

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Jovana Džunić

**VIŠEKORAČNI METODI
ZA REŠAVANJE
NELINEARNIH JEDNAČINA**

Doktorska disertacija

NIŠ, 2012.

Sadržaj

1	Osnovni koncepti	1
1.1	Uvod	1
1.2	Klasifikacija iterativnih procesa	2
1.3	Red konvergenције	3
1.4	Efikasnost iterativnih metoda	7
1.5	Jednokoračni metodi	9
1.5.1	Lista jednokoračnih metoda	10
1.5.2	Generatori jednokoračnih metoda	11
1.5.3	Generatori metoda Traubovog tipa	15
1.6	Višekoračni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina	17
2	Dvotačkasti metodi optimalnog reda konvergenције	27
2.1	Familija dvotačkastih metoda zasnovana na težinskoj funkciji	27
2.2	Ubrzani metod sa memorijom	32
2.2.1	Teoreme o konvergenčići	35
2.2.2	Numerički primeri	39
2.3	Familija Džeretovog tipa	44
2.3.1	Džeretova familija optimalnih metoda	44
2.3.2	Familija optimalnih dvokoračnih metoda	45
2.3.3	Numerički rezultati	48

3	Trokoračni metodi optimalnog reda	51
3.1	Metod zasnovan na interpolaciji racionalnom funkcijom	51
3.2	Dvoparametarska familija	55
3.3	Familija trotačkastih metoda bez i sa memorijom	62
3.3.1	Trokoračni metodi bez izvoda	62
3.3.2	Nove familije trokoračnih metoda sa memorijom	66
3.3.3	Teorema o konvergenciji	68
3.3.4	Numerički primeri	72
3.4	Primedba o sličnosti metoda	75
4	Trokoračni metodi konstruisani inverznom interpolacijom	79
4.1	Dvokoračni interpolacioni iterativni metodi	79
4.2	Višekoračni interpolacioni iterativni metodi	82
4.3	Trokoračni metod Nete i M. Petkovića	83
4.4	Analiza računске efikasnosti	86
4.5	Numerički primeri	89
5	Familije višekoračnih metoda sa i bez memorije	95
5.1	Familije bez izvoda proizvoljnog reda bez memorije	96
5.2	Familije bez izvoda sa memorijom	99
5.3	R -red konvergencije familija sa memorijom	101
5.4	Numerički primeri	106
6	Simultani metodi za nalaženje nula polinoma	109
6.1	Simultani metod interpolacionog tipa	110
6.2	Erlih-Abertov metod sa korekcijama za proste nule	113
6.3	Simultani metodi sa Džeretovim korekcijama	120
6.4	Simultani metodi za višestruke nule	123
	Literatura	129

Predgovor

Predmet ove disertacije je konstrukcija i analiza efikasnih numeričkih metoda iterativnog tipa za rešavanje nelinearnih jednačina oblika $f(x) = 0$, gde je f skalarna funkcija realne ili kompleksne promenljive. Rešavanje nelinearnih jednačina je jedan od najstarijih i, istovremeno, najvažnijih matematičkih problema jer se, osim primenjene matematike, javlja u matematičkim modelima inženjerskih disciplina, fizike, astronomije, ekonomije, pa čak i u društveno-humanističkim naukama. Knjige Ostrovskog, Trauba, Ortege i Rajnbolta šezdesetih i sedamdesetih godina dvadesetog veka u dobroj meri su sistematizovale znanja iz ove oblasti, bar kada se radi o jednokoračnim metodima za rešavanje jednačina. Još 1964. godine Traub je pokazao da jednokoračna iterativna funkcija koja eksplicitno zavisi od $p - 1$ izvoda funkcije čija se nula traži, ne može imati red konvergencije veći od p . Zbog toga se računaska efikasnost ne može povećati iznad određene granice (u funkciji od p), što je za posledicu imalo višedecenijsku stagnaciju u ovoj oblasti.

Interesovanje za iterativne metode za nalaženje nula funkcija naglo je poraslo početkom 21. veka. Umesto jednokoračnih metoda pažnja je posvećena tzv. višekoračnim metodima koji prevazilaze pomenuta ograničenja jednokoračnih metoda u pogledu računске efikasnosti. Konstrukcija i analiza višekoračnih metoda postala je moguća zahvaljujući značajnom napretku kompjuterskog hardvera (brži procesori), a naročito razvoju specifičnog softvera kao što je simbolički račun i aritmetika višestruke preciznosti. U praksi je pokazano da je najveći red konvergencije n -koračnog metoda bez memorije (tj. bez podataka iz prethodnih iteracija), sa fiksiranim brojem od $n + 1$ funkcijskih izračunavanja, jednak 2^n . Metodi koji ispunjavaju ovaj uslov nazivaju se *optimalnim*, a granica reda konvergencije 2^n *optimalnim redom*. Teorijska pretpostavka o ovoj gornjoj granici poznata je kao Kung-Traubova hipoteza. Iako datira iz 1974. godine, ova hipoteza još nije dokazana, ali nije ni opovrgnuta konstrukcijom nekog metoda.

Ova disertacija se bavi konstrukcijom, analizom i numeričkim testiranjem isključivo optimalnih višekoračnih metoda. U disertaciji je dat originalan pristup koji red konvergencije optimalnih metoda bez memorije znatno ubrzava bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Ubrzanje se postiže korišćenjem vrednosti iz tekuće iteracije i već izračunatih podataka iz prethodne iteracije. Ovi rezultati se po prvi put javljaju u literaturi i, s obzirom

na stepen poboljšanja računске efikasnosti u odnosu na postojeće metode, predstavljaju značajan napredak u Teoriji iterativnih procesa.

U disertaciji je predloženo više originalnih familija dvokoračnih i trokoračnih metoda bez memorije koje generišu veliki broj kako novih tako i već poznatih metoda. Ovi metodi poslužili su kao osnova za konstrukciju novih, veoma brzih metoda sa memorijom visoke računске efikasnosti. Većina metoda je testirana na velikom broju numeričkih primera koristeći programski paket *Mathematica* i aritmetiku višestruke preciznosti.

Sva poglavlja, osim delimično prvog, sastoje se od originalnih rezultata koji su naučnoj javnosti prezentovani u dvanaest radova, objavljenih ili prihvaćenih za objavljivanje u renomiranim časopisima za primenjenu matematiku i računarske nauke sa Thomsonove SCI liste: *Applied Mathematics and Computation*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Computer Mathematics with Applications*, *Applied Mathematical Letters*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, *J. Appl. Math.*

Disertacija se sastoji od sledećih poglavlja:

1. Osnovni koncepti
2. Dvokoračni metodi optimalnog reda konvergencije
3. Trokoračni metodi optimalnog reda
4. Trokoračni metodi konstruisani inverznom interpolacijom
5. Familije višekoračnih metoda sa i bez memorije
6. Simultani metodi za nalaženje nula polinoma

Literatura

Numerisanje svih teorema, lema, definicija, tabela, napomena, primera i slika izvršeno je prema rednom broju poglavlja u kome se javljaju i redosledu javljanja u okviru samog poglavlja.

Prvo poglavlje je preglednog karaktera i sastoji se od šest odeljaka. Osim napomena o važnosti iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina, na početku je ukazano na nedostatak u pogledu računске efikasnosti klasičnih jednokoračnih metoda kao što su, na primer, Njutnov, Halejev, Lagerov metod, metodi Čebiševa i Ostrovskog, itd. Prevazilaženje ovih nedostataka rešava se konstrukcijom višetačkastih metoda, što je i glavna tema disertacije. U prvom poglavlju su uvedeni osnovni pojmovi i koncepti koji se koriste u Teoriji iterativnih procesa, kao što su red konvergencije i računska efikasnosti. Zbog potreba pri analizi konvergencije višekoračnih metoda u kasnijim poglavljima, dato je više teorema koje se odnose na konvergenciju iterativnih metoda i interpolacione polinome. U 5. odeljku data je lista jednokoračnih metoda koji su korišćeni u disertaciji. Sličan pregled dvokoračnih i trokoračnih metoda koji su korišćeni ili citirani u kasnijim poglavljima dat je u 6. odeljku.

U delu 5. odeljka prvog poglavlja dati su originalni rezultati publikovani u radovima [78] i [67] koji se odnose na generisanje iterativnih metoda. Ovi generatori metoda imaju oblik rekurzivne relacije diferencijalno-diferencnog tipa

$$F_{r+1}(x, m) = F_r(x, m) - \frac{mu(x)}{r} F_r'(x, m), \quad (r \geq 2),$$

gde je sa F_r označena proizvoljna iterativna funkcija reda r , m je višestrukost tražene nule i $u(x) = f(x)/f'(x)$. Ovaj generator predstavlja uopštenje Traubovih generatora opisanih u knjizi [88] kod kojih se striktno zahteva da gornja rekurzivna relacija startuje sa metodom $F_2(x, m) = x - mu(x)$ Njutnovog tipa, određujući na taj način jedan isti niz iterativnih funkcija.

U drugom poglavlju razmatrani su dvokoračni metodi sa i bez memorije. Najpre je konstruisan metod bez izvoda

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \\ x_{k+1} = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (1)$$

gde je $t = f(y)/f(x)$, $s = f(y)/f(w)$, $w = x - \gamma f(x)$ i γ proizvoljan realan parametar. Dokazano je da ovaj metod ima red četiri ako težinska funkcija h zadovoljava uslove

$$h(0, 0) = h_t(0, 0) = h_s(0, 0) = 1 \quad \text{i} \quad |h_{tt}(0, 0)|, |h_{ts}(0, 0)|, |h_{ss}(0, 0)| < \infty.$$

Uz nešto stroži dodatni uslov $h_{ss}(0, 0) = 2$, relacija greške ovog metoda je oblika $x_{k+1} - \alpha \sim A(1 - \gamma f'(\alpha))^2 (x_k - \alpha)^4$, što daje ideju za ubrzanjem metoda (1) birajući parametar γ tako da bude blizak vrednosti $1/f'(\alpha)$. S obzirom da $f'(\alpha)$ nije poznato, u disertaciji je predložen metod za izračunavanje dovoljno dobre aproksimacije za $f'(\alpha)$ koristeći Njutnov interpolacioni polinom $N_m(t; \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)$ stepena $m \geq 1$ sa podeljenim razlikama. Glavna ideja, korišćena i u drugim poglavljima disertacije, sastoji se u tome da su interpolacioni čvorovi θ_j i vrednosti funkcije $f(\theta_j)$ dostupni podaci iz tekuće i prethodne iteracije. Na ovaj način računaska cena algoritma se ne povećava jer se ne zahtevaju nova funkcijska izračunavanja. S druge strane, konvergencija modifikovanog metoda, u oznaci (1M), se znatno povećava koristeći promenljivi parametar $\gamma_k = 1/N_m(x_k) \approx 1/f'(\alpha)$.

Metod konstruisan na opisani način se naziva *metod sa memorijom* s obzirom da koristi informacije i iz prethodne iteracije. Dokazano je da je donja granica R -reda konvergencije metoda (1M) sa *samoubrzavajućim* parametrom γ_k jednaka 5, $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}) \approx 5.37$ i 6 za stepene Njutnovog interpolacionog polinoma $m = 1, 2$ i 3, redom. Drugim rečima, što je veći stepen interpolacionog polinoma, veći je i red konvergencije, što je i očekivano. Ubrzanje konvergencije ide čak do 50% bez novih funkcijskih izračunavanja i uz samo nekoliko dodatnih osnovnih aritmetičkih operacija, što svrstava opisani metod (1M) sa memorijom među najefikasnije metode dosad razvijene u Teoriji iterativnih procesa za rešavanje nelinearnih jednačina. Opisani rezultati su objavljeni u radu [68]. Napomenimo još jednu prednost predloženih familija, koja se sastoji u tome da se pogodnim izborom težinske funkcije h može dobiti veliki broj novih metoda, a takođe i neki već postojeći metodi kao specijalni slučajevi.

U drugom delu drugog poglavlja konstruisana je familija dvokoračnih metoda Džeretovog tipa koja koristi izvode i ima optimalan red četiri. Ova familija je rezultat koautorskog

rada [12] i data je iterativnom formulom

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3}u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - q(t_k)u(x_k), \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

gde je $t = f'(y)/f'(x)$ i q težinska funkcija koja zadovoljava uslove

$$q_0 = q(1) = 1, \quad q_1 = q'(1) = -\frac{3}{4}, \quad q_2 = q''(1) = \frac{9}{4}, \quad |q'''(1)| < \infty.$$

Ova familija takođe daje veliki broj novih metoda kao specijalne slučajeve, kao i neke poznate metode, na primer Džeretovu familiju dvokoračnih metoda [36]. Metodi predloženi u ovom poglavlju testirani su na velikom broju numeričkih primera i upoređeni sa već postojećim dvokoračnim metodima sa optimalnim redom četiri.

Treće poglavlje je najobimnije i posvećeno je originalnim trokoračnim metodima velike efikasnosti za rešavanje nelinearnih jednačina. U odeljku 3.1 korišćena je interpolacija racionalnom funkcijom

$$w(t) = \frac{a_1 + a_2(t-x) + a_3(t-x)^2}{1 + a_4(t-x)} \quad (a_2 - a_1a_4 \neq 0)$$

za konstrukciju trokoračnog metoda

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = \varphi_f(x_k, y_k), \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{w'(z_k)}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

gde φ_f definiše proizvoljnu dvokoračnu familiju reda 4 koja u prvom koraku koristi Njutnov metod. Ova familija metoda, detaljno opisana u radu [77], koristi 4 funkcijska izračunavanja i dostiže optimalan red 8. Data je analiza konvergencije pomoću simboličkog računa i veći broj numeričkih primera.

U odeljku 3.2 konstruisana je trokoračna familija koja koristi dve težinske funkcije p i q ,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - p(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - q(t_k, s_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{cases}$$

gde je

$$t = \frac{f(y)}{f(x)}, \quad s = \frac{f(z)}{f(y)}.$$

Pokazano je da ako težinske funkcije p i q imaju Tejlorove razvoje oblika

$$p(t) = 1 + 2t + \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + \dots,$$

$$q(t, s) = 1 + 2t + s + \frac{2+a}{2}t^2 + 4ts + \frac{c}{2}s^2 + \frac{6a+b-24}{6}t^3 + \dots,$$

tada familija trokoračnih metoda (3.10) ima red konvergencije osam. Velika prednost ove familije sastoji se u tome da je raznovrsnim izborom funkcija p i q moguće dobiti veliki broj novih metoda, a takodje i već postojeće metode kao specijalne slučajeve.

U nastavku trećeg poglavlja konstruisana je nova familija trokoračnih metoda

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, & w_k = x_k - \gamma f(x_k), \\ z_k = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{N'_3(z_k)}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3)$$

zasnovana na dvokoračnoj familiji (1) sa $t = f(y)/f(x)$ i $s = f(y)/f(w)$, pri čemu težinska funkcija h zadovoljava uslove

$$h(0, 0) = h_t(0, 0) = h_s(0, 0) = 1, \quad h_{ss}(0, 0) = 2, \quad \text{i} \quad |h_{tt}(0, 0)|, |h_{ts}(0, 0)| < \infty.$$

Relacija greške ove familije ima oblik $x_{k+1} - \alpha \sim B(1 - \gamma f'(\alpha))^4(x_k - \alpha)^8$, što znači da i ona ima red 8. Oblik relacije greške daje mogućnost ubrzanja metoda ako parametar γ računamo tako da je $\gamma \approx 1/f'(\alpha)$. Kao i ranije, $f'(\alpha)$ aproksimiramo Njutnovim interpolacionim polinomom $N_1(x_k; \tau_k)$ ili $N_2(x_k; z_{k-1}, y_{k-1})$. Prema tome, samoubrzavajući parametar γ_k modifikuje metod (3) bez memorije u metod sa memorijom (3M). U slučaju $\gamma_k = 1/N_1(x_k; \tau_k)$ posmatrali smo tri različita čvora (pored x_k) $\tau_k = x_{k-1}$, $\tau_k = y_{k-1}$ i $\tau_k = z_{k-1}$ i dobili odgovarajuće R -redove konvergencije $2(2+\sqrt{5}) \approx 8.47$, 9 i 10. Očekivano, preciznije izračunavanje $\gamma_k = 1/N_4(x_k; z_{k-1}, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1})$ daje veći R -red jednak 12, što znači ubrzanje od impozantnih 50% bez dodatnih funkcijskih izračunavanja.

U četvrtom poglavlju opisani su višekoračni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina, konstruisani inverznom interpolacijom. Red konvergencije ovih metoda određen je korišćenjem Hercbergerovog matricnog metoda. U prvom odeljku ovog poglavlja opisan je dvokoračni metod sa memorijom korišćenjem inverznog interpolacionog polinoma drugog reda, publikovan u radu [69]. Red konvergencije ovog metoda je $(5 + \sqrt{17})/2 \approx 4.561$ a iterativna formula glasi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + f(x_k)^2 \Phi(y_k) = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_k). \quad (4)$$

Funkcija Φ je definisana sa

$$\Phi(t) = \frac{1}{f(t) - f(x_k)} \left[\frac{t - x_k}{f(t) - f(x_k)} - \frac{1}{f'(x_k)} \right], \quad (5)$$

a prediktor y_k se izračunava po formuli $y_k = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_{k-1})$.

Trokoračni metod konstruisan u odeljku 4.2 pomoću inverznog interpolacionog polinoma trećeg reda ima sličan oblik

$$\begin{cases} y_k = N(x_k) + \left[f(y_{k-1})\Phi(z_{k-1}) - f(z_{k-1})\Phi(y_{k-1}) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_{k-1}) - f(z_{k-1})}, \\ z_k = N(x_k) + \left[f(y_k)\Phi(z_{k-1}) - f(z_{k-1})\Phi(y_k) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_k) - f(z_{k-1})}, \\ x_{k+1} = N(x_k) + \left[f(y_k)\Phi(z_k) - f(z_k)\Phi(y_k) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_k) - f(z_k)}, \end{cases}$$

pri čemu je funkcija Φ definisana sa (5). Njegov red konvergencije iznosi približno 10.815. Numerički primeri su dati u odeljku 4.5 radi ilustracije ponašanja konvergencije višekoračnih metoda. Pri tom je predložen i jedan specijalan izbor početnih aproksimacija koji omogućuje znatno povećanje tačnosti aproksimacija, a takođe smanjuje računsku cenu metoda, što numerički primeri potvrđuju u praksi.

U petom poglavlju izloženi su originalni rezultati koji se odnose na konstrukciju višekoračnih metoda sa memorijom, zadatak koji osim Traubovih jednostavnih ilustrativnih primera iz njegove knjige [88] nije razmatran u literaturi. Na izvestan način ovo je svojevrsni paradoks jer ovi metodi imaju ubedljivo najvišu računsku efikasnost. U ovom poglavlju mi pokazujemo da metodi sa memorijom mogu postići znatno bržu konvergenciju u odnosu na odgovarajuće metode bez memorije, bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Na ovaj način računska efikasnost se bitno povećava. Ubrzanje konvergencije se postiže odgovarajućom varijacijom slobodnog parametra u svakom iterativnom koraku, kao što je to objašnjeno u drugom i trećem poglavlju. Ovaj varirajući (ili samoubrzavajući) parametar se aproksimira recipročnom vrednošću Njutnovog interpolacionog polinoma nižeg stepena (u praksi, najviše 4. stepena) koristeći već izračunate podatke. Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu [66].

U disertaciji smo ograničili naše razmatranje na Kung-Traubovu n -koračnu familiju [44] i Čeng-Li-Huangovu n -koračnu familiju [98] iz sledećih razloga:

- 1) obe familije su optimalne u smislu Kung-Traubove hipoteze;
- 2) red konvergencije može biti proizvoljno veliki (oblika 2^n);
- 3) obe ove familije ne koriste izvod funkcije, što je pogodno u svim situacijama kada je računanje izvoda funkcije f komplikovano.

U odeljku 5.1. kratko su izložene Kung-Traubova familija [44] i Čeng-Li-Huangova familija [98] višekoračnih metoda bez memorije. Ideja i motivacija za ubrzanje konvergencije proizlaze iz oblika izraza za asimptotsku konstantu greške

$$x_{k+1} - \alpha \sim C(1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-1}} (x_k - \alpha)^{2^n},$$

o čemu je bilo ranije reči. Familije višekoračnih metoda sa memorijom, zasnovane na Kung-Traubovoj i Čeng-Li-Huangovoj familiji, izvedene su samoubrzavajućim parametrom

$\gamma_k \approx -1/f'(\alpha)$, koji se računa u svakoj iteraciji koristeći već poznate informacije iz prethodne i aktuelne iteracije. U odeljku 5.3 određena je donja granica R -reda konvergencije predloženih familija sa memorijom. Klasični metod sečice, razmatran u Traubovoj knjizi [88, str. 185–187] i proširen u radu [72], daje red $\frac{1}{2}(2^n + \sqrt{2^n(2+2^n)})$. Poboljšani metod sečice daje veći red $2^n + 2^{j-1}$ ($j \in \{1, \dots, n-1\}$). Primena Njutnovog interpolacionog polinoma višeg reda daje još bolje rezultate: najveći postignut R -red je ne manji od $2^n + 2^{n-1}$. Numerički primeri su izloženi u odeljku 5.4.

Rezultati izloženi u petom poglavlju po prvi put se javljaju u literaturi i uvode veoma efikasne algoritme i to u najopštijem obliku. Predloženi princip za ubrzanja konvergencije bez dodatnih računskih ulaganja je ne samo originalan već daje i opšte principe za konstrukciju vrlo efikasnih numeričkih algoritama za rešavanje nelinearnih jednačina. I kod ovih generalisanih višekoračnih metoda proizvoljnog reda konvergencije (oblika 2^n) postignuto je izuzetno ubrzanje konvergencije koje ide i do 50%.

U šestom poglavlju bavili smo se istovremenim određivanjem svih prostih ili višestrukih (realnih ili kompleksnih) nula polinoma. U ovoj oblasti dugo vremena nije bilo napretka u pogledu poboljšanja računске efikasnosti. Tek uvođenjem postupka sa korekcijama za ubzanje konvergencije bez dodatnih izračunavanje od strane Nurina [57] (1977) u običnoj kompleksnoj aritmetici i M. Petkovića i Karstensena [65] (1993) u kompleksnoj kružnoj intervalnoj aritmetici (aritmetici diskova) postignut je zavidan napredak.

Šesto poglavlje isključivo je posvećeno simultanim metodima za određivanje korena polinoma i uglavnom su razmatrani metodi sa korekcijama. Bitan napredak je postignut kombinovanjem višekoračnih metoda (ne većeg reda od četiri) za određivanje jednog korena i simultanih iterativnih metoda, što povećava brzinu konvergencije koristeći veoma mali broj dodatnih funkcijskih izračunavanja. Na taj način računska efikasnost je bitno poboljšana.

U odeljku 6.1 razmatran je simultani metod Vajerštrasovog tipa sa kubnom konvergencijom zasnovan na interpolaciji, koji ne koristi izvode. Zbog svoje jednostavnosti, ovaj metod poseduje ne samo zavidnu računsku efikasnost već i dobre konvergentne karakteristike.

U odeljcima 6.2, 6.3 i 6.4 korišćena je relacija fiksne tačke Erlih-Abertovog tipa

$$\zeta_i = z_i - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - \zeta_j}} \quad (i \in \mathbf{I}_\nu := \{1, \dots, \nu\}), \quad (7)$$

gde su $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$ nule polinoma f stepena n ($\geq \nu$) višestrukosti μ_1, \dots, μ_ν a z_1, \dots, z_ν njihove aproksimacije. Zamenjujući nule na desnoj strani poslednje relacije aproksimacijama z_1, \dots, z_n i uzimajući $\mu_1 = \dots = \mu_\nu = 1$ (sve nule su proste), dobija se klasičan Erlih-Abertov metod reda tri.

U odeljku 6.2 konstruisan je metod za istovremeno određivanje svih prostih (realnih ili kompleksnih) nula polinoma f zamenjujući nule na desnoj strani relacije (7) aproksimacijama

$$z_j^* = z_j - g(t_j) \frac{f(z_j - u_j)}{f'(z_j)}$$

koje se dobijaju pomoću dvotačkastog metoda reda 4 predloženog u [74]. Dobijeni simultani metod ima red konvergencije 6 uz dodatnih n izračunavanja polinoma po iteraciji. Analiza računске efikasnosti ovog metoda i klasičnog Erlih-Abetovog metoda reda 3 pokazuje dominaciju ubrzanog metoda. Na sličan način u odeljku 6.3 dobijen je metod reda 6, pri čemu su nule zamenjene aproksimacijama koje se dobijaju iz metoda (2) Džeretovog tipa. Isti princip primenjen je u odeljku 6.4 za konstrukciju metoda reda 6 za višestruke nule polinoma koristeći aproksimacije dobijene dvokoračnim metodom reda 4 iz rada [46].

Spisak direktno korišćene ili citirane literature, koji se sastoji od 99 referenci, dat je na kraju disertacije.

*
* *

Disertacije je nastala kao rezultat divne saradnje, sjajnog prijateljstva, velike posvećenosti i neprocenjive pomoći mentora, profesora dr Miodraga S. Petkovića, kome i ovom prilikom želim da se zahvalim.

Dobrim delom disertacija je i plod saradnje sa profesorom dr Ljiljanom Petković, kojoj zahvaljujem na dragocenim sugestijama. Zahvalnost dugujem profesorima dr Beni Neti (Monterej, SAD) i dr Snežana Ilić, i dr Mimici Milošević na saradnji prilikom izrade zajedničkih radova.

U Nišu, januara 2012.

Jovana Džunić

Osnovni koncepti

1.1 Uvod

Rešavanje nelinearnih jednačina je jedan od najstarijih i, istovremeno, najvažnijih matematičkih problema jer se javlja u matematičkim modelima inženjerskih disciplina, fizike, astronomije, ekonomije, pa čak i u društveno-humanističkim naukama. Zbog toga je ovom problemu oduvek pridavana velika pažnja, od starih Vavilonaca koji su znali da izračunaju kvadratni koren iterativnim putem, preko formula za kubne jednačine u Srednjem veku, pa sve do današnjih dana. Iako su knjige Ostrovskog¹, Trauba, Ortege i Rajnbolta² šezdesetih i sedamdesetih godina dvadesetog veka u dobroj meri sistematizovale znanja iz ove oblasti, na početku 21. veka došlo je do nagle ekspanzije iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina, a posebno polinomskih jednačina. Razlog za to je pojava modernih računara i aritmetike višestruke preciznosti koji su omogućili razvoj novih, bržih i efikasnijih algoritama za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina.

U fundamentalnoj knjizi iz oblasti nelinearnih jednačina „*Iterative Methods for the Solution of Equations*” iz 1964., Traub je pokazao da iterativna funkcija koja eksplicitno zavisi od $p - 1$ izvoda funkcije čija se nula traži, ne može imati red konvergencije veći od p . Na primer, Njutnov³ metod koristi f i f' i ima red dva, Halejev⁴ i Čebiševljevi metod koji koriste f , f' i f'' imaju red tri, itd. Pri ovome se misli na izračunavanje u jednoj tački (aproksimaciji nule), što podrazumeva jedan korak izračunavanja. S obzirom da se računaska efikasnost iterativnih metoda izražava preko indeksa efikasnosti $E = r^{1/\theta}$, gde je r red konvergencije, a θ broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji, računaska efikasnost jednokoračnih metoda ne može biti veća od $r^{1/r} \approx 1.4448$, koja se (teorijski) dobija za $r = e$. Veću računsku efikasnost nije moguće dobiti čak i uvođenjem dodatnih izvoda višeg reda. Zbog toga se uvode višekoračni metodi (zvani, ponekad, i višetačkasti). Iz ovih

¹ A.M. Ostrowski

² W. C. Rheinboldt

³ Isaac Newton (1643–1727)

⁴ Edmond Halley (1656–1742)

razloga, konstrukcija novih višekoračnih metoda što veće računske efikasnosti, kao osnovni cilj ove disertacije, je sasvim opravdan i istovremeno izazovan.

Još 1974. godine Kung i Traub u radu *Optimal order of one-point and multipoint iteration* [44] postavili su hipotezu da višekoračni metodi bez memorije koji koriste $n + 1$ funkcijskih izračunavanja po iteraciji (funkcije f i njenih izvoda, ako se zahtevaju) ne mogu imati red konvergencije veći od 2^n . Mada hipoteza još nije dokazana, vrlo je verovatno da granica reda konvergencije ne može biti prevaziđena jer svi do sada razvijeni metodi su potvrdili ovu hipotezu. Prema njoj, indeks efikasnosti ne može biti veći od $E_n^{(0)} = 2^{n/(n+1)}$. Metodi koji dostižu efikasnost $E_n^{(0)}$ u literaturi se obično nazivaju *optimalnim metodima* ili metodima sa *optimalnim redom konvergencije* ($= 2^n$, $n \geq 1$).

1.2 Klasifikacija iterativnih procesa

U disertaciji ćemo razmatrati funkcije realne promenljive definisane sa $f : I_f \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Broj α za koji je $f(\alpha) = 0$ zovemo *nula* funkcije f , ili *koren* jednačine $f(x) = 0$. U slučaju polinomske jednačine u literaturi se skoro ravnopravno koriste termini *nula polinoma* i *koren polinoma*, mada je ispravnije reći koren polinomske jednačine. Nula α ima *red* ili *višestrukost* m ako je moguća faktorizacija

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x),$$

gde je $g(\alpha) \neq 0$. Ako je $m = 1$, kaže se da je nula α *prosta*.

Iterativni metodi zasnovani su na sukcesivnom izračunavanju aproksimacija tražene nule x_{k+1}, x_{k+2}, \dots primenjujući neki algoritam iterativne prirode

$$x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-\lambda}) \quad (1.1)$$

i polazeći od početnih aproksimacija x_0, \dots, x_λ nule α date funkcije $f : I_f \rightarrow \mathbf{R}$. Funkcija ϕ naziva se *iterativnom funkcijom*. Ukoliko niz $\{x_k\}$, generisan iterativnim procesom (1.1), konvergira ka rešenju α , tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha,$$

tada kažemo da je iterativni proces (1.1) *konvergentan*.

Klasifikacija iterativnih metoda koju je načinio Traub [88] još šezdesetih godina prošlog veka opšte je prihvaćena u literaturi. Ako je $\lambda = 0$, (1.1) predstavlja *jednokoračni metod*, a ako je $\lambda \geq 1$, u pitanju je *jednokoračni metod sa memorijom*. Iterativni metod može biti konstruisan koristeći nove informacije $\omega_1(x_k), \dots, \omega_n(x_k)$ u tački x_k pri izračunavanju nove aproksimacije x_{k+1} ,

$$x_{k+1} = \phi[x_k, \omega_1(x_k), \dots, \omega_n(x_k)]. \quad (1.2)$$

Tada kažemo da ϕ definiše *višetačkasti* ili *višekoračni iterativni metod*.

Konačno, neka z_j predstavljaju $k + 1$ veličina $x_j, \omega_1(x_j), \dots, \omega_k(x_j)$, $k \geq 1$. Tada iterativni metod

$$x_{i+1} = \phi(z_i; z_{i-1}, \dots, z_{i-n}) \quad (1.3)$$

nazivamo *višetačkasti metod sa memorijom*. Znak ; u (1.3) odvađa tačku z_i u kojoj se koriste nove informacije od tačaka u kojima se stare informacije nanovo upotrebljavaju (z_{i-1}, \dots, z_{i-n}).

Klase višekoračnih metoda sa i bez memorije (1.2) i (1.3) biće glavna tema ove disertacije. Osnovni cilj i motivacija prilikom konstrukcije iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina jeste ostvarivanje što većeg reda konvergencije uz minimalnu računsku cenu. Najefikasniji postojeći metodi zasnovani su na višekoračnim iteracijama, prvi put istraživanim u Traubovoj knjizi [88] i radovima i knjigama publikovanim u drugoj polovini dvadesetog veka (videti npr. [36], [37], [40], [60], [79] [52]). Višekoračni iterativni metodi ponovo postaju interesantan i izazovan zadatak na početku dvadeset prvog veka iz dva razloga: 1) ovi metodi prevazilaze teorijske granice jednokoračnih metoda u vezi reda konvergencije i računске efikasnosti i 2) njihova analiza i realizacija bila je omogućena tek sa razvojem vrlo moćnog hardvera (brzih procesora) i softvera (aritmetike višestruke preciznosti i simboličkog izračunavanja).

1.3 Red konvergencije

Neka je $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ niz aproksimacija nule α funkcije f , generisan iterativnom funkcijom ϕ i koji konvergira ka nuli α . Uslovi konvergencije zavise od oblika i osobina iterativne funkcije kao i izabrane početne aproksimacije.

U disertaciji ćemo koristiti simbole \rightarrow , O , o , O_M i \sim prema sledećim pravilima:

- Ako je $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = C$ pišaćemo $g(x_k) \rightarrow C$ ili $g \rightarrow C$.
- Ako $\frac{f}{g} \rightarrow C$, gde je C konstanta različita od nule, pišaćemo $f = O(g)$ ili $f \sim Cg$.
- Za nizove $\{\varphi_k\}$ i $\{\psi_k\}$ koji teže ka 0 kada $k \rightarrow \infty$ pišaćemo $\varphi_k = o(\psi_k)$ ako važi $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k}{\psi_k} = 0$; drugim rečima, φ_k je beskonačno mala višeg reda u odnosu na ψ_k .
- Za dva realna ili kompleksna broja z i w pišaćemo $z = O_M(w)$ ako je $|z| = O(|w|)$ (isti red modula).

Ovaj pristup veoma uprošćuje kako analizu tako i prezentaciju.

Brzina konvergencije iterativnog metoda je od velikog značaja u teoriji i praksi, kao i samo pitanje konvergencije. Brzina konvergencije iterativnog metoda

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad (1.4)$$

definiše se redom konvergencije.

Definicija 1.1 Za niz $\{x_k\}$, generisan iterativnom formulom (1.4), koji konvergira ka α kaže se da ima red konvergencije r ako je

$$|x_{k+1} - \alpha| = O(|x_k - \alpha|^r), \quad (1.5)$$

tj. ako postoji konstanta C_r takva da je za dovoljno veliko k

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C_r |x_k - \alpha|^r. \quad (1.6)$$

U literaturi se često sreće sledeća ekvivalentna definicija:

Definicija 1.2 Ako postoje realan broj r i konstanta C_r različita od nule takvi da

$$\frac{|\phi(x_k) - \alpha|}{|x_k - \alpha|^r} \rightarrow C_r \quad \text{kada } k \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

tada se r naziva *red konvergencije niza*, a C_r *faktor konvergencije* ili *asimptotska konstanta greške*.

Napomena 1.1 Podrazumeva se da je iterativna funkcija ϕ takođe reda r ako definiše iterativni metod reda r . Skup svih iterativnih funkcija reda r označavaćemo sa K_r .

Teorema 1.1 (Šreder⁵-Traub [82], [88]) *Neka niz $\{x_k\}$ dat pomoću (1.4) definiše konvergentan iterativni metod i neka funkcija ϕ ima neprekidne izvode $\phi', \dots, \phi^{(r)}$ u okolini tačke $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Tada dati iterativni metod ima red konvergencije r ako i samo ako su ispunjeni uslovi:*

$$\begin{aligned} 1) & \phi(\alpha) = \alpha, \\ 2) & \phi'(\alpha) = \dots = \phi^{(r-1)}(\alpha) = 0, \\ 3) & \phi^{(r)}(\alpha) \neq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Osim toga, asimptotska konstanta greške data je sa

$$C_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\phi(x_k) - \alpha|}{|x_k - \alpha|^r} = \left| \frac{\phi^{(r)}(\alpha)}{r!} \right|. \quad (1.9)$$

Teorema 1.2 (Traub [88]) *Neka je $\phi(x)$ iterativna funkcija reda r . Tada je kompozitna iterativna funkcija*

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{f(\phi(x))}{f'(x)} \quad (1.10)$$

reda $r + 1$.

Teorema 1.3 (Traub [88]) *Neka su $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$ iterativne funkcije reda r_1, r_2, \dots, r_s , redom. Tada kompozicija*

$$\phi(x) = \phi_1(\phi_2(\dots(\phi_s(x))\dots))$$

definiše iterativni metod reda $r_1 r_2 \dots r_s$.

U nekim slučajevima red konvergencije ne može biti određen na osnovu Definicije 1.1 ili 1.2. Da bi prevazišli ovaj problem, Ortega i Rajnbolt su u knjizi [58] uveli opštiji koncept konvergencije i reda konvergencije u \mathbf{R}^n .

⁵ E. Schröder (1941-1902)

Definicija 1.3 Neka je IM iterativni metod koji konvergira ka graničnoj tački α i neka je $\{x^{(k)}\}$ proizvoljan niz u \mathbf{R}^n koji konvergira ka α . Tada se brojevi

$$R_m(x^{(k)}) = \begin{cases} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \alpha\|^{1/k} & , \text{ ako je } m = 1, \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \alpha\|^{1/m^k} & , \text{ ako je } m > 1, \end{cases}$$

nazivaju *korenski faktori konvergencije* ili, kraće, *R-faktori* niza $\{x^{(k)}\}$. Ako je $S(\text{IM}, \alpha)$ skup svih nizova generisanih pomoću IM koji konvergiraju ka α , tada se veličina

$$R_m(\text{IM}, \alpha) = \sup\{R_m(x^{(k)}) : \{x^{(k)}\} \in S(\text{IM}, \alpha)\} \quad (1 \leq m < +\infty)$$

zove *R-faktor konvergencije* iterativnog metoda u tački α .

Definicija 1.4 *R-red* konvergencije iterativnog metoda IM u tački α određen je veličinom

$$O_R(\text{IM}, \alpha) = \begin{cases} +\infty, & \text{ ako je } R_m(\text{IM}, \alpha) = 0 \text{ za svako } m \in [1, +\infty), \\ \inf\{m \in [1, +\infty) : R_m(\text{IM}, \alpha) = 1\}, & \text{ u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Brzina konvergencije iterativnih metoda IM_1 i IM_2 može se uporediti prema sledećoj proceduri:

- 1) Prvo poredimo *R-redove*, tj. veličine $O_R(\text{IM}_1, \alpha)$ i $O_R(\text{IM}_2, \alpha)$. Metod sa većim *R-redom* je brži.
- 2) U slučaju jednakih *R-redova*, odnosno $O_R(\text{IM}_1, \alpha) = O_R(\text{IM}_2, \alpha)$, poredi se *R-faktori*. Brži je metod sa manjim *R-faktorom*.

R-red konvergencije je jako pogodan za određivanje brzine konvergencije iterativnih metoda sa memorijom. Definišimo grešku aproksimacije x_k kao razliku $\varepsilon_k = x_k - \alpha$, gde je α nula funkcije f . Sledeći rezultati su veoma bitni u teoriji iterativnih procesa.

Teorema 1.4 Neka je IM iterativni metod sa memorijom koji generiše niz $\{x_k\}$, i neka ovaj niz konvergira ka nuli α . Ako postoji nenegativna konstanta γ i nenegativni celi brojevi $t_i, 0 \leq i \leq m$, takvi da važi

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq \gamma \prod_{i=0}^m |\varepsilon_{k-i}|^{t_i},$$

tada *R-red* konvergencije iterativnog metoda IM zadovoljava nejednakost

$$O_R(\text{IM}, \alpha) \geq s^*,$$

gde je s^* jedinstven pozitivni koren jednačine

$$s^{m+1} - \sum_{i=0}^m t_i s^{m-i} = 0.$$

U nastavku su data tvrđenja koja ćemo koristiti u analizi konvergencije iterativnih procesa.

Teorema 1.5 Neka je $f \in C^m(I)$, $I \subset \mathbf{R}$ i $H_m(t) = H_m(t; t_0, t_1, \dots, t_j)$ Ermitov⁶ interpolacioni polinom stepena m kroz čvorove $t_0, t_1, \dots, t_j \in I$. Tada postoji $\zeta \in I$ tako da važi

$$f(t) - H_m(t) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^j (t - t_i)^{s_i}, \quad (1.11)$$

gde je s_i broj informacija u čvoru t_i , i važi $s_1 + s_2 + \dots + s_j = m + 1$.

Napomena 1.2 Kada koristimo samo vrednosti funkcije $f(x_i)$, $1 \leq i \leq m + 1$, tj. kada je broj informacija s_i u svakom od čvorova t_i jednak 1, Ermitova interpolacija $H_m(t)$ se svodi na Njutnov interpolacioni polinom $N_m(t)$. Odgovarajuća relacija greške (1.11) takođe važi.

Lema 1.1 Neka je $N_m(t)$ Njutnov interpolacioni polinom stepena m koji interpolira funkciju f u $m+1$ različitih interpolacionih čvorova $y_{k,0}, y_{k-1,1}, \dots, y_{k-1,m}$ koji su sadržani u okolini nule α funkcije f u intervalu I_f . Neka je izvod $f^{(m+1)}$ neprekidan u I_f . Definišimo razlike $\varepsilon_{k-1,j} = y_{k-1,j} - \alpha$ ($j \in \{1, \dots, m\}$), $\varepsilon_k = y_{k,0} - \alpha$ i pretpostavimo

- 1) svi čvorovi $y_{k,0}, y_{k-1,n-1}, \dots, y_{k-1,n-m}$ su dovoljno blizu nule α ;
- 2) važi $\varepsilon_{k,0} = o(\varepsilon_{k-1,1} \dots \varepsilon_{k-1,m})$, kada $k \rightarrow \infty$.

Tada je

$$N'_m(y_{k,0}) \sim f'(\alpha) \left(1 + (-1)^{m+1} c_{m+1} \prod_{j=1}^m \varepsilon_{k-1,j} \right). \quad c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}. \quad (1.12)$$

Dokaz. Tejlorovi⁷ razvoji izvoda funkcije f u tački $y_{k,0} \in I_f$ kao i $m+1$ -og izvoda u tački $\zeta \in I_f$ u okolini nule α , glase

$$f'(y_{k,0}) = f'(\alpha) (1 + 2c_2 \varepsilon_{k,0} + 3c_3 \varepsilon_{k,0}^2 + \dots), \quad (1.13)$$

$$f^{(m+1)}(\zeta) = f'(\alpha) ((m+1)! c_{m+1} + \frac{(m+2)!}{1!} c_{m+2} \varepsilon_\zeta + \dots), \quad (1.14)$$

gde je $\varepsilon_\zeta = \zeta - \alpha$, i ζ je tačka koja se javlja u formuli (1.11) iz Teoreme 1.5:

$$f(t) - N_m(t) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} (t - y_{k,0}) \prod_{j=1}^m (t - y_{k-1,j}) \quad (\zeta \in I_f). \quad (1.15)$$

Posle diferenciranja (1.15) u tački $t = y_{k,0}$, dobijamo

$$N'_m(y_{k,0}) = f'(y_{k,0}) - \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} \prod_{j=1}^m (y_{k,0} - y_{k-1,j}). \quad (1.16)$$

Zamenom (1.13) i (1.14) u (1.16), imajući u vidu uslove Leme 1.1, posle elementarnih transformacija dolazimo do relacije (1.12). \square

⁶ Charls Hermite (1822–1901)

⁷ Brook Taylor (1685–1731)

Na kraju ovog odeljka pomenimo da je od interesa proveriti koliki je red konvergencije pri praktičnoj primeni nekog iterativnog metoda i koliko odstupa od reda dobijenog teorijskom analizom. Pretpostavimo da nam je poznata tačna nula α i neka su x_{k-1}, x_k i x_{k+1} tri sukcesivne aproksimacije ove nule dobijene u iterativnom procesu reda r . Tada se računski red konvergencije iterativnog metoda računa po formuli

$$\tilde{r} \approx \frac{\log(|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|)}{\log(|x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|)} \quad (1.17)$$

Ova približna vrednost uglavnom dobro aproksimira teorijski red konvergencije r .

Kako nam tačna nula α u praksi najčešće nije poznata, računski red konvergencije može se računati i po približnoj formuli

$$r_c \approx \frac{\log |f(x_{k+1})/f(x_k)|}{\log |f(x_k)/f(x_{k-1})|}. \quad (1.18)$$

U praksi, računski redovi dobijeni formulama (1.17) i (1.18) se neznatno razlikuju od teorijskog reda ako je početna aproksimacija x_0 dobro izabrana.

U vezi sa efikasnim izborom početnih aproksimacija napomenimo da ovo nije nimalo lak problem. To se naročito ogleda u primerima oscilatornih funkcija ili funkcija koje imaju ekstremno nagib u okolini tražene nule - izrazito ravan ili izrazito strm. Važnost izbora dobrih početnih vrednosti postaje još očiglednija u slučaju iterativnih metoda visokog reda konvergencije. Naime, kod ovog tipa metoda loš izbor startne vrednosti obično prouzrokuje početnu sporu konvergenciju metoda. Time se bitno umanjuje efikasnost upotrebljenog metoda.

Pronalaženje dobre početne aproksimacije x_0 koja bi garantovala konvergenciju iterativnog niza ka nuli funkcije f je koliko bitan toliko i težak zadatak. U mnogim situacijama dobre početne aproksimacije dobijaju se primenom rezultata Juna⁸ i Petkovića izloženim u radovima [96] i [80]. Glavne prednosti ovog efikasnog neiterativnog algoritma, zasnovanog na numeričkoj integraciji i pogodnim transformacijama date funkcije f , su:

- 1) za razliku od mnogih metoda, primenjeni postupak ne zahteva dovoljno blisku početnu aproksimaciju već samo interval u kojem je sadržan koren,
- 2) metod se može upotrebiti i kada kriva funkcije f nije dovoljno glatka i
- 3) nije potrebno izračunavanje izvoda funkcije čija se nula traži.

1.4 Efikasnost iterativnih metoda

Iz praktičnih razloga, od velikog je značaja poznavati računsku efikasnost bilo kog iterativnog metoda za određivanje korena nelinearnih jednačina. Numerički algoritam je utoliko

⁸ B.I. Yun

efikasniji ukoliko se postavljeni zadatak izvrši za kraće računarsko vreme. To je u uskoj vezi sa osobinama kao što su broj neophodnih računskih operacija upotrebljenih prilikom računanja u iterativnom procesu do zahtevane tačnosti, brzina konvergencije, procesorsko vreme itd.

Računska efikasnost nekog iterativnog metoda IM definiše se uvodeći *koeficijent efikasnosti* $E(\text{IM})$ (ili kraće *efikasnost*). Efikasnost se može uvesti na više načina ali uvek tako da je računaska cena algoritma proporcionalna redu konvergencije iterativnog metoda i obrnuto proporcionalna obavljenom radu, recimo broju izračunavanja funkcija ili broju aritmetičkih operacija po iteraciji.

Neka je r red konvergencije iterativnog metoda IM i θ ukupan broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji. Traub [88] je definisao *informacijsku efikasnost* ili koeficijent efikasnosti iterativnog metoda IM količnikom

$$IE(\text{IM}) = \frac{r}{\theta}.$$

Ostrovski [60] je uveo *indeks efikasnosti* koji se određuje prema formuli

$$E(\text{IM}) = r^{1/\theta}. \quad (1.19)$$

Sledeća alternativna formula data u radu [5]

$$E(\text{IM}) = \frac{\log r}{\theta} \quad (1.20)$$

suštinski se ne razlikuje od (1.19).

Svaka iterativna funkcija ϕ konstruisana za rešavanje nelinearne jednačine $f(x) = 0$ zavisi od broja funkcijskih izračunavanja po iteraciji θ_ϕ . Veza između reda konvergencije iterativne funkcije ϕ i njene informacijske efikasnosti data je *osnovnom teoremom* za jednokoračne iterativne funkcije [88]:

Teorema 1.6 (Traub ([88])) *Neka je ϕ proizvoljna jednokoračna iterativna funkcija reda r i neka je θ_ϕ broj novih funkcijskih izračunavanja po iteraciji. Tada za svako r postoji iterativna funkcija ϕ takva da je $IE(\phi) = r/\theta_\phi = 1$. Takođe, za sve iterativne funkcije ϕ važi*

$$IE(\phi) = r/\theta_\phi \leq 1.$$

Šta više, iterativna funkcija ϕ mora eksplicitno da zavisi od prvih $r - 1$ izvoda funkcije f .

Dakle, jednokoračne iterativne funkcije sa dovoljno glatkom funkcijom f ne mogu imati informacijsku efikasnost veću od 1. To znači da iterativne metode sa informacijskom efikasnošću većom od jedinice treba tražiti u klasi višekoračnih metoda.

Glavni cilj pri razvoju novih metoda usmeren je ka dobijanju što veće efikasnosti. Na osnovu definicija (1.19) i (1.20), to znači da je poželjno ostvariti što veći red konvergencije uz fiksiran broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji. U slučaju višekoračnih metoda bez memorije ovaj zahtev je u bliskoj vezi sa optimalnim redom konvergencije razmatranim u Kung-Traubovoj hipotezi [44] iz 1974. godine.

Kung-Traubova hipoteza. Višekoračni iterativni metodi bez memorije, koji zahtevaju $n + 1$ funkcijskih izračunavanja po iteraciji, imaju red ne veći od 2^n .

