1,5676$			
	$\hat{\alpha} = 0,3324$	499,5526	505,4922	1,6928
NBINAR(1) I1	$\hat{p} = 0,5569$			
	$\hat{\theta} = 2,0747$			
	$\hat{\alpha} = 0,2133$	497,2449	506,1543	1,6890
NBINAR(1) I2	$\hat{p} = 0,5174$			
	$\hat{\theta} = 1,7655$			
	$\hat{\alpha} = 0,3232$			
	$\hat{\gamma} = 0,5284$	496,9513	508,8305	1,6907
NBINAR(1) I3	$\hat{p} = 0,5296$			
	$\hat{\theta} = 1,8994$			
	$\hat{\alpha} = 0,5556$			
	$\hat{\delta} = 23,4697$	496,0793	507,9585	1,7643
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 1,7726$			
	$\hat{p} = 1,5671$			
	$\hat{\rho} = 0,3126$	494,9902	503,8996	1,6896
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 1,8529$			
	$\hat{p} = 0,5251$			
	$\hat{\rho} = 0,2908$	494,8537	503,7631	1,6880

Глава 3

Уопштења INAR модела са геометријским бројачким низом

С обзиром на релативну исцрпљеност анализе INAR(1) модела са негативним биномним тинингом, дате у претходном делу дисертације, у овој глави настојимо да уведемо неке основне генерализације. По угледу на добро познате ненегативне целобројне ауторегресивне моделе са биномним тинингом овде ћемо посматрати уопштења у погледу реда и димензионалности модела. На овај начин се такође задовољава и потреба целовитости у проучавању бројачких процеса. Наиме, у првом одељку се разматрају одговарајући процеси вишег реда. На овај начин се много успешније и природније описују временски низови са израженијом зависношћу између удаљенијих елемената. Са друге стране, бројање више од једне врсте случајних догађаја, односно праћење вишедимензионих ненегативних целобројних обележја, омогућено је увођењем процеса у другом одељку ове главе, где се како због мање комплексности примењеног математичког апарата, тако и због најчешће примене у пракси задржавамо на случају дводимензионих случајних промењљивих. О овоме се може сазнати и у Ristić, Nastić, Jayakumar, Bakouch, (2011).

3.1 Комбиновани геометријски INAR(p) модел

У циљу моделирања корелираности вишег реда, која се веома често среће код података из стварног живота, овде уводимо ненегативне целобројне ауторегресивне моделе вишег реда засноване на геометријском бројачком низу. При томе се ослањамо на неке познате чињенице о INAR(p) процесима, али како бисмо превазишли проблеме анализе који настају услед веома комплексне структуре тих процеса уведених у Alzaid, Al-Osh (1990) и Du, Li (1991), користићемо алтернативни приступ Zhu-а и Joe-а (2006), који су комбиновали EAR(p) модел Lawrence-а и Lewis-а (1980) и класични INAR(1) модел. Овај нови приступ је касније уопштио и детаљније разрадио Weiß (2008c, 2009), под називом комбиновани INAR(p) модел. Важност овог модела лежи у његовој способности да, за разлику од поменутих стандардних INAR(p) модела, могу да моделирају ненегативни целобројни ауторегресивни процес са произвољном дискретном самодекомпозабилном расподелом. Weiß (2008c) је увео Пуасонов комбиновани INAR(p) (PoCINAR(p)) модел заснован на биномном тинингу. Како се једнакост узорачке средине и дисперзије веома ретко среће код стварних података, овде уводимо комбиновани ненегативни целобројни ауторегресивни модел реда p са геометријском маргиналном расподелом, а заснован на негативном биномном тининг оператору. Након конструкције и карактеризације овог модела, представићемо и процедуре за оцењивање непознатих параметара, као и њихове асимптотске особине расподеле. На крају овог одељка размотрићемо могућу примену овог модела на стварним подацима, при томе га упоређујући са референтним INAR моделима вишег реда.

3.1.1 Конструкција и основна својства процеса

Овде уводимо комбиновани INAR(p) процес са геометријском маргиналном расподелом (CGINAR(p)), заснован на негативном биномном тининг оператору "$*_n$", дефинисаном са

$$\alpha *_n X = \sum_{j=1}^{X} W_j^{(n)},$$

где је $\left\{W_j^{(n)}\right\}$ низ независних геометријски расподељених случајних промењљивих, независних од X, са параметром $\alpha/(1+\alpha)$, односно са законом расподеле $P\left(W_j^{(n)} = x\right) = \alpha^x/(1+\alpha)^{x+1}$, $x = 0, 1, \ldots$ Приметимо да је пребројавање помоћу случајних промењљивих бројачког низа $\left\{W_j^{(n)}\right\}$ обављено у тренутку n, тако да временски индекс у дну тининг оператора "$*_n$" значи да је "тининг" примењен у тренутку n. Иначе, својства оператора "$*_n$" су иста као у случају неиндексираног негативног биномног тининга посматраног до сада у дисертацији. Сада уводимо комбиновани INAR(p) модел генерисан геометријским бројачким низом.

Дефиниција 3.1.1 *Временски низ* $\{X_n\}$ *дефинисан са*

$$X_n = \begin{cases} \alpha *_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_1, \\ \alpha *_n X_{n-2} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_2, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha *_n X_{n-p} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_p, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

где је, $0 \leq \phi_1, \ldots, \phi_p \leq 1$, $\phi_1 + \cdots + \phi_p = 1$ *и* $\alpha \in (0,1)$, *називамо комбиновани ненегативни целобројни ауторегресивни модел реда* p, (CINAR(p)) *заснован на негативном биномном тинингу ако важе следећи услови:*

(i) $\{\varepsilon_n\}$ *је низ независних једнако расподељених случајних промењљивих,*

(ii) ε_n *су независни од свих* X_m *и* $\alpha *_{m+j} X_m$ *за* $m < n$ *и* $j = 1, 2, \ldots, p$,

(iii) бројачки низови тининг оператора у тренутку n *су независни једни од других,*

(iv) бројачки низови тининг оператора примењених над X_n *и случајне промењљиве* X_{n-1}, X_{n-2}, $\ldots$ *су међусобно независни,*

(v) *условне вероватноће* $P(\alpha *_{n+1} X_n = i_1, \ldots, \alpha *_{n+p} X_n = i_p | X_n = x, H_{n-1})$ *и* $P(\alpha *_{n+1} X_n = i_1, \ldots, \alpha *_{n+p} X_n = i_p | X_n = x)$ *су једнаке, где са* H_{n-1} *означавамо прошлост процеса свих случајних променљивих* X_m *и* $\alpha *_{m+j} X_m$ *за* $m < n$ *и* $j = 1, 2, \ldots, p$,

(vi) *бројачки низови тиниг оператора* $\alpha *_{n+1} X_n, \ldots, \alpha *_{n+p} X_n$, *за дато* X_n, *су независни.*

Ако претпоставимо да временски низ $\{X_n\}$ има $Geom(\mu/(1+\mu))$ маргиналну расподелу и да је $0 \leq \alpha \leq \mu/(1+\mu)$, онда добијамо комбиновани геометријски INAR(p) модел, (CGINAR(p)). Из основних својстава функције генератрисе вероватноће и претходне дефиниције, добија се

$$\begin{aligned}
\Phi_X(s) &= E\left(s^{\varepsilon_n}\right)\left(\phi_1 E\left(s^{\alpha *_n X_{n-1}}\right) + \phi_2 E\left(s^{\alpha *_n X_{n-2}}\right) + \ldots + \phi_p E\left(s^{\alpha *_n X_{n-p}}\right)\right) \\
&= \Phi_\varepsilon(s)\left(\phi_1 \Phi_X(\Phi_W(s)) + \phi_2 \Phi_X(\Phi_W(s)) + \cdots + \phi_p \Phi_X(\Phi_W(s))\right) \\
&= \Phi_X(\Phi_W(s))\Phi_\varepsilon(s).
\end{aligned}$$

Одавде на исти начин као за NGINAR(1) процес из првог одељка друге главе, следи да је случајна променљива ε_n, мешавина две геометријски расподељене случајне променљиве, односно

$$\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), \text{ с.в. } 1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}, \\ Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \text{ с.в. } \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}. \end{cases}$$

Примедба 3.1.1 *Ако је* $\alpha = 0$, *онда је* $X_n = \varepsilon_n$, *за* $n \geq 1$, *и CGINAR*(p) *процес* $\{X_n\}$ *је низ независних случајних променљивих са* $Geom(\mu/(1+\mu))$ *расподелом.*

Примедба 3.1.2 *Ако је* $p = 1$, *тада се процес* $\{X_n\}$ *уведен Дефиницијом* 3.1.1 *своди на NGINAR*(1) *процес, представљен у првом одељку претходне главе.*

У истом одељку, даље представљамо главна својства уведеног модела укључујући и условне статистичке величине процеса. Полазимо најпре од аутокорелационе структуре. Наиме, на основу (3.1.1) важи да је

$$Cov(X_n, X_{n-1}) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i Cov(\alpha *_n X_{n-i}, X_{n-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{p} \phi_i Cov(X_{n-i}, X_{n-1}),$$

односно

$$\gamma(1) = \alpha(\phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p-1)).$$

Аналогно претходном извођењу добија се да је

$$\gamma(p) = \alpha(\phi_1\gamma(p-1) + \phi_2\gamma(p-2) + \cdots + \phi_p\gamma(0)), \tag{3.1.2}$$

одакле је

$$\rho(p) = \alpha(\phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \cdots + \phi_p\rho(0)). \tag{3.1.3}$$

Дакле у општем случају за произвољно $k \in \{1, 2, \dots\}$ је

$$\rho(k) = \alpha \sum_{j=1}^{p} \phi_j \rho(|k-j|). \tag{3.1.4}$$

Полазећи од претходне формуле за $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ и чињенице да је $\rho(l) \leq 1$ за свако $l \geq 0$, директним рачуном се добија да је $\rho(k) \leq \alpha$ за $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Такође, на исти начин је $\rho(k) \leq \alpha^2$ за $k \in \{p+1, p+2, \dots, 2p\}$. Коначно, понављајући овај поступак n пута, следи да је $\rho(k) \leq \alpha^n$ за $k \in \{(n-1)p+1, (n-1)p+2, \dots, np\}$, одакле је $\rho(np) \leq \alpha^n$, односно $\rho(n)$ опада експоненцијално ка нули када n тежи ка бесконачности.

Из Дефиниције 3.1.1 очигледно је да је CGINAR(p) процес Маркова p-тог реда. Према томе, да би смо добили заједничку расподелу вероватноће узастопних елемената процеса, довољно је извести вероватноће прелаза, које се такође из Дефиниције 3.1.1 директно добијају:

$$P(X_n = x_n | H_{n-1}) = \sum_{j \notin I} \phi_j P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-j}} W_i + \varepsilon_n = x_n \middle| H_{n-1}\right) + \sum_{j \in I} \phi_j P\left(\varepsilon_n = x_n\right),$$

где је $I = \{j | x_{n-j} = 0, j = 1, \dots, p\}$, док се одговарајуће вероватноће израчунавају као

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-j}} W_i + \varepsilon_n = x_n \middle| H_{n-1}\right) &= \sum_{k=0}^{x_n} \binom{x_{n-j}+k-1}{x_{n-j}-1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^k \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{x_{n-j}} \times \\ &\times \left(\left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right) \frac{\mu^{x_n-k}}{(1+\mu)^{x_n-k+1}} + \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha} \cdot \frac{\alpha^{x_n-k}}{(1+\alpha)^{x_n-k+1}}\right). \end{aligned}$$

Строга стационарност и ергодичност процеса се изводе на потпуно исти начин као што је дато у претходној глави у случају NGINAR(1) процеса. Са друге стране на основу Дефиниције 3.1.1, особина негативног биномног тининга и својстава условног математичког очекивања, условна функција генератрисе вероватноће је

$$E\left(s^{X_{n+1}}|H_n\right)=\phi_\varepsilon(s)\sum_{i=1}^{p}\phi_i E\left(s^{\alpha * X_{n-i+1}}|H_n\right)=\phi_\varepsilon(s)\sum_{i=1}^{p}\phi_i\phi_W^{X_{n-i+1}}(s).$$

Одавде на основу (2.1.5), добијамо да је

$$E\left(s^{X_{n+1}}|H_n\right)=\frac{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}{(1+\mu-\mu s)(1+\alpha-\alpha s)}\sum_{i=1}^{p}\phi_i\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)^{X_{n-i+1}}.$$

Израчунавањем првог и другог извода ове функције у 1, након елементарних трансформација добијени су условно математичко очекивање и условна дисперзија CGINAR(p) процеса, који се могу записати редом са

$$E(X_{n+1}|H_n)=\alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i X_{n-i+1}+(1-\alpha)\mu$$

и

$$Var\left(X_{n+1}|H_n\right)=Var(\varepsilon_n)+\alpha\sum_{i=1}^{p}\left(\phi_i X_{n-i+1}\left(1+\alpha+\alpha X_{n-i+1}-\alpha\sum_{j=1}^{p}\phi_i X_{n-j+1}\right)\right).$$

3.1.2 Оцењивање непознатих параметара

У овом делу се бавимо проблемом оцењивања непознатих параметара α, $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_p$ и μ CGINAR(p) модела заснованог на геометријском бројачком низу. Применићемо неколико метода, као што су Yule-Walker-ов, метод условних најмањих квадрата и метод максималне веродостојности. Све добијене статистике биће засноване на реализацији $(X_1,X_2,\dots,X_N)$ CGINAR(p) процеса.

Метод условних најмањих квадрата

Као што је добро познато, оцене ове врсте се добијају као статистике којима минимизирамо следећу суму квадрата:

$$Q_N(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=p+1}^{N}\left(X_n - \theta_1 X_{n-1} - \cdots - \theta_p X_{n-p} - \left(1 - \sum_{i=1}^{p}\theta_i\right)\mu\right)^2,$$

где су $\theta_i = \alpha\phi_i$, за $i \in \{1,\ldots,p\}$ и $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p, \mu)$. Решавајући одговарајући систем линеарних једначина, добијен изједначавањем са нулом одговарајућих парцијалних извода од $Q_N(\boldsymbol{\theta})$, добија се да су $\mu = \frac{1}{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{p}\theta_i\right)}\left(\overline{X}^{(0)} - \sum\limits_{i=1}^{p}\theta_i\overline{X}^{(i)}\right)$, где је $\overline{X}^{(j)} = \frac{1}{N-p}\sum\limits_{n=p+1}^{N}X_{n-j}$ за $j = 0, 1, \ldots, p$. Затим, замењујући μ уз помоћ претходног резултата, одговарајући систем се своди на

$$\sum_{j=1}^{p}\theta_j\hat{\gamma}^*(|l-j|) = \hat{\gamma}^*(l), \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

где је $\hat{\gamma}^*(|l-j|) = \frac{1}{N-p}\sum\limits_{n=p+1}^{N}X_{n-l}X_{n-j} - \overline{X}^{(l)}\overline{X}^{(j)}$. Увођењем $\hat{\rho}^*(k) = \frac{\hat{\gamma}^*(k)}{\hat{\gamma}^*(0)}$, ово се може записати као

$$\sum_{j=1}^{p}\theta_j\hat{\rho}^*(|l-j|) = \hat{\rho}^*(l), \quad l = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.1.5}$$

Решавањем претходног система, оцене параметара θ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ и μ могу се записати у облику

$$\hat{\theta}_j^{cls} = \frac{D_j^*}{D^*}, \; j = 1, 2, \ldots, p$$

и

$$\hat{\mu}^{cls} = \frac{1}{\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{p}\frac{D_{i*}}{D^*}\right)}\left(\frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N}X_n - \sum_{j=1}^{p}\frac{D_j^*}{D^*}\cdot\frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N}X_{n-j}\right),$$

где су D^* и D_i^*, $i = 1, 2, \ldots, p$, добро познате одговарајуће детерминанте Крамерове методе за решавање система (3.1.5). С обзиром на $\sum\limits_{i=1}^{p}\theta_i = \alpha$ и $\phi_i = \frac{\theta_i}{\alpha}$, применом горњих резултата, оцене параметара μ, α и ϕ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ су респективно,

$$\hat{\mu}^{cls} = \frac{D^*}{(N-p)\left(D^* - \sum\limits_{i=1}^{p} D_i^*\right)}\left(\sum_{n=p+1}^{N} X_n - \frac{1}{D^*}\sum_{j=1}^{p} D_j^* \sum_{n=p+1}^{N} X_{n-j}\right),$$

$$\hat{\alpha}^{cls} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} D_i^*}{D^*} \quad \text{и} \quad \hat{\phi}_j^{cls} = \frac{D_j^*}{\sum\limits_{i=1}^{p} D_i^*},\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

Како бисмо описали својства оцена условних најмањих квадрата $\left(\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\phi}_1^{cls}, \hat{\phi}_2^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$, користићемо оцене $\left(\hat{\theta}_1^{cls}, \hat{\theta}_2^{cls}, \ldots, \hat{\theta}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$ као основу у даљој анализи, јер су оне много прикладније од претходних за примену релевантних резултата Tjøstheim-а (1986). Није тешко показати да статистике $\left(\hat{\theta}_1^{cls}, \hat{\theta}_2^{cls}, \ldots, \hat{\theta}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$ испуњавају све услове Теореме 1.2.2. Наиме услови C1 и C3 се тривијално проверавају, док ћемо услов C2 нешто детаљније објаснити. Овај услов се своди на доказивање да из $Var\left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_i X_{n-i}\right) = 0$ следи да је $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$, за произвољне реалне бројеве a_i, $i = 1, 2, \ldots, p$. Ово је иначе директна последица регуларности аутоковаријансне матрице $\mathbf{\Gamma}$ случајног вектора $(X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-p})$. Регуларност поменуте матрице се директно може потврдити применом следеће теореме, чији су услови испуњени.

Теорема 3.1.1 (Brockwell, Davis, 1987, Тврђење 5.1.1) *Ако је* $\gamma(0) > 0$ *и* $\gamma(h) \to 0$, *када* $h \to \infty$, *тада је коваријансна матрица* $\mathbf{\Gamma}_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\ldots,n}$ *случајног вектора* $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *регуларна за свако* n.

На овај начин смо проверили строгу постојаност датих статистика. Затим дефинишимо пресликавања $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ и $g_2^{(j)}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \frac{x_j}{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i}$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Како су ове функције непрекидне и важи да је $\alpha = g_1(\theta_1, \ldots, \theta_p, \mu)$ и $\phi_j = g_2^{(j)}(\theta_1, \ldots, \theta_p, \mu)$ $j =$

$1, 2, \ldots, p$, тада су $\hat{\alpha}^{cls}$ и $\hat{\phi}_j^{cls}$, $j = 1, 2, \ldots, p$ такође строго постојане оцене.

Говорећи о асимптотској нормалности CLS-оцена, приметимо да оцене $\hat{\theta}_i^{cls}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ и $\hat{\mu}^{cls}$ задовољавају све услове Теореме 1.2.3. Наиме, услови Теореме 1.2.2 су већ испуњени, а није тешко показати да су сви елементи одговарајуће матрице $\boldsymbol{R}$, из Теореме 1.2.3, коначни. Тако, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^{cls} = \left(\hat{\theta}_1^{cls}, \ldots, \hat{\theta}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$ има асимптотски нормалну расподелу са "средином" $\boldsymbol{\theta}$ и "дисперзијом" $N^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}$, где је N обим узорка, а $\mathbf{U}$ је матрица дефинисана као у Теореми 1.2.3, за коју је $\mathbf{U}^{-1}$ добро дефинисано, пошто је

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{p} \theta_i\right)^2 \end{array}\right].$$

Затим, дефинишући функцију $g_3(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = x_{p+1}$, а онда и пресликавање $\mathbf{g}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \left(g_1, g_2^{(1)}, \ldots, g_2^{(p)}, g_3\right)$, имамо да је $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^{cls}\right) = \left(\hat{\alpha}^{cls},\ \hat{\phi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$. Како се Теорема 2.2.3 директно може применити, то је оцена $\left(\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\phi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$ асимптотски нормално расподељена са "средином" $(\alpha, \phi_1, \ldots, \phi_p, \mu)$ и "дисперзијом" $N^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}^T$, где је $\mathbf{D}$ матрица $[\partial \mathbf{g}/\partial x_j(\boldsymbol{\theta})]_{(p+2)\times(p+1)}$.

