U N I V E R Z I T E T U N I Š U

P r i r o d n o - m a t e m a t i č k i f a k u l t e t

Marija S. Ćirić

INFINITEZIMALNE DEFORMACIJE KRIVIH, POVRŠI I MNOGOSTRUKOSTI

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2012

U ovoj disertaciji razmatraju se infinitezimalne deformacije krivih, površi i mnogostrukosti, prvenstveno infinitezimalna savijanja krivih i površi i infinitezimalne geodezijske deformacije generalisanih Rimanovih prostora.

Čast mi je da se zahvalim svom mentoru prof. dr Ljubici Velimirović na nesebičnoj i svesrdnoj pomoći, korisnim sugestijama i savetima, kao i izuzetnoj prijateljskoj podršci tokom izrade ovog rada. Ona mi je skrenula pažnju na mnoge elemente problematike koju tretira ovaj rad i pratila ceo tok izrade.

Sa zadovoljstvom se zahvaljujem i prof. dr Mići Stankoviću na novim idejama i interesantnim problemima koje je predlagao.

Iskrenu zahvalnost izražavam prof. dr Predragu Stanimiroviću na divnoj saradnji i svestranoj pomoći u izradi ove disertacije.

Zahvaljujem se i svojoj porodici na strpljenju, razumevanju i podršci tokom izrade ovog rada, posebno svom sinu Ognjenu koji mi je najveća motivacija i podstrek u radu.

Sadržaj

Predgovor

Teorija infinitezimalnih deformacija jedan je od glavnih delova globalne diferencijalne geometrije i proučava geometrijske objekte sa usvojenom tačnošću. Koncept infinitezimalnih deformacija zastupljen je najpre kod površi, a zatim se nastavlja i kod krivih i mnogostrukosti.

Prilikom infinitezimalnih deformacija, neke geometrijske veličine ostaju nepromenjene (sa datom preciznošću) i kažemo da su krute. Nasuprot njima, veličine koje se menjaju su nekrute, odnosno fleksibilne.

U slučaju krutosti luka krive govorimo o infinitezimalnom savijanju. Infinitezimalna savijanja su posebno važna u teoriji infinitezimalnih deformacija. Prilikom savijanja još neke veličine ostaju stacionarne kao što su koeficijenti prve osnovne kvadratne forme, determinanta prve i druge kvadratne forme površi, Kristofelovi simboli, Gausova i geodezijska krivina itd.

Infinitezimalno savijanje površi nije izometrijska deformacija. Možemo reći da je to izometrijska deformacija posmatrano sa usvojenom tačnošću. Pri infinitezimalnom savijanju površ se doformiše tako da je u početnom momentu dužina luka stacionarna.

Problemom infinitezimalnih savijanja površi bavili su mnogi poznati matematičari: A. Koši (Cauchy), H. Libman (Liebman), D. Hilbert, H. Vajl (Weil), V. Blaške (Blaschke), S. Kon-Fosen (Cohnn-Vossen) i dr. Poslednjih decenija ovim problemom bave se A. D. Aleksandrov, I. Vekua, N. V. Jefimov (Efimov), A. V. Pogorelov, V. T. Fomenko, I. H. Sabitov, I. Ivanova-Karatopraklijeva, Lj. S. Velimirović, V. A. Aleksandrov i dr.

U teoriji savijanja, posebno je važan zadatak pronaći klasu nesavitljivih, odnosno krutih površi (kada je deformacija trivijalna, tj. kretanje površi kao krutog tela), kao i klasu savitljivih, odnosno fleksibilnih površi.

Prvi globalni rezultat u teoriji savijanja površi pripada Košiju [13]. On je 1813. godine dokazao da su zatvoreni konveksni poliedri kruti. Godine 1899. Libman je dokazao da je sfera kruta [53]. Takođe, par godina kasnije, pokazao je da su torus i analitička rotaciona površ, koja sadrži jako konveksan pojas kruti u klasi infinitezimalnih savijanja.

Infinitezimalna savijanja neregularnih konveksnih površi prvi je proučavao A. D. Aleksandrov [1]. N. V. Jefimov je dao fundamentalni doprinos razvoju teorije infinitezimalnih savijanja. On u radu [30] daje opšti pregled infinitezimalnih savijanja prvog i višeg reda različitih klasa površi. Takođe, infinitezimalna savijanja drugog i višeg reda razmatrana su u radovima S. Kon-Fosena [15], I. Ivanove-Karatopraklieve [46], I. H. Sabitova [73], Lj. S. Velimirović [94, 98].

Osnovni metod za izučavanje infinitezimalnih savijanja rotacionih površi izložio je Kon-Fosen [15]. K. M. Belov je u radu [7] razmatrao infinitezimalna savijanja toroidnih rotacionih površi sa meridijanom oblika četvorougla specijalnog oblika i među njima ukazao na nekrute površi sa konveksnim meridijanom. Lj. S. Velimirović je u [94] dala neka uopštenja, razmatrajući toroid sa meridijanom oblika proizvoljnog prostog četvorougla.

Koristeći aparat uopštenih analitičkih funkcija, I. Vekua [92] je na jedinstven način pristupio ispitivanju infinitezimalnih savijanja površi. Svoje teorijsko razmatranje primenio je u teoriji ljuski. Naime, teorija infinitezimalnih savijanja površi je tesno povezana sa teorijom tankih elastičnih ljuski. Termin "krutost površi" ima odgovarajuću mehaničku interpretaciju.

Od posebne važnosti u teoriji infinitezimalih savijanja površi su polja rotacije i translacije. Ova polja uveo je G. Darbu (Darboux) [18]. Brilijantnu primenu polja rotacija pronašao je V. Blaške [8], koji je predstavio najjednostavniji dokaz krutosti glatkih ovaloida. Kasnije je njegov dokaz popularizovalo mnogo autora (v. [15, 30]). Polje translacija igra važnu ulogu u studijama matematičara kao što su E. Rembs [71] i R. Zaua (Sauer) [74], koji su, između ostalog, pokazali da je projektivna slika nekrute površi takođe nekruta površ. Među savremenim autorima koji koriste polja rotacije i translacije pomenućemo G. Siarle (Ciarlet) i O. Žozifeski (Iosifescu) [14].

Prilikom savijanja površi, neke geometrijske veličine se menjaju, odnosno fleksibilne su, što je okarakterisano varijacijom različitom od nule. Varijacija geometrijskih veličina ima važnu ulogu u opisu fleksibilnosti površi prilikom deformacije. Zanimljivo je da varijacija zapremine pri infinitezimalnom savijanju površi koja je određuje nije uvek stacionarna. V. A. Aleksandrov je u radu [2] dao primer poliedra koji ne očuvava zapreminu. Takođe, pokazao je da je zapremina glatke rotacione površi stacionarna. Lj. S. Velimirović [94] je pokazala da je zapremina deo po deo glatke rotacione površi pri infinitezimalnom savijanju stacionarna.

Kada je u pitanju varijacija totalne srednje krivine površi, pomenimo radove V. A. Aleksandrova [3, 4]. On je pokazao da svaka fleksibilna orijentisana površ bez kraja u euklidskom trodimenzionalnom prostoru $\mathcal{R}^3$ čuva totalnu srednju krivinu pri savijanju. Integral srednje krivine hiperpovrši u multidimenzionalnom euklidskom i Lobačevskom prostoru razmatrali su F. J. Algren i I. Rivin u radu [5].

Još jedna, takođe važna klasa infinitezimalnih deformacija površi u $\mathcal{R}^3$ jesu geodezijske deformacije. Naime, ukoliko su prilikom infinitezimalne deformacije geodezijske linije krute, tj. svaka geodezijska linija prelazi u geodezijsku sa datom preciznošću, reč je o infinitezimalnim geodezijskim deformacijama. Kako je geodezijska krivina kruta pri infinitezimalnim savijanjima, pa samim tim i geodezijske linije kao krive čija je geodezijska krivina jednaka nuli, infinitezimalna savijanja su specijalan slučaj infinitezimalnih geodezijskih deformacija.

Infinitezimalne geodezijske deformacije uveli su M. L. Gavrilčenko (Gavril'chenko) i N. Sinjukov (Sinyukov) [80] godine 1971. Oni su dokazali postojanje veze između geodezijskih deformacija i geodezijskih preslikavanja (preslikavanja koja čuvaju geodezijske linije) i uveli potrebne i dovoljne uslove za postojanje takvih deformacija. U monografiji [68] Ž. Radulovića, J. Mikeša i M. L. Gavrilčenka pokazano je da infinitezimalne geodezijske deformacije dopuštaju samo Liuvilove površi. U radu [34] V. T. Fomenko proučava infinitezimalne geodezijske deformacije metrike ds^2 u izometrijskoj parametrizaciji i pokazuje da se problem postojanja ovih deformacija može svesti na proučavanje sistema diferencijalnih jednačina kompleksne promenljive i da sfera "u celom" dopušta netrivijalne geodezijske deformacije. U [31] S. Fedčenko (Fedchenko) proučava specijalne vrste infinitezimalnih geodezijskih deformacija rotacionih površi

- tangentne i normalne deformacije. S. G. Leiko i S. Fedčenko u [50] daju varijacionu generalizaciju problema infinitezimalnih geodezijskih deformacija, tzv. infinitezimalne rotacione deformacije i prikazuju njihovu ulogu u mehanici i teoriji tankih ljuski.

Osim pomenutih vrsta infinitezimalnih deformacija, zadavanjem raznih specijalnih uslova možemo dobiti razne vrste infinitezimalnih deformacija, na primer, afine, površinske, konformne i dr.

Teorija infinitezimalnih deformacija površi se dalje rasprostranjuje počev od rezultata iz trodimenzionalnog euklidskog prostora generalizacijom na višedimenzionalne prostore, odnosno njihove potprostore. Od kako je T. Levi-Čivita (Levi-Civita) publikovao svoj čuveni rad [51] o geodezijskoj devijaciji, teoriju infinitezimalnih deformacija krivih na mnogostrukostima proučavali su T. Bogio (Boggio), E. Bortoloti (Bortolotti), E. Kartan (Cartan), U. Krudeli (Crudeli), L. P. Ajzenhart (Eisenhart), A. De Mira Fernandes, H. A. Hajden (Hayden), M. S. Knebelman, A. J. Mekonel (McConnell) i dr. Teorija infinitezimalnih deformacija krivih je zatim generalizovana na potprostore od strane autora E. Bortolotija, E. Kartana, H. A. Hajdena, A. J. Mekonela, K. Jana i drugih. Potom su teoriju infinitezimalnih deformacija prostora proučavali N. Koburn (Coburn), L. P. Ajzenhart, E. R. van Kampen, M. S. Knebelman, A. J. Mekonel, K. Jano i dr. K. Jano je u radu [112] razvio geometrijsku teoriju infinitezimalnih deformacija i proučavao specijalno deformacije potprostora prostora sa linearnom koneksijom. U radu [111] primenjeni su ti metodi u proučavanju infinitezimalnih deformacija krivih, i to raznih vrsta u zavisnosti od geometrijske veličine koja ostaje nepromenjena. Tako imamo geodezijske, afino konusne, projektivno konusne, kao i deformacije koje čuvaju geodezijske, odnosno konformne krugove.

Teoriju infinitezimalnih savijanja višedimenzionalnih prostora razvijali su K. Jano, A. V. Pogorelov, P. E. Markov, I. Ivanova-Karatopraklijeva, I. H. Sabitov, Lj. S. Velimirović i dr.

Infinitezimalne geodezijske deformacije Rimanovih prostora i njihovih potprostora zastupljene su u radovima M. L. Gavrilčenka, N. N. Kinzerske, V. Kiosaka, J. Mikeša, A. Vanžurove, N. S. Sinjukova, na primer [36, 37, 38, 39, 57]. U radu [36] M. L. Gavrilčenko daje potrebne i dovoljne uslove da Rimanov prostor dopušta infinitezimalne geodezijske deformacije. Od praktičnog su interesa infinitezimalne deformacije Rimanovih (pod)prostora pri kojima se svaka geodezijska kriva slika na krivu koja je takođe geodezijska (u deformisanom podprostoru) sa datom preciznošću. Ovakav pristup je od velikog značaja prilikom simuliranja realnih fizičkih situacija, kada se razmatra evolucija gravitacionih polja (elektromagnetnih polja, mehaničkih sistema itd.).

U novije vreme, problematika infinitezimalnih deformacija prostora sa simetričnom koneksijom sve se više generalizuje na prostore sa nesimetričnom koneksijom. Prostori sa nesimetričnim osnovnim tenzorom, odnosno nesimetričnom koneksijom potiču od Ajnštajna (Einstein) u vezi sa Jedinstvenom teorijom polja (JTP) [26, 27], koja osim gravitacije obuhvata i elektromagnetno polje. Počev od 1951. ovim problemom se dosta bavio Ajzenhart (Eisenhart) [29], a kasnije i mnogi drugi matematičari: S. M. Minčić [58], M. Prvanović [67], M. Stanković [87],

S. Bohner i K. Jano [9], R. S. Mishra [62], K. D. Singh [76], M. Lj. Zlatanović [114] i dr. Infinitezimalne deformacije prostora sa nesimetričnom afinom koneksijom javljaju se u knjigama [61, 98] autora S. M. Minčića i Lj. S. Velimirović, kao i njihovim mnogobrojnim radovima.

Ovaj rad razmatra neke probleme teorije infinitezimalnih deformacija i to, pre svega, infinitezimalnih savijanja krivih i površi i infinitezimalnih geodezijskih deformacija mnogostrukosti. Sastoji se iz pet glava, i to:

1. Infinitezimalne deformacije površi;
2. Varijacija geometrijskih veličina;
3. Infinitezimalne deformacije krivih na površima;
4. Infinitezimalne deformacije mnogostrukosti;
5. Neki metrički problemi.

Svaka glava podeljena je na nekoliko poglavlja, a poglavlja na odeljke. Na kraju je dat spisak literature po abecednom redosledu. Ukratko ćemo izložiti sadržaj rada po glavama.

Prva glava sadrži pregled poznatih rezultata teorije infinitezimalnih deformacija i, posebno, infinitezimalnih savijanja površi, kao i analizu infinitezimalnih savijanja jedne klase površi.

U prvom poglavlju ove glave dati su osnovni pojmovi tenzorskog računa koji su u radu korišćeni. U drugom poglavlju definišu se infinitezimalne deformacije površi n-tog reda. Treće poglavlje sadrži definiciju infinitezimalnog savijanja n-tog reda i osnovne teoreme koje se koriste u radu. U odeljku 1.3.1 predstavljen je kinematički sistem jednačina polja infinitezimalnih savijanja, prema [92, 93]. U odeljku 1.3.2 razmatra se specijalna klasa pravolinijskih površi, tzv. Gaudijeve površi, i određuje polje infinitezimalnih savijanja za tu klasu površi.

Rezultat odeljka 1.3.2 publikovan je u [103].

U drugoj glavi razmatra se varijacija geometrijskih veličina pri infinitezimalnim deformacijama površi. Pored promene nekih osnovnih elemenata površi (kovarijantnih i kontravarijantnih baznih vektora, glavne normale, koeficijenata prve i druge kvadratne forme, srednje i Gausove krivine itd.), u trećem poglavlju ove glave razmatra se promena Vilmorove energije, kao funkcije srednje i Gausove krivine, i nalazi klasa površi čija je Vilmorova energija stacionarna pri infinitezimalnim deformacijama (jednačina 2.3.15). U četvrtom poglavlju razmatra se promena geometrijskih veličina pri infinitezimalnim savijanjima, i to:

- *Odeljak 2.4.1 (Vilmorova energija).* Osim posmatranja stacionarnosti Vilmorove energije pri infinitezimalnim savijanjima (Teorema 2.4.1), u ovom odeljku dat je novi dokaz poznatog stava da je varijacija totalne srednje krivine glatke orijentisane površi bez kraja jednaka nuli pri infinitezimalnom savijanju površi ([3, 5]), primenom tenzorskog računa (Teorema 2.4.3). Takođe, u istom odeljku, opisane su površi konstantne srednje krivine

(CMC površi) i diskutovana promena Vilmorove energije pri infinitezimalnom savijanju takvih površi.

Osnovne činjenice CMC površi, kao i njihova vizualizacija publikovani su u [16].

- *Odeljak 2.4.2 (Zapremina generalisanih konusa).* Pokazano je da je varijacija zapremine tela ograničenog površi S i konusom pridruženim koordinatnom početku do granice površi pri infinitezimalnom savijanju površi S jednaka fluksu polja translacija kroz spoljašnju stranu površi S (Teorema 2.4.8).

- *Odeljak 2.4.3 (Totalna srednja krivina deo po deo glatke površi).* Dato je uopštenje Aleksandrovog razmatranja u radu [3] koje važi u slučaju glatkih površi na deo po deo glatke površi i predstavljen obrazac za računanje varijacije totalne srednje krivine deo po deo glatkih površi (jednačina 2.4.36).

  Rezultat poslednjeg odeljka publikovan je u [102].

Rezultati poglavlja 2.2, 2.3 i odeljka 2.4.1 publikovani su u [101], sa primenama u teoriji ljuski. Razmatranje promene Vilmorove energije ćelijskih membrana pri infinitezimalnom savijanju publikovano je u [99].

U trećoj glavi analiziraju se infinitezimalne deformacije krivih na površima. U prvom poglavlju, pored definicije infinitezimalnih deformacija i infinitezimalnih savijanja krivih, daje se niz teorema prema [94]. Po ugledu na rad [96] autora Lj. S. Velimirović, u kome se razmatra infinitezimalno savijanje ravne krive koje tu krivu uključuje u familiju ravnih krivih, tj. koje datu krivu ostavlja u prvobitnoj ravni posle deformacije, predmet ove glave su takve deformacije krivih na površi koje tu krivu uključuju u familiju krivih na istoj površi.

Poglavlje 3.2 razmatra infinitezimalne deformacije krivih na sferi. Pokazuje se da ne postoji netrivijalna infinitezimalna deformacija sferne krive koja pripada datoj sferi (Teoreme 3.2.1-3.2.3).

Rezultat ovog poglavlja publikovan je u [100].

Poglavlje 3.3 proučava infinitezimalno savijanje krive na pravolinijskim površima i daje odgovarajuće polje savijanja (jednačina 3.3.3). Specijalno, u odeljku 3.3.1 razmatra se infinitezimalno savijanje krive na cilindru kao primeru pravolinijske površi. U odeljku 3.3.2 posmatra se infinitezimalno savijanje krive na hiperboličkom paraboloidu, kao primeru dva put pravolinijske površi. Takođe, ispituje se promena krivine krive pri infinitezimalnom savijanju koje datu krivu na hiperboličkom paraboloidu uključuje u familiju krivih na istom hiperboličkom paraboloidu (Teorema 3.3.4). Neki primeri su vizualizovani primenom programskog paketa *Mathematica*.

Četvrta glava proučava infinitezimalne deformacije generalisanih Rimanovih prostora.

Poglavlje 4.1 daje pregled osnovnih činjenica teorije generalisanih Rimanovih prostora. U 4.2 definisana su geodezijska preslikavanja i iznete teoreme koje se u radu koriste. U 4.3 definišu se infinitezimalne deformacije generalisanih Rimanovih prostora i ispituje varijacija nekih geometrijskih objekata, kao i veza između kovarijantnog diferenciranja u datom i deformisanom prostoru (Leme 4.3.1-4.3.3).

Poglavlje 4.4 definiše infinitezimalne geodezijske deformacije generalisanog Rimanovog prostora, koje su predmet proučavanja ove glave (Definicija 4.4.1).

U odeljku 4.4.1 daju se potrebni i dovoljni uslovi da preslikavanje dva generalisana Rimanova prostora bude geodezijsko (Teoreme 4.4.1, 4.4.2, 4.4.4, 4.4.5).

U 4.4.2 navode se potrebni i dovoljni uslovi da postoji geodezijska deformacija generalisanog Rimanovog prostora (Teoreme 4.4.7-4.4.10), što predstavlja uopštenje analognog razmatranja M. L. Gavrilčenka u slučaju Rimanovih prostora [37]. Takođe, poznato je da postoji netrivijalna geodezijska deformacija Rimanovog prostora ako i samo ako postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje Rimanovog prostora [57]. Ovde je dato uopštenje ove teoreme i pokazano da postoji netrivijalna geodezijska deformacija generalisanog Rimanovog prostora ako i samo ako postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje generalisanog Rimanovog prostora na njemu kompatibilan prostor (Teorema 4.4.11).

U odeljku 4.4.3 definišu se ekvidistantni generalisani Rimanovi prostori (Definicija 4.4.3) i pokazuje da postoji netrivijalna infinitezimalna geodezijska deformacija takvih prostora (Teorema 4.4.15) konstrukcijom jednog primera geodezijskog preslikavanja proizvoljnog ekvidistantnog generalisanog Rimanovog prostora.

Rezultat poslednjeg odeljka publikovan je u [17].

Peta glava je posvećena nekim metričkim problemima, tzv. lokacijskim problemima. U poglavlju 5.1 predstavljen je koncept lokacijskih problema i uloga metrike u njima. Poglavlje 5.2 razmatra diskretni lokacijski problem na proizvoljnoj površi u euklidskom trodimenzionalnom prostoru uz adekvatnu vizualizaciju primenom programskog paketa *Mathematica*.

Koncept diskretnog lokacijskog problema na proizvoljnoj površi objavljen je u [83].

U poglavlju 5.3 predstavljena je uloga lift metrike u diskretnom lokacijskom problemu u ravni. 5.4 daje rešenje jednog poznatog optimizacionog problema koje se u nastavku koristi (Algoritam 1). U poglavlju 5.5 razmatra se kontinualni jednoobjektni minisum Veberov problem u ravni primenom lift metrike i daje efektivni algoritam za njegovo rešavanje (Algoritam 2).

Glava 1

Infinitezimalne deformacije površi

U ovoj glavi definisaćemo osnovne pojmove i izneti opšta tvrđenja teorije infinitezimalnih deformacija, specijalno infinitezimalnih savijanja, sledeći ispitivanja N. V. Jefimova [30] (Nikolai Vladimirovich Efimov, 1910-1982, ruski matematičar), I. Vekua [92] (Ilia Vekua, 1907-1977, gruzijski matematičar), S. Kon-Fosena [15] (Stephan Cohn-Vossen, 1902-1936, nemački matematičar), Lj. S. Velimirović [93, 94, 98] (Ljubica S. Velimirović, srpski matematičar). Specijalno, odredićemo polje infinitezimalnih savijanja sinusoidnog konoida. Osnovni pojmovi tenzorskog računa u radu, kao i korišćena notacija zasnovani su na knjigama L. P. Ajzenharta [28] (Luther Pfahler Eisenhart, 1876-1965, američki matematičar), S. M. Minčića i Lj. S. Velimirović [60, 61] (Svetislav M. Minčić, srpski matematičar).

1.1 Osnovni pojmovi tenzorskog računa

Uvedimo ukratko neophodnu notaciju tenzorskog računa koja se u radu koristi. Detaljnija objašnjenja u vezi sa osnovnim pojmovima i primenama tenzorskog računa mogu se naći u [28, 41, 60, 61]. Tenzorski račun je posebno pogodan u teoriji elastičnosti, u proučavanju ljuski i membrana. Klasična notacija diferencijalne geometrije koristi se u knjigama kao što su npr. [40, 88] itd.

Posmatrajmo površ $S \subset \mathcal{R}^3$

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D \subset \mathcal{R}^2. \tag{1.1.1}$$

Površ S je izražena preko krivolinijskih (unutrašnjih) koordinata u^i, a veza sa Dekartovim koordinatama (René Descartes, 1596-1650, francuski matematičar i filozof) može se predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(u^1, u^2)\\ &= x^i(u^1, u^2)\mathbf{i_1} + x^2(u^1, u^2)\mathbf{i_2} + x^3(u^1, u^2)\mathbf{i_3}\\ &= x^\alpha \mathbf{i}_\alpha,\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

primenom *Ajnštajnove konvencije o sumiranju* (Albert Einstein, 1879-1955, nemački fizičar i matematičar), pri čemu su $\mathbf{i}_\alpha$ jedinični vektori u pravcu Dekartovih osa. Indeks α po kome se vrši sabiranje je *nemi indeks.*

Uvedimo sledeće *kovarijantne bazne vektore*

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{,1}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{,2} \tag{1.1.3}$$

gde indeksi $,1$ i $,2$ označavaju parcijalno diferenciranje u odnosu na u^1 i u^2, respektivno. Vektori $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ leže u tangentnoj ravni površi u pravcu koordinatnih linija redom $u = u^1$ i $u = u^2$. Jedinični vektor $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|} \tag{1.1.4}$$

je *normala površi.*

Uvedimo i *kontravarijantne bazne vektore*, $\mathbf{r}^j$, skalarnim proizvodom

$$\mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_i = \delta_i^j, \quad \mathbf{r}^j \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{1.1.5}$$

gde je $\delta_i^j = \{\begin{smallmatrix} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{smallmatrix}$ Kronekerov $\delta-$ simbol (Leopold Kronecker, 1823-1891, nemački matematičar). Tako, $\mathbf{r}^1$ i $\mathbf{r}^2$ leže u tangentnoj ravni površi normalno na $\mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}_1$, respektivno. (U nastavku ćemo latinskim indeksima, i, j, k, označavati vrednosti $1, 2$, ukoliko nije drugačije rečeno.)

Pomeranje $d\mathbf{r}$ između dve dovoljno bliske tačke (u^1, u^2) i $(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$ na površi, dato je sa

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 du^1 + \mathbf{r}_2 du^2 = \mathbf{r}_i du^i. \tag{1.1.6}$$

Kovarijantni i kontravarijantni metrički tenzor površi definišemo skalarnim proizvodima respektivno

$$g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \text{ i } g^{ij} = g^{ji} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j. \tag{1.1.7}$$

Očigledno je $g_{ip} g^{pj} = \delta_i^j$. Pomoću metričkog tenzora vršimo operacije spuštanja i dizanja indekasa. Na primer,

$$v^i = g^{ip} v_p, \quad v_i = g_{ip} v^p,$$

gde su v^i i v_i redom kontravarijantne i kovarijantne koordinate veličine v.

Napomenimo da je neka veličina *tenzor* ako zadovoljava pravilo za promenu njenih komponenata prilikom promene koordinatnog sistema. Tako, na primer, neka su u^i i $u^{i'}$ dva koordinatna sistema. Tada za komponente kovarijantnog tenzora prvog reda (vektora površi) važi

$$v_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} v_i. \tag{1.1.8}$$

Slično, za kontravarijantni, kovarijantni i mešoviti tenzor drugog reda važi redom

$$q^{i'j'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} q^{ij}, \quad q_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} q_{ij}, \quad q^i_{j'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} q^i_j. \tag{1.1.9}$$

Kvadrat linijskog elementa ds određen je na sledeći način

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2, \tag{1.1.10}$$

što predstavlja *prvu osnovnu kvadratnu formu površi.* Ako je

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \tag{1.1.11}$$

determinanta prve kvadratne forme, važiće

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}. \tag{1.1.12}$$

Koeficijente druge kvadratne forme uvodimo na sledeći način

$$b_{ij} = b_{ji} = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}_{i,j} = -\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\nu}_j, \tag{1.1.13}$$

$\boldsymbol{\nu}_j = \boldsymbol{\nu}_{,j}$, dok je druga kvadratna forma data skalarnim proizvodom

$$d^2\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu} = b_{ij}du^idu^j. \tag{1.1.14}$$

Normalna krivina u pravcu $d\mathbf{r}$ predstavljena je preko prve i druge kvadratne forme izrazom

$$\bar{K} = \frac{d^2\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu}}{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}. \tag{1.1.15}$$

Posmatrajmo jednačinu

$$k^2 - k(b^1_1 + b^2_2) + b^1_1b^2_2 - b^2_1b^1_2 = 0, \tag{1.1.16}$$

gde je $b^i_j = g^{ip}b_{pj}$. Za svaku od dve vrednosti za k dobijenih iz prethodne jednačine, postoji na površi odgovarajući pravac. Ta dva pravca su ortogonalna, a odgovarajuće vrednosti za k jednake su minimalnoj i maksimalnoj vrednosti normalne krivine u datoj tački na površi i predstavljaju *glavne krivine.* Odgovarajući pravci nazivaju se *glavni pravci.* Ako su rešenja jednačine (1.1.16) jednaka u datoj tački, onda su svi pravci glavni u toj tački.

Srednja krivina H je aritmetička sredina glavnih krivina, tj.

$$\begin{aligned} H &= \frac{k_{(1)} + k_{(2)}}{2} = \frac{b^1_1 + b^2_2}{2} = \frac{b^i_i}{2} \\ &= \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)}. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

Gausova krivina K (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, nemački matematičar) predstavlja proizvod glavnih krivina,

$$\begin{aligned} K &= k_{(1)}k_{(2)} = b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2 = \frac{1}{2}(b^i_i b^j_j - b^j_i b^i_j) \\ &= \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Jednačinama

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \tag{1.1.19}$$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{ip}\Gamma_{p.jk} = \frac{1}{2}g^{ip}(g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}) \tag{1.1.20}$$

zadati su, redom, *Kristofelovi simboli prve i druge vrste* površi (Elwin Bruno Cristoffel, 1829-1900, nemački matematičar). Oni su simetrični po poslednja dva indeksa (prve vrste), odnosno po donjim indeksima (druge vrste). Za Kristofelove simbole druge vrste važi

$$\Gamma^i_{pi} = \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial u^p}. \tag{1.1.21}$$

Neka je $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{i,j}$. *Derivacione formule prve vrste* predstavljaju jednačine

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^p_{ij}\mathbf{r}_p + b_{ij}\boldsymbol{\nu}, \tag{1.1.22}$$

dok su jednačine

$$\boldsymbol{\nu}_i = -b^p_i\mathbf{r}_p \tag{1.1.23}$$

derivacione formule druge vrste. Derivacionim formulama se izvodni vektori $\mathbf{r}_{jk}$ (tj. $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12}$ i $\mathbf{r}_{22}$) i $\boldsymbol{\nu}_i$ izražavaju preko vektora pokretnog (pridruženog, prirodnog) triedra $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ i $\boldsymbol{\nu}$.

Neka je na površi S dat vektor $\mathbf{v} = v^i\mathbf{r}_i = v_i\mathbf{r}^i$. Parcijalni izvod vektora $\mathbf{v}$ dat je sa

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^j} &= \mathbf{v}_{,j} = v^i_{,j}\mathbf{r}_i + v^i\mathbf{r}_{ij} \\ &= v_{i,j}\mathbf{r}^i + v_i\mathbf{r}^i_{,j}. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Primenom derivacione formule prve vrste dobijamo

$$\mathbf{v}_{,j} = v^i_{;j}\mathbf{r}_i + v^i b_{ij}\boldsymbol{\nu}, \tag{1.1.25}$$

gde se *kovarijantni izvod* ; definiše na sledeći način:

$$v^i_{;j} = v^i_{,j} + \Gamma^i_{pj}v^p, \tag{1.1.26}$$

Kovarijantni izvod možemo zameniti prostim parcijalnim izvodom jednačinom

$$v^i{}_{;i} = \frac{1}{g^{1/2}}(g^{1/2}v^i)_{,i}. \tag{1.1.27}$$

Jednačina (1.1.24) se može zapisati u vidu

$$\mathbf{v}_{,j} = v_{i;j}\mathbf{r}^i + v_i b^i_j \boldsymbol{\nu}, \tag{1.1.28}$$

gde je kovarijantni izvod

$$v_{i;j} = v_{i,j} - \Gamma^p_{ij} v_p. \tag{1.1.29}$$

Slično, kovarijantni izvod tenzora drugog reda dat je na sledeći način:

$$q^{ij}_{;k} = q^{ij}_{,k} + \Gamma^i_{kp} q^{pj} + \Gamma^j_{kp} q^{ip}, \tag{1.1.30}$$

$$q^i_{j;k} = q^i_{j,k} + \Gamma^i_{kp} q^p_j - \Gamma^p_{jk} q^i_p, \tag{1.1.31}$$

$$q_{ij;k} = q_{ij,k} - \Gamma^p_{ik} q_{pj} - \Gamma^p_{jk} q_{ip}. \tag{1.1.32}$$

Kovarijantni izvod skalara jednak je njegovom parcijalnom izvodu. Kovarijantni izvod metričkog tenzora jednak je nuli.

Kovarijantni izvod ima izvesne osobine, koje se poklapaju sa osobinama običnih izvoda. Na primer,

- kovarijantni izvod zbira (razlike) jednak je zbiru (razlici) kovarijantnih izvoda,
- za običan (spoljašnji) proizvod, kao i kompoziciju (unutrašnji proizvod), važi Lajbnicovo pravilo (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716, nemački filozof i matematičar).

Jednačine

$$b_{ip;j} = b_{ij;p}, \tag{1.1.33}$$

($j = 1$, $p = 2$ i $i = 1$ ili 2) nazivaju se *Kodacijeve jednačine* (Delfino Codazzi, 1824-1873, italijanski matematičar). Jednačina

$$\frac{1}{2}(b^j_j b^p_p - b^p_j b^j_p) = \frac{1}{2}[g^{ij}(\Gamma^p_{ij})_{,p} - g^{ip}(\Gamma^j_{ij})_{,p} + g^{ij}\Gamma^q_{ij}\Gamma^p_{qp} - g^{ip}\Gamma^q_{ij}\Gamma^j_{qp}] \tag{1.1.34}$$

predstavlja *Gausovu teoremu.* Kako je leva strana jednakosti (1.1.34) jednaka Gausovoj krivini K, Gausova teorema kaže da se Gausova krivina može izraziti preko metričkog tenzora, tj. da pripada unutrašnjoj geometriji površi. Nephodni uslovi za egzistenciju površi sa zadatom prvom i drugom kvadratnom formom jesu zadovoljenje Gausove i Kodacijevih jednačina.

Integralna teorema glasi

$$\iint_S v^i{}_{;i}\, dA = \int_C c_{ij} v^i \frac{du^j}{ds}\, ds, \tag{1.1.35}$$

gde je dA površinski element površi S čija je parametrizacija određena u kompaktnoj oblasti D, ds je linijski element ruba C površi. Integral po rubu C uzima se u pravcu kretanja kazaljke na časovniku duž normale površi $\boldsymbol{\nu}$. $\mathbf{v} = v_i \mathbf{r}^i = v^i \mathbf{r}_i$ je vektor površi S; c_{ij} je antisimetrični kovarijantni tenzor definisan na sledeći način

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}. \tag{1.1.36}$$

Napomenimo da ova teorema predstavlja zapravo Grinovu formulu (George Green, 1793-1841, britanski matematički fizičar) zapisanu pomoću tenzorske notacije (v. [28], str. 192).

1.2 Infinitezimalne deformacije površi

Posmatrajmo površ $S \subset \mathcal{R}^3$ klase C^α, $\alpha \geq 3$, datu vektorskom jednačinom

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D \subset \mathcal{R}^2. \tag{1.2.1}$$

Definicija 1.2.1. *Neprekidna jednoparametarska familija površi S_ϵ,*

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon) = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2), \quad \epsilon \in (-1, 1),$$

$$\tilde{\mathbf{r}} : D \times (-1, 1) \to \mathcal{R}^3,$$

naziva se **deformacija** *površi S, ako se površ S dobija za $\epsilon = 0$.*

Ovde ćemo izučavati infinitezimalne deformacije površi. Definisaćemo ih prema [30, 94].

Definicija 1.2.2. *Neka je S_ϵ deformacija površi S date jednačinom (1.2.1). Ako je*

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \epsilon \overset{(1)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) + \epsilon^2 \overset{(2)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) + \ldots + \epsilon^m \overset{(m)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2), m \geq 1, \tag{1.2.2}$$

gde su $\overset{(j)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) \in C^\alpha (\alpha \geq 3)$, $j = 1, \ldots, m$ data dovoljno glatka polja, familija S_ϵ je **infinitezimalna deformacija reda m površi S**. *Polje $\overset{(i)}{\mathbf{z}}$ naziva se* **polje infinitezimalne deformacije reda i**, *$i = 1, ..., m$.*

Teorija u kojoj se objekti vezani sa familijom S_ϵ izučavaju sa tačnošću do beskonačno malih veličina reda m u odnosu na $\epsilon (\epsilon \to 0)$, naziva se **teorija infinitezimalnih (beskonačno**

malih) deformacija površi S **reda** m. Zadajući različite specijalne uslove, dobijamo različite vrste infinitezimalnih deformacija.