Višekoračni metodi koji zadovoljavaju hipotezu Kunga i Trauba (još uvek nije dokazana) se obično nazivaju *optimalni metodi*. Dakle, optimalni red konvergencije iznosi $r = 2^n$. Optimalna računaska efikasnost je tada

$$E_n^{(o)} = 2^{n/(n+1)}.$$

Upravo takvi metodi su najvećim delom tema ove disertacije. Klasa n -koračnih optimalnih metoda biće označavana sa Ψ_{2^n} .

Posmatrajući iterativne metode za određivanje proste nule date realne funkcije, *računska cena* se obično izražava brojem izračunavanja te funkcije (u različitim tačkama) kao i njenih izvoda. Situacija je dosta drugačija kada se primenjuje iterativni metod za istovremeno određivanje svih nula polinoma. Pri korišćenju iterativnih metoda za istovremeno nalaženje nula polinoma javljaju se sume i proizvodi, tako da se i cena njihovog izračunavanja mora uzeti u obzir. Na taj način se i stepen polinoma prirodno javlja kao parametar u formuli za izračunavanje koeficijenta efikasnosti.

Najdirektniji pristup je svođenje svih izračunavanja na osnovne operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Neki algoritmi koriste i korenovanje, koje u tim slučajevima treba uzeti u obzir. Svaka od navedenih operacija zahteva određeno vreme izvršenja. Ova vremena zavise od preciznosti primenjene aritmetike i arhitekture računara. Jedan od metoda za određivanje cene izračunavanja po iteraciji je uvođenje *težina*, normalizovanih u odnosu na operaciju sabiranja i proporcionalnih vremenu izvršenja operacija. Označimo ove težine sa w_S (za sabiranje), w_O (za oduzimanje), w_M (za množenje), w_D (za deljenje), pri čemu je $w_S = w_O = 1$ zbog normalizacije. Dalje, označimo sa $B_{\oplus}(n)$, $B_{\ominus}(n)$, $B_{\odot}(n)$, $B_{\oslash}(n)$ broj sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja (redom) po jednoj iteraciji u funkciji od stepena polinoma n . Cena izračunavanja data je sa

$$\theta(n) = w_S B_{\oplus}(n) + w_O B_{\ominus}(n) + w_M B_{\odot}(n) + w_D B_{\oslash}(n). \quad (1.21)$$

Napomenimo da je upotreba gore navedenih formula za ocenu računске efikasnosti neophodna jer je nemoguće izmeriti vreme izvršenja iterativnog procesa primenjenog na nekom od savremenih računara koji izvršavaju ogroman broj matematičkih operacija u jedinici vremena.

1.5 Jednokoračni metodi

U ovom odeljku dajemo kratak pregled jednokoračnih metoda na koje se pozivamo u ovoj disertaciji. Koristićemo sledeće oznake: Neka je f dovoljan broj puta diferencijabilna funkcija sa prostom nulom α u intervalu I_f . Pretpostavka je i da je $f'(\alpha) \neq 0$ za sve $x \in I_f$.

1.5.1 Lista jednokoračnih metoda

Jednokoračni metodi za određivanje proste nule

- *Metod sečice*, $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.22)$$

- *Metod Stefensena*⁹ [86], $r = 2$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.23)$$

- *Halejev metod*, $r = 3$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{1}{1 - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)^2}} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.24)$$

- *Čebiševljev metod*, $r = 3$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)^2} \right) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.25)$$

- *Lagerov*¹⁰ *metod* [45], $r = 3$,

$$x_{k+1} = L_f(x_k; \nu) = x_k - \frac{\nu f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(\nu-1)^2 f'(x_k)^2 - \nu(\nu-1) f(x_k) f''(x_k)}}, \quad (1.26)$$

gde je ν realan parametar različit od 0 i 1. Za $\nu \neq 0, 1$ Lagerov metod daje sledeće partikularne slučajeve:

- *Ojlerov*¹¹-*Košijev*¹² *metod* se dobija za $\nu = 2$,

$$x_{k+1} = L_f(x_k; 2) = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}. \quad (1.27)$$

- *Metod Ostrovsog* [60] dobija se kao granični slučaj kada $\nu \rightarrow \infty$ u (1.26),

$$x_{k+1} = L_f(x_k; \infty) = x_k - \frac{f(x_k)}{\sqrt{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}}. \quad (1.28)$$

⁹ Johan Frederik Steffensen (1873–1961)

¹⁰ Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886)

¹¹ Leonhard Euler (1707–1783)

¹² Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

– Zamenjujući $\nu = 1/\beta + 1$, $\beta \neq 0$ u (1.26) dolazimo do Hansen-Patrikovog¹³ metoda poznatog iz rada [33]

$$x_{k+1} = L_f(x_k; 1/\beta + 1) = x_k - \frac{(\beta + 1)f(x_k)}{\beta f'(x_k) \pm \sqrt{f'(x_k)^2 - (\beta + 1)f(x_k)f''(x_k)}}. \quad (1.29)$$

U specijalnim slučajevima, za $\nu = 1$ dobija se *Njutnov metod*, $r = 2$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (1.30)$$

a za $\nu = -1$ Halejev metod (1.24).

Jednokoračni metodi za određivanje višestrukog korena

Neka je $m \geq 1$ višestrukost nule α funkcije $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ ($g(\alpha) \neq 0$), i neka je ta nula izolovana na intervalu I_f .

- *Modifikovani Njutnov metod* [82], $r = 2$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.31)$$

- *Šrederov metod* [82], $r = 2$, takođe poznat kao modifikovan Njutnov metod sa poznatom višestrukošću,

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.32)$$

- *Osadin metod* [59], $r = 3$,

$$x_{k+1} = x - \frac{1}{2}m(m+1) \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{1}{2}(m-1)^2 \frac{f'(x)}{f''(x)} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.33)$$

- *Metod Ostrovskog* [60] za višestruke nule, $r = 3$,

$$x_{k+1} = x - \frac{\sqrt{m}f(x)}{\sqrt{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.34)$$

1.5.2 Generatori jednokoračnih metoda

Generatori jednokoračnih metoda (skraćeno GM) su uopštene iterativne formule koje generišu metode proizvoljnog reda konvergencije. U ovom odeljku predstavljamo dva takva

¹³ M. Patrick

metoda Traubovog tipa koji predstavljaju originalni doprinos publikovan u radovima [78] i [67].

Neka je α nula funkcije f reda m i neka je φ iterativna funkcija reda r , tj. definiše iterativni metod reda r . U radu [78] dokazana je sledeća teorema kao osnova za generisanje iterativnih metoda visokog reda konvergencije.

Teorema 1.7 *Neka je φ_r iterativna funkcija reda r za nalaženje proste ili višestruke nule date funkcije f (dovoljan broj puta diferencijabilne). Tada iterativni metod definisan sa*

$$x_{k+1} = \varphi_{r+1}(x_k) := x_k - \frac{x_k - \varphi_r(x_k)}{1 - \frac{1}{r}\varphi_r'(x_k)} \quad (r \geq 2; k = 0, 1, \dots), \quad (1.35)$$

ima red konvergencije $r + 1$.

Napomena 1.3 Iterativna formula (1.35) može se izvesti na više različitih načina. Navodimo jedan jednostavan način: izostavljajući član $O_M(\varepsilon_k^{r+1})$ u relaciji $\varphi_r(x_k) - \frac{1}{r}\varphi_r'(x_k)(x_k - \varphi_r(x_k)) = \alpha + O_M(\varepsilon_k^{r+1})$, izvedenoj u [78], i zamenjujući koren α novom aproksimacijom x_{k+1} , dolazimo do

$$x_{k+1} = \varphi_r(x_k) - \frac{1}{r}\varphi_r'(x_k)(x_k - \varphi_r(x_k)), \quad (1.36)$$

pretpostavljajući da je x_{k+1} bolja aproksimacija od x_k korena α . Zamenom $\varphi_r(x_k) = x_{k+1}$ u drugom članu relacije (1.36) i rešavanjem jednačine

$$x_{k+1} = \varphi_r(x_k) - \frac{1}{r}\varphi_r'(x_k)(x_k - x_{k+1})$$

po x_{k+1} , dolazimo do iterativne formule (1.35).

Napomena 1.4 Mogućnost formule (1.35) da produkuje iterativne metode proizvoljnog reda konvergencije je glavna njena prednost. Štaviše, ova formula generiše kako metode za proste tako i za višestruke nule bez promene same strukture; dovoljno je krenuti od neke iterativne funkcije $\varphi_r(x)$ ($r \geq 2$).

Primetimo da se neke od relacija korišćenih u dokazu Teoreme 1.7 koriste u literaturi koja se bavi normiranim vektorskim prostorima (videti na primer [38]). U radu [78] bavili smo se prostorom kompleksnih brojeva \mathbf{C} i demonstrirali kako se formula (1.35) može uspešno primeniti za generisanje ubrzanih metoda za nalaženje nula. Na primer, polazeći od Njutnovog metoda (1.30) i primenjujući (1.35), dolazimo do Halejevog metoda trećeg reda (1.24) podrazumevajući da se ovi metodi primenjuju za nalaženje prostih nula. Ipak, glavna pažnja u radu [78] usmerena je na ubrzanje iterativnih metoda za nalaženje višestrukih nula, s obzirom da je taj problem ređe posmatran u literaturi.

U dokazu Teoreme 1.7 nijedna pretpostavka o višestrukosti nule α funkcije f nije uvedena. Dakle, možemo primeniti generator metoda (1.35), bez izmena, i za generisanje iterativnog metoda proizvoljnog reda konvergencije za nalaženje ne samo prostih nula, već takođe i za nalaženje višestrukih nula nelinearnih funkcija. To je značajna prednost generatora (1.35) u odnosu na ostale postojeće generatorske formule.

U nastavku su razmatrane dve klase metoda za određivanje višestrukih nula, kategorisane na sledeći način:

- (I) metodi koji koriste poznatu višestrukost,
- (II) metodi gde je višestrukost nepoznata.

(I) Poznata višestrukost

Neka je m red višestrukosti tražene nule α date funkcije f i uvedimo notaciju

$$u = u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad C_j = C_j(x) = \frac{f^{(j)}(x)}{j!f'(x)} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Polazeći od modifikovanog Njutnovog metoda (1.32) reda dva, uz pomoć generatora metoda (1.35) dolazimo do metoda reda tri Halejevog tipa za višestruke nule

$$\varphi_3(x) = x - \frac{x - \varphi_2(x)}{1 - \frac{1}{2}\varphi_2'(x)} = x - \frac{mu(x)}{\frac{1}{2}(1+m) - mC_2(x)u(x)}. \quad (1.37)$$

Nastavljajući postupak ubrzanja reda konvergencije uz pomoć generatora metoda (1.35), dolazimo do (izostavljajući argument x zbog kratkoće):

$$\varphi_4(x) = x - \frac{mu[\frac{1}{2}(1+m) - mC_2u]}{\frac{1}{3!}(1+m)(1+2m) - m(1+m)C_2u + m^2C_3u^2},$$

$$\varphi_5(x) = x - \frac{mu[(1+m)(1+2m)/3! - m(1+m)C_2u + m^2C_3u^2]}{\frac{1}{4!}(1+m)(1+2m)(1+3m) - \frac{1}{2!}(1+m)(1+2m)C_2u + (1+m)[C_3 + \frac{1}{2}C_2^2]m^2u^2 - m^3C_4u^3},$$

itd.

Napomena 1.5 Navedene formule φ_4 i φ_5 su od ranije poznate. Izvedene su prvi put u radu [23], drugačijim pristupom.

Napomena 1.6 U radu [70], autori su dokazali da u slučaju prostih nula, generator metoda (1.35) je ekvivalentan Šrederovom nizu druge vrste [82] (videti [87] za engleski prevod ovog fundamentalnog rada Šredera), koji se ponekad naziva i Šreder–Konigov¹⁴ metod (videti npr. [7], [91])

$$S_r(x) = x - u(x) \frac{Q_{r-2}(x)}{Q_{r-1}(x)}, \quad (r \geq 2), \quad (1.38)$$

gde su Q_k određeni rekurentnom relacijom

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_k(x) = \sum_{\lambda=1}^k (-1)^{\lambda+1} u(x)^{\lambda-1} C_\lambda(x) Q_{k-\lambda}(x), \quad C_1(x) = 1, \quad (k \geq 1).$$

¹⁴ J. König

Modifikacija Šreder-Konigovog metoda (1.38) za višestruke nule data je u [88, Lemma 8.1] sledećom formulom

$$F_{r+1}(x, m) = F_r(x, m) - \frac{mu(x)}{r} F'_r(x, m), \quad F_2(x, m) = x - mu(x), \quad r \geq 2. \quad (1.39)$$

Za $r = 2$ formula (1.39) daje metod Čebiševljevog tipa reda tri

$$\tilde{\varphi}_3(x) = x - mu(x) \left[(3 - m)/2 + mC_2(x)u(x) \right], \quad (1.40)$$

itd. U slučaju $m = 1$ (proste nule) generatorska formula (1.39) generiše iste iterativne metode kao i (1.38).

Napomena 1.7 Prirodno je posmatrati i formulu (1.36) kao generator metoda visokog reda konvergencije. To važi za prvi generisani metod reda tri (Čebiševljevog tipa) $\tilde{\varphi}_3$ datog u (1.40) (uzimajući $\varphi_2 = x - mu(x)$ u (1.36)). U nastavku, generatorska formula (1.36) zaista daje iterativne metode reda $r + 1$; ipak, zbog previše „parazitskih” članova dobijene formule višeg reda su preglomazne. Pod uslovom da obe formule (1.36) i (1.39) polaze od $\varphi_2 = x - mu(x)$, poželjno je pre koristiti Traubovu formulu (1.39) nego (1.36). Ova tema je razmatrana u radu [70].

Generator metoda (1.35) i neki postojeći metodi reda tri za višestruke nule mogu biti kombinovani za dobijanje novih metoda, kao što pokazuju sledeći primeri. Polazeći od metoda Čebiševljevog tipa (1.40) reda tri, primenom GM (1.35) dolazimo do metoda četvrtog reda

$$\varphi_4^*(x) = x - \frac{3mu(x)[3 - m + 2mC_2(x)u(x)]}{4 + 3m - m^2 + 6m(m - 1)C_2(x)u(x) + 6m^2[C_3(x) - 2C_2(x)^2]u(x)^2}. \quad (1.41)$$

Još jedan niz iterativnih metoda za nalaženje višestrukih nula može biti izveden polazeći od Osadinog metoda (1.33) trećeg reda [59], koristeći GM (1.35) dobijamo metod četvrtog reda

$$\eta_4(x) = x - \frac{3C_2(x)[(m - 1)^2 - 2m(m + 1)u(x)C_2(x)]}{4m(m + 1)u(x)C_2(x)^3 - 6(m + 1)C_2(x)^2 - 3(m - 1)^2C_3(x)}. \quad (1.42)$$

Pretpostavka je da je $m \neq 1$ u (1.33), inače se (1.33) svodi na Njutnov metod (1.30).

Kombinujući metod Ostrovskeg (1.34) reda tri i GM (1.35), dolazimo do metoda četvrtog reda

$$\omega_4(x) = x - \frac{3\sqrt{m}u(x)[1 - 2u(x)C_2(x)]}{2[1 - 2u(x)C_2(x)]^{3/2} + \sqrt{m}[1 - 3u(x)C_2(x)] + 3\sqrt{m}u(x)^2C_3(x)}. \quad (1.43)$$

Prema saznanju autora, iterativni metodi (1.41), (1.42) i (1.43) su novi.

Koristeći nedavno izvedene metode trećeg reda za višestruke nule (videti na primer radove [11], [13], [14], [25], [54], [55] i [59], kao i navedene reference), može se nastaviti konstrukcija novih iterativnih metoda višeg reda. Međutim metodi visokog reda konvergencije izraženi su glomaznim formulama, tako ih nećemo ovde navoditi.

(II) Višestrukost nije poznata

Razmotrimo sada generator metoda (1.35) u slučaju kada red višestrukosti nije poznat. Neka je α višestruka nula funkcije $f(x)$, tada je α prosta nula funkcije $f(x)/f'(x)$. Primajući Njutnov metod (1.30) na funkciju $u(x) = f(x)/f'(x)$, dolazimo do iterativnog metoda (1.31)

$$\psi_2(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)} = x - \frac{u(x)}{1 - 2C_2(x)u(x)}, \quad (1.44)$$

sa kvadratnom, konvergencijom. Birajući $\varphi_2(x) = \psi_2(x)$ u (1.35) dobijamo ubrzani metod

$$\psi_3(x) = x - \frac{u(x)[1 - 2C_2(x)u(x)]}{1 - 3C_2(x)u(x) + 3C_3(x)u(x)^2} \quad (1.45)$$

sa kubnom konvergencijom. Metod četvrtog reda koji sledi dobija se zamenom ψ_3 u (1.35),

$$\psi_4(x) = x - \frac{u(x)[1 - 3C_2(x)u(x) + 3C_3(x)u(x)^2]}{1 - 4C_2(x)u(x) + 4[2C_3(x) + C_2(x)^2]u(x)^2 - 4C_4(x)u(x)^3}. \quad (1.46)$$

Postupak generisanja formula većeg reda konvergencije možemo nastaviti uz pomoć (1.35), međutim dobijene formule su sve komplikovanije i nisu od praktičnog značaja.

Primitimo da polazna iterativna funkcija

$$\psi_2(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)},$$

data sa (1.44), pruža mogućnost zapisa GM (1.35) u obliku

$$\psi_r(x) = x + (r-1)f(x)\frac{T_{r-2}(x)}{T_{r-1}(x)} \quad (r \geq 2),$$

gde je T_r definisano rekurentnom relacijom

$$T_{r-1}(x) = T'_{r-2}(x)f(x) - (r-1)T_{r-2}(x)f'(x), \quad T_0(x) = f'(x).$$

1.5.3 Generatori metoda Traubovog tipa

Iako su fundamentalni rezultati Trauba [88] iz opšte teorije iterativnih algoritama za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina razvijeni pre skoro pola veka, veliki broj rezultata iz njegove knjige [88] i dalje inspiriše mnoge autore. U ovom delu ograničićemo se na generatore iterativnih metoda za nalaženje prostih ili višestrukih nula nelinearne jednačine

$f(x) = 0$ Traubovog tipa. Kao poseban slučaj, u radu [67] konstruisani su iterativni metodi za simultano određivanje nula polinoma u običnoj i intervalnoj aritmetici. Ovi metodi su rezultat primene odgovarajućeg generatora metoda iterativnih funkcija. Iterativni metod reda konvergencije $r + 1$ dobija se iz prethodnog metoda reda r koristeći posebnu transformaciju zasnovanu na Traubovoj rekurentnoj relaciji [88].

Neka je α nula funkcije f višestrukosti m . Za generisanje osnovnog niza iterativnih metoda, Traub [88] je izveo sledeću diferencijalno-diferencnu jednačinu

$$\varphi_{r+1}(x) = \varphi_r(x) - \frac{m}{r}u(x)\varphi_r'(x), \quad u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (1.47)$$

gde je $\varphi_r(x)$ iterativna funkcija koja definiše iterativni metod reda konvergencije r . Rekurentna relacija (1.47) počinje Njutnovim metodom $\varphi_2(x) = N(x) = x - f(x)/f'(x)$ (za proste nule) ili $\varphi_2(x) = \tilde{N}(x) = x - mf(x)/f'(x)$ (za višestruke nule). U slučaju prostih nula, generisani niz

$$E_2 = N(x) = x - u(x), \quad E_3 = E_2 - C_2(x)u(x)^2, \quad E_4 = E_3 - (2C_2(x)^2 - C_3(x))u(x)^2, \dots$$

predstavlja poznatu Šrederovu familiju prve vrste $\mathbb{E} = \{E_2, E_3, E_4, \dots\}$, videti [7], gde koristimo oznaku

$$C_j(x) = \frac{f^{(j)}(x)}{j!f'(x)}.$$

Prirodno se nameće sledeće pitanje: *Da li je moguće izabrati iterativnu funkciju $\varphi_k \notin \mathbb{E}$ i opet dobiti iterativni metod reda $k + 1$?* Rad [67] je posvećen ovoj temi. U njemu je pokazano da se relacija (1.47) može koristiti za generisanje iterativnih formula počevši ne samo od Njutnovog metoda $\varphi_2(x)$ već od bilo kog iterativnog metoda proizvoljnog reda r . Na taj način moguće je konstruisati različite iterativne formule visokog reda konvergencije za nalaženje prostog ili višestrukog korena nelinearne jednačine, kao i svih prostih ili višestrukih nula algebarskog polinoma. U radu [67] izvedena je relacija zgodna za konstrukciju iterativnog metoda za simultanu inkluziju prostih ili višestrukih nula algebarskih polinoma.

Teorema 1.8 *Neka je $\varphi_r(x) \in K_r$ iterativna funkcija koja definiše metod $x_{k+1} = \varphi_r(x_k)$, ($k = 0, 1, \dots$) reda r za nalaženje proste ili višestruke nule date funkcije f dovoljan broj puta diferencijabilne. Tada iterativni metod*

$$x_{k+1} = \varphi_{r+1}(x_k) := \varphi_r(x_k) - \frac{m}{r}u(x_k)\varphi_r'(x_k), \quad (r \geq 2; k = 0, 1, \dots), \quad (1.48)$$

gde je m višestrukost tražene nule, ima red konvergencije $r + 1$.

U nastavku ćemo demonstrirati GM (1.48) Traubovog tipa za izvođenje nekih novih iterativnih formula.

Metod Halejevog tipa reda tri za nalaženje višestruke nule α višestrukosti m realne ili kompleksne funkcije f je definisan sa

$$H(x) = x - \frac{2u(x)}{(m+1)/m - 2u(x)C_2(x)}.$$

Napomenimo da $H \notin \mathbb{E}$. Primenom Traubove formule (1.47) u obliku

$$H_4(x) = H(x) - \frac{mu(x)}{3}H'(x)$$

gde je $r = 3$, dobijamo iterativni metod reda četiri (izostavljajući argument x u u , C_2 i C_3)

$$H_4(x) = x - \frac{mu(7 + 6m - m^2 - 12muc_2 + 12m^2u^2(C_2^2 - C_3))}{3(m+1 - 2muC_2)^2}.$$

U slučaju proste nule ($m = 1$), gornja iterativna formula se svodi na

$$H_4(x) = x - \frac{u(1 - uC_2 + u^2(C_2^2 - C_3))}{(1 - uC_2)^2}.$$

Možemo nastaviti generisanje metoda višeg reda koristeći H_4 u (1.47), itd., ali ove iterativne formule su prilično komplikovane.

Napomena 1.8 Metodi višeg reda izvedeni u radu [67] su strukture

$$\hat{x} = x - \frac{b_0 - b_1f(x) - b_2f(x)^2 - \dots - b_p f(x)^p}{1 - c_1f(x) - c_2f(x)^2 - \dots - c_q f(x)^q}.$$

Kada su aproksimacije x dovoljno bliske nuli α , tada je $|f(x)|$ dovoljno mala veličina. Gornja polinomialna forma (po $f(x)$) brojioca i imenioca sprečava negativan efekat usled greške zaokruživanja.

1.6 Višekoračni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina

Iako su već detaljno analizirani u Traubovoj knjizi [88] kao i u radovima Kinga [40], Džereta¹⁵ [36], [37], Kunga i Trauba [44] i knjizi [60] Ostrovskog, višekoračni iterativni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina $f(x) = 0$ su privukli značajnu pažnju u prvoj dekadi 21-og veka, što je dovelo do konstrukcije velikog broja metoda ovog tipa. Višekoračni metodi se, pre svega, uvode u cilju postizanja veće računске efikasnosti. Naime, kao što je Traub dokazao u [88], jednokoračni iterativni metod može imati red konvergencije najviše p ukoliko eksplicitno zavisi od prvih $p-1$ izvoda funkcije f , što je veliko ograničenje u pogledu

¹⁵ P. Jarratt

efikasnosti. Štaviše, višekoračni metodi ne koriste izvode visokog reda i prevazilaze teorijska ograničenja jednokoračnih metoda u vezi reda konvergencije i računске efikasnosti.

Mada su u literaturi konstruisani metodi sa proizvoljnim redom konvergencije (videti [44], [63], [98]), optimalni metodi koji se realizuju u $m \geq 4$ koraka sa redom konvergencije 2^m nisu od velikog praktičnog značaja. Zvuči paradoksalno, ali oni daju aproksimacije nula veoma visoke preciznosti koje se, međutim, ne zahtevaju u praksi. S druge strane, da bi se obezbedila tako velika brzina konvergencije, potrebno je startovati iterativni proces sa početnom aproksimacijom dovoljno velike tačnosti.

Neka je f realna dovoljno glatka analitička funkcija, definisana na intervalu $I_f \subset \mathbf{R}$ koji sadrži prostu nulu α funkcije f . U ovom odeljku često ćemo koristiti sledeće veličine i skraćenice:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad c_j = C_j(\alpha) = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)} \quad (j = 2, 3, \dots), \quad f[y, x] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Jednostavnosti radi, povremeno ćemo izostavljati indeks iteracije u iterativnoj formuli i pisati $\hat{x} = \phi(x)$ umesto $x_{k+1} = \phi(x_k)$.

Teorema 1.2 odnosi se na generalisani Njutnov metod i daje jednostavan način za konstrukciju višekoračnih metoda.

Primer 1.1 Neka je $\phi(x)$ Njutnova iteracija $\phi(x) = x - u(x)$. Tada, prema (1.10), iterativna funkcija

$$\psi(x) = x - u(x) - \frac{f(x - u(x))}{f'(x)}$$

definiše metod trećeg reda.

Primer 1.2 Razmotrimo iterativnu funkciju dobijenu kombinovanjem Njutnovog metoda (1.30) i metoda sečice (1.22) na sledeći način:

$$y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \hat{x} = y - f(y) \frac{y - x}{f(y) - f(x)}.$$

Ovde je izvod $f'(y)$ zamenjen odgovarajućom podeljenom razlikom $f[y, x] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Tako dobijamo dvokoračni metod trećeg reda

$$\hat{x} = x - u(x) + \frac{u(x)f(x - u(x))}{f(x - u(x)) - f(x)} = x + \frac{u(x)f(x)}{f(x - u(x)) - f(x)}.$$

Ovaj dvokoračni metod možemo geometrijski interpretirati kao presek sa x -osom sečice u tačkama $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$, $y = x - u(x)$, što je na Slici 1.1 predstavljeno isprekidanom linijom, gde je $x' = \hat{x}$.

Oba razmatrana dvokoračna metoda imaju kubnu konvergenciju i zahtevaju tri izračunavanja funkcija, što znači da nisu optimalni u smislu Kung-Traubove pretpostavke. Prvi

ukazujući na četvrti red metoda. Generalizaciju metoda Ostrovsčkog predložio je King (1.50), videti [40].

Interesovanje za višekoračne metode je ponovo poraslo poslednjih godina iz dva glavna razloga:

- 1) metodi zasnovani na višekoračnim iteracijama prevazilaze teorijska ograničenja jednokoračnih metoda u vezi reda konvergencije i računске efikasnosti,
- 2) primena višekoračnih metoda sa osobinom da generišu aproksimacije veoma velike tačnosti je postala moguća značajnim napretkom u kompjuterskom hardveru (moćni procesori) i softveru (aritmetika višestruke preciznosti i simboličko računanje).

U nastavku dajemo listu postojećih optimalnih višekoračnih metoda na koje ćemo se pozivati u analizi ili numeričkim primerima.

Optimalni dvokoračni metodi reda četiri za proste nule

- *Kingova familija* optimalnih metoda data u radu [40]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(y_k)} \end{cases} \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad (1.50)$$

kao partikularne slučajeve daje sledeće metode:

- *Metod Ostrovsčkog* [60] za $\beta = 0$,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}. \end{cases} \quad (1.51)$$

- *Čunov¹⁶ metod* [10] za $\beta = 2$,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)}. \end{cases} \quad (1.52)$$

- Izborom $\beta = 1$ dobijamo *metod Kou-Li-Vanga¹⁷* [42],

¹⁶ C. Chun

¹⁷ X. Wang

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + f(y_k)}{f(x_k) - f(y_k)}. \end{cases} \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad (1.53)$$

- Čunove familije

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k + (1 + \beta) \frac{f(x_k) + f(y_k)}{f'(x_k)} - \frac{2f'(x_k)^2}{f'(x_k)[f(x_k) - f(y_k)]} \\ \quad - \beta \left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{f'(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f'(x_k)^2} \right] \end{cases} \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad (1.54)$$

i

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k)^2 - 2f(x_k)f(y_k) + 2\beta f(y_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad (1.55)$$

date u radovima [8] i [9] redom.

- *Kung-Traubov dvokoračni metod sa izvodom*, dobijen iz opšte familije [44]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 f(y_k)}{f'(x_k)(f(y_k) - f(x_k))^2}. \end{cases} \quad (1.56)$$

- *Kung-Traubov dvokoračni metod bez izvoda*, dobijen iz opšte familije [44]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{\gamma f(x_k)^2}{f(x_k + \gamma f(x_k)) - f(x_k)}, \quad \gamma \in \mathbf{R}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma f(x_k))(x_k - y_k)}{[f(x_k + \gamma f(x_k)) - f(y_k)][f(x_k) - f(y_k)]}. \end{cases} \quad (1.57)$$

- *Familija metoda Čun-Petkovića* (videti radove [10] i [74])

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - g(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, \end{cases} \quad (1.58)$$

gde funkcija g zadovoljava uslove $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$ i $|g''(0)| < \infty$. Različitim izborom funkcije g dobijaju se već navedeni metodi (1.50)–(1.56), kao i

– Metod Mahešvarija¹⁸ [48]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{f(y_k)^2}{f(x_k)^2} - \frac{f(x_k)}{f(y_k) - f(x_k)} \right]. \end{cases} \quad (1.59)$$

– Metod Petkovića [73]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)/f'(x_k)}{1 + \sqrt{1 - 4f(y_k)/f(x_k)}}. \end{cases} \quad (1.60)$$

– Ren-Vu-Bi¹⁹ metod [81]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}, \quad z_k = x_k + f(x_k), \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, y_k] + f[y_k, z_k] - f[x_k, z_k] + a(y_k - x_k)(y_k - z_k)}. \end{cases} \quad (1.61)$$

• Džeretova familija iz [36]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - a_1(\theta) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - a_2(\theta) \frac{f(x_k)}{f'(y_k)} - \frac{f(x_k)}{b_1(\theta)f'(x_k) + b_2(\theta)f'(y_k)}, \end{cases} \quad (1.62)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_1(\theta) &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2\theta} \right), & a_2(\theta) &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2(\theta - 1)} \right), \\ b_1(\theta) &= -\frac{8\theta}{3} (1 - \theta)^2, & b_2(\theta) &= \frac{8\theta^2}{3} (\theta - 1). \end{aligned}$$

Specijalno, najcitiraniji i najjednostavniji metod iz ove familije dobija se za $\theta = \frac{3}{2}$,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{6f'(y_k) - 2f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases} \quad (1.63)$$

¹⁸ A.K. Maheshwari

¹⁹ Q. Wu

- *Basuov metod* [2],

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f'(y_k)f'(x_k)}{\frac{3}{16}f'(y_k)^2 + \frac{11}{8}f'(y_k)f'(x_k) - \frac{9}{16}f'(x_k)^2}. \end{cases} \quad (1.64)$$

Optimalni trokoračni metodi za proste nule

- *Kung-Traubov trokoračni metod bez izvoda*, dobijen iz opšte familije [44] za $n = 3$

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{\gamma f(x_k)^2}{f(x_k + \gamma f(x_k)) - f(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma f(x_k))(x_k - y_k)}{[f(x_k + \gamma f(x_k)) - f(y_k)][f(x_k) - f(y_k)]}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma f(x_k))\left(y_k - x_k + \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}\right)}{[f(y_k) - f(z_k)][f(x_k + \gamma f(x_k)) - f(z_k)]} + \frac{f(y_k)}{f[y_k, z_k]}. \end{cases} \quad (1.65)$$

- *Kung-Traubov trokoračni metod sa izvodom*, dobijen iz opšte familije [44] za $n = 3$

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(x_k)^2 f(y_k)}{f'(x_k)(f(y_k) - f(x_k))^2}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(x_k)f(y_k)f(z_k)[f(x_k)^2 + f(y_k)(f(y_k) - f(z_k))]}{(f(x_k) - f(y_k))^2(f(x_k) - f(z_k))^2(f(y_k) - f(z_k))} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases} \quad (1.66)$$

- *Trokoračni metodi Petkovića*

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{H'_3(z_k)}, \end{cases} \quad (1.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{H'_3(z_k)}, \end{array} \right. \quad (1.68)$$

dobijeni su birajući $n = 3$, Kingov metod (1.50) za φ_f i parametre $\beta = 0$ i $\beta = 1$, iz opšte familije zasnovane na Ermitovoj interpolaciji [63]

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1,k} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ y_{2,k} = \varphi_f(x_k, y_{1,k}), \quad \varphi_f \in \Psi_4, \\ y_{3,k} = y_{2,k} - \frac{f(y_{2,k})}{H'_3(y_{2,k})}, \\ \dots \\ y_{n-1,k} = y_{n-2,k} - \frac{f(y_{n-2,k})}{H'_{n-1}(y_{n-2,k})}, \\ x_{k+1} = y_{n-1,k} - \frac{f(y_{n-1,k})}{H'_n(y_{n-1,k})}. \end{array} \right. \quad (1.69)$$

- *Bi-Vu-Ren familija* [4],

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ z_k = y_k - h(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(x_k) + \beta f(z_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(z_k)} \frac{f(z_k)}{f[z_k, y_k] + f[z_k, x_k, x_k](z_k - y_k)}, \quad \beta \in \mathbf{R}. \end{array} \right. \quad (1.70)$$

gde težinska funkcija h ispunjava uslove

$$h(0) = 1, \quad h'(0) = 2, \quad h''(0) = 10, \quad |h'''(0)| < \infty.$$

U numeričkim primerima testirali smo sledeće specijalne slučajeve:

$$\text{I) } h(t) = 1 + \frac{4t}{2 - 5t}, \quad \text{II) } h(t) = 1 + 2t + 5t^2 + t^3.$$

- *Bi-Ren-Vuova familija* [3],

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{2f(x_k) - f(y_k)}{2f(x_k) - 5f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - p(s_k) \frac{f(z_k)}{f[z_k, y_k] + f[z_k, x_k, x_k](z_k - y_k)}, \quad s_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}, \end{cases} \quad (1.71)$$

pri čemu p zadovoljava uslove $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $|p''(0)| < \infty$.

- *Šarma-Šarmin*²⁰ *metod* [84],

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \left(1 + \frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right) \frac{f(z_k)f[x_k, y_k]}{f[x_k, z_k]f[y_k, z_k]}. \end{cases} \quad (1.72)$$

- *Vang-Liuov metod*, [92]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) - f(y_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \left[1 + \frac{4f(z_k)}{f(x_k) + af(z_k)}\right] \left[\frac{f(x_k)^2}{f(x_k)^2 - 2f(x_k)f(y_k) - f(y_k)^2} + \frac{f(z_k)}{f(y_k)}\right]. \end{cases} \quad (1.73)$$

Optimalni dvokoračni metodi za višestruke nule

Prvi optimalni dvokoračni metod reda četiri za višestruke nule razvili su Li, Liao i Čeng²¹ u radu [46]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k + \frac{m^2}{2} \frac{f'(x_k) - \frac{m-2}{m} \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_k)}{f'(x_k) - \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_k)}. \end{cases} \quad (1.74)$$

²⁰ J.R. Sharma i R. Sharma

²¹ L. Cheng

Ču, Šen i Song²² su u radu [99] dali uopštenu familiju optimalnih metoda za višestruke nule, koja uključuje i metod (1.74)

$$\begin{cases} y_k = x_k - \theta \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - g(t_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad t_k = \frac{f'(y_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad (1.75)$$

pri čemu je $\theta = \frac{2m}{m+2}$, $\lambda = \left(\frac{m}{m+2}\right)^{m-1}$ i težinska funkcija g zadovoljava uslove

$$g(\lambda) = m, \quad g'(\lambda) = -\frac{1}{4}m^{3-m}(2+m)^m, \quad g''(\lambda) = \frac{1}{4}m^4\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-2m}.$$

²² X. Zhou, X. Chen, Y. Song

Dvotačkasti metodi optimalnog reda konvergencije

U ovom poglavlju predstavimo optimalne dvokoračne metode reda četiri bez i sa memorijom. Prvi od njih predstavlja familiju dvokoračnih metoda bez izvoda predloženu u radu [72], gde je postignuto povećanje reda konvergencije sa 4 (osnovnog metoda bez memorije) na $4 + \sqrt{5}$ i u nekim specijalnim slučajevima $4 + \sqrt{6}$ (metoda sa memorijom) bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Uvećanje reda konvergencije izvedeno je koristeći ideju Trauba [88]. Dalje ubrzanje familije metoda bez izvoda i do 50% predstavljeno u [68] ostvareno je novim tehnikama ubrzanja koje se oslanjaju isključivo na već postojeće informacije. Sve tehnike ubrzanja date su u odeljku 2.2. U odeljku 2.3 dato je izvođenje i analiza konvergencije dvokoračnih metoda Džeretovog tipa koja potiče iz [12].

2.1 Familija dvotačkastih metoda zasnovana na težinskoj funkciji

Neka je γ proizvoljna realna konstanta. Posmatrajmo funkciju

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) - f(x - \gamma f(x))}{\gamma f(x)},$$

koja je zapravo jednačina sečice grafika funkcije f postavljena kroz tačke $(x, f(x))$ i $(w, f(w))$, gde je $w = x - \gamma f(x)$. Razvoj $f(x - \gamma f(x))$ u Tejlorov red u okolini x daje

$$\varphi_1(x) = f'(x) - \frac{\gamma}{2} f(x) f''(x) + O(f(x)^2).$$

Na ovaj način dobili smo aproksimaciju izvoda $f'(x)$ u obliku

$$f'(x) \approx \varphi_1(x) = \frac{f(x) - f(x - \gamma f(x))}{\gamma f(x)}. \quad (2.1)$$

Napomenimo da je ovu aproksimaciju koristio Traub [88, str. 178] još 1964.

Naš cilj je konstrukcija optimalnog dvokoračnog metoda koji ne koristi izračunavanje izvoda funkcije f . Standardni postupak pri ovoj konstrukciji je korišćenje dvostrukog Njutnovog metoda kao osnove dvokoračne šeme

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.2)$$

Ova iterativna šema ima red 4 ali koristi 4 funkcijska izračunavanja tako da je njena računaska efikasnost $E(2.2) = 4^{1/4} = 1.314$, dakle ista kao i kod Njutnovog metoda. Da bismo dobili efikasni iterativni dvokoračni metod moramo da izvršimo zamenu izvoda $f'(x_k)$ i $f'(y_k)$ pogodnim aproksimacijama koje će smanjiti broj funkcijskih izračunavanja sa 4 na 3 i pritom zadržati red konvergencije četiri. Ovaj zahtev može se ostvariti ako aproksimiramo $f'(x_k)$ u prvom koraku šeme (2.2) pomoću (2.1). Izvod $f'(y_k)$ u drugom koraku zamenićemo izrazom $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)/h(t, s)$, gde je $h(t, s)$ diferencijabilna funkcija od dve promenljive $t = \frac{f(y)}{f(x)}$ i $s = \frac{f(y)}{f(w)}$. Dakle,

$$f'(x_k) \approx \varphi_1(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_k - \gamma f(x_k))}{\gamma f(x_k)} = f[x_k, w_k], \quad (2.3)$$

$$f'(y_k) \approx \varphi_2(x_k) = \frac{\varphi_1(x_k)}{h(t_k, s_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, \quad s_k = \frac{f(y_k)}{f(w_k)}. \quad (2.4)$$

Na osnovu iterativne šeme (2.2), koristeći (2.3) i (2.4) konstruišemo sledeću familiju dvokoračnih metoda

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{\varphi_1(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{\varphi_1(x_k)} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.5)$$

Funkciju h treba odrediti tako da red konvergencije dvokoračnih metoda (2.5) bude četiri.

Zbog jednostavnosti često ćemo izostavljati indeks iteracije k . Tako novu aproksimaciju x_{k+1} nule α kraće označavamo sa \hat{x} . Greške ćemo označavati sa

$$\varepsilon = x - \alpha, \quad \varepsilon_y = y - \alpha, \quad \varepsilon_w = w - \alpha, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha.$$

Tejlorovim razvojem funkcije f u okolini nule α , vrednosti $f(x)$, $f(w)$ i $f(y)$ mogu se predstaviti u obliku redova po ε . To nam omogućuje preglednu analizu koja uključuje više tipova greški (konkretno, ε_y , ε_w , $\hat{\varepsilon}$).

Pretpostavimo da je x dovoljno blizu nule α funkcije f , tada su i veličine t i s dovoljno male po apsolutnoj vrednosti. Predstavimo funkciju h iz (2.5) Tejlorovim redom u okolini $(0, 0)$,

$$h(t, s) = h_0 + h_t t + h_s s + \frac{1}{2} h_{tt} t^2 + \frac{1}{2} h_{ss} s^2 + h_{ts} ts + \dots, \quad (2.6)$$

gde indeks označava odgovarajući parcijalni izvod funkcije h po t i s u tački $(0, 0)$.

Pri određivanju Tejlorovog razvoja (po ε) funkcija koje se koriste u (2.5) javljaju se vrlo komplikovani izrazi čije izvođenje je prilično teško, ponekad i nemoguće bez korišćenja računara. Zbog toga ćemo koristiti simboličko izračunavanje u programskom paketu *Mathematica*. Ukoliko je neophodno, međurezultati se uvek mogu prikazati tokom izračunavanja koristeći program dat u nastavku, mada je njihovo prikazivanje najčešće samo od akademskog značaja.

Da bismo odredili pogodnog kandidata za funkciju h , analiziraćemo koeficijente razvoja (2.6) $h_0, h_t, h_s \dots$ jednostavnim programom u *Mathematica* paketu i interaktivnim pristupom objašnjenim komentarima C1, C2 i C3. Najpre dajemo skraćenice korišćene u programu.

$$\begin{aligned} ck &= f^{(k)}(\alpha)/(k!f'(\alpha)), \quad f1a = f'(\alpha), \quad g = \gamma, \\ e &= x - \alpha, \quad e1 = \hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha, \quad ey = y - \alpha, \quad ew = w - \alpha = \varepsilon - \gamma f(x), \\ fx &= f(x), \quad fw = f(w), \quad fy = f(y), \quad fi = [f(x) - f(x - \gamma f(x))]/(\gamma f(x)), \\ h0 &= h(0, 0), \quad ht = h_t(0, 0), \quad hs = h_s(0, 0), \\ htt &= h_{tt}(0, 0), \quad hts = h_{ts}(0, 0), \quad hss = h_{ss}(0, 0). \end{aligned}$$

Program (napisan u *Mathematica*)

```
fx=f1a(e+c2*e^2+c3*e^3+c4*e^4); ew=e-g*fx;
fw=f1a(ew+c2*ew^2+c3*ew^3+c4*ew^4);
fi=Series[(fx-fw)/(g*fx),{e,0,4}];
ey=Series[e-fx/fi,{e,0,4}]; fy=f1a(ey+c2*ey^2);
t=Series[fy/fx,{e,0,4}]; s=Series[fy/fw,{e,0,4}];
h=h0+ht*t+hs*s+htt*t^2/2+hts*t*s+hss*s^2/2;
e1=Series[ey-h*fy/fi,{e,0,4}];
a2=Coefficient[e1,e,2]//Simplify
```

C1: Out[a2]= c2(g f1a-1)(h0-1)

```
h0=1; a3=Coefficient[e1,e,3]//Simplify
```

C2: Out[a3]= c2^2(g f1a-1)(2-ht-hs+g f1a(ht-1))

```
ht=1; hs=1; a4=Coefficient[e1,e,4]//Simplify
```

C3: Out[a4]= $\frac{1}{2}c2(g f1a-1)(2c3(1-g f1a)+c2^2(htt+2hts+hss-10$
+g f1a(g f1a(htt-2)-2(htt+hts-5)))

Komentar C1: Na osnovu izraza za grešku $\mathbf{e1} = \hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha$ vidimo da je $\hat{\varepsilon}$ oblika

$$\hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha = a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \quad (2.7)$$

Iterativni dvokoračni metodi (2.5) imaće red konvergencije četiri ukoliko odredimo koeficijente razvoja funkcije h , koji se javljaju u (2.6), tako da a_2 i a_3 (u (2.7)) budu jednaki nuli. Te koeficijente nalazimo kada izjednačimo sa nulom zasenčene izraze u uokvirenim formula datog programa. Prvo, iz Out [a2] nalazimo $h_0 = h(0, 0) = 1$, pa onda prelazimo na određivanje koeficijenta a_3 .

Komentar C2: Na osnovu Out [a3] vidimo da se član $\mathbf{g f1a}$, odnosno $\gamma f'(\alpha)$, eliminiše jedino izborom $h_t = h_t(0, 0) = 1$. Takvim izborom koeficijent a_3 se anulira ako je i $h_s = h_s(0, 0) = 1$.

Komentar C3: Zamenom $h(0, 0) = h_t(0, 0) = h_s(0, 0) = 1$ u izraz za $\mathbf{e1} = \hat{\varepsilon}$, dolazimo do

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha = & \frac{1}{2}c_2(\gamma f'(\alpha) - 1)(2c_3(1 - \gamma f'(\alpha)) + c_2^2(h_{tt} + 2h_{ts} + h_{ss} - 10 \\ & + \gamma f'(\alpha)(\gamma f'(\alpha)(h_{tt} - 2) - 2(h_{tt} + h_{ts} - 5))))\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5), \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = & \frac{1}{2}c_2(\gamma f'(\alpha) - 1)(2c_3(1 - \gamma f'(\alpha)) + c_2^2(h_{tt} + 2h_{ts} + h_{ss} - 10 \\ & + \gamma f'(\alpha)(\gamma f'(\alpha)(h_{tt} - 2) - 2(h_{tt} + h_{ts} - 5))))\varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Iz (2.8) zaključujemo da se red četiri iterativnih dvokoračnih metoda (2.5) može postići ako funkcija h od dve promenljive ima sledeće vrednosti parcijalnih izvoda

$$h(0, 0) = h_t(0, 0) = h_s(0, 0) = 1 \text{ i } |h_{tt}|, |h_{ts}|, |h_{ss}| < \infty. \quad (2.9)$$

Iz (2.8) takođe vidimo da izvodi višeg reda nemaju uticaja na red konvergencije, mada su sastavni deo asimptotske konstante greške. Na osnovu date analize možemo formulisati teoremu o konvergenciji.

Teorema 2.1 *Neka je $h(t, s)$ diferencijabilna funkcija od dve promenljive koja zadovoljava uslove (2.9). Za dovoljno blisku početnu vrednost x_0 nule α funkcije f , red konvergencije familije dvokoračnih metoda (2.5) jednak je četiri.*

Napomena 2.1 U iterativnoj šemi (2.2) aproksimacije izvoda $f'(x)$ i $f'(y)$ mogu se izvršiti i na sledeće načine:

- U prvom koraku iterativne šeme (2.2) izvod $f'(x)$ ponovo aproksimiramo sečicom kroz tačke $(x, f(x))$ i $(w, f(w))$, tj. funkcijom $\varphi_1(x) = f[x, w]$.
- U drugom koraku izvod $f'(y)$ aproksimiramo „poboljšanom” sečicom: ili kroz tačke $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ ($f'(y) \approx f[y, x]$), ili sečicom postavljenom kroz $(w, f(w))$ i $(y, f(y))$, što daje $f'(y) \approx f[y, w]$,

Treba reći da ni ovakve „poboljšane” sečice nisu dovoljne da obezbede optimalan red konvergencije četiri novog metoda. Zbog toga aproksimaciju izvoda popravljamo težinskom funkcijom, ovaj put od jedne promenljive. Iterativna šema tada glasi

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f[x, w]}, \\ \hat{x} = y - g_1(s) \frac{f(y)}{f[y, x]}, \end{cases} \quad (2.10)$$

odnosno

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f[x, w]}, \\ \hat{x} = y - g_2(t) \frac{f(y)}{f[y, w]}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Oba dvokoračna metoda rade sa težinskim funkcijama u drugom koraku. Nije teško dokazati korišćenjem neznatno modifikovanog programa sa prethodnih strana da će oba metoda imati red četiri ako težinske funkcije g_1 i g_2 budu odabrane tako da ispunjavaju iste uslove:

$$g_1(0) = 1, \quad g_1'(0) = 1, \quad |g_1''(0)| < \infty,$$

i

$$g_2(0) = 1, \quad g_2'(0) = 1, \quad |g_2''(0)| < \infty.$$

U ovom slučaju asimptotske konstante grešaka (AKG) metoda (2.10) i (2.11) imaju oblike

$$\text{AKG}(2.10) = -\frac{1}{2}c_2(1 - \gamma f'(\alpha)) [2c_3(1 - \gamma f'(\alpha)) + c_2^2(g_1''(0) - 6 + 4\gamma f'(\alpha))],$$

$$\text{AKG}(2.11) = -\frac{1}{2}c_2(1 - \gamma f'(\alpha))^2 [2c_3 - c_2^2(6 - g_2''(0) + \gamma f'(\alpha)(g_2''(0) - 2))].$$

Lako se utvrđuje da su obe iterativne šeme (2.10) i (2.11) specijalni slučajevi opštijeg metoda (2.5).

