УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

КОЦЕВ ДАРКО

НЕКЕ СЕЛЕКЦИОНЕ ОСОБИНЕ ТОПОЛОШКИХ ПРОСТОРА И ЊИХОВИХ ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА

Докторска дисертација

МЕНТОР

ДР ЉУБИША КОЧИНАЦ

Ниш, 2012.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Дарко Коцев
Ментор, **МН**:	Љубиша Кочинац
Наслов рада, **НР**:	Неке селекционе особине тополошких простора и њихових генерализација
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2012
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	65 стр., 3 поглавља
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	топологија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	селекциони принципи
УДК	515.122.8 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији разматрамо селекционе принципе у релатор просторима и нека покривачка својства у тополошким просторима. У првом поглављу разматрамо својство релатор Менгера, одговарајућу игру и нека својства у вези са њим. У другом поглављу користимо околине и затворења да дефинишемо својства у тополошким просторима одговарајућа класичним својставима Менгера, Ротбергера и Хуревица и дајемо неке резултате. У трећем поглављу дефинишемо селекционе принципе у релатор просторима на исти начин као у другом поглављу, дајемо примере који показују да су та својства слабија од одговарајућих и разматрамо производ и релатор непрекидна пресликавања простора са тим својствима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	уписује се накнадно руком
Члан:	
Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Darko D. Kocev**
Mentor, **MN**:	**Ljubiša Kočinac**
Title, **TI**:	Some selection properties of topological spaces and their generalizations
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2012**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**65 p. ; 3 chapters**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**topology**
Subject/Key words, **S/KW**:	**selection principles**
UC	**515.122.8 (043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this dissertation we consider selection principles in relator spaces and some covering properties in topological spaces. In the first shapter we consider the property of relator Menger, the corresponding game and some related properties. In the second chapter we use neighbourhoods and closures to define selection principles in topological spaces corresponding to the classical notions of Menger, Rothberger and Hurewicz and give some results. In the third chapter we define selection principles in relator spaces in the same manner as in chapter two, give examples that show that these properties are weaker than the corresponding properties and consider products and relator continuous mappings of these notions.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	

Member:	
Member, Mentor:	

Predgovor

Teorija selekcionih principa predstavlja značajno polje istraživanja u topologiji. 20-tih i 30-tih godina prošlog veka, Hurewicz, Menger i Rothberger su udarili temelje ovoj matematičkoj disciplini (vidi [19], [34], [43]). Do 1996. godine rezultati u vezi sa teorijom selekcionih principa pojavljivali se povremeno i nesistematizovano. Te godine M. Scheepers objavljuje jedan samostalan [47] i jedan koautorski rad [20] i tada počinje sistematsko izučavanje u ovoj oblasti. U poslednjim godinama značajno je porastao broj radova i autora koji se bave selekcionim principima i njihovom vezom sa mnogim oblastima topologije i matematike: teorijom igara, kombinatorikom, prostorima funkcija, hiperprostorima, uniformnim strukturama, topološkim grupama, analizom asimptotskih procesa u Karamatinoj teoriji i tako dalje (videti pregledne radove [27, 28, 59, 50, 46] i reference u tim radovima, a takodje i knjigu [29] posvećenu ovoj teoriji). Važan faktor u razvijanju ove oblasti bio je i korišćenje metoda zvezde u teoriji selekcionih principa (vidi [13], [33], [24]).

Árpád Száz se u seriji radova bavio istraživanjem relator prostora (vidi [52], [53], [54]), gde je mnoge topološke strukture definisao preko relatora. Pošto su relator prostori uopštenje topoloških prostora, uniformnih prostora, topoloških grupa itd., postavlja se pitanje da li neka tvrdjenja koja važe u topološkim prostorima, važe i u relator prostorima, odnosno koji uslov treba da zadovolji relator prostor da bi neko tvrdjenje iz topoloških prostora moglo analogno da se prenese u relator prostore.