Posmatrajmo infinitezimalnu deformaciju prvog reda površi S, (1.2.1).

Polje infinitezimalnih deformacija definisano je u tačkama površi S, pa se može predstaviti u obliku

$$\mathbf{z} = z^j \mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}, \tag{1.2.3}$$

pri čemu je $z^j\mathbf{r}_j$ tangentna, a $z\boldsymbol{\nu}$ normalna komponenta, z^j i z su funkcije od u^1, u^2. Dakle, jednačina infinitezimalne deformacije prvog reda biće

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \epsilon\mathbf{z} = \mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon(z^j\mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}). \tag{1.2.4}$$

Takođe, možemo izvodni vektor polja $\mathbf{z}$ predstaviti preko vektora pokretnog triedra. Naime, ako jednačinu (1.2.3) diferenciramo po u^i i označimo $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial i} = \mathbf{z}_i$, $\frac{\partial z^j}{\partial u^i} = z^j{}_{,i}$, $\frac{\partial z}{\partial u^i} = z_{,i}$, imaćemo

$$\mathbf{z}_i = z^j{}_{,i}\mathbf{r}_j + z^j\mathbf{r}_{j,i} + z_{,i}\boldsymbol{\nu} + z\boldsymbol{\nu}_i = z^j{}_{,i}\mathbf{r}_j + z^j(\Gamma^p_{ij}\mathbf{r}_p + b_{ij}\boldsymbol{\nu}) + z_{,i}\boldsymbol{\nu} + z(-b^p_i\mathbf{r}_p),$$

posle primene derivacionih formula prve i druge vrste. Vršeći potrebne izmene nemih indekasa dobijamo

$$\mathbf{z}_i = (z^p{}_{,i} + z^j\Gamma^p_{ij} - zb^p_i)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}$$

što se, koristeći pojam kovarijantnog izvoda ;, može napisati u obliku

$$\mathbf{z}_i = (z^p{}_{;i} - zb^p_i)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}. \tag{1.2.5}$$

1.3 Infinitezimalna savijanja površi

Specijalan slučaj infinitezimalnih deformacija jeste infinitezimalno savijanje. Mnogi poznati matematičari, na primer, A. Koši (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, francuski matematičar), D. Hilbert (David Hilbert, 1862-1943, nemački matematičar), V. Blaške (Wilhelm Johann Eugen Blaschke, 1885-1962, austrougarski matematičar) i dr. bavili su se problemom infinitezimalnih savijanja. Jedan od prvih radova iz ove oblasti potiče iz 1813. godine i pripada Košiju [13]. On je pokazao da su zatvoreni konveksni poliedri kruti. Kasije su se ovim problemom bavili A. D. Aleksandrov [1] (Aleksandr Danilovich Aleksandrov, 1912-1999, ruski matematičar, fizičar i filozof), I. Vekua [92], N. V. Jefimov [30], A. V. Pogorelov [66] (Aleksei Vasil'evich Pogorelov, 1919-2002, sovjetski i ukrajinski matematičar), S. Kon-Fosen [15], V. T. Fomenko [33] (Valentin Trofimovich Fomenko, ruski matematičar), I. H. Sabitov i I. I. Karatopraklijeva [47] (Sabitov Idzhad Khakovich, ruski matematičar, Ivanka Ivanova-Karatopraklieva, bugarski matematičar), Lj. S. Velimirović [93]-[103], V. Aleksandrov [2]-[4] (Victor Alexandrov, ruski matematičar) i dr.

Osnovne činjenice teorije infinitezimalnih savijanja površi uvešćemo prema [30, 92, 93, 94].

Definicija 1.3.1. *[30]* **Infinitezimalno savijanje reda m** *regularne površi S, (1.2.1), klase* $C^{\alpha}, (\alpha \geq 3)$*, je infinitezimalna deformacija reda m (1.2.2) ako je*

$$d\tilde{s}^2 - ds^2 = o(\epsilon^m), \tag{1.3.1}$$

tj. ako je razlika kvadrata linijskih elemenata beskonačno mala (infinitezimalna) veličina reda višeg od m u odnosu na ϵ*. Vektorsko polje* $\overset{(i)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2)$ *u (1.2.2) je* **polje brzina** *ili* **polje infinitezimalnog savijanja** *reda i,* $i = 1, ..., m$*.*

Ova definicija može se iskazati i na sledeći način

Teorema 1.3.1. *[94] Pri infinitezimalnom savijanju reda m dužina svake glatke linije ostaje nepromenjena s uzetom tačnošću, tj. promena dužine glatke linije na S je beskonačno mala veličina reda višeg od m u odnosu na* $\epsilon(\epsilon \to 0)$*.* ∎

U ovom radu bavićemo se infinitezimalnim deformacijama prvog reda i, specijalno, infinitezimalnim savijanjima prvog reda. Iz tog razloga u nastavku ćemo izostaviti navođenje reda deformacije, osim kada je to neophodno. Osnovna razmatranja infinitezimalnih savijanja drugog i višeg reda data su u [15, 30, 46, 73].

Posmatrajmo infinitezimalno savijanje površi S

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon) = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \epsilon \mathbf{z}(u^1, u^2). \tag{1.3.2}$$

Definicija infinitezimalnog savijanja ekvivalentna je sledećoj teoremi

Teorema 1.3.2. *[30] Potreban i dovoljan uslov da površi* S_ϵ *(1.3.2) predstavljaju infinitezimalno savijanje površi S (1.2.1) je*

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{z} = 0, \tag{1.3.3}$$

gde je $\mathbf{z}$ *polje brzina u početnom momentu deformacije.* ∎

Ova jednačina ekvivalentna je trima parcijalnim jednačinama

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = 0, \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = 0, \quad \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = 0. \tag{1.3.4}$$

Iz jednačine (1.3.2) vidimo da važi

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon)}{\partial \epsilon} = \mathbf{z}(u^1, u^2),$$

što izražava činjenicu da je $\mathbf{z}$ polje brzine pri kretanju tačke površi prilikom deformacije (uzevši da je ϵ vreme).

Teorema 1.3.3. *[92, 93] Neka je $s = s(\epsilon)$ dužina luka krive C_ϵ na površi S_ϵ. Potreban i dovoljan uslov za infinitezimalno savijanje površi $S = S_0$ je*

$$\frac{\partial s_\epsilon}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0, \tag{1.3.5}$$

tj. da je brzina promene dužine luka u početnom momentu deformacije jednaka nuli. ■

Definicija 1.3.2. *Polje savijanja je* **trivijalno***, tj. predstavlja polje kretanja površi kao krutog tela bez unutrašnjih deformacija, ako se može predstaviti u formi*

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}, \tag{1.3.6}$$

gde su $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$ *konstantni vektori. Odgovarajuće infinitezimalno savijanje naziva se* **trivijalno infinitezimalno savijanje** *ili* **infinitezimalno kretanje** *površi S.*

Definicija 1.3.3. *Površ je* **kruta** *ako ne dopušta netrivijalna polja savijanja, u suprotnom površ je* **nekruta** *ili* **fleksibilna**.

Važi sledeća teorema

Teorema 1.3.4. *[30] Neka je* $\mathbf{z}$ *polje infinitezimalnog savijanja površi $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$. Tada postoji jedinstveno vektorsko polje* $\mathbf{y}$ *tako da važi*

$$d\mathbf{z} = \mathbf{y} \times d\mathbf{r}, \tag{1.3.7}$$

odnosno

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{y} \times \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{y} \times \mathbf{r}_2. \quad \blacksquare \tag{1.3.8}$$

Definicija 1.3.4. *Vektorsko polje* $\mathbf{y}$ *za koje važi jednačina (1.3.7), tj. (1.3.8), zove se* **polje rotacija** *površi pri infinitezimalnom savijanju određenom poljem* $\mathbf{z}$.

Možemo dati geometrijsku interpretaciju polja rotacija: $\mathbf{y}(u_0, v_0)$ je vektor rotacije krutog tela pridruženog površi S u tački $\mathbf{r}(u_0, v_o)$ prilikom savijanja. Kao rezultat infinitezimalnog savijanja površi, svi njeni elementi trpe rotaciju sa vektorom rotacije $\mathbf{y}$.

Takođe je moguće posmatrati parametarsku površ Y određenu krajevima vektora rotacije $\mathbf{y}(u^1, u^2)$, ako se svi vektori $\mathbf{y}$ uzmu sa početkom u koordinatnom početku. U tom slučaju Y se naziva *nepostojana površ ("instability surface")* infinitezimalnog savijanja, odnosno, **indikatrisa rotacije** površi S.

Za polje rotacija važi sledeća teorema

Teorema 1.3.5. *[30] Za površ* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ *izvodni vektori* $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_{,1}$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_{,2}$ *dati su jednačinama*

$$\mathbf{y}_1 = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \gamma \mathbf{r}_1 - \alpha \mathbf{r}_2, \tag{1.3.9}$$

gde skalarne funkcije α, β, γ *zadovoljavaju sistem jednačina*

$$\begin{aligned} b_{11}\gamma - 2b_{12}\alpha - b_{22}\beta &= 0, \\ \alpha_{,2} - \gamma_{,1} &= \Gamma^1_{11}\gamma - 2\Gamma^1_{12}\alpha - \Gamma^1_{22}\beta, \\ \alpha_{,1} + \beta_{,2} &= \Gamma^2_{11}\gamma - 2\Gamma^2_{12}\alpha - \Gamma^2_{22}\beta, \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

gde su b_{ij}, $i, j = 1, 2$ *koeficijenti druge kvadratne forme,* Γ^i_{jk}, $i, j, k = 1, 2$ *Kristofelovi simboli površi* S. ■

Rešavanjem sistema jednačina (1.3.10) nalazimo α, β, γ, pomoću kojih integracijom dobijamo polje rotacija $\mathbf{y}$, a zatim još jednom integracijom dobijamo i polje savijanja $\mathbf{z}$. Jasno je da površ S dopušta samo trivijalna savijanja ako i samo ako $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jeste jedino rešenje sistema (1.3.10).

Definicija 1.3.5. *Polje* $\mathbf{s}(u^1, u^2)$ *određeno jednačinom*

$$\mathbf{s} = \mathbf{z} - \mathbf{y} \times \mathbf{r} \tag{1.3.11}$$

naziva sa **polje translacija** *pri infinitezimalnom savijanju određenom poljem* $\mathbf{z}$.

1.3.1 Kinematički sistem jednačina

Odredimo polje infinitezimalnog savijanja prvog reda površi S (1.2.1), prema ispitivanjima I. Vekua [92] i Lj. S. Velimirović [93].

Posmatrajmo osnovnu jednačinu polja savijanja (1.3.3). Budući da je $d\mathbf{z} = \mathbf{z}_i du^i$, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_j du^j$, primenom (1.2.5) dobijamo

$$\mathbf{r}_j du^j \cdot [(z^p{}_{;i} - b^p_i z)\mathbf{r}_p + (z^p b_{pi} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}]du^i = 0.$$

Takođe je $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_p = g_{jp}$ i $\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, pa prethodna jednačina postaje

$$(z^p{}_{;i} - b^p_i z) g_{jp}\, du^i du^j = 0. \tag{1.3.12}$$

Ova jednačina važi za svako du^i, du^j, pa dobijamo

$$z^p{}_{;i} g_{jp} - b_{ij} z = 0. \tag{1.3.13}$$

odakle dobijamo

$$z_{j;i} - b_{ij} z = 0, \tag{1.3.14}$$

gde su z_j kovarijantne koordinate tangentne komponente vektora $\mathbf{z}$. Promenom mesta indeksa j i i dobijamo

$$z_{i;j} - b_{ij}z = 0, \tag{1.3.15}$$

s obzirom na simetričnost koeficijenata druge kvadratne forme. Sabiranjem prethodne dve jednačine dobijamo

$$z_{i;j} + z_{j;i} - 2b_{ij}z = 0, \quad (i, j = 1, 2). \tag{1.3.16}$$

Dakle, važi

Teorema 1.3.6. *[92, 93] Potreban i dovoljan uslov da polje (1.2.3) bude polje infinitezimalnog savijanja površi S (1.2.1), jeste da za koordinate z_i, z važe jednačine (1.3.16).* ■

Sistem jednačina (1.3.16), koji očigledno predstavlja koordinatno zapisanu jednačinu (1.3.3), naziva se *kinematički sistem jednačina* ili sistem jednačina polja infinitezimalnog savijanja. To je sistem od tri jednačine za nepoznate funkcije z_1, z_2, z od argumenata u^1, u^2.

Međutim, z se lako eliminiše iz ovog sistema. Naime, pomnožimo jednačinu (1.3.13) sa g^{jk} i dobijamo $z^k{}_{;i} - b^k_i z = 0$, a zatim izvršimo kontrakciju po k, i

$$z^i{}_{;i} - b^i_i z = 0. \tag{1.3.17}$$

Pošto je srednja krivina površi data jednačinom (1.1.17), tj. $H = \frac{1}{2}b^i_i$, upoređivanjem sa (1.3.17) dobijamo

$$z = \frac{1}{2H} z^i{}_{;i}. \tag{1.3.18}$$

Kako je $z^i{}_{;i} = z^i{}_{,i} + \Gamma^i_{pi} z^p = z^p{}_{,p} + \Gamma^i_{pi} z^p$, uzevši u obzir (1.1.21), jednačina (1.3.18) postaje

$$z = \frac{1}{2H}\Big[\frac{\partial z^p}{\partial u^p} + \frac{\partial(\ln\sqrt{g})}{\partial u^p} z^p\Big]. \tag{1.3.19}$$

Zamenom (1.3.18) u (1.3.15), dobijamo $z_{i;j} - b_{ij}\frac{1}{2H}z^p{}_{;p} = 0$, ili

$$b_{ij}z^p{}_{;p} - 2Hz_{i;j} = 0, \tag{1.3.20}$$

što možemo zapisati u sledećoj formi

$$b_{ij}z^p{}_{;p} - 2Hg_{pi}z^p{}_{;j} = 0, \quad (i, j = 1, 2). \tag{1.3.21}$$

Odavde možemo naći z^1 i z^2, a iz (1.3.19), z. Na taj način možemo u potpunosti odrediti polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}$ površi.

Neka je polje rotacija $\mathbf{y}$ dato jednačinom

$$\mathbf{y} = y^i\mathbf{r}_i + y\boldsymbol{\nu}, \tag{1.3.22}$$

gde je $\mathbf{z}$ dato u (1.2.3). Korišćenjem $d\mathbf{z} = \mathbf{z}_j du^j$ i (1.2.5) u (1.3.7) dobijamo

$$\begin{aligned}(z^p{}_{;j} - b^p_j z)du^j\,\mathbf{r}_p + (z^p b_{pj} + z_{,j})du^j\,\boldsymbol{\nu} &= (y^i\mathbf{r}_i + y\boldsymbol{\nu}) \times \mathbf{r}_j du^j \\ &= y^i du^j(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) + y du^j(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j).\end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Možemo pisati

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = c_{ij}\boldsymbol{\nu}, \tag{1.3.24}$$

pri čemu je c_{ij} antisimetrični tenzor definisan u (1.1.36). Važiće

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}} \times \mathbf{r}_j = -\frac{1}{\sqrt{g}}\mathbf{r}_j \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}}[(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_2] = -\frac{1}{\sqrt{g}}(g_{j2}\mathbf{r}_1 - g_{j1}\mathbf{r}_2) \\ &= \sqrt{g}(g^{p2}\mathbf{r}_p - g^{p1}\mathbf{r}_p) = c_{12}g^{p2}\mathbf{r}_p + c_{21}g^{p1}\mathbf{r}_p,\end{aligned} \tag{1.3.25}$$

pri čemu smo iskoristili (1.1.12). Dakle

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j = c_{jq}g^{pq}\mathbf{r}_p. \tag{1.3.26}$$

Sada jednačina (1.3.23) postaje

$$(z^p{}_{;j} - b^p_j z)du^j\,\mathbf{r}_p + (z^p b_{pj} + z_{,j})du^j\,\boldsymbol{\nu} = y^i du^j c_{ij}\,\boldsymbol{\nu} + y du^j c_{jq} g^{pq}\,\mathbf{r}_p,$$

odakle se dobija

$$z^p{}_{;j} - b^p_j z = y c_{jq} g^{pq}, \tag{1.3.27}$$

$$z^p b_{pj} + z_{,j} = c_{ij} y^i. \tag{1.3.28}$$

Ove dve jednačine određuju u potpunosti y^1, y^2, y, tj. polje rotacija $\mathbf{y}$.

1.3.2 Gaudijeve površi pri infinitezimalnom savijanju

Osnovni zadatak teorije infinitezimalnih savijanja površi sastoji se u nalaženju netrivijalnih polja savijanja, snabdevenih uslovom (1.3.3). Ovde ćemo ispitati krutost Gaudijevih površi (Antoni Gaudi, 1852-1926, katalonski arhitekta), tj. pronaći odgovarajuće polje savijanja (bez korišćenja indekasa za koordinate, odnosno, zbog jednostavnosti pisaćemo $u = u^1$, $v = u^2$).

Gaudijeve površi predstavljaju specijalnu klasu pravolinijskih površi, tzv. sinusoidnih konoida, i imaju izuzetnu ulogu u arhitekturi i konstrukciji krovova.

Gaudijeva površ zadata je eksplicitno skalarnom jednačinom $z = kx\sin\frac{y}{c}$. Vektorska jednačina ove površi je:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, ku\sin\frac{v}{c}),\ (u = x, v = y) \tag{1.3.29}$$

tj.

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + ku\sin\frac{v}{c}\mathbf{k},$$

gde su **i**, **j**, **k** uzajamno normalni jedinični vektori u pravcu Dekartovih osa.

Kristofelovi simboli ove površi su

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{g}\frac{k^2}{c}\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\sin^2\frac{v}{c}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\cos^2\frac{v}{c},\ \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^3}u^2\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c},$$

gde je $g = 1 + k^2\sin^2\frac{v}{c} + \frac{k^2}{c^2}u^2\cos^2\frac{v}{c}$ determinanta koeficijenata prve kvadratne forme date površi. Koeficijenti druge kvardatne forme su:

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c}\cos\frac{v}{c},\ b_{22} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c^2}u\sin\frac{v}{c}.$$

Jednačine (1.3.10) postaju:

$$-2\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c}\cos\frac{v}{c}\alpha + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c^2}u\sin\frac{v}{c}\beta = 0, \tag{1.3.30}$$

$$\alpha_v - \gamma_u = -2\frac{1}{g}\frac{k^2}{c}\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c}\alpha + \frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\sin^2\frac{v}{c}\beta, \tag{1.3.31}$$

$$\alpha_u + \beta_v = -2\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\cos^2\frac{v}{c}\alpha + \frac{1}{g}\frac{k^2}{c^3}u^2\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c}\beta. \tag{1.3.32}$$

Iz (1.3.30) imamo

$$\alpha = \frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta,\ v \neq \frac{c\pi}{2} + ck\pi. \tag{1.3.33}$$

Stavimo li (1.3.33) u (1.3.32), dobićemo kvazi-linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu nepoznate funkcije β:

$$\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_u+\beta_v=-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta. \tag{1.3.34}$$

Sistem karakteristika ove jednačine je

$$\frac{du}{\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}}=\frac{dv}{1}=\frac{d\beta}{-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta}. \tag{1.3.35}$$

Iz jednačina

$$\frac{du}{\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}}=\frac{dv}{1},\quad \frac{dv}{1}=\frac{d\beta}{-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta} \tag{1.3.36}$$

dobijamo redom dva integrala

$$\psi_1\equiv u^2\cos\frac{v}{c}=c_1,\quad \psi_2\equiv\frac{\beta^2}{\cos\frac{v}{c}}=c_2, \tag{1.3.37}$$

c_1, c_2 su konstante. Kako za jakobijan važi

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(v,\beta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial v} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.3.38}$$

to su integrali ψ_1 i ψ_2 nezavisni, pa je opšte rešenje PDJ (1.3.34)

$$V\left(u^2\cos\frac{v}{c},\frac{\beta^2}{\cos\frac{v}{c}}\right)=0, \tag{1.3.39}$$

gde je V proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.

Nepoznatu funkciju $\gamma(u,v)$ dobijamo iz (1.3.31), (1.3.33), i predstavlja rešenje jednačine

$$\gamma_u=\frac{u}{2c^2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{c}}\beta+\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_v$$

tj.

$$\gamma=\int\left(\frac{u}{2c^2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{c}}\beta+\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_v\right)du+\varphi(v), \tag{1.3.40}$$

gde je $\varphi(v)$ proizvoljna funkcija, β je dato u (1.3.39).

Na primer, ako uzmemo $V(x,y)=xy-1$, i $\varphi(v)=0$, dobićemo

$$\beta=\frac{1}{u},\ u\neq 0,\ \alpha=\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c},\ \gamma=\frac{u}{2c^2\cos^2\frac{v}{c}}.$$

S obzirom na (1.3.9) i
$$d\mathbf{y} = \mathbf{y}_u du + \mathbf{y}_v dv = (dY_1, dY_2, dY_3),$$
integracijom dobijamo
$$\mathbf{y} = (Y_1, Y_2, Y_3) = \Big(\frac{u}{c}\tan\frac{v}{c}, \frac{1}{2}\ln(u^2|\cos\frac{v}{c}|), \frac{ku}{2c\cos\frac{v}{c}}(\sin^2\frac{v}{c}+1) + \frac{3ku}{2c}\cos\frac{v}{c}\Big),$$
uzevši da su odgovarajuće konstante koje se javljaju prilikom integracije jednake nuli.

Primenom (1.3.7), odredićemo polje infinitezimalnog savijanja. Kako važi (1.3.29), za Gaudijeve površi biće
$$d\mathbf{r} = (du, dv, k\sin\frac{v}{c}du + \frac{ku}{c}\cos\frac{v}{c}dv),$$
pa je
$$d\mathbf{z} = \mathbf{y}\times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{u}{c}\tan\frac{v}{c} & \frac{1}{2}\ln(u^2|\cos\frac{v}{c}|) & \frac{ku}{2c\cos\frac{v}{c}}(\sin^2\frac{v}{c}+1) + \frac{3ku}{2c}\cos\frac{v}{c} \\ du & dv & k\sin\frac{v}{c}du + \frac{ku}{c}\cos\frac{v}{c}dv \end{vmatrix}$$
Polje infinitezimalnog savijanja Gaudijevih površi dobija se integracijom ove jednačine. Tako, za $u > 0$ i $v \in (0, c\pi/2)$,imamo
$$\mathbf{z} = \Big(ku\sin\frac{v}{c}\ln(u^2\cos\frac{v}{c}) - \frac{ku}{4}\ln\frac{1+\sin\frac{v}{c}}{1-\sin\frac{v}{c}} - \frac{5ku}{2}\sin\frac{v}{c} + c_1,$$
$$\frac{2ku^2}{c}\cos\frac{v}{c} + c_2, u\big(1 - \frac{1}{2}\ln(u^2\cos^3\frac{v}{c})\big) + c_3\Big),$$
gde su c_1, c_2, c_3 konstante.

Glava 2

Varijacija geometrijskih veličina

U ovoj glavi razmatraćemo varijaciju nekih geometrijskih veličina pri infinitezimalnim deformacijama. Ispitaćemo promenu Vilmorove energije (Thomas James Willmore, 1919-2005, engleski matematičar) pri infinitezimalnim deformacijama i, specijalno, pri infinitezimalnim savijanjima. Opisaćemo datu promenu na primeru površi konstantne srednje krivine. Daćemo novi dokaz poznatog stava o invarijantnosti totalne srednje krivine glakih površi primenom tenzorskog računa. Razmotrićemo promenu zapremine generalisanog konusa pri infinitezimalnom savijanju. Na kraju, ispitaćemo varijaciju totalne srednje krivine deo po deo glatke površi.

2.1 Varijacija geometrijskih veličina

Prilikom infinitezimalnih deformacija geometrijske veličine površi se menjaju, a datu promenu meri *varijacija geometrijskih veličina.*

Definicija 2.1.1. *[92] Neka je $A = A(u^1, u^2)$ veličina koja karakteriše geometrijsko svojstvo na površi S i $\tilde{A} = A(u^1, u^2, \epsilon)$ odgovarajuća veličina na površi S_ϵ koja predstavlja infinitezimalnu deformaciju prvog reda površi S i neka je*

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \epsilon\, \delta A + \epsilon^2\, \delta^2 A + \dots \epsilon^n\, \delta^n A + \dots \tag{2.1.1}$$

Tada koeficijenti $\delta A, \delta^2 A, \dots, \delta^n A, \dots$ predstavljaju **prvu, drugu, ..., n-tu varijaciju** *geometrijske veličine A, respektivno, pri infinitezimalnoj deformaciji S_ϵ površi S.*

U ovom radu razmatraćemo prvu varijaciju pri infinitezimalnim deformacijama prvog reda. Iz tog razloga, možemo predstaviti veličinu $\tilde{A}$ na sledeći način

$$\tilde{A} = A + \epsilon\, \delta A,$$

zanemarujući članove koji stoje uz ϵ^n, $n \geq 2$.

Očigledno za prvu varijaciju važi sledeća formula

$$\delta A = \frac{d}{d\epsilon}\tilde{A}(u^1, u^2, \epsilon)\Big|_{\epsilon=0}, \tag{2.1.2}$$

odnosno

$$\delta A = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Delta A}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\tilde{A}(u^1, u^2, \epsilon) - A(u^1, u^2)}{\epsilon}. \tag{2.1.3}$$

Lako se pokazuje da važi (v. [94])

$$\mathbf{a)}\quad \delta(AB) = A\delta B + B\delta A, \qquad \mathbf{b)}\quad \delta\Big(\frac{\partial A}{\partial u^i}\Big) = \frac{\partial(\delta A)}{\partial u^i}. \tag{2.1.4}$$

2.2 Promena nekih veličina prilikom infinitezimalnih deformacija

Posmatrajmo površ S, (1.2.1), zadatu jednačinom

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D \subset \mathcal{R}^2 \tag{2.2.1}$$

i infinitezimalnu deformaciju date površi (1.2.4),

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \epsilon\mathbf{z} = \mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon(z^j\mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}). \tag{2.2.2}$$

Opišimo deformisane površi familije S_ϵ.

Kovarijantni bazni vektori deformisane površi biće, prema (1.2.5),

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i = (\mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r})_{,i} = (\mathbf{r} + \epsilon\mathbf{z})_{,i} = \mathbf{r}_i + \epsilon[(z^p{}_{;i} - zb_i^p)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}]. \tag{2.2.3}$$

Jedinična normala deformisane površi ostaje normalna na površ, tj. važi uslov

$$(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i) = 0$$

odnosno, primenom (2.2.3)

$$(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu}) \cdot \{\mathbf{r}_i + \epsilon[(z^p{}_{;i} - zb_i^p)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}]\} = 0,$$

tj.

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}_i + \epsilon\{\delta\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\nu}\cdot[(z^p{}_{;i} - zb_i^p)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}]\} + \epsilon^2\delta\boldsymbol{\nu}\cdot[(z^p{}_{;i} - zb_i^p)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}] = 0.$$

Kako je $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}_i = 0$ i zanemarivanjem člana koji stoji uz ϵ^2 dobijamo

$$\delta\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}_i + z^p b_{ip} + z_{,i} = 0. \tag{2.2.4}$$

Sa druge strane iz uslova

$$(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu}) = 1$$

dobijamo

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \delta\boldsymbol{\nu} = 0, \tag{2.2.5}$$

što upoređivanjem sa (2.2.4) daje

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu} - \epsilon(z^p b_{pq} + z_{,q})\mathbf{r}^q. \tag{2.2.6}$$

Kontravarijantni bazni vektori deformisane površi moraju ležati u ravni površi i zadovoljavati uslov (1.1.5), tj.

$$(\mathbf{r}^j + \epsilon\delta\mathbf{r}^j) \cdot (\mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i) = \delta_i^j \text{ i } (\mathbf{r}^j + \epsilon\delta\mathbf{r}^j) \cdot (\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{2.2.7}$$

Korišćenjem (2.2.3) i (2.2.6) u jednačinama (2.2.7) dobijamo

$$\mathbf{r}_i \cdot \delta\mathbf{r}^j = -(z^j_{;i} - zb_i^j), \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{r}^j = z^p b_p^j + z_{,p} g^{pj},$$

odnosno

$$\tilde{\mathbf{r}}^j = \mathbf{r}^j + \epsilon\delta\mathbf{r}^j = \mathbf{r}^j + \epsilon[-(z^j{}_{;p} - zb_p^j)\mathbf{r}^p + (z^p b_p^j + z_{,p} g^{pj})\boldsymbol{\nu}]. \tag{2.2.8}$$

Koeficijenti prve kvadratne forme (tj. metrički tenzor) mogu se dobiti prema (1.1.7) na sledeći način

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \epsilon\delta g_{ij} = (\mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_j + \epsilon\delta\mathbf{r}_j),$$

tj. posle korišćenja (2.2.3)

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \epsilon\delta g_{ij} = g_{ij} + \epsilon(z_{i;j} + z_{j;i} - 2zb_{ij}) \tag{2.2.9}$$

i slično

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} + \epsilon\delta g^{ij} = g^{ij} - \epsilon(z^j{}_{;p} g^{ip} + z^i{}_{;p} g^{jp} - 2zb^{ij}). \tag{2.2.10}$$

Za determinantu prve kvadratne forme površi $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, posle deformisanja površi važi

$$\tilde{g} = g + \epsilon\delta g = (g_{11} + \epsilon\delta g_{11})(g_{22} + \epsilon\delta g_{22}) - (g_{12} + \epsilon\delta g_{12})^2$$

tj.

$$\tilde{g} = g + \epsilon\delta g = g + 2g\epsilon(z^i{}_{;i} - zb_i^i), \tag{2.2.11}$$

korišćenjem (1.1.12).

Primenom jednakosti (1.1.28) koja važi za parcijalno diferenciranje vektora $\mathbf{v} = v^i\mathbf{r}_i = v_i\mathbf{r}^i$, direktno dobijamo

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_{,j} = (\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu})_{,j} = \boldsymbol{\nu}_{j} - \epsilon[(z^q b_{qp} + z_{,p})_{;j}\mathbf{r}^p + (z^q b_{qp} + z_{,p})b^p_j\boldsymbol{\nu}] \tag{2.2.12}$$

Korišćenjem jednačina (1.1.13), (2.2.3) i (2.2.12), koeficijenti druge kvadratne forme postaju

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} + \epsilon\delta b_{ij} = -(\mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\delta\boldsymbol{\nu})_{,j},$$

tj.

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} + \epsilon\delta b_{ij} = b_{ij} + \epsilon[(z^p b_{pi} + z_{,i})_{;j} + (z^p{}_{;i} - zb^p_i)b_{pj}] \tag{2.2.13}$$

Primenom Kodacijevih jednačina (1.1.33), možemo staviti jednačinu (2.2.13) u simetričnu formu

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} + \epsilon\delta b_{ij} = b_{ij} + \epsilon(z^p{}_{;j}b_{pi} + z^p{}_{;i}b_{pj} + z^p b_{ij;p} + z_{;ij} - zb^p_i b_{pj}). \tag{2.2.14}$$

Ova jednačina je simetrična po i i j jer je

$$z_{;ij} = z_{,i;j} = z_{,j;i} = z_{;ji},$$

što sledi iz činjenice da je kovarijantni izvod skalara jednak parcijalnom izvodu, kao i definicije kovarijantnog izvoda.

Jednačine (2.2.10) i (2.2.13) daju

$$\begin{aligned}
\tilde{b}^j_i &= b^j_i + \epsilon\delta b^j_i \\
&= (b_{ip} + \epsilon\delta b_{ip})(g^{pj} + \epsilon\delta g^{pj}) \\
&= b_{ip}g^{pj} + \epsilon(g^{pj}\delta b_{ip} + b_{ip}\delta g^{pj}) \\
&= b^j_i + \epsilon\{g^{pj}[(z^q b_{pq} + z_{,p})_{;i} + (z^q_{;p} - zb^q_p)b_{iq}] + b_{ip}(-z^j_{;q}g^{pq} - z^p_{;q}g^{jq} + 2zb^{pj})\} \\
&= b^j_i + \epsilon(z^q_{;i}b^j_q + z^q b^j_{q;i} + g^{pj}z_{;ip} + g^{pj}z^q_{;p}b_{iq} - zb^q_p b_{iq}g^{pj} - z^j_{;q}b^q_i - b_{ip}g^{jq}z^p_{;q} + 2zb^{pj}b_{ip})
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

nakon primene Kodacijevih jednačina (1.1.33), zamene nemih indekasa, kao i jednakosti

$$b^{jp}b_{pi} = b^j_q g^{qp} b^r_i g_{rp} = b^j_q b^r_i \delta^q_r = b^j_q b^q_i.$$

Dakle,

$$\tilde{b}^j_i = b^j_i + \epsilon\delta b^j_i = b^j_i + \epsilon(z^p{}_{;i}b^j_p + z^p b^j_{p;i} + g^{pj}z_{;pi} - z^j{}_{;p}b^p_i + zb^j_p b^p_i). \tag{2.2.16}$$

Za srednju krivinu

$$H = \frac{1}{2}b^i_i \tag{2.2.17}$$

posle deformisanja važi $\tilde{H} = H + \epsilon\delta H = \frac{1}{2}(b^i_i + \epsilon\delta b^i_i)$, tj.

$$\tilde{H} = H + \epsilon\delta H = H + \frac{1}{2}\epsilon(z^p b^i_{i;p} + g^{pi} z_{;pi} + z b^i_p b^p_i), \tag{2.2.18}$$

pri čemu smo iskoristili (2.2.16) i

$$b^i_{p;i} = (b_{qp} g^{qi})_{;i} + b_{qp;i} g^{qi} + b_{qp} g^{qi}{}_{;i} = b_{qi;p} g^{qi} = b^i_{i;p},$$

što dobijamo primenom Kodacijevih jednačina (1.1.33) i činjenice da je kovarijantni izvod metričkog tenzora jednak nuli.

Gausova krivina

$$K = \frac{1}{2}(b^i_i b^j_j - b^i_j b^j_i) \tag{2.2.19}$$

deformisane površi biće

$$\tilde{K} = K + \epsilon\delta K = \frac{1}{2}[(b^i_i + \epsilon\delta b^i_i)(b^j_j + \epsilon\delta b^j_j) - (b^i_j + \epsilon\delta b^i_j)(b^j_i + \epsilon\delta b^j_i)]$$

tj. primenom (1.1.33), (2.2.16) i zamenom nemih indekasa

$$\tilde{K} = K + \epsilon\delta K = K + \epsilon[z^p(b^i_i b^j_{j;p} - b^i_j b^j_{i;p}) + z_{;ij}(g^{ij} b^p_p - b^{ij}) + z(b^j_j b^i_p b^p_i - b^j_p b^p_i b^i_j)]. \tag{2.2.20}$$

2.3 Vilmorova energija pri infinitezimalnim deformacijama

Neka je data površ S (1.2.1).

Definicija 2.3.1. Vilmorova energija površi *S je površinski integral*

$$W = \iint_S f(H, K)\, dA, \tag{2.3.1}$$

gde je $f(H,K) = H^2 - K$, H i K su srednja i Gausova krivina površi, respektivno, dA je površinski element.

Vilmorova energija, kao funkcija srednje i Gausove krivine, meri odstupanje površi od sfere. Ova energija zauzima značajno mesto u teoriji membrana, teoriji ljuski, geometrijskom modelovanju, gde ima izuzetnu primenu.