Razmotrimo u nastavku problem izbora funkcije h u iterativnoj šemi (2.5). Na osnovu uslova (2.9), najprostiji oblik funkcije h očigledno glasi

$$h(t, s) = 1 + t + s. \quad (2.12)$$

Primetimo da svaka funkcija oblika $h(t, s) = 1 + t + s + g(t, s)$, gde je g diferencijabilna funkcija sa osobinom $g(0, 0) = g_t(0, 0) = g_s(0, 0) = 0$, zadovoljava uslove (2.9). Na primer, izbor

$$g(t, s) = \beta ts \quad (\beta \text{ je parametar}),$$

$$g(t, s) = s(p_1 t + \dots + p_m t^m) \text{ ili } g(t, s) = t(q_1 s + \dots + q_n s^n), \text{ itd.}$$

Ipak, iz praktičnih razloga, trebalo bi birati oblik koji ima što manju računsku cenu.

Sledeći primer težinske funkcije je

$$h(t, s) = \frac{1+t}{1-s}. \quad (2.13)$$

Opštiji (ali komplikovaniji) primer dvoparametarske funkcije

$$h(t, s) = \frac{1+t+at^2}{1-s+bs^2} \quad (2.14)$$

takođe zadovoljava tražene uslove. Nešto bolji izbor predstavljaju funkcije

$$h(t, s) = \frac{1}{1-t-s} \quad \text{i} \quad h(t, s) = (1+t)(1+s). \quad (2.15)$$

Birajući

$$h(t, s) = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \quad (2.16)$$

u (2.5) dobijamo Kung-Traubov metod (1.57).

Napomena 2.2 Familija dvokoračnih metoda (2.5) zahteva tri funkcijska izračunavanja i reda je četiri. Prema tome, ova familija je optimalna u smislu hipoteze Kunga i Trauba i poseduje računsku efikasnost $E(2.5) = 4^{1/3} \approx 1.587$.

Napomena 2.3 Primetimo da je

$$\varepsilon_y = c_2(1 - \gamma f'(\alpha))\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (2.17)$$

kao i da asimptotska konstanta greške (2.8) uvek sadrži faktor $1 - \gamma f'(\alpha)$. Ovo je veoma bitan podatak prilikom konstrukcije odgovarajućih dvokoračnih metoda sa memorijom, što je tema sledećeg odeljka.

Napomena 2.4 Iterativna šema (2.5) pominje se u kontekstu *familije* iterativnih metoda s obzirom da izbor različitih oblika funkcije h koji zadovoljavaju uslove (2.9) kao i parametra γ , daje veliki broj različitih partikularnih dvokoračnih metoda. To se može videti i na gore navedenim jednostavnim primerima funkcije h (2.12)–(2.16)

2.2 Ubrzani metod sa memorijom

Na osnovu relacije greške (2.8) možemo zaključiti da je red konvergencije familije (2.5) jednak četiri kada je $\gamma \neq 1/f'(\alpha)$. Vrednost parametra $\gamma = 1/f'(\alpha)$, obezbedila bi red konvergencije familije (2.5) veći od četiri. Problem ovog ubrzanja jeste što vrednost $f'(\alpha)$ u praksi nije dostupna, te takvo povećanje konvergencije nije moguće. Umesto tačne vrednosti $f'(\alpha)$, možemo koristiti neku aproksimaciju $\tilde{f}'(\alpha) \approx f'(\alpha)$, određenu na osnovu

postojećih informacija. Na taj nači, uzimajući $\gamma = 1/\tilde{f}'(\alpha)$ u (2.5), možemo postići da red konvergencije modifikovanih metoda bude veći od 4 bez novih funkcijskih izračunavanja. Ovaj postupak je, zapravo, minimizacija greške dobijene aproksimacije umanjivanjem faktora $1 - \gamma f'(\alpha)$. Videćemo da metodi predloženi u ovom odeljku za određivanje $f'(\alpha)$ se zasnivaju na informacijama iz tekuće i prethodne iteracije, drugim rečima, $\tilde{f}'(\alpha)$ zavisi od iterativnog indeksa k . Ipak, $\tilde{f}'(\alpha)$ pišemo bez indeksa iteracije zbog jednostavnosti.

Da bismo povećali sveukupnu računsku efikasnost metoda (2.5), osim što tačnije aproksimacije $f'(\alpha)$ namećemo dodatni uslov $h_{ss}(0,0) = 2$ težinskoj funkciji h (uporediti sa (2.9)). Cilj ovog dodatnog uslova je da u relaciji greške (2.8) dobijemo kvadrirani faktor $1 - \gamma f'(\alpha)$ (kao u slučaju familije (2.11)) da bi efekat minimizacije čitavog izraza bio veći. Time se postiže veće ubrzanje konvergencije korigovanog metoda u odnosu na osnovni metod.

Teorema 2.2 *Za dovoljno dobru početnu aproksimaciju x_0 nule α funkcije f i težinsku funkciju h iz iterativne šeme (2.5) koja zadovoljava uslove*

$$\begin{aligned} h(0,0) = h_t(0,0) = h_s(0,0) = 1, \quad h_{ss}(0,0) = 2, \\ |h_{tt}(0,0)| < \infty, \quad |h_{ts}(0,0)| < \infty, \end{aligned} \quad (2.18)$$

iterativni metod ima red konvergencije četiri. Relacija greške (2.8) familije dvokoračnih metoda (2.5) pod ovim uslovima glasi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{2}c_2(1 - \gamma f'(\alpha))^2 \left[c_2^2(8 - h_{tt}(0,0) - 2h_{ts}(0,0)) \right. \\ \left. + \gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0) - 2) - 2c_3 \right] \varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dokaz. Sledi direktno na osnovu (2.8).

Aproksimaciju izvoda $f'(\alpha)$ vršićemo na sledeće načine:

- (I) $\tilde{f}'(\alpha) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ (metod sečice).
- (II) $\tilde{f}'(\alpha) = \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{x_k - y_{k-1}}$ (poboljšani metod sečice).
- (III) $\tilde{f}'(\alpha) = N_2'(x_k)$ (Njutnovom interpolacijom drugog reda), gde je

$$N_2(\tau) = N_2(\tau; x_k, y_{k-1}, x_{k-1})$$

Njutnov interpolacioni polinom drugog stepena, čiji čvorovi predstavljaju tri najbolje dostupne aproksimacije nule α : x_k , y_{k-1} i x_{k-1} .

- (IV) $\tilde{f}'(\alpha) = N_3'(x_k)$ (Njutnovom interpolacijom reda tri), gde je

$$N_3(\tau) = N_3(\tau; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1})$$

Njutnov interpolacioni polinom stepena tri, kroz četiri najbolje dostupne aproksimacije x_k, y_{k-1}, x_{k-1} i w_{k-1} .

Parametar $\gamma = \gamma_k$ računamo rekurzivno u svakoj iteraciji odgovarajućim formulama

$$\gamma_k = \frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (\text{metod (I)}), \quad (2.20)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = \frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})} \quad (\text{metod (II)}), \quad (2.21)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = \frac{1}{N'_2(x_k)} \quad (\text{metod (III)}), \quad (2.22)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = \frac{1}{N'_3(x_k)} \quad (\text{metod (IV)}). \quad (2.23)$$

Za izračunavanje samokorigujućeg parametra γ_k prema predloženim metodima (2.22) i (2.23), potrebni su nam eksplicitni izrazi za N'_2 i N'_3 . S obzirom da su $N_2(\tau)$ i $N_3(\tau)$ dati formulama

$$N_2(\tau) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](\tau - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](\tau - x_k)(\tau - y_{k-1})$$

i

$$N_3(\tau) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](\tau - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](\tau - x_k)(\tau - y_{k-1}) \\ + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}](\tau - x_k)(\tau - y_{k-1})(\tau - x_{k-1}),$$

traženi izvodi u tački $\tau = x_k$ glase

$$N'_2(x_k) = \left[\frac{d}{d\tau} N_2(\tau) \right]_{\tau=x_k} = f[x_k, y_{k-1}] + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](x_k - y_{k-1}) \quad (2.24)$$

i

$$N'_3(x_k) = \left[\frac{d}{d\tau} N_3(\tau) \right]_{\tau=x_k} = f[x_k, y_{k-1}] + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](x_k - y_{k-1}) \\ + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}](x_k - y_{k-1})(x_k - x_{k-1}). \quad (2.25)$$

Podeljene razlike višeg reda efikasno se računaju rekurzivnom procedurom na osnovu podeljenih razlika nižeg reda

$$f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n+1}] = \frac{f[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n] - f[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}]}{\tau_0 - \tau_{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Napomena 2.5 Metodi sečice (I) i (II) zapravo su izvodi $N'_1(x_k)$ Njutnovih interpolacionih polinoma prvog reda kroz čvorove x_k, x_{k-1} i x_k, y_{k-1} , redom.

Napomena 2.6 Metod ubrzanja (2.20) prvi put je dat u Traubovoj knjizi [88] iz 1964. godine. Upotrebljen je u radu [77] za povećanje reda konvergencije sa 4 na $2 + \sqrt{5} \approx 4.236$ pod uslovima (2.9). Metodi ubrzanja (2.21), (2.22) i (2.23), zajedno sa dodatnim uslovom $h_{ss}(0, 0) = 2$, su novi, jednostavni i vrlo efikasni jer obezbeđuju značajno povećanje brzine konvergencije bez dodatnih funkcijskih izračunavanja, videti radove [68], [21] i [66].

Izračunavajući γ_k u svakom iterativnom koraku nekim od metoda (2.20), (2.21), (2.22) ili (2.23), dolazimo do novog dvokoračnog metoda *sa memorijom*, koji ne koristi izvode i koji odgovara metodi (2.5),

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, & w_k = x_k - \gamma_k f(x_k), \\ x_{k+1} = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.26)$$

Koristimo termin *metodi sa memorijom* usvajajući Traubovu klasifikaciju [88, str. 8] zbog činjenice da se parametar γ_k izračunava na osnovu podataka iz trenutne i prethodne iteracije. Početnu vrednost γ_0 treba izabrati pre početka iterativnog procesa, na primer, koristeći neki od načina navedenih u [88, str. 186].

2.2.1 Teoreme o konvergenciji

Da bismo odredili brzinu konvergencije familije dvokoračnih metoda (2.26), upotrebićemo koncept R -reda konvergencije koji su uveli Ortega i Rajnbolt [58], videti Definicije 1.3 i 1.4.

Teorema 2.3 *Neka se parametar γ_k u iterativnoj šemi (2.26) izračunava prema izrazima datim u (2.20)–(2.23). Ako je početna aproksimacija x_0 dovoljno blizu nule α funkcije f , tada R -red konvergencije dvokoračnih metoda (2.26) \wedge (2.20), (2.26) \wedge (2.21), (2.26) \wedge (2.22) i (2.26) \wedge (2.23) sa memorijom je bar $2 + \sqrt{6} \approx 4.45$, 5 , $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}) \approx 5.37$ i 6 , redom.*

Dokaz. Neka je $\{x_k\}$ niz aproksimacija generisan iterativnim metodom (IM). Ako ovaj niz konvergira ka nuli α funkcije f sa R -redom $O_R((IM), \alpha) \geq r$, pisaćemo

$$\varepsilon_{k+1} \sim D_{k,r} \varepsilon_k^r, \quad \varepsilon_k = x_k - \alpha, \quad (2.27)$$

gde $D_{k,r}$ teži asimptotskoj konstanti greške D_r metoda (IM) kada $k \rightarrow \infty$. Dakle,

$$\varepsilon_{k+1} \sim D_{k,r} (D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r)^r = D_{k,r} D_{k-1,r}^r \varepsilon_{k-1}^{r^2}. \quad (2.28)$$

Relacija greške (2.19) može se kraće zapisati u obliku

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_{k,4} (1 - \gamma_k f'(\alpha))^2 \varepsilon_k^4, \quad (2.29)$$

gde smo označili

$$a_{k,4} = \frac{1}{2}c_2(c_2^2(8 - h_{tt}(0,0) - 2h_{ts}(0,0) + \gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0) - 2)) - 2c_3).$$

Metod (I), γ_k se izračunava na osnovu (2.20):

Na osnovu Leme 1.1 za $m = 1$ (videti Napomenu 2.5) imamo

$$N'_1(x_k) \sim f'(\alpha)(1 + c_2\varepsilon_{k-1}).$$

Dakle

$$\gamma_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{1}{N'_1(x_k)} \sim \frac{1 - c_2\varepsilon_{k-1}}{f'(\alpha)},$$

odnosno

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) \sim c_2\varepsilon_{k-1}. \quad (2.30)$$

Zamenjujući (2.30) u (2.29) i imajući u vidu (2.28), dolazimo do

$$\varepsilon_{k+1} \sim c_2^2 a_{k,4} \varepsilon_k^4 \varepsilon_{k-1}^2 \sim c_2^2 a_{k,4} D_{k-1,r}^4 \varepsilon_{k-1}^{4r} \varepsilon_{k-1}^2. \quad (2.31)$$

Izjednačavanjem eksponenata greške ε_{k-1} u paru relacija (2.28) i (2.31) postavljamo kvadratnu jednačinu $r^2 - 4r - 2 = 0$, koja definiše donju granicu R -reda konvergencije r metoda (2.26)^(2.20) kao svoje pozitivno rešenje $r = 2 + \sqrt{6}$.

Metod (II), γ_k se izračunava na osnovu (2.21):

Ponovo, na osnovu Leme 1.1 za $m = 1$ dolazimo do sledeće relacije

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) \sim c_2 \varepsilon_{k-1,y}. \quad (2.32)$$

Pretpostavimo da je niz aproksimacija $\{y_k\}$ konvergentan sa R -redom p . Tada možemo pisati

$$\varepsilon_{k,y} \sim D_{k,p} \varepsilon_k^p \quad (2 \leq p \leq 3). \quad (2.33)$$

Na osnovu (2.28) i (2.33), dobijamo

$$\varepsilon_{k,y} \sim D_{k,p} \left(D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r \right)^p = D_{k,p} D_{k-1,r}^p \varepsilon_{k-1}^{rp}. \quad (2.34)$$

S druge strane, kombinujući (2.17), (2.28), (2.32) i (2.33) nalazimo ocenu

$$\varepsilon_{k,y} \sim c_2 (1 - \gamma_k f'(\alpha)) \varepsilon_k^2 \sim c_2^2 \varepsilon_{k-1,y} \varepsilon_k^2 \sim c_2^2 \left(D_{k-1,p} \varepsilon_{k-1}^p \right) \left(D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r \right)^2,$$

dakle,

$$\varepsilon_{k,y} \sim c_2^2 D_{k-1,p} D_{k-1,r}^2 \varepsilon_{k-1}^{2r+p}. \quad (2.35)$$

Na osnovu relacija (2.28)–(2.33) ocena za ε_{k+1} glasi

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\sim a_{k,4} (c_2 \varepsilon_{k-1,y})^2 \varepsilon_k^4 \sim c_2^2 a_{k,4} \left(D_{k-1,p} \varepsilon_{k-1}^p \right)^2 \left(D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r \right)^4 \\ &= c_2^2 a_{k,4} D_{k-1,p}^2 D_{k-1,r}^4 \varepsilon_{k-1}^{4r+2p}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Poredeći eksponente ε_{k-1} u parovima relacija (2.34) i (2.35), kao i (2.36) i (2.28), formiramo sistem jednačina

$$\begin{cases} rp - 2r - p = 0, \\ r^2 - 4r - 2p = 0, \end{cases}$$

sa netrivialnim rešenjem $p = 5/2$, $r = 5$. Time potvrđujemo da je donja granica R -reda metoda (2.26)^(2.21) jednaka pet.

Metod (III), γ_k se izračunava na osnovu (2.22):

Lema 1.1 za $m = 2$ daje relaciju

$$N'_2(x_k) \sim f'(\alpha)(1 - c_3\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}),$$

na osnovu koje sledi ocena

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) \sim c_3\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}. \quad (2.37)$$

Kombinovanjem (2.17), (2.28), (2.33) i (2.37), nalazimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,y} &\sim c_2(1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k^2 \sim c_2c_3\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_k^2 \\ &\sim c_2c_3\varepsilon_{k-1}(D_{k-1,p}\varepsilon_{k-1}^p)(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^2 \\ &= c_2c_3D_{k-1,p}D_{k-1,r}^2\varepsilon_{k-1}^{2r+p+1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Na sličan način, na osnovu (2.28), (2.29), (2.33) i (2.37), ocenjujemo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\sim a_{k,4}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^2\varepsilon_k^4 \sim a_{k,4}(c_3\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y})^2\varepsilon_k^4 \\ &\sim a_{k,4}c_3^2\varepsilon_{k-1}^2(D_{k-1,p}\varepsilon_{k-1}^p)^2(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^4 \\ &= a_{k,4}c_3^2D_{k-1,p}^2D_{k-1,r}^4\varepsilon_{k-1}^{4r+2p+2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Poredeći eksponente greške ε_{k-1} u parovima relacija (2.34)^(2.38) i (2.28)^(2.39), dolazimo do sistema jednačina po nepoznatim p i r

$$\begin{cases} rp - 2r - p - 1 = 0, \\ r^2 - 4r - 2p - 2 = 0. \end{cases}$$

Pozitivna rešenja ovog sistema su

$$p = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{33}), \quad r = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}),$$

odakle zaključujemo da je donja granica R -reda metoda sa memorijom (2.26)^(2.22) bar

$$r = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}) \approx 5.372.$$

Metod (IV), γ_k se izračunava na osnovu (2.23):

Adekvatnom zamenom grešaka čvorova u (1.12), na osnovu Leme 1.1 nalazimo

$$N'_3(x_k) \sim f'(\alpha)(1 + c_4\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,w}),$$

odakle sledi

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) \sim c_4\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,w}. \quad (2.40)$$

Kao i u prethodnoj analizi, na osnovu (2.34) i (2.28) važi

$$\varepsilon_{k+1} \sim D_{k,r}\varepsilon_k^r \sim D_{k,r}D_{k-1,r}^r\varepsilon_{k-1}^{r^2}, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_{k,y} \sim D_{k,q}\varepsilon_k^q \sim D_{k,q}D_{k-1,r}^r\varepsilon_{k-1}^{rq}, \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{k,w} \sim D_{k,p}\varepsilon_k^p \sim D_{k,p}D_{k-1,r}^r\varepsilon_{k-1}^{rp}. \quad (2.43)$$

Dalje, (2.17) i (2.29) daju

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_{k,4}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^2 \varepsilon_k^4, \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_{k,y} \sim c_2(1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k^2, \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{k,w} \sim (1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k. \quad (2.46)$$

Kombinujući izraze (2.40)–(2.46) nalazimo sledeće relacije grešaka

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\sim a_{k,4}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^2 \varepsilon_k^4 \\ &\sim a_{k,4}(c_4\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,w})^2 \varepsilon_k^4 \\ &\sim a_{k,4}c_4^2 D_{k-1,r}^4 D_{k-1,p}^2 D_{k-1,q}^2 \varepsilon_{k-1}^{4r+2p+2q+2}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,y} &\sim c_2(1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k^2 \\ &\sim c_2(c_4\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,w})\varepsilon_k^2 \\ &\sim c_2c_4 D_{k-1,r}^2 D_{k-1,p} D_{k-1,q} \varepsilon_{k-1}^{2r+p+q+1}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,w} &\sim (1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k \\ &\sim (c_4\varepsilon_{k-1}\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,w})\varepsilon_k \\ &\sim c_4 D_{k-1,r} D_{k-1,p} D_{k-1,q} \varepsilon_{k-1}^{r+p+q+1}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Izjednačavanjem eksponenata greške ε_{k-1} u parovima relacija (2.41) \wedge (2.47), (2.42) \wedge (2.48) kao i (2.43) \wedge (2.49), dolazimo do sistema jednačina po p , q i r ,

$$\begin{cases} r^2 - 4r - 2p - 2q - 2 = 0, \\ rq - 2r - p - q - 1 = 0, \\ rp - r - p - q - 1 = 0, \end{cases}$$

sa pozitivnim rešenjima $p = 2$, $q = 3$ i $r = 6$. Time potvrđujemo da je donja granica R -reda metoda sa memorijom (2.26) \wedge (2.23) ne manja od šest. \square

Prethodna teorema daje donju granicu R -reda konvergencije familije (2.26) u slučaju tehnika ubrzanja (I)–(IV). Metodi (2.26) sa memorijom imaju prilično ubrzanje konvergencije (i do 50%) u odnosu na polaznu familiju metoda (2.5) bez memorije. Osnovna prednost predloženih metoda sa memorijom jeste njihova visoka računaska efikasnost, dosta bolja od efikasnosti postojećih dvokoračnih metoda i čak veća i od efikasnosti trokoračnih metoda optimalnog reda osam.

2.2.2 Numerički primeri

Uporedili smo familiju dvokoračnih metoda (2.26) sa memorijom sa nekoliko optimalnih dvokoračnih iterativnih metoda (IM) reda četiri koji takođe zahtevaju četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji. Najpre dajemo listu ovih metoda.

- **Kingova familija** (1.50) iz koje smo testirali konkretne metode:

- *metod Ostrovsog* (1.51),
- *metod Kou-Li-Vanga* (1.53),
- *Čunov metod* (1.52).

- *Džeretov metod* (1.63),
- *metod Mahešvarija* (1.59),
- *Ren-Vu-Bi metod* (1.61),
- *Kung-Traubov* dvokoračni metod sa izvodima KT1 (1.56).

Ove metode kao i novu familiju metoda (2.26) sa memorijom smo primenili na sledeće test funkcije:

Primer	Funkcija	Koren α	x_0
1	$e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$	-1	-0.5
2	$e^x \sin 5x - 2$	1.3639731802...	1.2
3	$\log(x^2 + x + 2) - x + 1$	4.1525907367...	3.2
4	$e^x \sin x + \log(x^2 + 1)$	0	0.3

Koristili smo programski paket *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti. Greške $|x_k - \alpha|$ prve četiri iteracije date su u Tabelama 2.1–2.4, gde $A(-h)$ znači $A \times 10^{-h}$ i KT2 (\cdot) je skraćena za Kung-Traubov dvokoračni metod bez izvoda (1.57).

Očigledno je da su aproksimacije nula prikazane u Tabelama 2.1–2.4 velike tačnosti. Rezultati četvrte iteracije dati su samo zbog demonstracije brzine konvergencije testiranih metoda i nisu potrebni u praktičnim primenama.

2 Dvotačkasti metodi optimalnog reda konvergencije

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
Ostrovski (1.51)	4.26(-4)	2.12(-15)	1.31(-60)	1.93(-241)
Kou (1.53)	2.57(-3)	2.44(-12)	1.99(-48)	8.80(-193)
Čun (1.52)	4.79(-3)	2.42(-11)	1.58(-44)	2.91(-177)
Džeret (1.63)	2.27(-3)	2.04(-12)	1.34(-48)	2.50(-193)
Mahešvari (1.59)	3.68(-3)	9.35(-12)	3.90(-46)	1.18(-183)
Ren-Vu-Bi (1.61)	1.50(-3)	1.63(-11)	2.26(-43)	8.23(-171)
KT1 (1.56)	1.30(-3)	1.73(-13)	5.37(-53)	5.02(-211)
KT2 (1.57), $\gamma_k = 0.01$	1.68(-3)	5.39(-13)	5.73(-51)	7.28(-203)
KT2 \wedge (2.20)	1.68(-3)	9.36(-15)	3.70(-65)	2.76(-289)
KT2 \wedge (2.21)	1.68(-3)	1.17(-16)	1.68(-83)	1.03(-417)
KT2 \wedge (2.22)	1.68(-3)	6.27(-17)	1.33(-89)	7.75(-480)
KT2 \wedge (2.23)	1.68(-3)	1.81(-17)	4.71(-103)	1.48(-616)
$h(t, s) = (1 + t)/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	3.18(-3)	1.20(-13)	3.51(-60)	3.63(-267)
(2.26) \wedge (2.21)	3.18(-3)	1.51(-15)	6.05(-78)	6.26(-390)
(2.26) \wedge (2.22)	3.18(-3)	7.31(-16)	1.02(-83)	2.86(-448)
(2.26) \wedge (2.23)	3.18(-3)	2.02(-16)	9.31(-97)	8.80(-579)
$h(t, s) = 1 + t + s + s^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	4.51(-3)	4.48(-13)	1.29(-57)	8.68(-256)
(2.26) \wedge (2.21)	4.51(-3)	5.64(-15)	4.52(-75)	1.46(-375)
(2.26) \wedge (2.22)	4.51(-3)	2.51(-15)	9.85(-81)	2.82(-432)
(2.26) \wedge (2.23)	4.51(-3)	6.71(-16)	1.23(-93)	4.93(-560)
$h(t, s) = 1 + t + s + (t + s)^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.31(-3)	3.72(-15)	5.90(-67)	3.01(-297)
(2.26) \wedge (2.21)	1.31(-3)	4.61(-17)	1.61(-85)	8.39(-428)
(2.26) \wedge (2.22)	1.31(-3)	2.54(-17)	8.83(-92)	1.68(-490)
(2.26) \wedge (2.23)	1.31(-3)	7.40(-18)	2.12(-105)	1.23(-630)
$h(t, s) = t + 1/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	4.37(-3)	3.95(-13)	7.30(-58)	6.83(-257)
(2.26) \wedge (2.21)	4.37(-3)	4.99(-15)	2.43(-75)	6.48(-377)
(2.26) \wedge (2.22)	4.37(-3)	2.22(-15)	5.02(-81)	7.54(-433)
(2.26) \wedge (2.23)	5.92(-16)	6.09(-94)	7.11(-81)	7.54(-562)

TABELA 2.1 $f_1(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha = -1$, $x_0 = -0.5$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
Ostrovski (1.51)	3.53(-3)	3.22(-10)	1.95(-38)	2.62(-151)
Kou (1.53)	5.34(-3)	1.82(-9)	2.10(-35)	3.74(-139)
Čun (1.52)	7.80(-3)	9.59(-9)	1.72(-32)	1.78(-127)
Džeret (1.63)	3.25(-3)	2.37(-10)	6.24(-39)	2.98(-153)
Mahešvari (1.59)	6.57(-3)	4.48(-9)	7.98(-34)	8.04(-133)
Ren-Vu-Bi (1.61)	divergira	–	–	–
Ren-Vu-Bi ^{a)} $x_0 = 1.4$	1.85(-2)	3.31(-4)	9.35(-12)	5.42(-42)
KT1 (1.56)	4.31(-3)	7.23(-10)	5.11(-37)	1.27(-145)
KT2 (1.57), $\gamma_k = 0.01$	7.28(-3)	9.15(-9)	1.85(-32)	3.08(-127)
KT2 \wedge (2.20)	7.28(-3)	1.33(-11)	5.41(-49)	4.13(-216)
KT2 \wedge (2.21)	7.28(-3)	4.17(-12)	2.89(-59)	4.29(-295)
KT2 \wedge (2.22)	7.28(-3)	5.34(-12)	7.66(-61)	2.31(-323)
KT2 \wedge (2.23)	7.28(-3)	2.62(-13)	2.75(-76)	3.74(-454)
$h(t, s) = (1 + t)/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	9.78(-3)	4.12(-11)	9.44(-47)	3.68(-206)
(2.26) \wedge (2.21)	9.78(-3)	1.45(-11)	1.53(-56)	1.81(-281)
(2.26) \wedge (2.22)	9.78(-3)	1.78(-11)	5.85(-58)	6.68(-308)
(2.26) \wedge (2.23)	9.78(-3)	1.22(-12)	2.76(-72)	3.86(-430)
$h(t, s) = 1 + t + s + s^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.20(-2)	9.26(-11)	3.91(-45)	5.65(-199)
(2.26) \wedge (2.21)	1.20(-2)	3.65(-11)	1.54(-54)	1.84(-271)
(2.26) \wedge (2.22)	1.20(-2)	4.31(-11)	7.34(-56)	1.22(-296)
(2.26) \wedge (2.23)	1.20(-2)	2.94(-12)	3.07(-69)	7.37(-412)
$h(t, s) = 1 + t + s + (t + s)^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.26(-3)	1.29(-14)	1.20(-62)	9.17(-277)
(2.26) \wedge (2.21)	1.26(-3)	3.05(-15)	5.69(-75)	1.27(-373)
(2.26) \wedge (2.22)	1.26(-3)	4.44(-15)	8.55(-78)	2.77(-414)
(2.26) \wedge (2.23)	1.26(-3)	8.69(-17)	3.77(-97)	2.49(-579)
$h(t, s) = t + 1/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.25(-2)	1.10(-10)	8.52(-45)	1.78(-197)
(2.26) \wedge (2.21)	1.25(-2)	4.43(-11)	4.10(-54)	2.49(-269)
(2.26) \wedge (2.22)	1.25(-2)	5.19(-11)	2.06(-55)	3.07(-294)
(2.26) \wedge (2.23)	1.25(-2)	5.00(-12)	1.28(-68)	3.77(-408)

^{a)} Metod (1.61) divergira za početnu aproksimaciju $x_0 = 1.2$, ali konvergira za $x_0 = 1.4$.

TABELA 2.2 $f_2(x) = e^x \sin 5x - 2$, $\alpha = 1.36397318026 \dots$, $x_0 = 1.2$

2 Dvotačkasti metodi optimalnog reda konvergencije

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
Ostrovski (1.51)	1.01(-3)	6.13(-16)	9.81(-65)	5.73(-260)
Kou (1.53)	2.12(-3)	2.14(-14)	2.25(-58)	2.69(-234)
Čun (1.52)	3.44(-3)	2.09(-13)	2.85(-54)	9.87(-218)
Džeret (1.63)	1.08(-3)	9.57(-16)	5.82(-64)	7.94(-257)
Mahešvari (1.59)	2.78(-3)	7.62(-14)	4.32(-56)	4.46(-225)
Ren-Vu-Bi (1.61)	1.57(-4)	5.98(-20)	1.25(-81)	2.37(-328)
KT1 (1.56)	1.52(-3)	4.46(-15)	3.30(-61)	9.95(-246)
KT2 (1.57), $\gamma_k = 0.01$	1.50(-3)	4.17(-15)	2.50(-61)	3.21(-246)
KT2 \wedge (2.20)	1.50(-3)	1.98(-17)	1.05(-78)	1.44(-351)
KT2 \wedge (2.21)	1.50(-3)	9.12(-20)	8.36(-101)	5.41(-506)
KT2 \wedge (2.22)	1.50(-3)	8.05(-22)	1.20(-118)	2.60(-639)
KT2 \wedge (2.23)	1.50(-3)	8.45(-23)	3.63(-138)	2.30(-830)
$h(t, s) = (1 + t)/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	2.09(-3)	7.36(-17)	3.91(-76)	3.86(-340)
(2.26) \wedge (2.21)	2.09(-3)	3.46(-19)	6.56(-98)	1.61(-491)
(2.26) \wedge (2.22)	2.09(-3)	2.52(-21)	7.08(-116)	1.80(-624)
(2.26) \wedge (2.23)	2.09(-3)	5.00(-22)	1.56(-133)	1.47(-802)
$h(t, s) = 1 + t + s + s^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	2.68(-3)	2.52(-16)	1.11(-73)	3.76(-328)
(2.26) \wedge (2.21)	2.68(-3)	1.19(-18)	3.11(-95)	3.89(-478)
(2.26) \wedge (2.22)	2.68(-3)	6.33(-21)	1.28(-113)	2.15(-612)
(2.26) \wedge (2.23)	2.68(-3)	2.84(-21)	5.57(-129)	3.20(-775)
$h(t, s) = 1 + t + s + (t + s)^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	5.69(-4)	3.04(-19)	6.26(-87)	6.18(-371)
(2.26) \wedge (2.21)	5.69(-4)	1.41(-21)	7.29(-110)	2.73(-551)
(2.26) \wedge (2.22)	5.69(-4)	1.58(-23)	5.13(-128)	1.39(-689)
(2.26) \wedge (2.23)	5.69(-4)	5.49(-25)	2.78(-151)	4.59(-909)
$h(t, s) = t + 1/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	2.73(-3)	2.74(-16)	1.64(-73)	2.07(-328)
(2.26) \wedge (2.21)	2.73(-3)	1.28(-18)	4.63(-95)	2.82(-477)
(2.26) \wedge (2.22)	2.73(-3)	7.44(-21)	2.71(-113)	1.29(-610)
(2.26) \wedge (2.23)	2.73(-3)	2.76(-21)	4.58(-129)	9.58(-776)

TABELA 2.3 $f_3(x) = \log(x^2 + x + 2) - x + 1$, $\alpha = 4.1525907367\dots$, $x_0 = 3.2$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
Ostrovski (1.51)	1.06(-2)	8.74(-8)	4.28(-28)	2.46(-109)
Kou (1.53)	1.80(-2)	2.00(-6)	3.78(-22)	4.78(-85)
Čun (1.52)	2.24(-2)	7.37(-6)	1.16(-19)	7.15(-75)
Džeret (1.63)	1.05(-2)	8.32(-8)	3.49(-28)	1.08(-109)
Mahešvari (1.59)	2.02(-2)	4.06(-6)	8.52(-21)	1.65(-79)
Ren-Vu-Bi (1.61)	2.92(-2)	1.67(-5)	2.29(-18)	8.12(-70)
KT1 (1.56)	1.52(-2)	7.20(-7)	4.12(-24)	4.43(-93)
KT2 (1.57), $\gamma_k = 0.01$	1.55(-2)	7.91(-7)	6.11(-24)	2.18(-92)
KT2 \wedge (2.20)	1.55(-2)	1.14(-7)	2.32(-30)	2.33(-131)
KT2 \wedge (2.21)	1.55(-2)	1.66(-8)	2.08(-38)	6.25(-188)
KT2 \wedge (2.22)	1.55(-2)	6.04(-10)	8.01(-51)	5.33(-272)
KT2 \wedge (2.23)	1.55(-2)	6.13(-10)	3.03(-54)	4.46(-320)
$h(t, s) = (1 + t)/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.84(-2)	2.57(-7)	8.49(-29)	2.09(-124)
(2.26) \wedge (2.21)	1.84(-2)	3.41(-8)	6.99(-37)	2.68(-180)
(2.26) \wedge (2.22)	1.84(-2)	1.69(-9)	1.87(-48)	2.89(-257)
(2.26) \wedge (2.23)	1.84(-2)	1.71(-9)	1.43(-51)	4.97(-304)
$h(t, s) = 1 + t + s + s^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	2.10(-2)	6.20(-7)	5.72(-27)	3.82(-116)
(2.26) \wedge (2.21)	2.10(-2)	9.06(-8)	8.97(-35)	9.28(-170)
(2.26) \wedge (2.22)	2.10(-2)	7.67(-9)	3.08(-45)	7.49(-240)
(2.26) \wedge (2.23)	2.10(-2)	7.72(-9)	2.58(-47)	3.57(-278)
$h(t, s) = 1 + t + s + (t + s)^2$				
(2.26) \wedge (2.20)	1.57(-2)	6.92(-8)	1.56(-31)	8.34(-137)
(2.26) \wedge (2.21)	1.57(-2)	1.11(-8)	2.03(-39)	5.57(-193)
(2.26) \wedge (2.22)	1.57(-2)	7.01(-10)	7.22(-51)	4.40(-279)
(2.26) \wedge (2.23)	1.57(-2)	7.09(-10)	7.43(-54)	9.83(-318)
$h(t, s) = t + 1/(1 - s)$				
(2.26) \wedge (2.20)	2.06(-2)	5.56(-7)	3.55(-27)	4.56(-117)
(2.26) \wedge (2.21)	2.06(-2)	7.67(-8)	4.25(-35)	2.21(-171)
(2.26) \wedge (2.22)	2.06(-2)	4.96(-9)	4.91(-46)	3.13(-243)
(2.26) \wedge (2.23)	2.06(-2)	5.00(-9)	1.39(-48)	6.37(-286)

TABELA 2.4 $f_4(x) = e^x \sin x + \log(x^2 + 1)$, $\alpha = 0$, $x_0 = 0.3$

Na osnovu rezultata datih u Tabelama 2.1–2.4 kao i velikog broja urađenih numeričkih primera, možemo zaključiti da je brzina konvergencije dvokoračnih metoda (2.26) sa memorijom (uključujući i modifikovani Kung-Traubov metod (1.57)), zasnovanih na samokorigujućem parametru γ_k koji se računa po nekoj od formula (2.20)–(2.23), izrazito veća u odnosu na postojeće dvokoračne metode. Iz tabela se takođe može potvrditi da izračunavanje parametra γ_k Njutnovim interpolacionim polinomom reda 3 (2.23) daje najbolje rezultate. Imajući u vidu da su svi testirani metodi iste računске cene, zaključujemo

da je familija metoda (2.26) sa memorijom najefikasnija. Preciznije, određivanjem računске efikasnosti Ostrovski-Traubovom formulom (1.19), nalazimo

$$E(1.50) = E(1.63) = E(1.59) = E(1.61) = E(1.56) = E(1.57) = 4^{1/3} \approx 1.587$$

i

$$\begin{aligned} E((2.26) \wedge (2.20)) &= (2 + \sqrt{6})^{1/3} \approx 1.645, & E((2.26) \wedge (2.21)) &= 5^{1/3} \approx 1.71, \\ E((2.26) \wedge (2.22)) &= \left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{33})\right)^{1/3} \approx 1.75, & E((2.26) \wedge (2.23)) &= 6^{1/3} \approx 1.817. \end{aligned}$$

Poslednje četiri vrednosti indeksa efikasnosti ne opovrgavaju hipotezu Kunga i Trauba jer se odnose na metode *sa memorijom* (2.26) koji nisu obuhvaćeni hipotezom Kunga i Trauba. Napomenimo da su indeksi efikasnosti $E((2.26) \wedge (2.21)) \approx 1.71$, $E((2.26) \wedge (2.22)) \approx 1.75$ i $E((2.26) \wedge (2.23)) \approx 1.817$ veći čak i od indeksa efikasnosti optimalnih trokoračnih metoda reda osam ($8^{1/4} \approx 1.68$).

2.3 Familija Džeretovog tipa

U ovom odeljku opisaćemo jednu novu familiju dvokoračnih metoda Džeretovog tipa za rešavanje nelinearnih jednačina $f(x) = 0$ realne funkcije jedne realne promenljive predložene u [12]. Ova familija generiše neke nove i neke postojeće metode kao specijalne slučajeve, uključujući i Džeretovu familiju datu u [36].

2.3.1 Džeretova familija optimalnih metoda

Neka je $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ dovoljan broj puta diferencijabilna realna funkcija na intervalu $I_f \subset D$ u kome je izolovana prosta realna nula α funkcije f . Pretpostavljajući da je $\theta \neq 0, 1$ realan parametar, 1966. godine [36] Džeret je konstruisao familiju dvokoračnih metoda (1.62) reda četiri,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3}u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - a_1(\theta)u(x_k) - a_2(\theta)\frac{f(x_k)}{f'(y_k)} - \frac{f(x)}{b_1(\theta)f'(x) + b_2(\theta)f'(y_k)}, \end{cases} \quad (2.50)$$

gde je $u(x) = f(x)/f'(x)$ i

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2\theta}\right), \quad a_2 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2(\theta-1)}\right), \quad b_1 = -\frac{8\theta}{3}(1-\theta)^2, \quad b_2 = \frac{8\theta^2}{3}(\theta-1).$$

Ova familija koristi jedno izračunavanje funkcije f i dva izračunavanja izvoda f' po jednoj iteraciji. Dakle, Džeretova familija metoda (2.50) je optimalna u smislu Kung-Traubove hipoteze.

Parametar θ u (2.50) treba izabrati tako da iterativna formula (2.50) bude što jednostavnija. Najprostiji i najcitiraniji partikularni metod (1.63) iz familije metoda (2.50) dobija se za $\theta = \frac{3}{2}$ i glasi

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3}u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - J_f(x_k)u(x_k), \end{cases} \quad (2.51)$$

gde je

$$J_f(x_k) = \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{6f'(y_k) - 2f'(x_k)}.$$

Uz oznake

$$\varepsilon_k = x_k - \alpha, \quad c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)} \quad (rj = 2, 3, \dots),$$

Džeret [36] je izveo sledeću relaciju greške metoda (2.51)

$$\varepsilon_{k+1} = (c_2^3 - c_2c_3 + c_4/9)\varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5). \quad (2.52)$$

Primetimo da prvi korak iterativne šeme (2.50) ne predstavlja Njutnov metod, koji se najčešće koristi u prvom koraku pri konstrukciji višekoračnih metoda sa izvodom. Specifičan korak oblika $y = x - \eta u(x)$ ($\eta \neq 1$) zvaćemo *Džeretov korak*. U nastavku ćemo dokazati da se red 4 metoda Džeretovog tipa dobija jedino za izbor $\eta = 2/3$.

2.3.2 Familija optimalnih dvokoračnih metoda

Neka je $y = x - \eta u(x)$, $t = t(x) = \frac{f'(x - \eta u(x))}{f'(x)} = \frac{f'(y)}{f'(x)}$ i $t_k = t(x_k)$. Posmatraćemo dvokoračnu šemu, koja počinje Džeretovim korakom, oblika

$$\begin{cases} y_k = x_k - \eta u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - q(t_k)u(x_k), \end{cases} \quad (2.53)$$

gde je $q(t)$ dovoljan broj puta diferencijabilna težinska funkcija koju treba odrediti tako da metod (2.53) bude reda konvergencije četiri. Kako je

$$t = \frac{f'(x - \frac{2}{3}u(x))}{f'(x)} = \frac{f'(x) - \frac{2}{3}f''(x)u(x) + \dots}{f'(x)} = 1 + O(f(x)),$$

aproksimirajmo funkciju $q(t)$ njenim Tejlorovim polinomom stepena dva u okolini tačke 1.

$$q(t) \approx q_0 + q_1(t-1) + \frac{1}{2}q_2(t-1)^2, \quad q_r = q^{(r)}(1) \quad (r = 0, 1, 2).$$

Korišćenjem simboličkog računa u programskom paketu *Mathematica* dobijamo sledeće Tejlorove razvoje

$$f(x_k) = f'(\alpha) \left(\varepsilon_k + c_2 \varepsilon_k^2 + c_3 \varepsilon_k^3 + c_4 \varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5) \right),$$

$$f'(x_k) = f'(\alpha) \left(1 + 2c_2 \varepsilon_k + 3c_3 \varepsilon_k^2 + 4c_4 \varepsilon_k^3 + O(\varepsilon_k^4) \right),$$

$$u(x_k) = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \varepsilon_k - c_2 \varepsilon_k^2 + (2c_2^2 - 2c_3) \varepsilon_k^3 + (-4c_2^3 + 7c_2 c_3 - 3c_4) \varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5),$$

$$f'(y_k) = f'(\alpha) \left(1 + 2c_2 \varepsilon_{k,y} + 3c_3 \varepsilon_{k,y}^2 + 4c_4 \varepsilon_{k,y}^3 + O(\varepsilon_{k,y}^4) \right), \quad \varepsilon_{k,y} = y_k - \alpha,$$

$$\begin{aligned} t_k = \frac{f'(y_k)}{f'(x_k)} &= 1 - 2\eta c_2 \varepsilon_k + 3\eta(2c_2^2 + c_3(\eta - 2)) \varepsilon_k^2 \\ &\quad - 4\eta(4c_2^3 + c_2 c_3(3\eta - 7) + c_4(3 + \eta(\eta - 3))) \varepsilon_k^3 \\ &\quad + \eta(40c_2^4 + c_3^2(30 - 21\eta) + c_2^2 c_3(39\eta - 100) + 5c_4(\eta - 2)(2 + \eta(\eta - 2)) \\ &\quad + 2c_2 c_4(25 + 2\eta(5\eta - 12))) \varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5). \end{aligned}$$

Na osnovu navedenih razvoja izvodimo relaciju greške metoda (2.53)

$$\varepsilon_{k+1} = (1 - q_0) \varepsilon_k + c_2(q_0 + 2\eta q_1) \varepsilon_k^2 + \left(c_3(2q_0 - 3(\eta - 2)q_1\eta) - 2c_2^2(q_0 + \eta(4q_1 + \eta q_2)) \right) \varepsilon_k^3 + O(\varepsilon_k^4).$$

Dakle, familija dvokoračnih metoda (2.53) biće reda četiri ako se koeficijenti uz članove ε_k , ε_k^2 i ε_k^3 anuliraju. To je moguće izborom $\eta = 2/3$ i funkcije $q(t)$ u (2.53) sa osobinama

$$q_0 = q(1) = 1, \quad q_1 = q'(1) = -\frac{3}{4}, \quad q_2 = q''(1) = \frac{9}{4}, \quad |q'''(1)| < \infty. \quad (2.54)$$

U tom slučaju relacija greške postaje

$$\varepsilon_{k+1} = \left(\frac{1}{9} c_4 - c_2 c_3 + c_2^3 \left(5 + \frac{32}{81} q'''(1) \right) \right) \varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5). \quad (2.55)$$

Na osnovu (2.54) i (2.55) možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema 2.4 *Neka je $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ dovoljan broj puta diferencijabilna funkcija sa prostom nulom α u intervalu $I_f \subset D$. Ako je x_0 dovoljno bliska početna vrednost traženoj nuli α i važe uslovi (2.54), tada familija metoda*

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - q(t_k) u(x_k), \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.56)$$

ima red konvergencije četiri.

Veliki broj metoda Džeretovog tipa može se konstruisati različitim izborom funkcije $q(t)$. Jedna opšta dvo-parametarska familija dobija se za

$$q(t) = \frac{16(1 - a - b + bt + at^2)}{8a - 4b - 5 + (30 - 48a - 8b)t + (-9 + 40a + 12b)t^2}, \quad (2.57)$$

gde su $a, b \in \mathbf{R}$. Na primer, izborom $q(t) = \frac{3t+1}{6t-2}$ ($a = 0, b = \frac{3}{4}$) u (2.57), dobijamo Džeretov metod (2.51) (koji je kasnije ponovo izveo Basu [2]). Basuov metod [2] (1.64)

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3}u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f'(y_k)f(x_k)}{\frac{3}{16}f'(y_k)^2 + \frac{11}{8}f'(y_k)f'(x_k) - \frac{9}{16}f'(x_k)^2}, \end{cases} \quad (2.58)$$

sledi iz familije (2.53) za izbor $q(t) = t/(\frac{3}{16}t^2 + \frac{11}{8}t - \frac{9}{16})$ ($a = 0, b = 1$). Predstavićemo još neke primere metoda koji slede iz (2.57):

$$(a = 0, b = \frac{15}{4}) \Rightarrow q(t) = \frac{15t-11}{9t^2-5}; \quad (2.59)$$

$$(a = 0, b = 0) \Rightarrow q(t) = -\frac{16}{9t^2 - 30t + 5}; \quad (2.60)$$

$$(a = 1, b = 0) \Rightarrow q(t) = \frac{16t^2}{31t^2 - 18t + 3}; \quad (2.61)$$

$$(a = \frac{9}{40}, b = 0) \Rightarrow q(t) = \frac{9t^2 + 31}{48t - 8}; \quad (2.62)$$

$$(a = -\frac{3}{28}, b = \frac{31}{28}) \Rightarrow q(t) = \frac{31 - 3t}{46t - 18}t. \quad (2.63)$$

Još opštije, birajući

$$q(t) = \frac{t^2(3 + 2\theta) + 4t(\theta - 1) + 9 - 6\theta}{8t(1 + (t - 1)\theta)} = a_1(\theta) + \frac{a_2(\theta)}{t} + \frac{1}{b_1(\theta) + b_2(\theta)t} \quad (\theta \neq 0, 1)$$

(za $a = \frac{3 + 2\theta}{8}$, $b = \frac{\theta - 1}{2}$ u (2.57)), iz (2.56) dobijamo Džeretovu familiju (2.50).

Na kraju dajemo i jedan metod Džeretovog tipa sa težinskom funkcijom $q(t)$ polinomske oblika koja zadovoljava uslove (2.54), tj.

$$q(t) = 1 - \frac{3}{4}(t - 1) + \frac{9}{8}(t - 1)^2 + \gamma(t - 1)^3, \quad (2.64)$$

gde je γ proizvoljan realan parametar.