Predmet razmatranja u ovoj doktorskoj disertaciji biće neki selekcioni principi u topološkim i relator prostorima. U prvom poglavlju predstavićemo originalne rezultate vezane za svojstva relator Mengera, n-relator Mengera i svojstva u vezi sa njima. Videćemo kako se ponašaju ta svojstva u odnosu na operacije potprostora i proizvoda, kao i pri neprekidnim preslikavanjima. Posmatraćemo i igre koje odgovaraju svojstvu relator Mengera. Navešćemo primere koji pokazuju da uvedeni pojmovi nisu ekvivalentni.

U drugom poglavlju, koristeći operatore zatvorenja i okoline, definisani su selekcioni principi u topološkim prostorima i pokazano je da ta svojstva nisu ekvivalentna odgovarajućim svojstvima Mengera, Rothbergera i Hurewicza. U drugom odeljku ove glave pokazano je da se u definiciji skoro Mengerovih prostora otvoreni skupovi mogu zameniti regularno otvorenim skupovima, kao i još neke osobine vezane za operaciju proizvoda i skoro neprekidne slike. Takodje, pokazano je da su u regularnim prostorima svojstva Mengera i skoro Mengera ekvivalentna.

U trećem poglavlju definisana su selekciona svojstva u relator prostorima odgovarajuća svojstvima definisanim u drugom poglavlju. Dati su primeri kojima je pokazana distinkcija izmedju nekih selekcionih svojstava. Razmatrani su problem proizvoda i invarijantnosti pri relator neprekidnim preslikavanjima. Na kraju poglavlja definisana su i relativna selekciona svojstva u relator prostorima i data su neka tvrdjenja vezana za njih.

Sadržaj

Uvodni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove i simbole vezane za selekcione principe i relator prostore koje ćemo u nastavku disertacije koristiti.

Neka je X topološki prostor. Kažemo da je kolekcija podskupova $\mathcal{U}$ od X pokrivač za X ako za svaki element $x \in X$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $x \in U$. Ako su svi elementi kolekcije $\mathcal{U}$ otvoreni skupovi, onda kažemo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od X.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kolekcije podskupova beskonačnog skupa X. Tada:

$\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ postoji niz $\{U_n : n \in N\}$ tako da za svaki $n \in \mathbf{N}$ važi $U_n \in \mathcal{U}_n$ i $\{U_n : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

$\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ postoji niz $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ tako da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, U_n konačan pdeskup od $\mathcal{U}_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n \in \mathcal{B}$.

$\mathsf{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ postoji niz $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ tako da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, U_n konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\{\cup U_n : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

Pre nego što definišemo zvezda selekcione principe, uvešćemo pojam operatora zvezde. Neka je A podskup topološkog prostora X i neka je $\mathcal{P}$ kolekcija podskupova od X. Sa $St(A, \mathcal{P})$ označićemo uniju svih elemenata iz $\mathcal{P}$ koji imaju neprazan presek sa A. U radu [24], Kočinac je uveo zvezda selekcione principe na sledeći način:

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kolekcije otvorenih pokrivača topološkog prostora X. Tada:

$\mathcal{S}_1^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{A}$ možemo da nadjemo $U_n \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\{St(U_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{S}^*_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{A}$ možemo da nadjemo konačne $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{St(V,\mathcal{U}_n) : V \in \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{SS}^*_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{A}$ možemo da nadjemo tačke $x_n \in X$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\{St(\{x_n\},\mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{SS}^*_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ označava selekcionu hipotezu da za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{A}$ možemo da biramo konačne $F_n \subset X$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\{St(F_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

U ovoj disertaciji svi prostori biće Hausdorff-ovi, a $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ biće kolekcije sledećih otvorenih pokrivača od X:

- $\mathcal{O}$: kolekcija svih otvorenih pokrivača od X;
- Ω: kolekcija ω-pokrivača od X. Otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X je ω pokrivač ako X ne pripada $\mathcal{U}$ i za svaki konačan podskup F od X postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $F \subset U$.
- Γ: kolekcija γ pokrivača od X. Otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X je γ pokrivač ako je beskonačan i svaki $x \in X$ pripada svim sem konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{U}$.
- $\mathcal{O}^{gp}$: kolekcija grupabilnih otvorenih pokrivača. Otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X je grupabilan ako može da se predstavi kao prebrojiva unija konačnih, uzajamno disjunktnih podfamilija $\mathcal{U}_n$, $n \in N$, tako da svaki $x \in X$ pripada $\bigcup \mathcal{U}_n$ za sve sem konačno mnogo $n \in N$.
- $\mathcal{O}^{wgp}$: kolekcija slabo grupabilnih otvorenih pokrivača. Otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X je slabo grupabilan ako može da se predstavi u obliku prebrojive unije konačnih, uzajamno disjunktnih podfamilija $\mathcal{U}_n$, $n \in N$, tako da za svaki konačan podskup F od X postoji $n \in N$ tako da je $F \subset \bigcup \mathcal{U}_n$.

Definicija 0.1 Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X:

- *Mengerov* (M) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$;
- *Rothbergerov* (R) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$;
- *Hurewiczev* (H) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$;

- *zvezda-Mengerov* (SM) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}^*_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

- *zvezda-Rothbergerov* (SR) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}^*_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

- *zvezda-Hurewiczev* (SH) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}^*_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$;

- *jako zvezda-Mengerov* (SSM) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{SS}^*_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

- *jako zvezda-Rothbergerov* (SSR) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{SS}^*_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

- *jako zvezda-Hurewiczev* (SSH) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{SS}^*_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$.

Sada ćemo navesti neke osnovne pojmove u vezi sa relacijama i relator prostorima.

Neka su X i Y neprazni skupovi. Svaki podskup F Dekartovog proizvoda $X \times Y$ je relacija iz X u Y.

Specijalno, ako je $X = Y$, onda prosto kažemo da je F relacija na X. Primetimo da ako je F relacija iz X u Y, onda je F takodje relacija na $X \cup Y$. Zato se često pretpostavlja da je $X = Y$. Relacije $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ i $X^2 = X \times X$ zovu se identična i univerzalna relacija na X, respektivno.

Ako je F relacija iz X u Y, $x \in X$ i $A \subset X$, onda kažemo da su skupovi $F(x) = \{y \in Y : (x,y) \in F\}$ i $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ slike od x i A pod relacijom F, respektivno.

Ako je F relacija iz X u Y, onda vrednosti $F(x)$, gde je $x \in X$, jednoznačno odredjuju F pošto je $F = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times F(x)$. Inverzna relacija od F u oznaci F^{-1} definiše se na sledeći način: $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ za svaki $y \in Y$.

Dalje, ako je F relacija iz X u Y, i G relacija iz Y u Z, onda se kompozicija $G \circ F$ definiše tako da je $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ za svaki $x \in X$. Ako je F relacija iz X u Y, a G relacija iz Z u W, onda se proizvod relacija F i G u oznaci $F \times G$ definiše tako da je $(F \times G)(x,z) = F(x) \times G(z)$ za svaki $x \in X$ i svaki $z \in Z$.

Za relaciju R na X kažemo da je refleksivna, simetrična i tranzitivna ako je $\Delta_X \subset R$, $R \subset R^{-1}$ i $R \circ R \subset R$, respektivno.

Ako je R relacija na X, onda pišemo da je $R^n = R \circ R^{n-1}$ za svaki $n \in N$ i uzimamo da je $R^0 = \Delta_X$. Takodje, pišemo $R^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$.

Neprazna familija $\mathcal{R}$ relacija na nepraznom skupu X zove se *relator* na X, a uredjeni par $X(\mathcal{R}) = (X, \mathcal{R})$ zove se *relator prostor*.