U teoriji ćelijskih membrana, Vilmorova energija predstavlja specijalan slučaj tzv. *energije elastičnog savijanja ("elastic bending energy").* Membrana se može zamisliti kao glatka površ u $\mathcal{R}^3$ jer se njena debljina može zanemariti. Jedan od prvih koji se bavio energijom elastičnog savijanja jeste V. Helfrih (Wolfgang Helfrich, nemački fizičar). On je godine 1973. (v. [45]) primetio da je lipidni dvosloj nalik nematičkom tečnom kristalu na sobnoj temperaturi i uveo energiju za jediničnu oblast dvosloja

$$E_{lb}=\frac{k_c}{2}(2H+c_0)+\bar{k}K,$$

gde su k_c i $\bar{k}$ moduli savijanja, H, K, c_0 redom glavna, Gausova i spontana krivina lipidnog dvosloja. Moduli savijanja k_c i $\bar{k}$ su određeni interakcijom i osobinama materijala od kojeg je membrana izgrađena. Spontana krivina c_0 opisuje efekte asimetrije membrane ili njene okoline i igra važnu ulogu u teoriji ljuski. Za $c_0=0$ i $k_c=-\bar{k}$ elastična energija savijanja svodi se na Vilmorovu energiju. Primena Vilmorove energije u biologiji i ćelijskim membranama razmatra se u [99]. Primena u teoriji ljuski razmatra se u [101].

Navedimo još neke radove koji se bave energijom elastičnog savijanja i, specijalno, Vilmorovom energijom membrana, kao i teorijom ljuski: [11, 12, 24, 54, 64, 90, 91, 109].

Infinitezimalne deformacije možemo posmatrati kao specijalne deformacije membrana. Ispitajmo šta se dešava sa Vilmorovom energijom površi (1.2.1) prilikom infinitezimalne deformacije (1.2.4).

Pretpostavimo da je parametrizacija površi (1.2.1), $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$, određena u kompaktnoj oblasti D. Neka su vrednosti za u^i i u^j duž granice površi $\mathbf{r}_\epsilon$ iste kao kod površi $\mathbf{r}$. Površinski element od $\mathbf{r}$ je $g^{1/2}du^1du^2$, pa je

$$W=\iint_D f(H,K)\,g^{1/2}du^1du^2, \tag{2.3.2}$$

i slično Vilmorova energija deformisane površi

$$\tilde{W}=W+\epsilon\delta W=\iint_D f(H+\epsilon\delta H,K+\epsilon\delta K)\,(g+\epsilon\delta g)^{1/2}du^1du^2, \tag{2.3.3}$$

gde je D oblast integracije.

Pronađimo δW. Naime,

$$\begin{aligned}\tilde{W}&=\iint_D[(H+\epsilon\delta H)^2-(K+\epsilon\delta K)](g+\epsilon\delta g)^{1/2}\,du^1du^2\\&=\iint_D[f(H,K)+\epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H+\frac{\partial f}{\partial K}\delta K)]g^{1/2}(1+\frac{\epsilon\delta g}{g})^{1/2}\\&=\iint_D[f(H,K)+\epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H+\frac{\partial f}{\partial K}\delta K)]g^{1/2}(1+\frac{\epsilon\delta g}{2g})\\&=\iint_D[f(H,K)+\epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H+\frac{\partial f}{\partial K}\delta K+f(H,K)\frac{\delta g}{2g})]g^{1/2}du^1du^2,\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

posle razvoja $(1+\frac{\epsilon\delta g}{g})^{1/2}$ u Maklorenov red (Colin Maclaurin, 1698-1746, škotski matematičar) do prvog stepena (ostale članove zanemarujemo). Dakle,

$$\delta W = \iint_D [\frac{\partial f}{\partial H}\delta H + \frac{\partial f}{\partial K}\delta K + f(H,K)\frac{\delta g}{2g}]g^{1/2}du^1du^2 \tag{2.3.5}$$

Primenom (2.2.11), (2.2.17), (2.2.18), (2.2.19) i (2.2.20) dobijamo

$$\begin{aligned}\delta W =& \iint_D [2H\delta H - \delta K + (H^2-K)\frac{\delta g}{2g}]g^{1/2}du^1du^2\\ =& \iint_D \{\frac{1}{2}b^i_i(z^ib^j_{j;i} + g^{ij}z_{;ij} + zb^i_jb^j_i) - z^p(b^i_ib^j_{j;p} - b^i_jb^j_{i;p}) - z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)\\ &- z(b^i_ib^j_pb^p_j - b^i_jb^j_pb^p_i) + [\frac{1}{4}b^i_ib^j_j - \frac{1}{2}(b^i_ib^j_j - b^j_ib^i_j)](z^i_{;i} - zb^i_i)\}g^{1/2}du^1du^2\\ =& \iint_D \{\frac{1}{4}(b^j_jb^p_pz^i)_{;i} + \frac{1}{2}b^i_ig^{jp}z_{;jp} + \frac{1}{2}zb^i_i(b^j_pb^p_j - \frac{1}{2}b^j_jb^p_p) - \frac{1}{2}[z^i(b^j_jb^p_p - b^j_pb^p_j)]_{;i}\\ &- z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p) - \frac{z}{2}(3b^i_ib^j_pb^p_j - 2b^i_jb^j_pb^p_i - b^i_ib^j_jb^p_p)\}g^{1/2}du^1du^2\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

odnosno, posle primene

$$3b^i_ib^j_pb^p_j - 2b^i_jb^j_pb^p_i - b^i_ib^j_jb^p_p = 0$$

$$\begin{aligned}\delta W =& \iint_D \{\frac{1}{4}(b^j_jb^p_pz^i)_{;i} + \frac{1}{2}b^i_ig^{jp}z_{;jp} + \frac{1}{2}zb^i_i(b^j_pb^p_j - \frac{1}{2}b^j_jb^p_p)\\ &- \frac{1}{2}[z^i(b^j_jb^p_p - b^j_pb^p_j)]_{;i} - z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)\}g^{1/2}du^1du^2\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Važi

$$\begin{aligned}z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p) &= (z_{;i})_{;j}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)\\ &= [z_{;i}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)]_{;j} - z_{;i}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)_{;j}\\ &= [z_{;i}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)]_{;j}\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

pošto je $(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p)_{;j} = g^{ij}b^p_{p;j} - g^{ip}b^j_{p;j} = 0$, primenom Kodacijevih jednačina i činjenice da je kovarijantni izvod metričkog tenzora nula. Takođe,

$$\begin{aligned}b^i_ig^{jp}z_{;jp} &= (b^i_ig^{jp}z_{;j})_{;p} - (b^i_ig^{jp})_{;p}z_{;j}\\ &= (b^i_ig^{jp}z_{;j})_{;p} - b^i_{i;p}g^{jp}z_{;j}\\ &= (b^i_ig^{jp}z_{;j})_{;p} - (b^i_{i;p}g^{jp}z)_{;j} + b^i_{i;pj}g^{jp}z.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Zamenom (2.3.8) i (2.3.9) u (2.3.7), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta W = \iint_D \{ & \frac{1}{4}(b^j_j b^p_p z^i)_{;i} + \frac{1}{2}(b^j_j g^{ip} z_{;p})_{;i} - \frac{1}{2}(b^p_{p;q} g^{iq} z)_{;i} + \frac{1}{2} b^p_{p;ij} g^{ij} z \\
& + \frac{1}{2} z b^i_i (b^j_p b^p_j - \frac{1}{2} b^j_j b^p_p) - \frac{1}{2}[z^i (b^j_j b^p_p - b^j_p b^p_j)]_{;i} - [z_{;i}(g^{ij} b^p_p - g^{ip} b^j_p)]_{;j}\} \\
& g^{1/2} du^1 du^2.
\end{aligned} \tag{2.3.10}
$$

Primenom integralne teoreme u (2.3.10) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta W = & \iint_D \frac{z}{2}[b^p_{p;ij} g^{ij} + b^p_p (b^i_j b^j_i - \frac{1}{2} b^i_i b^j_j)] g^{1/2} du^1 du^2 \\
& + \int_C \frac{c_{ij}}{2} [\frac{1}{2} z^i b^p_p b^q_q + b^p_p g^{iq} z_{;q} - b^p_{p;q} g^{iq} z - z^i (b^p_p b^q_q - b^p_q b^q_p) \\
& - 2 z_{;q} (g^{ip} b^q_q - g^{iq} b^p_p)] (\frac{du^j}{ds})\, ds.
\end{aligned} \tag{2.3.11}
$$

Dakle, dokazali smo sledeću teoremu

Teorema 2.3.1. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi (1.2.1) pri infinitezimalnim deformacijama (1.2.4) data je u (2.3.11).* ■

Očigledno, imamo sledeću posledicu

Posledica 2.3.2. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi bez kraja (1.2.1) pri infinitezimalnim deformacijama (1.2.4) je*

$$\delta W \;\; = \iint_D \tfrac{z}{2}[b^p_{p;ij} g^{ij} + b^p_p (b^i_j b^j_i - \tfrac{1}{2} b^i_i b^j_j)] g^{1/2} du^1 du^2. \quad \blacksquare \tag{2.3.12}$$

Površinski integral (2.3.12) biće jednak nuli za svako z ako važi

$$b^p_{p;ij} g^{ij} + b^p_p (b^i_j b^j_i - \frac{1}{2} b^i_i b^j_j) = 0, \tag{2.3.13}$$

prema fundamentalnoj lemi varijacionog računa ([35]). Ovo je jednačina površi koje imaju stacionarnu vrednost Vilmorove energije pri infinitezimalnim deformacijama i predstavlja diferencijalnu jednačinu četvrtog reda. Možemo je zapisati preko srednje i Gausove krivine na sledeći način

$$H_{;ij} g^{ij} + 2H(H^2 - K) = 0. \tag{2.3.14}$$

Kovarijantno diferenciranje možemo zameniti prostim parcijalnim diferenciranjem korišćenjem jednačine (1.1.27). Jednačina (2.3.14) postaje

$$\frac{1}{g^{1/2}} (g^{1/2} g^{ij} H_{,i})_{,j} + 2H(H^2 - K) = 0. \tag{2.3.15}$$

Dakle,

Teorema 2.3.3. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi bez kraja čije glavna i Gausova krivina, H i K, zadovoljavaju jednačinu (2.3.15), jednaka je nuli pri infinitezimalnim deformacijama.* ∎

2.4 Varijacija geometrijskih veličina pri infinitezimalnim savijanjima

Upoređivanjem jednačina (2.2.9) i (2.2.11) sa (1.3.16) i (1.3.17), zaključujemo da je varijacija koeficijenata prve kvadratne forme površi, kao i varijacija determinante prve kvadratne forme jednaka nuli pri infinitezimalnom savijanju površi. Takođe, varijacija geometrijskih veličina koje zavise od koeficijenata prve kvadratne forme površi (tj. objekata unutrašnje geometrije površi) jednaka je nuli pri infinitezimalnom savijanju. Na primer, Kristofelovi simboli, prva kvadratna forma, determinanata prve i druge kvadratne forme, dužina luka krive, uglovi između krivih na površi, površina oblasti na površi, Gausova i geodezijska krivina ostaju stacionarni pri infinitezimalnom savijanju površi [92, 94].

Varijacijom geometrijskih veličina bavili su se, i dalje se bave mnogi matematičari. Pomenimo neke radove koji govore o tome: [2, 3, 4, 5, 92, 94, 95, 99, 101, 102].

2.4.1 Vilmorova energija

Ispitajmo promenu Vilmorove energije pri infinitezimalnom savijanju. Očigledno,

$$\delta W = \iint_D 2H\delta H g^{1/2} du^1 du^2, \tag{2.4.1}$$

prema (2.3.5), s obzirom na $\delta K = \delta g = 0$.

Nađimo varijaciju srednje krivine pri infinitezimalnom savijanju. Naime, $\delta H = \frac{1}{2}\delta b^i_i$, gde je δb^j_i dato u jednačini (2.2.16). Dakle, važiće

$$\begin{aligned}\delta H = \frac{1}{2}\delta b^i_i &= \frac{1}{2}(z^p_{;i} b^i_p + z^p b^i_{p;i} + g^{pi} z_{;pi} - z^i_{;p} b^p_i + z b^i_p b^p_i)\\ &= \frac{1}{2}[(z^p b^i_p)_{;i} + (z_{,p} g^{pi})_{;i} - z^i_{;p} b^p_i + z b^i_p b^p_i),\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

pošto je kovarijantni izvod metričkog tenzora nula. Takođe je

$$\begin{aligned}z^i_{;p} b^p_i - z b^i_p b^p_i &= z^i_{;p} g_{ki} b^{kp} - z b^i_p b^p_i = b_{kp} b^{kp} z - z b^{ik} g_{kp} b_{iq} g^{pq}\\ &= b_{kp} b^{kp} z - b^{ik} b_{iq} \delta^q_k z = b_{kp} b^{kp} z - b^{ik} b_{ik} z\\ &= 0,\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

jer je $z^i_{;p} g_{ki} = b_{kp} z$, prema (1.3.13). Dakle,

$$\delta H = \frac{1}{2}[(z^p b^i_p)_{;i} + (z_{,p} g^{ip})_{;i}]. \tag{2.4.4}$$

Korišćenjem (1.1.17) i (2.4.4) u (2.4.1), dobijamo

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_D b^q_q [(z^p b^i_p)_{;i} + (z_{,p} g^{ip})_{;i}] g^{1/2} du^1 du^2, \tag{2.4.5}$$

tj.

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_D [(z^p b^i_p b^q_q)_{;i} - z^p b^i_p b^q_{q;i} + (z_{,p} g^{ip} b^q_q)_{;i} - z_{,p} g^{ip} b^q_{q;i}] g^{1/2} du^1 du^2. \tag{2.4.6}$$

Primenom integralne teoreme imamo

$$\delta W = -\frac{1}{2} \iint_D (z^p b^i_p + z_{,p} g^{ip}) b^q_{q;i} g^{1/2} du^1 du^2 + \frac{1}{2} \int_C c_{ij} (z^p b^i_p + z_{,p} g^{ip}) b^q_q \frac{du^j}{ds} ds. \tag{2.4.7}$$

Množenjem (1.3.28) sa g^{ij} i promenom odgovarajućih nemih indekasa dobija se

$$z^p b^i_p + z_{,p} g^{ip} = c_{pq} y^p g^{iq}. \tag{2.4.8}$$

Zamenimo li (2.4.8) u (2.4.7) imaćemo

$$\delta W = -\frac{1}{2} \iint_D c_{pq} y^p g^{iq} b^r_{r;i} g^{1/2} du^i du^j + \frac{1}{2} \int_C c_{ij} c_{pq} y^p g^{iq} b^r_r \frac{du^j}{ds} ds. \tag{2.4.9}$$

Definišimo sada kontravarijantni tenzor c^{ij} na sledeći način

$$c^{ij} = g^{iq} g^{jp} c_{qp}. \tag{2.4.10}$$

Za njega važi

$$c^{11} = c^{22} = 0, \quad c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \tag{2.4.11}$$

što sledi direktno iz jednačina (2.4.10), (1.1.12) i (1.1.36). Dakle, važiće

$$g_{jp} = -g^{iq} c_{pq} c_{ij}. \tag{2.4.12}$$

Kako je još

$$\mathbf{y} \cdot d\mathbf{r} = (y^p \mathbf{r}_p + y\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{r}_j du^j = y^p g_{jp} du^j, \tag{2.4.13}$$

dobijamo

$$\delta W = -\iint_D c_{pq} y^p g^{iq} H_{,i}\, g^{1/2} du^i du^j - \int_C H(\mathbf{y} \cdot d\mathbf{r}). \tag{2.4.14}$$

Takođe je

$$c_{pq}y^p g^{iq}H_{,i} = \sqrt{g}(y^1g^{2i} - y^2g^{1i})H_{,i},$$

pa sledi

$$\delta W = \iint_D (y^2g^{1i} - y^1g^{2i})H_{,i}\, g\, du^i du^j - \int_C H(\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}). \tag{2.4.15}$$

Sa druge strane je, na osnovu (1.3.26),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}\times\mathbf{y} &= \boldsymbol{\nu}\times(y^j\mathbf{r}_j + y\boldsymbol{\nu}) = y^j(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{r}_j) \\ &= y^j c_{jq}g^{pq}\mathbf{r}_p = y^j c_{jq}\mathbf{r}^q, \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

i

$$c_{pq}y^p g^{iq}H_{,i} = c_{pq}y^p\mathbf{r}^q\cdot\mathbf{r}^iH_{,i} = (\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{r}^iH_{,i} = [\boldsymbol{\nu},\mathbf{y},\mathbf{r}^i]H_{,i},$$

gde $[\,,\,,\,]$ označava mešoviti proizvod vektora. Dakle,

$$\delta W = -\iint_D [\boldsymbol{\nu},\mathbf{y},\mathbf{r}^i]H_{,i}\, g^{1/2}du^i du^j - \int_C H(\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}). \tag{2.4.17}$$

Tako smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.4.1. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi pri infinitezimalnom savijanju data je jednom od tri ekvivalentne jednačine (2.4.14), (2.4.15), (2.4.17).* ∎

Sledeće jednačine su ekvivalentne

$$c_{pq}y^p g^{iq}H_{,i} = 0, \quad (y^1g^{2i} - y^2g^{1i})H_{,i} = 0, \quad [\boldsymbol{\nu},\mathbf{y},\mathbf{r}^i]H_{,i} = 0, \tag{2.4.18}$$

pa dobijamo

Posledica 2.4.2. *Vilmorova energija glatke orijentisane površi bez kraja stacionarna je pri infinitezimalnom savijanju koje zadovoljava jednu od tri ekvivalentne jednačine (2.4.18).* ∎

Totalna srednja krivina

Činjenica da je totalna srednja krivina glatke površi bez kraja stacionarna pri infinitezimalnom savijanju je poznata (v. [3, 5]). Međutim, ovde dajemo novi dokaz datog tvrđenja primenom tenzorskog računa.

Podsetimo se da je totalna srednja krivina orijentisane površi zapravo površinski integral funkcije srednje krivine u tački površi, tj.

$$H(S) = \iint_S H\, dA = \iint_D Hg^{1/2}du^1du^2. \tag{2.4.19}$$

Teorema 2.4.3. *Varijacija totalne srednje krivine glatke orijentisane površi pri infinitezimalnom savijanju jednaka je linijskom integralu rotacionog vektorskog polja* $\mathbf{y}$ *duž ruba* C *površi, tj.*

$$\delta H(S) = -\frac{1}{2}\int_C \mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.4.20}$$

Dokaz. Totalna srednja krivina deformisane površi biće

$$\tilde{H}(S) = H(S) + \epsilon\,\delta H(S) = \iint_S (H + \epsilon\,\delta H)(g + \epsilon\,\delta g)^{1/2} du^1 du^2.$$

Kako je $\delta g = 0$ prilikom infinitezimalnog savijanja, imamo

$$\tilde{H}(S) = H(S) + \epsilon\,\delta H(S) = \iint_S (H + \epsilon\,\delta H) g^{1/2} du^1 du^2 = H(S) + \epsilon \iint_S \delta H g^{1/2} du^1 du^2,$$

odnosno, varijacija totalne srednje krivine pri infinitezimalnom savijanju biće

$$\delta H(S) = \iint_D \delta H g^{1/2} du^1 du^2. \tag{2.4.21}$$

Primenom (2.4.4) i integralne teoreme dobijamo

$$\delta H(S) = \frac{1}{2}\int_C c_{ij}(z^p b^i_p + z_{,p} g^{ip})\frac{du^j}{ds} ds. \tag{2.4.22}$$

Zbog (2.4.8) i (2.4.12), jednačina (2.4.22) se svodi na

$$\delta H(S) = -\frac{1}{2}\int_C g_{jp} y^p \frac{du^j}{ds} ds. \tag{2.4.23}$$

Upoređivanjem prethodne jednačine sa (2.4.13), dobijamo (2.4.20). ■

Direktna posledica ove teoreme je sledeće tvrđenje:

Posledica 2.4.4. *Varijacija totalne srednje krivine glatke orijentisane površi bez kraja pri infinitezimalnom savijanju jednaka je nuli.* ■

Površi konstantne srednje krivine

Od posebnog interesa su površi sa konstantnom srednjom krivinom. Ukoliko je srednja krivina površi identički jednaka nuli, govori se o *minimalnim površima.* Ako je srednja krivina površi konstantna, ali različita od nule, reč je o tzv. *CMC površima* ("constant mean curvature surfaces").

Ekvivalentna definicija minimalnih površi je da su to površi najmanje površine za datu granicu. Osobina da su to površi sa minimalnom površinom čini ih pogodnim za primenu u arhitekturi. Film (opna) od sapunice predstavlja fizičku ilustraciju matematičkog problema minimalnih površi. Ravan je najjednostavnija minimalna površ koja je otkrivena u 18. veku. Navedimo još neke primere minimalnih površi: helikoid, katenoid, Eniperova površ (Alfred Enneper, 1830-1885, nemački matematičar), Šerkova površ (Heinrich Ferdinand Scherk, 1798-1885, nemački matematičar), Katalanova površ (Eugène Charles Catalan, 1814-1894, francuski i belgijski matematičar) i dr.

Trivijalni primer za kompaktne CMC površi je sfera. Ovaj primer bio je poznat već u 19. veku. Sledeći jednostavni primer jeste kružni cilindar. Godine 1841. Delone (Charles-Eugène Delaunay, 1816-1872, francuski matematičar i astronom) klasifikovao je sve revolucione CMC površi koje su nazvane "Delaunay surfaces" (v. [25]). Izvesno vreme nije bilo novih CMC površi. Otvoreno je pitanje da li ima drugih kompaktnih CMC površi osim sfere. Godine 1986. Vente [105] (Henry Christian Wente, američki matematičar) je pokazao da CMC torusi postoje. Štaviše, pokazano je da postoji beskonačno mnogo CMC torusa. Za svaki ceo broj $g \geq 2$, postoji kompaktna CMC površ reda g (v. [48, 49]). Takođe, pokazano je da je skup svih simetričnih torusa koje je pronašao Vente u "1-1" korespodenciji sa skupom prostih razlomaka $l/n \in (1, 2)$ [104]. Za svako l/n imamo odgovarajući "Wente torus" $W_{l/n}$.

Godine 1992. Bobenko (Alexander I. Bobenko, nemački matematičar) je uspeo da izvede formule koje opisuju sve CMC toruse. Ipak je sve to samo teorijski rezultat. U svom radu [44] Matijas Hejl (Matthias Heil, engleski matematičar) pokušao je da oformi alat pomoću koga će kompjuterski napraviti vizualzaciju ovih površi. U radu [16] data je vizualizacija nekih CMC površi i predstavljeni su interesantni oblici i komplikovana struktura ovih površi primenom programskog paketa *Mathematica*.

CMC površi se mogu posmatrati kao međupovršine, tj. granične površine u prirodi. Naime, oblik međupovršina određen je CMC površima koje zadovoljavaju neke posebne uslove.

Zbog izuzetne primene u arhitekturi i značaja minimalnih i CMC površi, a takođe i mesta Vilmorove energije u teoriji ljuski, izdvajamo sledeće teoreme koje predstavljaju direktne posledice Teoreme 2.4.1:

Posledica 2.4.5. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane minimalne površi pri infinitezimalnom savijanju jednaka je nuli.* ■

Posledica 2.4.6. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi konstantne srednje krivine pri infinitezimalnom savijanju je*

$$\delta W = -H \int_C \mathbf{y} \cdot d\mathbf{r}. \quad \blacksquare \tag{2.4.24}$$

Posledica 2.4.7. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi konstantne srednje krivine bez kraja pri infinitezimalnom savijanju jednaka je nuli.* ∎

Napomenimo da se površi konstantne srednje krivine mogu izometrijski deformisati sa očuvanjem srednje krivine. Ovu činjenicu dokazao je O. Bone (Pirre Ossian Bonnet, 1819-1892, francuski matematičar) u radu [10].

2.4.2 Zapremina generalisanih konusa

Važno pitanje u teoriji savijanja jeste šta se dešava sa zapreminom određenom fleksibilnom površi pri infinitezimalnom savijanju te površi. Interesantna je činjenica da se zapremina generalno ne očuvava, a primer poliedra koji prilikom savijanja menja svoju zapreminu dao je u radu [2] V. A. Aleksandrov. U istom radu dat je potvrdan odgovor na pitanje o stacionarnosti zapremine glatkih rotacionih površi. Ovaj rezultat je proširila Lj. S. Velimirović na deo po deo glatke rotacione površi u radu [95]. Postavlja se pitanje *šta se dešava sa zapreminom generalisanog konusa pri infinitezimalnom savijanju osnove konusa.*

Uvedimo skalarnu veličinu $J = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu}$ za površ S (1.2.1). Površinski integral od J jednak je trostrukoj zapremini ograničenoj površi S i konusom pridruženim koordinatnom početku do granice površi, tj.

$$V = \frac{1}{3} \iint_S J \, dA. \tag{2.4.25}$$

Teorema 2.4.8. *Varijacija zapremine tela ograničenog površi S i konusom pridruženim koordinatnom početku do granice površi pri infinitezimalnom savijanju površi S sa poljem translacija* $\mathbf{s}$*, jednaka je fluksu polja* $\mathbf{s}$ *kroz spoljašnju stranu površi S, tj.*

$$\delta V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dA, \tag{2.4.26}$$

gde je $\boldsymbol{\nu}$ jedinična spoljašnja normala na S, $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}$ skalarni proizvod.

Dokaz. Za skalarnu veličinu J posle deformacije važi

$$\tilde{J} = J + \epsilon \delta J = (\mathbf{r} + \epsilon \delta \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\nu} + \epsilon \delta \boldsymbol{\nu}).$$

Iskoristimo (1.2.4) i (2.2.6) i dobijamo

$$\tilde{J} = J + \epsilon \delta J = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} + \epsilon (z - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^p (z^q b_{pq} + z_{,p})).$$

Dakle,

$$\delta J = z - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^p (z^q b_{pq} + z_{,p}). \tag{2.4.27}$$

Iskoristimo (1.3.28) i dobijamo

$$\delta J = z - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^p c_{qp} y^q,$$

odnosno, prema (2.4.16)

$$\delta J = z - \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{y}) = z - [\boldsymbol{\nu}, \mathbf{y}, \mathbf{r}]. \tag{2.4.28}$$

Pomnožimo (1.2.3) skalarno sa $\boldsymbol{\nu}$, dobićemo

$$\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\nu} = z. \tag{2.4.29}$$

Uvrstimo (2.4.29) u (2.4.28) i iskoristimo pravilo cikličnog permutovanja vektora u mešovitom proizvodu $[\boldsymbol{\nu}, \mathbf{y}, \mathbf{r}] = [\mathbf{y}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\nu}]$. Dobićemo

$$\delta J = \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\nu} - (\mathbf{y} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} = (\mathbf{z} - \mathbf{y} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}, \tag{2.4.30}$$

gde je $\mathbf{s}$ polje translacija pri infinitezimalnom savijanju. Dakle,

$$\delta V = \frac{1}{3} \iint_D \delta J \sqrt{g}\, du^1 du^2 = \frac{1}{3} \iint_D \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} \sqrt{g}\, du^1 du^2,$$

tj. dobijamo (2.4.26). ■

2.4.3 Totalna srednja krivina deo po deo glatkih površi

Promena totalne srednje krivine razmatrana je od strane mnogih autora, s obzirom na značajan geometrijski smisao ove veličine. Integral srednje krivine hiperpovrši u multidimenzionom euklidskom i Lobačevskom prostoru razmatran je u [5, 75, 81]. Totalnu srednju krivinu nekrutih glatkih površi proučavao je V. A. Aleksandrov u radu [3]. Pokazao je da svaka fleksibilana orijentisana površ bez kraja u $\mathcal{R}^3$ čuva totalnu srednju krivinu pri savijanju. Do istog rezultata došli smo u ovom radu u odeljku 2.4.1 primenom tenzorskog računa.

Ovde ćemo dati generalizaciju Aleksandrovog razmatranja posmatrajući deo po deo glatke površi pri infinitezimalnom savijanju.

Pretpostavimo da je S deo po deo glatka površ i da predstavlja uniju glatkih delova $S^{(j)}$, $j = 1, ..., n$, tj.

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S^{(j)}. \tag{2.4.31}$$

Pretpostavimo još da je S pozitivne orijentacije i da je data sledećom parametrizacijom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2, \tag{2.4.32}$$

gde je $f(u,v)$ deo po deo glatka funkcija u oblasti D i da se sastoji iz glatkih delova $f^{(j)}(u,v)$, $(u,v)\in D^{(j)}\subset \mathcal{R}^2$, gde je $D^{(j)}\subset D$ kompaktna oblast koja predstavlja deo (u,v) ravni koji odgovara delu $S^{(j)}$ površi S. (Izostavićemo pisanje indekasa za koordinate.) Važiće:

$$D=\bigcup_{j=1}^{n} D^{(j)}. \tag{2.4.33}$$

Označimo sa $\partial S^{(j)}$ rub dela $S^{(j)}$. Takođe, neka je

$$c_{ij}=S^{(i)}\cap S^{(j)},\quad i,j=1,...,n,\quad i\neq j, \tag{2.4.34}$$

deo ruba $\partial S^{(i)}$ koji predstavlja presek delova $S^{(i)}$ i $S^{(j)}$, ili prazan skup ukoliko $S^{(i)}$ i $S^{(j)}$ nemaju zajedničkih tačaka. Očigledno, krive c_{ij} i c_{ji} imaju iste tragove i suprotne orijentacije. Sledeći uvedenu notaciju, važiće:

$$\partial S=\bigcup_{j=1}^{n}\partial S^{(j)}\setminus \bigcup_{i,j=1\, i\neq j}^{n} c_{ij}. \tag{2.4.35}$$

Teorema 2.4.9. *Za svaku deo po deo glatku orijentisanu površ S i polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}$, varijacija totalne srednje krivine površi S jednaka je sumi linijskih integrala polja rotacija $\mathbf{y}$, tj.*

$$\delta H(S)=-\frac{1}{2}\Big(\int_{\partial S}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\Big). \tag{2.4.36}$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{z}=\mathbf{z}(u,v)=(\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v))$ polje infinitezimalnog savijanja površi S. Polje $\mathbf{z}$ mora biti neprekidno na celoj površi, uključujući i rubove glatkih delova c_{ij}, tj.

$$\mathbf{z}^{(i)}(\sigma)=\mathbf{z}^{(j)}(\sigma),\quad i,j=1,...,n,$$

gde je $\sigma\in D^{(i)}\cap D^{(j)}$ i $\mathbf{z}^{(j)}=(\xi^{(j)},\eta^{(j)},\zeta^{(j)})$ polje $\mathbf{z}$ na delu $S^{(j)}$. Na osnovu (1.3.4), za svako $j=1,...,n$ važiće sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}\xi_u^{(j)}&=-f_u^{(j)}\zeta_u^{(j)}\\ \xi_v^{(j)}+\eta_u^{(j)}&=-f_v^{(j)}\zeta_u^{(j)}-f_u^{(j)}\zeta_v^{(j)}\\ \eta_v^{(j)}&=-f_v^{(j)}\zeta_v^{(j)}\end{aligned} \tag{2.4.37}$$

Diferenciranjem ovih jednačina po u i v dobijamo

$$\begin{aligned}\xi_{uu}^{(j)}&=-f_{uu}^{(j)}\zeta_u^{(j)}-f_u^{(j)}\zeta_{uu}^{(j)}\\ \xi_{uv}^{(j)}&=-f_{uv}^{(j)}\zeta_u^{(j)}-f_u^{(j)}\zeta_{uv}^{(j)}\\ \xi_{vv}^{(j)}&=-f_{vv}^{(j)}\zeta_u^{(j)}-f_u^{(j)}\zeta_{vv}^{(j)}\\ \eta_{uu}^{(j)}&=-f_{uu}^{(j)}\zeta_v^{(j)}-f_v^{(j)}\zeta_{uu}^{(j)}\\ \eta_{uv}^{(j)}&=-f_{uv}^{(j)}\zeta_v^{(j)}-f_v^{(j)}\zeta_{uv}^{(j)}\\ \eta_{vv}^{(j)}&=-f_{vv}^{(j)}\zeta_v^{(j)}-f_v^{(j)}\zeta_{vv}^{(j)}\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Potražimo srednju krivinu površi

$$S_\epsilon^{(j)} : \tilde{\mathbf{r}}^{(j)}(u,v,\epsilon) = \mathbf{r}^{(j)}(u,v) + \epsilon\mathbf{z}^{(j)}(u,v) = (u + \epsilon\xi^{(j)}(u,v), v + \epsilon\eta^{(j)}(u,v), f^{(j)}(u,v) + \epsilon\zeta^{(j)}(u,v)).$$

Najpre nalazimo koeficijente prve i druge kvadratne forme površi $S_\epsilon^{(j)}$. Pri tom koristimo jednakosti (2.4.37), (2.4.38). Dobijamo

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(j)} &= \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)} = 1 + f_u^{(j)2} + \epsilon^2(\xi_u^{(j)2} + \eta_u^{(j)2} + \zeta_u^{(j)2}) \\ \tilde{F}^{(j)} &= \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)} = f_u^{(j)} f_v^{(j)} + \epsilon^2(\xi_u^{(j)}\xi_v^{(j)} + \eta_u^{(j)}\eta_v^{(j)} + \zeta_u^{(j)}\zeta_v^{(j)}) \\ \tilde{G}^{(j)} &= \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)} = 1 + f_v^{(j)2} + \epsilon^2(\xi_v^{(j)2} + \eta_v^{(j)2} + \zeta_v^{(j)2}) \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{uu}^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)}] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[f_{uu}^{(j)} + \epsilon\zeta_{uu}^{(j)}(1 + f_u^{(j)2} + f_v^{(j)2}) + \epsilon^2 A_1^{(j)} + \epsilon^3 A_2^{(j)}] \\ \tilde{M}^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{uv}^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)}] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[f_{uv}^{(j)} + \epsilon\zeta_{uv}^{(j)}(1 + f_u^{(j)2} + f_v^{(j)2}) + \epsilon^2 B_1^{(j)} + \epsilon^3 B_2^{(j)}] \\ \tilde{N}^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{vv}^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_u^{(j)}, \tilde{\mathbf{r}}_v^{(j)}] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{(j)}}}[f_{vv}^{(j)} + \epsilon\zeta_{vv}^{(j)}(1 + f_u^{(j)2} + f_v^{(j)2}) + \epsilon^2 C_1^{(j)} + \epsilon^3 C_2^{(j)}], \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

pri čemu smo koeficijente prve, odnosno druge kvadratne forme, označili slovima E, F, G, odnosno L, M, N, što je uobičajena notacija u literaturi umesto tenzorske notacije g_{ij} i b_{ij}, pomoću indekasa. Funkcije $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$, $i = 1, 2$ dobijamo u razvoju odgovarajućih determinanata i

$$\tilde{g}^{(j)} = \tilde{E}^{(j)}\tilde{G}^{(j)} - \tilde{F}^{(j)2} = 1 + f_u^{(j)2} + f_v^{(j)2} + \epsilon^2 \ldots + \epsilon^4 \ldots .$$

Sada računamo srednju krivinu dela $S_\epsilon^{(j)}$ po obrascu (1.1.17), tj.

$$\tilde{H}^{(j)} = \frac{\tilde{E}^{(j)}\tilde{N}^{(j)} - 2\tilde{F}^{(j)}\tilde{M}^{(j)} + \tilde{G}^{(j)}\tilde{L}^{(j)}}{2(\tilde{E}^{(j)}\tilde{G}^{(j)} - \tilde{F}^{(j)2})}$$

i dobijamo varijaciju srednje krivine prema (2.1.2)

$$\delta H^{(j)} = \frac{d\tilde{H}^{(j)}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \frac{(1 + f_u^{(j)2})\zeta_{vv}^{(j)} - 2f_u^{(j)} f_v^{(j)}\zeta_{uv}^{(j)} + (1 + f^{(j)2})\zeta_{uu}^{(j)}}{2\sqrt{1 + f_u^{(j)2} + f_v^{(j)2}}}. \tag{2.4.41}$$