Метод момената

Овде одређујемо особине оцена непознатих параметара добијених методом момената. Полазећи од $\rho(k) = \alpha \sum\limits_{j=1}^{p} \phi_j \rho(|k-j|)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $E(X) = \mu$, нове параметризације $\theta_j = \alpha\phi_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, као и чињенице да је $\sum\limits_{j=1}^{p} \theta_j = \alpha$, Yule-Walker-ове оцене параметара μ, α и $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ су редом,

$$\hat{\mu}^{yw} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_n, \quad \hat{\alpha}^{yw} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} D_i}{D}, \quad \hat{\phi}_j^{yw} = \frac{D_j}{\sum\limits_{i=1}^{p} D_i},\ j = 1, 2, \ldots, p,$$

где су $D_{1,}D_{2,}\dots,D_p$ и D одговарајуће детерминанте Крамеровог правила примењеног за решавање линеарног система једначина, дефинисаног релацијама о аутокорелационој функцији процеса. Сада, одредимо карактер постојаности и асимптотску расподелу ових статистика, показујући њихову еквивалентност са оценама условних најмањих квадрата. У ову сврху довољно је показати следеће услове:

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}^{cls}-\hat{\alpha}^{yw}\right) &= o(1),\ N\longrightarrow\infty,\\ N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mu}^{cls}-\hat{\mu}^{yw}\right) &= o(1),\ N\longrightarrow\infty,\\ N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\phi}_j^{cls}-\hat{\phi}_j^{yw}\right) &= o(1),\ N\longrightarrow\infty,\ j=1,2,\dots,p. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

С обзиром на сличност ових услова, краће изводимо први од њих:

$$N^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}^{cls}-\hat{\alpha}^{yw}\right)=\frac{N^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{p}D_i^*}{D^*}-\frac{N^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{p}D_i}{D},$$

где су D, D^*, D_i, D_i^*, $i=1,2,\dots,p$, детерминанте уведене раније. Десна страна претходне једнакости може се записати као разлика

$$f\left(\hat{\gamma}^*(0),\dots,\hat{\gamma}^*(p),N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}^*(0),\dots,N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}^*(p)\right)-f\left(\hat{\gamma}(0),\dots,\hat{\gamma}(p),N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}(0),\dots,N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}(p)\right),$$

где је f дефинисана са

$$f\left(\hat{\gamma}^*(0),\dots,\hat{\gamma}^*(p),N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}^*(0),\dots,N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}^*(p)\right)=\frac{N^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{p}D_i^*}{D^*},$$

односно са

$$f\left(\hat{\gamma}(0),\dots,\hat{\gamma}(p),N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}(0),\dots,N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}(p)\right)=\frac{N^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{p}D_i}{D}.$$

Како је f очигледно непрекидна функција, то је довољно доказати да

$$N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}^*(k)-N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}(k)=o(1), \tag{3.1.7}$$

када N тежи ка ∞, за $k = 0, 1, 2, \ldots, p$. Из репрезентација:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^*(k) &= \frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N}\left(X_n X_{n-k} - \overline{X}^{(0)}\overline{X}^{(k)}\right),\\ \hat{\gamma}(k) &= \frac{1}{N}\sum_{n=k+1}^{N}\left(X_n - \overline{X}_n\right)\left(X_{n-k} - \overline{X}_n\right),\end{aligned}$$

где је $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$, види се да лева страна услова (3.1.7) износи $o(1)$, с.в. 1, када $N \to \infty$. Такође, друга два услова из (3.1.6) се могу слично доказати. Даље из строге постојаности оцена условних најмањих квадрата, а применом услова (3.1.6), следи строга постојаност Yule-Walker-ових оцена. Са друге стране, ови услови су довољни и за примену Теореме 1.2.4. Тако је потврђена асимптотска нормалност оцена добијених методом момената, шта више асимптотски нормална расподела оцена $\left(\hat{\alpha}^{yw}, \hat{\phi}_1^{yw}, \hat{\phi}_2^{yw}, \ldots, \hat{\phi}_p^{yw}, \hat{\mu}^{yw}\right)$ има исту "средину" и "дисперзију" као и одговарајућа расподела CLS-оцена $\left(\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\phi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{\mu}^{cls}\right)$.

3.1.3 Примена на реалним подацима

При примени ненегативних целобројних ауторегресивних процеса вишег реда на стварним подацима, с обзиром на нешто комплекснију структуру, прибегавамо условној максималној веродостојности (CML) као могућој параметарској методи оцењивања непознатих параметара модела. Ове оцене се добијају максимизирањем логаритмоване функције веродостојности

$$\log L\left(x_1, x_2, \ldots, x_N; \boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{n=p+1}^{N} \log P\left(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_{n-p} = x_{n-p}\right),$$

где је $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \phi_1, \ldots, \phi_p, \mu)$. Ово се иначе може извести бројним максимизационим процедурама, уграђеним у већини пакета за статистичку анализу података.

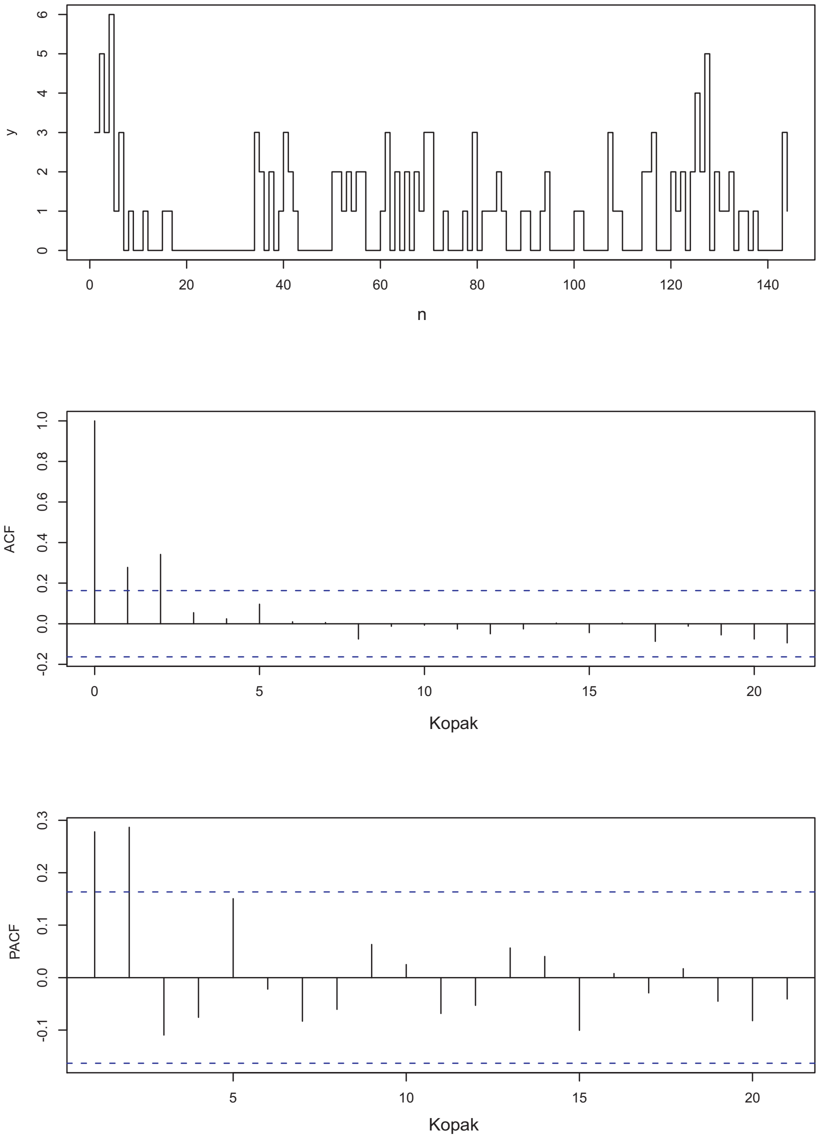
У циљу поређења уведеног CGINAR(p) модела са другим референтним INAR моделима, посматрани су подаци који су узети из криминолошке секције интернет сајта Forecasting Principles са веб адресом http://www.forecastingprinciples.com. Ова STOLPROP серија података представља бројање препродаја украдене робе, пријављених у 32.-ој полицијској станици у Питсбургу. Серија је сачињена од 144 опсервације обављене у периоду од јануара 1990. до децембра 2001. Узорачка средина, дисперзија и аутокорелација су редом $0,8958$, $1,4646$ и $0,278$. Графички приказ временског низа, његових узорачких аутокорелационих и парцијалних аутокорелационих функција је дат на слици 3.1. Анализом приложених дијаграма закључујемо да су ауторегресивни модели 2.-ог реда одговарајући за дате податке. У овом случају наш CGINAR(2) модел упоређујемо са комбинованим PoINAR(2) моделом Weiß-а (2008c), како се ради о једином моделу који својом структуром одговара нашем CGINAR(2) моделу. Наиме, овај PoINAR(2) је као и наш модел другог реда такође мешавина "lag-1" и "lag-2" тининг оператора, с том разликом да се ради о биномним тининг операторима. Такође, наш модел ћемо упоредити са неким најпознатијим INAR(1) моделима, као што су:

- PoINAR(1)-Пуасонов INAR(1) модел (Al-Osh, Alzaid, 1987),
- GINAR(1)-Геометријски INAR(1) модел (Alzaid, Al-Osh, 1988),
- NGINAR(1)-Нови геометријски INAR(1) модел заснован на негативном биномном тинингу (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),
- NBIINAR(1)-Итеративни INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Al-Osh, Aly, 1992),
- NBRCINAR(1)-Негативни биномни INAR(1) модел са случајним коефицијентима (Weiß, 2008b),
- NBINAR(1)-Негативни биномни INAR(1) модел заснован на геометријском бројачком низу (Ristić, Nastić, Bakouch, 2010),
- GPQINAR(1)-Квази биномни INAR(1) модел са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1993),
- I1, I2 и I3 INAR(1) модели са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006, 2010).

За сваки од модела израчунате су оцене параметара методом условне максималне веродостојности, као и њихове стандардне грешке. У циљу поређења модела добијене су такође и вредности информационих критеријума AIC и BIC, као и квадратни корен суме квадрата одступања опсервираних и моделираних вредности дате серије. Сви резултати су дати у табели 3.1. Као што се може приметити AIC, BIC и RMS вредности су најмање у случају примене CGINAR(2) модела, на основу чега закључујемо да је у случају датих података наш модел најприкладнији за моделирање одговарајућег временског низа.

Табела 3.1: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о продаји украдене робе.

Модел	CML оцене	AIC	BIC	RMS
PoINAR(1)	$\hat{\lambda} = 0,6990$			
	$\hat{\alpha} = 0,2235$	388,2	394,1	1,1511
GINAR(1)	$\hat{q} = 0,4706$			
	$\hat{\alpha} = 0,2035$	373,1	379,0	1,1526
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 0,8881$			
	$\hat{\alpha} = 0,3058$	371,6	377,8	1,1496
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 1,1346$			
	$\hat{p} = 1,8522$			
	$\hat{\rho} = 0,3216$	371,8	380,7	1,1504
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 1,3814$			
	$\hat{p} = 0,6024$			
	$\hat{\rho} = 0,2529$	374,0	382,9	1,1497
NBINAR(1)	$\hat{\mu} = 0,6726$			
	$\hat{\theta} = 1,3364$			
	$\hat{\alpha} = 0,3097$	373,0	381,9	1,1498
GPQINAR(1)	$\hat{\lambda} = 0,5432$			
	$\hat{\theta} = 0,2162$			
	$\hat{\rho} = 0,2378$	375,6	384,5	1,1585
NBINAR(1) I1	$\hat{p} = 0,5967$			
	$\hat{\theta} = 0,3361$			
	$\hat{\alpha} = 0,2144$	374,4	383,3	1,1518
NBINAR(1) I2	$\hat{p} = 0,5737$			
	$\hat{\theta} = 1,4266$			
	$\hat{\alpha} = 0,9801$			
	$\hat{\gamma} = 0,9922$	370,2	382,1	1,4292
NBINAR(1) I3	$\hat{p} = 0,6082$			
	$\hat{\theta} = 1,3944$			
	$\hat{\alpha} = 0,4926$			
	$\hat{\delta} = 9,2555$	372,1	384,0	1,1781
PoINAR(2)	$\hat{\lambda} = 0,5523$			
	$\hat{\alpha} = 0,3285$	363,1	372,0	1,0657
CGINAR(2)	$\hat{\mu} = 0,8007$			
	$\hat{\alpha} = 0,4171$			
	$\hat{\phi}_1 = 0,4427$	352,3	361,2	1,0597



Слика 3.1: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о броју продаја украдене робе.

3.2 Дводимензиони геометријски INAR(1) модел

Улога дводимензионих ненегативних целобројних временских модела се огледа у анализи упарених међусобно корелираних података којима се представљају реализације двеју корелираних случајних променљивих, периодично током одређеног времена. Последње две деценије поклоњено је доста пажње мултиваријационим ненегативним целобројним ауторегресивним процесима. Тако су Franke и Subba Rao (1993) увели M-варијациони INAR(1) процес дефинисан са

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A} \circ \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t,$$

где је $\{\mathbf{Z}_t\}$ низ независних једнако расподељених случајних вектора, док је за дату матрицу $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in [0, 1]$, i-та компонента случајног вектора $\mathbf{A} \circ \mathbf{X}$ дефинисана са $(\mathbf{A} \circ \mathbf{X})_i = \sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij} \circ X_j$, $i = 1, \dots, M$. Овде "$a\, \circ$" представља биномни тининг оператор. Касније је Latour (1997) увео мултиваријациони GINAR(p) модел као

$$\mathbf{X}_t = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \star \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t,$$

где су "$\mathbf{A}_i \star$" генералисани Steutel и van Harn-ови оператори. Овде је уведен дводимензиони INAR(1) модел са позитивно корелираним геометријски расподељеним случајним променљивама. Модел је конструисан приступом који су користили Dewald, Lewis и McKenzie (1989) у дефинисању дводимензионог ауторегресивног модела са експоненцијалном маргиналном расподелом.

Вишедимензиони, па тако и дводимензиони процеси у теорији временских низова представљају веома широку област и плодно тле за даље проучавање и развој како INAR процеса уопште тако и процеса заснованих на негативном биномном тинингу. Овде наводимо резултате истраживања о дводимензионим INAR процесима првог реда заснованих на геометријском бројачком низу. Тако, најпре уводимо модел са основним корелационим и регресионим особинама, а онда завршавамо излагање представљајући метод условних најмањих квадрата за оцењивање непознатих параметара модела.

3.2.1 Конструкција модела

Поред негативног биномног тининг оператора са уобичајеном нотацијом "$\alpha *$", дефинисаног са $\alpha * Z = \sum_{i=1}^{Z} G_i$, $\alpha \in (0,1)$, где је $\{G_i\}$ бројачки низ независних случајних променљивих са $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ расподелом, размотримо такође и оператор "$\beta *$" дефинисан са $\beta * Z = \sum_{j=1}^{Z} W_j$, $\beta \in (0,1)$, где је $\{W_j\}$ низ независних случајних променљивих са $Geom(\beta/(1+\beta))$ расподелом. Применом ових оператора, а методом који су предложили Dewald, Lewis и McKenzie (1989), уводимо дводимензиони модел временског низа $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ дефинисан са

$$X_n = \begin{cases} \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \\ \alpha * Y_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$Y_n = \begin{cases} \beta * X_{n-1} + \eta_n, & \text{с.в. } q, \\ \beta * Y_{n-1} + \eta_n, & \text{с.в. } 1-q, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

где су p, $q \in [0,1]$, α, $\beta \in (0,1)$, $\{\varepsilon_n, \ n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, \ n \geq 1\}$ су међусобно независни низови независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од (X_m, Y_m), за све $m < n$. Претпостављамо такође да су "тининзи" $\alpha * X_{n-1}$, $\alpha * Y_{n-1}$, $\beta * X_{n-1}$ и $\beta * Y_{n-1}$ међусобно независни.

Подсетимо се сада да је једначином $\Phi_Z(s) = \Phi_Z(\Phi_V(s))\Phi_\nu(s)$ неког произвољног INAR процеса $\{Z_n\}$ са бројачким низом $\{V_i\}$ и иновационим процесом $\{\nu_i\}$, обезбеђена његова једнака расподељеност, а тиме и строга стационарност. Следећом теоремом дајемо потребне и довољне услове за строгу стационарност дводимензионог временског низа $\{(X_n, Y_n)\}$.

Теорема 3.2.1 *Нека је* $\mu > 0$, α, $\beta \in (0, \mu/(1+\mu)]$ *и* $X_0 \overset{d}{=} Y_0 \overset{d}{=} Geom(\mu/(1+\mu))$. *Дводимензиони временски низ* $\{(X_n, Y_n), \ n \geq 0\}$ *дефинисан са* (3.2.1) *и* (3.2.2) *је строго стационаран са* $Geom(\mu/(1+$

μ)) расподелом ако и само ако су независни низови независних једнако расподељених случајних променљивих $\{\varepsilon_n,\ n \geq 1\}$ и $\{\eta_n,\ n \geq 1\}$ расподељени редом,

$$\varepsilon_n \overset{d}{=} \begin{cases} Geom(\alpha/(1+\alpha)), & \text{с.в. } \alpha\mu/(\mu-\alpha), \\ Geom(\mu/(1+\mu)), & \text{с.в. } (\mu-\alpha-\alpha\mu)/(\mu-\alpha), \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$$\eta_n \overset{d}{=} \begin{cases} Geom(\beta/(1+\beta)), & \text{с.в. } \beta\mu/(\mu-\beta), \\ Geom(\mu/(1+\mu)), & \text{с.в. } (\mu-\beta-\beta\mu)/(\mu-\beta). \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Доказ. Претпоставимо да су случајне променљиве ε_n и η_n расподељене редом као (3.2.3) и (3.2.4). Као у случају NGINAR(1) процеса у првом одељку претходне главе показано је да ове случајне променљиве имају функције генератрисе вероватноће дефинисане редом са

$$\Phi_\varepsilon(s) = (1+\alpha(1+\mu)(1-s))/((1+\alpha(1-s))(1+\mu(1-s))),$$

$$\Phi_\eta(s) = (1+\beta(1+\mu)(1-s))/((1+\beta(1-s))(1+\mu(1-s))).$$

Нека је $\Phi_n(s)$ функција генератрисе вероватноће променљиве X_n, односно Y_n. Како су X_0 и Y_0 једнако расподељене и $\Phi_0(s) = 1/(1+\mu(1-s))$, из (3.2.1) и (3.2.2) следи

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \Phi_0\left(\frac{1}{1+\alpha(1-s)}\right)\cdot\frac{1+\alpha(1+\mu)(1-s)}{(1+\alpha(1-s))(1+\mu(1-s))} = \frac{1}{1+\mu(1-s)}, \\ \Phi_1(s) &= \Phi_0\left(\frac{1}{1+\beta(1-s)}\right)\cdot\frac{1+\beta(1+\mu)(1-s)}{(1+\beta(1-s))(1+\mu(1-s))} = \frac{1}{1+\mu(1-s)}, \end{aligned}$$

што имплицира геометријску расподелу случајних променљивих X_1 и Y_1 са параметром $\mu/(1+\mu)$. Коначно, математичком индукцијом се може доказати да су X_n и Y_n, $n \geq 0$, са $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподелом.

За доказ супротног смера тврђења, претпоставимо да је дводимензиони временски низ $\{(X_n, Y_n),\ n \geq 0\}$ стационаран са $Geom(\mu/(1+\mu))$ маргиналном расподелом. Затим из чињеница да су

$$\Phi_\varepsilon(s) = \Phi_X(s)/\Phi_X(1/(1+\alpha(1-s))),$$

$$\Phi_\eta(s) = \Phi_X(s)/\Phi_X(1/(1+\beta(1-s))),$$

као код NGINAR(1) процеса, добијамо да су $\{\varepsilon_n,\ n \geq 1\}$ и $\{\eta_n,\ n \geq 1\}$ редом расподељени као (3.2.3) и (3.2.4). $\square$

У вези са претходним, интересантно је приметити следеће. У случају када X_0 и Y_0 имају исту произвољну расподелу, из (3.2.1) следи да је

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_n}(s) &= \Phi_{X_{n-1}}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)\Phi_\varepsilon(s) \\
&= \Phi_{X_0}\left(\frac{1-\alpha^n-\alpha(1-\alpha^{n-1})s}{1-\alpha^{n+1}-\alpha(1-\alpha^n)s}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\Phi_\varepsilon\left(\frac{1-\alpha^j-\alpha(1-\alpha^{j-1})s}{1-\alpha^{j+1}-\alpha(1-\alpha^j)s}\right) \\
&= \Phi_{X_0}\left(\frac{1-\alpha^n-\alpha(1-\alpha^{n-1})s}{1-\alpha^{n+1}-\alpha(1-\alpha^n)s}\right) \\
&\times \frac{1-\alpha^{n+1}+(1-\alpha)\alpha^n\mu-\alpha(1-\alpha^n+(1-\alpha)\alpha^{n-1}\mu)s}{(1-\alpha^{n+1}-\alpha(1-\alpha^n)s)(1+\mu-\mu s)}.
\end{aligned}$$

Када пустимо да n тежи ка ∞, добијамо да X_n конвергира ка $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподели. На овај начин је показано да је у случају једнаке произвољне расподеле случајних променљивих X_0 и Y_0, гранична расподела дводимензионог временског низа $\{(X_n, Y_n),\ n \geq 0\}$ дефинисаног са (3.2.1) и (3.2.2), где су случајне променљиве ε_n и η_n расподељене редом као у (3.2.3) и (3.2.4), геометријска са параметром $\mu/(1+\mu)$.