Neka $\mathcal{C}$ označava familiju pokrivača od X. Za datu relaciju $R \in \mathcal{R}$, gde je $\mathcal{R}$ relator na X, koristićemo sledeću notaciju:

- $\mathcal{U}_R = \{R(x) : x \in X\}$.
- $\omega(R) = \{R(F) : F \subset X \text{ konačan}\}$.
- $\mathcal{C}_\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_R : R \in \mathcal{R} \text{ i } \mathcal{U}_R \in \mathcal{C}\}$.
- $\Omega(\mathcal{R})$=$\{\omega(R) : R \in \mathcal{R} \text{ i } \omega(R) \in \mathcal{C}\}$.

Kažemo da je relator $\mathcal{R}$ filtriran ako za sve R_1 i R_2 iz $\mathcal{R}$, $R_1 \cap R_2$ je takodje u $\mathcal{R}$. Kažemo da relator $\mathcal{R}$ na X nije parcijalan ako za svaki $x \in X$ i svaki $R \in \mathcal{R}$ važi da je $R(x) \neq \emptyset$.

Ako relator $\mathcal{R}$ na X ima svojstvo P, tada kažemo da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo P. Dalje, ako inverzni relator $\mathcal{R}^{-1} = \{R^{-1} : R \in \mathcal{R}\}$ ima svojstvo P, onda kažemo da je $\mathcal{R}$ inverzno P.

Topološke pojmove poput otvorenih i zatvorenih skupova možemo da uvedemo u relator prostorima na sledeći način:

Ako je $\mathcal{R}$ relator na X, onda za sve $A, B \subset X$ i $x, y \in X$ pišemo da:

(1) $B \in Int_\mathcal{R}(A)$ $(B \in Cl_\mathcal{R}(A))$ ako $R(B) \subset A$ $(R(B) \cap A \neq \emptyset)$ za neki (svaki) $R \in \mathcal{R}$;

(2) $x \in int_\mathcal{R}\ (A)$ $(x \in Cl_\mathcal{R}\ (A))$ ako $\{x\} \in Int_\mathcal{R}\ (A)$ $(\{x\} \in Cl_\mathcal{R}\ (A))$;

(3) $y \in \sigma_\mathcal{R}(x)$ $(y \in \rho_\mathcal{R}(x))$ ako $y \in int_\mathcal{R}(\{x\})$ $(y \in cl_\mathcal{R}(\{x\})$;

(4) $A \in \mathcal{T}_\mathcal{R}$ $(A \in \mathcal{F}_\mathcal{R})$ ako $A \subset int_\mathcal{R}(\ A)$ $(cl_\mathcal{R}(A) \subset A)$.

Ako je $\mathcal{R}$ relator na X, onda za relatore

$\mathcal{R}^* = \{S \subset X^2 : \exists R \in \mathcal{R} : R \subset S\}$,

$\mathcal{R}^\sharp = \{S \subset X^2 : \forall A \subset X : A \in Int_\mathcal{R}(S(A))\}$,

$\mathcal{R}^\wedge = \{S \subset X^2 : \forall x \in X : x \in int_\mathcal{R}(S(x))\}$,

kažemo da su uniformno, proksimalno i topološko profinjenje od $\mathcal{R}$, respektivno. Za dva relatora $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ na X kažemo da su topološki (uniformno) ekvivalentni ako je $\mathcal{R}^\wedge = \mathcal{S}^\wedge$ $(\mathcal{R}^\sharp = \mathcal{S}^\sharp)$.

Ako je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor i $Y \subset X$, onda je $(Y, \mathcal{R}_Y)$ relator potprostor od $(X, \mathcal{R})$, gde su elementi iz $\mathcal{R}_Y$ restrikcije relacija iz $\mathcal{R}$ na $Y \times Y$.

Neka su $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ relator prostori. Funkcija $f : (X, \mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{S})$ je relator neprekidna (ili prosto neprekidna) ako za svaki $S \in \mathcal{S}$ postoji $R \in \mathcal{R}$ tako da za svaki $x \in X$, $f(R(x)) \subseteq S(f(x))$.