Na osnovu (2.4.21) za varijaciju totalne srednje krivine imamo

$$\delta H(S^{(j)}) = \frac{1}{2}\iint_{D^{(j)}} [(1 + f_v^{(j)2})\zeta_{uu}^{(j)} - 2f_u^{(j)} f_v^{(j)}\zeta_{uv}^{(j)} + (1 + f_u^{(j)2})\zeta_{vv}^{(j)}]\, du\, dv. \tag{2.4.42}$$

Direktnim rešavanjem sistema (1.3.8), tj.

$$(\xi_u^{(j)}, \eta_u^{(j)}, \zeta_u^{(j)}) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, y_3^{(j)}) \times (1, 0, f_u^{(j)}), \quad (\xi_v^{(j)}, \eta_v^{(j)}, \zeta_v^{(j)}) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, y_3^{(j)}) \times (0, 1, f_v^{(j)}) \tag{2.4.43}$$

odnosno

$$(\xi_u^{(j)},\eta_u^{(j)},\zeta_u^{(j)})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ y_1^{(j)} & y_2^{(j)} & y_3^{(j)}\\ 1 & 0 & f_u^{(j)}\end{vmatrix},\quad (\xi_v^{(j)},\eta_v^{(j)},\zeta_v^{(j)})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ y_1^{(j)} & y_2^{(j)} & y_3^{(j)}\\ 0 & 1 & f_v^{(j)}\end{vmatrix} \tag{2.4.44}$$

$$(\xi_u^{(j)},\eta_u^{(j)},\zeta_u^{(j)})=(y_2^{(j)}f_u^{(j)},-y_1^{(j)}f_u^{(j)}+y_3^{(j)},-y_2^{(j)}),\quad (\xi_v^{(j)},\eta_v^{(j)},\zeta_v^{(j)})=(y_2^{(j)}f_v^{(j)}-y_3^{(j)},-y_1^{(j)}f_v^{(j)},y_1^{(j)}) \tag{2.4.45}$$

dolazimo do polja $\mathbf{y}(u,v)$ na delu $S^{(j)}$ u sledećoj formi

$$\mathbf{y}^{(j)}(u,v)=(y_1^{(j)},y_2^{(j)},y_3^{(j)})=(\zeta_v^{(j)},-\zeta_u^{(j)},\eta_u^{(j)}+f_u^{(j)}\zeta_v^{(j)})=(\zeta_v^{(j)},-\zeta_u^{(j)},-\xi_v^{(j)}+f_v^{(j)}\zeta_u^{(j)}) \tag{2.4.46}$$

i, kako je $d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv$,

$$\int_{\partial S^{(j)}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\partial D^{(j)}}((1+f_u^{(j)2})\zeta_v^{(j)}+f_u^{(j)}\eta_u^{(j)})du+(-\zeta_u^{(j)}+f_v^{(j)}\eta_u^{(j)}+f_u^{(j)}f_v^{(j)}\zeta_v^{(j)})dv. \tag{2.4.47}$$

Na osnovu (2.4.35) i (2.4.47), a kako za površinski integral važi aditivnost po oblasti integracije, imamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}&=\int_{\bigcup_{j=1}^n\partial S^{(j)}\setminus\bigcup_{i,j=1\,i\neq j}^n c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\\&=\int_{\bigcup_{j=1}^n\partial S^{(j)}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}-\int_{\bigcup_{i,j=1\,i\neq j}^n c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\\&=\sum_{j=1}^n\int_{\partial D^{(j)}}\big((1+f_u^{(j)2})\zeta_v^{(j)}+f_u^{(j)}\eta_u^{(j)}\big)du+\big(-\zeta_u^{(j)}+f_v^{(j)}\eta_u^{(j)}+f_u^{(j)}f_v^{(j)}\zeta_v^{(j)}\big)dv\\&-\sum_{i,j=1,i\neq j}^n\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

Primenom Grinove formule [23] (George Green, 1793-1841, britanski matematički fizičar)

$$\int_{\partial D}P\,du+Q\,dv=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v})\,du\,dv$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r} &= \sum_{j=1}^{n}\iint_{D^{(j)}}[-(1+f_v^{(j)2})\zeta_{uu}^{(j)}+2f_u^{(j)}f_v^{(j)}\zeta_{uv}^{(j)}-(1+f_u^{(j)2})\zeta_{vv}^{(j)}]\,du\,dv-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\iint_{D^{(j)}}2\delta H^{(j)}\sqrt{1+f_u^{(j)2}+f_v^{(j)2}}\,du\,dv-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\\ &= -2\iint_{D}\delta H\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,du\,dv-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}\\ &= -2\delta H(S)-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

Posledica 2.4.10. *Za svaku orijentisanu deo po deo glatku površ S bez kraja i njeno infinitezimalno savijanje, varijacija totalne srednje krivine površi data je formulom*

$$\delta H(S)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}.\quad\blacksquare \tag{2.4.48}$$

Možemo videti da varijacija totalne srednje krivine deo po deo glatke površi bez kraja nije nula u opštem slučaju. Kako je $\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{c_{ji}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}$ u slučaju glatkih površi, to je

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}=\sum_{i,j=1,i<j}^{n}(\int_{c_{ij}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r}+\int_{c_{ji}}\mathbf{y}\cdot d\mathbf{r})=0,$$

pa imamo

Posledica 2.4.11. *Svaka fleksibilna orijentisana glatka površ bez kraja čuva totalnu srednju krivinu prilikom infinitezimalnog savijanja.* $\blacksquare$

Glava 3

Infinitezimalne deformacije krivih na površima

U ovoj glavi definisaćemo infinitezimalne deformacije krivih i, posebno, infinitezimalna savijanja krivih. Ispitaćemo mogućnost infinitezimalnog deformisanja sferne krive, tako da sve deformisane krive pripadaju datoj sferi. Odredićemo polje infinitezimalnog savijanja krive na pravolinijskoj površi pod čijim dejstvom i deformisane krive ostaju na istoj površi. Cilindar, kao pravolinijsku površ, i hiperbolički paraboloid, kao dvaput pravolinijsku površ, uzećemo za primere i za proizvoljnu krivu na njima pronaćićemo polje infinitezimalnog savijanja. Takođe, ispitaćemo promenu krivine krive na hiperboličkom paraboloidu pri takvom infinitezimalnom savijanju. Neke primere savijanja vizualizovaćemo primenom programskog paketa *Mathematica* [40, 82].

3.1 Infinitezimalne deformacije krivih

Koncept infinitezimalnih deformacija bavi se najpre infinitezimalnim deformacijama površi, a potom i istim problemom u teoriji krivih i mnogostrukosti. Stoga ćemo definiciju infinitezimalnih deformacija krivih dati analogno definiciji infinitezimalnih deformacija površi.

Posmatrajmo neprekidnu regularnu krivu $C \subset \mathcal{R}^3$, datu jednačinom

$$C : \mathbf{r}=\mathbf{r}(t), \quad t \in I \subset \mathcal{R}. \tag{3.1.1}$$

Definicija 3.1.1. *Neprekidna jednoparametarska familija krivih* C_ϵ*,*

$$\begin{aligned} C_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(t,\epsilon)=\mathbf{r}_\epsilon(t)=\mathbf{r}(t)+\epsilon\mathbf{z}(t), \quad \epsilon \in (-1,1), \\ \tilde{\mathbf{r}} : I \times (-1,1) \to \mathcal{R}^3, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

naziva se **infinitezimalna deformacija** *krive* C*, ako se kriva* C *dobija za* $\epsilon = 0$*. Polje* $\mathbf{z} \in C^1$ *naziva se* **polje infinitezimalne deformacije krive** C*.*

Zadavanjem posebnih uslova, dobijaju se specijalne vrste infinitezimalnih deformacija krivih.

Teorijom infinitezimalnih deformacija krivih bavili su se i dalje se bave mnogi autori: E. Kartan (Élie Joseph Cartan, 1869-1951, francuski matematičar), L. P. Ajzenhart, A. De Mira Fernandez (Aureliano de Mira Fernandes, 1884-1958, portugalski matematičar), K. Jano (Kentaro Yano, 1912-1993, japanski matematičar), N. V. Jefimov, Lj. S. Velimirović i dr. Pomenimo rad [111] autora K. Jana i dr. u kome se proučavaju infinitezimalne deformacije krivih u prostorima sa linearnom koneksijom, i to:

- deformacije paralelnih tangenti- infinitezimalne deformacije kod kojih je tangentni vektor originalne krive uvek paralelan, u smislu afine koneksije, tangentnom vektoru deformisane krive u odgovarajućoj tački;
- infinitezimalne deformacije koje trajektoriju prevode u trajektoriju;
- infinitezimalne deformacije koje čuvaju afine konusne prostore;
- infinitezimalne deformacije koje čuvaju projektivne konusne prostore;
- infinitezimalne deformacije koje čuvaju Rimanove krugove;
- infinitezimalne deformacije koje čuvaju konformne krugove.

Napomena 3.1.1. *Definicije navedenih pojmova u prethodnom paragrafu mogu se naći u radu [111].*

U ovom radu bavićemo se infinitezimalnim deformacijama krivih u euklidskom prostoru $\mathcal{R}^3$. Proučićemo specijalnu vrstu infinitezimalnih deformacija-infinitezimalna savijanja krivih.

3.1.1 Infinitezimalna savijanja krivih

Koncept infinitezimalnih savijanja krivih javlja se u radovima [30, 69, 70, 94, 96, 97, 98, 100]. Od posebnog je značaja interaktivan vizuelni prikaz krivih i uticaja polja infinitezimalnog savijanja na njih. U radu [69] dat je koristan alat za grafičku prezentaciju fleksibilnih krivih, tzv. "CurveBend" i vizualizovani su neki primeri deformacija krivih.

Definišimo infinitezimalna savijanja krivih prema [30, 94].

Definicija 3.1.2. Infinitezimalno savijanje neprekidne regularne krive *C, (3.1.1), jeste infinitezimalna deformacija (3.1.2), ukoliko važi uslov*

$$d\tilde{s}^2 - ds^2 = o(\epsilon). \tag{3.1.3}$$

Polje $\mathbf{z}$ *je* **polje infinitezimalnog savijanja krive** *C.*

Teorema 3.1.1. *[30] Potreban i dovoljan uslov da $\mathbf{z}(t)$ bude polje infinitezimalnog savijanja krive C je da važi*

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{z} = 0, \tag{3.1.4}$$

gde $\cdot$ označava skalarni proizvod u $\mathcal{R}^3$. ■

Sledeća teorema govori o određivanju polja infinitezimalnog savijanja krive C.

Teorema 3.1.2. *[94] Polje infinitezimalnog savijanja krive C (3.1.1) je*

$$\mathbf{z}(t) = \int [p(t)\mathbf{n}(t) + q(t)\mathbf{b}(t)]\, dt, \tag{3.1.5}$$

gde su $p(t)$ i $q(t)$ proizvoljne integrabilne funkcije, a vektori $\mathbf{n}(t)$ i $\mathbf{b}(t)$ respektivno jedinični vektori glavne normale i binormale krive C. ■

Kako je

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}, \tag{3.1.6}$$

polje infinitezimalnog savijanja se može napisati u obliku

$$\mathbf{z}(t) = \int [p(t)\frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|} + q(t)\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}]dt$$

gde su $p(t), q(t)$ proizvoljne integrabilne funkcije, ili u obliku

$$\mathbf{z}(t) = \int [P_1(t)\dot{\mathbf{r}} + P_2(t)\ddot{\mathbf{r}} + Q(t)(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})]dt \tag{3.1.7}$$

gde su $P_i(t),\ i = 1, 2,$ i $Q(t)$ takođe proizvoljne integrabilne funkcije.

Zanimljivo je pitanje infinitezimalnog savijanja ravne krive koja posle deformisanja ostaje u istoj ravni. Ovim problemom bavila se Lj. S. Velimirović u radu [96]. U istom radu pronađeno je polje infinitezimalnog savijanja pod čijim dejstvom deformisana kriva ostaje u prvobitnoj ravni, tj. dokazana je sledeća teorema:

Teorema 3.1.3. *Polje infinitezimalnog savijanja koje ravnu krivu (datu u polarnim koordinatama)*

$$K : \rho = \rho(\theta) \tag{3.1.8}$$

pri infinitezimalnom savijanju uključuje u familiju ravnih krivih

$$K_\epsilon : \rho_\epsilon = \rho_\epsilon(\theta), \quad \epsilon \in (-1, 1), \tag{3.1.9}$$

dato je jednačinom

$$\mathbf{z}(\theta) = \rho(\theta) \sin\theta \mathbf{i} - \rho(\theta) \cos\theta \mathbf{j}, \tag{3.1.10}$$

gde su $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ jedinični vektori u pravcu Dekartovih osa. ■

Takođe, dokazana je i sledeća teorema:

Teorema 3.1.4. *Površina određena ravnom krivom koja trpi infinitezimalno savijanje ostajući u prvobitnoj ravni je stacionarna.* ■

3.2 Infinitezimalne deformacije krivih na sferi

Postavlja se zanimljivo pitanje: *Da li je moguće infinitezimalno savijati sfernu krivu C, tako da sve savijene krive familije C_ϵ pripadaju datoj sferi?* Odgovor na ovo pitanje daje nam sledeća teorema.

Teorema 3.2.1. *Data je kriva $C : \mathbf{r}(t) : I \to \mathcal{R}^3$ na sferi $S : ||\mathbf{r} - \mathbf{q}|| = R$, sa centrom u tački $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^3$ i poluprečnikom $R > 0$. Ne postoji netrivijalno vektorsko polje $\mathbf{z}(t)$ tako da familija krivih*

$$C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon = \tilde{\mathbf{r}}(t, \epsilon) = \mathbf{r}(t) + \epsilon\mathbf{z}(t), \quad \epsilon \in (-1, 1), \quad \tilde{\mathbf{r}}(t, 0) = \mathbf{r}(t), \tag{3.2.1}$$

pripada sferi S.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji familija krivih (3.2.1) na sferi S. To znači da je ispunjen uslov:

$$||\mathbf{r}_\epsilon - \mathbf{q}|| = R, \text{ za svako } \epsilon \in (-1, 1).$$

Kvadriranjem ove jednačine dobija se $||\mathbf{r}_\epsilon - \mathbf{q}||^2 = R^2$, tj. $||\mathbf{r}(t) + \epsilon\mathbf{z}(t) - \mathbf{q}||^2 = R^2$. Odavde je:

$$||\mathbf{r}(t)||^2 + \epsilon^2||\mathbf{z}(t)||^2 + ||\mathbf{q}||^2 - 2\epsilon\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}(t) - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}(t) + 2\epsilon\mathbf{z}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = R^2, \tag{3.2.2}$$

gde $\cdot$ označava skalarni proizvod u $\mathcal{R}^3$.

Sa druge strane važi $||\mathbf{r}(t) - \mathbf{q}||^2 = R^2$, odnosno

$$||\mathbf{r}(t)||^2 - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}(t) + ||\mathbf{q}||^2 = R^2. \tag{3.2.3}$$

Zamenom (3.2.3) u (3.2.2) i deljenjem dobijene jednakosti sa $\epsilon \neq 0$, dobijamo

$$2\mathbf{z}(t) \cdot \mathbf{r}(t) - 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}(t) + \epsilon||\mathbf{z}(t)||^2 = 0. \tag{3.2.4}$$

Uslov (3.2.4) mora da važi za svako $\epsilon \in (-1, 1)\backslash\{0\}$. To je ispunjeno kada važe sledeća dva uslova:

$$\mathbf{z}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{q}) = 0 \tag{3.2.5}$$

i

$$||\mathbf{z}(t)||^2 = 0. \tag{3.2.6}$$

Medjutim, iz (3.2.6) dobijamo $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$, čime je teorema dokazana. ■

Ovu teoremu možemo iskazati i na sledeći način:

Teorema 3.2.2. *Ne postoji netrivijalna infinitezimalna deformacija sferne krive koja pripada datoj sferi.* ■

Kao direktnu posledicu ove teoreme imamo sledeće tvrđenje:

Posledica 3.2.3. *Ne postoji netrivijalno infinitezimalno savijanje sferne krive koje pripada datoj sferi.* ■

3.3 Infinitezimalna savijanja krivih na pravolinijskim površima

U prethodnom poglavlju videli smo da nije moguće infinitezimalno savijati sfernu krivu tako da i deformisane krive takođe pripadaju toj sferi.

Dalje, postavićemo sledeće pitanje: *Da li je moguće infinitezimalno savijati krivu C koja pripada pravolinijskoj površi S, tako da sve savijene krive familije C_ϵ pripadaju datoj površi S?*

Odgovor je potvrdan, a u nastavku dajemo eksplicitnu formulu polja takvog infinitezimalnog savijanja krive na pravolinijskoj površi.

Teorema 3.3.1. *Neka je data pravolinijska površ*

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\,\mathbf{e}(u) \quad (u \in \mathcal{J}, v \in \mathcal{R}, \|\mathbf{e}(u)\| = 1), \tag{3.3.1}$$

sa direktrisom $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$ i generatrisama u pravcu vektora $\mathbf{e}(u)$, i kriva

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \tag{3.3.2}$$

na površi S. Tada je polje infinitezimalnog savijanja koje datu krivu ostavlja na površi S

$$\mathbf{z}(t) = c\,\mathbf{e}(u(t))\,e^{-\int \frac{\dot{u}^2(\boldsymbol{\rho}_u\cdot \mathbf{e}_u + v\|\mathbf{e}_u\|^2)}{\dot{u}\boldsymbol{\rho}_u\cdot\mathbf{e}+\dot{v}}\,dt}, \tag{3.3.3}$$

$\dot{u}\boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e} + \dot{v} \neq 0$, *gde je c proizvoljna konstanta.*

Dokaz. Neka je

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho}(u(t)) + v(t)\,\mathbf{e}(u(t)) \tag{3.3.4}$$

kriva na površi S i

$$C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon(t) = \boldsymbol{\rho}(u(t)) + v(t)\,\mathbf{e}(u(t)) + \epsilon\,\mathbf{z}(t) \tag{3.3.5}$$

infinitezimalno savijanje krive C sa poljem $\mathbf{z}$. Kako familija C_ϵ, $\epsilon \in (-1, 1)$ pripada površi S, polje $\mathbf{z}$ je u sledećoj formi

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}(u(t))\,z_1(t), \tag{3.3.6}$$

gde je $z_1(t)$ realna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Pošto je $\mathbf{z}$ polje infinitezimalnog savijanja, mora važiti uslov (3.1.4), tj.

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0 \text{ tj. } \dot{\mathbf{r}} \perp \dot{\mathbf{z}}, \tag{3.3.7}$$

odnosno

$$(\boldsymbol{\rho}_u\, \dot{u} + \dot{v}\, \mathbf{e} + v\, \mathbf{e}_u\, \dot{u}) \cdot (\mathbf{e}_u\, \dot{u}\, z_1 + \mathbf{e}\, \dot{z}_1) = 0. \tag{3.3.8}$$

Kako je $\|\mathbf{e}\| = 1$, to je $\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$ ($\mathbf{e} \perp \dot{\mathbf{e}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})^{\cdot} = 0 \Leftrightarrow (\|\mathbf{e}\|^2)^{\cdot} = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{e}\| = const$). Iskoristimo ovu činjenicu i dobijamo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu nepoznate funkcije $z_1(t)$

$$z_1 \dot{u}^2 (\boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e}_u + v\|\mathbf{e}_u\|^2) + \dot{z}_1 (\dot{u} \boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e} + \dot{v}) = 0, \tag{3.3.9}$$

čije je rešenje

$$z_1(t) = c e^{-\int \frac{\dot{u}^2 (\boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e}_u + v\|\mathbf{e}_u\|^2)}{\dot{u} \boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e} + \dot{v}}\, dt}, \tag{3.3.10}$$

c je konstanta i $\dot{u}\boldsymbol{\rho}_u \cdot \mathbf{e} + \dot{v} \neq 0$. Stavimo li (3.3.10) u (3.3.6), dobijamo (3.3.3). ■

Primetimo da ukoliko je direktrisa $C : \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$ ujedno i strikciona linija pravolinijske površi S, onda za nju važi uslov

$$\dot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} = 0$$

(v.[60], str. 103.), pa je $\mathbf{e}(u)$ polje infinitezimalnog savijanja krive C koje tu krivu prevodi u familiju krivih na pravolinijskoj površi S,

$$C_\epsilon : \tilde{\boldsymbol{\rho}}(u, \epsilon) = \boldsymbol{\rho}_\epsilon(u) = \boldsymbol{\rho}(u) + \epsilon \mathbf{e}(u).$$

Pri tom, svaka kriva familije C_ϵ "paralelna" je sa krivom C, tj. odsečak svake generatrise između C i C_ϵ je iste dužine. Zaista,

$$\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}(u_1, \epsilon) - \boldsymbol{\rho}(u_1)\| = \|\epsilon \mathbf{e}(u_1)\| = \epsilon = \|\epsilon \mathbf{e}(u_2)\| = \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}(u_2, \epsilon) - \boldsymbol{\rho}(u_2)\|,$$

jer je $\|\mathbf{e}(u_1)\| = \|\mathbf{e}(u_2)\| = 1$. Napomenimo da se za direktrisu pravolinijske površi može uzeti svaka kriva na površi koju generatrise seku ili dodiruju, pa se za direktrisu može uzeti i strikciona linija, ako postoji.

Da pravolinijske površi ipak nisu jedine površi na kojima je moguće vršiti infinitezimalna savijanja krivih, pokazaćemo u sledećem primeru.

Primer 3.3.1. *Neka je S rotaciona površ u $\mathcal{R}^3$ klase C^∞, data kao graf funkcije*

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(r^2-1)^2}}, & r > 1 \\ 0, & 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Primetimo da S nije pravolinijska površ (ustvari nije pravolinijska u bilo kojoj otvorenoj okolini proizvoljne tačke jediničnog kruga $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$). Razmotrimo krivu $C \subset S$ datu parametarskom jednačinom

$$C : \mathbf{r}(t) = (t, o, f(t)),$$

gde je

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t^2-1)^2}}, & |t| \geq 1 \\ 0, & |t| \leq 1 \end{cases}$$

Neka je

$$g(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1 \\ e^{\frac{-1}{(t^2-1)^2}}, & |t| \leq 1 \end{cases}$$

Tada familija krivih

$$C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon = (t, \epsilon g(t), f(t))$$

pripada površi S i predstavlja infinitezimalno savijanje krive C određeno poljem $\mathbf{z} = (0, g(t), 0)$.

3.3.1 Infinitezimalna savijanja krivih na cilindru

Cilindar je primer pravolinijske površi. Pronađimo polje infinitezimalnog savijanja proizvoljne krive na njemu, koje datu krivu ostavlja na cilindru.

Teorema 3.3.2. *Neka je dat cilindar $S : x^2 + y^2 = a^2$. Neka je $C : \mathbf{r}(t) : (\alpha, \beta) \to \mathcal{R}^3$ neprekidna regularna kriva na cilindru S, $\mathbf{z}(t)$ vektorsko polje klase C^1 koje datu krivu pri infinitezimalnom savijanju uključuje u familiju krivih $C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon = \mathbf{r}(t) + \epsilon\mathbf{z}(t)$, $\epsilon \in (-1, 1)$, na cilindru S. Tada*

a) Ukoliko je kriva C u ravni $z = const$, tada je polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}(t) = z_3(t)\mathbf{k}$, gde je $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ i $z_3(t)$ proizvoljna realna funkcija klase C^1.

b) Inače, polje infinitezimalnog savijanja je konstantni vektor $\mathbf{z} = c\mathbf{k}$, gde je c realna konstanta. Savijanje je kruto i svodi se na translaciju duž z-ose.

Dokaz. Parametarska jednačina cilindra visine h i poluose a je

$$\mathbf{r}(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v), \ u \in [0, 2\pi], \ v \in [0, h]. \tag{3.3.11}$$

Neka je

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = (a\cos u(t), a\sin u(t), v(t)), \ t \in (\alpha, \beta) \tag{3.3.12}$$

kriva koja leži na cilindru (3.3.11). Infinitezimalno savijanje biće

$$\mathbf{r}_\epsilon(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon\mathbf{z}(t) = (a\cos u(t) + \epsilon z_1(t), a\sin u(t) + \epsilon z_2(t), v(t) + \epsilon z_3(t)), \tag{3.3.13}$$

gde je $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ i $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ su realne neprekidno diferencijabilne funkcije. Kako je neophodno da krive $\mathbf{r}_\epsilon$ budu na površi (3.3.11), mora važiti

$$\big(a\cos u(t) + \epsilon z_1(t)\big)^2 + \big(a\sin u(t) + \epsilon z_2(t)\big)^2 = a^2,$$

tj. posle grupisanja članova i deljenja jednakosti sa $\epsilon \neq 0$

$$2a\big(\cos u(t) z_1(t) + \sin u(t) z_2(t)\big) + \epsilon\big(z_1^2(t) + z_2^2(t)\big) = 0,$$

za svako $\epsilon \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Dakle, moraju važiti uslovi

$$\cos u(t) z_1(t) + \sin u(t) z_2(t) = 0 \tag{3.3.14}$$

i

$$z_1^2(t) + z_2^2(t) = 0. \tag{3.3.15}$$

Iz (3.3.15) imamo $z_1(t) = z_2(t) = 0$, tako da je $\mathbf{z}(t) = (0, 0, z_3(t))$. Kako je $\mathbf{z}$ polje infinitezimalnog savijanja, važi (3.3.7). Dakle,

$$(-a\sin u(t)\dot{u}(t), a\cos u(t)\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \cdot (0, 0, \dot{z}_3(t)) = 0,$$

odnosno,

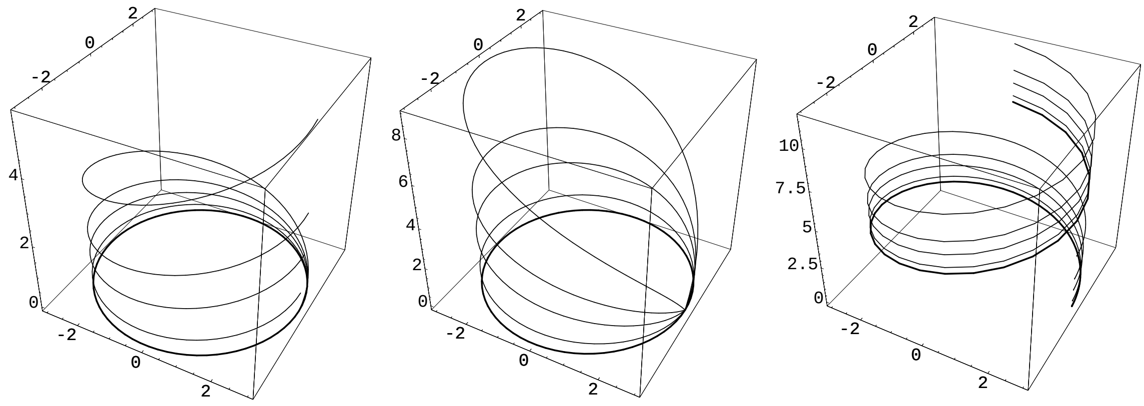
$$\dot{v}(t)\dot{z}_3(t) = 0. \tag{3.3.16}$$

Odavde je $\dot{v}(t) = 0$ ili $\dot{z}_3(t) = 0$. Razlikujemo dva slučaja.

- Ako je $\dot{v}(t) = 0$, biće $v(t) = const$, tj. kriva $\mathbf{r}(t)$ je u ravni $z = const$. Infinitezimalno polje savijanja u ovom slučaju je $\mathbf{z}(t) = (0, 0, z_3(t)) = z_3(t)\mathbf{k}$.
- Kada je $\dot{z}_3(t) = 0$, tj. $z_3(t) = const$, dobijamo polje infinitezimalnog savijanja proizvoljne krive na cilindru u formi $\mathbf{z} = (0, 0, c) = c\mathbf{k}$, pri čemu je c realna konstanta. ■

Primer 3.3.2. *Razmotrimo neke krive na cilindru $S : \mathbf{r}(u, v) = (3\cos u, 3\sin u, v)$ i njihova infinitezimalna savijanja. Navedeni primeri su vizualizovani primenom programskog paketa Mathematica.*

- *Za krug $C_1 : \mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$, koji leži u ravni $z = 0$, možemo uzeti za polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}(t) = t\mathbf{k}$. Na Slici 3.1 (prva slika), možemo videti krivu C_1 i savijene krive za $\epsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.9$. Očigledno, krug C_1 "se cepa" pri takvom infinitezimalnom savijanju i pri tom je uključen u familiju heliksa na cilindru.*
- *Za isti krug $C_1 : \mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$, možemo uzeti za polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}(t) = t(2\pi - t)\mathbf{k}$. Kako je $\mathbf{r}_\epsilon(t = 0) = \mathbf{r}_\epsilon(t = 2\pi)$, kriva ostaje zatvorena (srednja slika).*
- *Ako uzmemo krivu $C_2 : \mathbf{r}(t) = (3\cos t^3, 3\sin t^3, t^3)$ i polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z} = 4\mathbf{k}$, dobijamo samo kruto kretanje, tj. translaciju duž z-ose (poslednja slika).*



Slika 3.1: Infinitezimalno savijanje krive na cilindru

3.3.2 Infinitezimalna savijanja krivih na hiperboličkom paraboloidu

Hiperbolički paraboloid je primer dvaput pravolinijske površi. U nastavku ćemo pronaći polje infinitezimalnog savijanja proizvoljne krive koje pripada toj površi i ispitati promenu krivine krive pri takvom infinitezimalnom savijanju.

Teorema 3.3.3. *Neka je dat hiperbolički paraboloid* $S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv)$ *i neprekidna regularna kriva na njemu,* $C : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$. *Neka je* $\mathbf{z}(t)$ *vektorsko polje klase* C^1 *koje datu krivu pri infinitezimalnom savijanju uključuje u familiju krivih* $C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon = \mathbf{r}(t)+\epsilon\mathbf{z}(t)$, $\epsilon \in (-1, 1)$, *na hiperboličkom paraboloidu* S. *Tada jednačine*

$$\mathbf{z}(t) = ce^{-\int \frac{(uv)^{\cdot}\dot{u}}{\dot{v}+u(uv)^{\cdot}}dt}(0, 1, u(t)), \tag{3.3.17}$$

u slučaju kada važi $\dot{v} + u(uv)^{\cdot} \neq 0$, *i*

$$\mathbf{z}(t) = ce^{-\int \frac{(uv)^{\cdot}\dot{v}}{\dot{u}+v(uv)^{\cdot}}dt}(1, 0, v(t)), \tag{3.3.18}$$

$\dot{u} + v(uv)^{\cdot} \neq 0$, *determinišu polje* $\mathbf{z}(t)$, *gde je* c *proizvoljna konstanta.*

Dokaz. Neka je

$$\mathbf{r}_\epsilon(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon\mathbf{z}(t) = (u(t) + \epsilon z_1(t), v(t) + \epsilon z_2(t), u(t)v(t) + \epsilon z_3(t)) \tag{3.3.19}$$

infinitezimalno savijanje krive C određeno poljem $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$, pri čemu su z_1, z_2, z_3 realne neprekidno diferencijabilne funkcije. Kako su krive (3.3.19) na površi S, mora važiti

$$(u(t) + \epsilon z_1(t))(v(t) + \epsilon z_2(t)) = u(t)v(t) + \epsilon z_3(t), \quad \forall\epsilon \in (-1, 1).$$

Deljenjem date jednačine sa $\epsilon \neq 0$ dobijamo

$$z_1(t)v(t) + z_2(t)u(t) - z_3(t) + \epsilon z_1(t)z_2(t) = 0. \tag{3.3.20}$$

Kako (3.3.20) mora važiti za svako $\epsilon \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, to mora biti

$$z_1(t)v(t) + z_2(t)u(t) - z_3(t) = 0 \tag{3.3.21}$$

i

$$z_1(t)z_2(t) = 0. \tag{3.3.22}$$

Iz (3.3.22) dobijamo $z_1(t) = 0$ ili $z_2(t) = 0$. Razlikujemo dva slučaja.

- Neka je $z_1(t) = 0$. Jednačina (3.3.21) se svodi na $z_2(t)u(t) = z_3(t)$. Odavde važi

  $$\mathbf{z}(t) = (0, z_2(t), u(t)z_2(t)). \tag{3.3.23}$$

  Kako je $\mathbf{z}(t)$ polje infinitezimalnog savijanja, to važi (3.3.7). Pošto je $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{u}v + u\dot{v})$ i $\dot{\mathbf{z}} = (0, \dot{z}_2, \dot{u}z_2 + u\dot{z}_2)$, zamenom u (3.3.7) dobijamo

  $$(\dot{v} + (uv)^{\cdot}u)\dot{z}_2 + (uv)^{\cdot}\dot{u}z_2 = 0. \tag{3.3.24}$$

  Rešavanjem homogene linearne diferencijalne jednačine (3.3.24) po z_2, dobijamo

  $$z_2(t) = ce^{-\int \frac{(uv)^{\cdot}\dot{u}}{\dot{v}+u(uv)^{\cdot}}dt}, \dot{v} + u(uv)^{\cdot} \neq 0. \tag{3.3.25}$$

  Odavde i iz (3.3.23) imamo (3.3.17).

- Analogno, rešavamo slučaj $z_2(t) = 0$ i dobijamo (3.3.18).

Lako je pokazati da (3.3.17) i (3.3.18) predstavljaju polja infinitezimalnog savijanja krive C koja datu krivu ostavljaju na hiperboličkom paraboloidu S, posle deformacije. ∎

Primer 3.3.3. *Neka je data kriva* $C_3 : \mathbf{r}(t) = (t, t, t^2)$, $t \in (a, b) \subseteq \mathcal{R}$, *na površi* $S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv)$. *Na osnovu Teoreme 3.3.3, posle neophodnih izračunavanja, dobijamo da su polja infinitezimalnog savijanja krive* C_3 *koja datu krivu ostavljaju na površi* S, *za* $c = 1$, *data sledećim jednačinama*

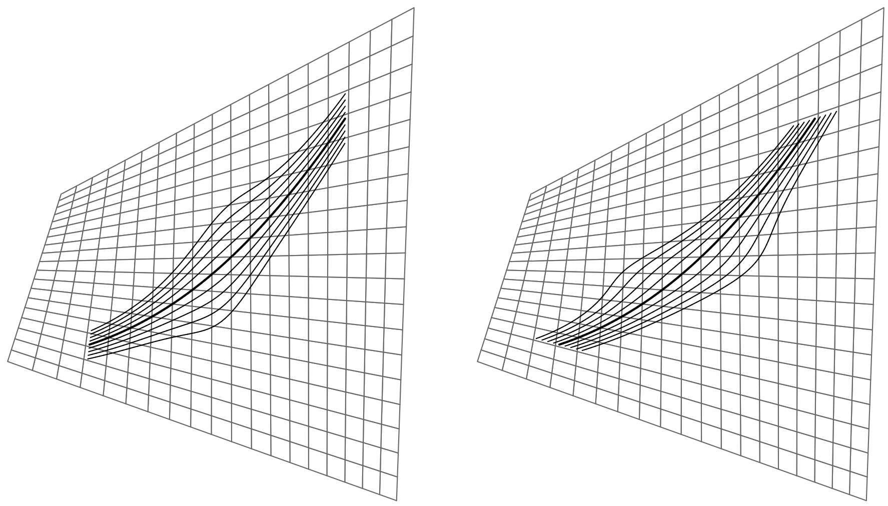
$$\mathbf{z}_1(t) = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\Big), \text{ i } \mathbf{z}_2(t) = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\Big).$$

Na Slici 3.2 možemo videti krivu C_3 *i savijene krive* $C_{3\epsilon}$ *za* $\epsilon = \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 0.75, \pm 1$ *pod dejstvom polja* $\mathbf{z}_1$ *i* $\mathbf{z}_2$.