Koristeći sasvim drugačiji pristup, nedavno je u radu [12] izvedena opšta familija Džeretovog tipa, koja je suštinski slična familiji (2.26). Ta familija ima oblik

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3}u(x_k), \\ x_{k+1} = x_k - H(s_k)u(x_k), \end{cases} \quad (2.65)$$

gde je

$$s_k = \frac{3}{2} \frac{f'(x_k) - f'(y_k)}{f'(x_k)} = \frac{3}{2}(1 - t_k).$$

U ovom radu je pokazano da familija (2.65) dostiže red četiri ako za težinsku funkciju H važe uslovi

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = \frac{1}{2}, \quad H''(0) = 1.$$

Lako se pokazuje da su ovi uslovi ekvivalentni uslovima (2.54) s obzirom da je

$$g(t) = g\left(1 - \frac{2s}{3}\right) = H(s).$$

Napomena 2.7 Napomenimo da većina višekoračnih metoda razmatranih u literaturi ne koriste više od jednog izračunavanja izvoda funkcije. Nasuprot tome, metodi predstavljeni u ovom odeljku koriste dva izračunavanja vrednosti prvog izvoda, što je računski atraktivno u problemima gde je izračunavanje vrednosti $f'(x)$ jednostavnije u poređenju sa izračunavanjem vrednosti $f(x)$. Kao što je primetio i sam Džeret [36], primer takvih slučajeva jeste kada je funkcija f definisana integralom.

2.3.3 Numerički rezultati

Testirali smo dvokoračne metode izvedene iz nove familije metoda (2.56), koje ćemo citirati kao metode (2.59)–(2.64). Novi metodi su poređeni sa metodima koji su već pomenuti u odeljku 2.2 pri razmatranju numeričkih rezultata.

Testirali smo različite metode familije (2.56) koje smo dobili različitim izborom težinske funkcije q . Pri ovim numeričkim eksperimentima nije pronađena posebna težinska funkcija q koja bi asimptotski bila najbolja za sve testirane nelinearne jednačine. Radi ilustracije ponašanja konvergencije testiranih metoda, dajemo rezultate dobijene prilikom određivanja izolovane proste nule funkcija

$$f(x) = \frac{2}{x}e^{x^2-4} - x^2 \sin(x-2) - x^{-2x+1} - \frac{7}{x^3}, \quad x_0 = 1.71, \quad \alpha = 2$$

i

$$f(x) = (e^{(x-3)(x^{-2}-1)} - 1)(x-5), \quad x_0 = 2, \quad \alpha = 3.$$

Greške aproksimacija $|x_k - \alpha|$ date su Tabelama 2.5 i 2.6, gde $A(-h)$ označava $A \times 10^{-h}$. Ove tabele sadrže i vrednost računskog reda konvergencije r_c određenog formulom (1.18).

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $	r_c (1.18)
(2.56)–(2.59)	9.05(–2)	2.88(–4)	1.25(–13)	4.42(–51)	4.0002
(2.56)–(2.60)	4.30(–3)	2.56(–9)	3.29(–34)	9.05(–134)	4.0000
(2.56)–(2.61)	7.02(–3)	2.48(–8)	3.62(–30)	1.64(–117)	3.9999
(2.56)–(2.62)	3.22(–3)	8.48(–10)	4.19(–36)	2.49(–141)	3.9999
(2.56)–(2.63)	2.26(–2)	3.52(–6)	1.62(–21)	7.28(–83)	3.9999
(2.56)–(2.64) $\gamma = 0$	2.89(–2)	2.69(–6)	7.79(–23)	5.46(–89)	4.0000
(2.56)–(2.64) $\gamma = -2$	8.44(–3)	5.02(–8)	7.19(–29)	3.01(–112)	3.9999
Džeret (2.51)	1.20(–2)	2.28(–7)	2.64(–26)	4.71(–102)	3.9999
Basu (2.58)	2.16(–2)	2.89(–6)	7.25(–22)	2.88(–84)	3.9999
King (1.50) $\beta = -1$	1.59(–1)	5.04(–2)	2.08(–5)	2.85(–18)	3.8216
Ostrovski (1.51)	1.10(–2)	1.80(–7)	1.16(–26)	2.01(–103)	3.9999
Kou (1.53)	1.73(–2)	6.12(–7)	9.70(–25)	6.11(–96)	4.0000
Čun (1.52)	2.93(–2)	3.73(–6)	5.33(–22)	2.23(–85)	4.0000
Mahešvari (1.59)	2.33(–2)	1.71(–6)	4.15(–23)	1.43(–89)	4.0000
KT (1.56)	8.85(–3)	5.23(–8)	6.68(–29)	1.79(–112)	4.0000

TABELA 2.5 $f(x) = \frac{2}{x}e^{x^2-4} - x^2 \sin(x-2) - x^{-2x+1} - \frac{7}{x^3}$, $x_0 = 1.71$, $\alpha = 2$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $	r_c (1.18)
(2.56)–(2.59)	5.81(–2)	2.39(–5)	6.78(–19)	4.40(–73)	4.0000
(2.56)–(2.60)	4.90(–2)	5.33(–6)	8.92(–22)	7.00(–85)	3.9999
(2.56)–(2.61)	4.47(–2)	1.94(–6)	7.56(–24)	1.75(–93)	3.9999
(2.56)–(2.62)	4.83(–2)	4.56(–6)	4.21(–22)	3.06(–86)	3.9999
(2.56)–(2.63)	4.14(–2)	6.27(–7)	3.42(–26)	3.01(–103)	3.9999
(2.56)–(2.64) $\gamma = 0$	6.07(–2)	3.06(–5)	2.65(–18)	1.49(–70)	3.9999
(2.56)–(2.64) $\gamma = -2$	4.69(–2)	1.08(–6)	1.23(–26)	2.06(–106)	3.9999
Džeret (2.51)	4.38(–2)	1.55(–6)	2.70(–24)	2.48(–95)	3.9999
Basu (2.58)	4.16(–2)	7.19(–7)	6.72(–26)	5.11(–102)	3.9999
King (1.50) $\beta = -1$	6.43(–2)	1.09(–7)	9.66(–31)	6.00(–123)	4.0000
Ostrovski (1.51)	1.81(–1)	1.10(–5)	1.42(–22)	3.88(–90)	3.9999
Kou (1.53)	3.87(–1)	4.33(–4)	4.36(–16)	4.46(–64)	3.9999
Čun (1.52)	8.41(–1)	2.67(–2)	7.23(–9)	4.13(–35)	3.9953
Mahešvari (1.59)	6.14(–1)	4.57(–3)	5.96(–12)	1.73(–46)	3.9994
KT (1.56)	2.45(–1)	4.84(–5)	6.06(–20)	1.49(–79)	3.9999

TABELA 2.6 $f(x) = (e^{(x-3)(x^{-2}-1)} - 1)(x-5)$, $x_0 = 2$, $\alpha = 3$

Na osnovu rezultata prikazanih u Tabelama 2.5 i 2.6 kao i mnogih drugih numeričkih primera, može se zaključiti da je konvergencija testiranih metoda (2.56) izuzetno brza i uporediva sa drugim postojećim metodima. Svi testirani metodi su pokazali slično ponašanje za dobro izabrane početne aproksimacije. Iz Tabela 2.5 i 2.6 primećujemo da računski red konvergencije r_c potvrđuje teorijske rezultate izvrsnim poklapanjem vrednosti.

3

Trokoračni metodi optimalnog reda

Klase trokoračnih metoda sa optimalnim redom osam koji zahtevaju četiri funkcijska izračunavanja su tema ovog poglavlja. Prva od ovih klasa, predstavljena u radu [77], zasnovana je na proizvoljnim optimalnim dvokoračnim metodima iz klase Ψ_4 . Neki dvokoračni metodi iz klase Ψ_4 dati su u prethodnom odeljku. U drugom odeljku razmatrana je dvoparametarska familija čiji su partikularni slučajevi predstavljeni u [20] i [19]. Familija trokoračnih metoda iz rada [21] razmatrana je u trećem odeljku. U nastavku je dato ubrzanje ove familije metoda ostvareno bez upotrebe novih funkcijskih izračunavanja. Četvrti odeljak posvećen je komentaru sličnosti nekih postojećih metoda.

3.1 Metod zasnovan na interpolaciji racionalnom funkcijom

U ovom odeljku opisaćemo novu familiju trokoračnih iterativnih metoda sa optimalnim redom konvergencije osam, konstruisanu u radu [77]. Jednostavnosti radi, ponekad ćemo izostavljati indeks iteracije, a novu aproksimaciju x_{k+1} označavaćemo sa \hat{x} . Neka $\varphi_f \in \Psi_4$ označava iterativnu funkciju iz klase optimalnih dvokoračnih iterativnih metoda. Tada se poboljšana aproksimacija \hat{x} nule α može odrediti sledećom trokoračnom iterativnom šemom:

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \\ z = \varphi_f(x, y), \quad \varphi_f \in \Psi_4, \\ \hat{x} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Primetimo da prva dva koraka definišu optimalni dvokoračni metod iz klase Ψ_4 reda $r_1 = 4$ sa Njutnovim metodom u prvom koraku reda $r_2 = 2$, dok je treći korak ponovo Njutnov metod. Iterativna šema (3.1) je jednostavna i red konvergencije je jednak osam, što je posledica Teoreme 1.3.

Nedostatak trotačkastog metoda (3.1) sastoji se u tome što zahteva pet funkcijskih izračunavanja po iteraciji tako da *nije optimalan* u smislu Kung-Traubove hipoteze. Da bismo smanjili broj izračunavanja i tako povećali računsku efikasnost, aproksimiramo $f'(z)$ koristeći postojeće podatke. Kako imamo četiri vrednosti $f(x)$, $f'(x)$, $f(y)$ i $f(z)$, jedan od načina je da aproksimiramo f Ermitovim interpolacionim polinomom H_3 stepena 3 u čvorovima x , y , z i koristimo aproksimaciju $f'(z) \approx H_3'(z)$ u trećem koraku iterativne šeme (3.1), videti [63] i [64].

U radu [77] korišćen je drugi prilaz za aproksimaciju $f'(z)$ zasnovan na interpolaciji funkcije f racionalnom funkcijom

$$w(\tau) = \frac{a_1 + a_2(\tau - x) + a_3(\tau - x)^2}{1 + a_4(\tau - x)} \quad (a_2 - a_1a_4 \neq 0). \quad (3.2)$$

Iz (3.2) dobijamo

$$w'(\tau) = \frac{a_2 - a_1a_4 + a_3(\tau - x)(2 + a_4(\tau - x))}{(1 + a_4(\tau - x))^2}. \quad (3.3)$$

Iz uslova

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad w(x) &= f(x), \quad \text{(ii)} \quad w(y) = f(y), \\ \text{(iii)} \quad w(z) &= f(z), \quad \text{(iv)} \quad w'(x) = f'(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

određujemo nepoznate koeficijente a_1, \dots, a_4 . Smenom $\tau = x$ u (3.2) i (3.3), koristeći (3.4)-(i) i (3.4)-(iv), nalazimo

$$a_1 = f(x), \quad a_2 = f'(x) + a_4a_1.$$

Preostala dva uslova (3.4)-(ii) i (3.4)-(iii), zamenom y i z u (3.2), daju sistem od dve linearne jednačine. Tako dolazimo do nepoznatih koeficijenata a_3 i a_4 ,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{f'(x)(f(y) - f(z)) - f[x, y]f[x, z](y - z)}{f(z)(y - x) + f(y)(x - z) + f(x)(z - y)} \\ a_4 &= \frac{a_3}{f[x, y]} + \frac{f[x, y] - f'(x)}{f(x) - f(y)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gde $f[x, y] = (f(y) - f(x))/(y - x)$ označava podeljenu razliku. Konačno, dobijamo

$$a_2 = f'(x) + a_4a_1 = f'(x) + a_4f(x). \quad (3.6)$$

Zamenom nađenih koeficijenata u (3.3) i smenom $\tau = z$, dolazimo do eksplicitne formule za $w'(z)$ koja koristi jedino već izračunate veličine $f(x)$, $f'(x)$, $f(y)$, i $f(z)$. Na taj način, nelinearna racionalna funkcija w i njen izvod w' su u potpunosti određeni relacijama (3.2)–(3.6).

Zamenom $f'(z)$ u trećem koraku iterativne šeme (3.1) sa $w'(z)$ dobijamo novu familiju trokoračnih metoda: Polazeći od aproksimacije x_0 , u svakom iterativnom koraku nove

poboljšane aproksimacije x_k ($k = 1, 2, \dots$) računaju se trokoračnom procedurom

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = \varphi_f(x_k, y_k), \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{w'(z_k)}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.7)$$

Familija (3.7) zahteva samo četiri funkcijska izračunavanja. Videćemo kasnije da je njen red konvergencije osam, tj. familija trokoračnih metoda (3.7) je optimalna.

Mnogi autori određuju red konvergencije koristeći standardnu tehniku koja se uglavnom oslanja na Tejlorov razvoj. U slučaju višekoračnih metoda, takav prilaz daje prilično složene izraze te je za rad sa njima neophodno koristiti računar i odgovarajuće programe. Za određivanje reda konvergencije i asimptotske konstante greške metoda (3.7) koristićemo simboličko izračunavanje u programskom paketu *Mathematica*. Sledeće skraćenice su korišćene u programu koji sledi.

$$\begin{aligned} \text{ck} &= f^{(k)}(\alpha)/(k!f'(\alpha)), \quad \text{e} = x - \alpha, \quad \text{e1} = \hat{x} - \alpha, \\ \text{fx} &= f(x), \quad \text{fy} = f(y), \quad \text{fz} = f(z), \quad \text{f1x} = f'(x), \quad \text{f1a} = f'(\alpha), \\ \text{w1z} &= w'(z) \text{ (sledi iz (3.3)–(3.6)).} \end{aligned}$$

Program (napisan u paketu *Mathematica*):

```
fx=f1a(e+c2*e2+c3*e3+c4*e4+c5*e5+c6*e6+c7*e7+c8*e8); f1x=D[fx,e];
ey=e-Series[fx/f1x,{e,0,8}]; fy=f1a(ey+c2*ey2+c3*ey3+c4*ey4);
ez=q*e4+q5*e5; fz=f1a(ez+c2*ez2);
fxy=(fx-fy)/(e-ey); fxz=(fx-fz)/(e-ez); fyz=(fy-fz)/(ey-ez);
a1=fx; a3=((f1x(fy-fz)-fxy*fxz(ez-e)))/((fz(ey-e)+fy(e-ez)+fx(ez-ey)));
a4=a3/fxy+(fxy-f1x)/(fx-fy); a2=f1x+fx*a4;
w1z=(a2-a1*a4+a3(ez-e)(2+a4(ez-e)))/(1+a4(ez-e))2;
e1=Series[ez-fz/w1z,{e,0,8}]/Simplify
```

$$\boxed{\text{Out}[e1] = q(c_2(c_4 + q) - c_3^2)e^8 + O[e^9]} \quad (3.8)$$

Izlaz (3.8) datog programa, gde je q asimptotska konstanta greške (AKG) dvokoračnog metoda definisanog pomoću φ_f , ukazuje da je red konvergencije familije trokoračnih metoda (3.7) jednak osam. Tejlorov razvoj korišćen u programu podrazumeva dovoljno malo $\varepsilon = x - \alpha$, što znači da početna aproksimacija treba da bude dovoljno blizu nule α . Na osnovu svega izloženog možemo da formulišemo sledeću teoremu.

Teorema 3.1 *Ukoliko je početna aproksimacija x_0 dovoljno blizu nule α funkcije f , onda je red konvergencije familije trokoračnih metoda (3.7) jednak osam.*

Napomena 3.1 S obzirom da je za posmatranu familiju trokoračnih metoda (3.7) broj upotrebljenih funkcijskih izračunavanja po iteraciji $\theta(3.7) = 4$, a red konvergencije $2^3 = 8$, zaključujemo da je Kung-Traubova hipoteza podržana.

Programski izlaz (3.8) daje asimptotsku konstantu greške nove familije metoda (3.7)

$$\text{AKG}(3.7) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^8} = q [c_2(c_4 + q) - c_3^2].$$

Kao što je već pomenuto, konstanta q je asimptotska konstanta greške dvokoračnog metoda φ_f primenjenog konkretno u iterativnoj šemi (3.7). Na primer,

$$q = \text{AKG}(1.50) = c_2^3(1 + 2\beta) - c_2c_3$$

za Kingov dvokoračni metod (1.50) tako da je AKG za trokoračni metod (3.7) \wedge (1.50) u ovom specijalnom slučaju

$$\text{AKG}((3.7)\wedge(1.50)) = [c_2^3(1 + 2\beta) - c_2c_3] [c_2(c_4 + c_2^3(1 + 2\beta) - c_2c_3) - c_3^2].$$

Ponašanje konvergencije predložene klase trokoračnih metoda (3.7) ilustrovaćemo numeričkim rezultatima dobijenim za različite dvokoračne metode iz klase Ψ_4 . Odabrali smo metode Kingove familije dobijene za partikularne vrednosti parametra: $\beta = 0$ (metod Ostrovskeg (1.51)), $\beta = 1$ (Kou-Li-Vangov metod (1.53)) i $\beta = 2$ (Čunov metod (1.52)), metod Mahešvarija (1.59), i metod (1.60) predložen u radu [73].

Zbog poređenja, testirali smo i dva metoda iz familije reda osam (1.70) koji su Bi, Vu i Ren predložili u radu [4], i koje ćemo označiti sa BWR1 i BWR2. Takođe smo testirali partikularne metode iz opšte klase n -koračnih metoda za $n = 3$ koju je predložio M. Petković u radu [63], birajući u Kingovom metodu $\beta = 0$ i $\beta = 1$. Metode (1.67) i (1.68) označićemo sa P-1 i P-2. Testirani su i partikularni slučajevi za $n = 3$ (1.65) i (1.66) iz familija Kunga i Trauba [44] označene sa KT1 (familija bez izvoda) i KT2 (familija sa prvim izvodom).

Između više numeričkih primera izabrali smo dva zbog demonstracije. Programi su realizovani u programskom paketu *Mathematica* uz korišćenje aritmetike višestruke preciznosti. Tabele rezultata takođe sadrže i računski red konvergencije, izračunavan po formuli (1.17).

Primer 3.1 Primenili smo gore pomenute metode na test funkciju

$$f(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$$

za približno određivanje korena koji je u blizini $x_0 = -0.7$. Vrednost ove nule funkcije je $\alpha = -1$. Apsolutne vrednosti grešaka aproksimacija x_k iz prve tri iteracije prikazane su u Tabeli 3.1.

Primer 3.2 Trokoračni metodi upotrebljeni u Primeru 3.1 takođe su primenjeni na funkciju

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 2) - x + 1$$

za aproksimaciju nule $\alpha = 4.15259073675715827499 \dots$ polazeći od startne vrednosti $x_0 = 3$. Dobijeni rezultati predstavljeni su u Tabeli 3.2.

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	\bar{r} (1.17)
(3.7) \wedge (1.51)	5.64(-7)	1.35(-52)	1.42(-417)	8.00023
(3.7) \wedge (1.53)	2.85(-9)	8.32(-72)	2.57(-571)	7.98773
(3.7) \wedge (1.52)	3.96(-7)	5.57(-54)	8.54(-429)	7.99999
(3.7) \wedge (1.59)	2.04(-7)	3.11(-56)	8.92(-447)	8.00015
(3.7) \wedge (1.60)	9.97(-7)	1.38(-50)	1.86(-401)	8.00000
KT1 (1.65)	2.82(-7)	2.18(-55)	2.81(-440)	7.99990
KT2 (1.66)	2.45(-7)	5.73(-56)	5.07(-445)	8.00010
BWR 1 (1.70)	7.87(-7)	4.47(-52)	4.86(-414)	7.99996
BWR 2 (1.70)	1.19(-6)	1.69(-50)	2.92(-401)	7.99957
P-1 (1.67)	2.92(-7)	1.02(-55)	2.16(-443)	8.00041
P-2 (1.68)	1.11(-9)	3.67(-75)	5.05(-599)	8.00025

TABELA 3.1 $f(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha = -1$, $x_0 = -0.7$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	\bar{r} (1.17)
3.7) \wedge (1.51)	3.29(-7)	2.92(-60)	1.12(-484)	8.00003
(3.7) \wedge (1.53)	1.80(-6)	7.10(-54)	4.16(-433)	8.00000
(3.7) \wedge (1.52)	5.24(-6)	7.52(-50)	1.35(-400)	8.00002
(3.7) \wedge (1.59)	3.30(-6)	1.33(-51)	9.29(-415)	7.99997
(3.7) \wedge (1.60)	8.20(-8)	1.74(-65)	7.06(-527)	8.00001
KT1 (1.65)	4.27(-6)	2.04(-50)	5.63(-405)	7.99984
KT2 (1.66)	4.39(-6)	2.62(-50)	4.29(-404)	7.99983
BWR1 (1.70)	9.18(-8)	9.85(-65)	1.73(-520)	8.00000
BWR2 (1.70)	4.72(-6)	2.51(-50)	1.63(-404)	7.99985
P-1 (1.67)	6.85(-7)	2.34(-57)	4.39(-461)	7.99999
P-2 (1.68)	2.58(-6)	2.18(-52)	5.66(-421)	7.99999

TABELA 3.2 $f(x) = \ln(x^2 + x + 2) - x + 1$, $\alpha = 4.1525907367 \dots$, $x_0 = 3$

3.2 Dvoparametarska familija

U radu [20] definisana je opšta familija trokoračnih optimalnih metoda, koju ćemo ovde predstaviti. Krenimo od trokoračne šeme

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \\ z = y - \frac{f(y)}{f'(y)}, \\ \hat{x} = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \end{cases} \quad (3.9)$$

koja je, ustvari, trostruka uzastopna primena Njutnovog metoda i ne može se smatrati pravim višekoračnim metodom u Traubovom smislu. Prema Traubovoj teoremi (1.3), ovaj metod ima red konvergencije $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, ali zahteva šest funkcijskih izračunavanja po iteraciji. Indeks efikasnosti takvog metoda iznosi $E(3.9) = 8^{1/6} = 2^{1/2}$ što je, očekivano, jednako indeksu efikasnosti Njutnovog metoda. Da bismo poboljšali efikasnost metoda (3.9), modifikovaćemo iterativnu šemu tako da smanjimo broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji i pritom zadržimo red osam.

Naš pristup zasniva se na zameni izvoda $f'(y)$ i $f'(z)$ u drugom i trećem koraku šeme (3.9) koristeći aproksimacije

$$f'(y) \approx \frac{f'(x)}{p(t)}, \quad f'(z) \approx \frac{f'(x)}{q(t, s)}.$$

Ovde su argumenti težinskih funkcija p i q dati pomoću

$$t = \frac{f(y)}{f(x)}, \quad s = \frac{f(z)}{f(y)},$$

a p i q su neke funkcije od jedne i dve promenljive, redom. Primetimo da veličine t i s ne zahtevaju nova funkcijska izračunavanja što je povoljnost sa aspekta računске i informacijske efikasnosti.

Određićemo uslove koje treba da ispunjavaju funkcije p i q da bi sledeća iterativna šema bila optimalna:

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \\ z = y - p(t) \frac{f(y)}{f'(x)}, \\ \hat{x} = z - q(t, s) \frac{f(z)}{f'(x)}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Tejlorovi razvoji funkcije $p(t)$ u okolini 0 i funkcije $q(t, s)$ u okolini (0,0) glase,

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 + 2t + \frac{p''(0)}{2!}t^2 + \frac{p'''(0)}{3!}t^3 + \frac{p^{iv}(0)}{4!}t^4 + \dots, \\ q(s, t) &= q(0, 0) + q_t(0, 0)t + q_s(0, 0)s \\ &\quad + \frac{1}{2!}[q_{tt}(0, 0)t^2 + 2q_{ts}(0, 0)ts + q_{ss}(0, 0)s^2] \\ &\quad + \frac{1}{3!}[q_{ttt}(0, 0)t^3 + 3q_{tts}(0, 0)t^2s + 3q_{tss}(0, 0)ts^2 + q_{sss}(0, 0)s^3] + \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Indeksi označavaju odgovarajući parcijalni izvod, tj.

$$\underbrace{q}_{k} \dots \underbrace{t s \dots s}_{l}(0, 0) = \left. \frac{\partial^{(k+l)} q(t, s)}{\partial t^k \partial s^l} \right|_{(t, s) = (0, 0)}.$$

Metod neodređenih koeficijenata se pokazao kao zgodan način za određivanje potrebnih koeficijenata Tejlorovih razvoja. Kako ovi razvoji daju vrlo komplikovane izraze po $\varepsilon = x - \alpha$, iskoristili smo simboličko izračunavanje u programskom paketu *Mathematica* i interaktivni pristup objašnjen komentarima **C1–C5** datim u nastavku. Naglašavamo da se svi izrazi mogu jednostavno prikazati koristeći dati program.

Za potrebe programa realizovanog u programskom paketu *Mathematica*, korišćićemo skraćenice

$$\begin{aligned} ck &= f^{(k)}(\alpha)/(k!f'(\alpha)), \quad e = x - \alpha, \quad e1 = \hat{\varepsilon} - \alpha. \\ fx &= f(x), \quad fy = f(y), \quad fz = f(z), \quad f1x = f'(x), \quad f1a = f'(\alpha), \\ p2 &= p''(0), \quad p3 = p'''(0), \quad p4 = p^{iv}(0), \\ q0 &= q(0,0), \quad \underbrace{qt \dots ts}_{k} \dots \underbrace{s}_{l} = \underbrace{qt \dots ts}_{k} \dots \underbrace{s}_{l}(0,0). \end{aligned}$$

Program

```
fx=f1a(e+c2*e^2+c3*e^3+c4*e^4+c5*e^5+c6*e^6+c7*e^7+c8*e^8);
f1x=D[fx,e]; u=Series[fx/f1x,{e,0,8}]; ey=e-u;
fy=f1a(ey+c2*ey^2+c3*ey^3+c4*ey^4);
t=Series[fy/fx,{e,0,8}]; f1y=f1x/(1+2t+p2*t^2/2+p3*t^3/6+p4*t^4/24);
ez=Series[ey-fy/f1y,{e,0,8}]; fz=f1a(ez+c2*ez^2);
s=Series[fz/fy,{e,0,8}];
f1z=f1x/(q0+qt*t+qs*s+qtt*t^2/2+qts*t*s+qss*s^2/2
+1/6(qttt*t^3+3qtts*t^2*s+3qtss*t*s^2+qsss*s^3)+qtddd*t^4/24);
e1=Series[ez-fz/f1z,{e,0,8}]; a4=Coefficient[e1,e,4]//Simplify
```

$$\text{C1: } \boxed{\text{Out[a4]} = \frac{1}{2}c2(2c3 + c2^2(p2 - 10))(q0 - 1)}$$

```
q0=1; a5=Coefficient[e1,e,5]//Simplify
```

$$\text{C2: } \boxed{\text{Out[a5]} = \frac{1}{2}c2^2(2c3 + c2^2(p2 - 10))(qt - 2)}$$

```
qt=2; a6=Coefficient[e1,e,6]//Simplify
```

$$\text{C3: } \boxed{\text{Out[a6]} = -\frac{1}{4}c2(2c3 + c2^2(p2 - 10))(2c3(qs - 1) + c2^2(12 - qtt + (p2 - 10)qs))}$$

`qs=1; qtt=2+p2`; a7=Coefficient[e1,e,7]//Simplify

$$\text{C4: } \text{Out [a7]} = -\frac{1}{12}c^2(2c^3 + c^2(p_2 - 10)) \\ (c^2(96 + p_3 - q_{ttt} - 30q_{ts} + 3p_2(q_{ts} - 2)) + 6c^3(q_{ts} - 4))$$

`qts=4; qttt=6p2+p3-24`; a8=Coefficient[e1,e,8]//Simplify

$$\text{C5: } \text{Out [a8]} = \frac{1}{48}c^2(2c^3 + c^2(p_2 - 10))(12c^3(q_{ss} - 2) - 24c^2c_4 \\ + c^2^4(q_{ttt} - 8p_3 - p_4 + 60(q_{tts} + 5q_{ss} - 18)) + 3p_2(36 - 2q_{tts} + (p_2 - 20)q_{ss}) \\ + 12c^2c_3(38 - 10q_{ss} - q_{tts} + p_2(q_{ss} - 1)))$$

Iz izraza za grešku $e_1 = \hat{\varepsilon} = \hat{x} - \alpha = \varphi(x) - \alpha$ vidimo da je $\hat{\varepsilon}$ oblika

$$\hat{\varepsilon} = \varphi(x) - \alpha = a_4\varepsilon^4 + a_5\varepsilon^5 + a_6\varepsilon^6 + a_7\varepsilon^7 + a_8\varepsilon^8 + O(\varepsilon^9). \quad (3.13)$$

Trokoračni iterativni metod $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ imaće red konvergencije jednak osam ukoliko odredimo koeficijente u razvojjima (3.11) i (3.12) tako da se a_4 , a_5 , a_6 i a_7 (u (3.13)) anuliraju. Traženi koeficijenti dobijaju se izjednačavanjem sa nulom izraza u zasenčenim delovima formula.

Komentar C1: Najpre, da bismo anulirali koeficijent a_4 , iz `Out [a4]` dobijamo $q_0 - 1 = 0$ (dato u zasenčenom pravougaoniku) tako da biramo $q_0 = 1$.

Komentar C2: Izlaz `Out [a5]` daje jednačinu $qt - 2 = 0$, te izbor $qt = 2$ uklanja a_5 .

Nastavljamo na sličan način i na osnovu **C3–C5** određujemo preostale koeficijente razvoja (3.11) i (3.12):

$$q_0 = 1, \quad qt = 2, \quad qs = 1, \quad qts = 4, \quad qtt = 2 + p_2, \quad qttt = 6p_2 + p_3 - 24, \\ p_2, p_3, \dots, q_{ss}, q_{tts} \dots \text{ proizvoljni.}$$

Napomena 3.2 U radu [20] kod relacija **C4** napravljen je izbor $p_3 = 0$ i $q_{ttt} = 0$ da bi se eliminisao član t^3 u (3.11) i (3.12), zbog jednostavnosti. Članovi s^2 , ts^2 i s^3 i tako su visokog reda i nemaju uticaj na red konvergencije (ne veći od 8).

Na ovaj način dokazali smo tvrđenje.

Teorema 3.2 *Ako su p i q proizvoljne realne funkcije sa Tejlorovim razvojjima oblika*

$$p(t) = 1 + 2t + \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + \dots, \quad (3.14)$$

$$q(t, s) = 1 + 2t + s + \frac{2+a}{2}t^2 + 4ts + \frac{c}{2}s^2 + \frac{6a+b-24}{6}t^3 + \dots, \quad (3.15)$$

tada familija trokoračnih metoda (3.10) ima red konvergencije osam. Podrazumeva se da članovi višeg reda u (3.14) i (3.15), koji slede posle navedenih, mogu uzeti proizvoljne vrednosti.

Napomena 3.3 Veličine t i s u iterativnom metodu (3.10) računaju se na osnovu već poznatih vrednosti funkcije $f(x)$, $f(y)$ i $f(z)$. Tako je ukupan broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji metoda (3.10) jednak četiri. Na osnovu toga i Teoreme 3.2, zaključujemo da iterativni metod (3.10) jeste *optimalan* u smislu Kunga i Trauba i ima indeks efikasnosti $E(3.10) = 8^{1/4} \approx 1.682$.

Funkcije p i q u (3.10) mogu uzeti mnogo različitih oblika koji zadovoljavaju uslove (3.14) i (3.15). U praksi, funkcije p i q se biraju da budu što jednostavnije, na primer, racionalne funkcije kao što su sledeće:

$$p(t) = \frac{1 + (2 - \beta)t(1 + t)}{1 - \beta t(1 - t)}, \quad (3.16)$$

$$q(t, s) = \frac{2 + (6 + \gamma_1)t^2 + 2(s + \gamma_2) + t(4 + 2\gamma_1 + \gamma_3s)}{2 + 2\gamma_1t - 3\gamma_1t^2 + \gamma_2s + (-8 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3)ts}, \quad (3.17)$$

gde su β , γ_1 , γ_2 , γ_3 proizvoljne konstante. Predlažemo sledeće konkretne oblike:

$$p_1(t) = 1 + 2t + 2t^2, \quad p_2(t) = \frac{1}{1 - 2t + 2t^2}, \quad p_3(t) = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2}, \quad (3.18)$$

$$q_1(t, s) = 1 + 2t + s + 3t^2 + 4ts, \quad q_2(t, s) = \left(2t + \frac{5}{4}s + \frac{1}{1 + t + \frac{3}{4}s}\right)^2, \quad (3.19)$$

$$q_3(t, s) = \frac{1}{1 - 2t + t^2 + 4t^3 - s}, \quad q_4(t, s) = \frac{1 - 4t + s}{(1 - 3t)^2 + 2ts}. \quad (3.20)$$

Sve funkcije osim q_2 i q_3 slede iz (3.16) i (3.17).

Familija trokoračnih metoda (3.10) testirana je na brojnim nelinearnim jednačinama. Programski paket *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti (500 značajnih cifara) je korišćen da obezbedi veliku preciznost dobijenih rezultata. Nova familija (3.10) poređena je sa nekoliko postojećih trokoračnih metoda (navedenih u nastavku) koji imaju isti red konvergencije (osam) i takođe koriste četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji.

Poređenje sa metodima nižeg indeksa efikasnosti od $8^{1/4}$ nije potrebno jer takvi metodi očigledno nisu konkurentni. Zbog toga smo poredili metode sa istim indeksom efikasnosti $E = 8^{1/4}$. Napomenimo da trokoračni metodi, izabrani za testiranje, su samo predstavnici klase optimalnih metoda reda osam; ostali metodi iz klase Ψ_8 daju aproksimacije približno iste tačnosti.

- 1) *Kung-Traubov trokoračni metod* (1.65) - verzija bez izvoda **KT1**
- 2) *Kung-Traubov trokoračni metod* (1.66) - verzija sa izvodima **KT2**

- 3) **Trokoračni metodi Bi, Vu i Rena** (1.70) - Testirali smo dva metoda koja pripadaju familiji (1.70), dobijena izborom dva konkretna oblika funkcije h kao što je urađeno u radu [4] (videti (1.70) I) i II) - **BWR1** i **BWR2**.
- 4) **Trokoračni metodi Vanga i Liua** (1.73) **WL** - Optimalna familija iterativnih metoda reda osam predložena u radu [92] daje veliki broj partikularnih metoda među kojima smo odabrali (1.73). Primetimo da prva dva koraka čine dvokoračni metod Ostrovskog (1.51).
- 5) Svi gore navedeni metodi, osim KT1, predstavljaju podfamilije ili partikularne metode familije (3.10), ali nisu svi i partikularni slučajevi restrikovane familije iz rada [20]. Tako je i familija, u nastavku označena sa **OF** [19],

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)\phi(t_k)\psi(s_k)\omega(w_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, \quad s_k = \frac{f(z_k)}{f(y_k)}, \quad w_k = \frac{f(z_k)}{f(x_k)}, \end{cases} \quad (3.21)$$

sa uslovima za optimalan red konvergencije

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1, & \phi'(0) &= 2, & \phi''(0) &= -2, & \phi'''(0) &= 0, \\ \psi(0) &= 1, & \psi'(0) &= -1, & |\psi''(0)| &< \infty, \\ \omega(0) &= 1, & \omega'(0) &= -2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

specijalan slučaj (3.10). Specijalno, testiran metod iz familije **OF** (3.21) je dobijen za izbor funkcija

$$\phi(t) = 1 - 2t - t^2 - 5t^4, \quad \psi(s) = 1 - s + s^2, \quad \omega(w) = 1/(1+w)^2$$

Pored gore navedenih metoda testirali smo i različite metode nove familije (3.10) birajući razne kombinacije parametarskih funkcija p_i i q_j datih u (3.18). Od mnogih izvedenih numeričkih eksperimenata odabrali smo dva za demonstraciju.

Primenili smo devet konkretnih metoda iz predložene familije (3.10) kombinujući parametarske funkcije p_i i q_j date u (3.18), kao i trokoračne metode 1)–5) na funkcije

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1, \\ f_2(x) &= x^2 - (1-x)^{25} \end{aligned}$$

Za određivanje nule $\alpha = -1$ funkcije f_1 koristili smo početnu aproksimaciju $x_0 = -0.3$. Apsolutne greške $|x_k - \alpha|$ u prve tri iteracije date su u Tabeli 3.3. Za određivanje nule $\alpha = 0.1437392592\dots$ funkcije f_2 vrednost $x_0 = 0.4$ je korišćena kao početna aproksimacija. Apsolutne vrednosti grešaka $|x_k - \alpha|$ u prve tri iteracije date su u Tabeli 3.4.

Kao što se i očekivalo, brzina testiranih metoda je izuzetna, videti Tabele 3.3 i 3.4. Nakon mnogih izvršenih testova nismo mogli da pronađemo metod koji bi asimptotski bio najbolji za sve testirane nelinearne jednačine. Računski red konvergencije, računat po formuli (1.18), bio je veoma blizu 8 (do na treću decimalu) za testirane metode u svim testiranim primerima. Predložena familija (3.10) daje trokoračne metode koji su konkurentni sa postojećim optimalnim trokoračnim metodima.

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
(3.10) p_{1-q_1}	6.32(-5)	2.97(-37)	7.00(-296)
(3.10) p_{1-q_2}	2.64(-5)	2.37(-39)	9.94(-312)
(3.10) p_{1-q_3}	2.18(-4)	8.63(-33)	5.27(-260)
(3.10) p_{2-q_1}	4.92(-5)	4.61(-38)	2.70(-302)
(3.10) p_{2-q_2}	4.39(-5)	1.40(-37)	1.51(-297)
(3.10) p_{2-q_3}	2.42(-4)	2.24(-32)	1.18(-256)
(3.10) p_{3-q_1}	5.72(-5)	1.43(-37)	2.22(-298)
(3.10) p_{3-q_2}	3.39(-5)	1.77(-38)	9.74(-305)
(3.10) p_{3-q_3}	2.28(-4)	1.32(-32)	1.71(-258)
OF (3.21)	8.98(-5)	2.30(-35)	4.24(-280)
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	1.32(-4)	4.97(-34)	2.06(-269)
KT2 (1.66)	1.11(-4)	9.99(-35)	4.34(-275)
BWR1 (1.70)I)	6.26(-5)	7.19(-37)	2.19(-292)
BWR2(1.70)II)	1.87(-4)	6.46(-33)	1.30(-260)
WL (1.73), $a = 0$	7.16(-5)	3.47(-36)	1.06(-286)

TABELA 3.3 $f(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha = -1$, $x_0 = -0.3$.

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
(3.10) p_{1-q_1}	1.12(-3)	1.06(-16)	7.19(-121)
(3.10) p_{1-q_2}	5.00(-3)	5.71(-12)	2.48(-83)
(3.10) p_{1-q_3}	1.03(-3)	8.21(-18)	1.36(-130)
(3.10) p_{2-q_1}	1.70(-3)	1.55(-15)	7.99(-112)
(3.10) p_{2-q_2}	4.94(-3)	1.33(-12)	1.41(-89)
(3.10) p_{2-q_3}	1.11(-3)	6.16(-17)	5.64(-123)
(3.10) p_{3-q_1}	1.36(-3)	3.79(-16)	1.48(-116)
(3.10) p_{3-q_2}	4.98(-3)	1.89(-12)	1.92(-87)
(3.10) p_{3-q_3}	1.06(-3)	2.72(-17)	5.10(-126)
OF (3.21)	6.22(-3)	7.08(-12)	2.67(-83)
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	3.98(-3)	3.44(-14)	6.30(-103)
KT2 (1.66)	3.92(-3)	2.90(-14)	1.54(-103)
BWR1(1.70) I)	8.94(-3)	7.78(-10)	2.11(-66)
BWR2 (1.70) II)	4.80(-4)	2.59(-19)	1.95(-141)
WL (1.73), $a = 0$	1.59(-2)	1.52(-9)	3.71(-65)

TABELA 3.4 $f(x) = x^2 - (1-x)^{25}$, $\alpha = 0.14373925929975369826\dots$, $x_0 = 0.4$.

3.3 Familija trotačkastih metoda bez i sa memorijom

U ovom odeljku razmatraćemo familiju trotačkastih metoda predloženu u radu [21]. Nova familija reda osam koristi četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji, što znači da podržava Kung-Traubovu hipotezu. Osim toga, nova familija metoda ne zahteva izračunavanje izvoda funkcije f što je u mnogim praktičnim situacijama poželjno izbeći.

Imajući u vidu da su višekoračni metodi višeg reda konvergencije već predloženi u više radova, videti, na primer, [3], [4], [14], [15], [29]–[31], [43], [47], [85], [92], [93] i opšte familije [44] i [98], predložena familija trokoračnih metoda može se posmatrati kao doprinos razmatranoj oblasti, ali bez posebnih prednosti. Tako je naš osnovni cilj bio da, koristeći ovu optimalnu familiju bez memorije kao osnovu, konstruišemo vrlo brze trotačkaste metode sa memorijom velike računске efikasnosti. Polazeći od jedne stare Traubove ideje [88], ponovo upotrebijene u radu [72] i znatno unapređene u radovima [68] i [66], postigli smo veliko poboljšanje efikasnosti i konstruisali odgovarajuću familiju trokoračnih metoda sa memorijom. Pokazaćemo da je red konvergencije nove familije značajno povećan variranjem vrednosti slobodnog parametra u svakom iterativnom koraku, bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Ovo znači da predloženi metodi sa memorijom poseduju veoma visoku računsku efikasnost, što je glavna prednost ovih metoda u poređenju sa postojećim višekoračnim metodima.

3.3.1 Trokoračni metodi bez izvoda

Neka je α prosta realna nula realne funkcije $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i neka je x_0 početna aproksimacija nule α . Uvodimo oznake

$$\varepsilon = x - \alpha, \quad c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)} \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Polazimo od familije dvokoračnih metoda bez izvoda (2.5), izostavljajući indeks iteracije

$$\begin{cases} y = x - \frac{f(x)}{f[x, w]}, & w = x - \gamma f(x), \\ \hat{x} = y - h(t, s) \frac{f(y)}{f[x, w]}, \end{cases} \quad (3.23)$$

gde su $t = \frac{f(y)}{f(x)}$, $s = \frac{f(y)}{f(w)}$ i h je funkcija od dve promenljive koja zadovoljava uslove

$$\begin{aligned} h(0, 0) &= h_t(0, 0) = h_s(0, 0) = 1, \\ h_{ss}(0, 0) &= 2, \quad |h_{tt}(0, 0)| < \infty, \quad |h_{ts}(0, 0)| < \infty. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Indeksi označavaju odgovarajuće parcijalne izvode funkcije h .

Ako je x_0 dovoljno bliska početna vrednost nuli α funkcije f , familija dvokoračnih metoda (3.23) ima red konvergencije četiri (videti odeljak 2.3) i relaciju greške

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= x_{k+1} - \alpha \\ &= \frac{1}{2}c_2(1-\gamma f'(\alpha))^2(c_2^2(8-h_{tt}(0,0)-2h_{ts}(0,0)+\gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0)-2))-2c_3)\varepsilon_k^4 \\ &\quad +O(\varepsilon_k^5). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nadalje, razmatraćemo funkcije $h = h(t, s)$ koje zadovoljavaju uslove (3.24) bez posebnog naglašavanja. Nekoliko jednostavnih oblika funkcije h dato je u odeljku 2.1:

- 1) $h(t, s) = \frac{1+t}{1-s}$;
- 2) $h(t, s) = \frac{1}{(1-t)(1-s)}$;
- 3) $h(t, s) = 1+t+s+s^2$;
- 4) $h(t, s) = 1+t+s+(t+s)^2$;
- 5) $h(t, s) = t + \frac{1}{1-s}$.

Primitimo da funkcija $h(t, s) = \frac{1}{(1-t)(1-s)}$ daje Kung-Traubov metod (1.57).

Sada ćemo dati konstrukciju familije trokoračnih metoda koja se zasniva na dvokoračnoj familiji (3.23).

Polazimo od trokoračne šeme gde su prva dva koraka data sa (3.23), a treći korak je Njutnov metod, tj.,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \\ z_k = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \end{cases} \quad (3.26)$$

gde je, kao i u poglavlju 2, $w_k = x_k - \gamma f(x_k)$. Iterativna šema (3.26) je neefikasna budući da zahteva pet funkcijskih izračunavanja. Iz tog razloga, izvod $f'(z_k)$ u trećem koraku (3.26) zamenjujemo pogodnom aproksimacijom na takav način da

- 1) koristimo isključivo postojeće podatke,
- 2) izvodi nisu uključeni i
- 3) red konvergencije nove iterativne trokoračne šeme je najmanje osam uz četiri funkcijska izračunavanja.

Da bismo ispunili ove zahteve, primenjujemo Njutnov interpolacioni polinom stepena tri sa čvorovima $w_k = x_k - \gamma f(x_k)$, x_k , y_k i z_k , dakle,

$$N_3(\tau) = f(z_k) + f[z_k, y_k](\tau - z_k) + f[z_k, y_k, x_k](\tau - z_k)(\tau - y_k) + f[z_k, y_k, x_k, w_k](\tau - z_k)(\tau - y_k)(\tau - x_k). \quad (3.27)$$

Očigledno važi $N_3(z_k) = f(z_k)$. Diferenciranjem (3.27) u tački $\tau = z_k$, dobijamo

$$N'_3(z_k) = f[z_k, y_k] + f[z_k, y_k, x_k](z_k - y_k) + f[z_k, y_k, x_k, w_k](z_k - y_k)(z_k - x_k). \quad (3.28)$$

Uzimajući $f'(z_k) \approx N'_3(z_k)$ u (3.26), konstruišemo novu familiju trokoračnih metoda bez izvoda,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \\ z_k = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad (k = 0, 1, \dots) \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{N'_3(z_k)}, \end{cases} \quad (3.29)$$

gde je h težinska funkcija od dve promenljive koja zadovoljava uslove (3.24). N'_3 dato je izrazom (3.28) i može se jednostavno izračunati prema sledećem algoritmu u pet koraka:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad R_1 &= f[z, y] = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}; \\ 2^\circ \quad R_2 &= f[y, x] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; \\ 3^\circ \quad R_3 &= f[x, w] = \frac{f(x) - f(w)}{x - w}; \\ 4^\circ \quad R_4 &= f[z, y, x] = \frac{R_2 - R_1}{x - z}; \\ 5^\circ \quad N'_3(z) &= R_1 + R_4(z - y) + \left(\frac{R_3 - R_2}{w - y} - R_4 \right) \frac{(z - y)(z - x)}{w - z}. \end{aligned}$$

Sledi teorema o konvergenciji familije trotačkastih metoda (3.29).