Sva druga označavanja i terminologija su isti kao u [14].

Glava 1

Selekcioni principi u relator prostorima

1.1 Svojstvo relator Mengera i svojstva u vezi sa njim

Uvodimo pojam relator Mengerovog prostora i istražujemo njegove osobine na sličan način kao što je to radjeno u topološkim grupama (vidi [6], [17], [18]).

Definicija 1.1 (Kočinac) Kažemo da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima *svojstvo relator Mengera* (skraćeno RM) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n) = X$.

Prirodno možemo uvesti i odgovarajuće svojstvo tipa Rothbergera na sledeći način: Kažemo da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima *svojstvo relator Rothbergera* (skraćeno RR) ako za svaki niz relacija $(R_n : n \in \mathbf{N})$ iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X tako da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(x_n) = X$.

Naravno, ako $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Rothbergera, onda $(X, \mathcal{R})$ ima i svojstvo relator Mengera.

Naredna teorema je generalizacija Teoreme 3 iz [6] i opravdava "Menger" terminologiju.

Teorema 1.1 *Za relator prostor $(X, \mathcal{R})$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(1) $(X, \mathcal{R})$ *ima svojstvo relator Mengera;*

(2) $(X, \mathcal{R})$ *zadovoljava selekcioni princip* $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$*;*

(3) $(X, \mathcal{R})$ *zadovoljava selekcioni princip* $\mathsf{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C})$*.*

Primer 1.1 Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva i neka je d uobičajena metrika na $\mathbf{R}$. Ako definišemo relator $\mathcal{D}$ na $\mathcal{R}$ kao familiju relacija $\mathcal{D}_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbf{R}$, gde je $\mathcal{D}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : d(x, y) < \varepsilon\}$, onda se lako pokazuje da $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ ima svojstvo relator Mengera. Isto tvrdjenje važi i za $\mathbf{R^n}$, $n \in \mathbf{N}$, sa relatorom generisanim metrikom d koja je definisana na sledeći način: $d(x, y) = [\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1/2}$. $\square$

Primer 1.2 Neka je $\mathbf{R}^\omega$ skup svih nizova realnih brojeva $(x_i : i \in \mathbf{N})$ i neka je d uobičajena metrika na $\mathbf{R}$ i $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \mathbf{d(x, y)} < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Ako stavimo da je

$$D_\varepsilon^n = \underbrace{B_\varepsilon \times B_\varepsilon \times ... \times B_\varepsilon}_{n} \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times ...,$$

onda je $\mathcal{D} = \{D_\varepsilon^n : \varepsilon \in \mathbf{R}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}\}$ relator na $\mathbf{R}^\omega$.

Pokazaćemo da relator prostor $(\mathbf{R}^\omega, \mathcal{D})$ nema svojstvo relator Mengera.

Za svaki $n \in \mathbf{N}$, neka je $R_n = D_1^n$ i neka je $(F_n : n \in \mathbf{N})$ niz konačnih podskupova od $\mathbf{R}^\omega$. Ako je p_n projekcija iz $\mathbf{R}^\omega$ u $\mathbf{R}$, onda postoji $x_n \in \mathbf{R}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ tako da $x_n \notin B_1(p_n(F_n))$. Niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ ne pripada $\cup_{n=1}^\infty R_n(F_n)$. $\square$

Možemo da definišemo i odgovarajuću igru.

Definicija 1.2 Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Dva igrača, $PRVI$ i $DRUGI$, igraju naizmenično po potez za svaki prirodan broj. U n-tom potezu $PRVI$ bira relaciju R_n iz $\mathcal{R}$, a $DRUGI$ odgovara birajući konačan podskup F_n od X. $DRUGI$ pobedjuje u igri $R_1, F_1, R_2, F_2, ...$ ako je $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n)$; u suprotnom pobedjuje $PRVI$. Kažemo da je $(X, \mathcal{R})$ *strogo relator Mengerov* ako $DRUGI$ ima pobedničku strategiju u ovoj igri.