3.2.2 Матрична репрезентација и основна својства процеса

Дводимензиони модел временског низа $\{(X_n, Y_n),\ n \geq 0\}$ дефинисан са (3.2.1) и (3.2.2) може се представити са

$$X_n = U_{n1} * X_{n-1} + U_{n2} * Y_{n-1} + \varepsilon_n, \qquad (3.2.5)$$

$$Y_n = V_{n1} * X_{n-1} + V_{n2} * Y_{n-1} + \eta_n, \qquad (3.2.6)$$

где су случајни вектори $\{(U_{n1}, U_{n2})\}$ и $\{(V_{n1}, V_{n2})\}$ међусобно независни са идентичким расподелама, респективно

$$P(U_{n1}=\alpha, U_{n2}=0) = 1 - P(U_{n1}=0, U_{n2}=\alpha) = p,$$

$$P(V_{n1}=\beta, V_{n2}=0) = 1 - P(V_{n1}=0, V_{n2}=\beta) = q.$$

Ако сада дефинишемо $\mathbf{A}_n * \mathbf{X}$ са

$$\mathbf{A}_n * \mathbf{X} = \begin{bmatrix} U_{n1} * X + U_{n2} * Y \\ V_{n1} * X + V_{n2} * Y \end{bmatrix},$$

где је

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} U_{n1} & U_{n2} \\ V_{n1} & V_{n2} \end{bmatrix}$$

и $\mathbf{X} = (X, Y)^T$, онда се (3.2.5) и (3.2.6) могу представити у матричној форми

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}_n * \mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{Z}_n, \tag{3.2.7}$$

где су $\mathbf{X}_n = (X_n, Y_n)^T$ и $\mathbf{Z}_n = (\varepsilon_n, \eta_n)^T$. Користећи ову репрезентацију лако се долази до аутоковаријансне матрице у облику

$$Cov(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} Cov(X_h, X_0) & Cov(X_h, Y_0) \\ Cov(Y_h, X_0) & Cov(Y_h, Y_0) \end{bmatrix}.$$

С обзиром да је

$$E(\mathbf{A}_h * \mathbf{X}_{h-1}) = \mathbf{A}E(\mathbf{X}_{h-1}), \quad E\left((\mathbf{A}_h * \mathbf{X}_{h-1})\mathbf{X}_0^T\right) = \mathbf{A}E\left(\mathbf{X}_{h-1}\mathbf{X}_0^T\right),$$

где је $\mathbf{A} = E(\mathbf{A}_h)$, за $h \geq 0$, аутоковаријансна матрица се може записати као $Cov(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_0) = \mathbf{A}^h Var(\mathbf{X}_0)$. При томе елементи матрице $Var(\mathbf{X}_0)$ се даље израчунавају. Најпре, како случајне променљиве X_0 и Y_0 имају $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподелу, то је $Var(X_0) = Var(Y_0) = \mu(1+\mu)$. Са друге стране $Cov(X_0, Y_0)$ се лако израчунава применом (3.2.1) и (3.2.2) и чињенице да је дводимензиони временски низ $\{(X_n, Y_n)\}$ стационаран. Тако је

$$Cov(X_0, Y_0) = \frac{\alpha\beta(pq + (1-p)(1-q))}{1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q)} \cdot \mu(1+\mu) \equiv \rho \cdot \mu(1+\mu),$$

где је $\rho = \frac{\alpha\beta(pq+(1-p)(1-q))}{1-\alpha\beta(p(1-q)+(1-p)q)}$. Очигледно је ρ позитивно, чиме смо доказали позитивну корелираност посматраних обележја X и Y. Са друге стране, како је $\rho - 1 = (\alpha\beta - 1)/(1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q)) < 0$, тада је $\rho < 1$. Тако на основу претходног важи да је

$$Var(\mathbf{X}_0) = \mu(1+\mu) \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Раније дефинисана матрица $\mathbf{A}$ је облика

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \alpha p & \alpha(1-p) \\ \beta q & \beta(1-q) \end{array} \right],$$

те закључујемо да су сви елементи матрице $Cov(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_0)$ позитивни. Докажимо сада веома важну особину ауторегресивних процеса, тј. да $Cov(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_0) \to \mathbf{0}$, када $h \to \infty$. За сопствене вредности $\lambda_1 < \lambda_2$ матрице $\mathbf{A}$ важи да је $\lambda_1+\lambda_2 = \alpha p+\beta(1-q) > 0$, одакле је $\lambda_2 > 0$, као и да је $\lambda_1\lambda_2 = \alpha\beta(p-q)$. На основу ових резултата имамо следеће:

$$\begin{array}{rcl} (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) & = & (1-\alpha)(1-\beta(1-q)) + \alpha(1-p)(1-\beta) > 0, \\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) & = & 1-\alpha\beta(1-p) + \alpha p + \beta(1+\alpha)(1-q) > 0. \end{array}$$

Како је $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 < \alpha + \beta < 2$, то је $|\lambda_1| < 1$ и $0 < \lambda_2 < 1$, што је довољно да $\mathbf{A}^h \to \mathbf{0}$ и $Cov(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_0) \to \mathbf{0}$, када $h \to \infty$.

Рецимо сада нешто о регресионим особинама овде уведеног дводимензионог модела. Користећи матрични запис (3.2.7) имамо да је

$$\begin{array}{rcl} E(\boldsymbol{X}_{n+1}|\boldsymbol{X}_n) & = & E\left(\left[\begin{array}{c} U_{(n+1)1} * X_n + U_{(n+1)2} * Y_n \\ V_{(n+1)1} * X_n + V_{(n+1)2} * Y_n \end{array} \right] \middle| \left[\begin{array}{c} X_n \\ Y_n \end{array} \right] \right) + E\left(\boldsymbol{Z}_{n+1}|\boldsymbol{X}_n\right) \\ & = & \left[\begin{array}{c} \alpha p X_n + \alpha(1-p) Y_n \\ \beta q X_n + \beta(1-q) Y_n \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mu_\varepsilon \\ \mu_\eta \end{array} \right] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}}, \end{array}$$

где је $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} = E(\boldsymbol{Z})$. Понављањем претходног поступка k пута, добија се

$$\begin{array}{rcl} E(\boldsymbol{X}_{n+k}|\boldsymbol{X}_n) & = & \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}_n + \left(\boldsymbol{A}^{k-1} + \boldsymbol{A}^{k-2} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} \\ & = & \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}_n + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^k\right)\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} \\ & = & \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}_n + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^k\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\mu}, \end{array}$$

где је $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}_n)$. Како $\boldsymbol{A}^k$ тежи ка нула матрици, то имамо да $E(\boldsymbol{X}_{n+k}|\boldsymbol{X}_n) \to \boldsymbol{\mu}$, када $k \to \infty$.

3.2.3 Оцењивање непознатих параметара

У овом делу се бавимо оцењивањем непознатих параметара модела модификованим методом условних најмањих квадрата. Нека је дат дводимензиони случајни узорак (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), …, (X_N, Y_N) са одговарајућим маргиналним геометријским расподелама. Оценимо најпре непознати параметар μ. На основу чињенице да је $\mu = E(X_n) = E(Y_n)$, оцена добијена методом момената је облика

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}(X_n + Y_n)\,. \tag{3.2.8}$$

Овим Yule-Walker-овим оцењивањем једног непознатог параметра учињена је једина модификација иначе класичног приступа метода условних најмањих квадрата, који на даље користимо. Да бисмо дошли до тражених оцена параметара α, β, p и q уводимо нову параметризацију $\theta_1 = \alpha p$, $\theta_2 = \alpha(1-p)$, $\theta_3 = \beta q$ и $\theta_4 = \beta(1-q)$. Користећи матричну репрезенатацију модела, добијамо као горе да је

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{X}_n|\mathbf{X_{n-1}}) &= E(\mathbf{A}_n * \mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{Z}_n|\mathbf{X}_{n-1}) \\
&= \begin{bmatrix} \alpha p X_{n-1} + \alpha(1-p)Y_{n-1} \\ \beta q X_{n-1} + \beta(1-q)Y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(\varepsilon_n) \\ E(\eta_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha p & \alpha(1-p) \\ \beta q & \beta(1-q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ 1-\beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1-\theta_1-\theta_2 \\ 1-\theta_3-\theta_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Нека је сада $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$. Оцене методом условних најмањих квадрата су добијене минимизирањем суме квадрата

$$\begin{aligned}
Q_N(\Theta) &= \sum_{n=2}^{N}(\mathbf{X}_n - \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-1} - \boldsymbol{\mu_Z})^T(\mathbf{X}_n - \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-1} - \boldsymbol{\mu_Z}) \\
&= \sum_{n=2}^{N}(X_n - \theta_1 X_{n-1} - \theta_2 Y_{n-1} - (1-\theta_1-\theta_2)\hat{\mu})^2 \\
&+ \sum_{n=2}^{N}(Y_t - \theta_3 X_{n-1} - \theta_4 Y_{n-1} - (1-\theta_3-\theta_4)\hat{\mu})^2.
\end{aligned}$$

Према томе, тражене статистике се добијају као решења следећих система

$$\left[\begin{array}{cc} \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}^2 & \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}T_{n-1} \\ \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}T_{n-1} & \sum\limits_{n=2}^{N} T_{n-1}^2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sum\limits_{n=2}^{N} S_n S_{n-1} \\ \sum\limits_{n=2}^{N} S_n T_{n-1} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}^2 & \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}T_{n-1} \\ \sum\limits_{n=2}^{N} S_{n-1}T_{n-1} & \sum\limits_{n=2}^{N} T_{n-1}^2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sum\limits_{n=2}^{N} T_n S_{n-1} \\ \sum\limits_{n=2}^{N} T_n T_{n-1} \end{array}\right],$$

где су $S_n = X_n - \hat{\mu}$ и $T_n = Y_n - \hat{\mu}$. Коначно, враћањем старе параметризације добијамо

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2, \quad \hat{\beta} = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4, \\ \hat{p} &= \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}, \quad \hat{q} = \frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4}. \end{aligned}$$

На овај начин смо модификованим методом условних најмањих квадрата одредили оцене непознатих параметара модела α, β, p и q.

Глава 4

Мешовити INAR процеси

Као што је већ познато INAR модели са биномним тининг оператором су погоднији од других модела када је потребно описати податке који представљају бројање случајних догађаја или елемената неке популације који током времена могу само да опстају или исчезавају. Ово је сасвим природно с обзиром да Бернулијеве случајне променљиве, које се том приликом користе, имају две могуће реализације, 0 или 1. Са друге стране, елементи популације могу бити међусобно више "повезани", односно међу њима могу бити присутне интеракције при којима може да настане 1 или више нових елемената. Како у овој ситуацији један случајни догађај може да генерише 0, 1 или више нових догађаја који су такође предмет опсервирања, Бернулијеве случајне променљиве више нису употребљиве за конструкцију бројачког низа. Због тога смо увели негативни биномни тининг заснован на низу геометријски расподељених случајних променљивих, који је у претходне две главе коришћен за конструкцију више различитих INAR модела.

Међутим, у пракси се могу јавити случајеви система елемената и случајних догађаја променљивог карактера. Наиме, могло би се десити да у одређеним временским интервалима елементи буду пасивни, односно да само опстају или исчезавају, када би Бернулијев бројачки низ био идеалан избор. Са друге стране, у осталим временским интервалима би они били активни, са могућношћу генерисања више нових елемената односно случајних догађаја, када би требало прибегавати негативном биномном тинингу. На овај начин долазимо до потребе за INAR моделима који би такође били промењљивог карактера, што је и предмет проучавања ове главе. Наиме овде су представљени модели са тининг оператором који је мешавина биномног и негативног биномног тининга. Тако у првом одељку уводимо INAR моделе првог и другог реда у којима се веза између различитих елемената процеса описује са по једном применом оба поменута тининга, односно који су настали најједноставнијом двоструком мешавином тининг оператора. У другом одељку се бавимо мешовитим INAR моделима вишег реда, којима такође описујемо податке промењљивог степена активности, односно код којих постоји израженија зависност између удаљенијих елемената посматраног временског низа.

4.1 Мешовити INAR модели првог и другог реда

У овом делу представљамо INAR моделе засноване на мешавини биномног и негативног биномног тининг оператора. У случајевима када од једног до другог временског периода посматрања долази до значајне промене степена активности посматраних елемената популације, дефинишемо моделе првог реда где се веза између два узастопна елемента серије остварује применом и Бернулијевог и геометријског бројачког низа. Међутим, о посматраним подацима можемо имати и додатних информација. На пример, ако су случајни догађаји непосредно након свог настанка пасивни, а затим у наредном временском интервалу постају активни са могућношћу провоцирања више нових догађаја, тада за моделирање "lag-1" зависности користимо биномни тининг, док негативни биномни тининг бирамо за описивање "lag-2" зависности између елемената процеса. На овај начин се долази до INAR(2) модела који се иначе може дефинисати и у другој варијанти, када су догађаји најпре активни, а затим након протеклог временског интервала постају погодни за моделирање Бернулијевим низом. Тако, овде након конструкције наведених модела одређујемо расподелу њихових иновационих процеса. Такође описујемо аутокорелациону структуру и неке условне величине процеса, да бисмо на крају нешто више рекли о методама за оцењивање непознатих параметара и примени самих модела на подацима из стварног живота.

4.1.1 Конструкција и основна својства процеса

Овде уводимо INAR моделе првог и другог реда уз помоћ два тининг оператора, биномног "$\circ_n$" и негативног биномног "$*_n$". Оператор биномног тининга је, као што је познато, дефинисан са $\alpha \circ_n X = \sum_{i=1}^{X} B_i^{(n)}$, где је $\left\{B_i^{(n)}\right\}$ низ независних Бернулијевих случајних промењивих са параметром α, док је негативни биномни тининг дефинисан са $\beta *_n X = \sum_j^X G_j^{(n)}$, чији се бројачки низ $\left\{G_j^{(n)}\right\}$ састоји од независниих случајних променљивих са $Geom(\beta/(1+\beta))$ расподелом. Најпре, размотримо временски низ $\{X_n\}$ са $Geom(\mu/(1+\mu))$ маргиналном расподелом, $\mu > 0$, дефинисан са

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \\ \beta *_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

где су $\alpha, \beta \in (0,1)$, $p \in [0,1]$ и важе следећи услови:

(i) $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих,

(ii) ε_n не зависе од X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+1} X_m$, за $m < n$,

(iii) бројачки низови тининг оператора у тренутку n су независни једни од других,

(iv) бројачки низови тининг оператора примењених над X_n и случајне променљиве X_{n-1}, X_{n-2}, ... су независни,

(v) условне вероватноће $P\left(\alpha \circ_{n+1} X_n = i_1, \beta *_{n+1} X_n = i_2 | X_n = x, H_{n-1}\right)$ и $P\left(\alpha \circ_{n+1} X_n = i_1, \beta *_{n+1} X_n = i_2 | X_n = x\right)$ су једнаке, где H_{n-1} означава прошлост процеса, односно свих случајних променљивих X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+1} X_m$, за $m < n$,

(vi) случајне променљиве $\alpha \circ_{n+1} X_n$ и $\beta *_{n+1} X_n$ за дато X_n су независне.

Сада ћемо извести расподелу иновационог процеса $\{\varepsilon_n\}$, што је дато следећом теоремом.

Теорема 4.1.1 *Ако је $\alpha\mu < \beta(1+\mu) < \mu$, онда се случајна променљива ε_n на следећи начин може представити као мешавина три геометријски расподељене случајне променљиве*

$$\varepsilon_n \overset{d}{=} \begin{cases} Geom(\mu/(1+\mu)), & с.в. \quad A_1 \equiv \frac{\mu(\alpha-1)(\beta-\mu+\mu\beta)}{(\mu-a)(\mu-b)}, \\ Geom(a/(1+a)), & с.в. \quad A_2 \equiv \frac{(\mu\alpha-a)(\beta-a+\mu\beta)}{(\mu-a)(b-a)}, \\ Geom(b/(1+b)), & с.в. \quad A_3 \equiv \frac{(\mu\alpha-b)(\beta-b+\mu\beta)}{(\mu-b)(a-b)}, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

где су $a < b$ решења једначине $x^2-(\beta+\alpha\mu+\beta\mu p-\alpha\mu p)x+(1-p)\alpha\beta\mu = 0$.

Доказ. Нека су $\Phi_X(s)$ и $\Phi_\varepsilon(s)$ редом функције генератрисе вероватноће случајних промењливих X_n и ε_n. На основу (4.1.1) следи да је

$$\Phi_X(s) = (p\Phi_X(\Phi_B(s)) + (1-p)\Phi_X(\Phi_G(s)))\,\Phi_\varepsilon(s),$$

где су $\Phi_B(s) = 1-\alpha+\alpha s$ и $\Phi_G(s) = \frac{1}{1+\beta-\beta s}$, редом функције генератрисе вероватноће случајних промењливих бројачких низова тининг оператора "$\alpha\,\circ$" и "$\beta\,*$". Како је $\Phi_X(s) = \frac{1}{1+\mu-\mu s}$, то је даље

$$\Phi_X(s) = \left(\frac{p}{1+\mu\alpha(1-s)} + \frac{(1-p)(1+\beta(1-s))}{1+\beta(1+\mu)(1-s)}\right)\Phi_\varepsilon(s),$$

одакле је

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{(1+\alpha\mu(1-s))(1+\beta(1+\mu)(1-s))}{(1+\mu(1-s))P(1-s)}\,, \tag{4.1.3}$$

где је $P(1-s) = 1 + (1-s)(\beta+\alpha\mu+\beta\mu p-\alpha\mu p) + (1-s)^2(1-p)\alpha\beta\mu$. Полином $P(s)$ се може записати као $P(s) = (1+as)(1+bs)$, где су a и b решења система једначина

$$a+b = \beta+\alpha\mu+\beta\mu p-\alpha\mu p, \quad ab = (1-p)\alpha\beta\mu,$$

односно решења једначине

$$x^2 - (\beta+\alpha\mu+\beta\mu p-\alpha\mu p)x + (1-p)\alpha\beta\mu = 0.$$

Претпоставимо да је $a < b$. Ови корени су реални, јер за дискриминанту важи да је $D = (\beta-\alpha\mu+\beta\mu p+\alpha\mu p)^2 + 4\alpha\beta\mu^2 p(1-p) > 0$. Такође, a и b су позитивни пошто је $a+b = \beta+\alpha\mu(1-p)+\beta\mu p > 0$ и $ab = (1-p)\alpha\beta\mu > 0$. Тако се функција генератрисе вероватноће случајне промењливе ε_n може представити у облику

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{A_1}{1+\mu-\mu s} + \frac{A_2}{1+a-as} + \frac{A_3}{1+b-bs}\,,$$

где су A_1, A_2 и A_3 решења система једначина

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1,$$

$$A_1(a+b) + A_2(\mu+b) + A_3(\mu+a) = \alpha\mu + \beta(1+\mu),$$

$$A_1ab + A_2\mu b + A_3\mu a = \alpha\beta\mu(1+\mu).$$

Сада одредимо услове под којима су ове вредности A_i ваљане вероватноће. Лако је показати да је $(\beta-a)(\beta-b) = -\beta^2\mu p < 0$. На основу овога и чињенице да је $a < b$, добијамо да је $a < \beta < b$, одакле је даље $\beta - a + \mu\beta > 0$. Како је $ab < \alpha\beta\mu$ и $\beta < b$, то је $a < \mu\alpha$, одакле следи да је $a < \mu$. Из свега изнад добијамо да је $A_2 > 0$. Такође можемо показати да је $(\mu\alpha - a)(\mu\alpha - b) = -\alpha\beta\mu p(\beta - \alpha\mu + \mu\beta)$ и $(\beta - a + \mu\beta)(\beta - b + \mu\beta) = (1-p)\beta\mu(\beta - \alpha\mu + \beta\mu)$. Случај $\beta(1+\mu) < \alpha\mu$ је немогућ, јер из њега следи да је $A_3 < 0$. Претпоставимо сада да је $\beta(1+\mu) > \alpha\mu$. Онда добијамо да је $\beta - b + \mu\beta > 0$ и $\mu\alpha - b < 0$. Сада је A_1A_3 веће од 0 само ако је $\beta - \mu + \mu\beta < 0$. Ако још претпоставимо да је $\beta - \mu + \mu\beta < 0$, тада важи да је $0 > \beta - \mu + \mu\beta - (\beta - b + \mu\beta) = -(\mu - b)$, одакле следи да је $\mu > b$. Коначно из претходног добијамо да је $A_1 > 0$ и $A_3 > 0$. $\square$

Овде уводимо мешовити INAR(1) модел.

Дефиниција 4.1.1 *Нека су услови* (*i*) *до* (*vi*) *испуњени. Нека је расподела низа случајних промењљивих* $\{\varepsilon_n\}$ *дата са* (4.1.2) *и нека су* $p \in [0,1]$ *и* $\alpha\mu < \beta(1+\mu) < \mu$. *Временски низ* $\{X_n\}$ *генерисан са* (4.1.1) *је мешовити ненегативни целобројни ауторегресивни процес првог реда са геометријском маргиналном расподелом* (MGINAR(1)).