Teorema 3.3 *Ukoliko je početna aproksimacija x_0 dovoljno bliska nuli α funkcije f i težinska funkcija h zadovoljava uslove (3.24), tada red konvergencije familije trokoračnih metoda (3.29) iznosi osam.*

Dokaz. Neka je N_m Njutnov interpolacioni polinom stepena m koji interpolira funkciju f u $m + 1$ različitih čvorova $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ sadržanih u intervalu I_f i neka je izvod $f^{(m+1)}$ neprekidan u I_f . Tada je greška Njutnove interpolacije data formulom (1.11)

$$f(\tau) - N_m(\tau) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{j=0}^m (\tau - \tau_j) \quad (\xi \in I_f). \quad (3.30)$$

Za $m = 3$ na osnovu (3.30) dobijamo

$$f(\tau) - N_3(\tau) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\tau - w_k)(\tau - x_k)(\tau - y_k)(\tau - z_k),$$

uzimajući $\tau_0 = w_k$, $\tau_1 = x_k$, $\tau_2 = y_k$, $\tau_3 = z_k$. Prema tome

$$f'(z_k) - N'_3(z_k) = \left[f'(\tau) - N'_3(\tau) \right]_{\tau=z_k} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(z_k - w_k)(z_k - x_k)(z_k - y_k). \quad (3.31)$$

Greške aproksimacija iz prva dva koraka (3.29) date su sa

$$\varepsilon_{k,y} := y_k - \alpha = c_2(1 - \gamma f'(\alpha))\varepsilon_k^2 + O(\varepsilon_k^3) \quad (\text{videti (2.17)}), \quad (3.32)$$

i

$$\varepsilon_{k,z} := z_k - \alpha = A_4(\alpha)\varepsilon_k^4 + O(\varepsilon_k^5) \quad (\text{videti (3.25)}), \quad (3.33)$$

gde je A_4 asimptotska konstanta greške familije reda četiri (3.23) data sa

$$A_4(\alpha) = \frac{1}{2}c_2(1 - \gamma f'(\alpha))^2(c_2^2(8 - h_{tt}(0,0) - 2h_{ts}(0,0) + \gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0) - 2)) - 2c_3)$$

za fiksiranu konstantu $\gamma (\neq f'(\alpha))$. Iz (3.32) i (3.33) nalazimo

$$z_k - w_k = O(\varepsilon_k), \quad z_k - x_k = O(\varepsilon_k), \quad z_k - y_k = O(\varepsilon_k^2). \quad (3.34)$$

Zamenjujući ocene razlika grešaka (3.34) u (3.31), dobijamo

$$f'(z_k) - N'_3(z_k) = O(\varepsilon_k^4).$$

Prema tome

$$N'_3(z_k) = f'(z_k)(1 + O(\varepsilon_k^4)). \quad (3.35)$$

Koristeći (3.35) u trećem koraku iterativne šeme (3.29), imamo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{N'_3(z_k)} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)(1 + O(\varepsilon_k^4))} \\ &= z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} + f(z_k)O(\varepsilon_k^4). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Za Njutnov metod važi

$$z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} - \alpha = c_2(z_k - \alpha)^2 + O((z_k - \alpha)^3) = c_2\varepsilon_{k,z}^2 + O(\varepsilon_{k,z}^3). \quad (3.37)$$

Primetimo da je

$$f(z_k) = (z_k - \alpha)g(z_k) = \varepsilon_{k,z}g(z_k), \quad g(\alpha) \neq 0. \quad (3.38)$$

Uzimajući u obzir (3.37) i (3.38), na osnovu (3.36) važi

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = c_2\varepsilon_{k,z}^2 + O(\varepsilon_{k,z}^3) + \varepsilon_{k,z}g(z_k)O(\varepsilon_k^4) = O(\varepsilon_k^8),$$

s obzirom da je $\varepsilon_{k,z} = O(\varepsilon_k^4)$. Iz poslednje relacije greške zaključujemo da je red konvergencije familije (3.29) osam, čime završavamo dokaz teoreme. \square

Napomena 3.4 Dokaz prethodne teoreme može biti izveden i uz pomoć Tejlorovog razvoja i simboličkog računa u programskom paketu (npr., *Mathematica* ili *Maple*). Na ovaj način dolazimo do relacije greške

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= \frac{1}{4}c_2^2(1 - \gamma f'(\alpha))^4 \left[-2c_3 + c_2^2(8 + \gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0) - 2) - h_{tt}(0,0) - 2h_{ts}(0,0)) \right. \\ &\quad \times (2c_4 - 2c_2c_3 + c_2^3(8 + \gamma f'(\alpha)(h_{tt}(0,0) - 2) - h_{tt}(0,0) - 2h_{ts}(0,0))) \left. \right] \varepsilon_k^8 \\ &\quad + O(\varepsilon_k^9). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Relacije greške trokoračnih metoda (3.29) za partikularne slučajeve 1)–5) oblika funkcije h , gore navedenih, mogu biti dobijene iz relacije (3.39). Odgovarajući izrazi su navedeni u nastavku:

$$\begin{aligned} h(t, s) &= 1 + t + s + s^2 \quad \text{i} \quad h(t, s) = t + 1/(1 - s), \\ \varepsilon_{k+1} &= (1 - \gamma f'(\alpha))^4 c_2^2 \left[c_3 + c_2^2(\gamma f'(\alpha) - 4)(c_2c_3 - c_4 + c_2^3(\gamma f'(\alpha) - 4)) \right] \varepsilon_k^8 + O(\varepsilon_k^9). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t, s) &= (1 + t)/(1 - s), \\ \varepsilon_{k+1} &= (1 - \gamma f'(\alpha))^4 c_2^2 \left[c_3 + c_2^2(\gamma f'(\alpha) - 3)(c_2c_3 - c_4 + c_2^3(\gamma f'(\alpha) - 3)) \right] \varepsilon_k^8 + O(\varepsilon_k^9). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t, s) &= 1/((1 - t)(1 - s)), \\ \varepsilon_{k+1} &= (1 - \gamma f'(\alpha))^4 c_2^2 (2c_2^2 - c_3)(2c_2^3 - c_2c_3 + c_4) \varepsilon_k^8 + O(\varepsilon_k^9). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t, s) &= 1 + t + s + (t + s)^2, \\ \varepsilon_{k+1} &= (1 - \gamma f'(\alpha))^4 c_2^2 (c_2^2 - c_3)(c_2^3 - c_2c_3 + c_4) \varepsilon_k^8 + O(\varepsilon_k^9). \end{aligned}$$

3.3.2 Nove familije trokoračnih metoda sa memorijom

Na osnovu relacije greške (3.39) možemo zaključiti da je red konvergencije familije (3.29) jednak osam kada je $\gamma \neq 1/f'(\alpha)$. Kada bismo postigli $\gamma = 1/f'(\alpha)$, može se dokazati da bi red konvergencije familije (3.29) bio 12, međutim, vrednost $f'(\alpha)$ u praksi nije poznata. Umesto tačne vrednosti $f'(\alpha)$, možemo koristiti aproksimaciju $\tilde{f}'(\alpha) \approx f'(\alpha)$, izračunatu na osnovu postojećih informacija. Tada, uzimajući $\gamma = 1/\tilde{f}'(\alpha)$ u (3.29), možemo postići da red konvergencije modifikovanih metoda bude veći od 8, bez korišćenja novih funkcijskih izračunavanja. Videćemo kasnije da se $\tilde{f}'(\alpha)$ računa na osnovu informacija iz prethodne i tekuće iteracije, drugim rečima, $\tilde{f}'(\alpha)$ zavisi od iterativnog indeksa k .

U ovom odeljku posmatraćemo sledeća četiri metoda za aproksimaciju $f'(\alpha)$:

- (I) $\tilde{f}'(\alpha) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ (osnovni metod sečice).
- (II) $\tilde{f}'(\alpha) = \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{x_k - y_{k-1}}$ (poboljšani metod sečice).
- (III) $\tilde{f}'(\alpha) = \frac{f(x_k) - f(z_{k-1})}{x_k - z_{k-1}}$ (najbolji metod sečice).
- (IV) $\tilde{f}'(\alpha) = N_2'(x_k)$ (Njutnov interpolacioni metod).

$N_2(\tau) = N_2(\tau; x_k, z_{k-1}, y_{k-1})$ je Njutnov interpolacioni polinom stepena dva, postavljen kroz tri najbolje dostupne aproksimacije (čvorove) x_k , z_{k-1} i y_{k-1} .

Formula $\gamma_k = 1/\tilde{f}'(\alpha)$ za $k = 1, 2, \dots$ za izračunavanje parametra $\gamma = \gamma_k$ u toku svakog iterativnog ciklusa predstavlja glavnu ideju pri konstrukciji metoda sa memorijom. Podrazumeva se da početnu ocenu γ_0 treba izabrati pre početka iterativnog procesa, na primer, korišćenjem nekog od načina predloženih u [88, str. 186]. Na osnovu metoda (I)–(IV), dajemo sledeće četiri formule za računanje *samokorigujućeg* parametra γ_k :

$$\gamma_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (\text{metod (I)}), \quad (3.40)$$

$$\gamma_k = \frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})} \quad (\text{metod (II)}), \quad (3.41)$$

$$\gamma_k = \frac{x_k - z_{k-1}}{f(x_k) - f(z_{k-1})} \quad (\text{metod (III)}), \quad (3.42)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{N_2'(x_k)} \quad (\text{metod (IV)}), \quad (3.43)$$

gde je,

$$\begin{aligned} N_2'(x_k) &= \left[\frac{d}{d\tau} N_2(\tau) \right]_{\tau=x_k} \\ &= f[x_k, z_{k-1}] + f[x_k, z_{k-1}, y_{k-1}](x_k - z_{k-1}) \\ &= f[x_k, z_{k-1}] + f[x_k, y_{k-1}] - f[z_{k-1}, y_{k-1}]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

S obzirom da se γ_k računa tokom iterativnog procesa koristeći (I)–(IV), zamenu γ_k umesto γ u (3.29), konstruišemo sledeću familiju trokoračnih metoda sa memorijom koja ne koristi izvode

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, & w_k = x_k - \gamma_k f(x_k), \\ z_k = y_k - h(t_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, & (k = 0, 1, \dots), \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{N_3'(z_k)}, \end{cases} \quad (3.45)$$

gde je h težinska funkcija od dve promenljive koja zadovoljava uslove (3.24). Koristimo termin *metod sa memorijom* sledeći Traubovu klasifikaciju [88, str. 8] kao i činjenicu da se izračunavanje parametra γ_k vrši na osnovu podataka dostupnih iz trenutne i prethodne iteracije. Ubrzani metodi dobijeni uz pomoć varijabilnog parametra mogu se još i zvati *samo-ubrjavajući metodi*.

3.3.3 Teorema o konvergenciji

Da bismo odredili brzinu konvergencije familije trokoračnih metoda sa memorijom (3.45), gde se γ_k računa prema jednoj od formula (3.40)–(3.43), koristićemo koncept R -reda konvergencije koji su predložili Ortega i Rajnbolt [58] i pozivaćemo se na Teoremu 1.4.

Teorema 3.4 *Neka se parametar γ_k u iterativnoj šemi (3.45) izračunava prema formuli (3.40)–(3.43). Ako je početna aproksimacija x_0 dovoljno blizu nule α funkcije f , tada R -red konvergencije trokoračnih metoda (3.45) \wedge (3.40), (3.45) \wedge (3.41), (3.45) \wedge (3.42) i (3.45) \wedge (3.43) sa memorijom je bar $2(2 + \sqrt{5}) \approx 8.47$, 9, 10 i 11, respektivno.*

Dokaz. Neka je $\{x_k\}$ niz aproksimacija generisan iterativnim metodom (IM). Ako ovaj niz konvergira ka nuli α funkcije f sa R -redom $O_R((IM), \alpha) \geq r$, pisaćemo

$$\varepsilon_{k+1} \sim D_{k,r} \varepsilon_k^r, \quad \varepsilon_k = x_k - \alpha, \quad (3.46)$$

gde $D_{k,r}$ teži asimptotskoj konstanti greške D_r metoda (IM) kada $k \rightarrow \infty$. Dakle,

$$\varepsilon_{k+1} \sim D_{k,r} (D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r)^r = D_{k,r} D_{k-1,r}^r \varepsilon_{k-1}^{r^2}. \quad (3.47)$$

Na osnovu relacija grešaka (3.32), (3.25) i (3.39) dobijamo odgovarajuće relacije grešaka za metode (3.45) sa memorijom, izostavljajući članove višeg reda

$$\varepsilon_{k,y} = y_k - \alpha \sim c_2 (1 - \gamma_k f'(\alpha)) \varepsilon_k^2, \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{k,z} = z_k - \alpha \sim a_{k,4} (1 - \gamma_k f'(\alpha))^2 \varepsilon_k^4, \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha \sim a_{k,8} (1 - \gamma_k f'(\alpha))^4 \varepsilon_k^8. \quad (3.50)$$

Izrazi za $a_{k,4}$ i $a_{k,8}$ su očigledni na osnovu (3.25) i (3.39) i zavise od iterativnog indeksa s obzirom da se γ_k izračunava u svakom iterativnom koraku.

Neka je $\varepsilon = x - \alpha$. Koristeći Tejlorov razvoj u okolini nule α , dobijamo

$$f(x) = f'(\alpha) \left(\varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^3 + c_4 \varepsilon^4 + \dots \right). \quad (3.51)$$

Ova relacija biće korišćena za različite vrednosti x . Odredićemo R -red konvergencije familije (3.45) za sve pristupe (3.40)–(3.43) primenjene za izračunavanje γ_k .

Metod (I), γ_k se izračunava na osnovu (3.40):

Koristeći (3.51) za $x = x_k$ i $x = x_{k-1}$, imamo

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} &= f'(\alpha) \frac{(\varepsilon_k + c_2\varepsilon_k^2 + c_3\varepsilon_k^3 + \dots) - (\varepsilon_{k-1} + c_2\varepsilon_{k-1}^2 + c_3\varepsilon_{k-1}^3 + \dots)}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}} \\ &= f'(\alpha)(1 + c_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) + c_3(\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^2) + \dots) \\ &= f'(\alpha)(1 + c_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) + O(\varepsilon_{k-1}^2)). \end{aligned}$$

Na osnovu ovog računamo γ_k pomoću (3.40) i dobijamo

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) = c_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) + O(\varepsilon_{k-1}^2) \sim c_2\varepsilon_{k-1}. \quad (3.52)$$

Zamena (3.52) u (3.50) daje

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_k, 8c_2^4\varepsilon_{k-1}^4\varepsilon_k^8. \quad (3.53)$$

Iz (3.53) zaključujemo da postoji konstanta η takva da važi nejednakost

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq \eta |\varepsilon_k|^8 |\varepsilon_{k-1}|^4. \quad (3.54)$$

Polazeći od (3.54) i imajući u vidu Teoremu 1.4 formiramo kvadratnu jednačinu

$$r^2 - 8r - 4 = 0.$$

Pozitivno rešenje $r^* = 2(2 + \sqrt{5}) \approx 8.47$ ove jednačine daje donju granicu R -reda konvergencije metoda (3.45) \wedge (3.40).

Metod (II), γ_k se izračunava prema (3.41):

Slično izvođenju (3.52), određujemo γ_k na osnovu poboljšanjog metoda sečice (3.41) i dobijamo

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) = c_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1,y}) + O(\varepsilon_{k-1,y}^2) \sim c_2\varepsilon_{k-1,y}. \quad (3.55)$$

Pretpostavimo da iterativni niz $\{y_k\}$ ima R -red p , tada, imajući u vidu (3.46),

$$\varepsilon_{k,y} \sim D_{k,p}\varepsilon_k^p \sim D_{k,p}(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^p = D_{k,p}D_{k-1,r}^p\varepsilon_{k-1}^{rp}. \quad (3.56)$$

Kombinujući (3.46), (3.48), (3.55) i (3.56), nalazimo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,y} &\sim c_2(1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k^2 \sim c_2(c_2\varepsilon_{k-1,y})\varepsilon_k^2 \\ &\sim c_2^2(D_{k-1,p}\varepsilon_{k-1}^p)(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^2 \\ &= c_2^2D_{k-1,p}D_{k-1,r}^2\varepsilon_{k-1}^{2r+p}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Na osnovu (3.46), (3.53) i (3.56) sledi

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1} &\sim a_{k,8}c_2^4\varepsilon_{k-1,y}^4\varepsilon_k^8 \sim a_{k,8}c_2^4(D_{k-1,p}\varepsilon_{k-1,y}^p)^4(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^8 \\ &= a_{k,8}c_2^4D_{k-1,p}^4D_{k-1,r}^8\varepsilon_{k-1}^{8r+4p}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Upoređujući eksponente ε_{k-1} na desnoj strani izraza (3.56) i (3.57), kao i na desnoj strani (3.47) i (3.58), formiramo sledeći sistem jednačina

$$\begin{cases} rp - 2r - p = 0, \\ r^2 - 8r - 4p = 0, \end{cases}$$

sa netrivialnim rešenjima $p = 9/4$ i $r = 9$. Zaključujemo da je R -red konvergencije metoda sa memorijom (3.45)^(3.41) ne manji od *devet*.

Metod (III), γ_k izračunavamo prema formuli (3.42):

Razmatrajući metod sečice (3.42) pretpostavimo da je iterativni niz $\{z_k\}$ R -reda s , tj.,

$$\varepsilon_{k,z} \sim D_{k,s}\varepsilon_k^s \sim D_{k,s}(D_{k-1,r}\varepsilon_{k-1}^r)^s = D_{k,s}D_{k-1,r}^{rs}\varepsilon_{k-1}^{rs}.\quad (3.59)$$

Nastavljajući na sličan način kao kod prethodnih metoda (I) i (II), krećemo od relacije (3.42) i dobijamo ocenu

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) = c_2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1,z}) + O(\varepsilon_{k-1,z}^2) \sim c_2\varepsilon_{k-1,z},$$

što daje relacije grešaka

$$\varepsilon_{k,z} \sim a_{k,4}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^2\varepsilon_k^4 \sim a_{k,4}c_2^2D_{k-1,s}^2D_{k-1,r}^4\varepsilon_{k-1}^{4r+2s}\quad (3.60)$$

i

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_{k,8}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^4\varepsilon_k^8 \sim a_{k,8}c_2^4D_{k-1,s}^4D_{k-1,r}^8\varepsilon_{k-1}^{8r+4s}.\quad (3.61)$$

Poredeći eksponente greške ε_{k-1} koji se javljaju u parovima relacija (3.59)^(3.60) i (3.47)^(3.61), dolazimo do sistema jednačina

$$\begin{cases} rs - 4r - 2s = 0, \\ r^2 - 8r - 4s = 0. \end{cases}$$

Kako je netrivialno rešenje ovog sistema dato sa $s = 5$ i $r = 10$, zaključujemo da je R -red metoda sa memorijom (3.45)^(3.42) ne manji od *deset*.

Metod (IV), γ_k određujemo prema (3.43):

Prema ranijim zaključcima iskazanim formulama (3.44) i (3.51) važi

$$\begin{aligned}
N'_2(x_k) &= f[x_k, y_{k-1}] + f[x_k, z_{k-1}] - f[z_{k-1}, y_{k-1}] \\
&= \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{x_k - y_{k-1}} + \frac{f(x_k) - f(z_{k-1})}{x_k - z_{k-1}} - \frac{f(z_{k-1}) - f(y_{k-1})}{z_{k-1} - y_{k-1}} \\
&= \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,y}} + \frac{f(x_k) - f(z_{k-1})}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,z}} - \frac{f(z_{k-1}) - f(y_{k-1})}{\varepsilon_{k-1,z} - \varepsilon_{k-1,y}} \\
&= f'(\alpha) \left[\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,y} + c_2(\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k-1,y}^2) + c_3(\varepsilon_k^3 - \varepsilon_{k-1,y}^3) + \dots}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,y}} \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,z} + c_2(\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k-1,z}^2) + c_3(\varepsilon_k^3 - \varepsilon_{k-1,z}^3) + \dots}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1,z}} \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon_{k-1,z} - \varepsilon_{k-1,y} + c_2(\varepsilon_{k-1,z}^2 - \varepsilon_{k-1,y}^2) + c_3(\varepsilon_{k-1,z}^3 - \varepsilon_{k-1,y}^3) + \dots}{\varepsilon_{k-1,z} - \varepsilon_{k-1,y}} \right] \\
&= f'(\alpha)(1 + 2c_2\varepsilon_k + c_3(\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,z} + \varepsilon_k\varepsilon_{k-1,y} + \varepsilon_k\varepsilon_{k-1,z} + 2\varepsilon_k^2) + \dots) \\
&= f'(\alpha)(1 + c_3\varepsilon_{k-1,y}\varepsilon_{k-1,z} + O(\varepsilon_k)),
\end{aligned}$$

Na osnovu toga i (3.43) dobijamo ocenu

$$1 - \gamma_k f'(\alpha) \sim c_3 \varepsilon_{k-1,y} \varepsilon_{k-1,z}. \quad (3.62)$$

Koristeći (3.62) i ranije izvedene relacije, dolazimo do relacija grešaka međuaproximacija

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k,y} &\sim c_2(1 - \gamma_k f'(\alpha))\varepsilon_k^2 \sim c_2 c_3 \varepsilon_{k-1,y} \varepsilon_{k-1,z} \varepsilon_k^2 \\
&\sim c_2 c_3 (D_{k-1,p} \varepsilon_{k-1}^p) (D_{k-1,s} \varepsilon_{k-1}^s) (D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r)^2 \\
&= c_2 c_3 D_{k-1,p} D_{k-1,s} D_{k-1,r}^2 \varepsilon_{k-1}^{2r+s+p},
\end{aligned} \quad (3.63)$$

i

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k,z} &\sim a_{k,4}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^2 \varepsilon_k^4 \sim a_{k,4}(c_3 \varepsilon_{k-1,y} \varepsilon_{k-1,z})^2 \varepsilon_k^4 \\
&\sim a_{k,4} c_3^2 (D_{k-1,p} \varepsilon_{k-1}^p)^2 (D_{k-1,s} \varepsilon_{k-1}^s)^2 (D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r)^4 \\
&= a_{k,4} c_3^2 D_{k-1,p}^2 D_{k-1,s}^2 D_{k-1,r}^4 \varepsilon_{k-1}^{4r+2s+2p}.
\end{aligned} \quad (3.64)$$

Na sličan način nalazimo i relaciju greške krajnje aproksimacije u okviru posmatrane iteracije

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k+1} &\sim a_{k,8}(1 - \gamma_k f'(\alpha))^4 \varepsilon_k^8 \sim a_{k,8}(c_3 \varepsilon_{k-1,y} \varepsilon_{k-1,z})^4 \varepsilon_k^8 \\
&\sim a_{k,8} c_3^4 (D_{k-1,p} \varepsilon_{k-1}^p)^4 (D_{k-1,s} \varepsilon_{k-1}^s)^4 (D_{k-1,r} \varepsilon_{k-1}^r)^8 \\
&= a_{k,8} c_3^4 D_{k-1,p}^4 D_{k-1,s}^4 D_{k-1,r}^8 \varepsilon_{k-1}^{8r+4s+4p}.
\end{aligned} \quad (3.65)$$

Poredeći eksponente greške ε_{k-1} u parovima relacija (3.56)^(3.63), (3.59)^(3.64) i (3.47)^(3.65), formiramo sistem od tri jednačine po nepoznatim p , s i r

$$\begin{cases} rp - 2r - (p + s) = 0, \\ rs - 4r - 2(p + s) = 0, \\ r^2 - 8r - 4(p + s) = 0. \end{cases}$$

Netrivijalno rešenje ovog sistema je

$$p = 11/4, \quad s = 11/2, \quad r = 11$$

i zaključujemo da je donja granica R -reda metoda sa memorijom (3.45)–(3.43) jedanaest.

Ovim završavamo analizu svih ubrzanih metoda (3.40)–(3.43) čime je dokaz Teoreme 3.4 kompletiran. \square

3.3.4 Numerički primeri

Testirali smo familiju trokoračnih metoda (3.29) koristeći programski paket *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti. Pored ove familije, testirano je i nekoliko trokoračnih iterativnih metoda (IM) optimalnog reda osam predstavljenih u radovima [3], [4], [14], [15], [29]–[31], [43], [47], [85], [92], [93] koji takođe koriste četiri funkcijska izračunavanja. Među njima izabrali smo sledeća četiri zbog demonstracije osobina konvergencije:

Trokoračni metodi Bi, Vu i Rena (1.70) I) i II) , označeni sa BWR1 i BWR2,

Trokoračni Kung-Traubov metod bez izvoda (1.65), kraće KT1,

Trokoračni Kung-Traubov metod sa izvodima (1.66), kraće KT2,

Šarma–Šarmin metod (1.72), kraće SS.

Greške aproksimacija $|x_k - \alpha|$, dobijene metodima (3.29), (1.70), (1.65), (1.66) i (1.72), date su u Tabelama 3.5 i 3.6. Ove tabele sadrže i vrednosti računskog reda konvergencije r_c koji se računa po formuli (1.18) uzimajući u obzir poslednje tri aproksimacije u iterativnom procesu. Odabrali smo sledeće test funkcije:

$$f(x) = e^{x^2+x \cos x-1} \sin \pi x + x \log(x \sin x + 1), \quad \alpha = 0, \quad x_0 = 0.6,$$

$$f(x) = \log(1 + x^2) + e^{x^2-3x} \sin x, \quad \alpha = 0, \quad x_0 = 0.35.$$

Na osnovu rezultata datih u Tabelama 3.5 i 3.6, kao i mnogih testiranih primera, možemo zaključiti da svi primenjeni metodi konvergiraju veoma brzo. Iako trokoračni metodi familije (3.29) u posmatranim primerima daju najbolje aproksimacije, ne možemo tvrditi, u opštem slučaju, da su bolji od ostalih trokoračnih metoda optimalnog reda osam; brojni testovi su pokazali da razmatrani metodi daju rezultate približno iste tačnosti. Iz poslednje kolone Tabela 3.5 i 3.6 možemo zaključiti da je računski red konvergencije r_c vrlo blizak teorijskom redu.

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
(3.29) $h(t, s) = (1+t)/(1-s)$, $\gamma = -0.1$	0.649(-4)	0.497(-33)	0.586(-266)	8.000
(3.29) $h(t, s) = 1+t+s+s^2$	0.645(-4)	0.127(-32)	0.290(-262)	8.000
(3.29) $h(t, s) = 1+t+s+(t+s)^2$	0.658(-4)	0.421(-34)	0.117(-275)	7.999
(3.29) $h(t, s) = t+1/(1-s)$	0.645(-4)	0.127(-32)	0.284(-262)	8.000
BWR1 (1.70)	0.166(-2)	0.221(-21)	0.221(-172)	7.999
BWR2 (1.70)	0.241(-2)	0.221(-19)	0.118(-155)	7.998
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	0.126(-2)	0.370(-23)	0.198(-187)	8.000
KT2 (1.66)	0.114(-2)	0.152(-23)	0.154(-190)	8.000
SS (1.72)	0.136(-2)	0.279(-23)	0.876(-189)	7.999

TABELA 3.5 Trokoračni metodi bez memorije

$$f(x) = e^{x^2+x} \cos x^{-1} \sin \pi x + x \log(x \sin x + 1), \quad \alpha = 0, \quad x_0 = 0.6, \quad \gamma = -0.1$$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
(3.29) $h(t, s) = (1+t)/(1-s)$	0.288(-5)	0.156(-41)	0.117(-331)	8.000
(3.29) $h(t, s) = 1+t+s+s^2$	0.479(-5)	0.208(-39)	0.262(-314)	8.000
(3.29) $h(t, s) = 1+t+s+(t+s)^2$	0.272(-5)	0.504(-43)	0.701(-345)	7.999
(3.29) $h(t, s) = t+1/(1-s)$	0.499(-5)	0.291(-39)	0.385(-313)	8.000
BWR1 (1.70)	0.570(-4)	0.898(-31)	0.341(-245)	7.999
BWR2 (1.70)	0.622(-4)	0.106(-29)	0.772(-236)	7.999
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	0.877(-4)	0.218(-30)	0.314(-243)	7.999
KT2 (1.66)	0.845(-4)	0.169(-30)	0.426(-244)	7.999
SS (1.72)	0.782(-4)	0.832(-31)	0.136(-246)	7.999

TABELA 3.6 Trokoračni metodi bez memorije

$$f(x) = \log(x^2 - 2x + 2) + e^{x^2-5x+4} \sin(x-1), \quad \alpha = 1, \quad x_0 = 1.35, \quad \gamma = -0.1$$

Numerički eksperimenti takođe su izvršeni primenjujući familiju (3.45) trokoračnih metoda sa memorijom na iste, gore navedene funkcije, sa istim početnim vrednostima (x_0 i γ_0). Apsolutne vrednosti $|x_k - \alpha|$ prikazane su u Tabelama 3.7 i 3.8. Poredeći rezultate date u Tabelama 3.7 i 3.8 (metodi sa memorijom) sa odgovarajućim rezultatima predstavljenim u Tabelama 3.5 i 3.6 (metodi bez memorije), primećujemo bitno poboljšanje tačnosti aproksimacija kod metoda sa memorijom.

Kvalitet metoda za izračunavanje γ_k (3.40)–(3.43) može se takođe uočiti iz Tabela 3.7 i 3.8: Njutnova interpolacija daje najbolje rezultate, što je i bilo očekivano budući da daje najveći red 11. Što su bolje aproksimacije (iz skupa $x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}$) primenjene kod metoda sečice (I), (II) ili (III), to se dobija brži metod. Računski red konvergencije, dat u poslednjoj koloni Tabela 3.7 i 3.8, nije toliko blizak teorijskim vrednostima kao što je bilo u slučaju metoda bez memorije (videti Tabele 3.5 i 3.6), ali je i dalje prihvatljiva ocena brzine konvergencije imajući u vidu da metodi sa memorijom imaju kompleksniju strukturu s obzirom da koriste informacije iz dve sukcesivne iteracije.

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
$h(t, s) = (1+t)/(1-s)$				
(3.45) \wedge (3.40)	0.649(-4)	0.264(-35)	0.161(-301)	8.481
(3.45) \wedge (3.41)	0.649(-4)	0.117(-39)	0.460(-359)	8.936
(3.45) \wedge (3.42)	0.649(-4)	0.177(-41)	0.222(-416)	9.980
(3.45) \wedge (3.43)	0.649(-4)	0.150(-47)	0.433(-525)	10.944
$h(t, s) = 1/(1-t)(1-s)$				
(3.45) \wedge (3.40)	0.653(-4)	0.111(-35)	0.157(-304)	8.462
(3.45) \wedge (3.41)	0.653(-4)	0.140(-39)	0.208(-358)	8.939
(3.45) \wedge (3.42)	0.653(-4)	0.192(-41)	0.468(-416)	9.981
(3.45) \wedge (3.43)	0.653(-4)	0.157(-47)	0.680(-525)	10.944
$h(t, s) = 1+t+s+s^2$				
(3.45) \wedge (3.40)	0.645(-4)	0.108(-34)	0.965(-296)	8.482
(3.45) \wedge (3.41)	0.645(-4)	0.943(-39)	0.615(-351)	8.962
(3.45) \wedge (3.42)	0.645(-4)	0.136(-40)	0.199(-407)	10.002
(3.45) \wedge (3.43)	0.645(-4)	0.138(-46)	0.198(-515)	10.987
$h(t, s) = 1+t+s+(t+s)^2$				
(3.45) \wedge (3.40)	0.658(-4)	0.596(-36)	0.585(-307)	8.458
(3.45) \wedge (3.41)	0.658(-4)	0.759(-40)	0.833(-361)	8.931
(3.45) \wedge (3.42)	0.658(-4)	0.103(-41)	0.455(-421)	10.035
(3.45) \wedge (3.43)	0.658(-4)	0.103(-47)	0.275(-528)	10.971
$h(t, s) = t+1/(1-s)$				
(3.45) \wedge (3.40)	0.645(-4)	0.108(-34)	0.944(-296)	8.482
(3.45) \wedge (3.41)	0.645(-4)	0.939(-39)	0.588(-351)	8.962
(3.45) \wedge (3.42)	0.645(-4)	0.135(-40)	0.182(-407)	10.002
(3.45) \wedge (3.43)	0.645(-4)	0.110(-46)	0.240(-516)	10.982

TABELA 3.7 Familije trokoračnih metoda sa memorijom

$$f(x) = e^{x^2+x \cos x-1} \sin \pi x + x \log(x \sin x + 1), \quad \alpha = 0, \quad x_0 = 0.6, \quad \gamma_0 = -0.1$$

R -red konvergencije familije (3.45) sa memorijom je povećan sa 8 redom na $2(2 + \sqrt{5}) \approx 8.472$, 9, 10 i 11, zavisno od kvaliteta primenjenog metoda ubrzanja definisanih pomoću (3.40), (3.41), (3.42) i (3.43). Naglašavamo da postignuto ubrzanje konvergencije je ostvareno bez dodatnih funkcijskih izračunavanja, što ukazuje na visoku računsku efikasnost predloženih metoda sa memorijom. Na kraju, napomenimo da je red metoda (3.45) sa memorijom veći od osam, ali ovo ne opovrgava Kung-Traubovu hipotezu jer se ona odnosi isključivo na metode *bez memorije* kao što su (3.29).

Napomena 3.5 Iz Tabela 3.7 i 3.8 primećujemo da su aproksimacije dobijene familijom (3.45) koja koristi težinske funkcije

$$h(t, s) = 1 + t + s + s^2 \quad \text{i} \quad h(t, s) = t + 1/(1 - s)$$

dosta blizu jedne drugih. Ova sličnost postaje jasnija posle razvoja

$$t + \frac{1}{1-s} = (1 + t + s + s^2) + s^3 + \dots$$

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
$h(t, s) = (1+t)/(1-s)$				
(3.45)^(3.40)	0.288(-5)	0.481(-44)	0.433(-373)	8.486
(3.45)^(3.41)	0.288(-5)	0.240(-47)	0.621(-426)	8.997
(3.45)^(3.42)	0.288(-5)	0.135(-49)	0.181(-496)	10.081
(3.45)^(3.43)	0.288(-5)	0.150(-54)	0.489(-600)	11.069
$h(t, s) = 1/[(1-t)(1-s)]$				
(3.45)^(3.40)	0.922(-6)	0.172(-47)	0.119(-402)	8.511
(3.45)^(3.41)	0.922(-6)	0.243(-51)	0.744(-462)	9.006
(3.45)^(3.42)	0.922(-6)	0.175(-53)	0.255(-535)	10.097
(3.45)^(3.43)	0.922(-6)	0.194(-58)	0.836(-643)	11.094
$h(t, s) = 1 + t + s + s^2$				
(3.45)^(3.40)	0.479(-5)	0.237(-41)	0.469(-350)	8.503
(3.45)^(3.41)	0.479(-5)	0.539(-45)	0.944(-405)	9.006
(3.45)^(3.42)	0.479(-5)	0.277(-47)	0.242(-472)	10.064
(3.45)^(3.43)	0.479(-5)	0.293(-52)	0.180(-574)	11.061
$h(t, s) = 1 + t + s + (t+s)^2$				
(3.45)^(3.40)	0.272(-5)	0.184(-44)	0.294(-377)	8.496
(3.45)^(3.41)	0.272(-5)	0.260(-48)	0.138(-434)	8.979
(3.45)^(3.42)	0.272(-5)	0.234(-50)	0.157(-504)	10.078
(3.45)^(3.43)	0.272(-5)	0.268(-55)	0.473(-608)	11.054
$h(t, s) = t + 1/(1-s)$				
(3.45)^(3.40)	0.499(-5)	0.332(-41)	0.815(-349)	8.503
(3.45)^(3.41)	0.499(-5)	0.754(-45)	0.194(-403)	9.005
(3.45)^(3.42)	0.499(-5)	0.381(-47)	0.580(-471)	10.063
(3.45)^(3.43)	0.499(-5)	0.407(-52)	0.673(-573)	11.060

TABELA 3.8 Familije trokoračnih metoda sa memorijom

$$f(x) = \log(x^2 - 2x + 2) + e^{x^2 - 5x + 4} \sin(x - 1), \quad \alpha = 1, \quad x_0 = 1.35, \quad \gamma_0 = -0.1$$

3.4 Primedba o sličnosti metoda

Ovde ćemo ukratko ukazati na određene sličnosti između pojedinih trokoračnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina optimalnog reda osam [18]. Specijalno, pokazaćemo da je metod objavljen u [89] direktno specijalan slučaj familije trokoračnih metoda predloženih ranije u [90]. Takođe dajemo komentar o sličnosti metoda predloženih u [47] sa metodima prethodno izloženim u već pomenutom radu [90]. Ovde nije reč o metodima koji se dobijaju iz postojećih familija složenim transformacijama, već o očiglednim specijalnim slučajevima.

Tokom poslednjih par godina razvijeno je nekoliko optimalnih trokoračnih metoda koji koriste samo četiri funkcijska izračunavanja, videti [90], [89], [3], [4], [14], [15], [29]–[31], [43], [47], [85], [92], [93]. Jedan od njih je familija metoda reda osam predložena u radu [90] oblika:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k) + bf(y_k)}{f(x_k) + (b-2)f(y_k)}, \quad (a, b \in \mathbf{R}, k = 0, 1, \dots) \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \left[\varphi\left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right) + \frac{f(z_k)}{f(y_k) - af(z_k)} + \omega\left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right) \right], \end{cases} \quad (3.66)$$

gde su φ i ω proizvoljne realne funkcije koje zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 2, \quad \varphi''(0) = 10 - 4b, \quad \varphi'''(0) = 12b^2 - 72b + 72, \\ \omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 4, \end{aligned} \quad (3.67)$$

a i b su realni parametri. Primitimo da prva dva koraka čine Kingovu familiju metoda četvrtog reda (1.50). Familija metoda (3.66) definiše veliki broj različitih trokoračnih metoda s obzirom da, pored parametara a i b, i parametarske funkcije φ i ω koje zadovoljavaju uslove (3.67) mogu biti birane na razne načine.

Odmah posle publikovanja familije (3.66) u radu [90], prvi autor pomenute familije objavio je u [89] trokoračni metod nazvan „novi metod Njutnovog tipa (N^m)” birajući $m = 5, 6, 7$ i 8 . Svi ovi metodi koriste četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji i imaju red m . Očigledno, prema Kung-Traubovoj hipotezi [44], metodi tipa (N^5), (N^6), i (N^7) nisu optimalni i nisu od praktičnog interesa. Iz tog razloga, koncentrisaćemo se na jedini optimalni metod, nazvan „novi metod reda osam Njutnovog tipa (N^8)”, koji je oblika

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = x_k - \frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f'(x_k)(f(x_k) - f(y_k))}, \quad (k = 0, 1, \dots) \\ x_{k+1} = z_k - \left[\left(\frac{1+t_k^2}{1-t_k} \right)^2 - 2t_k^2 - 6t_k^3 + \frac{f(z_k)}{f(y_k)} + 4\frac{f(z_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad (3.68)$$

gde je $t_k = f(y_k)/f(x_k)$.

Jednostavno se pokazuje da izbor $b = 1$ u drugom koraku (3.66) daje

$$z_k = x_k - \frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f'(x_k)(f(x_k) - f(y_k))},$$

što je ekvivalentno drugom koraku u (3.68). Primitimo da prva dva koraka u (3.68) definišu dvokoračni metod koji su ponovo otkrili Kou, Li i Vang (1.53) [42].

Neka su funkcije φ i ω koje se javljaju u (3.66) oblika

$$\varphi(t) = \left(\frac{1+t^2}{1-t} \right)^2 - 2t^2 - 6t^3, \quad \omega(t) = 4t, \quad (3.69)$$

gde su $t = f(y)/f(x)$ i $t' = f(z)/f(x)$. Na osnovu (3.69) nalazimo

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 2, \quad \varphi''(0) = 6, \quad \varphi'''(0) = 12, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 4,$$

što se poklapa sa uslovima (3.67) za $b = 1$, već izabranim u drugom koraku (3.66). Napomenimo da je funkcija φ iz (3.69) ubačena u (3.68) bez jasne motivacije, izvođenja ili citiranja izvora (videti [89]).

Prema prethodnom razmatranju, možemo zaključiti da je metod (3.68) specijalan slučaj familije (3.66) za $b = 1$, i φ i ω datim sa (3.69). Formalno, možemo izabrati $a = 0$ u (3.66) ali ovaj izbor je irelevantan.

Govoreći o opštem metodu (3.66) i njegovim specijalnim slučajevima, možemo posmatrati još jedan trokoračni metod slične strukture publikovan u [47]

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \left[\left(\frac{f(x_k) - f(y_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \right)^2 + \frac{f(z_k)}{f(y_k) - af(z_k)} + G(s_k) \right], \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}, k = 0, 1, \dots), \quad (3.70)$$

gde je $s_k = f(z_k)/f(x_k)$ i G je proizvoljna realna funkcija koja zbog postizanja optimalnog reda konvergencije zadovoljava uslove $G(0) = 0$, $G'(0) = 4$. U radu [47] za metod (3.70) i njegovu varijantu dobijenu specijalnim izborom $G(s) = 4s/(1 + \alpha_2 s)$ ($\alpha_2 \in \mathbf{R}$) naglašeno je da se radi o novim metodima.

Primetimo da je drugi korak u (3.70) dobijen iz drugog koraka (3.66) izborom $b = 0$ (što daje metod Ostrovskog (1.51)). Parametarska funkcija φ u trećem koraku (3.66) daje veliki broj različitih metoda. Štaviše, imajući u vidu da je $b = 0$ i birajući funkciju

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t}{1-2t} \right)^2 \quad (t = f(y)/f(x)) \quad (3.71)$$

u (3.66), vidimo da su uslovi (3.67) zadovoljeni (za $b = 0$). Međutim izbor za φ definisan u (3.71) daje prva dva člana izraza unutar uglastih zagrada u trećem koraku (3.70). S obzirom da funkcije G (u (3.70)) i ω (u (3.66)) zadovoljavaju iste uslove, jasno je da je trokoračni metod (3.70) specijalan slučaj familije (3.66).

Metod (3.70) je uopšten u radu [47] na sledeći način

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} H\left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right), \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \left[U\left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right) + V\left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)}\right) + W\left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right) \right], \end{cases} \quad (3.72)$$

gde su H , U , V i W realne funkcije. Lako je zaključiti da je iterativni metod (3.72) u osnovi kombinacija Čun-Petkovićeovog dvokoračnog metoda (1.58)

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \left[h\left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right) \right]^{-1} \end{cases}$$

i trećeg koraka metoda (3.66).

Na kraju, napomenimo da rad [90] nije citiran u radovima [89] i [47]. Čunov metod (1.58) je formalno uključen u listu referenci rada [47], ali nije naveden nigde u radu.

Trokoračni metodi konstruisani inverznom interpolacijom

U ovom poglavlju opisani su višekoračni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina, konstruisani inverznom interpolacijom, nazvani *interpolacioni iterativni metodi*. Osnovna ideja potiče od Nete, jednog od autora rada [69] koji je izveo veoma brz trokoračni metod R -reda konvergencije $10.81\bar{5}$ osamdesetih godina prošlog veka, videti [53]. U prvom odeljku ovog poglavlja opisan je dvokoračni metod sa memorijom reda konvergencije $(5 + \sqrt{17})/2 \approx 4.561$. Višekoračni metodi sa memorijom višeg reda, takođe zasnovani na inverznoj interpolaciji, izloženi su u odeljku 4.2. U cilju poređenja trokoračnih metoda konstruisanih pomoću inverzne interpolacije, u odeljku 4.3 ukratko je opisan metod nedavno predložen u radu [56], koji u prva dva koraka koristi optimalnu familiju dvokoračnih metoda. Poređenje računске efikasnosti višekoračnih metoda sa i bez memorije je tema odeljka 4.4. Numerički primeri su dati u odeljku 4.5. Pri tom je predložen i jedan specijalan izbor početnih aproksimacija koji omogućuje znatno povećanje tačnosti aproksimacija i smanjuje računsku cenu metoda, što numerički primeri potvrđuju u praksi.

4.1 Dvokoračni interpolacioni iterativni metodi

U ovom odeljku konstruisaćemo dvokoračni metod za rešavanje nelinearnih jednačina koristeći inverznu interpolaciju, na sličan način na koji je Neta izveo trokoračni metod u radu [53]. Neka su x_0 i y_{-1} dve početne aproksimacije tražene nule α date realne funkcije f . Konstruisaćemo dvokoračni metod određujući prvo y_k na osnovu vrednosti funkcije f u tačkama x_k , y_{k-1} i vrednosti f' u x_k . Tada se nova aproksimacija x_{k+1} izračunava na osnovu vrednosti funkcije f u tačkama x_k , y_k i vrednosti f' u x_k . Koristićemo inverznu interpolaciju za nalaženje y_k . Neka je

$$R(f(x)) = a + b(f(x) - f(x_k)) + c(f(x) - f(x_k))^2 \quad (4.1)$$

polinom stepena dva za koji važi

$$x_k = R(f(x_k)), \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{f'(x_k)} = R'(f(x_k)), \quad (4.3)$$

$$y_{k-1} = R(f(y_{k-1})). \quad (4.4)$$

Iz (4.2) i (4.3) dobijamo

$$a = x_k, \quad b = \frac{1}{f'(x_k)}. \quad (4.5)$$

Uvedimo oznaku

$$\Phi(t) = \frac{1}{f(t) - f(x_k)} \left[\frac{t - x_k}{f(t) - f(x_k)} - \frac{1}{f'(x_k)} \right], \quad (4.6)$$

i neka je

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Njutnova iterativna funkcija. S obzirom na (4.1) i (4.4) imamo $c = \Phi(y_{k-1})$ te zajedno sa (4.5) iz (4.1) sledi

$$y_k = R(0) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + f(x_k)^2 \Phi(y_{k-1}) = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_{k-1}). \quad (4.7)$$

U sledećem koraku određujemo x_{k+1} vršeći ista izračunavanja osim što koristimo y_k umesto y_{k-1} . Konstanta c koja se javlja u (4.1) sada glasi $c = \Phi(y_k)$ i na osnovu (4.1) nalazimo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + f(x_k)^2 \Phi(y_k) = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_k), \quad (4.8)$$

gde je y_k određeno sa (4.7).

Napomena 4.1 Da bismo otpočeli iterativni proces neophodne su nam dve startne aproksimacije x_0 i y_{-1} . Ipak, primetimo da y_{-1} može uzeti vrednost $N(x_0)$ u prvoj iteraciji bez ikakvog dodatnog izračunavanja. Zaista, $N(x_0)$ se ionako koristi u (4.7) i (4.8) za $k = 0$. Da bismo izbegli nepotrebno izračunavanje u poslednjem koraku iterativnog procesa, $N(x_k)$ se računa jedino pod uslovom da kriterijum za zaustavljanje nije ispunjen. U tom slučaju računamo $N(x_k)$, uvećamo k na $k + 1$ i primenimo sledeću iteraciju. Praktični primeri pokazuju da takav izbor y_{-1} u (4.9) i (4.14) (videti odeljak 4.3) bitno povećava tačnost dobijenih aproksimacija, videti Tabele 4.4–4.11.

Relacije (4.7) i (4.8) definišu dvokoračni metod sa memorijom:

$$\begin{aligned} &\text{Dato je } x_0, \quad y_{-1} = N(x_0), \\ &\begin{cases} y_k = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_{k-1}), \\ x_{k+1} = N(x_k) + f(x_k)^2 \Phi(y_k), \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gde je Φ dato formulom (4.6). Red konvergencije metoda (4.9) razmatran je u sledećoj teoremi.

Teorema 4.1 Dvokoračni metod (4.9) ima R -red konvergencije ne manji od

$$\rho(M^{(2)}) = (5 + \sqrt{17})/2 \approx 4.561,$$

gde je $\rho(M^{(2)})$ spektralni radijus matrice

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Koristićemo Herzbergerov¹ matični metod [35] za određivanje reda jednokoračnog metoda koji koristi vrednosti u s tačaka $x_k = G(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-s})$. Matrica pridružena ovom metodu $M^{(s)} = (m_{ij})$, ima sledeće elemente

$$\begin{aligned} m_{1,j} &= \text{količina informacija zahtevanih u tački } x_{k-j}, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \\ m_{i,i-1} &= 1 \quad (i = 2, 3, \dots, s), \\ m_{i,j} &= 0, \quad \text{u ostalim slučajevima.} \end{aligned}$$

Red konvergencije s -koračnog metoda $G = G_1 \circ G_2 \circ \dots \circ G_s$ je spektralni radijus proizvoda matrica $M^{(s)} = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_s$. Na osnovu relacija (4.7)–(4.8) formiramo odgovarajuće matrice,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema tome,

$$M^{(2)} = M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice M je

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Njegovi koreni su $(5 \pm \sqrt{17})/2$; dakle spektralni radijus matrice $M^{(2)}$ je $\rho(M^{(2)}) = (5 + \sqrt{17})/2 \approx 4.5612$, što daje donju granicu R -red konvergencije metoda (4.9). \square

Napomena 4.2 Neka je $y_k = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ unapred sračunato i izrazimo uslov (4.4) u obliku $y_k = R(f(y_k))$. Određujući koeficijente a , b i c inverzne interpolacije (4.1) iz uslova (4.2)–(4.4) dolazimo do dvokoračnog metoda

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 f(y_k)}{f'(x_k)(f(y_k) - f(x_k))^2}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Ovaj optimalni metod reda četiri je specijalan slučaj familije Kunga i Trauba proizvoljnog reda konvergencije predstavljene u [44].

¹ J. Herzberger

4.2 Višekoračni interpolacioni iterativni metodi

Ukratko ćemo predstaviti trokoračni metod sa memorijom koji je Neta dao u [53]. Ovaj metod je u istom radu [53] prikazan bez numeričkih primera i poređenja sa postojećim metodima i namera nam je da prikažemo numeričke rezultate sa jednom novom idejom pri izboru početnih aproksimacija koja dovodi do znatnog povećanja tačnosti iterativnih aproksimacija. Za Neta metod neophodne su tri početne aproksimacije x_0, y_{-1}, z_{-1} . Sam metod je konstruisan korišćenjem inverznog interpolacionog polinoma

$$R(f(x)) = a + b(f(x) - f(x_k)) + c(f(x) - f(x_k))^2 + d(f(x) - f(x_k))^3$$

stepena tri, koji zadovoljava uslove

$$x_k = R(f(x_k)), \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{f'(x_k)} = R'(f(x_k)), \quad (4.11)$$

$$y_{k-1} = R(f(y_{k-1})), \quad (4.12)$$

$$z_{k-1} = R(f(z_{k-1})). \quad (4.13)$$

Iskoristimo funkciju definisanu u (4.6)

$$\Phi(t) = \frac{t - x_k}{(f(t) - f(x_k))^2} - \frac{1}{(f(t) - f(x_k))f'(x_k)}.$$

Na osnovu uslova (4.10)–(4.13), Neta je izveo sledeći trokoračni metod

$$\begin{cases} y_k = N(x_k) + \left[f(y_{k-1})\Phi(z_{k-1}) - f(z_{k-1})\Phi(y_{k-1}) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_{k-1}) - f(z_{k-1})}, \\ z_k = N(x_k) + \left[f(y_k)\Phi(z_{k-1}) - f(z_{k-1})\Phi(y_k) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_k) - f(z_{k-1})}, \\ x_{k+1} = N(x_k) + \left[f(y_k)\Phi(z_k) - f(z_k)\Phi(y_k) \right] \frac{f(x_k)^2}{f(y_k) - f(z_k)} \end{cases} \quad (4.14)$$

za $k = 0, 1, \dots$. Poželjno je da y_{-1} uzme vrednost $N(x_0)$ u prvoj iteraciji, videti Napomene 4.1 i 4.2.

Odgovarajuće matrice pridružene svakom od koraka trokoračnog metoda (4.14) su

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog dokazana je sledeća teorema u [53].