Ova terminologija je inspirisana terminologijom iz [18]. Ako koristimo simbole G_1 i G_{fin}, možemo da kažemo da je ova igra $\mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C})$ i da je ekvivalentna igri $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$. Umesto tvrdjenja "$DRUGI$ ima pobedničku strategiju u igri $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$" pisaćemo $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$ (to je notacija

Telgárskog). Lako je proveriti da je u Primeru 1.1 relator prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ strogo relator Mengerov.

Možemo takodje da razmatramo i "$PRVI$ nema pobedničku strategiju u igri $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$". Očigledno, važe sledeće implikacije:

$TWO \uparrow \mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C}) \Rightarrow PRVI$ nema pobedničku strategiju u $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$ $\Rightarrow \mathsf{S}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$.

Sledeći primer, koji je modifikacija Primera 6.1 iz [17] pokazuje da postoji relator Mengerov prostor koji nije strogo relator Mengerov.

Primer 1.3 Posmatraćemo skup $\mathbf{R}^\omega$ svih nizova realnih brojeva. Za svaki $x \in \mathbf{R}^\omega$ označićemo sa $\mathrm{supp}(x) = \{n \in \mathbf{N} : \mathbf{x(n)} \neq \mathbf{0}\}$, i neka je $\{n_k(x) : k \in \mathbf{N}\}$ numeracija od $\mathrm{supp}(x)$ u rastućem poretku. Označimo sa X skup svih $x \in \mathbf{R}^\omega$ tako da je $\lim_{k\to\infty} \frac{x(n_k)}{n_{k+1}} = 0$. Razmatraćemo aditivnu grupu G generisanu sa X. Definisaćemo takodje relator $\mathcal{D}$ na G na isti način kao u Primeru 1.2.

Prvo ćemo pokazati da relator prostor $(G, \mathcal{D})$ nije strogo relator Mengerov. Da bismo to pokazali, konstruisaćemo igru tako da $PRVI$ ima pobedničku strategiju. U prvoj rundi, $PRVI$ bira relaciju $R_1 = D_1^1$. Pretpostavićemo da $DRUGI$ u prvoj rundi bira konačan podskup F_1 od G. Stavimo $n_1 = 1$ i birajmo $x(1) \in \mathbf{R} \backslash B_1(p_1(F_1))$, gde je $p_1 : \mathbf{R}^\omega \to \mathbf{R}$ projekcija na prvu koordinatu. Uzimamo $n_2 \in \mathbf{N}$ tako da je $|x(1)| < n_2$. U drugoj rundi, $PRVI$ bira $R_2 = D_1^{n_2}$, dok $DRUGI$ uzima konačan podskup F_2 od G.

Pretpostavimo da su igrači izabrali relacije $R_1, R_2, ..., R_k$, konačne skupove $F_1, F_2, ..., F_k$, prirodne brojeve $n_1 < n_2 < ... < n_k$ i realne brojeve $x(1), x(2), ..., x(k)$ tako da $(l-1) \cdot |x_{n_{l-1}}| < n_l$ i $x(n_l) \in \mathbf{R} \backslash B_1(p_l(F_l))$ za svaki $l \leq k$ i birajmo $n_{k+1} \in \mathbf{N}$ tako da $k \cdot |x(n_k)| < n_{k+1}$. U $(k+1)$-oj rundi, $PRVI$ bira $R_{k+1} = D_1^{n_{k+1}}$, a $DRUGI$ bira konačan podskup F_{k+1} od G. Lako se vidi da tačka $p \in \mathbf{R}^\omega$ definisana sa $p(n) = x(n)$ ako je $n \in \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$, i $p(n) = 0$ u drugim slučajevima, ne pripada $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)$ i $p \in X$. Tačka p svedoči da $PRVI$ ima pobedničku strategiju u ovoj igri.