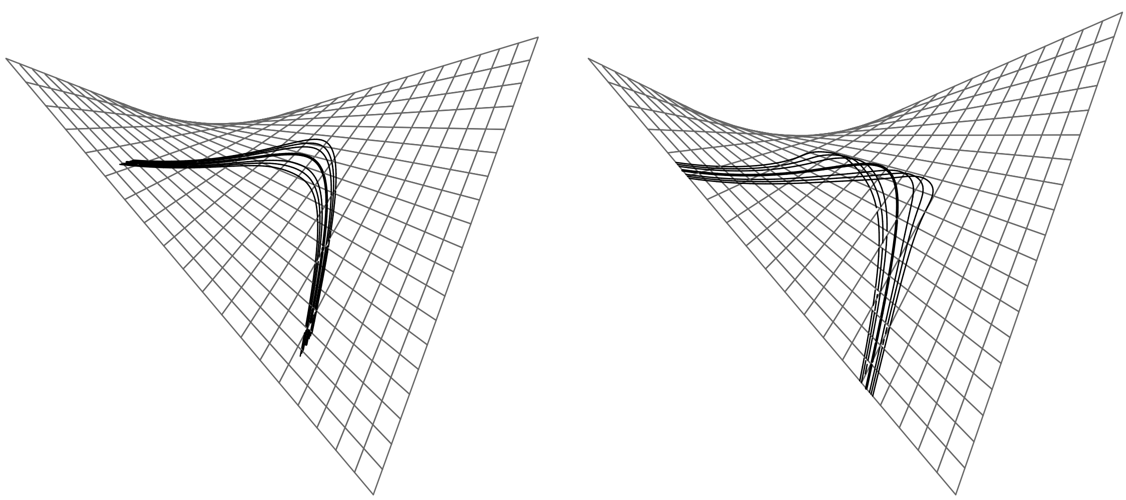
Primer 3.3.4. *Za krivu* $C_4 : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ *odgovarajuća polja infinitezimalnog savijanja su*

$$\mathbf{z}_1(t) = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2+3t^2}}, \frac{t}{\sqrt{2+3t^2}}\Big) \text{ i } \mathbf{z}_2(t) = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+3t^4}}, 0, \frac{t^2}{\sqrt{1+3t^4}}\Big).$$

Infinitezimalna savijanja određena datim poljima vizualizovana su na Slici 3.3.



Slika 3.2: Infinitezimalno savijanje krive C_3 na hiperboličkom paraboloidu



Slika 3.3: Infinitezimalno savijanje krive C_4 na hiperboličkom paraboloidu

Varijacija krivine krive na hiperboličkom paraboloidu

Ispitajmo promenu krivine K proizvoljne krive

$$C : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \tag{3.3.26}$$

na hiperboličkom paraboloidu

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv), \tag{3.3.27}$$

koja se infinitezimalno savija na njemu pod dejstvom polja (3.3.17). Krivina krive

$$C_\epsilon : \mathbf{r}_\epsilon = \mathbf{r}(t) + \epsilon \mathbf{z}(t) \tag{3.3.28}$$

data je formulom

$$K_\epsilon = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon \times \ddot{\mathbf{r}}_\epsilon\|}{\|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon\|^3}. \tag{3.3.29}$$

Neposrednim računanjem dobijamo

$$\|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon \times \ddot{\mathbf{r}}_\epsilon\|^2 = \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2 + 2\epsilon P_1(t) + \epsilon^2 P_2(t) + \epsilon^3 P_3(t) + \epsilon^4 P_4(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= (\dot{v}(uv)^{\cdot\cdot} - \ddot{v}(uv)^{\cdot})A(t) + (\dot{u}(uv)^{\cdot\cdot} - \ddot{u}(uv)^{\cdot})C(t) + (\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v})D(t);\\
P_2(t) &= 2(\dot{v}(uv)^{\cdot\cdot} - \ddot{v}(uv)^{\cdot})B(t) + A^2(t) + C^2(t) + D^2(t);\\
P_3(t) &= 2A(t)B(t);\\
P_4(t) &= B^2(t);\\
A(t) &= (\ddot{u}\dot{v} - \dot{u}\ddot{v})z_2 + (4\dot{u}\dot{v} + \ddot{u}v)\dot{z}_2 - \dot{u}v\ddot{z}_2;\\
B(t) &= \ddot{u}z_2\dot{z}_2 + 2\dot{u}\dot{z}_2{}^2 - \dot{u}z_2\ddot{z}_2;\\
C(t) &= (2\dot{u}^2 - u\ddot{u})\dot{z}_2 + u\dot{u}\ddot{z}_2;\\
D(t) &= \dot{u}\ddot{z}_2 - \ddot{u}\dot{z}_2;
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Funkcija $z_2(t)$ određena je jednačinom (3.3.25). Takođe,

$$\|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon\|^2 = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \epsilon^2[(\dot{u}z_2 + u\dot{z}_2)^2 + \dot{z}_2{}^2]. \tag{3.3.31}$$

Važi

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{K_\epsilon^2 - K^2}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} K_\epsilon^2 \Big|_{\epsilon=0} = \frac{2P_1(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^6}, \tag{3.3.32}$$

i takođe,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{K_\epsilon^2 - K^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{K_\epsilon - K}{\epsilon} \cdot (K_\epsilon + K) = \delta K \cdot 2K, \tag{3.3.33}$$

gde je δK varijacija krivine K krive (3.3.26). Upoređivanjem (3.3.32) i (3.3.33), kada je $K \neq 0$ dobijamo

$$\delta K = \frac{P_1(t)}{K\|\dot{\mathbf{r}}\|^6}. \tag{3.3.34}$$

Ispitajmo slučaj $K = 0$. Iz (3.3.32) i (3.3.33) zaključujemo da je i $P_1(t) = 0$. Sada je

$$\delta K = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{K_\epsilon}{\epsilon} = \frac{\sqrt{\epsilon^2 P_2(t) + \epsilon^3 P_3(t) + \epsilon^4 P_4(t)}}{\epsilon[\sqrt{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \epsilon^2((\dot{u}z_2 + u\dot{z}_2)^2 + \dot{z}_2{}^2)}]^3}$$

tj.

$$\delta K = \frac{\sqrt{P_2(t)}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}. \tag{3.3.35}$$

Dakle, važi

Teorema 3.3.4. *Varijacija krivine K krive (3.3.26) na hiperboličkom paraboloidu (3.3.27) pri infinitezimalnom savijanju (3.3.17) ne mora biti nula, već je određena jednačinom (3.3.34) kad je $K \neq 0$, tj. (3.3.35), kada je $K = 0$, gde su P_1 i P_2 funkcije date u (3.3.30).*

Glava 4

Infinitezimalne deformacije mnogostrukosti

U ovoj glavi bavićemo se infinitezimalnim deformacijama i, specijalno, infinitezimalnim geodezijskim deformacijama generalisanih Rimanovih prostora (Georg Fredrich Bernahard Riemann, 1826-1866, nemački matematičar). Navešćemo osnovne činjenice teorije generalisanih Rimanovih prostora i geodezijskih preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora. Daćemo potrebne i dovoljne uslove da preslikavanje bude geodezijsko, kao i potrebne i dovoljne uslove da deformacija bude geodezijska, uopštavajući poznate stavove koji važe u Rimanovim prostorima na generalisane Rimanove prostore. Uvešćemo tzv. ekvidistantne generalisane Rimanove prostore i pokazati da takvi prostori dopuštaju netrivijalne infinitezimalne geodezijske deformacije.

4.1 Generalisani Rimanovi prostori

Problematika prostora sa nesimetričnim osnovnim tenzorom, odnosno nesimetričnom koneksijom potiče od Ajnštajna [26, 27] i njegove tzv. *Jedinstvene teorije polja* (JTP). Počev od 1951. ovim problemom se dosta bavio Ajzenhart [29], a kasnije i mnogi drugi matematičari: S. Bohner i K. Jano, M. [9] (Salomon Bochner, 1899-1982, poljski matematičar), R. S. Mishra [62], K. D. Singh [76], S. M. Minčić [58], M. Prvanović [67] (Mileva Prvanović, srpski matematičar), M. Stanković [87] (Mića Stanković, srpski matematičar), M. Lj. Zlatanović [114] (Milan Lj. Zlatanović, srpski matematičar) i dr.

Definišimo generalisani Rimanov prostor prema Ajzenhartu [29].

Definicija 4.1.1. Generalisani Rimanov prostor *je N-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost u kojoj je uveden nesimetrični* **osnovni metrički tenzor** $g_{ij}(x^1, ..., x^N)$, *takav da u opštem slučaju važi*

$$g_{ij} \neq g_{ji}, \quad g = \det \|g_{ij}\| \neq 0. \tag{4.1.1}$$

Takav N-dimenzionalni prostor označavaćemo $\mathbb{GR}_N$. Ukoliko je osnovni metrički tenzor simetričan, dobijamo običan *Rimanov prostor* koji ćemo obeležavati $\mathbb{R}_N$.

Osnovne definicije i relacije koje se odnose na $\mathbb{GR}_N$ navešćemo prema [29, 58, 62, 76]. Za osnovne pojmove teorije običnih Rimanovih prostora upućujemo na [61].

Zbog nesimetričnosti metričkog tenzora, može se definisati, respektivno, *simetrični deo* i *antisimetrični deo* tenzora g_{ij}:

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \text{ i } g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}). \tag{4.1.2}$$

Očigledno važi

$$g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{4.1.3}$$

Spuštanje i dizanje indekasa definiše se pomoću tenzora $g_{\underline{ij}}$ i $g^{\underline{ij}}$, pri čemu je $g^{\underline{ij}}$ definisan pomoću

$$g_{\underline{ij}} g^{\underline{jk}} = \delta_i^k, \tag{4.1.4}$$

gde je δ_i^k je Kronekerov simbol. Kako je, očigledno, matrica $\|g^{\underline{ij}}\|$ inverzna matrici $\|g_{\underline{ij}}\|$, mora da važi uslov

$$\underline{g} = \det \|g_{\underline{ij}}\| \neq 0. \tag{4.1.5}$$

Definicija 4.1.2. *Rimanov prostor $\mathbb{R}_N^0$ određen simetričnim delom $g_{\underline{ij}}$ metričkog tenzora g_{ij} generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ i istim skupom tačaka kao u slučaju $\mathbb{GR}_N$, naziva se* **pridružen prostor** *prostoru $\mathbb{GR}_N$.*

Označimo obično parcijalno diferenciranje zapetom, na primer,

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Generalisani Kristofelovi simboli 1. odnosno 2. vrste prostora $\mathbb{GR}_N$ definisani su, respektivno, na sledeći način:

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \tag{4.1.6}$$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{\underline{ip}} \Gamma_{p.jk} = \frac{1}{2} g^{\underline{ip}} (g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}). \tag{4.1.7}$$

Veličine Γ^i_{jk} predstavljaju *koeficijente koneksije* prostora $\mathbb{GR}_N$. U opštem slučaju važi

$$\Gamma_{i.jk} \neq \Gamma_{i.kj}, \quad \Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}.$$

Polazeći od zakona transformacije tenzora g_{ij} pri prelasku sa sistema koordinata x^i na sistem $x^{i'}$ i uvodeći oznake

$$x^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad x^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}},$$

pokazuje se da važe sledeći zakoni transformacije generalisanih Kristofelovih simbola (v. [76])

$$\Gamma_{i'.j'k'} = \Gamma_{i.jk} x^i_{i'} x^j_{j'} x^k_{k'} + g_{\underline{ij}} x^i_{i'} x^j_{j'k'}, \tag{4.1.8}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}. \tag{4.1.9}$$

Možemo uvesti *simetrični i antisimetrični deo koeficijenata koneksije* Γ^i_{jk} relacijama

$$\Gamma^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}), \quad \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}). \tag{4.1.10}$$

Veličina $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ transformiše se po istom zakonu kao i Γ^i_{jk}, dok se veličina $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ transformiše kao tenzor i naziva *tenzor torzije* prostora $\mathbb{GR}_N$. Očigledno važi

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{jk}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}. \tag{4.1.11}$$

Za generalisane Rimanove prostore važi sledeća teorema, prema [58].

Teorema 4.1.1. *Ako je $\underline{g} = \det \|g_{\underline{ij}}\|$, onda u $\mathbb{GR}_N$ važi*

$$\Gamma^i_{\underline{ik}} = \Gamma^i_{\underline{ki}} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{|\underline{g}|}. \quad \blacksquare \tag{4.1.12}$$

Iz poslednje relacije sledi da za generalisane Rimanove prostore važi

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{ik}} = 0. \tag{4.1.13}$$

Korišćenjem nesimetričnosti koneksije Γ^i_{jk}, moguće je u prostoru $\mathbb{GR}_N$ definisati četiri vrste *kovarijantnog izvoda* [58]. Na primer, za tenzor a^i_j, imamo

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{1}{|}m} &= a^i_{j,m} + \Gamma^i_{pm} a^p_j - \Gamma^p_{jm} a^i_p, \quad & a^i_{j\underset{2}{|}m} &= a^i_{j,m} + \Gamma^i_{mp} a^p_j - \Gamma^p_{mj} a^i_p, \\ a^i_{j\underset{3}{|}m} &= a^i_{j,m} + \Gamma^i_{pm} a^p_j - \Gamma^p_{mj} a^i_p, \quad & a^i_{j\underset{4}{|}m} &= a^i_{j,m} + \Gamma^i_{mp} a^p_j - \Gamma^p_{jm} a^i_p. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Takođe, možemo razmatrati kovarijantni izvod u odnosu na simetrični deo koneksije Γ^i_{jk}. Tako imamo

$$a^i_{j;m} = a^i_{j,m} + \Gamma^i_{\underline{pm}} a^p_j - \Gamma^p_{\underline{jm}} a^i_p. \tag{4.1.15}$$

U radu [58] pokazano je da su tenzori $g_{\underline{ij}}$, $g^{\underline{ij}}$, kao i Kronekerov δ-simbol, kovarijantno konstantni u odnosu na sve vrste kovarijantnog diferenciranja, tj. da je njihov kovarijantni izvod jednak nuli.

Napomena 4.1.1. *U Rimanovom prostoru $\mathbb{R}_N$ ($\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = 0$), sve vrste kovarijantnog izvoda iz (4.1.14) svode se na (4.1.15).*

4.2 Geodezijska preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora

Problem geodezijskih preslikavanja Rimanovih prostora vezuje se za Levi-Čivitu (Tulio Levi-Civita, 1873-1941, italijanski matematičar), a proističe iz njegovog proučavanja jednačine dinamike. Godine 1896. on dolazi do osnovne jednačine geodezijskih preslikavanja Rimanovih prostora [52]. Osnove teorije geodezijskih preslikavanja prostora simetrične afine koneksije mogu se naći u monografijama J. Mikeša, V. Kijosaka i A. Vanžurove [57] (Josef Mikeš, češki matematičar, Volodymyr Kiosak, ruski matematičar, Alena Vanžurová, češki matematičar) i N. Sinjukova [79] (Nikolai S. Sinyukov, 1925-1971, ruski matematičar). Teorija geodezijskih preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije zastupljena je u radovima [59, 85, 86, 87, 114].

Osnovne pojmove u vezi sa geodezijskim preslikavanjima generalisanih Rimanovih prostora dajemo prema [59, 87].

Definicija 4.2.1. *Kriva*

$$l : x^i = x^i(t), \quad (i = 1, 2, ..., N) \tag{4.2.1}$$

prostora $\mathbb{GR}_N$ *je* **geodezijska linija** *ako funkcije* $x^i(t)$ *zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina*

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + \Gamma^i_{pq}\lambda^p\lambda^q = \rho(t)\lambda^i(t), \tag{4.2.2}$$

pri čemu je $\lambda^i = dx^i/dt$ *tangentno vektorsko polje, a* $\rho(t)$ *invarijanta.*

Teorema 4.2.1. *[87] Kroz datu tačku prostora* $\mathbb{GR}_N$ *u datom pravcu postoji tačno jedna geodezijska linija.*

Geodezijske linije na površi u $\mathcal{R}^3$ definišu se kao krive na površi čija je geodezijska krivina jednaka nuli u svakoj tački. Takođe, odsečak geodezijske linije između dve tačke na površi je minimalne dužine u odnosu na sve druge krive koje spajaju te dve tačke.

Definicija 4.2.2. Geodezijsko preslikavanje *prostora* $\mathbb{GR}_N$ *na* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *je difeomorfizam* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *pri kome svaka geodezijska linija prostora* $\mathbb{GR}_N$ *prelazi u geodezijsku liniju prostora* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$.

Prostore $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ posmatraćemo u zajedničkom po preslikavanju f, sistemu lokalnih koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$. Tada komponente koneksije prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ u odgovarajućim tačkama $M(x)$ i $\overline{M}(x)$, po preslikavanju f, možemo vezati sledećom relacijom:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk}. \tag{4.2.3}$$

Veličina P^i_{jk} je tenzor i naziva se *tenzor deformacije koneksije* Γ prostora $\mathbb{GR}_N$ pri geodezijskom preslikavanju $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$.

Potreban i dovoljan uslov da preslikavanje f bude geodezijsko (v. [59]) je da tenzor deformacije koneksije P^i_{jk} bude predstavljen u obliku

$$P^i_{jk} = \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j + \xi^i_{jk}, \tag{4.2.4}$$

gde je

$$\psi_i = \frac{1}{1+N} P^p_{\underline{ip}} = \frac{1}{1+N} (\overline{\Gamma}^p_{\underline{ip}} - \Gamma^p_{\underline{ip}}), \tag{4.2.5}$$

$$\xi^i_{jk} = P^i_{\underset{\vee}{jk}} = \overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}. \tag{4.2.6}$$

Uslovi (4.2.4) imaju tenzorski karakter, pa su invarijantni u odnosu na izbor sistema lokalnih koordinata $x^1, x^2, ..., x^N$, zajedničkog po preslikavanju f.

S obzirom na (4.2.3), jednačina (4.2.4) postaje

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j + \xi^i_{jk}. \tag{4.2.7}$$

Veličine ψ_i i ξ^i_{jk} u potpunosti određuju geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{R}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. Očigledno je ξ^i_{jk} antisimetrični tenzor. Takođe, za veličinu ψ_i važi sledeća teorema:

Teorema 4.2.2. *[59] Ako je preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ geodezijsko, onda je*

$$\psi_i = \frac{1}{N+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{\left|\frac{\overline{\underline{g}}}{\underline{g}}\right|}, \tag{4.2.8}$$

pri čemu je $\underline{g} = \det \|g_{\underline{ij}}\|$, $\overline{\underline{g}} = \det \|\overline{g}_{\underline{ij}}\|$.

Kako je u (4.2.8) veličina $\left|\frac{\overline{g}}{\underline{g}}\right|$ invarijanta, to je vektor ψ_i gradijentni.

U radu [59] dokazana je i sledeća teorema koja daje potrebne i dovoljne uslove da preslikavanje generalisanih Rimanovih prostora bude geodezijsko:

Teorema 4.2.3. *a) Preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{R}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je geodezijsko ako i samo ako u zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata Kristofelovi simboli druge vrste zadovoljavaju relaciju* (4.2.7).

b) Ako je preslikavanje f geodezijsko, tada u zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata važe sledeće jednačine

$$\overline{g}_{ij\underset{1}{|}k} - \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{||}k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{kj} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ik} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{jk} \overline{g}_{ip}, \tag{4.2.9}$$

$$\overline{g}_{\underset{2}{ij|k}} - \overline{g}_{\underset{\vee 2}{ij||k}} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{kj} + \psi_j \overline{g}_{ik} + \xi^p_{ki} \overline{g}_{pj} + \xi^p_{kj} \overline{g}_{ip}, \tag{4.2.10}$$

gde je sa (|) *i* (||) *označeno kovarijantno diferenciranje odgovarajuće vrste u prostorima* $\mathbb{GR}_N$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$*, respektivno,* ψ_i *i* ξ^i_{jk} *su dati u (4.2.5) i (4.2.6). Obratno, ako jedna od prethodne dve jednačine važi, tada je preslikavanje* f *geodezijsko i, takođe, važi i druga jednačina.* ■

Jednačine (4.2.9), (4.2.10) predstavljaju uopštenje poznate jednačine Levi-Čivita, koja važi za dva Rimanova prostora.

Definišimo još jednu vrstu preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora.

Definicija 4.2.3. *Preslikavanje* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *naziva se* **konformno** *ako među metričkim tenzorima ta dva prostora postoji veza*

$$\overline{g}_{ij} = \sigma(x) g_{ij}, \tag{4.2.11}$$

gde je σ *funkcija tačke* $x = (x^1, ..., x^N)$*, pri čemu prostore posmatramo u zajedničkom po preslikavanju* f *sistemu lokalnih koordinata. Ukoliko je* $\sigma = const$*, preslikavanje se zove* **homotetija***. Za* $\sigma = 1$*, govori se o* **izometriji***.*

Definicija 4.2.4. *Prostori* $\mathbb{GR}_N$ *i* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *su* **kompatibilni** *ako postoji konformno preslikavanje među njima.*

Napomenimo da konformno presikavanje nije u opštem slučaju geodezijsko. K. Jano je u radu [110] postavio potreban i dovoljan uslov pod kojim se pri konformnom preslikavaju Rimanovih prostora geodezijske linije preslikavaju u geodezijske linije. Takva preslikavanja nazvao je *koncirkularnim.*

4.3 Infinitezimalne deformacije generalisanih Rimanovih prostora

Osnovne pojmove u vezi sa infinitezimalnim deformacijama definisaćemo prema [57] J. Mikeša i dr., uopštavajući slučaj deformacija Rimanovih prostora koji je dat u knjizi, na slučaj generalisanih Rimanovih prostora. Infiitezimlne deformacije Rimanovih prostora i uopštenja javljaju se u radovima [36]-[39][43, 57, 72, 79, 112, 113]. Koncept infinitezimalnih deformacija prostora nesimetrične afine koneksije zastupljen je u knjigama, S. M. Minčića i Lj. S. Velimirović [61], Lj. S. Velimirović [98], kao i u mnogobrojnim radovima citiranih autora, gde je predstavljen preko Liovih izvoda i diferencijala (Marius Sophus Lie, 1842-1899, norveški matematičar).

Neka je $\mathbb{GR}_M$ generalisani Rimanov prostor sa lokalnim koordinatama $y^1, ..., y^M$ i osnovnim metričkim tenzorom $a_{\alpha\beta}$. Jednačine

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, ..., x^N), \quad rang\|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\| = N < M \tag{4.3.1}$$

određuju *potprostor* $\mathbb{GR}_N$ prostora $\mathbb{GR}_M$ ($\mathbb{GR}_N \subset \mathbb{GR}_M$) sa *indukovanom metrikom* g_{ij}. Komponente metričkih tenzora $a_{\alpha\beta}$ i g_{ij} vezane su sledećom relacijom, prema [62],

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \tag{4.3.2}$$

Napomenimo da grčki indeksi $\alpha, \beta, ...$ uzimaju vrednosti $1, ..., M$ i odnose se na prostor $\mathbb{GR}_M$, dok latinski indeksi $i, j, ...$ uzimaju vrednosti $1, ..., N$ i odnose se na potprostor $\mathbb{GR}_N$.

Neka je $\xi^\alpha(x^1, ..., x^N)$ restrikcija na $\mathbb{GR}_N$ nekog vektorskog polja definisanog na generalisanom Rimanovom prostoru $\mathbb{GR}_M$.

Definicija 4.3.1. *Jednačine*

$$\tilde{y}^\alpha = y^\alpha(x^i) + \epsilon\xi^\alpha(x^i), \tag{4.3.3}$$

gde je ϵ dovoljno mali realni parametar, određuju familiju generalisanih Rimanovih potprostora $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ prostora $\mathbb{GR}_M$ koja se naziva **infinitezimalna deformacija (prvog reda)** *prostora $\mathbb{GR}_N$. Polje $\xi^\alpha(x^1, ..., x^N)$ naziva se* **polje infinitezimalne deformacije**.

Definicija 4.3.2. *Neka je $A = A(x^1, ..., x^N)$ geometrijski objekat koji pripada prostoru $\mathbb{GR}_N$ (skalarna funkcija, vektor, tenzor, koneksija,...). Objekat $\tilde{A} = \tilde{A}(x^1, ..., x^N, \epsilon)$ prostora $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ je* **deformisani objekat** *za A, nastao infinitezimalnom deformacijom (4.3.3), ako važi*

$$\tilde{A}(y^\alpha) = A(\tilde{y}^\alpha). \tag{4.3.4}$$

Definicija 4.3.3. *Neka je $A = A(x^1, ..., x^N)$ geometrijski objekat koji pripada prostoru $\mathbb{GR}_N$ i $\tilde{A} = \tilde{A}(x^1, ..., x^N, \epsilon)$ deformisani objekat za A, pri infinitezimalnoj deformaciji (4.3.3). Neka je pri tom*

$$\Delta A = \tilde{A}(x^i, \epsilon) - A(x^i) = \epsilon\delta A + \epsilon^2\delta^2 A + ... + \epsilon^n\delta^n A + ... \tag{4.3.5}$$

Tada koeficijenti δA, $\delta^2 A$,...,$\delta^n A$,... predstavljaju **prvu, drugu, ..., n-tu varijaciju** *geometrijskog objekta A pri infinitezimalnoj deformaciji $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ prostora $\mathbb{GR}_N$.*

Pri razmatranju varijacije objekata prostora $\mathbb{GR}_N$ zanemarićemo članove reda ϵ^k, $k \geq 2$. Na taj način ćemo proučavati samo prvu varijaciju infinitezimalne deformacije prvog reda. U nastavku ćemo izostaviti navođenje reda varijacije i infinitezimalne deformacije, podrazumevajući da je reč o prvoj varijaciji infinitezimalne deformacije prvog reda.

Definicija 4.3.4. *Geometrijski objekat A je* **krut** *u odnosu na infinitezimalnu deformaciju (4.3.3) ukoliko važi $\delta A = 0$. Inače, geometrijski objekat A je* **nekrut** *ili* **fleksibilan**.

Za varijaciju geometrijskih objekata, kao i u slučaju euklidskog prostora, važe određene osobine [61]:

- Varijacija zbira geometrijskih objekata iste vrste jednaka je zbiru varijacija sabiraka;

- Za proizvod i kompoziciju (množenje sa kontrakcijom) geometrijskih objekata važi Lajbnicovo pravilo.

Nađimo varijacije nekih geometrijskih objekata pri infinitezimalnoj deformaciji $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ prostora $\mathbb{GR}_N$, tj. dokažimo sledeće leme.

Lema 4.3.1. *Pri infinitezimalnoj deformaciji* $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ *prostora* $\mathbb{GR}_N \subset \mathbb{GR}_M$ *određenoj jednačinom (4.3.3) važi:*

$$\begin{aligned} &\textbf{a)}\ \delta y^\alpha = \xi^\alpha, \\ &\textbf{b)}\ \delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma, \\ &\textbf{c)}\ \delta g_{ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,j}), \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

gde su $a_{\alpha\beta}$ *i* g_{ij}*, redom, metrika prostora* $\mathbb{GR}_M$ *i indukovana metrika potprostora* $\mathbb{GR}_N$*.*

Dokaz. Iz (4.3.3) jasno je da važi **a)**.

Takođe, važi

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}(y^\gamma) = a_{\alpha\beta}(\tilde{y}^\gamma) = a_{\alpha\beta}(y^\gamma + \epsilon\xi^\gamma) = a_{\alpha\beta}(y^\gamma) + \epsilon\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma + \dots$$

primenom (4.3.4) i Tejlorove formule (Brook Taylor, 1685-1731, engleski matematičar). Dakle, važi **b)**.

Primenom (4.3.2) dobijamo

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} =& \delta(a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j}) = \delta a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta}\delta y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i}\delta y^\beta_{,j} \\ =& \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,j}), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

pri čemu smo iskoristili **a)**, **b)** i Lajbnicovo pravilo. ■

Lema 4.3.2. *Pri infinitezimalnoj deformaciji* $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ *prostora* $\mathbb{GR}_N \subset \mathbb{GR}_M$ *određenoj jednačinom (4.3.3) važi:*

$$\delta g^{\underline{ij}} = -\delta g_{\underline{pq}} g^{\underline{ip}} g^{\underline{jq}}, \tag{4.3.8}$$

gde je $g^{\underline{ij}}$ *simetrični deo kontravarijantnog metričkog tenzora prostora* $\mathbb{GR}_N$*.*

Dokaz. Važi

$$
\begin{aligned}
\tilde g^{\underline{ip}}\tilde g_{\underline{pk}} = \delta^i_k &\Rightarrow (g^{\underline{ip}} + \epsilon\,\delta g^{\underline{ip}})(g_{\underline{pk}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{pk}}) = \delta^i_k \\
&\Rightarrow \overbrace{g^{\underline{ip}} g_{\underline{pk}}}^{\delta^i_k} + \epsilon(\delta g^{\underline{ip}}\, g_{\underline{pk}} + g^{\underline{ip}}\,\delta g_{\underline{pk}}) + \epsilon^2 \ldots = \delta^i_k \\
&\Rightarrow \delta g^{\underline{ip}}\, g_{\underline{pk}} + g^{\underline{ip}}\,\delta g_{\underline{pk}} = 0 \,\Big|\, \cdot g^{\underline{jk}} \\
&\Rightarrow \delta g^{\underline{ij}} = -\delta g_{\underline{pq}}\, g^{\underline{ip}} g^{\underline{jq}},
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

posle zamene nemog indeksa k sa q. ■

Lema 4.3.3. *Pri infinitezimalnoj deformaciji $\tilde{\mathbb{GR}}_N$ prostora $\mathbb{GR}_N \subset \mathbb{GR}_M$ određenoj jednačinom (4.3.3), za kovarijantno diferenciranje tenzora $a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}$ važi:*

$$
\textbf{a)}\ (\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m})\underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|}k = \delta(a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|}k), \qquad \textbf{b)}\ a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{||}k - a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|}k = O(\epsilon),
\tag{4.3.10}
$$

gde $(|)$ i $(||)$ predstavljaju kovarijantno diferenciranje odgovarajuće vrste u prostorima $\mathbb{GR}_N$ i $\tilde{\mathbb{GR}}_N$, respektivno.

Dokaz. a) Kako je

$$
\tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m} = a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \epsilon\,\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m},
\tag{4.3.11}
$$

to je

$$
\tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k = a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k + \epsilon\,(\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m})\underset{1}{|}k.
\tag{4.3.12}
$$

Sa druge strane je

$$
\tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k = a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k + \epsilon\,\delta(a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k).
\tag{4.3.13}
$$

Upoređivanjem (4.3.12) i (4.3.13), dobijamo (4.3.10,a).
b) Važi

$$
\begin{aligned}
\tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{||}k &= \tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m},_k + \tilde\Gamma^{i_1}_{pk}\tilde a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \ldots + \tilde\Gamma^{i_n}_{pk}\tilde a^{i_1\dots i_{n-1}p}_{j_1\dots j_m} - \tilde\Gamma^{p}_{j_1k}\tilde a^{i_1\dots i_n}_{pj_2\dots j_m} - \ldots - \tilde\Gamma^{p}_{j_mk}\tilde a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1}p} \\
&= (a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m},_k + \epsilon\,\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m},_k) + (\Gamma^{i_1}_{pk} + \epsilon\,\delta\Gamma^{i_1}_{pk})(a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \epsilon\,\delta a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m}) + \ldots + \\
&+ (\Gamma^{i_n}_{pk} + \epsilon\,\delta\Gamma^{i_n}_{pk})(a^{i_1\dots i_{n-1}p}_{j_1\dots j_m} + \epsilon\,\delta a^{i_1\dots i_{n-1}p}_{j_1\dots j_m}) - (\Gamma^{p}_{j_1k} + \epsilon\,\delta\Gamma^{p}_{j_1k})(a^{i_1\dots i_n}_{pj_2\dots j_m} + \epsilon\,\delta a^{i_1\dots i_n}_{pj_2\dots j_m}) - \ldots - \\
&- (\Gamma^{p}_{j_mk} + \epsilon\,\delta\Gamma^{p}_{j_mk})(a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1}p} + \epsilon\,\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1}p}) \\
&= a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k + \epsilon(\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m,k} + \delta\Gamma^{i_1}_{pk}a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \Gamma^{i_1}_{pk}\delta a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \ldots - \delta\Gamma^{p}_{j_mk}a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1p}} - \Gamma^{p}_{j_mk}\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1p}}) \\
&= a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k + \epsilon(\delta a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_m}\underset{1}{|}k + \delta\Gamma^{i_1}_{pk}a^{pi_2\dots i_n}_{j_1\dots j_m} + \ldots - \delta\Gamma^{p}_{j_mk}a^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_{m-1p}})
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

Dakle,

$$a^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}\underset{1}{\|}k - a^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}\underset{1}{|}k = \epsilon(\delta\Gamma^{i_1}_{pk}a^{pi_2\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m} + \ldots - \delta\Gamma^{p}_{j_m k}a^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_{m-1}p} + \delta a^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}\underset{1}{|}k - \delta a^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}\underset{1}{\|}k) \quad (4.3.15)$$

odnosno, tražena razlika je beskonačno mala veličina reda ϵ.

Analogno se pokazuje za ostale vrste kovarijantnog diferenciranja. ■

4.4 Infinitezimalne geodezijske deformacije prostora $\mathbb{GR}_N$

Zadavanjem različitih specijalnih uslova, dobijamo različite vrste infinitezimalnih deformacija. Tako, na primer, infinitezimalna deformacija (4.3.3) naziva se *afina infinitezimalna deformacija* ukoliko je varijacija Kristofelovih simbola druge vrste jednaka nuli, tj. ukoliko su Kristofelovi simboli druge vrste kruti. U slučaju krutosti metričkog tenzora, odnosno rastojanja između tačaka prostora, govorimo o *infinitezimalnoj izometriji* ili *infinitezimalnom kretanju* ili *infinitezimalnom (beskonačno malom) savijanju.* Ukoliko je $\delta g_{ij} = \sigma(x)g_{ij}$, govorimo o *infinitezimalnoj konformnoj deformaciji*, dok u slučaju $\sigma(x) = const$ govorimo o *homotetiji.*

U nastavku ćemo proučavati specijalnu vrstu infinitezimalnih deformacija, tzv. infinitezimalne geodezijske deformacije.

Definicija 4.4.1. *Infinitezimalna deformacija generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ naziva se* **infinitezimalna geodezijska deformacija** *ako čuva geodezijske linije prostora $\mathbb{GR}_N$, tj. ako svaka geodezijska linija prostora $\mathbb{GR}_N$ prelazi u geodezijsku liniju deformisanog prostora.*

Dakle, infinitezimalne geodezijske deformacije su takve deformacije prostora pri kojima se geodezijska linija slika u krivu koja aproksimira geodezijsku liniju, sa datom preciznošću. Imajući u vidu moguće realne situacije i njihove eventualne matematičke modele, ovakav pristup je prikladniji za razne primene od standardnog u kome geodezijska linija prelazi u geodezijsku. Na primer, za simuliranje realnih fizičkih situacija kada se razmatraju gravitaciona i elektromagnetna polja, mehanički sistemi itd. ovakve deformacije imaju smisla.

Teorija infinitezimalnih geodezijskih deformacija Rimanovih prostora zastupljena je u radovima [36, 37, 38, 39, 57]. Infinitezimalne geodezijske deformacije površi proučavane su u radovima [31, 34, 80].

4.4.1 Potrebni i dovoljni uslovi za geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$

U Teoremi 4.2.3 dati su potrebni i dovoljni uslovi da preslikavanje dva generalisana Rimanova prostora bude geodezijsko. Ovde ćemo dati njihov ekvivalent, koji predstavlja znatno jednostavniji zapis uslova (4.2.9) i (4.2.10).

Teorema 4.4.1. *Preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je geodezijsko ako i samo ako u zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata osnovni metrički tenzor prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ zadovoljava relaciju*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}=2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}+\xi^p_{ik}\overline{g}_{\underline{pj}}+\xi^p_{jk}\overline{g}_{\underline{ip}}, \tag{4.4.1}$$

gde je $(\underset{1}{|})$ *kovarijantno diferenciranje prve vrste u prostoru* $\mathbb{GR}_N$.