На сличан начин уводимо два мешовита ненегативна целобројна ауторегресивна процеса другог реда са геометријском маргиналном расподелом. Први од њих је дефинисан са

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \\ \beta *_n X_{n-2} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

при чему поред услова (i), (iii), (iv) важе и услови

- (*vii*) ε_n су независни од X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+2} X_m$ за $m < n$,
- (*viii*) условне вероватноће $P(\alpha \circ_{n+1} X_n = i_1, \beta *_{n+2} X_n = i_2 | X_n = x, H_{n-1})$ и $P(\alpha \circ_{n+1} X_n = i_1, \beta *_{n+2} X_n = i_2 | X_n = x)$ су једнаке, где је H_{n-1} историја процеса, односно свих случајних промењљивих X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+2} X_m$, за $m < n$,
- (*ix*) случајне промењљиве $\alpha \circ_{n+1} X_n$ и $\beta *_{n+2} X_n$ за дато X_n су независне.

Ако је $\alpha\mu < \beta(1+\mu) < \mu$, онда је $\{X_n\}$ добро дефинисан процес и расподела његовог иновационог процеса је дефинисана са (4.1.2). Даље, уводећи услове сличне условима (vii)-(ix) и претпостављајући да је $\alpha\mu < \beta(1+\mu) < \mu$, добија се да је мешовити ненегативни целобројни ауторегресивни процес другог реда $\{X_n\}$, који је дат са

$$X_n = \begin{cases} \beta *_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \\ \alpha \circ_n X_{n-2} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

добро дефинисан и да је његов иновациони процес са расподелом (4.1.2). Оба претходна процеса ћемо означавати са MGINAR(2).

4.1.2 Условне статистичке величине и аутокорелациона структура

У овом делу ближе упознајемо својства уведених модела. Најпре говоримо о MGINAR(1) моделу. Како бисмо једноставније представили резултате, уводимо следеће параметре:

$$\theta = p\alpha + (1-p)\beta,$$
$$\tau = \alpha^2 p + \beta^2(1-p),$$
$$\nu = \alpha(1-\alpha)p + \beta(1+\beta)(1-p) + 2\mu(1-\theta)\theta.$$

На основу (4.1.1) лако се добија да је математичко очекивање случајне променљиве иновационог процеса $\mu_\varepsilon = (1-\theta)\mu$, док се у одређивању другог момента користе и особине 5 и (*iii*), биномног и негативног биномног тининга, респективно. Наиме,

$$\begin{aligned} E\left(X_n^2\right) &= pE(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n)^2 + (1-p)(\beta * X_{n-1} + \varepsilon_n)^2 \\ &= p\left(\alpha^2 E\left(X_{n-1}^2\right) + \alpha(1-\alpha)\mu\right) + 2p\alpha\mu^2(1-\theta) \\ &+ (1-p)\left(\beta^2 E\left(X_{n-1}^2\right) + \beta(1+\beta)\mu\right) + 2(1-p)\beta\mu^2(1-\theta) + E(\varepsilon_n^2) \\ &= \tau E\left(X_n^2\right) + \mu(\alpha(1-\alpha)p + \beta(1+\beta)(1-p) + 2\mu(1-\theta)\theta), \end{aligned}$$

одакле је

$$E(\varepsilon_n^2) = (1-\tau)\mu(1+2\mu) - \nu\mu. \tag{4.1.6}$$

Даље, применом особина 7 и (*iv*) тининг оператора изводимо аутокорелациону функцију.

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}X_n) &= pE((\alpha \circ X_{n+k-1})X_n) + (1-p)E((\beta * X_{n+k-1})X_n) + \mu^2(1-\theta) \\ &= \theta E(X_{n+k-1}X_n) + \mu^2(1-\theta). \end{aligned}$$

Одавде је $\gamma(k) = \theta(E(X_{n+k-1}X_n) - \mu^2) = \theta\gamma(k-1)$. Дакле, аутокорелациона функција реда k је облика $\rho(k) = \theta^k$, одакле $\rho(k) \to 0$, када $k \to \infty$.

При одређивању условних статистичких величина користићемо особине 16, 17, (xii) и $(xiii)$, одговарајућих тининг оператора. Најпре долазимо до регресионе једначине:

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|X_n) &= pE(E(\alpha \circ X_{n+k-1}|X_{n+k-1})|X_n) \\ &+ (1-p)E(E(\beta * X_{n+k-1}|X_{n+k-1})|X_n) + \mu(1-\theta) \\ &+ \theta E(X_{n+k-1}|X_n) + \mu(1-\theta) \\ &= \theta^k X_n + \mu\left(1-\theta^k\right). \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Затим, користећи овај резултат одређујемо условни други момент:

$$\begin{aligned} E\left(X_{n+k}^2|X_n\right) &= \tau E\left(X_{n+k-1}^2|X_n\right) + \nu E(X_{n+k-1}|X_n) + E\left(\varepsilon_{n+k}^2\right) \\ &= \tau^k X_n^2 + \nu \sum_{i=0}^{k-1} \tau^i \left(\theta^{k-i-1}X_n + \mu\left(1-\theta^{k-i-1}\right)\right) + E\left(\varepsilon_n^2\right) \sum_{j=0}^{k-1} \tau^j \\ &= \tau^k X_n^2 + \nu X_n \frac{\theta^k - \tau^k}{\theta - \tau} + \nu\mu\left(\frac{1-\tau^k}{1-\tau} - \frac{\theta^k - \tau^k}{\theta - \tau}\right) \\ &+ \frac{1-\tau^k}{1-\tau} E\left(\varepsilon_n^2\right). \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Коначно, заменом (4.1.6) у претходној једначини, добијамо

$$E(X_{n+k}^2|X_n) = \tau^k X_n^2 + \frac{\nu(\theta^k - \tau^k)}{\theta - \tau}(X_n - \mu) + (1-\tau^k)\mu(1+2\mu). \tag{4.1.9}$$

MGINAR(1) модел има једно неуобичајено својство које следи из претходних формулација условних величина. Наиме, на основу (4.1.7) и (4.1.9) за $k = 1$ добијамо условну дисперзију случајне промењиве X_{n+1} за дато X_n у облику

$$Var(X_{n+1}|X_n) = (\tau - \theta^2)X_n^2 + (\nu - 2\mu\theta(1-\theta))X_n - \nu\mu + (1-\tau)\mu(1+2\mu) - \mu^2(1-\theta)^2.$$

Посматрајмо сада коефицијент $\tau - \theta^2$. Лако се израчунава да је $\tau - \theta^2 = (\alpha - \beta)^2 p(1-p)$. Тако, ако је $\alpha \neq \beta$, што је и општи случај, онда условна дисперзија зависи од X_n^2, што је и разлог за њене значајно веће реализоване вредности у случају већих реализација самог временског низа. Ова особина није иначе карактеристична за стандарне INAR процесе, с обзиром да је код њих условна дисперзија линеарна функција случајне променљиве X_n. При томе је једино слично понашање условне дисперзије примећено код INAR процеса са случајним коефицијентима, уведеним у Zheng, Basawa, Datta (2006, 2007).

Сада размотримо MGINAR(2) модел, уведен са (4.1.4). У циљу анализе зависности између елемената серије изводимо аутокорелациону функцију. Истим поступком, примењеним као при извођењу аутокорелације (3.1.4), добијамо да је

$$\rho(k) = p\alpha\rho(|k-1|) + (1-p)\beta\rho(|k-2|), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Претпоставимо да је $\beta \leq \alpha$. Полазећи од $\rho(l) \leq 1$, $l \geq 0$ и итеративном применом претходне једначине добијамо да је $\rho(2k) \leq \alpha^k$ и $\rho(2k+1) \leq \alpha^k$. Према томе, $\rho(n)$ опада ка нули, док n тежи ка бесконачности. Исти резултат се добија и за $\alpha < \beta$.

Условна функција генератрисе вероватноће се добија на основу (4.1.4) и познатих особина условног математичког очекивања. Тако је

$$\begin{aligned} E\left(s^{X_{n+1}}|H_n\right) &= pE\left(s^{\alpha\circ X_n+\varepsilon_{n+1}}|H_n\right) + (1-p)E\left(s^{\beta * X_{n-1}+\varepsilon_{n+1}}|H_n\right) \\ &= \Phi_\varepsilon(s)\left(p(1-\alpha+\alpha s)^{X_n} + (1-p)(1+\beta-\beta s)^{-X_{n-1}}\right), \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

где је $H_n = \mathcal{F}(X_n, X_{n-1})$ историја процеса, односно σ-алгебра генерисана са $\{X_n, X_{n-1}\}$. Затим, користећи везу између момената и вредности извода функције генератрисе вероватноће случајне променљиве у јединици, долазимо до условног математичког очекивања и дисперзије, редом у облику

$$E(X_{n+1}|H_n) = p\alpha X_n + (1-p)\beta X_{n-1} + \mu_\varepsilon$$

и

$$\begin{aligned} Var(X_{n+1}|H_n) &= p(1-p)(\alpha X_n - \beta X_{n-1})^2 + \alpha(1-\alpha)pX_n \\ &+ \beta(1+\beta)(1-p)X_{n-1} + \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

где се дисперзија случајне променљиве ε_n лако израчунава из првог и другог момента датих изнад. Као и у случају MGINAR(1) процеса, овде условна дисперзија није линеарна функција "прошлости" посматраног процеса. Међутим, овде у случају MGINAR(2) процеса, она зависи од $(\alpha X_n - \beta X_{n-1})^2$. Приметимо да у односу на вредности реализација случајне променљиве X_n, α и β немају битно различите вредности, будући да су обе између 0 и 1. На тај начин, изненадне промене вредности реализације процеса, за време његовог раста или опадања, при чему се праве значајно велики кораци $|x_n - x_{n-1}|$, изазивају приметан раст условне дисперзије.

4.1.3 Оцењивање непознатих параметара

Због несразмерно већег броја параметара у односу на ред модела, па тако и недовољног броја параметарских једначина помоћу којих бисмо одредили оцене свих непознатих параметара у општем случају, у овом делу прибегавамо оцењивању параметара у случају када су α и β једнаки. Обратимо најпре пажњу на MGINAR(1) модел. Применићемо двокорачни метод условних најмањих квадрата Karlsen-а и Tjøstheim-а (1988). У првом кораку овог метода CLS-оцене параметара α и μ се добијају минимизирањем суме квадрата

$$Q_N(\alpha,\mu) = \sum_{n=2}^{N}(X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2 = \sum_{n=2}^{N}(X_n - \alpha X_{n-1} - (1-\alpha)\mu)^2.$$

Тако изведене оцене су редом

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{cls} &= \frac{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_n X_{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} X_n \sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}^2 - \left(\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}\right)^2},\\ \hat{\mu}^{cls} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} X_n - \hat{\alpha}^{cls}\sum\limits_{n=2}^{N} X_{n-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}^{cls})}.\end{aligned}$$

Затим у другом кораку овог метода оцењујемо нови параметар $\eta = \alpha(1+\alpha-2\alpha p)$, што ће у потпуности бити оправдано у следећем извођењу. Наиме, најпре уводимо нову случајну променљиву V_n

дефинисану са $V_n = (X_n - E(X_n|X_{n-1}))^2$, чије се условно очекивање за дато X_{n-1} добија као

$$E(V_n|X_{n-1}) = Var(X_n|X_{n-1}) = \eta(X_{n-1} - \mu) + \mu(1-\alpha)(1+\alpha+\mu+\alpha\mu).$$

Оцена добијена методом условних најмањих квадрата параметра η се добија минимизирањем суме

$$S_N(\eta) = \sum_{n=2}^{N} (V_n - E(V_n|X_{n-1}))^2$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \left[(X_n - \alpha X_{n-1})^2 - (1-\alpha)\mu(2X_n - 2\alpha X_{n-1} + 1 + \alpha + 2\mu\alpha) - \eta(X_{n-1} - \mu) \right]^2.$$

Тако је одговарајућа статистика облика

$$\hat{\eta}^{cls} = \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} \left((X_n - \hat{\alpha}^{cls} X_{n-1})^2 - \hat{\mu}^{cls}(1-\hat{\alpha}^{cls})(1+\hat{\alpha}^{cls}+2\hat{\mu}^{cls}) \right) (X_{n-1} - \hat{\mu}^{cls})}{\sum\limits_{n=2}^{N} (X_{n-1} - \hat{\mu}^{cls})^2}.$$

Коначно, на основу дефиниције параметра η, оцена за p добијена овим двокорачним CLS методом је

$$\hat{p}^{cls} = \frac{1 - \hat{\alpha}^{cls}}{2\hat{\alpha}^{cls}} - \frac{\hat{\eta}^{cls}}{2\left(\hat{\alpha}^{cls}\right)^2}.$$

Оцењивање параметара MGINAR(1) модела методом момената може се изводити двокорачним модификованим Yule-Walker-овим (MYW) методом, који се састоји у следећем. У првом кораку параметри μ и α, у складу са њиховим значењем, се апроксимирају узорачком средином и узорачком аутокорелационом функцијом првог реда. Параметар p се оцењује у другом кораку, на потпуно исти начин као у горе уведеној двокорачној CLS процедури.

Сада размотримо случај MGINAR(2) процеса. Презентујући метод условних најмањих квадрата, оцењујемо параметре μ, $\theta_1 = \alpha p$ и $\theta_2 = \alpha(1-p)$. Одговарајуће статистике које се тичу параметара θ_1, θ_2 и μ су добијене решавањем система линеарних једначина:

$$\begin{bmatrix} Y_{N11} & Y_{N12} \\ Y_{N12} & Y_{N22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{cls} \\ \hat{\theta}_2^{cls} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{N01} \\ Y_{N02} \end{bmatrix}, \tag{4.1.11}$$

$$\hat{\mu}^{cls} = \frac{\sum\limits_{n=3}^{N} X_n - \hat{\theta}_1^{cls} \sum\limits_{n=3}^{N} X_{n-1} - \hat{\theta}_2^{cls} \sum\limits_{n=3}^{N} X_{n-2}}{\left(1 - \hat{\theta}_1^{cls} - \hat{\theta}_2^{cls}\right)(N-2)},$$

где су $Y_{Nij} = (N-2)\sum\limits_{n=3}^{N} X_{n-i}X_{n-j} - \sum\limits_{n=3}^{N} X_{n-i} \sum\limits_{n=3}^{N} X_{n-j}$, $i \leq j \in \{0,1,2\}$.

На крају, одређујемо оцене параметара методом момената. На основу формуле аутокорелационе функције, изведене раније, долазимо до система линеарних једначина

$$\rho(1) = \theta_1\rho(0) + \theta_2\rho(1)$$

$$\rho(2) = \theta_1\rho(1) + \theta_2\rho(0),$$

где су исто као изнад, $\theta_1 = \alpha p$ и $\theta_2 = \alpha(1-p)$. Затим, замењујући узорачке аутокорелације у претходним једначинама, Yule-Walker-ове оцене параметара θ_1 и θ_2 се добијају као решења следећег система једначина:

$$\begin{bmatrix} Z_{N00} & Z_{N01} \\ Z_{N01} & Z_{N00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{yw} \\ \hat{\theta}_2^{yw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{N01} \\ Z_{N02} \end{bmatrix},$$

где су $Z_{Nij} = \sum\limits_{n=j+1}^{N} (X_{n-i} - \overline{X}_N)(X_{n-j} - \overline{X}_N)$, $i \leq j \in \{0,1,2\}$, и $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$. Као што је познато, $\hat{\mu}^{yw}$ се рачуна помоћу узорачке средине $\overline{X}_N$. Упоређујући елементе матрица из претходног система, помножене са $(N-1)^{-1}$, са одговарајућим елементима матрица из система (4.1.11), помножене са $(N-2)^{-2}$, директним рачуном долазимо до тога да њихове разлике конвергирају ка 0, када $N \to \infty$. Ово упућује на асимптотску једнакост оцена добијених Yule-Walker-овом и методом условних најмањих квадрата.

Нумерички резултати

На крају овог пододељка представљамо нумеричке резултате остварене применом горе презентованих метода, а при оцењивању непознатих параметара MGINAR(1) и MGINAR(2) процеса. У ове сврхе је за сваки од процеса симулирано по 100 узорака дужине

10000. У случају MGINAR(1) модела, симулације су изведене за следеће стварне вредности параметара: (a) $\mu = 1$, $\alpha = 0,4$, $p = 0,1$, (b) $\mu = 3$, $\alpha = 0,2$, $p = 0,5$, (c) $\mu = 5$, $\alpha = 0,5$, $p = 0,7$. За MGINAR(2) модел следеће стварне вредности су узете у обзир: (a) $\mu = 1$, $\alpha = 0,2$, $p = 0,2$, (b) $\mu = 2$, $\alpha = 0,5$, $p = 0,6$; (c) $\mu = 5$, $\alpha = 0,7$, $p = 0,7$. У сваком од претходних случајева, за подузорке обима 100, 500, 1000, 5000 и 10000, узорачке средине и стандардне грешке добијених оцена су представљене у табелама 4.1 и 4.2. У свим случајевима MGINAR(1) модела, оцене су конвергентне, док стандарне грешке опадају са порастом обима узорака. Па ипак, неки резултати нису тако добри као код модела другог реда. Наиме, за сваку од вредности параметара, Yule-Walker-ов и метод условних најмањих квадрата, обезбеђују довољно добре оцене тек за обиме узорака веће или једнаке од 5000. Посебно велике вредности стандардне грешке су примећене у случају (*b*) за узорке обима 100. Непараметарске методе су постигле своје најбоље резултате при оцењивању параметра α, док метод максималне веродостојности показује најбоље перформансе при оцењивању свих параметара. Са друге стране, у случају MGINAR(2) модела, оцене такође конвергирају ка стварним вредностима параметара са веома малим стандардним грешкама. Може се приметити, да у случају најмањих стварних параметарских вредности, поменуте конвергенције нису тако брзе при оцењивању параметра p, за сваку од примењених процедура. Овакво понашање је карактеристично код метода максималне веродостојности и у случају параметра α. Међутим, као што се и очекује, најбољи резултати, посебно за веће вредности параметра, су постигнути применом ML оцена. Наиме, овим методом су у случају највеће вредности параметра μ добијене најмање стандардне грешке заједно са најбољим оценама.

4.1.4 Примена на реалним подацима

Како бисмо оценили перформансе уведених MGINAR модела, посматраћемо бројачки процес из стварног живота. Подаци које користимо су узети из криминолошке секције интернет сајта Forecasting Principles са веб адресом http://www.forecastingprinciples.com и представљају месечно бројање пријављених пуцњава, које су се догодиле у реону под јурисдикцијом 14. полицијске станице у Пит-

Табела 4.1: Средине и стандардне грешке оцена за неке стварне вредности параметара MGINAR(1) модела.

Обим	$\hat{\mu}^{yw}$	$\hat{\alpha}^{yw}$	$\hat{p}^{yw}$	$\hat{\mu}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{p}_{cls}$	$\hat{\mu}^{ml}$	$\hat{\alpha}^{ml}$	$\hat{p}^{ml}$
a) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0,4$ i $p = 0,1$									
100	0,99110	0,37303	0,86306	0,99466	0,37725	0,89570	0,98387	0,48330	0,11226
Ст. гр.	0,02261	0,01112	0,15854	0,02326	0,01119	0,15612	0,02933	0,03829	0,01054
500	0,99618	0,39554	0,23359	0,99665	0,39662	0,24470	1,04489	0,43589	0,10999
Ст. гр.	0,01064	0,00570	0,04892	0,01064	0,00563	0,04915	0,02078	0,02657	0,01044
1000	0,98876	0,40098	0,16896	0,98899	0,40132	0,17177	1,00134	0,41435	0,09702
Ст. гр.	0,00618	0,00387	0,03949	0,00616	0,00387	0,03948	0,01839	0,02472	0,00936
5000	1,00004	0,40034	0,09105	1,00010	0,40043	0,09786	1,00862	0,40473	0,09985
Ст. гр.	0,00317	0,00180	0,01768	0,00317	0,00180	0,01768	0,01077	0,00807	0,00260
10000	0,99861	0,40070	0,09035	0,99864	0,40075	0,09178	1,02037	0,40387	0,09570
Ст. гр.	0,00223	0,00130	0,01202	0,00223	0,00131	0,01200	0,00821	0,00250	0,00150
b) Стварне вредности $\mu = 3$, $\alpha = 0,2$ i $p = 0,5$									
100	3,02600	0,16780	241,80410	3,02503	0,16903	245,24370	3,00261	0,18339	0,50102
Ст. гр.	0,03753	0,00889	201,92480	0,03756	0,00897	205,23120	0,00259	0,02960	0,00069
500	2,99208	0,19581	2,29442	2,99220	0,19617	2,31985	2,99871	0,20406	0,50006
Ст. гр.	0,01841	0,00485	0,61459	0,01841	0,00485	0,61341	0,00198	0,00731	0,00065
1000	3,00150	0,20005	1,63458	3,00149	0,20018	1,64391	2,99975	0,20970	0,49978
Ст. гр.	0,01357	0,00359	0,44722	0,01358	0,00359	0,44680	0,00193	0,00656	0,00055
5000	3,00777	0,20114	0,50042	3,00778	0,20118	0,50851	3,00004	0,19303	0,49960
Ст. гр.	0,00564	0,00148	0,41858	0,00565	0,00148	0,41470	0,00032	0,00539	0,00011
10000	3,00771	0,20048	0,49132	3,00771	0,20050	0,49164	3,00118	0,19318	0,49958
Ст. гр.	0,00468	0,00112	0,40968	0,00468	0,00112	0,40967	0,00018	0,00378	0,00007
c) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0,5$ i $p = 0,7$									
100	4,93470	0,46236	2,09718	4,93886	0,46912	2,28867	5,00093	0,47776	0,70650
Ст. гр.	0,08307	0,00867	0,47956	0,08453	0,00852	0,44193	0,00243	0,01609	0,00310
500	4,96232	0,49262	1,07501	4,96102	0,49353	1,08376	5,00052	0,52239	0,70182
Ст. гр.	0,03784	0,00408	0,11440	0,03809	0,00407	0,11420	0,00154	0,00704	0,00197
1000	4,98917	0,49597	0,90970	4,98891	0,49659	0,91641	5,00015	0,49960	0,70058
Ст. гр.	0,02699	0,00288	0,08191	0,02693	0,00288	0,08176	0,00050	0,00541	0,00103
5000	5,02025	0,49938	0,72886	5,02007	0,49945	0,72968	5,00180	0,50390	0,69578
Ст. гр.	0,01561	0,00133	0,03324	0,01559	0,00133	0,03321	0,00047	0,00173	0,00092
10000	5,01194	0,50072	0,69746	5,01189	0,50076	0,69790	4,99991	0,49975	0,69907
Ст. гр.	0,00987	0,00098	0,02910	0,00987	0,00098	0,02909	0,00014	0,00102	0,00030

Табела 4.2: Средине и стандардне грешке оцена за неке стварне вредности параметара MGINAR(2) модела.