Teorema 4.2 *R-reda trokoračnog metoda (4.14) je bar $\rho(M^{(3)}) \approx 10.815$, gde je $\rho(M^{(3)})$ spektralni radijus matrice*

$$M^{(3)} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na sličan način mogli bismo da nastavimo sa konstrukcijom četvorokoračnog metoda koristeći inverznu interpolaciju polinomom stepena četiri

$$R(f(x)) = a_0 + a_1(f(x) - f(x_k)) + a_2(f(x) - f(x_k))^2 + a_3(f(x) - f(x_k))^3 + a_4(f(x) - f(x_k))^4.$$

Odgovarajuće 4×4 matrice M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , kao i rezultujuća matrica $M^{(4)}$, date su sa

$$\begin{aligned} M^{(4)} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 16 & 11 & 16 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Spektralni radijus $\rho(M^{(4)})$ finalne matrice je $\rho(M^{(4)}) \approx 22.704$ i definiše donju granicu R -reda konvergencije četvorokoračnog metoda sa memorijom, konstruisanog inverznim interpolacionim polinomom stepena četiri. Kako brzina konvergencije opisanog metoda prevazilazi praktične potrebe, da su potrebne čak četiri početne aproksimacije i dodatni broj izračunavanja u prvoj iteraciji, u nastavku se nećemo baviti ovim metodom.

Računska efikasnost metoda (4.9) i (4.14), konstruisanih inverznom interpolacijom i njihovo poređenje sa postojećim metodima reda četiri i osam su teme sledećeg odeljka. Rezultati numeričkih eksperimenata dati su u Tabelama 4.4–4.11 u odeljku 4.5.

4.3 Trokoračni metod Nete i M. Petkovića

U ovom poglavlju, osim metoda zasnovanih na Netinoj ideji i inverznoj interpolaciji (opisanih u odeljcima 4.1 i 4.2), testiraćemo uporedo i familiju trokoračnih metoda razvijenu u radu [56] koristeći inverzni interpolacioni polinom trećeg reda. Ova familija koristi proizvoljan dvokoračni metod optimalnog reda četiri u prva dva koraka i inverzni interpolacioni polinom u trećem koraku. Opšti oblik dvotačkaste familije reda četiri sa izvodom glasi

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = \varphi_f(x_k, y_k), \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (4.15)$$

gde iterativna funkcija $\varphi_f \in \Psi_4$

- 1) zahteva već izračunate vrednosti $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f(y_k)$;
 - 2) obezbeđuje da niz aproksimacija $\{x_k\}$ ima red četiri.
- (4.16)

j	Težinska funkcija $g_j(t)$	Dvotačkasti metod	Autor(i)
1	$\frac{1+\beta t}{1+(\beta-2)t}$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)+\beta f(y)}{f(x)+(\beta-2)f(y)}$	King [40]
	$\beta=0$	$y - \frac{u(x)f(y)}{f(x)-2f(y)}$	Ostrovski [60]
	$\beta=1$	$x - \frac{f(x)^2+f(y)^2}{f'(x)[f(x)-f(y)]}$	Kou i dr. [42]
	$\beta=2$	$x - u(x) \left[1 + \frac{f(y)}{f(x)} + \frac{2f(y)^2}{f(x)^2} \right]$	Čun [10]
2	$\left(1 + \frac{2}{\lambda}t\right)^\lambda$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)} \left(1 + \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{f(y)}{f(x)}\right)^\lambda$	M. Petković, L. Petković [74]
	$\lambda=-2$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)} \cdot \frac{1}{(1-f(y)/f(x))^2}$	Kung i Traub [44]
3	$\frac{1+\gamma t^2}{1-2\gamma}$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)f(x)} \cdot \frac{f(x)^2+\gamma f(y)^2}{f(x)-2f(y)}$	M. Petković, L. Petković [74]
4	$\frac{1}{1-2t+at^2}$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)} \cdot \frac{1}{1-2\frac{f(y)}{f(x)}+a\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^2}$	Čun [8]
5	$\frac{t^2+(c-2)t-1}{ct-1}$	$y - \frac{f(y)}{f'(x)} \left[1 + \frac{f(y)(f(y)-2f(x))}{f(x)(cf(y)-f(x))} \right]$	M. Petković, L. Petković [74]
	$c=1$	$x - u(x) \left[\frac{f(y)^2}{f(x)^2} - \frac{f(x)}{f(y)-f(x)} \right]$	Mahešvari [48]
6	$\frac{1}{t} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4t}} - 1 \right)$	$x - \frac{2u(x)}{1+\sqrt{1-4f(y)/f(x)}}$	M. Petković, L. Petković [73]

TABELA 4.1 Lista optimalnih dvokoračnih metoda

U ovom odeljku posmatraćemo optimalnu familiju (1.58) oblika

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - g(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (4.17)$$

predloženu u radu [74]. Funkcija g ima ulogu *težinske funkcije* i obično zahteva samo nekoliko osnovnih računskih operacija. Nekoliko oblika težinske funkcije g datao je u Tabeli 4.1, u kojoj je sa y označena Njutnova aproksimacija $y = x - f(x)/f'(x)$.

Neka je

$$z_k = y_k - g(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$$

u drugom koraku iterativne šeme (4.17) i neka je treći korak zadat Njutnovim metodom

$$x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

Da bismo dobili trokoračnu familiju reda osam, potrebno je aproksimirati $f'(z_k)$ u trećem koraku koristeći već izračunate vrednosti. Ovo ćemo ostvariti koristeći inverznu interpolaciju kubnim polinomom

$$x = \mathcal{R}(f(x)) = a + b(f(x) - f(x_k)) + c(f(x) - f(x_k))^2 + d(f(x) - f(x_k))^3. \quad (4.18)$$

Zamenom $x = x_k$ direktno sledi

$$x_k = \mathcal{R}(f(x_k)) = a. \quad (4.19)$$

Diferencirajući (4.18) nalazimo

$$1 = \mathcal{R}'(f(x))f'(x) = (b + 2c(f(x) - f(x_k)) + 3d(f(x) - f(x_k))^2) f'(x).$$

Prema tome,

$$b = \mathcal{R}'(f(x_k)) = \frac{1}{f'(x_k)}. \quad (4.20)$$

Da bismo odredili parametre c i d , stavljamo $x = y_k$ i $x = z_k$ u (4.18), gde je z_k rezultat primene proizvoljnog optimalnog metoda reda četiri (4.15). Koristeći vrednosti a i b date sa (4.19) i (4.20), dobijamo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k + \frac{\Delta_f(y_k, x_k)}{f'(x_k)} + c(\Delta_f(y_k, x_k))^2 + d(\Delta_f(y_k, x_k))^3, \\ z_k &= x_k + \frac{\Delta_f(z_k, x_k)}{f'(x_k)} + c(\Delta_f(z_k, x_k))^2 + d(\Delta_f(z_k, x_k))^3, \end{aligned}$$

gde smo označili $\Delta_f(y_k, z_k) = f(y_k) - f(z_k)$. Ovaj sistem može da se napiše u obliku

$$\begin{aligned} c + d\Delta_f(y_k, x_k) &= \frac{1}{\Delta_f(y_k, x_k)f[y_k, x_k]} - \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(y_k, x_k)}, \\ c + d\Delta_f(z_k, x_k) &= \frac{1}{\Delta_f(z_k, x_k)f[z_k, x_k]} - \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(z_k, x_k)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Oduzimajući drugu jednačinu sistema (4.21) od prve, nalazimo

$$\begin{aligned} d\Delta_f(y_k, z_k) &= \frac{1}{\Delta_f(y_k, x_k)f[y_k, x_k]} - \frac{1}{\Delta_f(z_k, x_k)f[z_k, x_k]} \\ &\quad + \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(z_k, x_k)} - \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(y_k, x_k)}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$d = \frac{1}{\Delta_f(y_k, x_k)\Delta_f(y_k, z_k)f[y_k, x_k]} - \frac{1}{\Delta_f(z_k, x_k)\Delta_f(y_k, z_k)f[z_k, x_k]} + \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(z_k, x_k)\Delta_f(y_k, z_k)} - \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(y_k, x_k)\Delta_f(y_k, z_k)}, \quad (4.22)$$

$$c = \frac{1}{\Delta_f(y_k, x_k)f[y_k, x_k]} - \frac{1}{f'(x_k)\Delta_f(y_k, x_k)} - d\Delta_f(y_k, x_k). \quad (4.23)$$

Na ovaj način odredili smo c i d tako da možemo formirati završni korak trokoračnog metoda

$$x_{k+1} = \mathcal{R}(0) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + c[f(x_k)]^2 - d[f(x_k)]^3. \quad (4.24)$$

Iterativni trokoračni metod (4.24) ima red osam ako je početna aproksimacija izabrana dovoljno blizu tražene nule α . Dokaz se može naći u radu [56].

4.4 Analiza računске efikasnosti

Razmatraćemo dvokoračne i trokoračne metode sa i bez memorije sa aspekta računске efikasnosti. Radi poređenja, koristićemo Kung-Traubove n -koračne metode sa i bez memorije koji slede iz Kung-Traubove familije, čiji je red konvergencije ne manji od 2^n ($n \geq 2$), videti [44]. Za $n = 2$ dobija se sledeći dvokoračni metod,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{\gamma_k f(x_k)^2}{f(x_k + \gamma_k f(x_k)) - f(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma_k f(x_k))}{(f(x_k + \gamma_k f(x_k)) - f(y_k))f[x_k, y_k]}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (4.25)$$

gde je $f[x, y] = [f(x) - f(y)]/(x - y)$ podeljena razlika i γ_k je nenula konstanta ili samokorigujući promenljivi parametar, videti [88, str. 185-187] kao i [72] za više detalja.

Sledeći trokoračni metod se dobija kao specijalan slučaj Kung-Traubove familije za $n = 3$,

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{\gamma_k f(x_k)^2}{f(x_k + \gamma_k f(x_k)) - f(x_k)}, \\ z_k = y_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma_k f(x_k))}{(f(x_k + \gamma_k f(x_k)) - f(y_k))f[x_k, y_k]}, \\ x_{k+1} = z_k - \frac{f(y_k)f(x_k + \gamma_k f(x_k))\left(y_k - x_k + \frac{f(x_k)}{f[x_k, z_k]}\right)}{(f(y_k) - f(z_k))(f(x_k + \gamma_k f(x_k)) - f(z_k))} + \frac{f(y_k)}{f[y_k, z_k]}, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.26)$$

Ukoliko parametar γ_k u (4.25) i (4.26) ima konstantnu vrednost tokom iterativnog procesa, tada je red konvergencije dvokoračnog metoda (4.25) četiri, a trokoračnog metoda (4.26) osam. Ovi metodi pripadaju klasi metoda *bez memorije*. Brzina konvergencije ovih metoda može biti povećana izračunavanjem vrednosti parametra γ_k tokom iteriranja. U tom slučaju imaćemo odgovarajuće *samoubrzavajuće* metode *sa memorijom*.

Na primer, parametar γ_k se može izračunati tokom iterativnog procesa pomoću formule

$$\gamma_k = -\frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = -\frac{\gamma_{k-1}f(x_{k-1})}{f(x_{k-1} + \gamma_{k-1}f(x_{k-1})) - f(x_{k-1})} \quad (\text{metod (I)}) \quad (4.27)$$

ili

$$\gamma_k = -\frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (\text{metod (II)}) \quad (4.28)$$

za $k = 1, 2, \dots$, gde je sa $\tilde{f}'(\alpha)$ označena aproksimacija od $f'(\alpha)$. Tada korigovani metodi (4.25) \wedge (4.27)/(4.28) i (4.26) \wedge (4.27)/(4.28) sa memorijom imaju uvećan R -red $2 + \sqrt{6} \approx 4.45$ i $4 + 2\sqrt{5} \approx 8.472$, respektivno. Dalja ubrzanja ove familije biće tema sledećeg poglavlja.

Pre određivanja računске efikasnosti posmatranih metoda sa i bez memorije, u Tabeli 4.2 dajemo pregled R -reda i broj neophodnih funkcijskih izračunavanja.

metodi	broj funkcijskih izračunavanja	R -red	broj početnih aproksimacija
(4.25), γ_k fiksno	3	4	1
(4.9)	3 ⁺ a)	4.56	2 b)
(4.25) \wedge (4.27/4.28), γ_k prema (4.27) ili (4.28)	3	4.45	1
(4.26), γ_k fiksno	4	8	1
(4.14)	4 ⁺ a)	10.815	3 b)
(4.26) \wedge (4.27/4.28), γ_k prema (4.27) ili (4.28)	4	8.472	1

a) Broj funkcijskih evaluacija u metodima (4.9) i (4.14) je označen sa 3⁺ i 4⁺ da ukaže na to da je broj funkcijskih izračunavanja redom 4 i 6 u prvoj iteraciji.

b) Uzimajući $y_{-1} = N(x_0)$ (videti Primedbe 4.1 i 4.3), ovaj broj se smanjuje za jedan.

TABELA 4.2 Karakteristike višekoračnih metoda sa memorijom

Iz Tabele 4.2 kao i odgovarajućih iterativnih formula, vidimo da se metodi (4.9) i (4.14) realizuju sa različitim brojem funkcijskih izračunavanja zavisno od ukupnog broja izvršenih iterativnih koraka neophodnih da se ispuni izabrani kriterijum za zaustavljanje (npr. tražena preciznost aproksimacija korena). Iz ovog razloga nije moguće porediti metode predstavljene u Tabeli 4.2 bez uzimanja u obzir ukupnog broja iteracija kao parametra. Pogodno je računati indeks efikasnosti iterativnog metoda (IM) prema formuli

$$E_s(\text{IM}) = r^{s/(\theta_1 + \dots + \theta_s)},$$

gde je s ukupan broj iteracija do ispunjenja zaustavnog kriterijuma, r je R -red konvergencije i θ_j je broj funkcijskih izračunavanja u j -toj iteraciji. Očigledno, u slučaju $\theta_1 = \dots = \theta_s = \theta$, gornja formula se svodi na dobro poznatu formulu $E(\text{IM}) = r^{1/\theta}$. Ovo je slučaj sa metodima (4.25) i (4.26).

metodi	E_2	E_3	E_4
(4.25), γ_k fiksirano	1.587	1.587	1.587
(4.9)	1.543	1.576	1.595
(4.25) \wedge (4.27/4.28), γ_k prema (4.27) ili (4.28)	1.645	1.645	1.645
(4.26), γ_k fiksirano	1.682	1.682	1.682
(4.14)	1.61	1.666	1.697
(4.26) \wedge (4.27/4.28), γ_k prema (4.27) ili (4.28)	1.706	1.706	1.706

TABELA 4.3 Indeks efikasnosti u funkciji ukupnog broja iteracija

Iz Tabela 4.5–4.12 primećujemo da interpolacioni iterativni metod (4.9) daje dosta tačnije aproksimacije u svim primerima u odnosu na metod (4.25) \wedge (4.27)/(4.28) kao i u odnosu na sve testirane metode četvrtog reda. Metod (4.14), dobijen inverznom interpolacijom stepena tri, takođe pokazuje dominaciju u poređenju sa trokoračnim metodom (4.26) \wedge (4.27)/(4.28) kao i sa svim testiranim metodima reda osam, kada se radi o preciznosti dobijenih aproksimacija, videti Tabele 4.9–4.12. Ipak, treba napomenuti da metod (4.9) koristi jedno funkcijsko izračunavanje više, a metod (4.14) čak dva funkcijska izračunavanja više u prvoj iteraciji. Ova dodatna izračunavanja umanjuju njihovu računsku efikasnost, što je očigledno iz Tabele 4.3. Jasno je da se njihovi indeksi efikasnosti približavaju indeksima efikasnosti metoda (4.25) \wedge (4.27)/(4.28) i (4.26) \wedge (4.27)/(4.28) sa porastom ukupnog broja iteracija, jer je negativni efekat skupe prve iteracije umanjen.

Napomena 4.3 Na prvi pogled, neophodnost tri početne aproksimacije da bi se započeo metod (4.14) je veliki nedostatak. To bi zaista bilo tako ukoliko bismo za nalaženje dodatnih početnih aproksimacija y_{-1} i z_{-1} koristili neki iterativni metod, trošeći dodatna funkcijska izračunavanja. Međutim, kao što je objašnjeno u Napomeni 4.1, pod pretpostavkom da smo odredili jednu početnu aproksimaciju x_0 (neophodnu za bilo koji iterativni metod), sledeću početnu aproksimaciju y_{-1} možemo odrediti kao $y_{-1} = N(x_0)$, što ne zahteva dodatna izračunavanja funkcije f s obzirom da se $N(x_0)$ svakako koristi u prvoj iteraciji. Mnogi eksperimenti u praksi su pokazali da treću aproksimaciju z_{-1} možemo uzeti dovoljno blizu već nađenom y_{-1} , na primer

$$z_{-1} = y_{-1} \pm \delta, \quad \text{gde je} \quad \delta \approx |f(x_0)/(f'(x_0) + f(x_0))|.$$

Primitimo da metodi (4.9) i (4.14) mogu konvergirati sporije na početku iterativnog procesa ukoliko početna vrednost x_0 (pa samim tim i y_{-1} i z_{-1}) nije dovoljno blizu tražene nule α , ali to je slučaj sa svim iterativnim metodima sa lokalnom konvergencijom. Ova eventualna smetnja može biti otklonjena u većini „nepatoloških” slučajeva primenom efikasnog algoritma za nalaženje dovoljno dobrih početnih aproksimacija koji je u skorije vreme predložio Jun [96] i kasnije razradili autori rada [80].

4.5 Numerički primeri

U ovom odeljku poređićemo

- 1) dvokoračni metod (4.9) sa nekim postojećim dvokoračnim metodima reda četiri i
- 2) trokoračni metod (4.14) sa nekim postojećim trokoračnim metodima reda osam.

Kung-Traubovi metodi sa samokorigujućim parametrom dvokoračni (4.25)^(4.27)/(4.28) i trokoračni (4.26)^(4.27)/(4.28) su takođe testirani. Test funkcije f , tražene nule α kao i početne aproksimacije x_0 , dati su u Tabeli 4.4. Dvokoračni metodi su primenjeni u Primerima 4.1–4.4, a trokoračni metodi u Primerima 4.5–4.8, uz napomenu da su druga i četvrta test funkcija iz Tabele 4.4 testirane kod oba tipa metoda.

Primer	Funkcija	Koren α	x_0
4.1	$(x-2)(x^{10}+x+1)e^{-5x}$	2	1.7
4.2,4.5	$e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$	-1	-0.5 (Pr. 4.2), -0.2 (Pr. 4.5)
4.3	$\log(x^2+x+2) - x + 1$	4.1525907367...	5
4.4,4.6	$e^x \sin x + \log(x^2+1)$	0	0.25 (Pr. 4.4), 0.3 (Pr. 4.6)
4.7	$e^{x^2-1} \sin x + \cos 2x - 2$	1.4477948574...	1.3
4.8	$(x-1)(x^{10}+x^3+1) \sin x$	1	1.1

TABELA 4.4 Test funkcije

Testirani su sledeći metodi

- **Kingova familija** (1.50)
- **Džeretov metod** (1.63),
- **Mahešvarijev metod** (1.59),
- **Ren-Wu-Bi** (1.61),
- **Kung-Traubov metod** (1.57) bez izvoda (verzija 1), reda 4 i 8,
- **Kung-Traubov metod** (1.56) sa izvodima (verzija 2), reda 4 i 8,

Zbog kratkoće, u Tabelama 4.5–4.12 Kung-Traubove metode, verzije 1 i 2, označene su sa KT1 i KT2, redom. Podsetimo se da Kung-Traubove familije n -koračnih metoda ($n \geq 2$) imaju red konvergencije 2^n ; bavili smo se slučajevima $n = 2$ u Primerima 4.1–4.4, i $n = 3$ u Primerima 4.5–4.8.

Koristili smo programski paket *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti koja se oslanja na GNU paket višestruke preciznosti GMP razvijen u Granlundu [32]. Greške $|x_k - \alpha|$ prvih nekoliko iteracija date su u Tabelama 4.5–4.12, gde oznaka $A(-h)$ predstavlja $A \times 10^{-h}$.

1) Dvokoračni metodi: numerički primeri

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
King (1.50), $\beta = 0$	1.39(-2)	2.14(-9)	3.45(-37)	2.35(-148)
King (1.50), $\beta = 1$	2.92(-2)	7.46(-8)	5.12(-31)	1.14(-123)
King (1.50), $\beta = 2$	5.55(-2)	1.77(-6)	1.61(-25)	1.12(-101)
Džeret (1.63)	1.37(-2)	4.57(-10)	1.05(-39)	2.97(-158)
Mahešvari (1.59)	4.24(-2)	4.58(-7)	7.26(-28)	4.60(-111)
Ren-Vu-Bi (1.61)	1.58(-2)	4.30(-9)	6.21(-36)	2.69(-143)
KT1 (1.57), $\gamma = 0.01$	1.96(-2)	1.09(-8)	2.31(-34)	4.68(-137)
KT1 (1.57) \wedge (4.27) $\gamma_0 = 0.01$	1.96(-2)	1.07(-9)	5.17(-45)	2.51(-201)
KT1 (1.57) \wedge (4.28) $\gamma_0 = 0.01$	1.96(-2)	7.85(-11)	3.36(-49)	2.42(-220)
KT2 (1.56)	1.96(-2)	1.08(-8)	2.23(-34)	4.12(-137)
Dvokoračni IM (4.9)	4.50(-3)	1.18(-11)	1.37(-50)	4.20(-228)

TABELA 4.5 Rezultati Primera 4.1 - dvokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
King (1.50), $\beta = 0$	4.26(-4)	2.12(-15)	1.31(-60)	1.93(-241)
King (1.50), $\beta = 1$	2.57(-3)	2.44(-12)	1.99(-48)	8.80(-193)
King (1.50), $\beta = 2$	4.79(-3)	2.42(-11)	1.58(-44)	2.91(-177)
Džeretov (1.63)	2.27(-3)	2.04(-12)	1.34(-48)	2.50(-193)
Mahešvari (1.59)	3.68(-3)	9.35(-12)	3.90(-46)	1.18(-183)
Ren-Vu-Bi IM (1.61)	1.50(-3)	1.63(-11)	2.26(-43)	8.23(-171)
KT1 (1.57), $\gamma = 0.01$	1.68(-3)	5.39(-13)	5.73(-51)	7.28(-203)
KT1 (1.57) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	1.68(-3)	3.66(-14)	1.39(-62)	8.29(-278)
KT1 (1.57) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	1.68(-3)	9.39(-15)	3.70(-65)	2.76(-289)
KT2 (1.56)	1.30(-3)	1.73(-13)	5.37(-53)	5.02(-211)
Dvokoračni IM (4.9)	1.38(-5)	6.18(-24)	1.71(-107)	1.37(-488)

TABELA 4.6 Rezultati Primera 4.2 - dvokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
King (1.50), $\beta = 0$	1.86(-4)	7.48(-19)	1.94(-76)	8.70(-307)
King (1.50), $\beta = 1$	2.84(-4)	6.86(-18)	2.35(-72)	3.21(-290)
King (1.50), $\beta = 2$	3.74(-4)	2.92(-17)	1.09(-69)	2.13(-279)
Děrt (1.63)	2.16(-4)	1.51(-18)	3.61(-75)	1.18(-301)
Mahešvari (1.59)	3.29(-4)	1.49(-17)	6.35(-71)	2.08(-284)
Ren-Vu-Bi IM (1.61)	3.00(-5)	7.97(-23)	3.93(-93)	6.18(-371)
KT1 (1.57), $\gamma = 0.01$	2.34(-4)	2.50(-18)	3.25(-74)	9.26(-298)
KT1 (1.57) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	2.34(-4)	1.70(-20)	1.66(-92)	6.71(-413)
KT1 (1.57) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	2.34(-4)	5.06(-21)	1.10(-94)	1.16(-422)
KT2 (1.56)	2.37(-4)	2.65(-18)	4.11(-74)	2.39(-297)
Dvokoračni IM (4.9)	1.70(-6)	3.81(-31)	3.88(-143)	8.36(-654)

TABELA 4.7 Rezultati Primera 4.3 - dvokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	$ x_4 - \alpha $
King (1.50), $\beta = 0$	6.54(-3)	1.28(-8)	1.96(-31)	1.08(-122)
King (1.50), $\beta = 1$	1.17(-2)	3.82(-7)	4.99(-25)	1.45(-96)
King (1.50), $\beta = 2$	1.49(-2)	1.58(-6)	2.45(-22)	1.43(-85)
Džeret (1.63)	6.47(-3)	1.21(-8)	1.59(-31)	4.66(-123)
Mahešvari (1.59)	1.33(-2)	8.26(-7)	1.46(-23)	1.42(-90)
Ren-Vu-Bi IM (1.61)	1.89(-2)	3.16(-6)	2.93(-21)	2.16(-81)
KT1 (1.57), $\gamma = 0.01$	9.90(-3)	1.37(-7)	5.59(-27)	1.53(-104)
KT1 (1.57) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	9.90(-3)	3.45(-8)	1.81(-32)	8.28(-141)
KT1 (1.57) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	9.90(-3)	1.56(-8)	3.42(-34)	2.03(-148)
KT2 (1.56)	9.71(-3)	1.25(-7)	3.76(-27)	3.05(-105)
Dvokoračni IM (4.9)	1.63(-3)	3.82(-12)	2.37(-51)	3.94(-230)

TABELA 4.8 Rezultati Primera 4.4 - Dvokoračni metodi

Iz Tabela 4.5–4.8 primećujemo da dvokoračni metodi (4.9) i (4.25) \wedge (4.27)/(4.28) sa memorijom daju aproksimacije veće tačnosti u odnosu na dvokoračne metode reda četiri. Što se tiče ova dva metoda, više nego jasno je da novi metod (4.9) daje aproksimacije još bolje tačnosti u svim testiranim primerima. Ova dominantnost je naročita u Primerima 4.2–4.4. Osim toga, iz Tabele 4.2 vidimo da R -red konvergencije (≈ 4.56) novog metoda (4.9) je nešto veći nego R -red Kung-Traubovog metoda (4.25) \wedge (4.27/4.28) sa memorijom (≈ 4.45). S druge strane, metod (4.9) koristi jedno funkcijsko izračunavanje više u prvoj iteraciji (u poređenju sa (4.25) \wedge (4.27/4.28) i drugim dvokoračnim metodima optimalnog reda četiri), što umanjuje njegovu računsku efikasnost do određene mere, videti Tabelu 4.3. Iz ovog razloga, teško je reći koji od metoda (4.9) i (4.25) \wedge (4.27/4.28) je bolji. Jedino je jasno da negativni efekat pomenutog dodatnog funkcijskog izračunavanja u prvoj iteraciji se smanjuje sa porastom ukupnog broja iteracija, čime se povećava efikasnost novog metoda (4.9), videti Tabelu 4.3.

2) Trokoračni metodi: numerički primeri

Pored Netinog metoda (4.14) i već pomenutih Kung-Traubovih metoda (reda 8 u ovom delu), takođe smo testirali sledeće trokoračne metode:

- **Bi-Vu-Ren metod**; izabrali smo dve varijante (1.70) označene sa BWR 1 i BWR 2, kao što je to urađeno u [4],

- **Petković-King metod**, (1.69) [63], [64] i [74]. Primetimo da opštiji metod, zasnovan na Ermitovom interpolacionom polinomu stepena 3, može koristiti proizvoljan dvokoračni metod optimalnog reda četiri u prva dva koraka. Izabrali smo Kingov metod, zbog čega ga navodimo u imenu testiranog metoda.

- **Neta-Petković metod** (4.24), [56].

Napominjemo da se nekoliko trokoračnih metoda optimalnog reda osam pojavilo u skorije vreme, npr. [3], [4], [14], [15], [29]–[31], [43], [47], [85], [92], [93]. Svi ovi metodi pokazuju slično ponašanje kao i testirani trokoračni metodi i zbog toga ih nismo uvrstili u tabele.

4 Trokoračni metodi konstruisani inverznom interpolacijom

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	2.05(-4)	1.73(-32)	4.37(-257)
KT1 (1.65) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	2.05(-4)	1.59(-34)	7.75(-291)
KT1 (1.65) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	2.05(-4)	2.88(-35)	2.80(-297)
KT2 (1.66)	1.90(-4)	7.41(-33)	3.97(-260)
BWR1 (1.70)	2.14(-4)	1.34(-32)	3.22(-258)
BWR2 (1.70)	3.14(-4)	4.08(-31)	3.28(-246)
Petković-King (1.67), $\beta = 0$	2.84(-4)	8.01(-32)	3.22(-252)
Petković-King (1.68), $\beta = 1$	3.44(-4)	3.03(-31)	1.09(-247)
Neta-Petković (4.24)	1.62(-4)	2.26(-33)	3.17(-264)
Neta (4.14)	5.51(-8)	7.76(-77)	6.94(-775)

TABELA 4.9 Rezultati Primera 4.5 – trokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	8.13(-4)	2.16(-22)	5.45(-171)
KT1 (1.65) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	8.13(-4)	1.97(-23)	1.02(-189)
KT1 (1.65) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	8.13(-4)	4.40(-24)	1.08(-195)
KT2 (1.66)	7.84(-4)	1.56(-22)	3.96(-172)
BWR1 (1.70)	6.53(-5)	1.14(-32)	9.57(-255)
BWR2 (1.70)	4.08(-4)	2.44(-25)	3.53(-195)
Petković-King (1.67), $\beta = 0$	1.92(-4)	1.85(-28)	1.39(-220)
Petković-King (1.68), $\beta = 1$	5.71(-4)	1.18(-23)	4.08(-181)
Neta-Petković (4.24)	5.54(-4)	4.66(-24)	1.17(-184)
Neta (4.14)	1.62(-6)	1.38(-55)	3.56(-552)

TABELA 4.10 Rezultati Primera 4.6 – trokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	6.23(-4)	1.45(-23)	1.22(-180)
KT1 (1.65) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	6.23(-4)	7.85(-24)	4.01(-199)
KT1 (1.65) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	6.23(-4)	1.38(-25)	1.49(-208)
KT2 (1.66)	4.67(-4)	1.04(-24)	6.59(-190)
BWR1 (1.70)	3.68(-4)	8.88(-26)	1.03(-198)
BWR2 (1.70)	0.16	1.30(-4)	1.56(-28)
Petković-King (1.67), $\beta = 0$	2.20(-5)	2.21(-36)	2.31(-284)
Petković-King (1.68), $\beta = 1$	1.73(-3)	6.73(-20)	3.53(-151)
Neta-Petković (4.24)	1.20(-4)	6.37(-30)	3.92(-232)
Neta (4.14)	1.70(-6)	2.28(-56)	1.59(-458)

TABELA 4.11 Rezultati Primera 4.7 – trokoračni metodi

Metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $
KT1 (1.65), $\gamma = 0.01$	3.89(-4)	9.36(-23)	1.05(-171)
KT1 (1.65) \wedge (4.27), $\gamma_0 = 0.01$	3.89(-4)	1.50(-23)	4.30(-188)
KT1 (1.65) \wedge (4.28), $\gamma_0 = 0.01$	3.89(-4)	2.76(-24)	7.60(-195)
KT2 (1.66)	3.41(-4)	2.94(-23)	9.00(-176)
BWR1 (1.70)	9.21(-4)	1.17(-19)	7.76(-147)
BWR2 (1.70)	1.35(-3)	1.94(-17)	3.09(-128)
Petković-King (1.67), $\beta = 0$	1.11(-4)	3.05(-28)	9.75(-217)
Petković-King (1.68), $\beta = 1$	5.79(-4)	5.68(-21)	4.93(-157)
Neta-Petković (4.24)	1.38(-4)	4.47(-27)	5.39(-207)
Neta (4.14)	1.26(-6)	3.08(-54)	4.04(-536)

TABELA 4.12 Rezultati Primera 4.8 – trokoračni metodi

Iz Tabela 4.9–4.12 vidimo da metod (4.14), konstruisan inverznom interpolacijom, produkuje aproksimacije najveće tačnosti. Takođe, njegov R -red (≈ 10.815) je veći od R -reda preostalih testiranih metoda. S druge strane, metod (4.14) koristi dva funkcijska izračunavanja više u prvoj iteraciji, što umanjuje njegovu računsku efikasnost (videti Tabelu 4.3.). Zbog toga, komentari i zaključci dati gore za dvokoračne metode takođe važe i za trokoračne metode.

Familije višekoračnih metoda sa i bez memorije

Tema ovog poglavlja je konstrukcija višekoračnih metoda sa memorijom, zadatak koji je retko razmatran u literaturi. Naš cilj je da pokažemo da metodi sa memorijom mogu postići znatno bržu konvergenciju u odnosu na odgovarajuće metode bez memorije, bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Na ovaj način računaska efikasnost se bitno povećava. Ubrzanje konvergencije se postiže odgovarajućom varijacijom slobodnog parametra u svakom iterativnom koraku. Ovaj samokorigujući parametar se izračunava na osnovu informacija iz tekuće i prethodne iteracije primenom Njutnovog interpolacionog polinoma. Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu [66].

Ograničićemo razmatranje na Kung-Traubovu n -koračnu familiju [44] i Čeng¹-Li-Huangovu n -koračnu familiju [98] iz sledećih razloga:

- 1) obe familije su optimalne u smislu Kung-Traubove hipoteze;
- 2) red konvergencije može biti proizvoljno veliki (oblika 2^n);
- 3) obe ove familije ne koriste izvod funkcije, što je pogodno u svim situacijama kada je računanje izvoda funkcije f komplikovano.

Poglavlje je organizovano na sledeći način. Kung-Traubova familija [44] i Čeng-Li-Huangova familija [98] višekoračnih metoda bez memorije su ukratko izložene u odeljku 5.1. Ideja i motivacija za ubrzanje konvergencije, koje proističu iz oblika izraza za asimptotsku konstantu greške, date su u odeljku 5.2. Ovaj izraz sadrži faktor $(1 + \gamma f'(\alpha))^{2^m}$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$). Ako se umesto konstantnog parametra γ , kao što je to slučaj kod metoda bez memorije, radi sa promenljivim (samokorigujućim) parametrom γ vrlo bliskim vrednosti $-1/f'(\alpha)$, pokazuje se da se red konvergencije ovako ubrzanog metoda bitno povećava. Pristup koji ćemo opisati, pri izračunavanju promenljivog parametra γ koristi jedino već izračunate podatke tako da se ne povećava računaska cena iterativnog procesa. Na ovaj način postiže se visoka računaska efikasnost, što je predmet ovog poglavlja. U odeljku 5.3 određujemo donju granicu R -reda konvergencije predloženih familija sa memorijom. Klasični metod sečice, razmatran u Traubovoj knjizi [88, str. 185–187] i proširen

¹ Q. Zheng

u radu [72], daje red $\frac{1}{2}(2^n + \sqrt{2^n(2+2^n)})$. Poboljšani metod sečice daje veći red $2^n + 2^{j-1}$ ($j \in \{1, \dots, n-1\}$). Primena Njutnovog interpolacionog polinoma višeg reda daje još bolje rezultate: najveći postignut R -red je ne manji od $2^n + 2^{n-1}$. Numerički primeri su izloženi u odeljku 5.4.

5.1 Familije bez izvoda proizvoljnog reda bez memorije

Neka je α prosta nula realne funkcije $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i neka je x_0 početna aproksimacija nule α . U ovom odeljku predstavimo dve familije n -koračnih metoda bez izvoda i bez memorije za rešavanje nelinearnih jednačina. Obe ove familije imaju sličnu strukturu, red konvergencije 2^n i koriste $n+1$ funkcijskih izračunavanja po iteraciji, što znači da daju optimalne metode u smislu hipoteze Kung-Traub [44]. Ove familije ćemo modifikovati primenom specijalne tehnike za ubrzanje konvergencije u veoma efikasne uopštene metode sa memorijom.

Kao i ranije, koristićemo normalizovane koeficijente Tejlorovog razvoja funkcije f ,

$$c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)} \quad (j = 2, 3, \dots).$$

Kung-Traubova familija

Još 1974. godine Kung i Traub [44] su razvili sledeću familiju iterativnih metoda bez memorije koja ne koristi izvode funkcije (kraće K-T familija):

K-T familija: Za početnu aproksimaciju x_0 , proizvoljno $n \in \mathbf{N}$ i $k = 0, 1, \dots$, definišemo iterativnu funkciju $\psi_j(f)$ ($j = -1, 0, \dots, n$) kao što sledi:

$$\begin{cases} y_{k,0} = \psi_0(f)(x_k) = x_k, \\ y_{k,-1} = \psi_{-1}(f)(x_k) = x_k + \gamma f(x_k), \quad \gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ y_{k,j} = \psi_j(f)(x_k) = \mathcal{R}_j(0), \quad j = 1, \dots, n, \text{ za } n > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

gde $\mathcal{R}_j(\tau)$ predstavlja inverzni interpolacioni polinom stepena ne većeg od j takav da

$$\mathcal{R}_j(f(y_{k,m})) = y_{k,m}, \quad m = -1, 0, \dots, j-1.$$

Kung-Traubov iterativni metod je definisan sa $x_{k+1} = y_{k,n} = \psi_n(f)(x_k)$ polazeći od početne aproksimacije x_0 . U radu [44] dokazano je da je red konvergencije familije (5.1) jednak 2^n ($n \geq 1$).

Aproksimaciju $y_{k,j}$ ($j < n$) u j -tom koraku u okviru k -te iteracije zvaćemo *međuprosimacijom* sa odgovarajućom *međugreškom* $\varepsilon_{k,j} = y_{k,j} - \alpha$. Prema ovakvoj terminologiji, $y_{k,n-1}$ je *pretposlednja* aproksimacija i $y_{k,n}$ ($= x_{k+1}$) je *krajnja* aproksimacija k -te iteracije.

Sledeća relacija greške za familiju (5.1) izvedena je u [44]

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha \sim (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-1}} B_n(f) \varepsilon_k^{2^n}, \quad (5.2)$$

gde je

$$B_n(f) = \Upsilon_n(f) \prod_{j=1}^{n-1} \Upsilon_j(f) 2^{n-1-j}, \quad \Upsilon_j(f) = \frac{(-1)^{j+1} \mathcal{F}^{(j+1)}(0)}{(j+1)! (\mathcal{F}'(0))^{j+1}}, \quad (5.3)$$

i \mathcal{F} je inverzna funkcija funkcije f . Na osnovu (5.1) i (5.2), jasno je da je *međurelacija* greške ekvivalentna izrazu datom u (5.2), tako da

$$\varepsilon_{k,j} = y_{k,j} - \alpha \sim (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{j-1}} B_j(f) \varepsilon_k^{2^j} \quad (5.4)$$

važi za sve $1 \leq j \leq n-1$.

Čeng-Li-Huangova familija

U nedavnom radu [98] Čeng, Li i Huang predložili su familiju bez izvoda (kraće Z-L-H familija) n -koračnih metoda proizvoljnog reda konvergencije 2^n ($n \geq 1$). Osnovu za konstrukciju familije predstavlja Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama.

Z-L-H familija: Za početnu aproksimaciju x_0 , proizvoljno $n \in \mathbf{N}$ i indeks iteracije $k = 0, 1, \dots$, n -koračni metod definisan je sa

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{k,0} = x_k, \quad y_{k,-1} = y_{k,0} + \gamma f(y_{k,0}), \quad \gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ y_{k,1} = y_{k,0} - \frac{f(y_{k,0})}{f[y_{k,0}, y_{k,-1}]}, \\ y_{k,2} = y_{k,1} - \frac{f(y_{k,1})}{f[y_{k,1}, y_{k,0}] + f[y_{k,1}, y_{k,-1}](y_{k,1} - y_{k,0})}, \\ \vdots \\ y_{k,n} = y_{k,n-1} - \frac{f(y_{k,n-1})}{f[y_{k,n-1}, y_{k,n-2}] + \sum_{j=1}^{n-1} f[y_{k,n-1}, \dots, y_{k,n-2-j}] \prod_{i=1}^j (y_{k,n-1} - y_{k,n-1-i})} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Veličine $y_{k,1}, \dots, y_{k,n-1}$ su međuproksimacije Z-L-H familije, dok je $x_{k+1} = y_{k,n}$ finalna k -ta aproksimacija. $f[x, y] = (f(x) - f(y))/(x - y)$ označava podeljenu razliku. Podeljene razlike višeg reda definišu se rekurzivno pomoću formule

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0} \quad (i > 1).$$

Sledeća teorema je dokazana u radu [98].

Teorema 5.1 Neka je $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dovoljan broj puta diferencijabilna funkcija sa prostom nulom α unutar otvorenog intervala $I_f \subset D$. Ako je x_0 dovoljno blizu nule α , onda n -koračna familija (5.5) konvergira sa redom bar 2^n i zadovoljava relaciju greške

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha = y_{k,n} - \alpha \sim D_n \varepsilon_k^{2^n} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (5.6)$$

gde je

$$D_{-1} = 1 + \gamma f'(\alpha), \quad D_0 = 1, \quad D_1 = (1 + \gamma f'(\alpha))c_2, \quad (5.7)$$

$$D_m = D_{m-1} \left[c_2 D_{m-1} + (-1)^{m-1} c_{m+1} D_{m-2} \cdots D_{-1} \right], \quad (m = 2, \dots, n). \quad (5.8)$$

Kao i u slučaju familije Kung-Traub (5.1), međurelacije greške date su sa

$$\varepsilon_{k,j} = y_{k,j} - \alpha \sim D_j \varepsilon_k^{2^j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (5.9)$$

pri čemu se konstante D_j rekurzivno računaju na osnovu relacija (5.7) i (5.8). Finalna (k -ta) relacija greške je takođe data formulom (5.9) za $j = n$.

Pokazaćemo da su konstante D_m u relaciji greške (5.6) oblika

$$D_m = (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{m-1}} d_m \quad (m = 1, \dots, n), \quad (5.10)$$

pri čemu se d_m izračunava rekurzivno pomoću relacija

$$d_{-1} = D_{-1} = 1, \quad d_0 = D_0 = 1, \quad d_1 = c_2, \quad (5.11)$$

$$d_m = d_{m-1} \left[c_2 d_{m-1} + (-1)^{m-1} c_{m+1} d_{m-2} \cdots d_{-1} \right] \quad (m = 2, \dots, n). \quad (5.12)$$

Za $m = 1$ tvrđenje (5.10) je očigledno. Pretpostavimo da (5.10) i (5.12) važe za sve $m < n$. Na osnovu (5.8) nalazimo

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} \left[c_2 D_{n-1} + (-1)^{n-1} c_{n+1} D_{n-2} \cdots D_{-1} \right] \\ &= (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \left[c_2 (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} c_{n+1} (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-3}} d_{n-2} \cdots (1 + \gamma f'(\alpha)) d_1 d_0 (1 + \gamma f'(\alpha)) d_{-1} \right] \\ &= (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \left[c_2 (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} c_{n+1} (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-3} + 2^{n-2} + \cdots + 1 + 1} d_{n-2} \cdots d_{-1} \right] \\ &= (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \left[c_2 (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} c_{n+1} (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-2}} d_{n-2} \cdots d_{-1} \right] \\ &= (1 + \gamma f'(\alpha))^{2^{n-1}} d_{n-1} \left[c_2 d_{n-1} + (-1)^{n-1} c_{n+1} d_{n-2} \cdots d_{-1} \right]. \end{aligned}$$

Dakle, indukcijom, zaključujemo da se međurelacije greške mogu napisati u obliku

$$\varepsilon_{k,j} \sim d_j(1 + \gamma f'(\alpha))^{2^j-1} \varepsilon_k^{2^j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (5.13)$$

gde je d_j definisano relacijama (5.11) i (5.12). Primitimo da (5.13) uključuje i krajnju relaciju greške za $j = n$, tj.

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k,n} = y_{k,n} - \alpha \sim d_n(1 + \gamma f'(\alpha))^{2^n-1} \varepsilon_k^{2^n}. \quad (5.14)$$

Napomena 5.1 Obe familije (5.1) i (5.5) n -koračnih metoda imaju isti red konvergenције 2^n i zahtevaju $n + 1$ funkcijskih izračunavanja po iteraciji, što znači da podržavaju Kung-Traubovu hipotezu o gornjoj granici reda konvergenције metoda bez memorije. Obe familije takođe ne koriste izvode funkcije, imaju sličnu strukturu i relacije greške istog tipa. To nam pomaže da narednu analizu za obe familije vršimo istovremeno.

5.2 Familije bez izvoda sa memorijom

U ovom odeljku pokazaćemo da se red konvergenције Kung-Traubove familije (5.1) i Čeng-Li-Huangove familije (5.5) može ubrzati bez dodatnih funkcijskih izračunavanja. Konstrukcija novih familija n -koračnih metoda bez izvoda zasnovana je na varijaciji slobodnog parametra γ u svakom iterativnom koraku. Ovaj parametar se izračunava na osnovu informacija iz trenutne i prethodne iteracije tako da se razmatrani metodi mogu ubrojati u metode sa memorijom.

Kao što je već napomenuto u odeljku 2.2, faktor $1 + \gamma f'(\alpha)$ u relacijama greške (5.2) i (5.4) (za K-T familiju), i (5.13) i (5.14) (za Z-L-H familiju) ima ključnu ulogu u konstrukciji familije sa memorijom. Obe relacije greške (5.4) i (5.13) mogu se predstaviti u istom obliku

$$\varepsilon_{k,j} \sim a_{k,j}(1 + \gamma f'(\alpha))^{2^j-1} \varepsilon_k^{2^j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (5.15)$$

gde je $\varepsilon_k = y_{k,0} - \alpha = x_k - \alpha$ i $\varepsilon_{k,j} = y_{k,j} - \alpha$ ($j = 1, \dots, n$). Konstante $a_{k,j}$ zavise od posmatrane familije i mogu biti rekurzivno određene iz relacija (5.4) i (5.12). Ipak, ovde ćemo se koncentrisati na donju granicu R -reda konvergenције metoda sa memorijom, tako da konkretni izrazi za d_n i asimptotsku konstantu greške nisu u domenu našeg interesovanja. Upotreba jedinstvene relacije (5.15) omogućava nam da analiziramo istovremeno obe familije sa memorijom zasnovane na familijama (5.1) i (5.5).

Na osnovu (5.15), zaključujemo da je red konvergenције familija (5.1) i (5.5) jednak 2^n , pod uslovom $\gamma \neq -1/f'(\alpha)$. Može se pokazati da, kada bismo mogli da izaberemo $\gamma = -1/f'(\alpha)$, red konvergencije familija (5.1) i (5.5) bi iznosio $2^n + 2^{n-1}$. Ipak, vrednost $f'(\alpha)$ nije dostupna u praksi i možemo koristiti jedino aproksimaciju $\tilde{f}'(\alpha) \approx f'(\alpha)$, zasnovanu na dostupnim informacijama. Tada, uzimajući $\gamma_k = -1/\tilde{f}'(\alpha)$, postizemo da brzina konvergencije modifikovanih metoda prevazilazi 2^n bez ikakvog dodatnog izračunavanja funkcije f .

Aproksimacija $\gamma \approx -1/f'(\alpha)$ koja daje najbolje rezultate jeste ona koja koristi jedino postojeće informacije, drugim rečima, želimo da povećamo red konvergencije bez dodatnog računskog utroška. U ovom poglavlju predstavljamo sledeći model za aproksimaciju izvoda $f'(\alpha)$:

$\tilde{f}'(\alpha) = N'_m(y_{k,0})$ (Njutnova interpolacija), gde

$$N_m(\tau) = N_m(\tau; y_{k,0}, y_{k-1, n-j_1}, \dots, y_{k-1, n-j_m}), \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n+1$$

predstavlja Njutnov interpolacioni polinom stepena $1 \leq m \leq n+1$, postavljen kroz $m+1$ dostupnih aproksimacija (čvorova) $y_{k,0}, y_{k-1, n-j_1}, \dots, y_{k-1, n-j_m}$. Tada formula za izračunavanje parametra γ_k glasi:

$$\gamma_k = -\frac{1}{N'_m(y_{k,0})} \approx -\frac{1}{f'(\alpha)}. \quad (5.16)$$

Zamenjujući parametar γ konstantne vrednosti u iterativnim formulama (5.1) i (5.5) promenljivim parametrom γ_k koji se računa po formuli (5.16), dobijamo sledeće familije višekoračnih metoda sa memorijom:

K-T familija sa memorijom: Za početnu aproksimaciju x_0 , proizvoljno $n \in \mathbf{N}$, γ_k određeno izrazom (5.16) i $k = 0, 1, \dots$, definišemo ponovo iterativnu funkciju $\psi_j(f)$ za $j = -1, 0, \dots, n$ na sledeći način:

$$\begin{cases} y_{k,0} = \psi_0(f)(x_k) = x_k, \\ y_{k,-1} = \psi_{-1}(f)(x_k) = x_k + \gamma_k f(x_k), \\ y_{k,j} = \psi_j(f)(x) = \mathcal{R}_j(0), \quad j = 1, \dots, n, \text{ za } n > 0, \\ x_{k+1} = y_{k,n} = \psi_n(f)(x_k). \end{cases} \quad (5.17)$$

Z-L-H familija sa memorijom: Za početnu aproksimaciju x_0 , proizvoljno $n \in \mathbf{N}$, γ_k određeno izrazom (5.16) i $k = 0, 1, \dots$, n -koračni metodi su definisani sa

$$\begin{cases} y_{k,0} = x_k, \quad y_{k,-1} = y_{k,0} + \gamma_k f(y_{k,0}), \\ y_{k,1} = y_{k,0} - \frac{f(y_{k,0})}{f[y_{k,0}, y_{k,-1}]}, \\ y_{k,2} = y_{k,1} - \frac{f(y_{k,1})}{f[y_{k,1}, y_{k,0}] + f[y_{k,1}, y_{k,0}, y_{k,-1}](y_{k,1} - y_{k,0})}, \\ \vdots \\ y_{k,n} = y_{k,n-1} - \frac{f(y_{k,n-1})}{f[y_{k,n-1}, y_{k,n-2}] + \sum_{j=1}^{n-1} f[y_{k,n-1}, \dots, y_{k,n-2-j}] \prod_{i=1}^j (y_{k,n-1} - y_{k,n-1-i})}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Koristimo termin *metod sa memorijom* prema Traubovoj klasifikaciji [88, str. 8] zbog činjenice da vrednost γ_k zavisi od podataka dostupnih iz trenutne i prethodne iteracije.