Sada ćemo da pokažemo da relator prostor $(G, \mathcal{D})$ ima svojstvo relator Mengera. Prvo ćemo pokazati da za svaki rastući niz prirodnih brojeva $q_0 < q_1 < ... < q_i < ...$ i svaki niz $(B_i : i \in \mathbf{N})$ podskupova od $\mathbf{R}^\omega$ definisan sa $B_i = \prod_{j\in\mathbf{N}} A_{i,j}$, gde je $A_{i,j} = [-q_{i+1}, q_{i+1}]$ za $j \leq q_i$ i $A_{i,j} = \mathbf{R}$ za $j > q_i$ imamo da je $X \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i$.

Neka je $x \in X$. Onda važi da je $\lim_{k\to\infty} \frac{x(n_k)}{n_{k+1}} = 0$, pa možemo da nadjemo $N \in \mathbf{N}$ tako da je $x(n_k) < n_{k+1}$ za svaki $k \geq N$.

Stavimo $M = \max\{|x(n_1)|, ..., |x(n_N)|\}$. Uzmimo $i_0 \in \mathbf{N}$ i $p \in \mathbf{N}$ tako da je $q_{i_0} > M$ i $q_{i_0} \leq n_p < q_{i_0+1}$. Neka je $k \in \mathbf{N}$ proizvoljan. Ako je $n_k > q_{i_0}$, onda $A_{i_0,n_k} = \mathbf{R}$, pa $x(n_k) \in A_{i_0,n_k}$; ako je $k < N$ i $n_k \leq q_{i_0}$, onda je $|x(n_k)| \leq M < q_{i_0}$ i $x(n_k) \in A_{i_0,n_k}$; konačno, ako je $k \geq N$ i $n_k \leq q_{i_0}$, onda je $k < p$ i $|x(n_k)| \leq n_{k+1} < q_{i_0+1}$. Odatle sledi da je $x(n_k) \in A_{i_0,n_k} = [-q_{i_0+1}, q_{i_0+1}]$, pa je $x(j) \in A_{i_0,j}$ za svaki $j \in \mathbf{N}$, to jest $x \in B_{i_0}$.

Neka je $(D^{q_k}_{\varepsilon_k} : k \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{D}$. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ postoji $\delta_k \in \mathbf{R}$ tako da je $\underbrace{D^{q_k}_{\delta_k} \circ D^{q_k}_{\delta_k} \circ ... \circ D^{q_k}_{\delta_k}}_{k} \subseteq D^{q_k}_{\varepsilon_k}$. Možemo da pretpostavimo bez gubljenja opštosti da je niz $(q_k : k \in \mathbf{N})$ rastući. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ možemo da nadjemo konačne podskupove $E_k \subseteq G$ takve da je $D_{\delta_k}(E_k)$ pokrivač za B_k. Stavimo $F_k = \underbrace{E_k + E_k + ... + E_k}_{k}$. Dokazaćemo da je $\{D^{q_k}_{\varepsilon_k}(F_k) : k \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za G.

Zaista, neka je $g \in G$. Onda imamo da je $g = g_1 + g_2 + ... + g_n$ gde je $g_i \in X$ za svaki $i \leq n$. Pošto je $X \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i$, $g_i \in B_{k_i}$ za neko $k_i \in \mathbf{N}$ i svaki $i \leq n$. Neka je $k = \max\{k_1, k_2, ..., k_n, n\}$. Tada imamo da je

$$g_1 + g_2 + ... + g_n \in \underbrace{D^{q_k}_{\delta_k}(E_k) + D^{q_k}_{\delta_k}(E_k) + ... + D^{q_k}_{\delta_k}(E_k)}_{n}$$

$$\subseteq \underbrace{D^{q_k}_{\delta_k}(E_k) + D^{q_k}_{\delta_k}(E_k) + ... + D^{q_k}_{\delta_k}(E_k)}_{k}$$

$$\subseteq \underbrace{D^{q_k}_{\delta_k} \circ D^{q_k}_{\delta_k} \circ ... \circ D^{q_k}_{\delta_k}}_{k}(\underbrace{E_k + E_k + ... + E_k}_{k})$$

$$\subseteq D^{q_k}_{\varepsilon_k}(F_k). \quad \square$$

Prethodni primer takodje pokazuje da postoji relator Mengerov prostor takav da $PRVI$ ima pobedničku strategiju u igri $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$.