Обим	$\hat{\mu}^{yw}$	$\hat{\alpha}^{yw}$	$\hat{p}^{yw}$	$\hat{\mu}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{p}_{cls}$	$\hat{\mu}^{ml}$	$\hat{\alpha}^{ml}$	$\hat{p}^{ml}$
a) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0,2$ i $p = 0,2$									
100	0,97920	0,15595	-0,10306	0,98304	0,15706	0,22276	0,94054	0,19469	0,21598
Ст. гр.	0,01747	0,01600	0,48332	0,01817	0,01626	0,18035	0,07106	0,02865	0,04968
500	0,98302	0,19483	0,11519	0,98342	0,19570	0,11062	0,97817	0,18665	0,17315
Ст. гр.	0,00755	0,00761	0,04688	0,00744	0,00762	0,05129	0,01823	0,01174	0,03987
1000	0,99154	0,19992	0,18447	0,99176	0,20042	0,18449	0,96477	0,18955	0,19315
Ст. гр.	0,00542	0,00531	0,01514	0,00539	0,00532	0,01510	0,01029	0,01167	0,01352
5000	0,99839	0,20111	0,18705	0,99846	0,20120	0,18702	0,98925	0,19432	0,19311
Ст. гр.	0,00215	0,00220	0,00631	0,00216	0,00220	0,00632	0,00941	0,01121	0,00451
10000	0,99975	0,20053	0,18897	0,99979	0,20057	0,18896	0,99137	0,19630	0,19408
Ст. гр.	0,00167	0,00152	0,00442	0,00167	0,00153	0,00442	0,00358	0,00540	0,00247
b) Стварне вредности $\mu = 2$, $\alpha = 0,5$ i $p = 0,6$									
100	1,98940	0,44330	0,61715	1,98143	0,45149	0,62214	2,00090	0,52553	0,57496
Ст. гр.	0,03873	0,01188	0,02390	0,03986	0,01203	0,02450	0,00560	0,03063	0,01971
500	1,97108	0,48498	0,61143	1,96966	0,48651	0,61230	2,00322	0,49871	0,58943
Ст. гр.	0,01767	0,00580	0,00930	0,01778	0,00582	0,00941	0,00415	0,01379	0,00981
1000	1,99405	0,49454	0,60309	1,99367	0,49530	0,60356	1,99627	0,49131	0,58909
Ст. гр.	0,01346	0,00458	0,00781	0,01351	0,00460	0,00786	0,00150	0,01030	0,00676
5000	2,00264	0,49862	0,59928	2,00260	0,49878	0,59937	1,99957	0,50615	0,59501
Ст. гр.	0,00670	0,00205	0,00345	0,00671	0,00206	0,00345	0,00101	0,00501	0,00415
10000	2,00163	0,49950	0,59987	2,00166	0,49957	0,59991	1,99938	0,50979	0,59587
Ст. гр.	0,00474	0,00156	0,00239	0,00474	0,00156	0,00239	0,00073	0,00432	0,00493
c) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0,7$ i $p = 0,7$									
100	5,01340	0,62389	0,72118	4,99101	0,63382	0,73084	4,99909	0,70024	0,67096
Ст. гр.	0,13533	0,01243	0,01873	0,13765	0,01238	0,01943	0,00047	0,01446	0,01440
500	4,90798	0,68317	0,70477	4,90755	0,68503	0,70644	5,00052	0,69963	0,69765
Ст. гр.	0,05804	0,00502	0,00908	0,05872	0,00498	0,00906	0,00043	0,00895	0,00528
1000	4,99226	0,68978	0,70311	4,99171	0,69065	0,70396	5,00019	0,69971	0,70360
Ст. гр.	0,04175	0,00338	0,00638	0,04209	0,00335	0,00637	0,00042	0,00499	0,01262
5000	5,01856	0,69799	0,69986	5,01875	0,69816	0,70005	5,00014	0,70231	0,70068
Ст. гр.	0,02014	0,00138	0,00323	0,02020	0,00137	0,00323	0,00008	0,00212	0,00144
10000	5,00939	0,69873	0,70182	5,00954	0,69881	0,70191	5,00003	0,70000	0,69803
Ст. гр.	0,01371	0,00099	0,00219	0,01373	0,00099	0,00219	0,00008	0,00132	0,00158

сбургу. Обављено је 144 опсервација, од јануара 1990. до децембра 2001. Узорачка средина, дисперзија и аутокорелација разматраних података су редом 8,6736, 59,0745 и 0,6938, док су графикони самих реализација, њихових узорачких аутокорелационих и парцијалних аутокорелационих функција дати на слици 4.1. На основу PACF вредности опредељујемо се за INAR моделе другог реда, али како PACF(2) није тако значајан такође је оправдано покушати и примену INAR(1) модела.

Главни циљ у овом делу је да се покаже да је над неким подацима знатно ефикаснија примена модела заснованих на мешавини биномног и негативног биномног оператора, него модела заснованих само на једном од поменутих оператора. Са овим у вези, у случају модела другог реда, упоређујемо два наша мешовита INAR(2) модела (MGINAR(2)$\alpha\beta$, MGINAR(2)$\beta\alpha$) и мешовити модел са додатним условом $\alpha = \beta$ (MGINAR(2)$\alpha\alpha$) са комбинованим Po-INAR(2) моделом Weiß-а (2008c). Наиме, овај комбиновани INAR(2) модел је једини модел другог реда који је, као и наш, дефинисан помоћу мешавине lag-1 и lag-2 тининг оператора, са том разликом да су у оба случаја његови тининзи засновани на Бернулијевом бројачком низу. За сваки од ова 4 модела добијене су оцене непознатих параметара методом максималне веродостојности. Такође су одређени информациони критеријуми AIC и BIC, као и квадратни корен суме квадрата одступања осервираних и прогнозираних вредности серије. Посматрајући све ове резултате, представљене у табели 4.3, закључујемо да су најмање вредности одговарајућих величина добијене у случају MGINAR(2)$\beta\alpha$ модела, односно мешовитог INAR(2) модела са lag-1 β-негативним бимномним тинингом. Према томе, на посматраним подацима овај модел је најбољи међу примењеним INAR(2) моделима.

Разматрајући моделе реда 1, MGINAR(1)$\alpha\beta$ и MGINAR(1)$\alpha\alpha$ су упоређени у примени над датим криминолошким подацима о броју пуцњава са неким референтним INAR(1) моделима заснованим или на биномном или на негативном биномном тининг оператору. Наиме, примењени су следећи модели:

- Пуасонов INAR(1) модел (Al-Osh, Alzaid, 1987),
- Геометријски INAR(1) модел (Alzaid, Al-Osh, 1988),

- INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006),
- Квази-биномни INAR(1) модел са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1993),
- Негативни биномни INAR(1) модел са случајним коефицијентом (Weiß, 2008b),
- Нови геометријски INAR(1) модел (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),
- Негативни биномни INAR(1) модел (Ristić, Nastić, Bakouch, 2010),

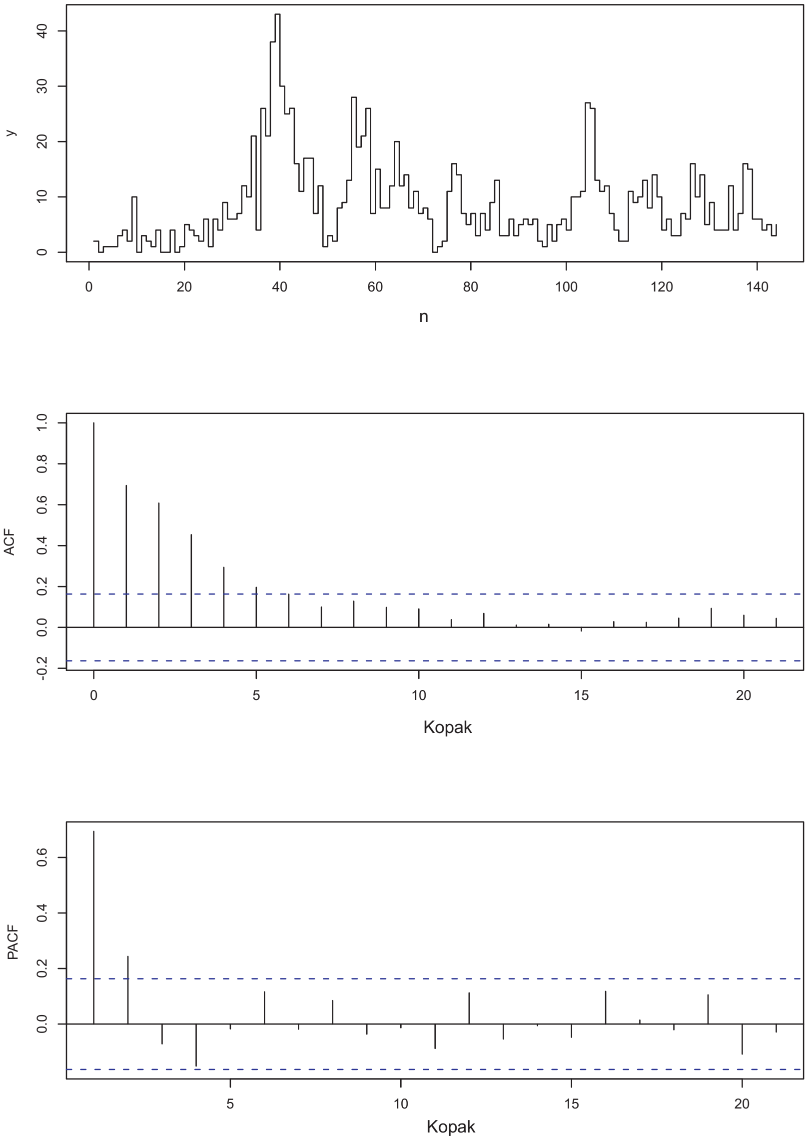
Овде су израчунате реализоване вредности истих статистика као у случају MGINAR(2) модела и презентоване су у табели 4.4. У односу на RMS вредности, MGINAR(1)$\alpha\beta$ је најприкладнији модел. Међутим, најмање вредности за AIC и BIC су добијене у случају NBRCINAR(1) модела, мада треба нагласити да су ове величине код MGINAR(1)$\alpha\beta$ модела веома приближних вредности, што је веома добро, имајући у виду да је код нашег модела потребно оценити један параметар више него код примене NBRCINAR(1). Најбољи остварени резултати при примени ова два модела се могу оправдати чињеницом да је узорачка дисперзија знатно већа од узорачке средине. Наиме, разматрани подаци о пуцњавама садрже велике појединачне реализације и имају доста изненадних промена у величини њихових вредности, што у случају ова оба модела проузрокује велике вредности условне дисперзије $Var(X_{n+k}|X_n)$, будући да је код ових модела она квадратана функција, као што је наглашено раније у овом одељку. Пошто условна дисперзија конвергира ка $Var(X_n)$ када k тежи ка бесконачности, онда је и природно очекивати велике вредности узорачке дисперзије. Према томе, ова изразито велика овердисперзија може бити један од разлога најбољих перформанси NBRCINAR(1) и MGINAR(1)$\alpha\beta$ модела, међу разматраним INAR(1) моделима.

Табела 4.3: INAR(2) оцене параметара, AIC, BIC и RMS за податке о пуцњавама.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
Пуасонов CINAR(2)	λ=3,9735			
	α=0,5468			
	p=0,5673	1021,9372	1030,8467	5,5869
MGINAR(2)$\alpha\alpha$	μ=6,6848			
	α=0,6555			
	p=0,3665	842,5856	851,4951	5,6000
MGINAR(2)$\alpha\beta$	μ=6,5389			
	p=0,3522			
	α=0,7125			
	β=0,5663	842,4953	854,3746	5,6248
MGINAR(2)$\beta\alpha$	μ=7,4732			
	p=0,2900			
	β=0,9305			
	α=0,4168	829,1663	841,0456	5,4059

Табела 4.4: INAR(1) оцене параметара, AIC, BIC и RMS за податке о пуцњавама.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
PoINAR(1)	λ=4,7930			
	α=0,4438	1122,6681	1128,6077	5,8313
GINAR(1)	q=0,8674			
	α=0,4081	906,7544	912,6940	6,0674
NBINAR(1)	p=0,1410			
	θ=1,2836			
	α=0,4046	891,4295	900,3389	5,9622
GPQINAR(1)	λ=2,0526			
	θ=0,4947			
	ρ=0,5037	849,1340	858,0434	6,1506
NBRCINAR(1)	n=2,1916			
	p=0,2088			
	ρ=0,5429	844,7159	853,6253	5,6287
NGINAR(1)	μ=7,1505			
	α=0,6978	862,7353	868,6749	5,5244
NNBINAR(1)	p=3,8262			
	θ=2,2304			
	α=0,5981	849,6424	858,5518	5,5533
MGINAR(1)$\alpha\alpha$	μ=7,7216			
	p=0,3834			
	α=0,7348	857,7985	866,7080	5,5183
MGINAR(1)$\alpha\beta$	μ=8,3051			
	p=0,1381			
	α=0,1296			
	β=0,8276	845,5236	857,4029	5,5112



Слика 4.1: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о пуцњавама.

4.2 Мешовити INAR модели вишег реда

Један од INAR(2) модела представљених у претходном одељку се односи на случај у којем се зависност елемената временског низа од елемената из претходног временског интервала моделира биномним тинингом, док се веза са елементима из периода пре претходног остварује применом геометријског бројачког низа. У пракси се веома често срећу примери на којима се могу применити овакви модели. На пример, у криминологији где се посматрају дела препродаје наркотика, примећено је да одмах након извршења кривичног дела постоји краткотрајно "повлачење" да би убрзо након дошло до експанзије у броју нових извршених кривичних дела која су испровоцирана претходним. С обзиром на пасивност која најпре постоји, зависност X_n од X_{n-1} се најприродније моделира Бернулијевим бројачким низом. Са друге стране након протеклог једног одређеног периода опсервације интерактивност у популацији знатно расте, јер практично 1 купац у претходној продаји даље може да прода већем броју нових купаца. Тако се зависност X_n од $X_{n-2}, X_{n-3}, \ldots, X_{n-p}$ у временском низу, којим се региструје број посматраних кривичних дела, најприкладније описује геометријским бројачким низом. Међутим, овде се види да је потребно уопштити горе поменути INAR(2) модел и то увођењем мешовитог INAR(p) модела са уопштеном негативном биномном компонентом употребљеног тининг оператора. Управо је овај модел предмет проучавања овог одељка, где након његовог дефинисања, доказујемо егзистенцију одговарајућег јединственог стационарног мешовитог INAR(p) процеса са уопштеном маргиналном расподелом. Након тога се анализирају корелациона структура и неке важније статистичке величине, да би на крају представили асимптотска својства неких оцена параметара модела, као и могућу примену модела са геометријском маргиналном расподелом на стварним криминолошким подацима.

4.2.1 Конструкција модела

Ненегативни целобројни ауторегресивни модел вишег реда, који се проучава у овом одељку, конструише се помоћу два тининг оператора, биномног "$\circ_t$" и негативног биномног "$*_t$". Као што је већ добро познато, биномни тининг је дефинисан са $\alpha \circ_t X = \sum\limits_{i=1}^{X} Y_i^{(t)}$, где је $\left\{Y_i^{(t)}\right\}$ бројачки низ независних случајних промењљивих са Бернулијевом расподелом и параметром α, док је негативни биномни тининг дат са $\alpha *_t X = \sum\limits_{j=1}^{X} W_j^{(t)}$, чији се бројачки низ $\left\{W_j^{(t)}\right\}$ састоји од независних случајних промењљивих са $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ расподелом. Временски низ $\{X_t\}$ који посматрамо има ненегативну целобројну маргиналну расподелу и генерисан је са

$$X_t = \begin{cases} \alpha \circ_t X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{с.в. } \phi_1, \\ \alpha *_t X_{t-2} + \varepsilon_t, & \text{с.в. } \phi_2, \\ \alpha *_t X_{t-3} + \varepsilon_t, & \text{с.в. } \phi_3, \\ \vdots & \\ \alpha *_t X_{t-p} + \varepsilon_t, & \text{с.в. } \phi_p, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

где је $\sum\limits_{i=1}^{p} \phi_i = 1$, $\phi \geq 0$, $\alpha \in (0,1)$ и следећи услови су задовољени:

(*i*) $\{\varepsilon_t\}$ је низ независних једнако расподељених случајних промењљивих за које је $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$ и $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$,

(*ii*) ε_t су независне од свих X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\alpha *_{m+j} X_m$, за које је $m < t$ и $j = 2, 3, \ldots, p$,

(*iii*) бројачки низови тининг оператора у тренутку t су независни једни од других,

(*iv*) бројачки низови тининг оператора примењених над X_t и случајне промењљиве X_{t-1}, X_{t-2}, $\ldots$ су независни.

На даље ће индекси тининг оператора због једноставнијег записивања бити изостављени, осим у случајевима када то није очигледно. Претходно конструисани процес, са уопштеном маргиналном расподелом, могао би се задати и на други начин. Наиме, једначина (4.2.1) се може записати као

$$X_t = U_1 \circ X_{t-1} + U_2 * X_{t-2} + U_3 * X_{t-3} + \cdots + U_p * X_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad (4.2.2)$$

где је $P\left(U_i = \alpha, U_j = 0, j \neq i\right) = \phi_i$ расподела случајних променљивих U_1, U_2, …, U_p. Овај облик је згодан за матрично записивање у облику

$$\begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{p-1} & U_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \diamond \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (4.2.3)$$

или краће као

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A}_t \diamond \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \qquad (4.2.4)$$

где смо са $\mathbf{X}_t$, $\mathbf{A}_t$, $\mathbf{X}_{t-1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ означили одговарајуће матрице и векторе из (4.2.3), док "$\diamond$" представља оператор дефинисан у (4.2.2).

Сада можемо дати следећу дефиницију процеса.

Дефиниција 4.2.1 *Низ $\{X_t\}$, $t \in N$, ненегативних целобројних случајних променљивих је мешовити ненегативни целобројни ауторегресивни процес реда p, или MINAR(p), ако постоји низ $\{\varepsilon_t\}$, $t \in N$ независних једнако расподељених случајних променљивих, такав да је задовољена једначина* (4.2.1) *са свим пратећим условима* $(i) - (iv)$.

4.2.2 Егзистенција MINAR(p) процеса

Овде ћемо доказати егзистенцију јединственог стационарног MINAR(p) процеса. Најпре ћемо дати неколико корисних лема.

Лема 4.2.1 $E(\mathbf{A} \diamond \mathbf{X}) = \mathbf{A}'E(\mathbf{X})$, *где је* $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_p]^T$,

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \alpha_i = E(U_i),\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Доказ. На основу дефиниције оператора ”$\diamond$”, имамо да је

$$E(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})=E\left[U_1\circ X_1+\sum_{j=2}^{p}U_j*X_j,X_1,X_2,\dots,X_{p-1}\right]^T.$$

Такође, из дефиниција биномног и негативног биномног тининга следи да је $E(U_1\circ X_1)=\alpha_1E(X_1)$ и $E(U_j*X_j)=\alpha_jE(X_j)$, $j=2,3,\dots p$, где су $\alpha_i=\alpha\phi_i$, $i=1,2,\dots,p$. Затим, заменом ових једначина у прву, добијамо да је

$$E(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X}) \;=\; \left[\sum_{i=1}^{p}\alpha_iE(X_i),E(X_1),\dots,E(X_{p-1})\right]^T=\mathbf{A}'E(\mathbf{X}).\ \square$$

Лема 4.2.2 *$E\left((\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})^T\right)=\mathbf{A}'E(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)\mathbf{A}'^T+\mathbf{C}$, где је $\mathbf{C}$ матрица*

$$\left[\begin{array}{c|c} \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_i\alpha_j\left(E\left(X_i^2\right)-E\left(X_iX_j\right)\right)+(1-\alpha)\alpha_1E(X_1)+(1+\alpha)\sum\limits_{j=2}^{p}\alpha_jE(X_j) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

реда $p\times p$, док су $\mathbf{0}$ одговарајуће нула матрице.