Napomena 5.2 Primitimo da metod sečice iz odeljka 2.2, predstavlja Njutnov interpolacioni polinom stepena 1.

Napomena 5.3 Čeng-Li-Huangova familija (5.18) je izuzetno pogodna za primenu aproksimacije $f'(\alpha)$ zasnovane na Njutnovoj interpolaciji, s obzirom da se podeljene razlike već izračunavaju prilikom implementacije iterativne šeme (5.18).

5.3 R -red konvergencije familija sa memorijom

Da bismo ocenili brzinu konvergencije familija (5.17) i (5.18), upotrebićemo koncept R -reda konvergencije [58]. Razdvajamo analizu metoda primenjenog za izračunavanje promenljivog parametra γ_k datog formulom (5.16), prema tome da li se za interpolacione čvorove koriste aproksimacije $y_{k-1,0}$ i $y_{k-1,-1}$.

Metod I $j_m < n$: Pretpostavimo prvo da aproksimacije $y_{k-1,0}$ i $y_{k-1,-1}$ nisu među čvorovima interpolacije. Tada na osnovu formule (1.12) date u Lemi 1.1 važi

$$N'_m(y_{k,0}) \sim f'(\alpha) \left(1 + (-1)^{m+1} c_{m+1} \prod_{i=1}^m \varepsilon_{k-1, n-j_i} \right),$$

odnosno

$$1 + \gamma_k f'(\alpha) \sim (-1)^{m+1} c_{m+1} \prod_{i=1}^m \varepsilon_{k-1, n-j_i}. \quad (5.19)$$

Kao i u odeljku 2.2, imamo sledeće relacije

$$\varepsilon_{k+1} \sim A_{k,r} \varepsilon_k^r \sim A_{k,r} A_{k-1,r}^r \varepsilon_{k-1}^{r^2}, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_{k, n-j_s} \sim A_{k, n-j_s} \varepsilon_k^{r_s} \sim A_{k, n-j_s} A_{k-1, r}^{r_s} \varepsilon_{k-1}^{r_s r_s}, \quad 1 \leq s \leq m. \quad (5.21)$$

Kombinujući relacije (5.15) i (5.19)–(5.21) izvodimo relacije grešaka u opštem obliku

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_{k,n} c_{m+1}^{2^{n-1}} A_{k-1,r}^{2^n} \left(\prod_{i=1}^m A_{k-1, n-j_i} \right)^{2^{n-1}} \varepsilon_{k-1}^{2^n r + 2^{n-1} (r_1 + \dots + r_m)}, \quad (5.22)$$

$$\varepsilon_{k, n-j_s} \sim a_{k, n-j_s} c_{m+1}^{2^{n-j_s-1}} A_{k-1,r}^{2^{n-j_s}} \left(\prod_{i=1}^m A_{k-1, n-j_i} \right)^{2^{n-j_s-1}} \varepsilon_{k-1}^{2^{n-j_s} r + 2^{n-j_s-1} (r_1 + \dots + r_m)}, \quad (5.23)$$

za $1 \leq s \leq m$. Izjednačavajući eksponente greške ε_{k-1} u parovima relacija (5.20)^(5.22), kao i (5.21)^(5.23) za svako $1 \leq s \leq m$, dolazimo do sistema od $m + 1$ jednačina

$$\begin{cases} r^2 - 2^n r - 2^{n-1}(r_1 + \dots + r_m) = 0, \\ r r_s - 2^{n-j_s} r - 2^{n-j_s-1}(r_1 + \dots + r_m) = 0, \quad 1 \leq s \leq m, \end{cases} \quad (5.24)$$

po nepoznatim r, r_1, \dots, r_m . Rešavanjem ovog sistema dobijamo da su vrednosti *među-redova* $r_i = 2^{-j_i} r$, i da je traženi R -red konvergencije pozitivno rešenje kvadratne jednačine

$$r^2 - r \left(2^n + \sum_{i=1}^m 2^{n-j_i-1} \right) = 0,$$

odakle je

$$r = 2^n + \sum_{i=1}^m 2^{n-j_i-1}. \quad (5.25)$$

Na osnovu (5.25) vidimo da se maksimum reda konvergencije, za dati stepen m polinoma N_m , postiže za minimalne j_i , odnosno kada se informacije o funkciji f koriste u najboljim dostupnim aproksimacijama $y_{k,0}, y_{k-1,n-1}, \dots, y_{k-1,n-m}$. U tom slučaju red konvergencije iznosi

$$r = 2^n + \sum_{i=1}^m 2^{n-i-1} = \begin{cases} 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-m-1}, & m > 1 \\ 2^n + 2^{n-i-1}, & m = 1, \quad 0 \leq i \leq n-2. \end{cases} \quad (5.26)$$

Najveći red konvergencije metodom I, na osnovu (5.26), postiže se za najveći stepen polinoma moguće u ovom slučaju $m = n-1$. Tada R -red iznosi $r = 2^n + 2^{n-1} - 1$.

Napomena 5.4 Poboljšani metod sečice sa „kliznim” aproksimacijama, pomenut već u odeljku 2.2, je specijalan slučaj koji se dobija za $m = 1$. U tom slučaju, kada se sečica postavlja kroz tačke $(y_{k,0}, f(y_{k,0}))$ i $(y_{k-1,n-i}, f(y_{k-1,n-i}))$, red konvergencije jednak je $r = 2^n + 2^{n-i-1}$. Najveće ubrzanje sečicom, od 25% u odnosu na familiju bez memorije, dobija se za najbolje dve dostupne aproksimacije $y_{k,0}$ i $y_{k-1,n-1}$, kada se postiže red $r = 2^n + 2^{n-2}$. Ako koristimo Njutnov interpolacioni polinom stepena $m = 2$ kroz najbolje tri dostupne aproksimacije, postiže se red $r = 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-3} = 11 \cdot 2^{n-3}$ ($n \geq 3$), n -koračnog metoda sa memorijom što predstavlja ubrzanje od 37.5%. Za $m = 3$, $n \geq 4$ i najbolje četiri aproksimacije, R -red konvergencije iznosi $r = 23 \cdot 2^{n-4}$ i predstavlja ubrzanje od 43.75% u odnosu na odgovarajući metod bez memorije.

Metod II $j_m = n$: U ovom slučaju, na osnovu (1.12), važi

$$N'_m(y_{k,0}) \sim f'(\alpha) \left(1 + (-1)^{m+1} c_{m+1} \varepsilon_{k-1} \prod_{i=1}^{m-1} \varepsilon_{k-1, n-j_i} \right),$$

odnosno

$$1 + \gamma_k f'(\alpha) \sim (-1)^{m+1} c_{m+1} \varepsilon_{k-1} \prod_{i=1}^{m-1} \varepsilon_{k-1, n-j_i}. \quad (5.27)$$

Relacija (5.20) važi, dok (5.21) ima jednu relaciju manje ($r_m = 1$ nije više nepoznata) i glasi

$$\varepsilon_{k, n-j_s} \sim A_{k, n-j_s} \varepsilon_k^{r_s} \sim A_{k, n-j_s} (A_{k-1, r})^{r_s} \varepsilon_{k-1}^{r_s}, \quad 1 \leq s \leq m-1. \quad (5.28)$$

Kombinujući (5.15), (5.20), (5.27) i (5.28) dobijamo relacije grešaka

$$\varepsilon_{k+1} \sim a_{k,n} c_{m+1}^{2^{n-1}} A_{k-1,r}^{2^n} \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_{k-1,n-j_i} \right)^{2^{n-1}} \varepsilon_{k-1}^{2^n r + 2^{n-1}(r_1 + \dots + r_{m-1} + 1)}, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,n-j_s} &\sim a_{k,n-j_s} c_{m+1}^{2^{n-j_s-1}} A_{k-1,r}^{2^{n-j_s}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_{k-1,n-j_i} \right)^{2^{n-j_s-1}} \\ &\quad \times \varepsilon_{k-1}^{2^{n-j_s} r + 2^{n-j_s-1}(r_1 + \dots + r_{m-1} + 1)}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

za $1 \leq s \leq m-1$, kojima je definisan sistem jednačina

$$\begin{cases} r^2 - 2^n r - 2^{n-1}(r_1 + \dots + r_{m-1} + 1) = 0, \\ r r_s - 2^{n-j_s} r - 2^{n-j_s-1}(r_1 + \dots + r_{m-1} + 1) = 0, \quad 1 \leq s \leq m-1, \end{cases} \quad (5.31)$$

po nepoznatim r, r_1, \dots, r_{m-1} . Eliminacijom nepoznatih $r_s = 2^{-j_s} r$, $1 \leq s \leq m-1$, dobijamo kvadratnu jednačinu po r

$$r^2 - r \left(2^n + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-1} \right) - 2^{n-1} = 0,$$

sa jedinstvenim pozitivnim rešenjem

$$r = 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-2} + \sqrt{\left(2^{n-1} + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-2} \right)^2 + 2^{n-1}}. \quad (5.32)$$

Napomena 5.5 Primitimo da se Traubov osnovni metod ubrzanja sečicom dobija za $m = 1$. Tada R -red konvergencije metoda sa memorijom iznosi $r = 2^{n-1} + \sqrt{2^{2(n-1)} + 2^{n-1}}$. Specijalno za $n = 1$ i $m = 1$ dobijamo poznato Traubovo ubrzanje Stefensenovog metoda sa R -redom $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$.

Napomena 5.6 Slučaj $m = n$ daje maksimalno ubrzanje pri korišćenju Metoda II. Tada red konvergencije iznosi $r = \frac{1}{2}(2^n + 2^{n-1} - 1 + \sqrt{9 \cdot 2^{2(n-1)} - 2^n + 1})$.

Metod III $j_m = n+1$: U zavisnosti od toga da li je $j_{m-1} = n$ ili ne, na osnovu (1.12), razlikujemo dva slučaja:

$$\begin{aligned} \text{a) } &1 + \gamma_k f'(\alpha) \sim (-1)^{m+1} c_{m+1} \varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k-1,-1} \prod_{i=1}^{m-2} \varepsilon_{k-1,n-j_i}, \\ \text{b) } &1 + \gamma_k f'(\alpha) \sim (-1)^{m+1} c_{m+1} \varepsilon_{k-1,-1} \prod_{i=1}^{m-1} \varepsilon_{k-1,n-j_i}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dakle, pored ocena (5.15), potrebna je i ocena

$$\varepsilon_{k,-1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) \varepsilon_k. \quad (5.34)$$

Polazimo ponovo od (5.20) i uzimamo u obzir da je

$$\varepsilon_{k,-1} \sim A_{k,-1} \varepsilon_k^{r_m} \sim A_{k,-1} A_{k-1,r}^{r_m} \varepsilon_{k-1}^{r r_m}. \quad (5.35)$$

Ako je $j_{m-1} = n$, potrebne su nam još $m-2$ ocene

$$\varepsilon_{k,n-j_s} \sim A_{k,n-j_s} \varepsilon_k^{r_s} \sim A_{k,n-j_s} (A_{k-1,r})^{r_s} \varepsilon_{k-1}^{r_s}, \quad 1 \leq s \leq m-2, \quad (5.36)$$

te kombinujući (5.33 a), (5.20), (5.34)–(5.36), dolazimo do sistema

$$\begin{cases} r^2 - 2^n r - 2^{n-1}(r_1 + \dots + r_{m-2} + 1 + r_m) = 0, \\ rr_s - 2^{n-j_s} r - 2^{n-j_s-1}(r_1 + \dots + r_{m-2} + 1 + r_m) = 0, \quad 1 \leq s \leq m-2, \\ rr_m - r - (r_1 + \dots + r_{m-2} + 1 + r_m) = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Eliminacijom $r_s = 2^{-j_s} r$ za $1 \leq s \leq m-2$ i $r_m = 2^{-(n-1)} r - 1$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$r^2 - r \left(2^n + 1 + \sum_{i=1}^{m-2} 2^{n-j_i-1} \right)$$

koja daje pozitivno rešenje

$$r = 2^n + 1 + \sum_{i=1}^{m-2} 2^{n-j_i-1}. \quad (5.38)$$

Najveće ubrzanje konvergencije dobija se za $m = n + 1$, odnosno kada se koriste sve aproksimacije prethodne iteracije. Red u tom slučaju iznosi $r = 2^n + 2^{n-1}$. Na primer, Stefensenov metod ($n = 1$) za $m = 2$ daje ubrzani metod reda 3.

U slučaju kada je $j_{m-1} < n$, relacije (5.15), (5.20), (5.28) i (5.33 b)) analognim postupkom dovode do sistema

$$\begin{cases} r^2 - 2^n r - 2^{n-1}(r_1 + \dots + r_m) = 0, \\ rr_s - 2^{n-j_s} r - 2^{n-j_s-1}(r_1 + \dots + r_m) = 0, \quad 1 \leq s \leq m-1, \\ rr_m - r - (r_1 + \dots + r_m) = 0, \end{cases} \quad (5.39)$$

koji eliminacijom kao u prethodnom slučaju ($r_s = 2^{-j_s} r$ za $1 \leq s \leq m-1$) daje kvadratnu jednačinu

$$r^2 - r \left(2^n + 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-1} \right) + 2^{n-1} = 0.$$

R -red konvergencije je određen pozitivnim rešenjem

$$r = 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(2^{n-1} + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{n-j_i-2} + \frac{1}{2} \right)^2 - 2^{n-1}}. \quad (5.40)$$

Napomena 5.7 Primetimo da za isti stepen interpolacionog polinoma m , kojim se definiše samokorigujući parametar γ_k , i broj koraka iterativnog metoda $n \geq 2$, interpolacioni čvor $x_{k-1} = y_{k-1,0}$ u istoj situaciji daje veće ubrzanje od aproksimacije $y_{k-1,-1}$. Prilikom ubrzanja Stefensenovog metoda ($n = 1$ i $m = 1$) aproksimacija $y_{k-1,-1}$ daje bolji R -red konvergencije $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \approx 2.618$.

Napomena 5.8 Višekoračni metodi za $n > 3$ su jedino od teorijskog značaja; zaista, takvi metodi poseduju veoma veliku brzinu konvergencije i daju aproksimacije korena izuzetne

tačnosti koja nije potrebna u većini praktičnih problema. Ipak, generalizovani metodi koje smo formulisali u ovom odeljku predstavljaju doprinos Teoriji iterativnih procesa, sa naglaskom na značaj partikularnih slučajeva $n = 2$ i $n = 3$.

Iterativne formule pogodne za praktičnu primenu izvedene iz K-T i Z-L-H familija, jesu one dobijene za $n = 2$ i $n = 3$. Tako i ubrzani metodi (5.17) i (5.18) imaju smisla za metod sečice ili interpolacione polinome drugog i trećeg reda, da bismo izbegli glomazne i komplikovane izraze. Analizu *R*-reda konvergencije završavamo tabelom donjih granica *R*-redova. Tabela je sačinjena uzimajući u obzir upotrebljene metode i međuaproximacije. Za metod ubrzanja zasnovan na Njutnovoju interpolaciji reda 2 i 3 dali smo najbolje postignute rezultate.

$n \rightarrow$	1	2	3	4
$m = 1$				
$j = 0$	2.414 (20.7%)	4.449 (11.2%)	8.472 (6%)	16.485 (3%)
$j = 1$		5 (25%)	9 (12.5%)	17 (6.25%)
$j = 2$			10 (25%)	18 (12.5%)
$j = 3$				20 (25%)
$m = 2$	3 (50%)	5.372 (34%)	11 (37.5%)	22 (37.5%)
$m = 3$		6 (50%)	11.35 (41.9%)	23 (43.7%)
bez memorije	2	4	8	16

TABELA 5.1 Donje granice *R*-redova

Iz Tabele 5.1. vidimo da *R*-red konvergencije familija (5.17) i (5.18) sa memorijom je bitno povećan u odnosu na odgovarajuće osnovne familije (5.1) i (5.5) bez memorije (vrednosti iz poslednje vrste). Prikazan je i porast u procentima. Jasno je da što je veći stepen korišćenog interpolacionog polinoma, to je veće ubrzanje konvergencije. Napomenimo ponovo da je poboljšanje reda konvergencije u svim slučajevima postignuto bez dodatnih funkcijskih izračunavanja, što ukazuje na izuzetnu računsku efikasnost predloženih metoda sa memorijom. Nekoliko vrednosti indeksa efikasnosti izračunate prema formuli (1.19)

$$E(\text{IM}) = r^{1/\theta},$$

gde r predstavlja *R*-red posmatranog iterativnog metoda (IM) i θ je broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji, dato je u Tabeli 5.2. Numerički primeri u potpunosti potvrđuju teorijske rezultate date u ovom poglavlju formulama (5.26), (5.32), (5.38) i (5.40).

n	metod sečice				N_2	N_3	bez memorije
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$			
1	1.554				1.732		1.414
2	1.645	1.710			1.751	1.817	1.587
3	1.706	1.732	1.778		1.821	1.836	1.682
4	1.759	1.762	1.783	1.820	1.856	1.872	1.741

TABELA 5.2 Indeksi efikasnosti višekoračnih metoda sa/bez memorije

Napomena 5.9 Jasno je da korišćenje Njutnovog interpolacionog polinoma većeg stepena od 3 daje još veći porast reda konvergencije n -koračnih metoda za $n \geq 3$. Recimo, nije teško dokazati, da R -red trokoračnih familija ($n = 3$) (5.17) i (5.18) sa memorijom iznosi 12 ako se koristi formula

$$\gamma_k = -\frac{1}{N'_4(x_k)} \quad (5.41)$$

(videti i numeričke rezultate u Tabelama 5.3 i 5.4). Ipak, iz razloga datih u Napomeni 5.8, iterativni metodi izuzetno visokog reda konvergencije nisu od praktičnog interesa.

5.4 Numerički primeri

Testirali smo familije (5.1) i (5.5) bez memorije i odgovarajuće familije (5.17) i (5.18) sa memorijom koristeći programski paket *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti. Pravi izazov u dizajniranju metoda jeste razvoj iterativnih metoda što veće računске efikasnosti pre nego li veoma brzih ali skupih metoda. Ipak, zbog demonstracije osobina konvergencije predloženih metoda kao i zbog poređenja, u Tabelama 5.3. i 5.4. dali smo i aproksimacije velike tačnosti ali samo za dvokoračne i trokoračne metode. Višekoračni metodi sa $n > 3$ su veoma retko potrebni prilikom rešavanja praktičnih problema.

Greške aproksimacija nule $|x_k - \alpha|$ date su u Tabelama 5.3. i 5.4., gde $A(-h)$ označava $A \times 10^{-h}$. Ove tabele sadrže i vrednosti računskog reda konvergencije r_c koje se računaju po formuli (1.18). Izabrali smo sledeće test funkcije:

$$f(x) = e^{-x^2}(x-2)(1+x^3+x^6), \quad \alpha = 2, \quad x_0 = 1.8,$$

$$f(x) = \cos 2x + e^{x^2-1} \sin x - 2, \quad \alpha = 1.447794857468 \dots, \quad x_0 = 1.33.$$

Zbog lakšeg praćenja, u ovom odeljku eksplicitno dajemo pet formula za izračunavanje promenljivog parametra γ_k , i skraćenice korišćene u Tabelama 5.3 i 5.4:

$$\begin{aligned} N_1(t; x_k, x_{k-1}) : \quad \gamma_k &= -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \\ N_1(t; x_k, y_{k-1,1}) : \quad \gamma_k &= -\frac{x_k - y_{k-1,1}}{f(x_k) - f(y_{k-1,1})}, \\ N_1(t; x_k, y_{k-1,2}) : \quad \gamma_k &= -\frac{x_k - y_{k-1,2}}{f(x_k) - f(y_{k-1,2})}, \\ N_2 : \quad \gamma_k &= -\frac{1}{N'_2(x_k)}, \\ N_3 : \quad \gamma_k &= -\frac{1}{N'_3(x_k)}, \\ N_4 : \quad \gamma_k &= -\frac{1}{N'_4(x_k)}. \end{aligned}$$

U svim numeričkim primerima korišćena je početna vrednost $\gamma_0 = 0.01$. Nekoliko metoda za izbor početne vrednosti γ_0 dato je u Traubovoj knjizi [88], mada nijedan od ovih metoda nije dovoljno dobar tako da se problemu izbora γ_0 mora posvetiti posebna pažnja u daljim istraživanjima.

Iz Tabela 5.3 i 5.4 kao i na osnovu mnogih testiranih primera, možemo zaključiti da svi testirani metodi daju aproksimacije izuzetne tačnosti. Dobre početne vrednosti dobijene su korišćenjem Junovog algoritma [96]. Primetimo da metodi sa memorijom značajno poboljšavaju tačnost dobijenih rezultata.

Završavamo poglavlje zaključkom da izuzetno ubrzanje R -reda konvergencije (čak do 50%, videti Tabelu 5.1) familija (5.17) i (5.18) sa memorijom se ostvaruje bez dodatnih funkcijskih izračunavanja po iteraciji, što rezultira veoma visokom računskom efikasnošću predloženih metoda sa memorijom. Primetimo i to da je red konvergencije n -koračnih metoda (5.17) i (5.18) sa memorijom veći od 2^n ($n \geq 2$), ali ovo nije u kontradikciji sa Kung-Traubovom hipotezom s obzirom da se ona odnosi isključivo na metode bez memorije kao što su (5.1) i (5.5).

$f(x) = e^{-x^2}(x-2)(1+x^3+x^6)$, $x_0 = 1.8$, $\alpha = 2$				
metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
K-T $n = 2$ (5.17)	1.59(-3)	2.89(-11)	3.20(-42)	3.998
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	1.59(-3)	7.57(-13)	5.36(-54)	4.414
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	1.59(-3)	1.69(-14)	2.90(-69)	4.990
N_2	1.59(-3)	1.14(-15)	4.60(-81)	5.384
N_3	1.59(-3)	1.85(-17)	1.05(-100)	5.973
Z-L-H $n = 2$ (5.18)	1.34(-3)	8.42(-12)	1.34(-44)	3.999
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	1.34(-3)	2.33(-13)	2.07(-56)	4.411
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	1.34(-3)	5.04(-15)	6.85(-72)	4.978
N_2	1.34(-3)	3.16(-16)	5.36(-84)	5.367
N_3	1.34(-3)	2.52(-18)	1.68(-106)	5.988
K-T $n = 3$ (5.17)	6.43(-6)	2.01(-40)	1.80(-316)	8.000
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	6.43(-6)	1.38(-43)	3.13(-362)	8.459
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	6.43(-6)	6.86(-47)	1.50(-415)	8.998
$N_1(t; x_k, y_{k-1,2})$	6.43(-6)	2.53(-51)	1.39(-505)	10.004
N_2	6.43(-6)	3.20(-58)	3.11(-634)	11.013
N_3	6.43(-6)	7.82(-63)	3.12(-704)	11.274
N_4	6.43(-6)	4.27(-61)	4.82(-723)	11.996
Z-L-H $n = 3$ (5.18)	7.20(-7)	2.50(-49)	5.23(-389)	7.999
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	7.20(-7)	1.91(-52)	3.73(-438)	8.463
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	7.20(-7)	8.96(-56)	1.66(-495)	8.992
$N_1(t; x_k, y_{k-1,2})$	7.20(-7)	1.76(-60)	9.34(-597)	10.003
N_2	7.20(-7)	9.29(-68)	1.69(-737)	10.999
N_3	7.20(-7)	9.26(-70)	7.11(-783)	11.339
N_4	7.20(-7)	2.29(-76)	1.08(-907)	11.962

TABELA 5.3

$f(x) = \cos 2x + e^{x^2-1} \sin x - 2, x_0 = 1.33, \alpha = 1.44779\dots$				
metodi	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c (1.18)
K-T $n = 2$ (5.17)	4.56(-3)	5.76(-9)	1.50(-32)	3.996
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	4.56(-3)	3.38(-10)	1.25(-41)	4.406
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	4.56(-3)	2.67(-11)	2.16(-52)	4.989
N_2	4.56(-3)	1.46(-12)	2.66(-63)	5.342
N_3	4.56(-3)	4.85(-13)	8.32(-73)	5.991
Z-L-H $n = 2$ (5.18)	8.84(-4)	1.84(-12)	3.48(-47)	3.999
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	8.84(-4)	1.52(-13)	5.94(-57)	4.444
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	8.84(-4)	8.89(-15)	8.83(-70)	5.001
(5.40)	8.84(-4)	1.93(-16)	3.95(-84)	5.346
(5.41)	8.84(-4)	1.34(-17)	2.03(-100)	5.993
K-T $n = 3$ (5.17)	7.71(-5)	8.06(-31)	1.14(-238)	7.999
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	7.71(-5)	2.77(-33)	9.03(-274)	8.454
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	7.71(-5)	1.73(-35)	3.46(-311)	8.995
$N_1(t; x_k, y_{k-1,2})$	7.71(-5)	3.93(-39)	5.44(-382)	9.998
N_2	7.71(-5)	1.73(-45)	1.27(-491)	10.975
N_3	7.71(-5)	1.07(-46)	1.55(-521)	11.344
N_4	7.71(-5)	2.98(-46)	3.13(-543)	12.001
Z-L-H $n = 3$ (5.18)	2.18(-6)	1.46(-44)	5.78(-350)	7.999
$N_1(t; x_k, x_{k-1})$	2.18(-6)	9.88(-47)	1.33(-388)	8.474
$N_1(t; x_k, y_{k-1,1})$	2.18(-6)	3.40(-49)	1.53(-434)	9.002
$N_1(t; x_k, y_{k-1,2})$	2.18(-6)	2.01(-55)	7.29(-546)	10.002
N_2	2.18(-6)	2.81(-61)	3.21(-665)	11.003
N_3	2.18(-6)	2.99(-67)	9.74(-754)	11.279
N_4	2.18(-6)	4.44(-66)	2.01(-782)	12.001

TABELA 5.4

Simultani metodi za nalaženje nula polinoma

Problem određivanja nula polinoma, iako jedan od najstarijih problema u matematici, i dalje je od interesa s obzirom da se javlja u mnogim oblastima matematike i tehničkih nauka, fizici, računarstvu, teoriji automatske kontrole, obradi signala, čak i u ekonomiji i društvenim naukama. Više detalja može se naći u knjizi Meknamija¹ „*Numerical Methods for Roots of Polynomials*” [49]. Bibliografija koja je dodatak ove knjige sadrži oko 8000 referenci. Uprkos činjenici da je razvijen veliki broj numeričkih algoritama za rešavanje polinomskih jednačina, savršen algoritam još uvek nije konstruisan. I pored toga što se na polinomske jednačine može primeniti proizvoljan metod za određivanje jedne nule, metod deflacije nije dobar izbor kada je potrebno odrediti sve nule jer sukcesivno određene aproksimacije imaju sve manju tačnost. Mnogo je bolje primeniti iterativni metod koji će odrediti sve nule polinoma istovremeno sa približno istom tačnošću. Pregled metoda za simultano određivanje nula polinoma u kompleksnoj aritmetici kao i u intervalnoj aritmetici dat je u knjizi „*Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*” [61].

Ovo poglavlje posvećeno je simultanim metodima za određivanje korena polinoma i uglavnom su razmatrani metodi sa korekcijama. Naime, kako je red konvergencije osnovnih metoda ograničen, njihova računaska efikasnost se ne može poboljšati. Bitan napredak je postignut kombinovanjem višekoračnih metoda za određivanje jednog korena (ne većeg reda od četiri) i simultanih iterativnih metoda, što povećava brzinu konvergencije koristeći veoma mali broj dodatnih funkcijskih izračunavanja. Na taj način računaska efikasnost se bitno poboljšava. Ovaj pristup su prvi upotreбили Nurin² [57] 1977. godine u kompleksnoj aritmetici i M. Petković i Karstensen³ [65] 1993. godine u kružnoj kompleksnoj aritmetici (aritmetika diskova).

Poglavlje je organizovano na sledeći način. U odeljku 6.1 razmatran je simultani metod bez izvoda dvokoračnog tipa sa kubnom konvergencijom zasnovan na interpolaciji. U odeljcima 6.2, 6.3 i 6.4 korišćena je relacija fiksne tačke Erlih-Abertovog tipa data for-

¹ J. M. McNamee

² A. W. M. Nouredin

³ C. Carstensen

mulom (7) u Predgovoru. U odeljku 6.2 konstruisan je metod za istovremeno određivanje svih prostih (realnih ili kompleksnih) nula polinoma zamenjujući u (7) nule polinoma njihovim aproksimacijama. Na sličan način u odeljku 6.3 dobijen je metod reda 6, pri čemu su nule zamenjene aproksimacijama koje se dobijaju iz metoda Džeretovog tipa. Isti princip primenjen je u odeljku 6.4 za konstrukciju metoda reda 6 za višestruke nule polinoma koristeći aproksimacije dobijene dvokoračnim metodom reda 4 iz rada [46].

6.1 Simultani metod interpolacionog tipa

U ovom odeljku predstavljamo dva tipa iterativnih metoda velike računске efikasnosti za istovremeno nalaženje svih (realnih ili kompleksnih) nula polinoma. Prvi metod je konstruisan upotrebom višekoračne interpolacione tehnike i ima lokalnu kubnu konvergenciju, videti [71].

Neka je x aproksimacija proste nule ζ funkcije f , koja je bar dva puta diferencijabilna u okolini ζ . Konstruišimo interpolacionu funkciju φ drugog reda funkcije f takvu da je

$$\varphi^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) \quad (r = 0, 1, 2).$$

Lako je dokazati da funkcija φ oblika

$$\varphi(\tau) = f(x) + (\tau - x)f'(x + \frac{1}{2}(\tau - x)) \quad (6.1)$$

ispunjava ove uslove.

Neka je $\tau = x^*$ tačka koja zadovoljava uslov $\varphi(x^*) = 0$. Tada iz (6.1) sledi

$$0 = f(x) + (x^* - x)f'(x + \frac{1}{2}(x^* - x)). \quad (6.2)$$

Rešavanjem jednačine (6.2) po x^* , dobijamo

$$x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x + \frac{1}{2}(x^* - x))}. \quad (6.3)$$

Ovo je implicitna relacija po x^* , tako da se x^* na desnoj strani jednakosti (6.3) može proceniti nekom aproksimacijom nule ζ .

Ograničimo razmatranje na algebarske (monične) polinome oblika

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

stepena n sa prostim nulama ζ_1, \dots, ζ_n pretpostavljajući da su pronađene dovoljno bliske aproksimacije z_1, \dots, z_n ovih nula. Jedan od najčešće upotrebljivanih iterativnih metoda za simultanu aproksimaciju nula polinoma je kvadratno konvergentan Vajerštrasov⁴ metod

⁴ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

(ili Diran-Dočev-Kernerov⁵ metod, videti [17], [16], [39]),

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{f(z_i)}{\prod_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} (z_i - z_j)} \quad (i \in \mathbf{I}_n),$$

gde $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$ predstavljaju nove aproksimacije i $\mathbf{I}_n = \{1, \dots, n\}$ je indeksni skup. Definišemo Vajerštrasovu funkciju $z \mapsto W_i(z)$ kao

$$W_i(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} (z - z_j)} \quad (i \in \mathbf{I}_n),$$

gde indeks j uvek uzima sve vrednosti (osim eksplicitno navedene) iz skupa \mathbf{I}_n u proizvodima i sumama koje se javljaju u nastavku. Za $z = z_i$ pišaćemo $W_i(z_i) = W_i$ i zvati W_i Vajerštrasova korekcija.

Vratimo se na (6.3) i zamenimo $x = z_i$ i $x^* = z_i - W_i$ na desnoj strani jednakosti (6.3). Na ovaj način dobijen je sledeći metod [71],

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{f(z_i)}{f'(z_i - \frac{1}{2}W_i)} \quad (i \in \mathbf{I}_n). \quad (6.4)$$

Iterativna formula (6.4) daje nove aproksimacije $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$ nula polinoma f . Sličan metod konstruisan je u skorije vreme u radu [75]. Uvođenjem iterativnog indeksa k simultani metod (6.4) možemo predstaviti u obliku

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{f(z_i^{(k)})}{f'(z_i^{(k)} - \frac{1}{2}W_i^{(k)})} \quad (i \in \mathbf{I}_n, k = 0, 1, \dots), \quad (6.5)$$

gde je

$$W_i^{(k)} = \frac{f(z_i^{(k)})}{\prod_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)})}.$$

Metod (6.5) je dvokoračnog tipa; najpre se izračunavaju prediktori $y_i = z_i - \frac{1}{2}W_i$, a zatim se izračunavaju korektori $\hat{z}_i = z_i - f(z_i)/f'(y_i)$ ($i = 1, \dots, n$). U radu [75] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 6.1 *Ako su z_1, \dots, z_n dovoljno bliske aproksimacije nula ζ_1, \dots, ζ_n polinoma f , tada je red konvergencije iterativnog metoda (6.4) jednak tri.*

Primer 6.1 Sledeći primer demonstrira veoma dobru konvergenciju predloženog metoda (6.5) u globalnom smislu pri upotrebi dosta grubih početnih aproksimacija. Početne

⁵ E. Durand, K. Dochev, I. O. Kerner

aproksimacije izabrane su koristeći Abertov⁶ pristup [1]

$$z_k^{(0)} = -\frac{a_1}{n} + R \exp\left(i\frac{\pi}{n}(2k-3/2)\right), \quad (k = 1, \dots, n, i = \sqrt{-1}), \quad (6.6)$$

gde je a_1 koeficijent polinoma $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ i R je poluprečnik kružnice na kojoj su raspoređene početne aproksimacije. Startne vrednosti generisane sa (6.6) su ekvidistantno raspoređene po kružnici poluprečnika R , videti Sliku 6.1. U praksi, R se često računa po formuli

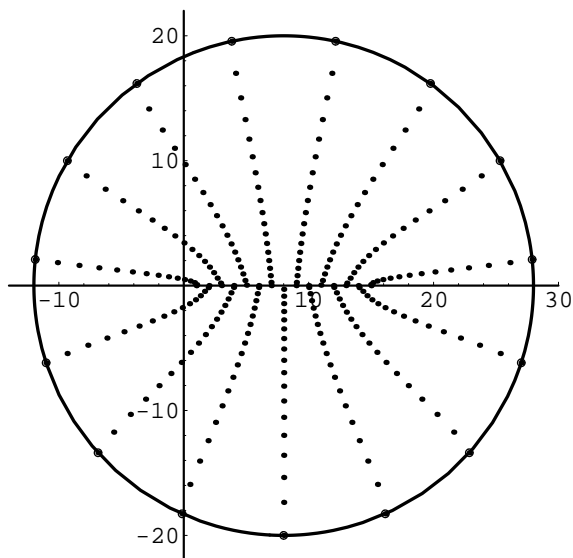
$$R = 2 \max_{1 \leq \lambda \leq n} |a_\lambda|^{1/\lambda}.$$

obebeđujući da disk $\{z : |z| < R\}$, sa centrom u koordinatnom početku, sadrži sve nule polinoma f , videti [34, str. 457].

Metod (6.5) je primenjen za određivanje svih nula polinoma

$$f(z) = \prod_{m=1}^{15} (z - m) = z^{15} - 120z^{14} + \dots + 4\,339\,163\,001\,600z + 1\,307\,674\,368\,000$$

Vilkinsonovog⁷ tipa [97] sa realnim nulama $1, 2, \dots, 15$ i $a_1 = -120$. Poznato je da je ova klasa polinoma slabo uslovljena, naime, male perturbacije koeficijenata polinoma daju velike varijacije vrednosti nula polinoma. Napomenimo da mnogi iterativni metodi rade sa ozbiljnim teškoćama prilikom određivanja nula Wilkinsonovih polinoma.



SLIKA 6.1 Primer 6.1 – trajektorije aproksimacija

⁶ O. Aberth

⁷ J. H. Wilkinson

Polazimo od Abertovih početnih aproksimacija (6.6) birajući $a_1 = -120$, $n = 15$ i $R = 20$. Iterativni proces se primenjuje sve do ispunjenja zaustavnog kriterijuma

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f(z_i^{(k)})| < 10^{-15}.$$

Ponašanje simultanog metoda (6.5) grafički je prikazano na Slici 6.1. Metod (6.5) konvergira linearno na početku iterativnog procesa i u srednjoj fazi, ali gotovo direktno ka nulama, sa radialno distribuiranim aproksimacijama. Metod demonstrira kubnu konvergenciju u nekoliko poslednjih iteracija.

6.2 Erlih-Abertov metod sa korekcijama za proste nule

Računska efikasnost iterativnih metoda može se značajno povećati izborom pogodnih korekcija. U ovom odeljku predstavimo familiju iterativnih metoda sa korekcijama za simultano određivanje prostih nula polinoma. Metodi sa korekcijama se rangiraju kao najefikasniji među postojećim metodima u klasi simultanih metoda zasnovanih na relaciji fiksne tačke. Iterativna formula koju ćemo predstaviti oslanja se na relaciju fiksne tačke Gargantinijevog tipa [28]. Veoma visoka računaska efikasnost je ostvarena upotrebom pogodnih korekcija koje slede iz klase dvokoračnih metoda reda četiri (1.58) (videti poglavlje 4.4) minimalne računске cene.

Neka je

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j)$$

monični polinom stepena n sa prostim realnim ili kompleksnim nulama ζ_1, \dots, ζ_n i neka je

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} = \left[\frac{d}{dz} \log f(z) \right]^{-1} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \zeta_j} \right)^{-1} \quad (6.7)$$

Njutnova korekcija iz kvadratno konvergentnog Njutnovog metoda. Prilikom konstrukcije iterativnog metoda za simultanu inkluziju nula polinoma, Gargantini i Henrici [28] koristili su identitet (6.7) i izveli sledeću *nula-relaciju*

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\frac{1}{u(z)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z - \zeta_j}} \quad (i \in \mathbf{I}_n). \quad (6.8)$$

U literaturi, relacije ovog tipa obično se nazivaju relacijama fiksne tačke u širem smislu, tako da ćemo i mi koristiti ovaj termin. Za dato n , različite aproksimacije z_1, \dots, z_n nula ζ_1, \dots, ζ_n , stavimo $z = z_i$ i zamenimo nule ζ_j nekim drugim aproksimacijama z_j^* na desnoj strani jednakosti (6.8). Na ovaj način, dobijamo sledeći uopšteni iterativni metod

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z_i - z_j^*}} \quad (i \in \mathbf{I}_n) \quad (6.9)$$

za simultano određivanje svih prostih nula polinoma f .

Zamena $z_j^* = z_j$ u (6.9) daje dobro poznati Erlih⁸-Abertov metod

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i \in \mathbf{I}_n), \quad (6.10)$$

razmatran u radovima Erliha [22] i Aberta [1]. Drugi od ovih radova sadrži dokaz kubne konvergencije simultanog metoda (6.10).

Upoređujući (6.8) i (6.9) jasno je da bolje aproksimacije z_j^* daju tačnije aproksimacije \hat{z}_i ; zaista, kada $z_j^* \rightarrow \zeta_j$, tada i $\hat{z}_i \rightarrow \zeta_i$. Ovu ideju primenio je Nurin u radu [57] za konstrukciju metoda reda četiri; upotrebio je Njutnove aproksimacije $z_j^* = z_j - u(z_j)$ u (6.9) za dobijanje ubrzanog metoda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z_i - z_j + u(z_j)}} \quad (i \in \mathbf{I}_n). \quad (6.11)$$

Iskoristićemo ovaj pristup za dobijanje familije metoda šestog reda.

Neka je g realna ili kompleksna funkcija takva da je g neprekidna zajedno sa svojim izvodima g' i g'' u okolini 0, i neka su

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad t(z) = \frac{f(z - u(z))}{f(z)}, \quad u_j = u(z_j), \quad t_j = t(z_j) = \frac{f(z_j - u_j)}{f(z_j)}.$$

Aproksimacije z_j^* u (6.9) odredićemo na sledeći način:

$$z_j^* = z_j - u_j - g(t_j) \frac{f(z_j - u_j)}{f'(z_j)}. \quad (6.12)$$

Naime, relacija (6.12) definiše familiju dvokoračnih metoda reda četiri predloženih u radu [75] i predstavljenih u odeljku 4.3 formulom (4.17).

Uvodeći aproksimacije (6.12) u (6.9), konstruišimo simultani metod oblika

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{u_i} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \left(z_i - z_j + u_j + g(t_j) \frac{f(z_j - u_j)}{f'(z_j)} \right)^{-1}} \quad (i \in \mathbf{I}_n). \quad (6.13)$$

⁸ L.W. Ehrlich

Kao što je već rečeno u odeljku 4.3, funkcija g može uzeti različite oblike (videti Tabelu 4.1) koji zadovoljavaju (ne mnogo zahtevne) uslove $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$ i $|g''(0)| < \infty$. Zbog toga, iterativna formula (6.13) definiše familiju simultanih metoda.

Ako su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ početne aproksimacije nula polinoma ζ_1, \dots, ζ_n , tada je familija simultanih metoda definisana na sledeći način:

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{1}{\frac{1}{u_i^{(k)}} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \left(z_i^{(k)} - z_j^{(k)} + u_j^{(k)} + g(t_j^{(k)}) \frac{f(z_j^{(k)} - u_j^{(k)})}{f'(z_j^{(k)})} \right)^{-1}}, \quad (i \in \mathbf{I}_n) \quad (6.14)$$

gde su

$$u_j^{(k)} = u(z_j^{(k)}), \quad t_j^{(k)} = \frac{f(z_j^{(k)} - u_j^{(k)})}{f'(z_j^{(k)})} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Napomena 6.1 Da bi se smanjio ukupan broj izračunavanja, pre izvršenja iterativnog koraka treba prvo izračunati sve aproksimacije

$$z_j^{(k)} - u_j^{(k)} - g(t_j^{(k)}) \frac{f(z_j^{(k)} - u_j^{(k)})}{f'(z_j^{(k)})} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Na ovaj način izbegavamo ponavljanje izračunavanja pod sumama u izrazu (6.14).

Sada ćemo formulirati teoremu o konvergenciji simultanog metoda (6.14) koja definiše potrebne i dovoljne uslove za funkciju g kojima se obezbeđuje što veći red konvergencije simultanog metoda (6.14).

Teorema 6.2 *Neka je g dovoljan broj puta diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslove $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$ i $|g''(0)| < \infty$. Ako su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ dovoljno bliske međusobno različite početne aproksimacije korena ζ_1, \dots, ζ_n , tada je red konvergencije familije simultanih metoda (6.14) jednak šest.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti, izostavićemo indeks iteracije k , a sve veličine $(k+1)$ -ve iteracije naznačavaćemo simbolom $\hat{\cdot}$. Neka je $c_{r,j} = f^{(r)}(\zeta_j)/(r!f'(\zeta_j))$ ($r = 2, 3, \dots$) kao i u prethodnim poglavljima, i uvedimo greške $\varepsilon_j = z_j - \zeta_j$, $\hat{\varepsilon}_j = \hat{z}_j - \zeta_j$. Takođe, uvedimo i skraćenice

$$z_j^* = z_j - u_j - g(t_j) \frac{f(z_j - u_j)}{f'(z_j)}, \quad \eta_{ij} = z_i - z_j^*, \quad v_i = \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{z_j^* - \zeta_j}{(z_i - \zeta_j)\eta_{ij}}.$$

Tada, polazeći od (6.13) i koristeći (6.7), nalazimo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i} + \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{\eta_{ij}}} = z_i - \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i v_i}, \quad (6.15)$$

odakle je

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i v_i} = \frac{-\varepsilon_i^2 v_i}{1 - \varepsilon_i v_i}. \quad (6.16)$$

Sledeća relacija greške familije (6.12) data je u [74],

$$z_j^* - \zeta_j = \left[c_{2,j}^3 (5 - g''(0)/2) - c_{2,j} c_{3,j} \right] \varepsilon_j^4 + O_M(\varepsilon^5) = O_M(\varepsilon^4) \quad (6.17)$$

pod uslovima $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$, i da je $|g''(0)|$ ograničeno. Na osnovu uslova Teoreme 6.2 možemo pretpostaviti $\varepsilon_i = O_M(\varepsilon_j)$ za svaki par $i, j \in \mathbf{I}_n$ i neka je $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ greška maksimalnog modula. Tada, na osnovu (6.17) i izraza za v_i , važi $v_i = O_M(\varepsilon^4)$ tako da iz (6.15) dobijamo

$$\hat{\varepsilon} = O_M(\varepsilon^6),$$

što znači da je red konvergencije familije simultanih metoda (6.13) šest. \square

Familija simultanih metoda (6.13) uključuje neke specijalne slučajeve koji se mogu dobiti izborom različitih partikularnih oblika funkcije g , pretpostavljajući da argument funkcije g može biti realna ili kompleksna veličina. Specijalni slučajevi funkcije g dati su u odeljku 4.3 Tabelom 4.1 za dobijanje nekih već postojećih i novih metoda, tako ih nećemo ovde ponovo navoditi. Birajući specijalne funkcije g , iz (6.14) dobijamo partikularne simultane metode.

Iz praktičnih razloga, veoma je bitno dati ocene relevantnih karakteristika metoda za nalaženje nula kao što su:

- broj obavljenih numeričkih operacija neophodnih za određivanje korena do zahtevane tačnosti,
- brzina konvergencije,
- ukupno vreme izvršenja celokupnog iterativnog procesa na računaru, itd.

Ova svojstva su u bliskoj vezi sa računskom efikasnošću. Poznavanje računске efikasnosti je od posebnog značaja prilikom dizajniranja softverskih paketa za nalaženje nula funkcija. Više detalja o ovoj temi može se naći u [51], [61, Pog. 6].

Upoređićemo računsku efikasnost Erlih-Abertovog metoda (6.10), Nurinog metoda (6.11) i nove familije simultanih metoda (6.13). Procedura poređenja je u potpunosti opravdana jer je analiza efikasnosti data u [61, Pog. 6] pokazala da Nurinov metod (6.11) ima najveću računsku efikasnost u klasi simultanih metoda zasnovanih na relaciji fiksne tačke (tj. nula-relaciji).

Kao što je već pokazano u [49, Pog. 1] i [61, Pog. 6], efikasnost iterativnog metoda (IM) može se uspešno oceniti *indeksom efikasnosti*

$$E(IM) = \frac{\log r}{\theta}, \quad (6.18)$$

gde r predstavlja R -red konvergencije iterativnog metoda (IM), a θ je računska cena po iteraciji. Rang-lista metoda dobijena ovom formulom uglavnom se poklapa sa realno utrošenim CPU (central processor unit) vremenom, videti [51]. Isto rangiranje se dobija i na osnovu formule $E(IM) = r^{1/\theta}$, često korišćene u prethodnim poglavljima.