Dokaz. ($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da je preslikavanje $f:\mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ geodezijsko. Na osnovu Teoreme 4.2.3 *a* sledi veza

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\xi^i_{jk}. \tag{4.4.2}$$

Iz definicije kovarijantnog diferenciranja (4.1.14) i jednačine (4.4.2) dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k}-\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{||}k}&=\overline{g}_{\underset{\vee}{ij},k}-\Gamma^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}-\Gamma^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}-\overline{g}_{\underset{\vee}{ij},k}+\overline{\Gamma}^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}+\overline{\Gamma}^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}\\&=(\overline{\Gamma}^p_{ik}-\Gamma^p_{ik})\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}+(\overline{\Gamma}^p_{jk}-\Gamma^p_{jk})\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}\\&=(\delta^p_i\psi_k+\delta^p_k\psi_i+\xi^p_{ik})\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}+(\delta^p_j\psi_k+\delta^p_k\psi_j+\xi^p_{jk})\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}\\&=2\psi_k\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underset{\vee}{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underset{\vee}{ik}}+\xi^p_{ik}\overline{g}_{\underset{\vee}{pj}}+\xi^p_{jk}\overline{g}_{\underset{\vee}{ip}}.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Ako zamenimo $\overline{g}_{\underset{\vee}{ij}\underset{1}{|}k}$ iz (4.4.3) u (4.2.9), dobijamo traženu jednačinu (4.4.1).

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da jednačina (4.4.1) važi. Kako je u $\mathbb{GR}_N$ zadovoljeno $g_{\underline{ij}\underset{\theta}{|}k}=0$, $\theta=1,\dots,4$, primenom definicije kovarijantog izvoda imamo

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}-\overbrace{\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{||}k}}^{0}=(\overline{\Gamma}^p_{ik}-\Gamma^p_{ik})\overline{g}_{\underline{pj}}+(\overline{\Gamma}^p_{jk}-\Gamma^p_{jk})\overline{g}_{\underline{ip}}. \tag{4.4.4}$$

Sa druge strane iz (4.4.1) je

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}&=2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}+\xi^p_{ik}\overline{g}_{\underline{pj}}+\xi^p_{jk}\overline{g}_{\underline{ip}}\\&=(\psi_i\delta^p_k+\psi_k\delta^p_i+\xi^p_{ik})\overline{g}_{\underline{pj}}+(\psi_j\delta^p_k+\psi_k\delta^p_j+\xi^p_{jk})\overline{g}_{\underline{ip}}.\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Iz jednačina (4.4.4) i (4.4.5) uporedjivanjem zaključujemo da važi (4.2.7), tj. preslikavanje je geodezijsko. ■

Lako se pokazuje da važi i

Teorema 4.4.2. *Preslikavanje f generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$ na generalisani Rimanov prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ je geodezijsko ako i samo ako u zajedničkom po preslikavanju f lokalnom sistemu koordinata osnovni metrički tenzor prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ zadovoljava relaciju*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k}=2\psi_k\overline{g}_{\underline{ij}}+\psi_i\overline{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\overline{g}_{\underline{ik}}+\xi^p_{ki}\overline{g}_{\underline{pj}}+\xi^p_{kj}\overline{g}_{\underline{ip}}, \tag{4.4.6}$$

gde je $(\underset{2}{|})$ kovarijantno diferenciranje druge vrste u prostoru $\mathbb{GR}_N$. ■

U vezi sa prethodnim izlaganjem navodimo osnovnu jednačinu teorije geodezijskih preslikavanja Rimanovih prostora, do koje je došao N. S. Sinjukov u radu [78].

Teorema 4.4.3. *Da bi Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$ dopuštao netrivijalno geodezijsko preslikavanje, potrebno je i dovoljno, da postoji u njemu nesingularni simetrični tenzor a_{ij}, koji zadovoljava uslov*

$$a_{ij;k}=\lambda_i g_{jk}+\lambda_j g_{ik}, \tag{4.4.7}$$

pri nekom gradijentnom vektoru $\lambda_i\neq 0$. ■

U nastavku dajemo uopštenje prethodne teoreme koje važi kod generalisanih Rimanovih prostora, tj. dokazujemo sledeću teoremu:

Teorema 4.4.4. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao netrivijalno geodezijsko preslikavanje na njemu kompatibilan prostor, potrebno je i dovoljno da postoji u njemu nesingularni simetrični tenzor a_{ij}, koji zadovoljava uslov*

$$a_{ij\underset{1}{|}k}=\lambda_i g_{\underline{jk}}+\lambda_j g_{\underline{ik}}+\mu^p_{ik}g_{\underline{pj}}+\mu^p_{jk}g_{\underline{pi}}, \tag{4.4.8}$$

pri nekom gradijentnom vektoru $\lambda_i\neq 0$ i antisimetričnom tenzoru μ^i_{jk}, za koji važi $\mu^i_{ij}=\mu^i_{ji}=0$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje. Tada važi jednakost (4.4.1) pri čemu je ψ_k gradijentni vektor koji zadovoljava (4.2.8).

Kako je vektor ψ_k gradijent, tj. $\psi_k=\frac{\partial\psi}{\partial x^k}$, možemo uvesti veličinu

$$\tilde{g}_{ij}=e^{-2\psi}\bar{g}_{ij}. \tag{4.4.9}$$

Posle kovarijantnog diferenciranja prve vrste simetričnog dela ove jednakosti u $\mathbb{GR}_N$, tj.

$$\tilde{g}_{\underline{ij}}=e^{-2\psi}\bar{g}_{\underline{ij}}, \tag{4.4.10}$$

uz uslov (4.4.1) imamo

$$\tilde{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}=\psi_i\tilde{g}_{\underline{kj}}+\psi_j\tilde{g}_{\underline{ik}}+\xi^p_{ik}\tilde{g}_{\underline{pj}}+\xi^p_{jk}\tilde{g}_{\underline{ip}}. \tag{4.4.11}$$

Pošto je tenzor $\bar{g}_{\underline{ij}}$ nesingularan, tj. $\det\|\bar{g}_{\underline{ij}}\| \neq 0$, formula (4.4.10) pokazuje da je i $\tilde{g}_{\underline{ij}}$ nesingularan. Označimo element matrice, inverzne matrici $\|\tilde{g}_{\underline{ij}}\|$, sa $\tilde{g}^{\underline{kl}}$. Važiće

$$\tilde{g}_{\underline{i\alpha}}\,\tilde{g}^{\underline{\alpha j}} = \delta_i^j. \tag{4.4.12}$$

Diferencirajmo ovu jednakost kovarijantno u $\mathbb{GR}_N$. Dobićemo

$$\tilde{g}_{\underline{i\alpha}\underset{1}{|}k}\,\tilde{g}^{\underline{\alpha j}} + \tilde{g}_{\underline{i\alpha}}\,\tilde{g}^{\underline{\alpha j}}{}_{\underset{1}{|}k} = 0.$$

Pomnoživši datu jednakost sa $\tilde{g}^{\underline{i\beta}}$ i iskoristivši (4.4.12), uz promenu odgovarajućih nemih indekasa, dobijamo

$$\tilde{g}^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|}k} = -\tilde{g}_{\underline{\alpha\beta}\underset{1}{|}k}\tilde{g}^{\underline{\alpha i}}\tilde{g}^{\underline{\beta j}}. \tag{4.4.13}$$

U poređenju sa (4.4.11) to daje

$$\tilde{g}^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|}k} = -\psi_\alpha\tilde{g}^{\underline{\alpha i}}\delta_k^j - \psi_\beta\tilde{g}^{\underline{\beta j}}\delta_k^i - \xi^j_{\alpha k}\tilde{g}^{\underline{\alpha i}} - \xi^i_{\beta k}\tilde{g}^{\underline{\beta j}}. \tag{4.4.14}$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\lambda^i = -\psi_\alpha\tilde{g}^{\underline{\alpha i}}, \quad \mu_k^{pi} = -\xi^p_{\alpha k}\tilde{g}^{\underline{\alpha i}}, \tag{4.4.15}$$

dobićemo

$$\tilde{g}^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|}k} = \lambda^i\delta_k^j + \lambda^j\delta_k^i + \mu_k^{ji} + \mu_k^{ij}. \tag{4.4.16}$$

Spustimo indekse i i j u $\mathbb{GR}_N$ u (4.4.16), dobićemo

$$\tilde{g}^{\underline{ij}}{}_{\underset{1}{|}k}g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}} = \lambda^i\delta_k^j g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}} + \lambda^j\delta_k^i g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}} + \mu_k^{ji}g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}} + \mu_k^{ij}g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}}. \tag{4.4.17}$$

Iskoristimo

$$a_{\alpha\beta} = \tilde{g}^{\underline{ij}}g_{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\beta}} \quad \lambda_i = g_{\underline{i\alpha}}\lambda^\alpha, \quad \mu^i_{jk} = g_{\underline{j\alpha}}\mu_k^{i\alpha}, \tag{4.4.18}$$

dobijamo

$$a_{\alpha\beta\underset{1}{|}k} = \lambda_\alpha g_{\underline{k\beta}} + \lambda_\beta g_{\underline{k\alpha}} + \mu^p_{\alpha k}g_{\underline{p\beta}} + \mu^p_{\beta k}g_{\underline{p\alpha}}. \tag{4.4.19}$$

Očigledno, a_{ij} je nesingularni simetrični tenzor, λ_i kovarijantni vektor, μ^i_{jk} tenzor.

Iz (4.4.10), (4.4.15) i (4.4.18) za a_{ij}, λ_i i μ^i_{jk} zaključujemo, pošto su izraženi preko metričkih tenzora prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ pri geodezijskom preslikavanju f:

$$a_{\underline{ij}} = e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underline{\alpha i}}g_{\underline{\beta j}}, \quad \lambda_i = -e^{2\psi}\psi_\alpha\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underline{i\beta}}, \quad \mu^i_{jk} = -\xi^i_{\beta k}e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underline{j\alpha}}. \tag{4.4.20}$$

Tenzor μ^i_{jk} je antisimetričan. Zaista, kako su prostori $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ kompatibilni, za njihove metrike važi $\overline{g}_{ij} = \sigma g_{ij}$. Na osnovu toga i (4.4.20) imamo

$$\mu^i_{jk} = -\xi^i_{\beta k}e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underline{j\alpha}} = -\xi^i_{\beta k}e^{2\psi}\frac{1}{\sigma}g^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underline{j\alpha}} = -\frac{1}{\sigma}e^{2\psi}\xi^i_{jk}.$$

Takođe je $\mu^p_{pk} = \mu^p_{kp} = 0$, jer je $\xi^p_{pk} = \xi^p_{kp} = \overline{\Gamma}^p_{\underset{\vee}{kp}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{kp}} = 0$, prema (4.1.13).

Pomnožimo sada (4.4.19) sa $g^{\underline{\alpha\beta}}$, dobićemo

$$(a_{\alpha\beta}g^{\underline{\alpha\beta}})_{\underset{1}{|}k} = 2(\lambda_k + \mu^p_{pk}) = 2\lambda_k. \tag{4.4.21}$$

Odavde zaključujmo da je λ_k gradijent, pri čemu se iz (4.4.20) vidi da je $\lambda_i \neq 0$ pri $\psi_i \neq 0$ i obratno. Na taj način, ako prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje, tada postoji nesingularni simetrični tenzor a_{ij}, koji zadovoljava jednakost (4.4.19) pri nekom gradijentnom vektoru $\lambda_i \neq 0$ i antisimetričnom tenzoru μ^i_{jk}, $\mu^i_{ik} = \mu^i_{ki} = 0$.

Pokažimo obratno tvrđenje. Podignimo u (4.4.19) indekse α i β u $\mathbb{GR}_N$. Tada utvrđujemo, u saglasnosti sa (4.4.18) da za tenzor

$$\tilde{g}^{\underline{ij}} = a_{\alpha\beta}g^{\underline{\alpha i}}g^{\underline{\beta j}} \tag{4.4.22}$$

važi jednakost (4.4.16), pri $\lambda_i = \lambda_\alpha g^{\underline{\alpha i}}$, $\mu^{ij}_k = \mu^i_{\alpha k}g^{\underline{\alpha j}}$, pri čemu je tenzor $\tilde{g}^{\underline{ij}}$ simetričan i nesingularan. No tada za element $\tilde{g}_{\underline{ij}}$ inverzne matrice važi uslov (4.4.11) pri $\psi_i = -\lambda^\alpha \tilde{g}_{\underline{\alpha i}}$, $\xi^p_{jk} = -\mu^{p\alpha}_k \tilde{g}_{\underline{\alpha j}}$.

Pomnoživši (4.4.19) sa $g^{\underline{\alpha\beta}}$ dobijamo (4.4.21), pošto je $\mu^p_{pk} = 0$ po pretpostavci. Kako je λ_k gradijentni vektor, može se predstaviti kao izvod funkcije

$$\lambda = a_{\alpha\beta}g^{\underline{\alpha\beta}}. \tag{4.4.23}$$

Odavde je

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{N}g_{\underline{\alpha\beta}}, \tag{4.4.24}$$

pa se primenom prethodne jednačine i (4.4.22) dobija $\tilde{g}^{\underline{ij}} = \frac{\lambda}{N}g^{\underline{ij}}$, odnosno

$$\tilde{g}_{\underline{ij}} = \frac{N}{\lambda}g_{\underline{ij}}. \tag{4.4.25}$$

Korišćenjem ove jednakosti, lako se pokazuje da je ξ^i_{jk} antisimetričan tenzor za koji važi $\xi^i_{ik} = \xi^i_{ki} = 0$.

Dalje, tenzor $\tilde{g}_{ij} = \frac{N}{\lambda}g_{ij}$ možemo posmatrati kao metrički tenzor nekog generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{G}\tilde{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$. Za Kristofelov simbol druge vrste $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ tog prostora imamo, prema (4.1.12),

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha k} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{k\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{|\underline{\tilde{g}}|}, \quad \underline{\tilde{g}} = \det\|\tilde{g}_{\underline{ij}}\|. \tag{4.4.26}$$

Prema (4.1.7) važi

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha k} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\tilde{g}_{\alpha\beta,k}. \tag{4.4.27}$$

Kako je $\tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\tilde{g}_{\alpha\beta,k} = \tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\tilde{g}_{\beta\alpha,k}$, to je $\tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\tilde{g}_{\underset{\vee}{\alpha\beta},k} = 0$, pa se prethodna jednačina svodi na

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha k} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\tilde{g}_{\underline{\alpha\beta},k}. \tag{4.4.28}$$

Iskoristimo (4.4.11) i definiciju kovarijantnog izvoda prve vrste, dobićemo

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha k} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\underline{\alpha\beta}}\big(\Gamma^{p}_{\alpha k}\tilde{g}_{\underline{p\beta}} + \Gamma^{p}_{\beta k}\tilde{g}_{\underline{p\alpha}} + \psi_\alpha\tilde{g}_{\underline{k\beta}} + \psi_\beta\tilde{g}_{\underline{k\alpha}} + \xi^{p}_{\alpha k}\tilde{g}_{\underline{p\beta}} + \xi^{p}_{\beta k}\tilde{g}_{\underline{p\alpha}}\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\Gamma^{p}_{\alpha k}\delta^{\alpha}_{p} + \Gamma^{p}_{\beta k}\delta^{\beta}_{p} + \psi_\alpha\delta^{\alpha}_{k} + \psi_\beta\delta^{\beta}_{k} + \xi^{p}_{\alpha k}\delta^{\alpha}_{p} + \xi^{p}_{\beta k}\delta^{\beta}_{p}\big)\\ &= \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} + \psi_k,\end{aligned} \tag{4.4.29}$$

posle korišćenja $\xi^{p}_{pk} = 0$ i zamene nemih indekasa. Dakle,

$$\psi_k = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha k} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{|\tilde{\underline{g}}|} - \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{|\underline{g}|} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{\left|\frac{\tilde{\underline{g}}}{\underline{g}}\right|}, \tag{4.4.30}$$

a to znači da je ψ_k gradijentni vektor, tj $\psi_k = \frac{\partial\psi}{\partial x^k}$. No tada za tenzor

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi}\tilde{g}_{ij} \tag{4.4.31}$$

iz (4.4.11) očigledno važi uslov (4.4.1). Odgovarajući prostori $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ su kompatibilni, i važi $\overline{g}_{ij} = \frac{N}{\lambda}e^{2\psi}g_{ij}$. Dakle, teorema je dokazana. ■

Analogno pokazujemo i sledeću teoremu:

Teorema 4.4.5. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao netrivijalno geodezijsko preslikavanje na njemu kompatibilan prostor, potrebno je i dovoljno da postoji u njemu nesingularni simetrični tenzor a_{ij}, koji zadovoljava uslov*

$$a_{ij\underset{2}{|}k} = \lambda_i g_{\underline{jk}} + \lambda_j g_{\underline{ik}} + \mu^{p}_{ki}g_{\underline{pj}} + \mu^{p}_{kj}g_{\underline{pi}}, \tag{4.4.32}$$

pri nekom gradijentnom vektoru $\lambda_i \neq 0$ i antisimetričnom tenzoru μ^{i}_{jk} za koji važi $\mu^{i}_{ij} = \mu^{i}_{ji} = 0$. ■

4.4.2 Potrebni i dovoljni uslovi za infinitezimalnu geodezijsku deformaciju prostora $\mathbb{GR}_N$

U svom radu [36] M. L. Gavrilčenko daje potreban i dovoljan uslov da Rimanov prostor dopušta infinitezimalnu geodezijsku deformaciju, tj. pokazuje sledeću teoremu:

Teorema 4.4.6. *Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$ dopušta infinitezimalnu geodezijsku deformaciju ako i samo ako u njemu postoji simetrični tenzor h_{ij} tako da važi*

$$h_{ij;k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}, \tag{4.4.33}$$

pri čemu je ψ_i gradijentni vektor. ■

U nastavku dajemo uopštenje ove teoreme koje važi u slučaju generalisanih Rimanovih prostora.

Teorema 4.4.7. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao infinitezimalnu geodezijsku deformaciju, potrebno je i dovoljno da važi*

$$\delta g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}, \tag{4.4.34}$$

za gradijentni vektor ψ_i i antisimetrični tenzor ξ^i_{jk}, $\xi^i_{ik} = \xi^i_{ki} = 0$.

Dokaz. Neka je zadata geodezijska deformacija prostora $\mathbb{GR}_N$ jednačinom

$$\tilde{y}^\alpha = y^\alpha(x^i) + \epsilon z^\alpha(x^i), \tag{4.4.35}$$

gde je ϵ dovoljno mali realni parametar. Jednačine (4.4.35) definišu deformisani prostor $\mathbb{G}\tilde{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$ koji predstavlja infinitezimalnu deformaciju prostora $\mathbb{GR}_N$. Očigledno, $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\tilde{\mathbb{R}}_{\mathbb{N}}$, u odnosu na opšti koordinatni sistem (x^i), dopuštaju geodezijsko preslikavanje jednog na drugi, pa važi jednakost Levi-Čivita (4.4.1):

$$\tilde{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \tilde{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \tilde{g}_{\underline{kj}} + \psi_j \tilde{g}_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} \tilde{g}_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} \tilde{g}_{\underline{ip}}, \tag{4.4.36}$$

gde je ξ^i_{jk} antisimetrični deo tenzora deformacije, a ψ_i gradijentni vektor definisan funkcijom

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \Big|\frac{\tilde{\underline{g}}}{\underline{g}}\Big|, \quad \underline{g} = \det \|g_{\underline{ij}}\|, \quad \tilde{\underline{g}} = \det \|\tilde{g}_{\underline{ij}}\|. \tag{4.4.37}$$

Odavde je

$$2(n+1)\psi = \ln \Big|\frac{\tilde{\underline{g}}}{\underline{g}}\Big| = \ln \Big|1 + \frac{\delta \underline{g}}{\underline{g}}\,\epsilon\Big| = \ln \Big(1 + \frac{\delta \underline{g}}{\underline{g}}\,\epsilon\Big) = \frac{\epsilon \delta \underline{g}}{\underline{g}} + \dots \tag{4.4.38}$$

jer je $\tilde{\underline{g}} = \underline{g} + \epsilon \delta \underline{g}$, tako da možemo ψ_i u (4.4.36) zameniti sa $\epsilon\psi_i$. Takođe je

$$\xi^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} + \epsilon\, \delta\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \epsilon\, \delta\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}, \tag{4.4.39}$$

pa ξ^i_{jk} možemo zameniti sa $\epsilon\xi^i_{jk}$. Dakle,

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} &= \epsilon[2\psi_k(g_{\underline{ij}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ij}}) + \psi_i(g_{\underline{kj}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{kj}}) + \psi_j(g_{\underline{ik}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ik}}) + \xi^p_{ik}(g_{\underline{pj}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{pj}}) + \xi^p_{jk}(g_{\underline{ip}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ip}})] \\ &= \epsilon(2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}) + \epsilon^2 \ldots\end{aligned} \tag{4.4.40}$$

Kako je

$$\tilde{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = \overbrace{g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}}^{0} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = \epsilon\,\delta g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}, \tag{4.4.41}$$

zaključujemo

$$\delta g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}. \tag{4.4.42}$$

Pokažimo obrat teoreme, tj. neka $\tilde{g}_{\underline{ij}} = g_{\underline{ij}} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ij}}$ zadovoljava jedankost (4.4.34).
Kako je $\epsilon\tilde{g}_{\underline{ij}} = \epsilon g_{\underline{ij}} + \epsilon^2\,\delta g_{\underline{ij}}$, to možemo $\epsilon g_{\underline{ij}}$ zameniti sa $\epsilon\tilde{g}_{\underline{ij}}$, pa imamo

$$\overbrace{g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k}}^{0} + \epsilon\,\delta g_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = \epsilon(2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}), \tag{4.4.43}$$

tj.

$$\tilde{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \tilde{g}_{\underline{ij}} + \psi_i \tilde{g}_{\underline{kj}} + \psi_j \tilde{g}_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} \tilde{g}_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} \tilde{g}_{\underline{ip}}, \tag{4.4.44}$$

dakle, deformacija je geodezijska. ■

Jasno je da važi i sledeća teorema:

Teorema 4.4.8. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao infinitezimalnu geodezijsku deformaciju, potrebno je i dovoljno da važi*

$$\delta g_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} = 2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ki} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{kj} g_{\underline{ip}}, \tag{4.4.45}$$

za gradijentni vektor ψ_i i antisimetrični tenzor ξ^i_{jk}, $\xi^i_{ik} = \xi^i_{ki} = 0$. ■

Zbog pogodnosti, označićemo simetrični tenzor $\delta g_{\underline{ij}}$ sa h_{ij}. Tako imamo:

Teorema 4.4.9. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao infinitezimalnu geodezijsku deformaciju, potrebno je i dovoljno da postoji u njemu simetrični tenzor h_{ij}, tako da važi*

$$h_{ij\underset{1}{|}k} = 2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}, \tag{4.4.46}$$

za gradijentni vektor ψ_i i antisimetrični tenzor ξ^i_{jk}, $\xi^i_{ik} = \xi^i_{ki} = 0$. ■

Teorema 4.4.10. *Da bi generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopuštao infinitezimalnu geodezijsku deformaciju, potrebno je i dovoljno da postoji u njemu simetrični tenzor h_{ij}, tako da važi*

$$h_{ij\underset{2}{|}k} = 2\psi_k g_{\underline{ij}} + \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ki} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{kj} g_{\underline{ip}}, \tag{4.4.47}$$

za gradijentni vektor ψ_i i antisimetrični tenzor ξ^i_{jk}, $\xi^i_{ik} = \xi^i_{ki} = 0$. ■

Sada možemo dokazati teoremu koja daje potrebne i dovoljne uslove da prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalnu geodezijsku deformaciju.

Teorema 4.4.11. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalnu geodezijsku deformaciju ako i samo ako dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na njemu kompatibilan prostor.*

Dokaz. ($\Rightarrow$:) Neka prostor $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalnu geodezijsku deformaciju. Uslov (4.4.46), pri čemu je $\psi_k \neq 0$, možemo zapisati kao

$$(h_{ij} - 2\psi g_{\underline{ij}})_{\underset{1}{|}k} = \psi_i g_{\underline{kj}} + \psi_j g_{\underline{ik}} + \xi^p_{ik} g_{\underline{pj}} + \xi^p_{jk} g_{\underline{ip}}, \tag{4.4.48}$$

tj. u $\mathbb{GR}_N$ postoji tenzor $a_{ij} = h_{ij} - 2\psi g_{\underline{ij}}$ koji zadovoljava jednačinu (4.4.8) za $\lambda_i = \psi_i$ i $\mu^i_{jk} = \xi^i_{jk}$. Dakle, $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalnu geodezijsku deformaciju na njemu kompatibilan prostor.

($\Leftarrow$:) Obratno, tenzor $h_{ij} = a_{ij} + 2\lambda g_{\underline{ij}}$, gde je a_{ij} rešenje jednačine (4.4.8), zadovoljava uslov (4.4.46), pa $\mathbb{GR}_N$ dopušta netrivijalnu geodezijsku deformaciju prema Teoremi 4.4.9. ■

Odgovarajuća teorema koja važi za Rimanove prostore prve klase dokazana je prvi put godine 1971. u radu [80]. Takođe, prema [57, 79], sledeći Rimanovi prostori ne dopuštaju netrivijalne geodezijske deformacije: simetrični prostori, rekurentni prostori, dvaput simetrični prostori, dvaput rekurentni prostori, m-rekurentni prostori i polusimetrični prostori nekonstantne krivine. Sa druge strane, postoje geodezijske deformacije Rimanovih prostora konstantne krivine i ekvidistantnih prostora. U euklidskom prostoru $\mathcal{R}^3$, samo Liuvilove površi (Joseph Liouville, 1809-1882, francuski matematičar) dopuštaju geodezijske deformacije. (Za definicije navedenih pojmova videti [57, 79].)

4.4.3 Infinitezimalne geodezijske deformacije ekvidistantnih generalisanih Rimanovih prostora

Definišimo ekvidistantne Rimanove prostore prema [77, 79]:

Definicija 4.4.2. *Rimanov prostor $\mathbb{R}_N$ sa simetričnim osnovnim metričkim tenzorom g_{ij} naziva se* **ekvidistantan**, *ako u njemu postoji vektorsko polje $\varphi_i \neq 0$, čiji je kovarijantni izvod proporcionalan metričkom tenzoru, tj. koji zadovoljava jednačinu*

$$\varphi_{i;j} = \rho g_{ij}, \tag{4.4.49}$$

pri čemu je ρ neka funkcija. Za $\rho \neq 0$ ekvidistantni prostor pripada **osnovnom tipu**, *a za $\rho \equiv 0$* **posebnom**.

Očigledno, φ_i je gradijent, tako da u $\mathbb{R}_N$ određuje normalnu kongruenciju koja se naziva *ekvidistantna* (više o tome može se videti u [79]). Rimanovi prostori definisani uslovom (4.4.49) pručavani su u radovima [32, 56, 77, 110]. Vektorsko polje, snabdeveno uslovom (4.4.49), K. Jano naziva *koncirkularnim* [110].

Sada ćemo, analogno prethodnoj definiciji, definisati ekvidistantne generalisane Rimanove prostore.

Definicija 4.4.3. *Generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ sa nesimetričnim osnovnim metričkim tenzorom g_{ij} naziva se* **ekvidistantan prostor**, *ako u njemu postoji vektorsko polje $\varphi_i \neq 0$, za koje važi*

$$\varphi_{i;j} = \rho g_{\underline{ij}}, \tag{4.4.50}$$

gde $(;)$ označava kovarijantni izvod u odnosu na simetrični deo koneksije, $\Gamma^i_{\underline{jk}}$, ρ je neka funkcija. Za $\rho \neq 0$ ekvidistantni prostor pripada **osnovnom tipu**, *a za $\rho \equiv 0$* **posebnom**.

Možemo zaključiti da je generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ ekvidistantan ako i samo ako je njegov pridruženi Rimanov prostor $\mathbb{R}^0_N$ ekvidistantan.

Uslov (4.4.50) znači da je kovarijantni izvod od φ_i (označen sa (;), (4.1.15)) proporcionalan simetričnom delu osnovnog metričkog tenzora prostora $\mathbb{GR}_N$. Očigledno je φ_i gradijent u $\mathbb{GR}_N$.

Jednostavno se pokazuje da je jednačina (4.4.50) ekvivalentna sledećim jednačinama:

$$\varphi_{i\underset{1}{|}j} = \rho g_{\underline{ij}} - \underset{\vee}{\Gamma^p_{ij}}\varphi_p, \quad \varphi_{i\underset{2}{|}j} = \rho g_{\underline{ij}} - \underset{\vee}{\Gamma^p_{ji}}\varphi_p \tag{4.4.51}$$

gde $(|)$ označava kovarijantni izvod odgovarajuće vrste prostora $\mathbb{GR}_N$.

Pokažimo sada da postoji netrivijalna infinitezimalna geodezijska deformacija ekvidistantnog generalisanog Rimanovog prostora. Prema Teoremi 4.4.11, dovoljno je pokazati da postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje takvog prostora na njemu kompatibilan prostor.

Konstruišimo jedno netrivijalno geodezijsko preslikavanje proizvoljnog ekvidistantnog generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{GR}_N$, $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G\overline{R}}_N$.

Posmatrajmo prvu kvadratnu formu prostora $\mathbb{GR}_N$:

$$I = g_{ij}dx^i dx^j = (g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}})dx^i dx^j. \tag{4.4.52}$$

Kako važi

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{ji}dx^j dx^i \Leftrightarrow (g_{ij} - g_{ji})dx^i dx^j = 0 \Leftrightarrow g_{\underset{\vee}{ij}}dx^i dx^j = 0,$$

to se (4.4.52) svodi na

$$I = g_{ij}dx^i dx^j = g_{\underline{ij}}dx^i dx^j. \tag{4.4.53}$$

Dakle, I kvadratna forma prostora $\mathbb{GR}_N$ i njemu pridruženog prostora $\mathbb{R}^0_N$ se poklapaju. Tako, na osnovu poznate I kvadratne forme ekvidistantnih Rimanovih prostora (postupak nalaženja može se naći u [79]), I kvadratna forma prostora $\mathbb{GR}_N$, pri neizotropnom vektorskom polju φ_i ($g_{ij}\varphi^i\varphi^j \neq 0$), može se predstaviti na sledeći način:

$$I = g_{11}(x^1)(dx^1)^2 + \frac{1}{g_{11}(x^1)}\tilde{g}_{\sigma\mu}(x^\nu)dx^\sigma dx^\mu, \tag{4.4.54}$$

pri čemu su $\tilde{g}_{\sigma\mu}$ proizvoljne simetrične funkcije koordinata $x^2, ..., x^N$, $\det\|\tilde{g}_{\sigma\mu}\| \neq 0$ i g_{11} dato sa

$$g_{11} = \frac{1}{2\int \rho(x^1)dx^1 + c_1}, \quad c_1 = \text{const}, \ \rho(x^1) \text{ proizvoljna funkcija.}$$

Pretpostavimo da je $\rho \neq 0$, tada je $g_{11} \neq \text{const}$. Posle transformacije prve koordinate

$$z^1 = \int \sqrt{|g_{11}(x^1)|}\, dx^1, \ z^\sigma = x^\sigma, \ (\sigma > 1),$$

forma (4.4.54) postaje

$$I = e_1(dz^1)^2 + \Phi(z^1)\tilde{g}_{\sigma\mu}(z^\nu)dz^\sigma dz^\mu, \tag{4.4.55}$$

gde je $e_1 = \pm 1$, i $\Phi(z^1)(\neq 0)$ proizvoljna funkcija od z^1.

Na osnovu tako definisane metrike imamo:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{\underline{1\sigma}} = \Gamma^\sigma_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{\underline{\mu\sigma}} = -\frac{1}{2}e_1\Phi'\tilde{g}_{\sigma\mu}, \quad \Gamma^\mu_{\underline{\sigma 1}} = \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}\delta^\mu_\sigma, \quad \Gamma^\nu_{\underline{\sigma\mu}} = \tilde{\Gamma}^\nu_{\sigma\mu}, (\sigma, \mu, \nu > 1) \tag{4.4.56}$$

gde su $\tilde{g}_{\sigma\mu}$ proizvoljne simetrične funkcije od $z^2, ..., z^N$, $\det\|\tilde{g}_{\sigma\mu}\| \neq 0$, $\tilde{\Gamma}^\nu_{\sigma\mu}$ Kristofelovi simboli druge vrste izvedeni iz $\tilde{g}_{\sigma\mu}(z^\nu)$. Ovde će indeksi σ, μ, ρ, ... uzimati vrednosti od 2 do N.

Razmotrijmo sada uslov (4.4.1) pri sledećim ograničenjima:

$$\overline{g}_{\underline{1\sigma}} = 0, \quad \psi_\sigma = 0 \quad (\sigma > 1). \tag{4.4.57}$$

Razlikujemo nekoliko slučajeva:

(1) Ako je $i=j=k=1$, tada iz jednačine (4.4.1) dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\partial z^1} - \Gamma^p_{11}\overline{g}_{\underline{p1}} - \Gamma^p_{11}\overline{g}_{\underline{1p}} = 2\psi_1\overline{g}_{11} + \psi_1\overline{g}_{11} + \psi_1\overline{g}_{11} + \xi^p_{11}\overline{g}_{\underline{p1}} + \xi^p_{11}\overline{g}_{\underline{1p}}.$$

Na osnovu (4.4.56) i $\xi^p_{11}=0$, imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\partial z^1} = 4\psi_1(z^1)\overline{g}_{11}. \tag{4.4.58}$$

(2) Ako je $i=k=1,\ j=\sigma>1$, tada iz (4.4.1), dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{1\sigma}}}{\partial z^1} - \Gamma^p_{11}\overline{g}_{\underline{p\sigma}} - \Gamma^p_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{1p}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{1\sigma}} + \psi_1\overline{g}_{\underline{1\sigma}} + \psi_\sigma\overline{g}_{11} + \xi^p_{11}\overline{g}_{\underline{p\sigma}} + \xi^p_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{1p}}.$$

Iz (4.4.56) i (4.4.57), poslednja jednačina postaje

$$-\Gamma^1_{\underset{\vee}{\sigma 1}}\overline{g}_{11} = \xi^1_{\sigma 1}\overline{g}_{11}. \tag{4.4.59}$$

(3) Ako je $i=j=1,\ k=\sigma>1$, tada iz (4.4.1) dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\partial z^\sigma} - \Gamma^p_{1\sigma}\overline{g}_{\underline{p1}} - \Gamma^p_{1\sigma}\overline{g}_{\underline{1p}} = 2\psi_\sigma\overline{g}_{11} + \psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma 1}} + \psi_1\overline{g}_{\underline{1\sigma}} + \xi^p_{1\sigma}\overline{g}_{\underline{p1}} + \xi^p_{1\sigma}\overline{g}_{\underline{1p}},$$

tj.

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\partial z^\sigma} - 2\Gamma^1_{\underset{\vee}{1\sigma}}\overline{g}_{11} = 2\xi^1_{1\sigma}\overline{g}_{11}.$$

Na osnovu (4.4.59), imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\partial z^\sigma} = 0. \tag{4.4.60}$$

Korišćenjem (4.4.58) i (4.4.60) dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{11}}{\overline{g}_{11}} = 4\psi_1(z^1)dz^1, \tag{4.4.61}$$

odnosno

$$\overline{g}_{11} = ce^{4\psi(z_1)}, \quad c - \text{const}. \tag{4.4.62}$$

(4) Ako je $i,j>1,\ k=1,\ i=\sigma,\ j=\mu$, imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \Gamma^p_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{p\mu}} - \Gamma^p_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma p}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \psi_\sigma\overline{g}_{\underline{1\mu}} + \psi_\mu\overline{g}_{\underline{\sigma 1}} + \xi^p_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{p\mu}} + \xi^p_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma p}}$$

Leva strana prethodne jednačine postaje

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \Gamma^1_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{1\mu}} - \Gamma^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^1_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma 1}} - \Gamma^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}}$$

dok je desna strana

$$\mathcal{R} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \xi^1_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{1\mu}} + \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^1_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma 1}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}},$$

Korišćenjem (4.4.56, 4.4.57) i $\mathcal{L} = \mathcal{R}$, dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \Gamma^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}}.$$

Na osnovu (4.1.11) imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \Gamma^\rho_{\underline{\sigma 1}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\underline{\mu 1}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu 1}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}},$$

a zbog (4.4.56)

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}\delta^\rho_\sigma\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}\delta^\rho_\mu\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu 1}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}},$$

tj.