Доказ. Размотримо најпре $(1,1)$ елемент матрице $E\left((\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})^T\right)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X})^T_{1,1} \;=\;& (U_1\circ X_1)^2+2\sum_{j=2}^{p}(U_1\circ X_1)(U_j*X_j)+\sum_{j=2}^{p}(U_j*X_j)^2\\ &+\;\sum_{i,j=2}^{p}\sum_{i\neq j}(U_i*X_i)(U_j*X_j).\end{aligned}$$

Из основних својстава биномног и негативног биномног тининга следи да је

$$E(U_1\circ X_1)^2=\alpha_1(\alpha E(X_1^2)+(1-\alpha)E(X_1)),$$

$$E(U_j*X_j)^2=\alpha_j(\alpha E(X_j^2)+(1+\alpha)E(X_j)).$$

Даље, с обзиром да је $U_iU_j = 0$, $i \neq j$, са вероватноћом 1, то је $E((U_1 \circ X_1)(U_j * X_j)) = 0$, $j = 2, 3, \ldots, p$ и $E((U_i * X_i)(U_j * X_j)) = 0$, $i \neq j$. Тако, на основу добијених резултата важи да је

$$E\left((\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})(\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})^T\right)_{1,1} = \alpha \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E\left(X_i^2\right) + \alpha_1(1-\alpha)E(X_1) + (1+\alpha) \sum_{j=2}^{p} \alpha_j E(X_j).$$

Слично, на основу истих резултата добијамо за $i \geq 2$ да је

$$E\left((\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})(\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})^T\right)_{1,i} = E\left((\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})(\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})^T\right)_{i,1} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j E(X_iX_j)$$

и за $i, j \geq 2$ да је $E\left((\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})(\mathbf{A} \diamond \mathbf{X})^T\right)_{i,j} = E(X_iX_j)$.

Са друге стране, директно изводимо да је $\mathbf{A}'E\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right)\mathbf{A}'^T =$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_i\alpha_j E\left(X_iX_j\right) & \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_1X_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_{p-1}X_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_1X_i) & E\left(X_1^2\right) & \ldots & E\left(X_1X_{p-1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i E(X_{p-1}X_i) & E\left(X_1X_{p-1}\right) & \ldots & E\left(X_{p-1}^2\right) \end{bmatrix}.$$

Остатак доказа је очигледан. □

Лема 4.2.3 (Latour, 1998) *Нека је* $\alpha(z) = z^p - \alpha_1 z^{p-1} - \cdots - \alpha_{p-1}z - \alpha_p$. *Ако је* $\sum\limits_{k=1}^{p} |\alpha_k| < 1$, *онда су све нуле функције* $\alpha(z)$ *унутар јединичног круга.*

Лема 4.2.4 *Све сопствене вредности матрице* $\mathbf{A}'$ *су унутар јединичног круга.*

Доказ. Применом математичке индукције добијамо да из $det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = 0$ следи да је $\lambda^p - \alpha_1\lambda^{p-1} - \cdots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p = 0$, где је $\mathbf{I}$ одговарајућа јединична матрица. Takође, важи да је $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha < 1$. Према томе, сви услови Леме 4.2.3 су испуњени, што је довољно за доказ. □

Лема 4.2.5 $E\left(\left(\mathbf{A}\diamond\mathbf{X}\right)\mathbf{Y}^T\right)=\mathbf{A}'E\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T\right).$

Доказ. Доказ се изводи аналогно доказима Лема 4.2.1 и 4.2.2. □

Сада дајемо веома важну теорему. Теореме сличне овој представљају централне резултате у Du, Li (1991) и Latour (1998), тако да ћемо овде користити исти низ корака у доказивању, као што је то урађено у поменутим радовима. Такође, малобројни слични делови доказа ће бити само краће наведени, док у већем делу, због разлика у самим процесима који се посматрају, постоје битне разлике, што ће бити детаљно презентовано.

Теорема 4.2.1 *Ако је* $\{\varepsilon_t\}$ *иновациони низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих, такав да је* $E(\varepsilon_t)=\mu_\varepsilon$ *и* $Var(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2<\infty$*, онда постоји јединствен, слабо стационаран процес* $\{X_t\}$*, који је решење једначине* (4.2.2)*, где је* $\sum_{i=1}^{p}\phi_i=1$ *и* $\alpha\in(0,1)$.

Доказ. Да бисмо доказали ову теорему, довољно је конструисати низ $\left\{X_t^{(n)}\right\}$ који задовољава једначину (4.2.2) и такав да је процес $\{X_t\}$ дефинисан са

$$X_t=\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}, \tag{4.2.5}$$

као гранична вредност у средње квадратном смислу. Према томе, уводимо низ

$$X_t^{(n)}=\begin{cases}0, & n<0\\ \varepsilon_t, & n=0\\ U_1\circ X_{t-1}^{(n-1)}+\sum\limits_{j=2}^{p}U_j*X_{t-j}^{(n-j)}+\varepsilon_t, & n>0\,.\end{cases}$$

Да бисмо доказали (4.2.5), довољно је показати да је $\left\{X_t^{(n)}\right\}_{n\in N}$ Кошијев низ у $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, што је Хилбертов простор. Нека је $\mathbf{X}_t^{(n)}=\left[X_t^{(n)},X_{t-1}^{(n-1)},\ldots,X_{t-p+1}^{(n-p+1)}\right]^T$. Тада је $\mathbf{X}_t^{(n)}=\mathbf{A}_t\diamond\mathbf{X}_{t-1}^{(n-1)}+\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Из Леме 4.2.1 следи да је $E\left(\mathbf{X}_t^{(n)}\right)=\mathbf{A}'E\left(\mathbf{X}_{t-1}^{(n-1)}\right)+\boldsymbol{\mu}_\varepsilon$, где је $\boldsymbol{\mu}_\varepsilon=[\mu_\varepsilon,0,\ldots,0]^T$. Затим рекурентном применом ове леме још $n-1$ пута, добијамо да је $E\left(\mathbf{X}_t^{(n)}\right)=(\mathbf{I}-\mathbf{A}')^{-1}\left(\mathbf{I}-(\mathbf{A}')^{n+1}\right)\boldsymbol{\mu}_\varepsilon$, што не зависи од t и уз то је и коначно, јер на основу Леме 4.2.4, имамо да $(\mathbf{A}')^n \to \mathbf{0}$, када $n \to \infty$. Одавде је $E\left(X_t^{(n)}\right) < \infty$. Директним израчунавањем добија се да је

$$\begin{aligned} E\left(X_t^{(n)}\right)^2 &= \alpha \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E\left(X_{t-i}^{(n-i)}\right)^2 + 2\mu_\varepsilon \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E\left(X_{t-i}^{(n-i)}\right) \\ &+ (1-\alpha)\alpha_1 E\left(X_{t-1}^{(n-1)}\right) + (1+\alpha)\sum_{j=2}^{p} \alpha_j E\left(X_{t-j}^{(n-j)}\right) + \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Понављајући овај поступак још $n-1$ пута, тј. све док $E\left(X_{t-i}^{(n-i)}\right)^2$ не нестане са десне стране претходне једначине, може се закључити да је $E\left(X_t^{(n)}\right)^2$ коначно и да не зависи од t. Према томе, важи да је $\left\{X_t^{(n)}\right\} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Сада, покажимо да је $\left\{X_t^{(n)}\right\}$ Кошијев низ. Нека је $U(n,t,k) = |X_t^{(n)} - X_t^{(n-k)}|$ и $l(n,t,k) = \min\left\{X_t^{(n)}, X_t^{(n-k)}\right\}$. Означимо са $\mathcal{D}$ партицију простора елементарних догађаја Ω, дефинисану са $\mathcal{D} = \{D_i | i = 1, 2, \ldots, p\}$, где је $D_i = \{\omega | U_i(\omega) = \alpha, U_j(\omega) = 0, j \neq i\}$. Тако, за свако $\omega \in D_i$, где је $i > 1$ без губљења општости, имамо да је

$$\begin{aligned} U(n,t,k) &= \left|\alpha * X_{t-i}^{(n-i)} - \alpha * X_{t-i}^{(n-i-k)}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{U(n-i,t-i,k)} W_{l(n-i,t-i,k)+j} \\ &\overset{d}{=} \alpha * U(n-i, t-i, k). \end{aligned}$$

Према томе

$$\begin{aligned} U(n,t,k) &\overset{d}{=} \alpha \circ U(n-1,t-1,k) I_{D_1} + \sum_{j=2}^{p} \alpha * U(n-j,t-j,k) I_{D_j} \\ &= U_1 \circ U(n-1,t-1,k) + \sum_{j=2}^{p} U_j * U(n-j,t-j,k). \end{aligned}$$

Ако је $\mathbf{U}_{t,k}^{(n)} = [U(n,t,k), U(n-1,t-1,k), \ldots, U(n-p+1,t-p+1,k)]^T$, онда се претходна једначина може записати као

$$\mathbf{U}_{t,k}^{(n)} \stackrel{d}{=} \mathbf{A}_t \diamond \mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)}. \tag{4.2.6}$$

Затим, применом Леме 4.2.1 добијамо да је

$$E\left(\mathbf{U}_{t,k}^{(n)}\right) = \mathbf{A}' E\left(\mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)}\right) = \cdots = (\mathbf{A}')^n E\left(\mathbf{U}_{t-n,k}^{(0)}\right) = (\mathbf{A}')^n \boldsymbol{\mu}_\varepsilon,$$

што је на основу Леме 4.2.4 довољно за $E\left(\mathbf{U}_{t,k}^{(n)}\right) < \infty$. Уведимо $U(n-l)$ као једноставнију ознаку за $U(n-l,t-l,k)$. Из (4.2.6) и Леме 4.2.2 имамо такође да је

$$E\left(\mathbf{U}_{t,k}^{(n)} \mathbf{U}_{t,k}^{(n)T}\right) = \mathbf{A}' E\left(\mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)} \mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)T}\right) \mathbf{A}'^T + \mathbf{C}_{p\times p}, \tag{4.2.7}$$

где је елемент из прве врсте и прве колоне матрице $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} c_{11} &= (1-\alpha)\alpha_1 E(U(n-1)) + (1+\alpha)\sum_{j=2}^{p} \alpha_j E(U(n-j)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(U(n-i))^2 - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i\alpha_j E(U(n-i)U(n-j)) \\ &\le (1+\alpha)\alpha \sum_{j=1}^{p} E(U(n-j)) + \alpha^2 \sum_{i=1}^{p} E(U(n-i))^2. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Такође је очигледно да је

$$E(U(n,t,k))^2 \le (1+\alpha)\alpha \sum_{j=1}^{p} E(U(n-j)) + \alpha^2 \sum_{i=1}^{p} E(U(n-i))^2. \tag{4.2.9}$$

Сада, применимо (4.2.9) над (4.2.8), довољан број пута, односно све док не добијемо следећу неједнакост

$$\begin{aligned} c_{11} &\le (1+\alpha)\alpha \sum_{j=1}^{p} E(U(n-j)) + \alpha^3(1+\alpha)\sum_{j=1}^{p}\sum_{i_1=1}^{p} E(U(n-i_i-j)) \\ &\quad + \alpha^5(1+\alpha)\sum_{j=1}^{p}\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p} E(U(n-i_i-i_2-j)) + \ldots \\ &\quad + \alpha^{2n+1}(1+\alpha)\sum_{j=1}^{p}\sum_{i_1=1}^{p}\ldots\sum_{i_n=1}^{p} E(U(n-i_i-i_2-\ldots-i_n-j)). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Нека је сада

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} .$$

Онда се претходна неједнакост може записати као

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \quad \leq \quad & \alpha(1+\alpha)diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon) + \alpha^3(1+\alpha)\sum_{i_1=1}^{p} diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-i_1-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon) \\ & +\alpha^5(1+\alpha)\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p} diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-i_1-i_2-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon) + \dots \\ & +\alpha^{2n+1}(1+\alpha)\sum_{i_1=1}^{p}\cdots\sum_{i_n=1}^{p} diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-i_1-\dots-i_n-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon). \end{aligned}$$

Тако, одавде и из (4.2.7) добијамо да је

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{U}_{t,k}^{(n)}\mathbf{U}_{t,k}^{(n)^T}\right) \quad \leq \quad & \mathbf{A}'E\left(\mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)}\mathbf{U}_{t-1,k}^{(n-1)^T}\right)\mathbf{A}'^T + \alpha(1+\alpha)diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon) \\ & +(1+\alpha)\sum_{l=1}^{n}\alpha^{2l+1}\sum_{i_1=1}^{p}\cdots\sum_{i_l=1}^{p} diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-i_1-\dots-i_l-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon). \end{aligned}$$

Рекурентном применом ове неједнакости на први сабирак са њене десне стране, следи да је

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{U}_{t,k}^{(n)}\mathbf{U}_{t,k}^{(n)^T}\right) \quad \leq \quad & (\mathbf{A}')^n \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{A}')^{nT} \\ & +\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{A}')^j \Bigg[\alpha(1+\alpha)diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon) + \\ & +(1+\alpha)\sum_{l=1}^{n}\alpha^{2l+1}\sum_{i_1=1}^{p}\cdots\sum_{i_l=1}^{p} diag(\mathbf{B}(\mathbf{A}')^{n-i_1-\dots-i_l-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon)\Bigg](\mathbf{A}')^{j^T}. \end{aligned}$$

Како на основу Леме 4.2.4, $(\mathbf{A}')^n \to \mathbf{0}$, када $n \to \infty$, то први члан са десне стране претходне неједнакости тежи ка $\mathbf{0}$. Аналогним поступком као у доказу Latour-а (1998), показује се да други члан са десне стране претходне неједнакости такође тежи ка $\mathbf{0}$. С обзиром да смо показали да десна страна претходне неједнакости конвергира ка $\mathbf{0}$, када n тежи ка ∞, добили смо да $\mathbf{U}_{t,k}^{(n)}$ средње квадратно тежи нули. Одавде, $\left\{X_t^{(n)}\right\}$ је Кошијев низ, што је довољно за егзистенцију процеса. Остатак доказа, који се тиче стационарности и јединствености процеса, аналогно се изводи као у Du, Li (1991) и Latour (1998). $\square$

Даље, ако претпоставимо да су случајне променљиве временског низа једнако расподељене, односно да се маргинална расподела посматраног MINAR(p) процеса не мења у току времена, тада важе неке додатне особине модела, о којима говори следеће тврђење.

Теорема 4.2.2 *Процес уведен Дефиницијом* 4.2.1*, који се састоји од једнако расподељених случајних променљивих, је строго стационаран и ергодичан.*

Доказ. Да би процес $\{X_t\}$ био строго стационаран, довољно је доказати да је

$$P\left(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_k = i_k\right) = P\left(X_{t+1} = i_1, X_{t+2} = i_2, \ldots, X_{t+k} = i_k\right),$$

за свако $t, k \geq 0$. Из Дефиниције 4.2.1 видимо да је $\{X_t\}$ процес Маркова реда p. Без губљења општости, претпоставимо да је $p \leq k$. Тада имамо да је

$$\begin{aligned}
P(X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) &= P(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_{k-p} = i_{k-p}) \\
&\times \; P(X_{k-1} = i_{k-1} | X_{k-2} = i_{k-2}, \ldots, X_{k-p-1} = i_{k-p-1}) \\
&\ldots \; P(X_p = i_p | X_{p-1} = i_{p-1}, \ldots, X_1 = i_1) \\
&\ldots \; P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) P(X_1 = i_1),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
P(X_{t+1}=i_1, \ldots, X_{t+k}=i_k) &= P(X_{t+k}=i_k | X_{t+k-1}=i_{k-1}, \ldots, X_{t+k-p}=i_{k-p}) \\
&\times \; P(X_{t+k-1}=i_{k-1} | X_{t+k-2}=i_{k-2}, \ldots, X_{t+k-p-1}=i_{k-p-1}) \\
&\ldots \; P(X_{t+p}=i_p | X_{t+p-1} = i_{p-1}, \ldots, X_{t+1}=i_1) \\
&\ldots \; P(X_{t+2}=i_2 | X_{t+1}=i_1) P(X_{t+1}=i_1).
\end{aligned}$$

Користећи претпоставку теореме и чињеницу да је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих, лако се проверава да су одговарајући фактори са десне стране претходних двеју једнакости међусобно једнаки. Овим је окончан први део доказа. Са друге стране ергодичност процеса се изводи на потпуно исти начин као у случају Теореме 2.1.1. □

4.2.3 Аутокорелациона структура и условне статистичке величине

Овде као и до краја одељка претпоставља се једнака расподељеност случајних променљивих процеса. Најпре ћемо рећи нешто више о корелационој структури, што ће нам као и раније послужити као добра основа у оцењивану непознатих параметара модела. Означимо аутоковаријансну и аутокорелациону функцију посматраног процеса, редом са $\gamma(k)$ и $\rho(k)$. Полазећи од случајног узорка $X_1, X_2, \ldots, X_N$, њихове добро познате оцене су

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(X_t - \overline{X}_N)(X_{t+k} - \overline{X}_N) \quad \text{и} \quad \hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)},$$

где је $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} X_t$. Из ергодичности процеса следи строга постојаност ових статистика.

Сада, користећи (4.2.4) као репрезентацију процеса добијамо да је њена аутоковаријансна матрица

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= E\left((\mathbf{X}_t - E(\mathbf{X}_t))(\mathbf{X}_{t-k} - E(\mathbf{X}_{t-k}))^T\right)\\ &= \begin{bmatrix} \gamma(k) & \gamma(k+1) & \ldots & \gamma(k+p-1) \\ \gamma(k-1) & \gamma(k) & \ldots & \gamma(k+p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(k-p+1) & \gamma(k-p+2) & \ldots & \gamma(k) \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Ако прођемо математичким очекивањем кроз (4.2.4), из стационарности процеса имамо да је

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}')\, E(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}_\varepsilon \tag{4.2.12}$$

Применом ове једнакости и Леме 4.2.5, изводи се следећи низ трансформација

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= E\left((\mathbf{A}_t \diamond \mathbf{X}_{t-1})\mathbf{X}_{t-k}^T\right) + E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{X}_{t-k}^T\right) - E(\mathbf{X}_t)E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right)\\ &= \mathbf{A}'E\left(\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}_{t-k}^T\right) - \mathbf{A}'E(X_{t-1})E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right) + \mathbf{A}'E(X_{t-1})E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right)\\ &\quad + E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t\right)E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right) - E(\mathbf{X}_t)E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right)\\ &= \mathbf{A}'\Gamma_{k-1} + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t)E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right) + (\mathbf{A}' - \mathbf{I})E\left(\mathbf{X}_t\right)E\left(\mathbf{X}_{t-k}^T\right)\\ &= \mathbf{A}'\Gamma_{k-1}.\end{aligned}$$

Наравно, исти резултат важи и за аутокорелациону матрицу, тј.

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{A}'\boldsymbol{\rho}_{k-1}. \tag{4.2.13}$$

Изједначавајући елементе из прве врсте и прве колоне са леве и десне стране претходне матричне једнакости, добијамо да је

$$\rho(k) = \alpha_1\rho(|k-1|) + \cdots + \alpha_p\,\rho(|k-p|), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{4.2.14}$$

Како бисмо додатно окарактерисали претходни резултат, наводимо следеће помоћно тврђење.

Лема 4.2.6 (Latour, 1998) *Нека су α_i такви да је $0 \leq \alpha_i \leq 1$ за $i = 1, 2, \ldots, p$ и такви да је $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$. Систем једначина* (4.2.14) *са непознатим $\rho(k)$, за $k = 1, 2, \ldots, p$ има јединствено решење.*

Како је $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha < 1$, услови претходне леме су испуњени, односно вредности аутокорелационих функција $\rho(0)$, $\rho(1)$, ..., $\rho(p)$ су једнозначно одређене претходним системом једначина. Са друге стране, рекурентном применом једнакости (4.2.13) добијамо да је

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{A}'\boldsymbol{\rho}_{k-1} = (\mathbf{A}')^2\boldsymbol{\rho}_{k-2} = \cdots = (\mathbf{A}')^k\boldsymbol{\rho}_0\,.$$

Пошто $(\mathbf{A}')^k \to \mathbf{0}_{p\times p}$, тада $\boldsymbol{\rho}_k \to \mathbf{0}_{p\times p}$, када $k \to \infty$. Тако, $\rho(k) \to 0$, када $k \to \infty$, што је иначе карактеристично својство ауторегресивних процеса.