Da bismo odredili računsku cenu θ poželjno je uzeti u obzir broj aritmetičkih operacija po iteraciji sa određenim težinama, koje zavise od vremena izvršenja tih operacija. Označimo ove težine sa w_{so} , w_m i w_d za sabiraje/oduzimanje, množenje i deljenje, redom. Neka SO_n , M_n i D_n predstavljaju ukupan broj sabiranja+oduzimanja, množenja i deljenja po jednoj iteraciji za svih n nula datog polinoma stepena n . Tada se računska cena θ može (približno) izraziti formulom

$$\theta = \theta(n) = w_{so}SO(n) + w_mM_n + w_dD_n, \quad (6.19)$$

tako da na osnovu (6.18) i (6.19) imamo

$$E(IM, n) = \frac{\log r}{w_{so}SO(n) + w_mM_n + w_dD_n}. \quad (6.20)$$

Razmatraćemo realne polinome sa realnim nulama, zbog jednostavnosti. Analiza kompleksnih polinoma sa realnim ili kompleksnim nulama u suštini je slična, iako komplikovana jer moramo da svedemo izračunavanja na realnu aritmetiku. Broj osnovnih operacija u realnoj aritmetici dat je u Tabeli 6.1 kao funkcija stepena polinoma n .

metodi	SO_n	M_n	D_n
Erlih-Abertov metod (6.10)	$4n^2 - 2n$	$2n^2$	$n^2 + n$
Nurinov metod (6.11)	$4n^2 - n$	$2n^2$	$n^2 + n$
Novi metod (6.13)	$5n^2 + n$	$3n^2 + 2n$	$n^2 + 2n$

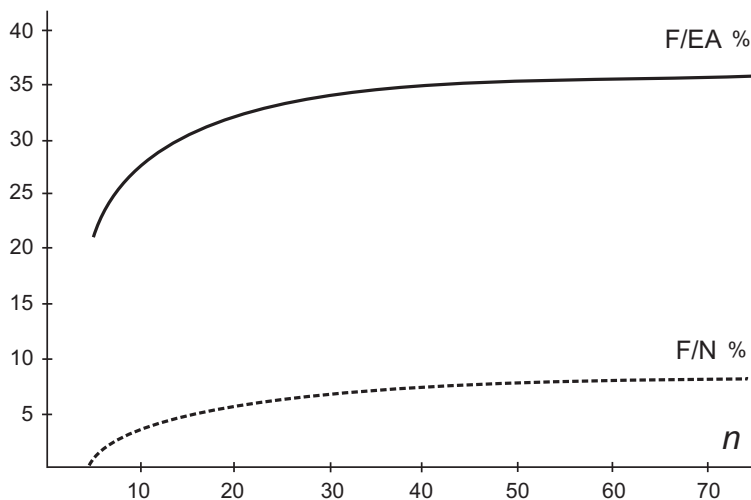
TABELA 6.1 Broj osnovnih operacija (u realnoj aritmetici)

Zbog poređenja simultanih metoda (6.10), (6.11) i (6.13), upotrebili smo težine (koje se javljaju u (6.20)) određene na osnovu procenjene kompleksnosti osnovnih operacija u aritmetici višestruke preciznosti. Bez smanjivanja opštosti, možemo pretpostaviti da se koristi predstavljanje brojeva u aritmetici sa pokretnom tačkom, sa binarnom mantisom od b bitova. Drugim rečima, radimo sa brojevima „preciznosti b ”, što daje rezultate sa relativnom greškom približno 2^{-b} . Na osnovu rezultata datih u [6], vremena izvršenja $t_b(S)$ i $t_b(O)$ sabiranja i oduzimanja su reda $O(b)$. Koristeći Šenhage-Štrasenov⁹ algoritam za množenje (videti [24], [83]), koji se često implementira u bibliotekama višestruke preciznosti (npr. kod softvera *Mathematica*, *Maple*, *Magma*, itd.), imamo

$$t_b(M) = O(b \log b \log \log b) \quad \text{i} \quad t_b(D) = 3.5t_b(M).$$

Izabrali smo težine w_{so} , w_m i w_d proporcionalne vremenima $t_b(S)$, $t_b(M)$ i $t_b(D)$, redom, za 64-bitnu arhitekturu.

⁹ A. Schönhage, V. Strassen



SLIKA 6.2 Odnosi indeksa efikasnosti

Primenjujući (6.20) odredili smo procentualne odnose

$$\rho_{F/EA}(n) = (E((6.13), n) / E((6.10), n) - 1) \cdot 100 \quad (\text{u } \%), \quad (\text{F/EA}\%)$$

$$\rho_{F/N}(n) = (E((6.13), n) / E((6.11), n) - 1) \cdot 100 \quad (\text{u } \%), \quad (\text{F/N}\%)$$

gde EA, N i F su skrćenice upotrebljene za Erlih-Abertov metod (6.10), Nurinov metod (6.11) i novu familiju (6.13), redom. Ovi odnosi su grafički predstavljeni na Slici 6.2 kao funkcije stepena polinoma n i pokazuju (procentualno) poboljšanje računске efikasnosti novog metoda (6.13) u odnosu na metode (6.10) i (6.11). Na Slici 6.2 grafik $\rho_{F/EA}(n)$ je predstavljen punom linijom i $\rho_{F/N}(n)$ isprekidanom. Napomenimo da su slične krive dobijene i na osnovu težina proporcionalnih vremenima izvršenja osnovnih operacija za oktalnu preciznost (mašinska greška $\approx 10^{-67}$) za Pentium M 2.8 GHz sa Fedora core 3 i Opteron 64-bitnim procesorom (podatak uzet iz [26]).

Na osnovu Slike 6.2 jasno je da je novi metod (6.13) efikasniji od metoda (6.10) i (6.11), naročito u odnosu na Erlih-Abertov metod (6.10) (F/EA% – puna linija). Imajući u vidu pomenutu osobinu Nurinovog metoda (6.11) dominantne efikasnosti, zaključujemo da predložena familija simultanih metoda (6.13) generiše najefikasnije metode za simultano određivanje nula polinoma u klasi metoda zasnovanih na relaciji fiksne tačke.

Da bismo demonstrirali brzinu konvergencije metoda (6.10), (6.11) i (6.13), testirali smo veliki broj polinomskih jednačina. Među testiranim algebarskim polinomima izabrali smo dva primera, realizovana u programskom paketu *Mathematica* sa aritmetikom višestruke preciznosti koja se oslanja na GMP paket za višestruku preciznost (za detalje videti [32]).

Kao meru tačnosti dobijenih aproksimacija, računali smo Euklidovu normu

$$e^{(k)} := \|z^{(k)} - \zeta\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |z_i^{(k)} - \zeta_i|^2 \right)^{1/2} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (6.21)$$

gde je $\mathbf{z}^{(k)} = \{z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}\}$ i $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$. Tabele 6.2 i 6.3 takođe sadrže i računski red konvergencije \tilde{r} , izračunat na osnovu formule (videti [94])

$$\tilde{r} = \frac{\log |e^{(k+1)}/e^{(k)}|}{\log |e^{(k)}/e^{(k-1)}|}. \quad (6.22)$$

Iako je ova formula izvedena za metode za određivanje jedne nule, ona daje prihvatljive rezultate za simultane metode.

Primer 6.2 Primenili smo iterativne metode (6.10), (6.11) i (6.13) za simultanu aproksimaciju nula -1 , ± 2 , ± 4 , $\pm 2i$, $\pm 4i$, $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$, $\pm 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$ polinoma

$$\begin{aligned} f_{17}(z) &= (z-1)(z^8-256)(z^8-65536) \\ &= z^{17} - z^{16} - 65792z^9 + 65792z^8 + 16777216z - 16777216. \end{aligned}$$

U slučaju familije (6.13) koristili smo šest dvokoračnih metoda (metod 1)–metod 6)) datih u odeljku 4.3, dobijenih na osnovu funkcija g_1, \dots, g_6 definisanih u Tabeli 4.1. Početne aproksimacije daju normu greške $e^{(0)} \approx 1.11$. Norme grešaka $e^{(k)}$, računane su na osnovu (6.21), i računski red konvergencije računat po formuli (6.22), dati su u Tabeli 6.2, gde $A(-h)$ označava $A \times 10^{-h}$.

Primer 6.3 Isti metodi (6.10), (6.11) i (6.13) (sa g_1, \dots, g_6) primenjeni su za simultano nalaženje nula polinoma stepena 21:

$$\begin{aligned} f_{21}(z) &= (z-4)(z^2-1)(z^4-16)(z^2+9)(z^2+16)(z^2+2z+5) \\ &\quad \times (z^2+2z+2)(z^2-2z+2)(z^2-4z+5)(z^2-2z+10) \\ &= z^{21} - 8z^{20} + 56z^{19} - 290z^{18} + 1076z^{17} - 3618z^{16} + 8666z^{15} \\ &\quad - 17870z^{14} + 26591z^{13} - 13598z^{12} - 43434z^{11} + 214800z^{10} \\ &\quad - 668564z^9 + 1085832z^8 - 1464104z^7 + 2085920z^6 - 1072704z^5 \\ &\quad + 2027392z^4 - 4621184z^3 + 3837440z^2 + 7833600z - 9216000. \end{aligned}$$

Izabrane početne aproksimacije daju normu greške $e^{(0)} \approx 1.025$. Norme grešaka $e^{(k)}$ (određene sa (6.21)) kao i računski red konvergencije (6.22) dati su u Tabeli 6.3.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r} (6.22)
Erlih-Abertov metod (6.10)	6.04(-2)	2.37(-5)	1.28(-15)	3.0139
Nurinov metod (6.11)	2.69(-2)	4.19(-8)	7.31(-32)	4.0910
(6.13)– g_1 , $\beta = 0$	5.17(-3)	3.98(-16)	3.55(-96)	6.1047
(6.13)– g_2 , $\lambda = 2$	4.56(-2)	9.82(-10)	3.73(-55)	5.9245
(6.13)– g_3 , $\gamma = 1$	1.42(-2)	1.23(-13)	9.69(-80)	5.9752
(6.13)– g_4 , $a = -1$	4.55(-3)	1.92(-16)	1.36(-95)	5.9184
(6.13)– g_5 , $c = 1$	1.19(-2)	3.21(-14)	2.87(-83)	5.9674
(6.13)– g_6	1.27(-2)	8.27(-14)	1.92(-84)	6.3147

TABELA 6.2 Euklidova norma grešaka – polinom stepena 17

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r} (6.22)
Erlieh-Abertov metod (6.10)	8.76(-2)	1.03(-4)	2.16(-13)	2.9622
Nurinov metod (6.11)	4.61(-2)	5.74(-7)	1.26(-26)	4.0080
(6.13)- g_1 , $\beta = 0$	1.40(-2)	3.14(-12)	4.20(-70)	5.9978
(6.13)- g_2 , $\lambda = 2$	2.61(-2)	5.72(-10)	4.85(-56)	6.0152
(6.13)- g_3 , $\gamma = 1$	1.27(-2)	1.94(-12)	3.31(-71)	5.9869
(6.13)- g_4 , $a = -1$	6.36(-3)	2.59(-14)	3.10(-83)	6.0510
(6.13)- g_5 , $c = 1$	2.54(-2)	5.06(-10)	2.26(-56)	6.0189
(6.13)- g_6	2.44(-2)	1.14(-11)	1.54(-67)	5.9878

TABELA 6.3 Euklidova norma grešaka – polinom stepena 21

Iz Tabela 6.2 i 6.3 i brojnih testiranih polinomskih jednačina možemo zaključiti da predložena familija (6.13) daje aproksimacije značajno bolje tačnosti; dva iterativna koraka su obično dovoljna prilikom rešavanja većine praktičnih problema kada su početne aproksimacije dovoljno dobre i polinomi dobro uslovljeni. Analiza računске efikasnosti pokazuje da je familija (6.13) efikasnija od svih postojećih metoda zasnovanih na relaciji fiksne tačke. Na kraju, napomenimo da računski red konvergencije dat formulom (6.22) (poslednja kolona u Tabelama 6.2 i 6.3) uglavnom dobro ocenjuje teorijski red konvergencije razmatranih metoda.

6.3 Simultani metodi sa Džeretovim korekcijama

U ovom odeljku primenjujemo predloženu familiju (2.56) dvokoračnih metoda za konstrukciju veoma efikasnog metoda za simultano određivanje svih prostih nula polinoma.

Primenjujemo ideju iz odeljka 6.2 i uvodimo tačnije aproksimacije određene iterativnom formulom (2.56) Džeretovog tipa, tj.

$$z_j^* = z_j - q(t_j)u(z_j), \quad t_j = \frac{f'(z_j - \frac{2}{3}u(z_j))}{f'(z_j)}, \quad (6.23)$$

gde težinska funkcija q zadovoljava uslove (2.54)

$$q_0 = q(1) = 1, \quad q_1 = q'(1) = -\frac{3}{4}, \quad q_2 = q''(1) = \frac{9}{4}, \quad |q'''(1)| < \infty. \quad (6.24)$$

Odgovarajući simultani metod ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \left(z_i - z_j + q(t_j)u(z_j) \right)^{-1}} \quad (i \in \mathbf{I}_n). \quad (6.25)$$

Ako su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ početne aproksimacije nula polinoma ζ_1, \dots, ζ_n , familija iterativnih metoda je definisana na sledeći način:

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{1}{\frac{1}{u_i^{(k)}} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \left(z_i^{(k)} - z_j^{(k)} + q(t_j^{(k)}) u_j^{(k)} \right)^{-1}}, \quad (i \in \mathbf{I}_n), \quad (6.26)$$

gde je

$$u_j^{(k)} = u(z_j^{(k)}), \quad t_j^{(k)} = \frac{f'(z_j^{(k)} - \frac{2}{3}u_j^{(k)})}{f'(z_j^{(k)})} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Napomena 6.2 Da bi se smanjila ukupna računaska cena, pre izvršenja bilo kog iterativnog koraka treba najpre izračunati sve aproksimacije $z_j^{(k)} - q(t_j^{(k)})u_j^{(k)}$ ($j = 1, \dots, n$). Na taj način se izbegava ponavljanje istih izračunavanja pod sumom u formuli (6.26).

Sada ćemo dati teoremu o konvergenciji familije simultanih metoda (6.26).

Teorema 6.3 *Neka je q realna ili kompleksna funkcija koja zadovoljava uslove (6.24). Ako su $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ početne aproksimacije dovoljno bliske različitim nulama ζ_1, \dots, ζ_n , tada red konvergencije simultanih metoda (6.26) iznosi šest.*

Dokaz. Zbog jednostavnosti, izostavljamo indeks iteracije k , a sve veličine u $(k+1)$ -voj iteraciji označavaćemo simbolom $\hat{\cdot}$. Na osnovu uslova Teoreme 6.3, možemo pretpostaviti da je $\varepsilon_i = O_M(\varepsilon_j)$ za svaki par $i, j \in \mathbf{I}_n$. Dalje, neka je $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ greška maksimalnog modula.

Zbog kraćeg pisanja uvedimo skraćenice

$$\eta_{ij} = z_i - z_j^*, \quad v_i = \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{z_j^* - \zeta_j}{(z_i - \zeta_j)\eta_{ij}}$$

i z_j^* je dato sa (6.23). Tada, polazeći od (6.25), (6.7) i koristeći gornje skraćenice, dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i} + \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j \in \mathbf{I}_n \setminus \{i\}} \frac{1}{\eta_{ij}}} = z_i - \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i v_i}.$$

Odavde je

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i v_i} = \frac{-\varepsilon_i^2 v_i}{1 - \varepsilon_i v_i}. \quad (6.27)$$

Kao i u dokazu teoreme 6.2, na osnovu Teoreme 2.4 sledi

$$z_j^* - \zeta_j = O_M(\varepsilon_j^4) \quad \text{i} \quad v_i = O_M(\varepsilon^4)$$

tako da iz (6.27) nalazimo

$$\hat{\varepsilon} = O_M(\varepsilon^6),$$

što ukazuje da je red konvergencije familije (6.26) jednak šest. \square

Primetimo da familija (6.23) koristi $f(z_j)$, $f'(z_j)$, $f'(z_j - \frac{2}{3}u(z_j))$. S obzirom da se $f(z_j)$ i $f'(z_j)$ već koriste prilikom implementacije simultanog metoda (6.26), jedino n dodatnih izračunavanja vrednosti izvoda f' (u tačkama $z_j - \frac{2}{3}u(z_j)$ ($j = 1, \dots, n$)) je potrebno obaviti. Računska cena suma u (6.10) i (6.26) je ista za oba metoda. Na račun pomenutih dodatnih izračunavanja, red konvergencije novog simultanog metoda (6.26) je povećan sa 3 (za (6.10)) na 6 (za (6.26)). Ovo ukazuje na visoku računsku efikasnost simultanog metoda (6.26). Lako je proveriti da metod (6.26) ima isti red konvergencije kao i metod (6.14).

Primer 6.4 Da bismo demonstrirali svojstva familije simultanih metoda (6.26), testirali smo veliki broj polinomskih jednačina. Među mnogim testiranim algebarskim polinomima odabrali smo sledeći stepena 24,

$$f(z) = (z^4 - 1)(z^4 - 81)(z^2 - 8z + 17)(z^2 - 6z + 13)(z^2 - 4z + 5)(z^2 - 4z + 13) \\ \times (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 5)(z^2 + 4z + 5)(z^2 + 4z + 13).$$

Za meru tačnosti dobijenih aproksimacija, koristili smo Euklidovu normu grešaka (6.21) datih u Tabeli 6.4. Ova tabela sadrži i računski red konvergencije \tilde{r}_c , izračunat po formuli (6.22).

Diskutujući računsku efikasnost simultanih metoda, napomenimo da Erlih-Abertov metod (6.10) reda tri zahteva n izračunavanja funkcije f , n izračunavanja izvoda f' i n izračunavanja suma (u imeniocu (6.10)) po iteraciji za polinom stepena n . Familija metoda (6.26) zahteva još samo n izračunavanja f' više u tačkama

$$z_j - q(z_j)u(z_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

S druge strane, metodi (6.26) poseduju red konvergencije šest, što ukazuje na znatno poboljšanu konvergenciju metoda (6.26) a time i njihovu računsku efikasnost.

Iz Tabele 6.4 vidimo da familija (6.26) daje aproksimacije nula izuzetne tačnosti u poređenju sa Erlih-Abertovim metodom (6.10).

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r}_c (6.22)
E-A metod (6.10)	5.06(-2)	6.42(-6)	1.57(-17)	2.9801
IM (6.26)-(2.59)	4.51(-2)	1.53(-9)	2.06(-53)	5.8772
IM (6.26)-(2.60)	4.48(-2)	9.52(-10)	3.70(-55)	5.9189
IM (6.26)-(2.61)	6.66(-2)	8.19(-8)	6.56(-43)	5.9382
IM (6.26)-(2.62)	3.93(-2)	4.37(-10)	1.78(-56)	5.8322
IM (6.26)-(2.63)	4.18(-2)	3.60(-10)	6.60(-58)	5.9184

TABELA 6.4 Euklidova norma greške – polinom stepena 24

6.4 Simultani metodi za višestruke nule

U prethodnom odeljku pokazali smo kako se višekoračni metodi mogu uspešno primeniti za konstrukciju iterativnih metoda za simultano određivanje prostih nula polinoma. Polazeći od relacije fiksne tačke (6.8), nameće se sledeće pitanje: *Da li je moguće konstruisati simultani metod šestog reda za određivanje višestrukih nula?* Izvođenje takvog metoda bilo je nemoguće do skora, jer optimalni metod za višestruke nule četvrtog reda koji zahteva samo tri funkcijska izračunavanja, sličan metodu (6.25), nije bio izveden. Ipak, 2009 godine Li, Liao i Čeng¹⁰ [46] predložili su dvokoračni metod za određivanje višestruke nule optimalnog reda četiri, što je omogućilo konstrukciju simultanog metoda velike računске efikasnosti za aproksimaciju višestrukih nula polinoma. Primenjujući taj dvokoračni metod, u ovom odeljku predlažemo simultani metod reda šest.

Napomena 6.3 Metod Li-Liao-Čenga [46] su nedavno uopštili Zou, Čen i Song¹¹, videti [99]. Međutim, partikularni metodi ove familije su jednake efikasnosti tako da smo izabrali Li-Liao-Čengov metod, koji je takođe član familije Zou, Čen i Songa, zbog njegovog jednostavnog oblika.

Neka je $f(z) = \prod_{j=1}^{\nu} (z - \zeta_j)^{\mu_j}$ monični polinom stepena n sa višestrukim realnim ili kompleksnim korenima $\zeta_1, \dots, \zeta_{\nu}$ odgovarajućih višestrukosti μ_1, \dots, μ_{ν} ($\nu \leq n$). Tada je

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} = \left[\frac{d}{dz} \log f(z) \right]^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j} \right)^{-1}. \quad (6.28)$$

Izdvajamo član $z - \zeta$ iz (6.28) i izvodimo sledeću nula-relaciju

$$\zeta_i = z - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u(z)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_{\nu} \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z - \zeta_j}} \quad (i \in \mathbf{I}_{\nu} := \{1, \dots, \nu\}), \quad (6.29)$$

koja će služiti kao osnova za konstrukciju simultanih metoda za određivanje višestrukih nula polinoma. Ova relacija je takođe upotrebljena u radu [27] za konstrukciju iterativnih metoda za simultanu inkluziju višestrukih nula polinoma u kompleksnoj kružnoj aritmetici.

Neka su z_1, \dots, z_{ν} različite aproksimacije korena $\zeta_1, \dots, \zeta_{\nu}$. Stavljajući $z = z_i$ i zamenom ζ_j nekom aproksimacijom z_j^* na desnoj strani jednakosti (6.29), dobijamo sledeći iterativni metod

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_{\nu} \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - z_j^*}} \quad (i \in \mathbf{I}_{\nu}) \quad (6.30)$$

za simultano nalaženje svih višestrukih nula polinoma f . Ovde \hat{z}_i označava novu aproksimaciju korena ζ_i . Izbor $z_j^* = z_j$ u (6.30) daje metod trećeg reda Erlih-Abertovog tipa za

¹⁰ L. Cheng

¹¹ X. Zhou, X. Chen, Y. Song

višestruke korene

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in \mathbf{I}_\nu). \quad (6.31)$$

Interesantno je pomenuti da je metod (6.31) u običnoj kompleksnoj aritmetici izveden nakon složenijeg metoda istog tipa u kružnoj kompleksnoj aritmetici, videti [27].

Dalje, koristeći Šrederove aproksimacije (1.32) $z_j^* = z_j - \mu_j u(z_j)$ u (6.30), u radu [50] izveden je sledeći ubrzan metod četvrtog reda

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u(z_i)} - \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - z_j + \mu_j u(z_j)}} \quad (i \in \mathbf{I}_\nu). \quad (6.32)$$

Iterativni metod (6.32) svodi se na Nurinov metod [57] u slučaju prostih korena.

Kao što je rečeno u prethodnom odeljku, iz relacija (6.29)–(6.32) jasno je da bolje aproksimacije z_j^* daju tačnije aproksimacije \hat{z}_i . Primenili smo ovu ideju za konstrukciju metoda višeg reda.

Iterativni metod četvrtog reda (6.32) dobija se upotrebom Šrederovog metoda (1.32) reda dva $z_j^* = z_j - \mu_j u(z_j)$. Dalje ubrzanje konvergencije može se ostvariti upotrebom metoda višeg reda za određivanje višestrukih korena. Ovde ćemo koristiti dvokoračni metod za nalaženje višestrukih korena koji su predložili Li, Liao i Čeng u radu [46]

$$\hat{z} = z - u(z) \cdot \frac{\beta + \gamma t(z)}{1 + \delta t(z)}, \quad t(z) = \frac{f'(z - \theta u(z))}{f'(z)}, \quad (6.33)$$

gde je

$$\theta = \frac{2m}{m+2}, \quad \beta = -\frac{m^2}{2}, \quad \gamma = \frac{m(m-2)}{2} \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m}, \quad \delta = -\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m},$$

i m je višestrukost traženog korena ζ funkcije f (ne obavezno algebarski polinom). Red konvergencije iterativnog metoda (6.33) je četiri, dakle važi

$$\hat{z} - \zeta = O_M((z - \zeta)^4) \quad (6.34)$$

(za dokaz, videti [46]).

U cilju konstrukcije novog metoda, zamenićemo z aproksimacijom z_j nule ζ_j i m odgovarajućom višestrukošću μ_j korena ζ_j . Aproksimacije z_j^* koje se javljaju u (6.30) se računaju prema (6.33), tj.

$$z_j^* = z_j - u_j \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j t_j}{1 + \delta_j t_j},$$

gde je $u_j = u(z_j)$, $t_j = f'(z_j - \theta_j u_j)/f'(z_j)$ i

$$\theta_j = \frac{2\mu_j}{\mu_j + 2}, \quad \beta_j = -\frac{\mu_j^2}{2}, \quad \gamma_j = \frac{\mu_j(\mu_j - 2)}{2} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j + 2} \right)^{-\mu_j}, \quad \delta_j = -\left(\frac{\mu_j}{\mu_j + 2} \right)^{-\mu_j}.$$

Nakon ovih zamena u (6.30), dobijamo metod za simultanu aproksimaciju svih prostih ili višestrukih nula datog polinoma f

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{\mu_i}{\frac{1}{u_i^{(k)}} - \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)} + u_j^{(k)} \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j t_j^{(k)}}{1 + \delta_j t_j^{(k)}}}}, \quad (i \in \mathbf{I}_\nu, k = 0, 1, \dots) \quad (6.35)$$

sa gore naqvedenim oznakama.

Konvergencija novog metoda (6.35) tema je sledeće teoreme.

Teorema 6.4 *Ako su početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \dots, z_\nu^{(0)}$ dovoljno bliske različitim korenima $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$ datog polinoma, onda je red konvergencije simultanog metoda (6.35) šest.*

Dokaz. Dokaz se izvodi analogno dokazu Teoreme 6.2. Na osnovu uslova Teoreme 6.4 možemo pretpostaviti $\varepsilon_i = O_M(\varepsilon_j)$ za svaki par $i, j \in \mathbf{I}_\nu$. Neka je $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu\}$ greška maksimalnog modula i $\varepsilon_j = O_M(\varepsilon)$ ($j \in \mathbf{I}_\nu$). Zbog kratkoće uvodimo

$$z_j^* = z_j - u_j \cdot \frac{\beta_j + \gamma_j t_j}{1 + \delta_j t_j}, \quad v_i = \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j (z_j^* - \zeta_j)}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j^*)}.$$

Tada, polazeći od (6.35) i koristeći (6.28), dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\mu_i}{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i} + \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j \in \mathbf{I}_\nu \setminus \{i\}} \frac{\mu_j}{z_i - z_j^*}} = z_i - \frac{\mu_i \varepsilon_i}{\mu_i - \varepsilon_i v_i},$$

odakle je

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{\mu_i \varepsilon_i}{\mu_i - \varepsilon_i v_i} = \frac{-\varepsilon_i^2 v_i}{\mu_i - \varepsilon_i v_i}. \quad (6.36)$$

Iz (6.34) sledi $v_i = O_M(\varepsilon^4)$, a iz (6.36) dalje sledi

$$\hat{\varepsilon} = O_M(\varepsilon^6),$$

budući da imenilac u (6.36) teži μ_i kada $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Zbog toga, red konvergencije simultanih metoda (6.35) je šest. \square

U nastavku ćemo analizirati računsku efikasnost metoda (6.31), (6.32) i novog simultanog metoda (6.35). Kao što je već pomenuto u odeljku 6.2, pokazuje se da metod (6.32) ima najveću računsku efikasnost u klasi simultanih metoda baziranih na relaciji fiksne tačke. Poređenje novog metoda (6.35) sa drugim metodima šestog reda nije svrsishodno iz dva razloga:

1) U ovom momentu, nema drugih simultanih metoda šestog reda oblika (6.30), osim metoda (6.35) sa Li-Liao-Čengovim dvokoračnim metodom (6.33) ili nekim drugim partikularnim metodima iste familije.

2) Postojeći metodi šestog reda za višestruke nule, kao što su metodi Halejevog tipa [62], [95], su manje efikasni od pomenutih metoda (6.32), videti [61, Po.6].

Poredeći iterativne formule (6.32) i (6.35) možemo primetiti da nova formula (6.35) zahteva ν novih vrednosti polinoma po iteraciji u odnosu na (6.32). Odavde zaključujemo da se minimalna računaska efikasnost iterativnog metoda (6.35) dobija kada je $\nu = n$, tj., kada su svi koreni prosti. Ovaj „najgori slučaj” u našoj računskoj analizi već je razmatran u odeljku 6.2 sa zaključkom da metod (6.35) (koji je za slučaj prostih nula, ekvivalentan metodu (6.35)) poseduje najveću računsku efikasnost.

Ponašanje konvergencije metoda (6.31), (6.32) i novog simultanog metoda (6.35) ilustrirano je u sledeća tri primera.

Primer 6.5 Metodi (6.31), (6.32) i (6.35) primenjeni su za simultanu aproksimaciju korena polinoma

$$f_{15}(z) = z^{15} - (8 - 3i)z^{14} + (28 - 24i)z^{13} - (58 - 86i)z^{12} + (81 - 190i)z^{11} - (86 - 287i)z^{10} \\ + (82 - 278i)z^9 - (68 - 72i)z^8 + (20 + 320i)z^7 + (104 - 692i)z^6 - (312 - 760i)z^5 \\ + (464 - 384i)z^4 - (320 + 256i)z^3 - (128 - 576i)z^2 + (384 - 384i)z - 256.$$

Koreni ovog polinoma su $-1, 2, 1 \pm i, i, -2i$, sa višestrukostima 2, 3, 2, 2, 3, redom. Početne aproksimacije su

$$z_1^{(0)} = -1.3 + 0.2i, \quad z_2^{(0)} = 2.2 - 0.4i, \quad z_3^{(0)} = 0.7 + 1.2i, \\ z_4^{(0)} = 0.8 - 1.3i, \quad z_5^{(0)} = 0.3 + 1.2i, \quad z_6^{(0)} = 0.3 - 1.7i.$$

Norme grešaka dobijene u prve tri iteracije date su u Tabeli 6.5. Norma greške početnih aproksimacija je $e^{(0)} \approx 1.52$.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r} (6.22)
(6.31)	3.12(-1)	6.23(-3)	2.76(-8)	3.15
(6.32)	2.60(-1)	1.66(-4)	1.20(-16)	4.17
(6.35)	2.48(-1)	7.94(-18)	1.58(-37)	5.81

TABELA 6.5. Euklidova norma grešaka – Primer 6.5

Primer 6.6 Isti metodi (6.31), (6.32) i (6.35) testirani su na primeru polinoma

$$f_{18}(z) = z^{18} + (2 - 2i)z^{17} - 14z^{16} - (18 - 26i)z^{15} + (80 - 12i)z^{14} + (26 - 118i)z^{13} \\ - (238 - 136i)z^{12} + (146 + 182i)z^{11} + (307 - 476i)z^{10} - (380 - 160i)z^9 \\ + (236 + 320i)z^8 + (32 - 712i)z^7 - (804 - 880i)z^6 + (512 + 96i)z^5 - (80 + 832i)z^4 \\ - (1024 - 1152i)z^3 - (448 - 256i)z^2 - (1024 - 512i)z + (-768 + 1024i).$$

Koreni ovih polinoma su $-1 - 2, 1 \pm i, \pm i, 2, -2 + i$ sa odgovarajućim višestrukostima 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2. Sledeće nulte aproksimacije su izabrane ($e^{(0)} \approx 1.50$)

$$\begin{aligned} z_1^{(0)} &= -1.3 + 0.2i, & z_2^{(0)} &= -2.2 - 0.3i, & z_3^{(0)} &= 1.3 + 1.2i, & z_4^{(0)} &= 0.7 - 1.2i, \\ z_5^{(0)} &= -0.2 + 0.8i, & z_6^{(0)} &= 0.2 - 1.3i, & z_7^{(0)} &= 2.2 - 0.3i, & z_8^{(0)} &= -2.2 + 0.7i. \end{aligned}$$

Maksimalne greške dobijene u prve tri iteracije date su u Tabeli 6.6.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r} (6.22)
(6.31)	2.81(-1)	2.61(-3)	2.93(-9)	2.92
(6.32)	1.62(-1)	6.00(-5)	1.92(-18)	3.93
(6.35)	1.80(-1)	9.03(-7)	1.21(-39)	6.20

TABELA 6.6. Euklidova norma grešaka – Primer 6.6

Primer 6.7 Da bismo odredili korene polinoma

$$\begin{aligned} f_{20}(z) &= z^{20} + 4z^{19} - 20z^{18} - 72z^{17} + 252z^{16} + 664z^{15} - 2092z^{14} - 3440z^{13} + 12450z^{12} \\ &+ 9520z^{11} - 51476z^{10} - 1264z^9 + 142360z^8 - 82488z^7 - 228612z^6 \\ &+ 279376z^5 + 117237z^4 - 337300z^3 + 77400z^2 + 135000z - 67500 \end{aligned}$$

primenili smo iste metode. Koreni ovog polinoma su $-1, -3, 1 \pm i, 1, \pm 2 \pm i$, sa višestrukostima 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, redom. Početne aproksimacije su ($e^{(0)} \approx 1.43$)

$$\begin{aligned} z_1^{(0)} &= -1.3 + 0.2i, & z_2^{(0)} &= -2.8 - 0.2i, & z_3^{(0)} &= 1.2 + 1.3i, \\ z_4^{(0)} &= 0.8 - 1.2i, & z_5^{(0)} &= 0.8 - 0.3i, & z_6^{(0)} &= -1.8 + 1.2i, \\ z_7^{(0)} &= -1.8 - 1.2i, & z_8^{(0)} &= 1.8 + 0.8i, & z_9^{(0)} &= 1.8 - 1.2i. \end{aligned}$$

Norme grešaka u prve tri iteracije date su u Tabeli 6.7.

metodi	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	\tilde{r} (6.22)
(6.31)	1.10(-1)	7.24(-5)	1.64(-14)	3.02
(6.32)	5.57(-2)	2.38(-7)	3.24(-29)	4.07
(6.35)	2.18(-2)	7.44(-13)	3.65(-75)	5.99

TABELA 6.7 Euklidova norma grešaka – Primer 6.7.

Iz Tabela 6.5–6.7 kao i brojnih testiranih polinomskih jednačina, možemo zaključiti da predložena familija (6.35) daje aproksimacije izuzetne tačnosti; dva iterativna koraka su obično dovoljna pri rešavanju većine praktičnih problema ako su početne aproksimacije dovoljno bliske korenima. Opisana analiza računске efikasnosti pokazuje da je familija (6.35) efikasnija od postojećih metoda za određivanje višestrukih nula zasnovanih na relaciji fiksne tačke.


Literatura

1. O. Aberth, Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, *Math. Comp.* 27 (1973), 339–344.
2. D. Basu, From third to fourth order variant of Newton’s method for simple roots, *Appl. Math. Comput.* 202 (2008), 886–892.
3. W. Bi, H. Ren, Q. Wu, Three-step iterative methods with eight-order convergence for solving nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 225 (2009), 105–112.
4. W. Bi, Q. Wu, H. Ren, A new family of eight-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 214 (2009), 236–245.
5. R. P. Brent, Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (1973), 327–344.
6. R. Brent, P. Zimmermann, *Modern Computer Arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
7. X. Buff, C. Hendriksen, On König’s root-finding algorithms, *Nonlinearity* 16 (2003), 989–1015.
8. C. Chun, A family of composite fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 187 (2007), 951–956.
9. C. Chun, Some variants of King’s fourth-order family of methods for nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 190 (2007), 57–62.
10. C. Chun, Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 195 (2008), 454–459.
11. C. Chun, H. J. Bae, B. Neta, New families of nonlinear third-order solvers for finding multiple roots, *Comput. Math. Appl.* 57 (2009), 1574–1582.
12. C. Chun, M. Y. Lee, B. Neta, J. Džunić, On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, *Appl. Math. Comput.* DOI: 10.1016/j.amc.2011.12.013 (pojaviće se).
13. C. Chun, B. Neta, A third-order modification of Newton’s method for multiple roots, *Appl. Math. Comput.* 211 (2009), 474–479.
14. A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martinez, J. R. Torregrosa, New modifications of Potra-Pták’s method with optimal fourth and eighth orders of convergence, *J. Comput. Appl. Math.* 234 (2010), 2969–2976.
15. A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Three-step iterative methods with optimal eighth-order convergence, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (2011), 3189–3194.
16. K. Dochev, Modified Newton’s method for the simultaneous approximate calculation of all roots of a given algebraic equation (in Bulgarian), *Fiz.-Mat.Spis. Blgar. Akad.Nauk* 5 (1962), 136–139.
17. E. Durand, *Solution numériques des équations algébriques, Tom. I: Équations du Type $F(x) = 0$; Racines d’un Polynôme*, Masson, Paris, 1960.
18. J. Džunić, On the similarity of some three-point methods for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011), 6633–6635.

19. J. Džunić, M. Petković, A family of three-point methods of Ostrowski's type for solving nonlinear equations, *J. Appl. Math.* doi:10.1155/2011/425867.
20. J. Džunić, M. S. Petković, L. D. Petković, A family of optimal three-point methods for solving nonlinear equations using two parametric functions, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011), 7612–7619.
21. J. Džunić, M. S. Petković, L. D. Petković, Three-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 218 (2012), 4917–4927.
22. L. W. Ehrlich, A modified Newton method for polynomials, *Comm. ACM* 10 (1967), 107–108.
23. M. R. Farmer, G. Loizou, An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 82 (1977), 427–437.
24. L. Fousse, G. Hanrot, V. Lefèvre, P. Pélissier, P. Zimmermann, MPFR: a multiple-precision binary floating-point library with correct rounding, *ACM Trans. Math. Software* 33 (2007), article 13.
25. M. Frontini, E. Sormani, Some variant of Newton's method with third-order convergence, *Appl. Math. Comput.* 140 (2003), 419–426.
26. J. Fujimoto, T. Ishikawa, D. Perret-Gallix, High precision numerical computations, Technical report, ACCP-N-1, May 2005.
27. I. Gargantini, Further application of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bound for finding zeros of polynomials, *SIAM J. Numer. Anal.* 15 (1978), 497–510.
28. I. Gargantini, P. Henrici, Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros, *Numer. Math.* 18 (1972), 305–320.
29. Y. H. Geum, Y. I. Kim, A multi-parameter family of three-step eighth-order iterative methods locating a simple root, *Appl. Math. Comput.* 215 (2010), 3375–3382.
30. Y. H. Geum, Y. I. Kim, A uniparametric family of three-step eighth-order multipoint iterative methods for simple roots, *Appl. Math. Lett.* 24 (2011), 929–935.
31. Y. H. Geum, Y. I. Kim, A biparametric family of eighth-order methods with their third-step weighting function decomposed into a one-variable linear fraction and a two-variable generic function, *Comput. Math. Appl.* 61 (2011), 708–714.
32. T. Granlund, GNU MP; The GNU multiple precision arithmetic library, edition 5.0.1 (2010).
33. E. Hansen, M. Patrick, A family of root finding methods, *Numer. Math.* 27 (1977), 257–269.
34. P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1: Power Series, Integration, Conformal Mapping, Location of Zeros*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1974.
35. J. Herzberger, Über Matrixdarstellungen für Iterationverfahren bei nichtlinearen Gleichungen, *Computing* 12 (1974), 215–222.
36. P. Jarratt, Some fourth order multipoint methods for solving equations, *Math. Comp.* 20 (1966), 434–437.
37. P. Jarratt, Some efficient fourth-order multipoint methods for solving equations, *BIT* 9 (1969), 119–124.
38. B. Jovanović, A method for obtaining iterative formulas of higher order, *Mat. Vesnik* 9 (24)(1972), 365–369.
39. I. O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, *Numer. Math.* 8 (1966), 290–294.
40. R. King, A family of fourth order methods for nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (1973), 876–879.
41. J. Kou, Fourth-order variants of Cauchy's method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 192 (2007), 113–119.
42. J. Kou, Y. Li, X. Wang, A composite fourth-order iterative method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 184 (2007), 471–475.
43. J. Kou, X. Wang, Y. Li, Some eighth-order root-finding three-step methods, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010), 536–544.
44. H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Journal of the ACM* 21 (1974), 643–651.
45. E. Laguerre, Sur la résolution des équations numériques, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, sér. 2, tome 17 (1878), 97–101.

46. S. Li, X. Liao, L. Cheng, A new fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 215 (2009), 1288–1292.
47. L. Liu, X. Wang, Eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 215 (2010), 3449–3454.
48. A. K. Maheshwari, A fourth-order iterative method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 211 (2009), 383–391.
49. J. M. McNamee, *Numerical Methods for Roots of Polynomials*, Part I, Elsevier, Amsterdam, 2007.
50. G. V. Milovanović, M. S. Petković, On the convergence order of a modified method for simultaneous finding polynomial zeros, *Computing* 30 (1983), 171–178.
51. G. V. Milovanović, M. S. Petković, On computational efficiency of the iterative methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros, *ACM Trans. Math. Software* 12 (1986), 295–306.
52. B. Neta, On a family of multipoint methods for nonlinear equations, *Int. J. Comput. Math.* 9 (1981), 353–361.
53. B. Neta, A new family of higher order methods for solving equations, *Int. J. Comput. Math.* 14 (1983), 191–195.
54. B. Neta, New third order nonlinear solvers for multiple roots, *Appl. Math. Comput.* 202 (2008), 162–170.
55. B. Neta, A. N. Johnson, High-order nonlinear solver for multiple roots, *Comput. Math. Appl.* 55 (2008), 2012–2017.
56. B. Neta, M. S. Petković, Construction of optimal order nonlinear solvers using inverse interpolation, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010), 2448–2455.
57. A. W. M. Nouredin, An improvement on two iteration methods for simultaneously determination of the zeros of a polynomial, *Int. J. Comput. Math.* 6 (1977), 241–252.
58. J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
59. N. Osada, An optimal multiple root-finding method of order three, *J. Comput. Appl. Math.* 51 (1994), 131–133.
60. A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York, 1960.
61. M. S. Petković, *Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
62. M. S. Petković, On the Halley-like algorithms for the simultaneous approximation of polynomial complex zeros, *SIAM J. Numer. Anal.* 26 (1989), 740–763.
63. M. S. Petković, On a general class of multipoint root-finding methods of high computational efficiency, *SIAM J. Numer. Anal.* 47 (2010), 4402–4414.
64. M. S. Petković, Remarks on “On a general class of multipoint root-finding methods of high computational efficiency”, *SIAM J. Numer. Anal.* 49 (2011), 1317–1319.
65. M. S. Petković, C. Carstensen, On some improved inclusion methods for polynomial roots with Weierstrass’ corrections, *Comput. Math. Appl.* 25 (1993), 59–67.
66. M. S. Petković, J. Džunić, Generalized multipoint root-finders with memory, *J. Comput. Appl. Math.* (pojaviće se).
67. M. S. Petković, J. Džunić, M. Milošević, Traub’s accelerating generator of iterative root finding methods, *Appl. Math. Lett.* 24 (2011), 1443–1448.
68. M. S. Petković, J. Džunić, L. D. Petković, A family of two-point methods with memory for solving nonlinear equations, *Appl. Analysis Discrete Math.* 5 (2011), 298–317.
69. M. S. Petković, J. Džunić, B. Neta, Interpolatory multipoint methods for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 218 (2011), 2533–2541.
70. M. S. Petković, D. Herceg, On rediscovered iteration methods for solving equations, *J. Comput. Appl. Math.* 107 (1999), 275–284.
71. M. S. Petković, Đ. Herceg, I. Petković, On a simultaneous method of Newton-Weierstrass’ type for finding all zeros of a polynomial, *Appl. Math. Comput.* 215 (2009), 2456–2463.
72. M. S. Petković, S. Ilić, J. Džunić, Derivative free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010), 1887–1895.

73. M. S. Petković, L. D. Petković, A one parameter square root family of two-step root-finders, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007), 339–344.
74. M. S. Petković, L. D. Petković, Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations: a survey, *Appl. Anal. Discrete Math.* 4 (2010), 1–22.
75. M. S. Petković, L. D. Petković, On a cubically convergent derivative free root finding method, *Int. J. Comput. Math.* 84 (2007), 505–513.
76. M.S. Petković, L.D. Petković, Construction of zero-finding methods by Weierstrass functions, *Appl. Math. Comput.* 184 (2007), 351–359.
77. M. S. Petković, L. D. Petković, J. Džunić, A class of three-point root-solvers of optimal order of convergence, *Appl. Math. Comput.* 216 (2010), 671–676.
78. M. S. Petković, L. D. Petković, J. Džunić, Accelerating generators of iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010), 2784–2793.
79. M. S. Petković, L. Z. Rancić, D. M. Milošević, *Numerical Solution of Nonlinear Equations* (in Serbian), Faculty of Electronic Engineering, University of Niš, Niš, 2009.
80. M. S. Petković, B. I. Yun, Sigmoid-like functions and root finding methods, *Appl. Math. Comput.* 204 (2008), 784–793.
81. H. Ren, Q. Wu, W. Bi, A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence, *Appl. Math. Comput.* 209 (2009), 206–210.
82. E. Schröder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Annal.* 2 (1870), 317–365.
83. A. Schönhage, V. Strassen, Schnelle Multiplikation grosser Zahlen, *Computing* 7 (1971), 281–292.
84. J. R. Sharma, R. Sharma, Modified Jarratt method for computing multiple roots, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010), 878–881.
85. J. R. Sharma, R. Sharma, A new family of modified Ostrowskis methods with accelerated eighth order convergence, *Numer. Algorithms* 54 (2010), 445–458.
86. I. F. Steffensen, Remarks on iteration, *Skand. Aktuarietidskr.* 16 (1933), 64–72.
87. G. W. Stewart, On infinitely many algorithms for solving equations, Technical Report, University of Maryland at College Park, College Park, 1992.
88. J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
89. R. Thukral, A new eighth-order iterative method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010), 222–229.
90. R. Thukral, M. S. Petković, Family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (2010), 2278–2284.
91. E. R. Vrscaj, W. J. Gilbert, Extraneous fixed points, basin boundaries and chaotic dynamics for Schröder and König rational iteration functions, *Numer. Math.* 52 (1998), 1–16.
92. X. Wang, L. Liu, New eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 234 (2010), 1611–1620.
93. X. Wang, L. Liu, Modified Ostrowski's method with eighth-order convergence and high efficiency index, *Appl. Math. Lett.* 23 (2010), 549–554.
94. S. Weerakoon, T. G. I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Appl. Math. Lett.* 13 (2000), 87–93.
95. D. Wang, Y. Wu, Some modifications of the parallel Halley iteration method and their convergence, *Computing* 38 (1987), 75–87.
96. B. I. Yun, A non-iterative method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comp.* 198 (2008), 691–699.
97. J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice Hall, New Jersey (1963).
98. Q. Zheng, J. Li, F. Huang, Optimal Steffensen-type families for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011), 9592–9597.
99. X. Zhou, X. Chen, Y. Song, Construction of higher order methods for multiple roots of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (2011), 4199–4206.


	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
	КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Јована Џунић
Ментор, МН:	Миодраг С. Петковић, Снежана Илић
Наслов рада, НР:	Вишестепени методи за решавање нелинеарних једначина
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публикација, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2012.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/	132 стр.
Научна област, НО:	математика
Научна дисциплина, НД:	нумеричка математика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	решавање нелинеарних једначина, више- корачни методи, нуле полинома, убрзање конвергенције, рачунска ефикасност
УДК	519.6
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	

Извод, ИЗ :	<p>Један од најстаријих и најважнијих проблема у нумеричкој математици је решавање нелинеарних једначина. Примењена математика, физика, инжењерске дисциплине, астрономија, економија па чак и друштвено-хуманистичке науке су само неке од научних дисциплина у којима се јавља потреба за решавањем проблема овог типа. Ова дисертација бави се конструкцијом, анализом конвергенције и нумеричким тестирањем оптималних вишестепених метода. Предложено је више оригиналних двокорачних и трокорачних метода високе рачунске ефикасности. По први пут у литератури дат је приступ који ред конвергенције оптималних метода знатно убрзава без додатних функцијских израчунавања. С обзиром на постигнути степен побољшања рачунске ефикасности у односу на постојеће методе, ови резултати представљају значајан напредак у Теорији итеративних процеса. Посебно поглавље посвећено је симултаном одређивању нула алгебарских полинома применом метода са корекцијама. Побољшање ефикасности симултаних метода постигнуто је коришћењем двокорачних метода за налажење простих и вишеструких корена нелинеарних једначина. Сви методи су тестирани на нумеричким примерима и упоређени са познатим методима.</p>
Датум прихватања теме, ДП :	30.3.2011.
Датум одбране, ДО :	
Чланови комисије, КО :	<p>Председник:</p> <p>Члан, ментор:</p> <p>Члан:</p> <p>Члан:</p>

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Q4.16.01 - Izdanje 1

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monograph
Type of record, TR :	textual
Contents code, CC :	doctoral dissertation
Author, AU :	Jovana Džunić
Mentor, MN :	Miodrag S. Petković, Snežana Ilić
Title, TI :	Multipoint methods for solving nonlinear equations
Langugae of text, LT :	Serbian
Langugae of abstract, LA :	English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2012.
Publisher, PB :	author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33.
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/ appendixes)	132 p.
Scientific field, SF :	mathematics
Scientific discipline, SD :	numerical analysis
Subject/Key words, S/KW :	solving nonlinear equations, multipoint methods, polynomial zeros, acceleration of convergence
UC	519.6
Holding data, HD :	library
Note, N :	

Abstract, AB :	Solving nonlinear equations is one of the oldest and most important problems in numerical mathematics. Applied mathematics, physics, engineering disciplines, astronomy, economics and even social sciences and humanities are just some of the scientific disciplines where there is a need for solving problems of this type. This thesis deals with the construction, convergence analysis and numerical testing of optimal multipoint methods. Several original two-step and three-step methods of high computational efficiency are proposed. For the first time in the literature, an approach is given for significant acceleration of convergence rate not requiring any additional function evaluations. Considering achieved improvement of computational efficiency, compared to the existing methods, these results represent significant progress in the theory of iterative processes. One chapter is devoted to the simultaneous determination of zeros of algebraic polynomials using the method of corrections. Improved efficiency is attained using two-step methods for finding simple and multiple roots of nonlinear equations. All methods were tested on numerical examples and compared to the known methods.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	30.3.2011.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	
President:	
Member, mentor:	
Member:	
Member:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1