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} - \frac{\Phi'}{\Phi}\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu 1}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 2\psi_1\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}}. \tag{4.4.63}$$

Pretpostavimo da važi sledeća jednačina

$$-\Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu 1}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = \xi^\rho_{\sigma 1}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^\rho_{\mu 1}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}},$$

tj.

$$(\xi^\rho_{\sigma 1} + \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}})\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + (\xi^\rho_{\mu 1} + \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu 1}})\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 0. \tag{4.4.64}$$

Tada se uslov (4.4.63) svodi na

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} = (2\psi_1 + \frac{\Phi'}{\Phi})\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}. \tag{4.4.65}$$

(5) Ako je $i = 1,\ j, k > 1,\ j = \sigma,\ k = \mu$, onda važi

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{1\sigma}}}{\partial z^{\mu}} - \Gamma^{p}_{1\mu}\overline{g}_{\underline{p\sigma}} - \Gamma^{p}_{\sigma\mu}\overline{g}_{\underline{1p}} = 2\psi_{\mu}\overline{g}_{\underline{1\sigma}} + \psi_{1}\overline{g}_{\underline{\mu\sigma}} + \psi_{\sigma}\overline{g}_{\underline{1\mu}} + \xi^{p}_{1\mu}\overline{g}_{\underline{p\sigma}} + \xi^{p}_{\sigma\mu}\overline{g}_{\underline{1p}},$$

i dalje, na osnovu (4.4.57),

$$-\Gamma^{\rho}_{1\mu}\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} - \Gamma^{1}_{\sigma\mu}\overline{g}_{11} = \psi_{1}\overline{g}_{\underline{\mu\sigma}} + \xi^{\rho}_{1\mu}\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} + \xi^{1}_{\sigma\mu}\overline{g}_{11}.$$

Korišćenjem (4.4.56) i (4.1.11) dobijamo

$$-\frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}\delta^{\rho}_{\mu}\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} + \frac{1}{2}e_{1}\Phi'\tilde{g}_{\sigma\mu}ce^{4\psi(z^{1})} - \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{1\mu}}\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} - \Gamma^{1}_{\underset{\vee}{\sigma\mu}}\overline{g}_{11} = \psi_{1}\overline{g}_{\underline{\mu\sigma}} + \xi^{\rho}_{1\mu}\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} + \xi^{1}_{\sigma\mu}\overline{g}_{11},$$

a odavde

$$(\xi^{\rho}_{1\mu} + \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{1\mu}})\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} + (\xi^{1}_{\sigma\mu} + \Gamma^{1}_{\underset{\vee}{\sigma\mu}})\overline{g}_{11} = 0, \tag{4.4.66}$$

i takođe

$$-\frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}\overline{g}_{\underline{\mu\sigma}} + \frac{1}{2}e_{1}\Phi'\tilde{g}_{\sigma\mu}ce^{4\psi(z^{1})} = \psi_{1}\overline{g}_{\underline{\mu\sigma}}.$$

Pretpostavimo pri tom da je $\Phi' \neq 0$. Konačno imamo iz prethodne jednačine

$$\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} = \frac{e_{1}c\Phi'}{2\psi_{1} + \frac{\Phi'}{\Phi}}e^{4\psi(z^{1})}\tilde{g}_{\sigma\mu}. \tag{4.4.67}$$

(6) Ako je $i, j, k > 1,\ i = \sigma,\ j = \mu,\ k = \theta$, imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^{\theta}} - \Gamma^{p}_{\sigma\theta}\overline{g}_{\underline{p\mu}} - \Gamma^{p}_{\mu\theta}\overline{g}_{\underline{\sigma p}} = 2\psi_{\theta}\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} + \psi_{\sigma}\overline{g}_{\underline{\theta\mu}} + \psi_{\mu}\overline{g}_{\sigma\theta} + \xi^{p}_{\sigma\theta}\overline{g}_{\underline{p\mu}} + \xi^{p}_{\mu\theta}\overline{g}_{\underline{\sigma p}}.$$

Korišćenjem (4.1.11), (4.4.56) i (4.4.57) dobijamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^{\theta}} - \Gamma^{\rho}_{\underline{\sigma\theta}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\sigma\theta}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\theta}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} - \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\theta}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = \xi^{\rho}_{\sigma\theta}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + \xi^{\rho}_{\mu\theta}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}}. \tag{4.4.68}$$

Primenom (4.4.56) i (4.4.67) imamo da je

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^{\theta}} - \Gamma^{\rho}_{\underline{\sigma\theta}}\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} - \Gamma^{\rho}_{\underline{\mu\theta}}\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = \frac{e_{1}c\Phi'}{2\psi_{1} + \frac{\Phi'}{\Phi}}e^{4\psi(z^{1})}\Big(\frac{\partial \tilde{g}_{\sigma\mu}}{\partial z^{\theta}} - \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\theta}\tilde{g}_{\rho\mu} - \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\theta}\tilde{g}_{\sigma\rho}\Big),$$

pri čemu izraz u zagradi predstavlja kovarijantni izvod od $\tilde{g}_{\sigma\mu}$ u odnosu na $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\mu}$, pa je identički jednak nuli. Sada iz (4.4.68) imamo

$$(\xi^{\rho}_{\sigma\theta} + \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\sigma\theta}})\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + (\xi^{\rho}_{\mu\theta} + \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\theta}})\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 0. \tag{4.4.69}$$

Na osnovu (4.4.65) i (4.4.67) imamo da važi

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} = (2\psi_1 + \frac{\Phi'}{\Phi})\frac{e_1 c\Phi'}{2\psi_1 + \frac{\Phi'}{\Phi}} e^{4\psi(z^1)}\tilde{g}_{\sigma\mu},$$

odnosno

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} = e_1 c\Phi' e^{4\psi(z^1)}\tilde{g}_{\sigma\mu}. \tag{4.4.70}$$

Iz (4.4.65) imamo još

$$\frac{d\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}} = (2\psi_1 + \frac{\Phi'}{\Phi})dz^1$$

odakle je

$$\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} = \phi e^{2\psi(z^1)} c_{\sigma\mu}(z^2, ..., z^N),$$

gde je $c_{\sigma\mu}$ proizvoljna funkcija od $z^2, ..., z^N$. Specijalno, neka je $c_{\sigma\mu}(z^2, ..., z^N) = e_1 c\tilde{g}_{\sigma\mu}$. Tada je

$$\overline{g}_{\underline{\sigma\mu}} = e_1 c\Phi e^{2\psi(z^1)}\tilde{g}_{\sigma\mu}. \tag{4.4.71}$$

Dakle, I kvadratna forma prostora $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ može se predstaviti na sledeći način

$$\overline{I} = \overline{g}_{ij}dz^i dz^j = \overline{g}_{\underline{ij}}dz^i dz^j = ce^{4\psi(z^1)}(dz^1)^2 + e_1 c\Phi(z^1)e^{2\psi(z^1)}\tilde{g}_{\sigma\mu}(z^\nu)dz^\sigma dz^\mu. \tag{4.4.72}$$

Iz (4.4.71) imamo

$$\frac{\partial \overline{g}_{\underline{\sigma\mu}}}{\partial z^1} = e_1 ce^{2\psi(z^1)}(\phi' + 2\psi_1\phi)\tilde{g}_{\sigma\mu},$$

što u poređenju sa (4.4.70) daje

$$\Phi'(e^{2\psi(z^1)} - 1) = 2\psi_1\Phi. \tag{4.4.73}$$

Očigledno, za $\Phi' \neq 0$ važi $\psi_1 \neq 0$, tj. $\psi \neq const$. Rešenje jednačine (4.4.73) je

$$\psi = -\frac{1}{2}\ln(1 + d\Phi(z^1)), \tag{4.4.74}$$

pri čemu je d konstanta, tako da važi $1 + d\Phi(z^1) > 0$.

Da bi geodezijsko preslikavanje bilo u potpunosti određeno, potrebno je još da se definiše tenzor ξ^i_{jk}. Tenzor ξ^i_{jk} određen je jednačinama (4.4.59), (4.4.64), (4.4.66), (4.4.69) koje su zadovoljene ukoliko važi

$$\begin{aligned}
&\xi^1_{\sigma 1} = -\Gamma^1_{\underset{\vee}{\sigma 1}},\\
&(\xi^\rho_{1\mu} + \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{1\mu}})\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}} + (\xi^1_{\sigma\mu} + \Gamma^1_{\underset{\vee}{\sigma\mu}})\overline{g}_{11} = 0,\\
&(\xi^\rho_{\sigma\theta} + \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma\theta}})\overline{g}_{\underline{\rho\mu}} + (\xi^\rho_{\mu\theta} + \Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\mu\theta}})\overline{g}_{\underline{\sigma\rho}} = 0,
\end{aligned} \tag{4.4.75}$$

gde je $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ torzija prostora $\mathbb{GR}_N$ i $\overline{g}_{11}$ i $\overline{g}_{\underline{\rho\sigma}}$ su dati u (4.4.62) i (4.4.71), respektivno. Na ovaj način je svih šest razmatranih slučajeva u potpunosti zadovoljeno.

Prethodna diskusija vodi do sledećeg rezultata.

Teorema 4.4.12. *Ekvidistanti generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ sa I kvadratnom formom (4.4.55) dopušta geodezijsko preslikavanje f na prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ sa I kvadratnom formom (4.4.72), koje je pri $\Phi' \neq 0$ netrivijalno, definisano nekonstantnom funkcijom ψ datom u (4.4.74), i antisimetričnim tenzorom ξ^i_{jk} određenim jednačinama (4.4.75).* ■

Primećujemo da je prostor $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ u Teoremi 4.4.12 takođe ekvidistantan i da su prostori $\mathbb{GR}_N$ i $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ kompatibilni. Shodno tome, imamo sledeću direktnu posledicu.

Posledica 4.4.13. *Svaki ekvidistantni generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_N$ osnovnog tipa dopušta netrivijalno geodezijsko preslikavanje na njemu kompatibilan ekvidistantni generalisani Rimanov prostor.* ■

Jednakosti (4.4.75) važe kada je ispunjen uslov

$$\xi^1_{\sigma 1} = -\Gamma^1_{\underset{\vee}{\sigma 1}}, \quad \xi^\rho_{\sigma 1} = -\Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma 1}}, \quad \xi^1_{\sigma\theta} = -\Gamma^1_{\underset{\vee}{\sigma\theta}}, \quad \xi^\rho_{\sigma\theta} = -\Gamma^\rho_{\underset{\vee}{\sigma\theta}}. \tag{4.4.76}$$

Primetimo da to nije jedino rešenje sistema (4.4.75), pošto je rang sistema u opštem slučaju manji od broja nepoznatih. Na osnovu (4.2.6), važi sledeća teorema:

Teorema 4.4.14. *Postoji netrivijalno geodezijsko preslikavanje ekvidistantnog generalisanog Rimanovog prostora osnovnog tipa na ekvidistantni Rimanov prostor.* ■

Primer 4.4.1. *Neka je dat generalisani Rimanov prostor $\mathbb{GR}_3$ nesimetričnom metrikom*

$$||g_{ij}|| = \begin{bmatrix} 1 & (z^1)^2 + (z^3)^2 & (z^2)^2 \\ -(z^1)^2 - (z^3)^2 & e^{z^1} z^3 & e^{z^1} z^2 + 1 \\ -(z^2)^2 & e^{z^1} z^2 - 1 & e^{z^1}(z^2 + z^3) \end{bmatrix} \tag{4.4.77}$$

pri čemu je $\det \|g_{ij}\| \neq 0$. *Posmatrajmo simetrični i antisimetrični deo metrike*

$$||g_{\underline{ij}}|| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{z^1} z^3 & e^{z^1} z^2 \\ 0 & e^{z^1} z^2 & e^{z^1}(z^2 + z^3) \end{bmatrix} \quad ||g_{\underset{\vee}{ij}}|| = \begin{bmatrix} 0 & (z^1)^2 + (z^3)^2 & (z^2)^2 \\ -(z^1)^2 - (z^3)^2 & 0 & 1 \\ -(z^2)^2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.78}$$

gde je $\det \|g_{\underline{ij}}\| = z^2 z^3 + (z^3)^2 - (z^2)^2 \neq 0$. *Očigledno, prostor $\mathbb{GR}_3$ je ekvidistantan. Konstruišimo geodezijsko preslikavanje $f : \mathbb{GR}_3 \to \overline{\mathbb{R}}_3$. Prema Teoremi 4.4.12, možemo uzeti*

$$\psi = -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{z^1}), \tag{4.4.79}$$

a prema (4.4.76) dobijamo:

$$\begin{aligned} &\xi^1_{21}=\xi^1_{31}=\xi^2_{32}=\xi^3_{32}=0, \quad \xi^1_{32}=z^2-z^3,\\ &\xi^2_{21}=-\xi^3_{31}=\frac{(z^2)^2z^3-(z^2)^3}{z^2z^3+(z^3)^2-(z^2)^2}, \quad \xi^3_{21}=-\xi^2_{31}=\frac{z^3((z^2)^2-(z^3)^2)}{z^2z^3+(z^3)^2-(z^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.4.80}$$

Na taj način, geodezijsko preslikavanje određeno je tenzorom deformacije

$$P^i_{jk}=\delta^i_j\psi_k+\delta^i_k\psi_j+\xi^i_{jk}, \tag{4.4.81}$$

gde je $\psi_1=-\frac{e^{z^1}}{2(1+e^{z^1})}$, $\psi_2=\psi_3=0$, *a antisimetrični tenzor* ξ^i_{jk} *dat u (4.4.80).*

Sada možemo iskazati teoremu o infinitezimalnim geodezijskim deformacijama, koja predstavlja direktnu posledicu prethodne diskusije i Teoreme 4.4.11.

Teorema 4.4.15. *Svaki ekvidistantni generalisani Rimanov prostor osnovnog tipa dopušta netrivijalnu infinitezimalnu geodezijsku deformaciju.* ■

Glava 5

Neki metrički problemi

Jedna od oblasti primenjene i industrijske matematike i operacionih istraživanja čiji se rezultati najčešće koriste u praktičnim problemima je *Teorija lokacije.* Zbog velikog broja primena, ova oblast se razvija i u teorijskom pravcu. U ovoj glavi biće razmatrani neki problemi teorije lokacije, koji su zasnovani na izboru metrike i metričkoj geometriji. Opisaćemo diskretni lokacijski problem na proizvoljnoj površi i rešiti neke primere. Razmatraćemo kontinualni jednoobjektni minisum Veberov problem u ravni (Alfred Weber, 1868-1958, nemački ekonomista) i dati efektivni algoritam za rešavanje datog problema primenom lift metrike.

5.1 Lokacijski problemi

Lokacijski problemi čine posebnu klasu zadataka optimizacije. U opštem slučaju, lokacijski problem predstavlja određivanje položaja (lokacije) novih objekata u postojećem prostoru u kome se već nalaze drugi relevantni objekti. Novi objekti su obično neka vrsta centara koji pružaju usluge i nazivaju se *snabdevači.* Postojeći objekti koriste usluge snabdevača i nazivaju se *korisnici.*

Lokacijski problemi javljaju se često u svakodnevnom životu. Mnogi sistemi javnih i privatnih sektora karakterisani su objektima koji pružaju homogene usluge na svojim lokacijama nekom skupu fiksnih tačaka ili korisnika. Primeri takvih objekata uključuju lokacije skladišta, pozicioniranje računara i komunikacionih jedinica, lokacije bolnica, policijskih stanica, vatrogasnih službi itd.

Moguće su različite klasifikacije lokacijskih problema. Kao kriterijumi klasifikacije obično se koriste sledeći [42]:

- broj novih objekata koje treba razmestiti;
- karakter objekta - da li je željen ili ne;

- mogući položaj objekta - da li postoji predodređeni diskretni skup potencijalnih lokacija ili se objekat može postaviti u bilo koju tačku datog kontinualnog skupa;
- karakter prostora u koji se locira objekat - da li je u pitanju ravan, mreža ili nešto treće;
- metrika koja se koristi za računanje rastojanja između dve tačke u posmatranom prostoru.

Na rešenje lokacijskog problema značajno utiče način na koji se računa rastojanje između dve tačke u posmatranom prostoru. Rastojanje između dve tačke je dužina najkraćeg puta koji ih povezuje. Pri računanju rastojanja između dve tačke na osnovu poznavanja njihovih koordinata, najčešće se koriste tzv. l_p metrike, gde je p realni broj, $1 \leq p \leq \infty$, i to pre svega pravougaona l_1, euklidska l_2 i Čebiševljeva l_∞ (Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821-1894, ruski matematičar). Detaljnija objašnjenja različitih metrika mogu se naći u Dictionary of distances [19]. Mnogi faktori utiču na izbor metrike, na prvom mestu priroda problema. Na primer, ako je moguće kretati se pravolinijski između dve tačke, tačno rastojanje između njih se dobija euklidskom metrikom. Međutim, u gradovima u kojima su ulice pod pravim uglom, dužina puta najbolje će se aproksimirati pravougaonom metrikom (takođe poznatom kao *Menhetn rastojanje* jer podseća na rastojanja u ovoj njujorškoj četvti u kojoj su ulice i avenije pod pravim uglom; koristi se i naziv *"taxikab" rastojanje*).

Izbor metrike je fundamentalan u geometriji. "Taxikab" geometrija, koju je razmatrao Minkovski u 19. veku (Hermann Minkowski, 1864-1909, ruski matematičar), je geometrija u kojoj je uobičajena metrika euklidske geometrije zamenjena pravougaonom metrikom u kojoj se rastojanje između tačaka računa kao suma apsolutnih vrednosti razlika odgovarajućih koordinata. U prethodnom poglavlju bavili smo se Rimanovom geometrijom i njenim uopštenjima. Rimanova geometrija zasnovana je na Rimanovoj metrici i simetričnom osnovnom metričkom tenzoru, dok sa nesimetričnim osnovnim metričkim tenzorom dobijamo geometriju generalisanog Rimanovog prostora.

Lokacijski problemi najčešće su vezani za ravan $\mathcal{R}^2$. Sa druge strane, Zemljina površina može se aprokslimirati delom ravni samo u malim dimenzijama. Iz tog razloga, logično je koristiti sferno rastojanje u rešavanju lokacijskih problema na Zemlji. S tim u vezi, koristi se sferna geometrija, kao još jedan primer neeuklidske geometrije. Najkraći put između dve tačke u euklidskoj geometriji predstavlja prava linija, dok u sfernoj geometriji tu ulogu ima geodezijska linija. Geodezijske linije su krive čija je geodezijska krivina jednaka nuli u svakoj tački. Na sferi su geodezijske linije veliki krugovi. Rastojanje između dve tačke na sferi je dužina kraćeg luka velikog kruga koji prolazi kroz te dve tačke. Veliki krug sfere, snabdeven ovom metrikom, naziva se *Rimanov krug.* Pregled lokacijskih problema na sferi dat je u radovima [6, 21, 107].

Ovakav pristup ima velike primene. Da bi se pri navigaciji prešao najkraći put (zbog najmanjeg utroška goriva i vremena), treba se kretati po luku velikog kruga. Luk velikog kruga, koji je putanja pri navigaciji zove se *ortodroma*, a pređeno rastojanje *ortodromsko rastojanje.*

Dok ortodroma seče meridijane pod različitim uglovima, *loksodroma* je kriva na Zemljinoj sferi koja sve meridijane seče pod istim uglom. Odsečak loksodrome između dve tačke naziva se *loksodromsko rastojanje*, koje je veće od ortodromskog rastojanja. Morski putevi su većinom loksodromski, jer je jednostavnije ploviti pod stalnim kursom.

5.2 Diskretni lokacijski problem na proizvoljnoj površi

Pretpostavimo da su tačke, na kojima se može postaviti novi objekat, elementi konačnog skupa. Tada je reč o diskretnom lokacijskom problemu.

Opisaćemo diskretni lokacijski problem na proizvoljnoj površi S u $\mathcal{R}^3$. Neka je dato m tačaka $A_1, ..., A_i, ..., A_m$ na površi S na kojima se nalaze postojeći objekti (korisnici) i r potencijalnih lokacija $B_1, ..., B_k, ..., B_r$ na koje je moguće postaviti novi željeni objekat (snabdevač). Pritom, pretpostavimo da su tačke A_i i B_k povezane putevima, tj. deo po deo glatkim krivama $C_{A_iB_k} = C_{ik}$ koje leže na površi S. *Suma otežanih (težinskih) rastojanja* od potencijalne lokacije snabdevača B_k do korisnika je

$$W_k = \sum_{i=1}^{m} w_i\, l_{ik}, \quad k = 1, ..., r \tag{5.2.1}$$

gde je w_i *težinski koeficijent tačke* A_i (na primer, broj stanara neke zgrade, važnost tačke itd.), a l_{ik} dužina luka krive C_{ik} na površi S između tačaka A_i i B_k. Zadatak je odrediti onu lokaciju B_{k^*} za koju je suma otežanih rastojanja minimalna, tj.

$$W_{k^*} = \min_{1\le k\le r} W_k. \tag{5.2.2}$$

Postavljeni zadatak se rešava tako što se za svaku potencijalnu lokaciju $B_k \in \{B_1, ..., B_r\}$ izračuna suma otežanih rastojanja, a za rešenje se bira ona tačka za koju je ova suma najmanja.

Primer 5.2.1. *Date su lokacije dva postojeća objekta*

$$A_1(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1/2), \ A_2(1, e, e)$$

na hiperboličkom paraboloidu

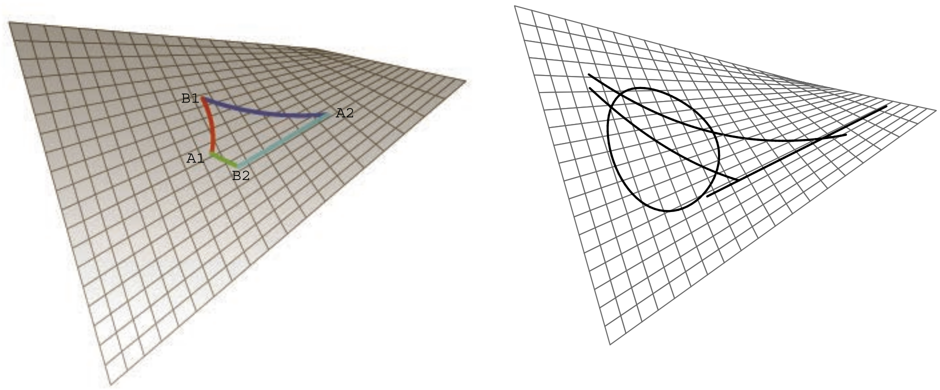
$$S : r(u, v) = (u, v, uv).$$

Moguće su dve lokacije za novi objekat (snabdevač):

$$B_1(0, 1, 0), \ B_2(1, 1, 1).$$

Odgovarajući težinski koeficijenti tačaka A_1 i A_2 su $w_1 = 3$ i $w_2 = 1$, respektivno. Neka su putevi između tačka A_i i B_k dati sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
C_{11} &: r(t) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin t),\\
C_{12} &: r(t) = (\cos t, \cos t, \cos^2 t),\\
C_{21} &: r(t) = (t, 1 + (e-1)t, t + (e-1)t^2),\\
C_{22} &: r(t) = (1, e^t, e^t).
\end{aligned}$$



Slika 5.1: Diskretni lokacijski problem na hiperboličkom paraboloidu

Odrediti koordinate novog objekta koji minimizira 5.2.1 i odgovara minimalnoj sumi otežanih rastojanja 5.2.2.

Rešenje. Grafička ilustracija ovog problema data je na Slici 5.1, primenom programskog paketa *Mathematica*. Koeficijenti prve kvadratne forme površi S su:

$$E = 1 + v^2, \quad F = u\,v, \quad G = 1 + u^2.$$

Izračunajmo dužine odgovarajućih puteva:

$$C_{11} : \begin{cases} u(t) = \cos t, & \dot{u}(t) = -\sin t \\ v(t) = \sin t, & \dot{v}(t) = \cos t, \end{cases} \qquad l_{11} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt \approx 0.96$$

$$C_{12} : \begin{cases} u(t) = \cos t, & \dot{u}(t) = -\sin t \\ v(t) = \cos t, & \dot{v}(t) = -\sin t, \end{cases} \qquad l_{12} = \int_{0}^{\pi/4} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt \approx 0.65$$

$$C_{21} : \begin{cases} u(t) = t, & \dot{u}(t) = 1 \\ v(t) = 1 + (e-1)t, & \dot{v}(t) = e - 1, \end{cases} \qquad l_{21} = \int_{0}^{1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt \approx 3.42$$

$$C_{22} : \begin{cases} u(t) = 1, & \dot{u}(t) = 0 \\ v(t) = e^t, & \dot{v}(t) = e^t, \end{cases} \qquad l_{22} = \int_{0}^{1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt \approx 2.43.$$

Sada možemo izračunati sume otežanih rastojanja od potencijalne lokacije snabdevača do korisnika.

$$W_1 = w_1\, l_{11} + w_2\, l_{21} = 3 \cdot 0.96 + 1 \cdot 3.42 = \underline{6.3}$$
$$W_2 = w_1\, l_{12} + w_2\, l_{22} = 3 \cdot 0.65 + 1 \cdot 2.43 = \underline{4.38}.$$

Dakle novi objekat će se graditi na lokaciji B_2, tj. na lokaciji čije su koordinate $(1, 1, 1)$. Suma otežanih rastojanja za tu tačku iznosi 4.38. ■

U praksi se problem nalaženja rastojanja uglavnom rešava izborom metrike koja najbolje aproksimira dati problem. Ukoliko nisu zadati putevi, kao u prethodnom primeru, problem možemo rešiti nalaženjem geodezijskih linija kao najkraćih puteva na površi. Kako je u praksi zgodnije aproksimirati realnu situaciju, od interesa su infinitezimalna savijanja površi, kao i infinitezimalne geodezijske deformacije površi. Naime, prilikom infinitezimalnog savijanja, kao što smo videli, dužina luka ostaje nepromenjena sa uzetom tačnošću. Takođe, i geodezijska krivina, a samim tim i geodezijske linije ostaju invarijantne. Činjenica je da je u praksi lakše manipulisati geodezijskim linijama sa datom preciznošću, koje se dobijaju prilikom infinitezimalnih geodezijskih deformacija i infinitezimalnih savijanja.

5.3 Diskretni lokacijski problem u ravni i lift metrika

Lift metrika ili *"raspberry picker metric"* (v. [19]) u ravni $\mathcal{R}^2$ definisana je na sledeći način

$$L(A,B) = \begin{cases} |x_1^A - x_1^B|, & x_2^A = x_2^B \\ |x_1^A| + |x_2^A - x_2^B| + |x_1^B|, & x_2^A \neq x_2^B \end{cases} \tag{5.3.1}$$

gde su $A(x_1^A, x_2^A)$ i $B(x_1^B, x_2^B)$ date tačke. Dakle, pod uslovom $x_2^A \neq x_2^B$, rastojanje između tačaka A i B jednako je sumi dužina AA', $A'B'$ i $B'B$, gde su A' i B' ortogonalne projekcije tačaka A i B na y-osu, respektivno (Slika 5.2, levo). Inače, ako je $x_2^A = x_2^B$, rastojanje između A i B je prosto dužina segmeta AB (Slika 5.2, desno).

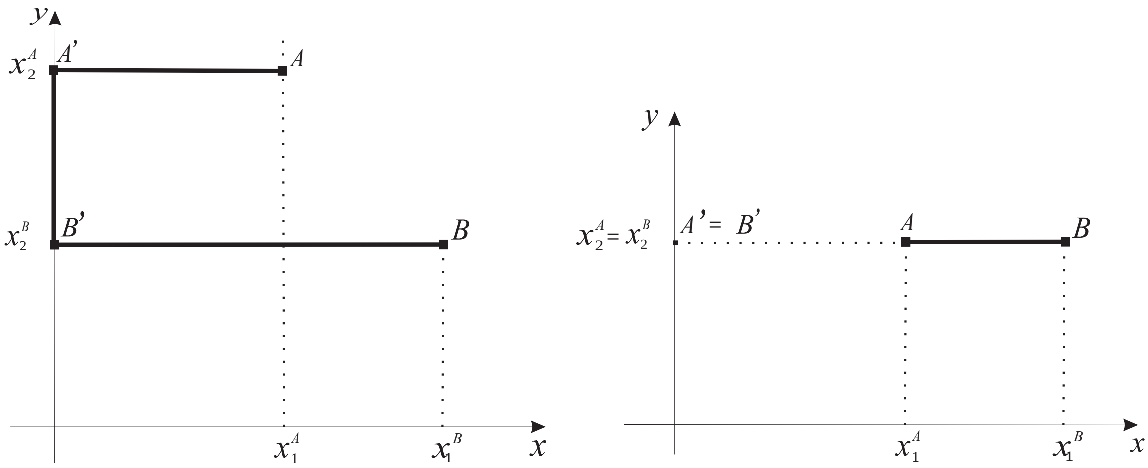
Ova metrika je prikladna za upotrebu u gradovima koji imaju jednu glavnu ulicu (koja odgovara y-osi), a ostale sporedne ulice su normalne na nju. Slična je situacija u zgradama u kojima lift (u pravcu y-ose) povezuje spratove.

Diskretni lokacijski problem ogleda se u nalaženju lokacije B_{k^*} za koju je suma otežanih rastojanja

$$W_k = \sum_{i=1}^{m} w_i\, L(A_i, B_k), \quad k = 1, ..., r, \tag{5.3.2}$$

minimalna. Pri tom, rastojanje između tačaka računamo pomoću lift metrike.

Primer 5.3.1. *Date su koordinate pet postojećih objekata: $A(1,2)$, $B(2,5)$, $C(3,4)$, $D(6,0)$ i $E(5,5)$. Moguće su tri lokacije za novi objekat: $N_1(2,3)$, $N_2(3,2)$ i $N_3(6,3)$. Težinski koeficijenti su: $w_A = w_D = 2$, $w_B = w_C = 1$, a $w_E = 3$. Odrediti koordinate novog objekta.*



Slika 5.2: Levo) Slučaj $x_2^A \neq x_2^B$ Desno) Slučaj $x_2^A = x_2^B$

Rešenje. Izračunajmo sume otežanih rastojanja:

$$\begin{aligned} W_1 &= w_A\, L(A, N_1) + w_B\, L(B, N_1) + w_C\, L(C, N_1) + w_D\, L(D, N_1) + w_E\, L(E, N_1) \\ &= 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 9 = \underline{69} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= w_A\, L(A, N_2) + w_B\, L(B, N_2) + w_C\, L(C, N_2) + w_D\, L(D, N_2) + w_E\, L(E, N_2) \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 11 = \underline{75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 &= w_A\, L(A, N_3) + w_B\, L(B, N_3) + w_C\, L(C, N_3) + w_D\, L(D, N_3) + w_E\, L(E, N_3) \\ &= 2 \cdot 8 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 13 = \underline{105} \end{aligned}$$

Dakle, novi objekat će se graditi na lokaciji N_1. Suma otežanih rastojanja za tu tačku iznosi 69. ■

5.4 Jedan optimizacioni problem

Razmotrimo sledeći optimizacioni problem

$$\min_x \; f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x - a^i|, \tag{5.4.1}$$

$x, a^i \in \mathcal{R}$, $w_i \in \mathcal{R}^+$. Dakle, potrebno je minimizirati funkciju f, odnosno naći x za koje je vrednost funkcije f minimalna.

Pretpostavimo da važi

$$a^1 \leq a^2 \leq \ldots \leq a^m.$$

Izvod funkcije (5.4.1) ima oblik

$$f'(x) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{m} w_j, & x < a^1 \\ \sum_{j=1}^{i} w_j - \sum_{j=i+1}^{m} w_j, & a^i < x \leq a^{i+1} \\ \sum_{j=1}^{m} w_j, & x > a^m \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Funkcija $f'(x)$ je deo po deo linearna i konveksna. Sledeća teorema [63] daje uslove za nalaženje minimuma funkcije (5.4.1), x^*.

Teorema 5.4.1. *Pri rešavanju zadatka (5.4.1)-(5.4.2), obeležimo sa i^* indeks za koji važi*

$$s_1 = \sum_{j=1}^{i^*-1} w_j < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} w_j \leq \sum_{j=1}^{i^*} w_j = s_2. \tag{5.4.3}$$

Ako je ispunjena stroga nejednakost u (5.4.3), tada je $x^* = a^{i^*}$, a ako u (5.4.3) važi jednakost, tada je optimalno rešenje bilo koja vrednost na intervalu $[a^{i^*}, a^{i^*+1}]$. ■

Na osnovu prethodne teoreme dolazimo do poznatog algoritma za rešenje problema (5.4.1) (v. [63, 89]). Prvi korak ove procedure je alternativni, ali se može koristiti da bi se ubrzala preostala dva koraka.

Algoritam 1.

Korak I. Za svaki podskup inicijalnih elemenata $a^{i_1} = a^{i_2} = \cdots = a^{i_j}$ obaviti sledeće delatnosti: staviti $w_{i_1} = w_{i_1} + w_{i_2} \cdots + w_{i_j}$, eliminisati identične elemente $a^{i_2}, \ldots, a^{i_j}$ kao i njihove težine $w_{i_2}, \ldots, w_{i_j}$ i nastaviti proces posle odgovarajućih pomeranja indekasa preostalih elemenata a^j i njihovih težina w_j.

Korak II. Ukoliko je korak I primenjen, označiti sa q kardinalni broj različitih elemenata skupa $\{a^1, \ldots, a^m\}$; inače, koristiti $q = m$. Sortirati koordinate a^i, $i = 1, \ldots, q$ u neopadajući niz. Neka je sortirani niz koordinata

$$a^{1'} \leq a^{2'} \leq \cdots \leq a^{q'}.$$

Preurediti težinske koeficijente $\{w_1, \ldots, w_q\} \to \{w_{1'}, \ldots, w_{q'}\}$ na isti način kao i a^i. Zbog jednostavnosti, označimo delimične sume niza $\{w_{1'}, \ldots, w_{q'}\}$ na sledeći način

$$S_2[0] = 0, \quad S_2[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}, \ 1 \leq k \leq q. \tag{5.4.4}$$

Korak III. Postoje dve mogućnosti, označimo ih sa P_1 i P_2.

P_1. Ako važi uslov

$$S_2[k^* - 1] < \frac{1}{2} S_2[q] < S_2[k^*] \tag{5.4.5}$$

za neko $k^* \in \{1, \dots, q\}$, tada je $x = a^{k^*}$.

P_2. Ukoliko važi

$$\frac{1}{2} S_2[q] = S_2[k^*] \tag{5.4.6}$$

za neko $k^* \in \{1, \dots, q\}$, tada traženo rešenje ima bilo koju vrednost iz intervala $[a^{k^*}, a^{k^*+1}]$.

5.5 Kontinualni Veberov problem u ravni i lift metrika

U kontinualnom lokacijskom zadatku polje mogućih novih lokacija (koordinata traženih tačaka) je kontinuum: treba izabrati tačke u ravni (ili prostoru) kojim se dostiže minimum ili maksimum nekog kriterijuma, gde je polje mogućih rešenja beskonačno.