Имајући у виду Дефиницију 4.2.1 процеса $\{X_t\}$ очигледно је да је у питању процес Маркова реда p. Због тога се "прошлост" процеса може представити помоћу $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p+1})$. Тако, полазећи од (4.2.2) израчунавамо једнокорачну регресију као

$$\begin{aligned} E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= E(U_1 \circ X_t|\mathcal{F}_t) + \sum_{j=2}^{p} E\,(U_j * X_{t-j+1}|\mathcal{F}_t) + \mu_\varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i+1} + (1-\alpha)\mu. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Лако се доказује математичком индукцијом да аналогна релација важи и у случају k-корачног условног математичког очекивања, односно $E(X_{t+k}|\mathcal{F}_t) = \sum\limits_{i=1}^{p} E(X_{t+k-i}|\mathcal{F}_t) + \mu(1-\alpha)$. Сада, ако процес запишемо у матричном облику, помоћу једнакости $(\mathbf{I}-\mathbf{A}')\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}_t)$ која следи из његове стационарности, добијамо да се и k-корачно условно математичко очекивање може записати у следећем матричном облику,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_{t+k}|\mathcal{F}_t) &= \mathbf{A}'E(\mathbf{X}_{t+k-1}|\mathcal{F}_t) + \boldsymbol{\mu}_\varepsilon \\ &= (\mathbf{A}')^2 E(\mathbf{X}_{t+k-2}|\mathcal{F}_t) + \mathbf{A}'\boldsymbol{\mu}_\varepsilon + \boldsymbol{\mu}_\varepsilon \\ &= (\mathbf{A}')^k \mathbf{X}_t + \left(\mathbf{I} - (\mathbf{A}')^k\right)(\mathbf{I}-\mathbf{A}')^{-1}\boldsymbol{\mu}_\varepsilon \\ &= (\mathbf{A}')^k \mathbf{X}_t + \left(\mathbf{I} - (\mathbf{A}')^k\right)\boldsymbol{\mu}, \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

где је $E(\mathbf{X}_{t+k}|\mathcal{F}_t) = [E(X_{t+k}|\mathcal{F}_t), E(X_{t+k-1}|\mathcal{F}_t), \dots, E(X_{t+k-p+1}|\mathcal{F}_t)]^T$. Коначно, на основу (4.2.16) добијамо да је $\lim\limits_{k\to\infty} E(X_{t+k}|\mathcal{F}_t) = E(X) = \mu$.

Сада ћемо посматрати условну функцију генератрисе вероватноће, дату са $\Phi_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}(s) = E\left(s^{X_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right)$. Наиме, извешћемо k-корачну условну функцију генератрисе вероватноће, која је иначе веома значајна с обзиром да се може користити као полазна тачка при одређивању неких других статистичких величина. Директно се добија да је

$$\begin{aligned} \Phi_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}(s) &= \left(\phi_1 E\left(s^{\alpha\circ X_t}|\mathcal{F}_t\right) + \sum_{j=2}^{p} \phi_j E\left(s^{\alpha * X_{t-j+1}}|\mathcal{F}_t\right)\right) E\left(s^{\varepsilon_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \Phi_\varepsilon(s)\left(\phi_1\left(\Phi_Y(s)\right)^{X_t} + \sum_{j=2}^{p}\phi_j\left(\Phi_W(s)\right)^{X_{t-j+1}}\right). \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Како је $E\left(s^{\alpha\circ X_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right) = \Phi_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}(\Phi_Y(s))$, тада као у претходном извођењу имамо да је

$$\Phi_{X_{t+2}|\mathcal{F}_t}(s) = \Phi_\varepsilon(s)\left(\phi_1\Phi_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}(\Phi_Y(s)) + \sum_{j=2}^{p}\phi_j\left(\Phi_W(s)\right)^{X_{t-j+2}}\right).$$

Затим, понављањем овог поступка довољан број пута, добија се k-корачна условна функција генератрисе вероватноће

$$\Phi_{X_{t+k}|\mathcal{F}_t}(s) = \Phi_\varepsilon(s)\left(\phi_1\Phi_{X_{t+k-1}|\mathcal{F}_t}(\Phi_Y(s)) + \sum_{j=2}^{p}\phi_j\Phi_{X_{t+k-j}|\mathcal{F}_t}(\Phi_W(s))\right).$$

Вероватноће прелаза

Вероватноће прелаза имају веома важну улогу у одређивању заједничке расподеле вероватноће посматраног временског низа. Како је MINAR(p) процес Маркова p-тог реда, то имамо да је

$$
\begin{aligned}
& P(X_t = x_t | X_{t-i} = x_{t-i}, i = 1, \ldots, p) \\
= \; & P\left(U_1 \circ X_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} U_j * X_{t-j} + \varepsilon_t = x_t | X_{t-i} = x_{t-i}, i = 1, \ldots, p \right) \\
= \; & \sum_{j=1}^{p} \phi_j I_{\{x_{t-j}=0\}} P(\varepsilon_t = x_t) \\
+ \; & \phi_1 I_{\{x_{t-1} \neq 0\}} \sum_{k=0}^{min\{x_t, x_{t-1}\}} P(\varepsilon_t = x_t - k) \binom{x_{t-1}}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{x_{t-1}-k} \\
+ \; & \sum_{j=2}^{p} \phi_j I_{\{x_{t-j} \neq 0\}} \sum_{k=0}^{x_t} P(\varepsilon_t = x_t - k) + \binom{x_{t-j} - 1 + k}{x_{t-j} - 1} \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k + x_{t-j}}} .
\end{aligned}
$$

4.2.4 Оцењивање непознатих параметара

Полазећи од случајног узорка $X_1, X_2, \ldots, X_N$, овде представљамо неколико метода за оцењивање непознатих параметара модела MINAR(p). Приликом оцењивања параметара $\alpha, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$, једноставније је најпре оценити параметре $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, а затим веома једноставним трансформацијама израчунати тражене статистике.

Непараметарске методе оцењивања

Поред непознатих параметара модела $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, од значаја је оценити и карактеристике иновационог процеса, његово очекивање μ_ε и дисперзију σ_ε^2. Нека је при томе са μ означено очекивање маргиналне расподеле.

Као што је иначе познато, оцењивање параметара методом условних најмањих квадрата је у ствари одређивање статистика којима се минимизира сума квадрата

$$Q_N(\boldsymbol{\alpha},\mu)=\sum_{t=p+1}^{N}\left(X_t-\alpha_1X_{t-1}-\cdots-\alpha_pX_{t-p}-\left(1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\mu\right)^2.$$

Пошто је ова једначина истог облика као одговарајућа сума у случају CGINAR(p) модела анализираног у првом делу претходне главе, то се и одговарајући резултати у потпуности могу применити овде. Тако су оцене непознатих параметара

$$\hat{\mu}^{cls}=\frac{D^*}{\left(D^*-\sum\limits_{i=1}^{p}D_i^*\right)(N-p)}\left(\sum_{t=p+1}^{N}X_t-\frac{1}{D^*}\sum_{j=1}^{p}D_j^*\sum_{t=p+1}^{N}X_{t-j}\right),$$

$$\hat{\alpha}^{cls}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}D_i^*}{D^*}\quad \text{и}\quad \hat{\phi}_j^{cls}=\frac{D_j^*}{\sum\limits_{i=1}^{p}D_i^*},\ j=1,2,\ldots,p,$$

где су D^* и D_i^*, $i=1,2,\ldots,p$, добро познате Крамерове детерминанте матрица одговарајућег система линеарних једначина, насталог изједначавањем парцијалних извода горње суме квадрата са нулом.

На сличан начин, и Yule-Walker-ове оцене су засноване на систему линеарних једначина (4.2.14), који је такође потпуно истог облика као одговарајући систем у случају CGINAR(p) модела. Тако, параметарске оцене добијене методом момената су

$$\hat{\mu}^{yw}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i,\quad \hat{\alpha}^{yw}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}D_i}{D},\quad \hat{\phi}_j^{yw}=\frac{D_j}{\sum\limits_{i=1}^{p}D_i},\ j=1,2,\ldots,p,$$

где су $D_{1,}D_{2,}\ldots,D_p$ и D поново детерминанте Крамеровог правила примењеног за решавање система (4.2.14).

Као што је већ познато из првог одељка претходне главе, применом оба претходна непараметарска метода се добијају строго постојане и асимптотски нормалне оцене параметара. Остало је оценити параметре иновационог процеса. Очекивање иновационог процеса се може апроксимирати помоћу $\hat{\mu}_{\varepsilon} = (1-\hat{\alpha})\hat{\mu}$, што је иначе уобичајен приступ, познат из многих референтних чланака. Међутим, у оцењивању дисперзије иновационог процеса одступићемо од стандардног приступа, који се може наћи у Du, Li (1991) и Latour (1998). Наиме, полазећи од

$$\begin{aligned} E\left(X_t^2\right) &= \alpha^2 \sum_{i=1}^{p} \phi_i E\left(X_{t-i}^2\right) + \phi_1 \alpha(1-\alpha) E(X_{t-1}) + \alpha(1+\alpha) \sum_{j=2}^{p} \phi_j E(X_{t-j}) \\ &+ 2\mu_{\varepsilon}\alpha \sum_{i=1}^{p} \phi_i E(X_{t-i}) + E\left(\varepsilon_t^2\right) \end{aligned}$$

и

$$E(X_t) = \alpha \sum_{i=1}^{p} \phi_i E(X_{t-i}) + \mu_{\varepsilon},$$

а користећи строгу стационарност процеса $\{X_t\}$ и ознаке $E(X_t) = \mu$, $E(X_t^2) = \mu(0)$, имамо да је

$$Var(X_t) = \alpha^2 \mu(0) + \phi_1 \alpha(1-\alpha)\mu + (1-\phi_1)\alpha(1+\alpha)\mu - \alpha^2\mu^2 + \sigma_{\varepsilon}^2.$$

Према томе, $\sigma_{\varepsilon}^2 = Var(X_t)(1-\alpha^2) - \phi_1\alpha(1-\alpha)\mu - (1-\phi_1)\alpha(1+\alpha)\mu$, тако да коначно добијамо

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = (1-\hat{\alpha}^2)\hat{\sigma}_X^2 - \hat{\alpha}^2\hat{\mu}(1-2\hat{\phi}_1) - \hat{\alpha}\hat{\mu},$$

где је $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$, $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{\mu})^2$ и $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i$. При томе, оцене $\hat{\alpha}_i$ и $\hat{\mu}$, могу бити добијене или Yule-Walker-овом или методом условних најмањих квадрата.

Метод условне максималне веродостојности

У овом делу за оцењивање непознатих параметара модела користимо метод условне максималне веродостојности. Међутим, да бисмо то постигли, потребно је да знамо маргиналну расподелу временског низа. У ту сврху, даљу анализу ћемо засновати на мешовитом INAR(p) процесу $\{X_t\}_{t\in N}$ уведеном помоћу Дефиниције 4.2.1, али са геометријском маргиналном расподелом са параметром $\mu/(1+\mu)$. Да бисмо у потпуности дефинисали овај процес, одредићемо најпре следећом теоремом расподелу његовог иновационог процеса. Ова теорема је аналогна одговарајућој Теореми 4.1.1, која је детаљно доказана за MGINAR(1) процес.

Теорема 4.2.3 *Ако је* $0 < \alpha < \mu/(1+\mu)$*, онда се случајна променљива* ε_t *може представити као мешавина три геометријски расподељене случајне променљиве*

$$\varepsilon_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\mu/(1+\mu)), & с.в. \quad A_1 \equiv \frac{\mu(\alpha-1)(\alpha-\mu+\mu\alpha)}{(\mu-a)(\mu-b)}, \\ Geom(a/(1+a)), & с.в. \quad A_2 \equiv \frac{(\mu\alpha-a)(\alpha-a+\mu\alpha)}{(\mu-a)(b-a)}, \\ Geom(b/(1+b)), & с.в \quad A_3 \equiv \frac{(\mu\alpha-b)(\alpha-b+\mu\alpha)}{(\mu-b)(a-b)}, \end{cases} \tag{4.2.18}$$

где су $a < b$ *решења једначине* $x^2 - \alpha(1+\mu)x + \alpha^2\mu(1-p) = 0$.

Доказ. Овај доказ се само у свом првом делу разликује од доказа Теореме 4.1.1, стога овде и презентујемо његов почетак. Нека су $\Phi_X(s)$ и $\Phi_\varepsilon(s)$ функције генератрисе вероватноће случајних променљивих X_t и ε_t, респективно. Сада, користећи (4.2.1) као репрезентацију процеса $\{X_t\}$, добијамо да је

$$\begin{aligned} \Phi_X(s) &= \left(\phi_1\Phi_X\left(\Phi_Y(s)\right) + \sum_{j=2}^{p}\phi_j\Phi_X\left(\Phi_W(s)\right)\right)\Phi_\varepsilon(s) \\ &= \left(\phi_1\Phi_X\left(1-\alpha+\alpha s\right) + (1-\phi_1)\Phi_X\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)\right)\Phi_\varepsilon(s), \end{aligned}$$

где је $\Phi_X(s) = \frac{1}{1+\mu-\mu s}$. Остатак доказа се поклапа са доказом поменуте теореме из треће главе. □

Дефиниција 4.2.2 *Нека је* $0 < \alpha < \mu/(1+\mu)$*. Процес* $\{X_t\}_{t\in N}$ *уведен Дефиницијом* 4.2.1*, чији иновациони процес је дефинисан помоћу* (4.2.18) *је мешовити INAR(p) процес са геометријском маргиналном расподелом, MGINAR(p).*

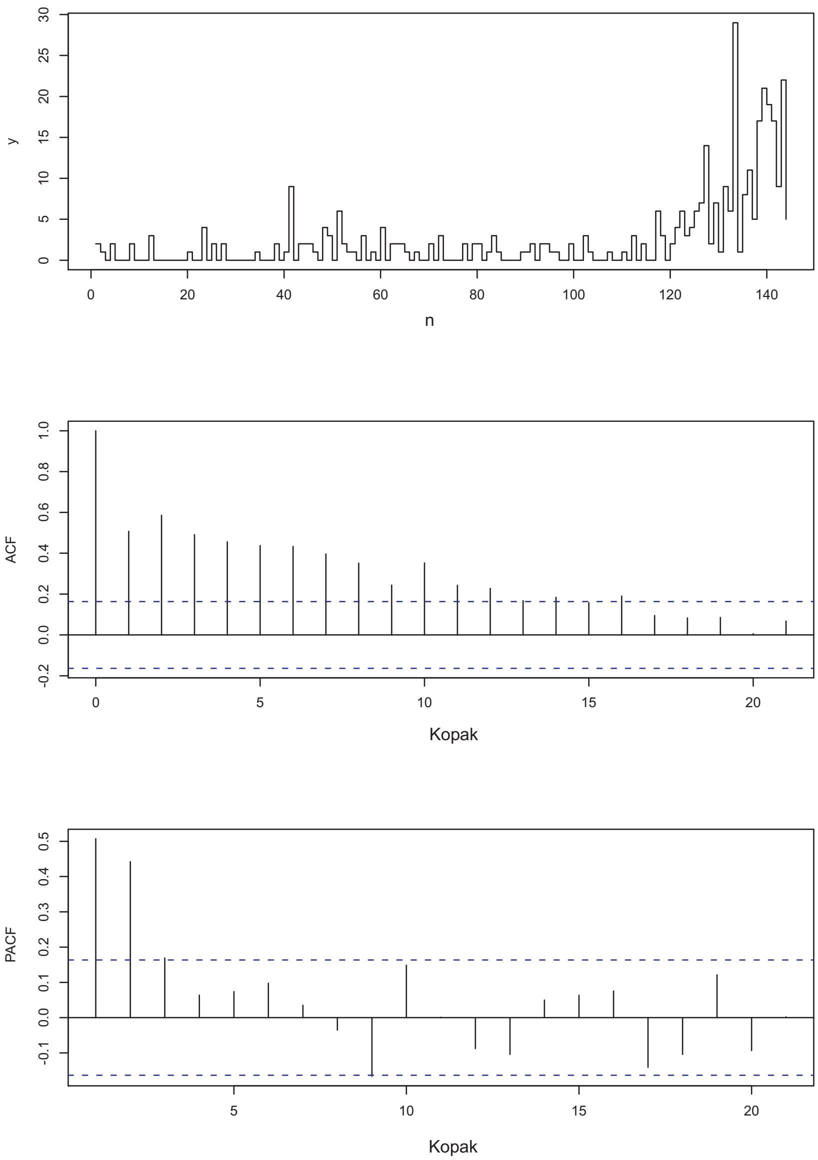
Сада се непознати параметри $\alpha, \mu, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ овог MGINAR(p) модела оцењују максимизирањем логаритмоване функције веродостојности $L(\boldsymbol{\alpha}, \mu) = \sum\limits_{t=p+1}^{N} \log P(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})$, где је $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$. Потребне вероватноће прелаза су изведене раније и из њихових формула се види да је веома компликовано добити употребљиво аналитичко решење проблема максимизације. Међутим, то се може веома ефикасно урадити применом многих софтверских пакета за статистичку анализу података, а помоћу неке од имплементираних нумеричких максимизационих процедура.

4.2.5 Примена на реалним подацима

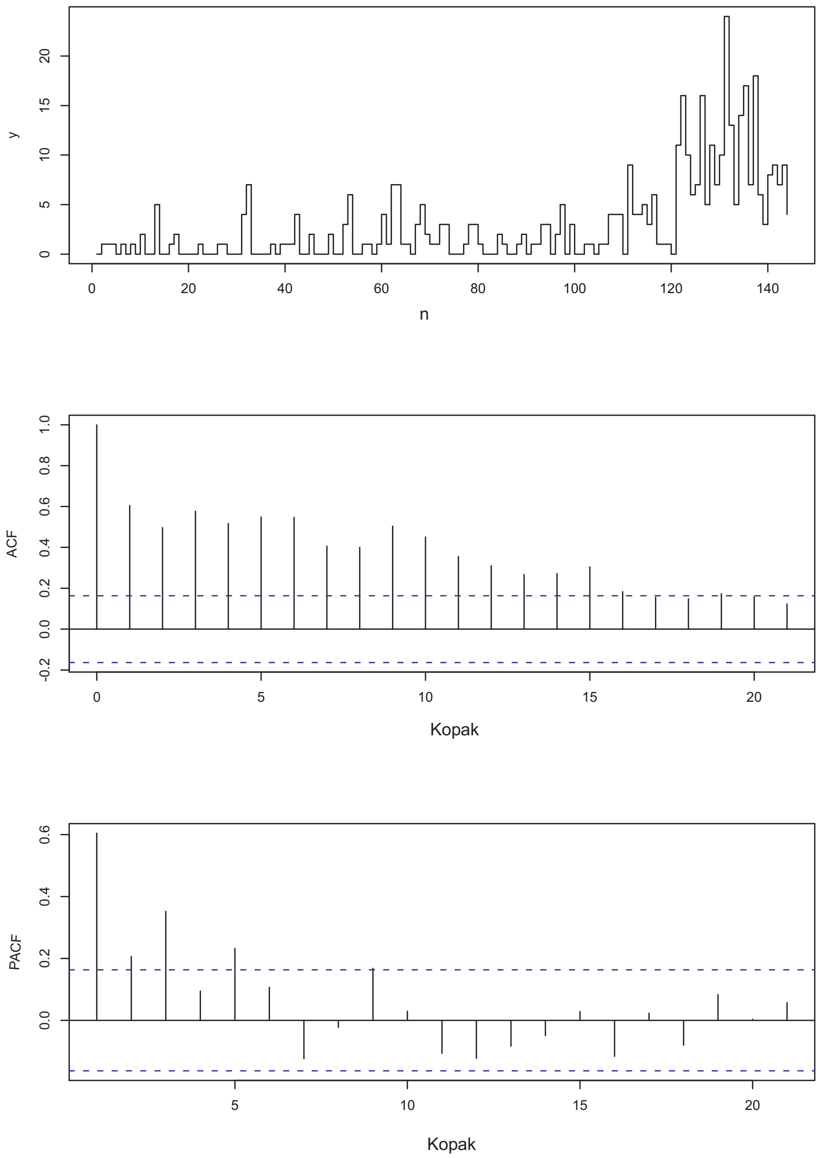
У овом делу покушавамо да покажемо да је на неким подацима и у извесним ситуацијама боље користити моделе засноване на мешавини биномног и негативног биномног оператора него оне који су генерисани мешавином искључиво једног, биномног тининг оператора. Са тим циљем на два временска низа стварних података упоређујемо примену MGINAR(p) модела са њему по структури најсроднијим моделом заснованом само на биномном тининг оператору, односно са комбинованим INAR(p) моделом са Пуасоновом маргиналном расподелом, који је дефинисао Weiß (2008c). Као и раније и овде разматрамо податке који су узети из криминолошке секције интернет сајта Forecasting Principles, са веб адресе http://www.forecastingprinciples.com. Оне представљају месечно бројање препродаја наркотика, које су пријављиване у две полицијске станице у Питсбургу у периоду од јануара 1990. до децембра 2001 и састоје се од 144 опсервација. У првом случају ради се о бројању препродаја наркотика обављеном у 13.-тој полицијској станици. Узорачка средина, дисперзија и аутокорелација ових података су редом $2,4653$, $21,3974$ и $0,507$. Графички приказ самих података, њихових узорачких аутокорелација и парцијалних аутокорелација је дат на слици 4.2. На основу PACF вредности могли бисмо се одлучити у корист модела другог реда, па ипак пошто је PACF(3) доста значајнији од осталих вредности парцијалне аутокорелације вишег реда, одлучујемо се за моделирање података моделима реда 2 и 3. У другом случају, подаци су добијени из 32.-ге полицијске станице. Њихова узорачка средина, дисперзија и аутокорелација су редом $2,8958$, $17,8562$ и $0,6050$. Одговарајући графикони су представљени на слици 4.3. На основу дијаграма парцијалних аутокорелација одлучујемо се за примену модела 5.-ог реда. Међутим, у циљу комплетнијег поређења разматрани су и модели нижег реда.

У оба случаја оцене параметара модела су израчунате применом условне максималне веродостојности. Како бисмо упоредили примењене моделе на посматраним подацима, одређене су вредности информационих критеријума AIC и BIC, као и квадратног корена суме квадрата одступања прогнозираних и опсервираних вредности, RMS. Резултати су презентовани у табелама 4.5 и 4.6. Како мање вредности одговарајућих величина карактеришу боље моделе, лако је одлучити се у првом случају за примену MGINAR модела трећег реда. Интересантно је приметити да је вероватноћа постојања директне зависности, остварене након једног периода посматрања, само 0,0562. Одавде закључујемо да је много вероватније да ће купљени наркотици бити препродати тек након два или више периода посматрања и то једном или већем броју купаца. Ова врста зависности се у временској серији природно интерпретира геометријски расподељеним бројачким низом негативног биномног тининга. У другом случају како се ред примењених модела повећава, тако вредности AIC-а и BIC-а опадају. Међутим то није случај са њиховим RMS вредностима. Оба модела достижу своје најбоље перформансе у случају реда 5, што је и било очекивано на основу њихових PACF дијаграма. Такође, закључујемо да је MGINAR(5) модел најприкладнији међу свим примењеним моделима. Међутим, како је његов параметар $\phi_1 = 0,2663$, компонента заснована на биномном тинингу која дефинише зависност узастопних елемената временског низа је много значајнија него у првом случају.

Разлог много бољих перформанси MGINAR(p) модела у фитовању оваквих података могао би да лежи у чињеници да овде један посматрани случајни догађај, најчешће након два или више временских интервала посматрања, генерише 1, 2 или више нових случајних догађаја. Ова ситуација се не може успешно моделирати Бернулијевим бројачким низом комбинованих INAR(p) модела, док је негативни биномни тининг оператор MGINAR(p) модела много прикладнији за такву примену.



Слика 4.2: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о броју продаја наркотика у реону 13. полицијске станице.



Слика 4.3: Графикони реализације, ACF и PACF функције података о броју продаја наркотика у реону 32. полицијске станице.

Табела 4.5: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о продаји наркотика у реону 13. полицијске станице.

Модел	CML оцене	AIC	BIC	RMS
Пуасонов CINAR(2)	λ=1,2256			
	α=0,5429			
	p=0,4097	755,8535	764,763	3,6168
MGINAR(2)	μ=2,8831			
	α=0,5541			
	p=0,2316	534,672	543,5814	3,5921
Пуасонов CINAR(3)	λ=1,0978			
	α=0,6929			
	ϕ_1=0,2377			
	ϕ_2=0,3986			
	ϕ_3=0,3637	720,2532	732,1325	3,5007
MGINAR(3)	μ=3,7637			
	α=0,7515			
	ϕ_1=0,0562			
	ϕ_2=0,5227			
	ϕ_3=0,4211	520,3326	532,2119	3,4546

Табела 4.6: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS вредности за податке о продаји наркотика у реону 32. полицијске станице.

Модел	CML оцене	AIC	BIC	RMS
Пуасонов CINAR(2)	λ=1,3529			
	α=0,5499			
	ϕ_1=0,5840			
	ϕ_2=0,4160	747,6322	756,5416	3,3487
MGINAR(2)	μ=2,9728			
	α=0,5211			
	ϕ_1=0,4932			
	ϕ_2=0,5068	585,8631	594,7726	3,3905
Пуасонов CINAR(3)	λ=1,2335			
	α=0,6088			
	ϕ_1=0,4496			
	ϕ_2=0,2369			
	ϕ_3=0,3135	715,1404	727,0196	3,1960
MGINAR(3)	μ=2,9527			
	α=0,6767			
	ϕ_1=0,3734			
	ϕ_2=0,1853			
	ϕ_3=0,4413	571,5202	583,3994	3,1981
Пуасонов CINAR(4)	λ=0,1311			
	α=0,6215			
	ϕ_1=0,3617			
	ϕ_2=0,2045			
	ϕ_3=0,1713			
	ϕ_4=0,2625	688,9814	703,8304	3,2101
MGINAR(4)	μ=2,9406			
	α=0,6219			
	ϕ_1=0,3095			
	ϕ_2=0,1359			
	ϕ_3=0,2051			
	ϕ_4=0,3495	562,9872	577,8362	3,2141

Модел	CML оцене	AIC	BIC	RMS
Пуасонов CINAR(5)	λ=0,9892			
	α=0,6848			
	ϕ_1=0,3238			
	ϕ_2=0,1949			
	ϕ_3=0,1054			
	ϕ_4=0,2045			
	ϕ_5=0,1714	654,4715	672,2903	3,1473
MGINAR(5)	μ=2,7673			
	α=0,6767			
	ϕ_1=0,2664			
	ϕ_2=0,0847			
	ϕ_3=0,1668			
	ϕ_4=0,2450			
	ϕ_5=0,2371	559,1621	576,981	3,1316

Закључак

У дисертацији је дата анализа ауторегресивних процеса са ненегативним целобројним вредностима генерисаних геометријским бројачким низовима. Наиме, након презентовања најзначајнијих резултата из области моделирања целобројних процеса изведеног пре свега помоћу биномног тининга, уведени су и детаљно описани INAR модели првог реда са негативним биномним тинингом. Том приликом су разматрани процеси са геометријском, негативном биномном и помереном геометријском маргиналном расподелом. Дате су карактеристичне особине уведеног тининга, али и аутокорелационе структуре самих модела. Испитан је њихов регресиони потенцијал и посвећено је доста пажње карактеризацији процедура за оцењивање параметара. Одређене су расподеле оцена и након њихове провере над симулираним временским низовима модели су примењени на стварним подацима. Том приликом су упоређени са најзначајнијим постојећим ИНАР(1) моделима. При томе добијени веома повољни резултати само су оправдали даљу и дубљу анализу ових модела у погледу реда и димензионалности, што је даље и дато у дисертацији.

У другој и трећој глави дисертације је на реалним подацима уочљива несумњива предност примене геометријског над Бернулијевим бројачким низом. Ово се оправдава комплекснијом зависношћу између вредности посматраних података и чињенице да елементи популације могу да утичу на више других елемената и тако пребројавање генерисаних догађаја применом Бернулијевих случајних промењливих учине веома неефикасним. Међутим, у случају динамичких података, односно када су интеракције међу елементима промењљивог карактера и интензитета, уочава се потреба истовремене примене биномног и негативног биномног тининг оператора. Ово је предмет проучавања завршне главе дисертације, где су представљени мешовити INAR модели првог, другог и вишег реда. Као и раније, након детаљне анализе уведених процеса, поклоњена је пажња примени модела над стварним подацима. Како се зависност међу елементима ауторегресивног процеса описује тининг операторима, може се приметити да је у случају модела вишег реда биномни тининг примењен за дефинисање зависности између сукцесивних елемената процеса. Са друге стране, тининг оператор генерисан геометријским бројачким низом је искоришћен за описивање динамичније везе између елемената популације, која се остварује након истека одређеног јединичног периода опсервације.

Презентованим моделима у последњој, четвртој глави дисертације са једне стране је заокружена тема која је и предмет анализе, док је са друге наговештен један од могућих праваца даљег проучавања ове проблематике. Наиме, било би интересантно истражити целобројне ауторегресивне процесе вишег реда који би користили негативни биномни тининг за дефинисање зависности сукцесивних елемената, док би тининг генерисан Бернулијевим бројачким низом био употребљен за успостављање везе међу елементима популације након истека одређеног временског интервала. Таква врста модела би одговарала пребројавању ”експлозивних” догађаја при којима су касније интеракције међу елементима знатно ређе и готово незнатне у односу на иницијални временски интервал. Остали могући правци проучавања INAR процеса са геометријским бројачким низом леже у даљем уопштавању маргиналне расподеле, а посебно у случају процеса већ уопштеног реда и димензионалности.

Несавршености и потешкоће у раду са INAR моделима свакако постоје и као што је сасвим природно њиховим исправљањем и унапређивањем наилазимо веома често на нове изазове. Међутим, целобројни ауторегресивни процеси данас представљају најзначајнији метод моделирања бројачких процеса па тако и један од најстабилнијих темеља за будући развој ове области анализе временских серија.

Литература

Al-Osh, M.A., Aly, E.E.A.A. (1992), First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals, *Commun. Statist. Theory Meth.* **21**, 2483–2492.

Al-Osh, M.A., Alzaid, A.A. (1987), First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process, *J. Time Ser. Anal.* **8**, 261–275.

Aly, E.A.A.A., Bouzar, N. (1994), Explicit stationary distributions for some Galton-Watson processes with immigration, *Commun. Statist. Stoch. Models* **10**, 499-517.

Aly, E.E.A.A., Bouzar, N. (2005), Stationary solutions for integer-valued autoregressive processes, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **1**, 1–18.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1988), First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process: distributional and regression properties, *Statist. Neerlandica* **42**, 53-61.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1990), Integer-valued pth order autoregressive structure (INAR(p)) process, *J. Appl. Prob.* **27**, 314–324.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1993), Some autoregressive moving average processes with generalized Poisson marginal distributions, *Ann. Inst. Statist. Math.* **45**, 223–232.

Bakouch, H.S., Ristić, M.M. (2010), Zero truncated Poisson integer-valued AR(1) model, *Metrika* **72**, 265–280.

Brockwell, P., Davis, R. (1987), Time Series: Theory and Methods, *Springer-*

Verlag, New York.

Cox, DR., Miller, HD. (1965), The Theory of Stochastic Processes, *Methuen, London.*

Dewald L.S., Lewis P.A.W., McKenzie E. (1989), A bivariate first-order autoregressive time series model in exponential variables (BEAR(1)), *Manag. Sci.* **35**, 1236–1246.

Du, J.-Guan, Li, Y. (1991), The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model, *J. Time Ser. Anal.* **12**, 129–142.

Franke, J., Subba Rao, T. (1993), Multivariate first-order integer-valued autoregressions, Technical Report, Mathematics Department, UMIST.

Freeland, R.K., McCabe, B. (2005), Asymptotic properties of CLS estimators in the Poisson AR(1) model, *Stat. Prob. Lett.* **73**, 147–153.

Gauthier, G., Latour, A. (1994), Convergence forte des estimateurs des paramètres d'un processus GENAR(p), *Ann. Sci. Math. Québec* **18**, 49–71.

Gaver, D.P., Lewis P.A.W. (1980), First-order autoregressive gamma sequences and point processes, *Adv. Appl. Prob.* **12**, 727–745.

Grunwald, G.K., Hyndman, R.J., Tedesco, L., Tweedie, R.L. (2000), Non-gaussian conditional linear AR(1) models, *Aust. N.Z.J. Statist.* **42**, 479–495.

Ihaka, R. Gentleman, R. (1996) R: a language for data analysis and graphics, *J. Comput. Graph. Statist.* **5**, 299–314.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1977), A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process (EARMA (1,1)), *Adv. Appl. Prob.* **9**, 87–104.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978a), Discrete time series generated by mixture I: correlational and runs properties, *J. R. Statist. Soc. B* **40**, 94–105.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978b), Discrete time series generated by mixtures II: asymptotic properties, *J. R. Statist. Soc. B* **40**, 222–228.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978b), Discrete time series generated by mixtures III: autoregressive processes (DAR(p)), *Naval Postgraduate School Technical Report*, NPS55Lw 73061A.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1983), Stationary discrete autoregressive-moving average time series generated by mixtures, *J. Time Ser. Anal.* **4**, 19–36.

Joe, H. (1996), Time series models with univariate margins in the convolution-closed infinitely divisible class, *J. Appl. Prob.* **33**, 664–677.

Karlsen, H., Tjøstheim, D. (1988), Consistent estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) time series models. *J. R. Statist. Soc. B* **50**, 313–320.

Latour, A. (1997), The multivariate GINAR(p) process. *Adv. Appl. Prob.* **29**, 228–248.

Latour, A. (1998), Existence and Stochastic Structure of a non-negative integer-valued autoregressive process, *J. Time Ser. Anal.* **19**, 439–455.

Lawrance, A.J. (1980), Some autoregressive models for point processes, in: P. Bartfai i J. Tomko (eds.), *Point Processes and Queueing Problems,* 257–275, Cooloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 24, Kesthely (Hungary), Proceedings Published by North-Holland, Amsterdam.

Lawrence, A.J., Lewis P.A.W. (1980), The exponential autoregressive moving average EARMA(p,q) process, *J. R. Statist. Soc. B* **42**, 150–161.

McKenzie, E. (1985), Some simple models for discrete variate time series, *Water Resour. Bull.* **21**, 645–650.

McKenzie, E. (1986), Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric distributions, *Adv. Appl. Prob.* **18**, 679–705.

McKenzie, E. (1987), Innovation Distributions for Gamma and Negative Binomial Autoregressions, *Scand. J. Statist.* **14**, 79–85.

Nastić, A.S. (2008), Ауторегресивни процеси са ненегативним целобројним вредностима, *Магистарска теза, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет.*

Nastić, A.S. (2010), On shifted geometric INAR(1) models based on geometric counting series, *Commun. Statist. Theory Meth.*, прихваћен за публиковање.

Park, Y., Oh, C.W. (1997), Some asymptotic properties in INAR(1) processes with Poisson marginals, *Statist. Pap.* **38**, 287–302.

Ristić, M.M., Bakouch, H.S., Nastić, A.S. (2009), A New Geometric First-Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) process, *J. Statist. Plann. Inference* **139**, 2218–2226.

Ristić, M.M., Nastić, A.S., Bakouch, H.S. (2010), Estimation in an Integer-Valued Autoregressive Process With Negative Binomial Marginals (NBINAR(1)), *Commun. Statist. Theory Meth.*, прихваћен за публиковање.

Ristić, M.M., Nastić, A.S., Jayakumar, K., Bakouch, H.S. (2011), A bivariate INAR(1) time series model with geometric marginals, *Appl. Math. Lett.*, прихваћен за публиковање.

Silva, I.M.M. (2005), Contributions to the analysis of discrete-valued time series, *PhD Thesis, University of Porto.*

Silva, M.E., Oliveira, V.L. (2004), Difference equations for the higher order moments and cumulants of the $INAR(1)$ model, *J. Time Ser. Anal.* **25**, 317–333.

Steutel, F.W., van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Ann. Prob.* **7**, 893–899.

Shiryaev, A.N. (1995), Probability, *Springer-Verlag, New-York.*

Tjøstheim, D. (1986), Estimation in nonlinear time series models, *Stoch. Proc. Appl.* **21**, 251–273.

van Harn, K., Steutel, F.W. i Vervaat, W. (1982), Self-decomposable discrete distributions and branching processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **61**, 97–118.

Weiß, C.H. (2008a), Serial dependance and regression of Poisson INARMA models, *J. Statist. Plann. Inference* **138**, 2975–2990.

Weiß, C.H. (2008b), Thinning operations for modeling time series of counts – a survey, *Adv. Statist. Anal.* **92**, 319–341.

Weiß, C.H. (2008c), The combined INAR(p) models for time series of counts, *Statist. Prob. Lett.* **78** (13), 1817–1822.

Weiß, C.H. (2009), A New Class of Autoregressive Models for Time Series of Binomial Counts, *Commun. Statist. Theory Meth.* **38**, 447–460.

Zheng, H., Basawa, I.V., Datta, S. (2006), Inference for pth-order random coefficient integer-valued autoregressive processes, *J. Time Ser. Anal.* **27** , 411–440.

Zheng, H., Basawa, I.V., Datta, S. (2007), First-order random coefficient integer-valued autoregressive processes, *J. Statist. Plann. Inference* **173**, 212–229.

Zhu, R., Joe, H. (2003), A new type of discrete self-decomposability and its applications to continuous-time Markov processes for modeling count data time series, *Stoch. Models* **19**, 235–254.

Zhu, R., Joe, H. (2006), Modelling count data time series with Markov processes based on binomial thinning, *J. Time Ser. Anal.* **27**, 725–738.

Zhu, R., Joe, H. (2010), Negative binomial time series models based on expectation thinning operators, *J. Statist. Plann. Inference* **140**, 1874–1888.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Александар С. Настић
Ментор, **МН**:	Мирослав М. Ристић
Наслов рада, **НР**:	**ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА НЕНЕГАТИВНИМ ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА ГЕНЕРИСАНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИМ БРОЈАЧКИМ НИЗОВИМА**
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2011.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	169 стр., 4 поглавља, графички прикази и табеле
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	статистика случајних процеса
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	INAR модели, биномни тининг, негативни биномни тининг, геометријски бројачки низ, маргиналне расподеле: геометријска, негативна биномна, померена геометријска
УДК	519.246/.246.8
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:		Представљени су најпознатији INAR модели генерисани различитим тининг операторима. Уведени су нови INAR модели првог реда засновани на геометријском бројачком низу, а са геометријском, негативном биномном и померeном геометријском маргиналном расподелом. Ови модели су даље уопштени у погледу реда и димензионалности и то увођњем комбинованог INAR(*p*) модела и дводимензионог INAR модела реда 1. Такође су презентовани нови мешовити INAR модели првог и другог реда као и њихово уопштење *p*-тог реда. За све уведене моделе дата су корелациона и регресиона својства. Посебна пажња је поклоњена параметарским и непараметарским методама за оцењивање непознатих параметара као и њиховој асимптотској карактеризацији. Ове методе су примењене над симулираним ненегативним целобројним низовима, а затим су модели упоређени са осталим референтним INAR моделима у примени над реалним подацима.
Датум прихватања теме, **ДП**:		24. 01. 2011.
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Alksandar S. Nastić
Mentor, **MN**:	Miroslav M. Ristić
Title, **TI**:	**CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF NONNEGATIVE INTEGER VALUED TIME SERIES GENERATED BY GEOMETRIC COUNTING SERIES**
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2011
Publisher, **PB**:	author’s reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	169 p. ; graphic representations; tables
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	statistics for stochastic processes
Subject/Key words, **S/KW**:	INAR models, binomial thinning, negative binomial tihinning, geometric counting series, marginal distributions: geometric, negative binomial, shifted geometric
UC	519.246/.246.8
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		Some of the best known INAR models generated by various thinning operators are presented. New first order INAR models, based on geometric counting series, with geometric, negative binomial and shifted geometric marginals are introduced. These models are generalized in respect of order and dimensionality by introducing the combined INAR(*p*) model and bivariate INAR model of order 1. Also, new mixed INAR models of the first, second and order *p* are presented. For all introduced models their correlation and regression properties are obtained. Particular attention was paid to parametric and nonparametric estimating procedures for unknown model parameters and their asymptotic properties. These methods are implemented on simulated nonnegative integer valued series and the models are compared to some other referent INAR models in application to real life data.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		24. 01. 2011.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Александар Настић

Curriculum Vitae

e-mail:anastic@pmf.ni.ac.rs
anastic78@gmail.com

Образовање

2003-2008	**Последипломске студије на смеру Математичка статистика и примене**, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, Одсек за математику и информатику, Ниш, Србија.
1997-2003	**Основне студије из математике**, смер Рачунарство и информатика, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, Одсек за математику и информатику, Ниш, Србија.
1993-1997	**Средња школа**, Гимназија “Станимир Вељковић-Зеле”, Лесковац, Србија, Носилац Вукове награде

Радно искуство

2009-	**асистент**, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, Одсек за математику и информатику, Ниш, Србија.
2004-2009	**асистент-приправник**, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, Одсек за математику и информатику, Ниш, Србија.
2003-2004	**професор математике у основној школи**, Основна Школа “Васа Пелагић”, Лесковац, Србија

Области интересовања

Математичка статистика	Анализа временских серија, Целобројни ауторегресивни процеси

Научни радови

1. Ristić M. M., Popović B. C, Nastić A. S., Đorđević M. S. (2008) Bivariate Marshall and Olkin Exponential Minifcation Process, Filomat 22, 69-77.
2. Ristić, M. M., Bakouch, H. S., Nastić, A. S. (2009) A New Geometric First-Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) process, Journal of Statistical Planning and inference, 139, 2218-2226.
3. Ristić, M. M., Nastić, A. S., Bakouch, H. S. (2010) Estimation in an Integer-Valued Autoregressive Process With Negative Binomial Marginals (NBINAR(1)), Communications in Statistics - Theory and Methods, прихваћен за публиковање.
4. Nastić, A.S. (2010), On shifted geometric INAR(1) models based on geometric counting series, Communications in Statistics - Theory and Methods, прихваћен за публиковање.
5. Ristić, M.M., Nastić, A.S., Jayakumar, K., Bakouch, H.S. (2011), A bivariate INAR(1) time series model with geometric marginals, Applied Mathematics Letters, прихваћен за публиковање.