Dvodimenzionalni kontinualni Veberov problem možemo formulisati na sledeći način (v. [20, 108]). Neka je dato m tačaka $A_1, \dots, A_m$ u ravni $\mathcal{R}^2$ (lokacije datih korisnika), gde je $A_i(a_1^i, a_2^i)$, $i = 1, \dots, m$. Potrebno je naći tačku $X(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$ za koju je suma otežanih rastojanja minimalna, tj. treba rešiti problem bezuslovne optimizacije (jednoobjektni minisum problem) (v. [63]). Dakle, potrebno je minimizirati sumu

$$\min_X \; f(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i \, d(A_i, X). \tag{5.5.1}$$

Realna veličina w_i je pozitivna i predstavlja težinski koeficijent tačke A_i, $d(A_i, X)$ je rastojanje tačke A_i od lokacije X. Funkcija f naziva se *funkcija cilja* Veberovog problema.

Klasičan Veberov problem temelji se na euklidskoj normi koja se koristi kao funkcija rastojanja. Međutim, i druge metrike, pre svega l_p, takođe igraju važnu ulogu u teoriji i praksi lokacijskih problema. Najpoznatiji metod za rešavanje Veberovog problema sa euklidskim rastojanjem predstavlja iterativnu proceduru koja je prvi put predložena u [106]. Procedura je ubrzo generalizovana na l_p rastojanja (v. [55]). Rešenje neprekidnog Veberovog problema u l_1 metrici opisano je u [22]. Trodimenzionalni Veberov lokacijski problem sa Čebiševljevim rastojanjem istraživan je u [65].

Ovde ćemo rešiti Veberov problem (5.5.1) primenom lift metrike (5.3.1) [84]. Dakle, funkcija rastojanja definisana je na sledeći način

$$d(A_i, X) = L(A_i, X) \begin{cases} |x_1 - a_1^i|, & x_2 = a_2^i \\ |x_1| + |x_2 - a_2^i| + |a_1^i|, & x_2 \neq a_2^i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{5.5.2}$$

Dva najveća koraka (označena kao **Korak 1** i **Korak 2**) odvojena su u datom algoritmu, kao što sledi.

Korak 1. Generisati listu $\mathfrak{X}$ dopustivih rešenja problema. Njena inicijalna vrednost je prazan skup $\mathfrak{X} = \emptyset$. Dva različita slučaja se izdvajaju pri formiranju skupa $\mathfrak{X}$, prema definiciji (5.5.2).

Slučaj 1. Razmotrimo količnički (faktor) skup $S/{=}$ skupa $S = \{a_2^1, \dots, a_2^m\}$ sa klasama ekvivalencije $S_1 = [a_2^{i_1}], \dots, S_d = [a_2^{i_d}]$, gde klasa S_j sadrži elemente skupa S čije su vrednosti $a_2^{i_j}$. Za svako $j = 1, \dots, d$ određujemo drugu koordinatu optimalne tačke $X(x_1, x_2)$ tako da važi

$$x_2 \in S_j \text{ tj. } x_2 = a_2^{i_j}. \tag{5.5.3}$$

Dakle, ukoliko znamo vrednost koordinate x_2 ($x_2 = a_2^{i_j}$), neophodno je odrediti vrednost koordinate x_1. Označimo Q_j skup indekasa koji odgovaraju tačkama čije su druge koordinate sadržane u skupu S_j. Na osnovu (5.5.2) i (5.5.3), funkcija cilja $f(X)$ se sastoji iz dve zasebne sume

$$f(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin Q_j}}^{m} w_i \left(|x_1| + |x_2 - a_2^i| + |a_1^i|\right) + \sum_{i \in Q_j} w_i |x_1 - a_1^i| \tag{5.5.4}$$

Uzevši u obzir $x_2 = a_2^{i_j}$ i grupisanjem prvog člana u prvoj sumi sa drugom sumom, dobijamo

$$f(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin Q_j}}^{m} w_i \left(|a_2^{i_j} - a_2^i| + |a_1^i|\right) + \sum_{i=1}^{m} w_i |x_1 - a_1^{\beta(i)}|, \tag{5.5.5}$$

gde je

$$a_1^{\beta(i)} = \begin{cases} a_1^{i_p}, & \beta(i) = i_p \in Q_p \\ 0, & \beta(i) \notin Q_p. \end{cases} \tag{5.5.6}$$

Kako je prva suma u izrazu (5.5.5) konstantna, problem se svodi na određivanje minimuma funkcije

$$f_1(x_1) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x_1 - a_1^{\beta(i)}|. \tag{5.5.7}$$

Primenjujemo Algoritam 1 u adaptiranoj formi za datu specijalnu situaciju (5.5.6), (5.5.7). Ovaj proces sadrži tri najveća koraka.

Korak I. Za svaki podskup identičnih elemenata $a_1^{\beta(i_1)} = a_1^{\beta(i_2)} = \cdots = a_1^{\beta(i_j)}$ uraditi sledeće: staviti $w_{i_1} = w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_j}$, eliminisati identične elemente $a_1^{\beta(i_2)}, \dots, a_1^{\beta(i_j)}$ kao i njihove težine $w_{i_2}, \dots, w_{i_j}$ i zatim izvršiti odgovarajuću promenu indekasa preostalih elemenata $a_1^{\beta(j)}$ i njihovih težina w_j.

Korak II. Ukoliko je Korak I primenjen, označiti sa p kardinalni broj raličitih elemenata skupa $\{a_1^{\beta(1)}, \dots, a_1^{\beta(m)}\}$; inače, koristiti $p = m$. Sortirati koordinate $a_1^{\beta(1)}, \dots, a_1^{\beta(p)}$ u neopadajući niz. Dalje, pretpostavljamo da je sređeni niz

$$a_1^{1'} \leq a_1^{2'} \leq \cdots \leq a_1^{p'}.$$

Menjamo indekse težinskim koeficijentima $w_1, \dots, w_p$ u skladu sa postojećim nizom

$$w_{1'}, w_{2'}, \dots, w_{p'}.$$

Zbog jednostavnosti, označimo delimične sume niza $\{w_{1'}, \dots, w_{p'}\}$ sa

$$S_1[0] = 0, \quad S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'},\ 1 \le k \le p.$$

Korak III. Postoje dva moguća slučaja u minimiziranju funkcije f_1, označena C_1 i C_2.

C_1. Ukoliko je nejednakost

$$S_1[k'-1] < \frac{1}{2} S_1[p] < S_1[k'], \tag{5.5.8}$$

zadovoljena za neko $k' \in \{1, \dots, p\}$, tada je tražena koordinata $x_1 = a_1^{k'}$. Koristimo $X(x_1, x_2)$ kao moguću optimalnu tačku: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cup \{(a_1^{k'}, a_2^{i_j})\}$.

C_2. Ukoliko važi uslov

$$\frac{1}{2} S_1[p] = S_1[k'] \tag{5.5.9}$$

za neko $k' \in \{1, \dots, p\}$, tada tražena koordinata x_1 može imati bilo koju vrednost iz intervala $[a_1^{k'}, a_1^{k'+1}]$. Ovde ćemo uzeti vrednost $x_1 = (a_1^{k'} + a_1^{k'+1})/2$. Tako smo pronašli dodatno moguće rešenje početnog problema (5.5.1), odakle je: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cup \{((a_1^{k'} + a_1^{k'+1})/2, a_2^{i_1})\}$.

Slučaj 2. Pod pretpostavkom

$$x_2 \notin S \text{ tj. } x_2 \neq a_2^i \text{ za svako } i \in \{1, \dots, m\} \tag{5.5.10}$$

(tj. pod pretpostavkom suprotnom u odnosu na (5.5.3)), funkcija $f(X)$ se redukuje na

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(|x_1| + |x_2 - a_2^i| + |a_1^i| \right). \tag{5.5.11}$$

Neophodno je minimizirati ovu funkciju. Kako je treći član $w_i|a_1^i|$ u funkciji $f(X)$ definisanoj u (5.5.11) konstantan, treba minimizirati sledeće dve funkcije:

$$\min_{x_1}\ f_1(x_1) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x_1| \tag{5.5.12}$$

$$\min_{x_2}\ f_2(x_2) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x_2 - a_2^i|. \tag{5.5.13}$$

Tako, rešavanje problema (5.5.11) sa dve promenljive svelo se na rešavanje dva nezavisna zadatka bezuslovne optimizacije (5.5.12) i (5.5.13) sa jednom promenljivom (x_1 i x_2, respektivno).

Rešenje optimizacionog problema (5.5.12) očigledno je $x_1 = 0$. Da bi smo rešili optimizacioni problem (5.5.13) i pronašli optimalnu vrednost za x_2, dovoljno je primeniti Algoritam 1 pod pretpostavkom da su ulazni parametri $a^1 = a_1^1, \ldots, a^m = a_2^m$ i da važe uslovi (5.5.10).

Korak I. Za svaki podskup identičnih elemenata $a_2^{i_1} = a_2^{i_2} = \cdots = a_2^{i_j}$ imamo sledeće aktivnosti: staviti $w_{i_1} = w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_j}$, eliminisati identične elemente $a_2^{i_2}, \ldots, a_2^{i_j}$ kao i odgovarajuće težine $w_{i_2}, \ldots, w_{i_j}$ i izvršiti odgovarajuću promenu idekasa preostalih elemenata a_2^j i njihovih težina w_j.

Korak II. Ukoliko je Korak I primenjen, označiti sa q kardinalni broj različitih elemenata skupa $\{a_2^1, \ldots, a_2^m\}$; inače, $q = m$. Sortirati koordinate a_2^i, $i = 1, \ldots, q$ u neopadajući niz. Neka je sortirani niz koordinata

$$a_2^{1'} \leq a_2^{2'} \leq \cdots \leq a_2^{q'}.$$

Preurediti težinske koeficijente $\{w_1, \ldots, w_q\} \to \{w_{1'}, \ldots, w_{q'}\}$. Zatim, generisati delimične sume $S_2[i]$, $i = 0, \ldots, q$, niza $\{w_{1'}, \ldots, w_{q'}\}$, kao u (5.4.4).

Korak III. Postoje dve mogućnosti, P_1 i P_2.

P_1. Ukoliko važi uslov (5.4.5) za neko $k^* \in \{1, \ldots, q\}$, tada se algoritam zaustavlja bez rešenja. Zaista, rešenje $x_2 = a_2^{k^*}$ se eliminiše na osnovu (5.5.10).

P_2. Ako važi uslov (5.4.6) za neko $k^* \in \{1, \ldots, q\}$, tada tražena koordinata x_2 može imati bilo koju vrednost intervala $(a_2^{k^*}, a_2^{k^*+1})$. Uzimamo srednju vrednost $x_2 = (a_2^{k^*} + a_2^{k^*+1})/2$, tako da je moguća optimalna tačka $X(0, x_2)$. Smestimo tačku X na kraj liste $\mathfrak{X}$, tj. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cup \{(0, (a_2^{k^*} + a_2^{k^*+1})/2)\}$.

Korak 2. Tako smo dobili jedno ili više dopustivih rešenja polaznog problema (5.5.1). Za sve dobijene vrednosti X iz $\mathfrak{X}$ određujemo vrednost funkcije $f(X)$ definisane u (5.5.11). Rešenje Veberovog problema biće tačka $X^*(x_1^*, x_2^*)$ za koju funkcija $f(X)$ ima minimalnu vrednost. Zapravo, u ovom koraku rešavamo generisani diskretni lokacijski problem, gde skup $\mathfrak{X}$ sadrži definisane moguće lokacije snabdevača.

Neka je $X_1, \ldots, X_r$ - r lokacija na kojima je moguće smestiti novi željeni objekat (snabdevač). Suma otežanih rastojanja od dopustive lokacije X_k, $k \in \{1, \ldots, r\}$ snabdevača do korisnika jednaka je

$$W_k = \sum_{i=1}^{m} w_i \, L(A_i, X_k). \tag{5.5.14}$$

Zadatak je odrediti lokaciju B_{k^*} za koju je suma otežaih rastojanja minimalna, tj.

$$W_{k^*} = \min \, \{W_k | \; 1 \leq k \leq r\}.$$

S obzirom na prethodno izlaganje, imamo sledeći opšti algoritam. Ulazni parametri su lista $lp = \{(a_1^1, a_1^2), \ldots, (a_m^1, a_m^2)\}$ i lista težina $lt = \{w_1, \ldots, w_m\}$.

Algoritam 2.

Korak 1: Generisati listu $\mathfrak{X}$ uzimajući u obzir sve moguće slučajeve C_1, C_2, P_2.
Korak 2: Rešiti diskretni lokacijski problem korišćenjem datih lokacija lp, diskretnog skupa $\mathfrak{X}$ mogućih rešenja i težina lt.

Primer 5.5.1. *Rešiti Veberov problem korišćenjem Algoritma 2. sa sledećim podacima:*

$$A_1(4,4),\ w_1 = 4, \quad A_2(3,1),\ w_2 = 1, \quad A_3(6,4),\ w_3 = 2, \quad A_4(6,2),\ w_4 = 3.$$

Rešenje. Očigledno, $S = \{4,1,4,2\}$. Količički skup od S je definisan klasama $S_1 = [4], S_2 = [1], S_3 = [2]$. Dakle, neophodno je razmotriti tri mogućnosti za slučajeve C_1 i C_2.

1. Neka je $x_2 = 4$. Tada funkcija $f(X)$ ima sledeću formu:

$$f(x) = w_2(|x_1| + |x_2 - a_2^2| + |a_1^2|) + w_4(|x_1| + |x_2 - a_2^4| + |a_1^4|) + w_1|x_1 - a_1^1| + w_3|x_1 - a_1^3|.$$

S obzirom na konstantnu vrednost $x_2 = 4$ koordinate x_2, funkcija f zavisi samo od x_1, tako da možemo razmatrati sledeću funkciju

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= w_1|x_1 - a_1^1| + w_2|x_1 - 0| + w_3|x_1 - a_1^3| + w_4|x_1 - 0| \\ &= \sum_{i=1}^{4} w_i|x_1 - a_1^{\beta(i)}|, \end{aligned}$$

gde je $a_1^{\beta(1)} = a_1^1 = 4$, $a_1^{\beta(3)} = a_1^3 = 6$, $a_1^{\beta(2)} = a_1^{\beta(4)} = 0$.

Sortirajmo koordinate $a_1^{\beta(i)} \to a_1^{i'}$ i preuredimo odgovarajuće težinske koeficijente $w_i \to w_{i'}$:

Tabela 1.

koordinate ($a_1^{i'}$)	0	0	4	6
težine ($w_{i'}$)	1	3	4	2
k	1	2	3	4
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	1	4	8	10

Pretpostavimo najpre da je Korak I izostavljen. Kako je $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} w_{i'} = 5$, uslov

$$S_1[k'-1] < \frac{1}{2} S_1[4] < S_1[k']$$

je zadovoljen za $k' = 3$, pa je $x_1 = a_1^{3'} = 4$. Dakle, jedno moguće rešenje je $X_1(4,4)$.

U slučaju kada je Korak I primenjen, Tabela 1. se svodi na

Tabela 2.

koordinate ($a_1^{i'}$)	0	4	6
težine ($w_{i'}$)	4	4	2
k	1	2	3
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	4	8	10

Tada su uslovi (5.5.8) zadovoljeni za $k = 2$, tako da se generiše isto moguće rešenje.

Sada je lista dopustivih rešenja $\mathfrak{X} = \{X_1\}$.

2. U ovom slučaju pretpostavimo $x_2 = 1$. Sada je funnkcija $f_1(x_1)$ oblika:

$$f_1(x_1) = w_1|x_1 - 0| + w_2|x_1 - 3| + w_3|x_1 - 0| + w_4|x_1 - 0|.$$

Na sličan način kao u slučaju **1.** dobijamo tabelu:

Tabela 3.

koordinate $(a_1^{i'})$	0	0	0	3
težine $(w_{i'})$	4	2	3	1
k	1	2	3	4
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	4	6	9	10

Nejednakosti (5.5.8) važe za $k' = 2$, tako da je $x_1 = a_1^{2'} = 0$, tj. dobili smo drugo moguće rešenje $X_2(0, 1)$.

U slučaju kada je Korak I primenjen, Tabela 3. se transformiše u

Tabela 4.

koordinate $(a_1^{i'})$	0	3
težine $(w_{i'})$	9	1
k	1	2
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	9	10

Uslov (5.5.8) važi za $k = 1$, tako da je X_2 opet drugo eventualno rešenje.

Imamo $\mathfrak{X} = \{X_1, X_2\}$.

3. Polazimo od pretpostavke $x_2 = 2$.

$$f_1(x_1) = w_1|x_1 - 0| + w_2|x_1 - 0| + w_3|x_1 - 0| + w_4|x_1 - 2|.$$

Odgovarajuća tabela je:

Tabela 5.

koordinate $(a_1^{i'})$	0	0	0	2
težine $(w_{i'})$	4	1	2	3
k	1	2	3	4
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	4	5	7	10

Pošto je jednakost oblika (5.5.9) zadovoljena za $k' = 2$, rešenje x_1 je iz intervala $[a_1^{2'}, a_1^{3'}] = [0, 0]$, tj. $x_1 = 0$, što implicira $X_3(0, 2)$.

Lista $\mathfrak{X}$ je proširena: $\mathfrak{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$.

Primetimo da Korak I transformiše Tabelu 5 u sledeću tabelu

Tabela 6.

koordinate $(a_1^{i'})$	0	2
težine $(w_{i'})$	5	3
k	1	2
$S_1[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	7	10

Sada je uslov (5.5.8) zadovoljen za $k = 1$, tako da je $X_3(0, 2)$ moguća optimalna tačka.

4. Neka je $x_2 \neq 1, 2, 4$. U ovom slučaju uzimamo $x_1 = 0$ i onda tražimo minimum funkcije

$$f_2(x_2) = \sum_{i=1}^{4} w_i |x_2 - a_2^i|$$

Sortirajmo koordinate $a_2^i \to a_2^{i'}$ i preuredimo njihove težine $w_i \to w_{i'}$. Odgovarajuća tabela je

Tabela 7.

koordinate $(a_2^{i'})$	1	2	4	4
težine $(w_{i'})$	1	3	4	2
k	1	2	3	4
$S_2[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	1	4	8	10

Nejednakosti (5.4.5) važe za $k^* = 3$. Ovde zaustavljamo algoritam. Ovaj slučaj nema rešenja, zbog pretpostavke $x_2 \neq 4$.

Primetimo da Korak I daje sledeću Tabelu 8.

Tabela 8.

koordinate $(a_2^{i'})$	1	2	4
težine $(w_{i'})$	1	3	6
k	1	2	3
$S_2[k] = \sum_{i=1}^{k} w_{i'}$	1	4	10

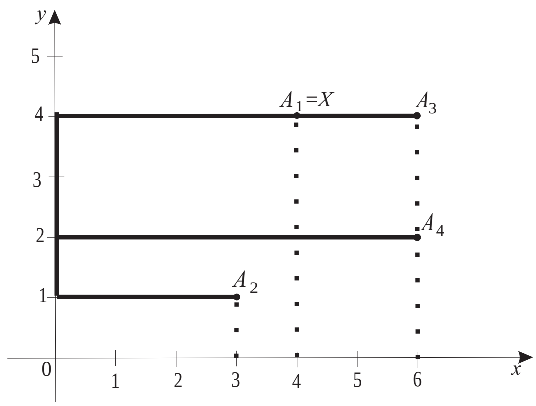
Dakle, zaključak je isti kao kod Tabele 7.

Na kraju, da bismo rešili Korak 2 Algoritma 2, moramo izračunati i uporediti vrednosti funkcije f u svakoj tački X_i, $i = 1, 2, 3$. Dobijamo

$$f(X_1) = 50,\ f(X_2) = 55,\ f(X_3) = 62.$$

Dakle, rešenje Veberovog problema biće tačka u kojoj funkcija f ima minimalnu vrednost, tj. $X^* = X_1 = A_1 = (4,4)$.

Grafička ilustracija primera predstavljena je na Slici 5.3. ■



Slika 5.3: Optimalna tačka X kontinualnog Veberovog problema

Literatura

[1] Aleksandrov, A. D., *O beskonechno malyh izgibaniyah neregulyarnyh poverhnostei,* Matem. sbornik, 1(43), 3, (1936), 307-321.

[2] Alexandrov, V. A., *Remarks on Sabitov's conjecture that volume is stationary under an infinitesimal bending of a surface,* Sibirsk. Math. Zh., 5, (1989), 16–24.

[3] Alexandrov, V. A., *On the total mean curvature of non-rigid surfaces,* Sibirsk. Math. Zh., 50:5, (2009), 963–996.

[4] Alexandrov, V. A., *New manifestions of the Darboux-s rotation and translation fields of a surface,* arXiv:0910.5164v1 [math.DG] 27 Oct 2009.

[5] Algren, F. J., Rivin, I., *The mean curvature integral is invariant under bending,* Geometry and Topology Monographs, 1, (1998), 1–21.

[6] Aly, A., Kay, D., Litwhiler, Jr., *Location dominance on spherical surphaces*, Operations Research, 27, (1979), 972–981.

[7] Belov, K. M., *O beskonechno malyh izgib. toroobraznoi pov. vrashceniya*, Sib. Mat. Zh. t. IX, No. 3, (1968), 490–494.

[8] Blaschke, W., *Über affine Geometrie, XXIX: Die Starrheit der Eiflächen*, Math. Z., 9, (1921), 142–146.

[9] Bochner, S. Yano, K., *Tenzor-fields in non-symmetric connections*, Annals of Mathematics, Vol. 56, 3, (1952), 504–519.

[10] Bonnet, O., *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables*, J. Éc. Polyt., 42, (1867), 72–92.

[11] Calladine, C. R., *Theory of shell structures,* Cambrige University Press, (1983).

[12] Capovilla, R., Guven, J., *Geometry of deformations of relativistic memebranes,* Phys. Rev. D 51, (1995), 6736–6743.

[13] Cauchy, A., *Sur les polygones et les polyedres,* Second Memoire, Journ. Ec. Polyt. 9, (1813), 87.

[14] Ciarlet, Ph. G., Iosifescu, O., *A new approuch to the infinitesimal theorem of surface theory, by means of the Darboux-Vallée-Fortuné compatibility relation,* J. Math. Pures Appl.(9), 91(4), (2009) 384–401

[15] Cohn-Vossen, S. E., *Nekotorye voprosy differ. geometrii c celom,* J. Fizmatgiz, Moskva, (1959).

[16] **Ćirić, M. S.,** *Notes on constant mean curvature surfaces and their graphical presentation,* Filomat 23:2, (2009), 96–106.

[17] **Ćirić, M. S.**, Zlatanović, M. Lj., Stanković, M., Velimirović, Lj. S., *On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces,* Applied Mathematics and Computation, 218, (2012), 6648–6655.

[18] Darboux, G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcus infinitésimal,* Tome IV: *Déformation infiniment petite et représentation sphérique,* Gauthier-Villars, Paris, (1896).

[19] Deza, E., Deza, M. M., *Dictionary of Distances*, Elsevier, Boston, (2006).

[20] Drezner, Z., *A note on the Weber location problem*, Ann. Oper. Res., 40, (1992), 153–161.

[21] Drezner, Z., Wesolowsky, G. O., *Facility location on a sphere*, J. Opl Res. Soc., Pergamon Press, 29, (1978), 997–1004.

[22] Drezner, Z., Hawacher, H., *Facility location: applications and theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2004).

[23] Dimitrijević, R., *Analiza realnih funkcija više promenljivih,* Niš, (1999).

[24] Du, Q., Liu, C., Wang, X., *Simulating the deformation of vesicle membranes under elastic bending energy in three dimensions,* Journal of computational physics, 212, (2006), 757–777.

[25] Eells, J., *The surfaces of Delaunay,* Math. Intelligencer, 9, (1987), 53-57.

[26] Einstein, A., *Generalization of the relativistic theory of gravitation*, Ann. math., 46, (1945), 578–584.

[27] Einstein, A., *Relativistic theory of the non-symmetric field*, Append. II in "The meaning of relativity", 5th edition, Princeton, (1955).

[28] Eisenhart, L. P., *An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus,* Princeton University Press, (1947).

[29] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemann spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 37, (1951), 311-315.

[30] Efimov, N., *Kachestvennye voprosy teorii deformacii poverhnostei,* UMN 3.2, (1948), 47–158.

[31] Fedchenko, Yu. S., *Normal and tangential geodesic deformations of the surfaces of revolution,* Ucraian Mathematical Journal, 61(10), (2009), 1640–1648.

[32] Fialkov, A., *Conformal geodesics,* Trans. Amer. Math. Soc., 45, (1939), 443–473.

[33] Fomenko, V. T., *Nekotorye rezultaty teorii beskonechno malyh izgibanii poverhnostei,* Mat. Sb., T. 72(114):3, (1967), UDK 513.736.4, 388–411.

[34] Fomenko, V. T., *On the unique definition of closed surfaces with respect to geodesic maps,* Dokl. Akad. Nauk, 407, No. 4, (2006), 453-456.

[35] Forsyth, A. R., *Calculus of variations,* Dover, (1960).

[36] Gavril'chenko, M. L., *On geodesic deformations of hypersurfaces,* Proc. Conf. Samarkand, (1972).

[37] Gavril'chenko, M. L., *Geodesic deformations of Riemannian spaces,* Diff. Geom. and its Applications, World Sci., Singapore, (1989), 47–53.

[38] Gavril'chenko, M. L., Kinzerska, N. N. *Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds,* Diff. geom. and appl. Proc. of the 7th Int. Conf. DGA 98. Brno: Masaryk Univ., (1999), 185–189.

[39] Gavril'chenko, M. L., Kiosak, V. A., Mikeš, J. *Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces,* Russ. Math., Vol.11 No.11, (2004), 23–29.

[40] Gray, A., *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica,* 2nd ed. CRC Press, (1998).

[41] Green, A. E, Zerna, W., *Theoretical elasticity,* 2nd ed. Oxford University Press, (1968).

[42] Hamacher, H. W., Nickel, S., *Classification of location models*, Location Science, 6, (1998), 229–242.

[43] Hinterleitner, I., Mikeš, J., Stránská, J., *Infinitesimal F-planar transformations,* Russ. Math., 4, (2008), 13–18.

[44] Heil, M., *Numerical tools for the study of finite gap solutions of integrable systems-doktorska disertacija,* TU Berlin, (1995).

[45] Helfrich, W., *Elastic properties of lipid bilayers-theory and possible experiments,* Z. Naturforsch. C, 28, (1973), 693–703.

[46] Ivanova-Karatopraklieva, I., *Infinitesimal bending of high order of rotational surfaces with a planer pole,* Serdica, 18, (1992), 59–78.

[47] Ivanova-Karatopraklieva, I., Sabitov, I., *Bending of surfaces II,* J. Math. Sci., New York 74 No 3, (1995), 997–1043.

[48] Kapouleas, N., *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space,* J. Differential Geom., 33, (1991), 683–715.

[49] Kapouleas, N., *Compact constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori,* Invent. Math., 119, (1995), 443–518.

[50] Leiko, S. G., Fedchenko, Yu. S., *Infinitesimal Rotary Deformations of Surfaces and Their Application to the Theory of Elastic Shells,* Ucraian Mathematical Journal, 55(12), (2003), 2031–2040.

[51] Levi-Civita, T., *Sur l'écart géodeésique,* Math. Ann., 97, 291–320.

[52] Levi-Civita, T., *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche,* Ann. di Mat. Milano, Ser.2, 24, (1896), 255–300.

[53] Liebman, H., *Eine neue Eigenshaft der Kugel,* Gott. Nachr., (1899), 44–55.

[54] Lipowsky, R., *The conformation of membranes,* Nature, 349, (1991), 475–481.

[55] Love, R. F., Morris, J. G., Wesolowsky, G. O., *Facilities Location: Models and Methods*, North-Holland, New York, (1988).

[56] Mikeš, J., *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci., New York, 78, No 3, (1996), 311–333.

[57] Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurová, A., *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*, Olomounc, (2008).

[58] Minčić, S. M. *Generalisani Rimanovi prostori-doktorska disertacija,* Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, (1975).

[59] Minčić, S. M., Stanković, M. S., *On geodesic mapping of general affine connection spaces and of generalized Riemannian spaces*, Mat. vesnik, 49, (1997), 27–33.

[60] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *Diferencijalna geometrija krivih i površi,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, (2007).

[61] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *Tenzorski račun,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, (2009).

[62] Mishra, R. S., *Subspaces of a generalized Riemannian space,* Bulletin de l'Acad. Roy. Belgique, (1954), 1058–1071.

[63] Mladenović, N., *Kontinualni lokacijski problemi,* Matematički institut, SANU, Beograd, (2004).

[64] Mutz, M., Helfrich, W., *Bending rigidities of some biological membranes as obtained from Fourier analysis of contour sections,* J. Phys. France, 51, (1990), 991–1002.

[65] Parthasarthy, M., Hale, T., Blackhurst J. i Frank, M., *The three-dimensional Fermat-Weber problem with Tchebychev distances,* Advances Modeling and Optimization, (2006), 65–71.

[66] Pogorelov, A. V., *Vneshnaya geometriya vypuklyh pov.,* Moskva, (1969).

[67] Prvanović, M., *Equations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannian généralisé,* Bull. de l'Acad. Roy. Belgique, (1955), 615–621.

[68] Radulovich, Zh., Mikeš, J., Gavril'chenko, M. L., *Geodezicheskie otobrazhenia i deformacii Rimanovyh prostranstv,* Odessa, Olomounc, (1998).

[69] Rančić, S. R., Velimirović, Lj. S. i Zlatanović, Lj. S., *Curvebend graphical tool for presentation of infinitesimal bending of curves,* Filomat, 23:2, (2009), 108–116.

[70] Rančić, S. R., *Vizuelizacija beskonačno malih savijanja krivih i površi-doktorska disertacija,* Prirodno-matematički fakultet u Nišu, (2011).

[71] Rembs, E., *Unverbiegbare offene Flächen,* Sitzungsberichte Akad. Berlin, (1930), 123–133.

[72] Roter, W., *A note infinitesimal projective transformations in reccurent spaces of second order,* Zesz. nauk. Politechn. Wroclawsk, 197, (1968), 87–94.

[73] Sabitov, I. Kh., *On the relations between infinitesimal bedings of different orders,* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 72, No. 4, (1994), 3237–3241.

[74] Sauer, R., *Krümmungsfeste Kurven bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung,* Math. Z., 38, (1934), 468–475.

[75] Schlenker, J. M., Souam, R., *Higher Schläfli formulas and applications,* Compos. Math., 135, (2003), 1–24.

[76] Singh, K. D., *On Generalized Riemann spaces,* Riv. Math. Univ. di Parma, 7, (1956), 126–138.

[77] Sinyukov, N. S., *On equidistant spaces*, Vestn. Odessk. Univ., Odessa, (1957), 133-155.

[78] Sinyukov, N. S., *Teorii geodezicheskikh otobrazhenii Rimanovyh prostranstv,* DAN SSSR, 169(4), (1966), 770–772.

[79] Sinyukov, N. S., *Geodezicheskie otobrazhenia Rimanovyh prostranstv,* Nauka, Moskva, (1979).

[80] Sinyukov, N. S., Gavrilchenko, M. L., *Infinitesimal geodesic deformations of surfaces*, Proc. Conf. Minsk, (1971).

[81] Souam, R., *The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces,* Differ. Geom. Appl., 20, (2004), 31–45.

[82] Stanimirović, P. S., Milovanović, G. V., *Programski paket Mathematica i primene,* Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, (2002).

[83] Stanimirović, P. S., **Ćirić, M. S.**, *Discrete location problem on arbitrary surface in R^3,* Facta Universitatis, Niš, Ser. Math. Inform., 25, (2010), 47-56.

[84] Stanimirović, P. S., **Ćirić, M. S.**, *Single-facility Weber Location Problem based on the Lift Metric,* arXiv:1105.0757v1 [math.OC] 4 May 2011.

[85] Stanković, M., Minčić, S., *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space,* Publications de L'Institut Mathématique, N.S. Vol.67(81), (2000), 92–102.

[86] Stanković, M., Minčić, S., *New special geodesic mappings of affine connection spaces,* Filomat, 14, (2000), 19–31.

[87] Stanković, M., *Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije-doktorska disertacija,* Prirodno-matematički fakultet u Nišu, (2001).

[88] Struik, D., *Lestures on Classical Differential Geometry* , Addison-Wesley Press, Cambrige, (1950).

[89] Trubin, V. A., *Effective algorithm for the Weber problem with a rectangular metric*, Cybernetics and Systems Analysis, 14(6), DOI:10.1007/BF01070282, Translated from Kibernetika, No. 6, pp. 67–70, November–December (1978).

[90] Tu, Z. C., Ou-Yang, Z. C., *A geometric theory on the elasticity of bio-membranes,* J. Phys. A: Math. Gen., 37, (2004), 11407–11429.

[91] Tu, Z. C., *Elastic theory of membranes,* AAPPS Bulletin 16, No 3, (2006), 30–33.

[92] Vekua, I., *Obobschennye analiticheskie funkcii,* Moskva, (1959).

[93] Velimirović, Lj. S., *Beskonačno male deformacije toroidnih rotacionih površi-magistarska teza,* Filozofski fakultet u Nišu, (1991).

[94] Velimirović, Lj. S., *Beskonačno mala savijanja površi-doktorska disertacija,* Matematički fakultet, Beograd, (1998).

[95] Velimirović, Lj. S., *On variation of the volume under infinitesimal bending of a closed rotational surface,* Novi Sad J. Math., 29(3) (1999), 377–386.

[96] Velimirović, Lj. S., *Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending,* Facta Universitates, Vol. 3, No 11, (2001), 135–148.

[97] Velimirović, Lj. S., *Infinitesimal bending of curves,*Matematicki bilten Skopje, Makedonija 25(LI), 25–36.

[98] Velimirović, Lj. S., *Infinitesimal bending,* Faculty of Science and Mathematics, Nis, (2009), ISBN 86-83481-42-5.

[99] Velimirović, Lj. S., **Ćirić, M. S.**, Cvetković, M., *Change of the Willmore energy under infinitesimal bending of membranes,* Computers and Mathematics with Applications, 59, (2010), 3679–3686.

[100] Velimirović, Lj. S., **Ćirić, M. S.**, Zlatanović, M. Lj., *Bendings of spherical curves,* 25th national and 2st international scientific conference moNGeometrija, (2010), 657–667.

[101] Velimirović, Lj. S., **Ćirić, M. S**., Velimirović, N., *On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations,* Computers and Mathematics with Applications, 61(11), (2011), 3181–3190.

[102] Velimirović, Lj. S., **Ćirić, M. S**., *On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending,* Applied Mathematics Letters, 24, (2011), 1515–1519.

[103] Velimirović, Lj. S., Cvetković, M. D., **Ćirić, M. S**., Velimirović, N., *Analysis of Gaudi Surfaces at Small Deformations,* Applied Mathematics and Computation, 218, (2012), 6999–7004.

[104] Walter, R., *Explicit examples to the H-problem of heinz Hopf,* Geom. Dedicata, 23, (1987), 187–213.

[105] Wente, H., *Counterexample to a conjecture of H. Hopf,* Pacific J. Math., 121, (1986), 193–243.

[106] Weiszfeld, E., *Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum*, Tôhoku Math. J., 43, (1937), 355–386.

[107] Wesolowsky, G. O., *Location problem on a sphere*, Regional Science and Urban Economics, 12, (1983), 495–508.

[108] Wesolowsky, G.O., *The Weber problem: History and perspectives,* Location Science, 1, (1993), 5–23.

[109] Williams, C. K. J., *Use of structural analogy in generation of smooth surfaces for engineering purposes,* Computer-aided design, Vol. 19, No 6, (1987), 310–322.

[110] Yano, K., *Concincular geometry,* Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16, (1940), 505-511.

[111] Yano, K., Takano, K., Tomonaga, Y., *On the Infinitesimal Deformations of Curves in the Spaces with Linear Connection,* Vol. 22, (1946), 294-309.

[112] Yano, K., *Sur la théorie des déformations infinitésimales,* Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, 6, (1949), 1–75.

[113] Yano, K., *The theory of Lie derivatives and its applications,* N-Holland Publ. Co. Amsterdam, (1957), 1–75.

[114] Zlatanović, M. Lj., *Ekvitorziona preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije-doktorska disertacija,* Prirodno-matematički fakultet u Nišu, (2010).