Problem 1.1. Koje uslove treba da zadovoljavaju relator Mengerovi prostori da $PRVI$ nema pobedničku strategiju u odgovarajućoj igri?

Prirodno se nameću pitanja da li se svojstva relator Mengera i strogo relator Mengera čuvaju pri prelasku na potprostor i pri neprekidnim funkcijama. Sledeće dve teoreme daju odgovore na ova pitanja.

Teorema 1.2 *Neka je $(Y, \mathcal{R}_Y)$ relator potprostor (strogo) relator Mengero-*

vog prostora $(X,\mathcal{R})$. Ako za svaki $S \in \mathcal{R}$ postoji $R \in \mathcal{R}$ tako da $R \circ R^{-1} \subset S$, onda $(Y,\mathcal{R}_Y)$ je (strogo) relator Mengerov prostor.

Dokaz. Dokazaćemo samo slučaj kada je $(X,\mathcal{R})$ relator Mengerov prostor. Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}_Y$ i $(T_n : n \in \mathbf{N})$ odgovarajući niz iz $\mathcal{R}$ tako da je $T_n \cap Y^2 = S_n$ za $n \in \mathbf{N}$. Prema uslovu teoreme, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $R_n \in \mathcal{R}$ tako da je $R_n \circ R_n^{-1} \subset T_n$. Pošto je $(X,\mathcal{R})$ relator Mengerov prostor, možemo da nadjemo konačne podskupove $F_n, n \in \mathbf{N}$, tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) = X$. Ako je $x \in F_n$ i ako $R_n(x) \cap Y \neq \emptyset$, onda uzimamo $a_x \in R_n(x) \cap Y$; inače uzimamo proizvoljno $a_x \in Y$. Neka je $A_n = \{a_x : x \in F_n\}$. Tvrdimo da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n(A_n) = Y$.

Zaista, neka je $y \in Y$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $y \in R_n(F_n)$ pa možemo da biramo $x \in F_n$ tako da je $y \in R_n(x)$. Pošto $R_n(x) \cap Y \neq \emptyset$, imamo da $a_x \in R_n(x) \cap Y$ odakle sledi da $x \in R_n^{-1}(a_x)$.

Konačno, imamo da

$$y \in R_n(x) \subseteq R_n(R_n^{-1}(a_x)) \subseteq T_n(a_x) \subseteq T_n(A_n).$$

Odatle sledi da $y \in S_n(a_x)$, pošto su i y i a_x u Y.

Dokaz je sličan u slučaju strogo relator Mengerovog prostora. □

Teorema 1.3 *Neka su $(X,\mathcal{R})$ i $(Y,\mathcal{S})$ relator prostori. Ako je $(X,\mathcal{R})$ relator Mengerov prostor i $f : (X,\mathcal{R}) \to (Y,\mathcal{S})$ je relator neprekidna surjekcija, onda je $(Y,\mathcal{S})$ relator Mengerov prostor.*

Dokaz. Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{S}$. Prema uslovu teoreme, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $R_n \in \mathcal{R}$ tako da $f(R_n(x)) \subseteq S_n(f(x))$ za svaki $x \in X$. Pošto je $(X,\mathcal{R})$ relator Mengerov, postoje konačni podskupovi F_n od X, gde je $n \in \mathbf{N}$, takvi da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) = X$. Pokazaćemo da je $(f(F_n) : n \in \mathbf{N})$ niz konačnih podskupova od Y takav da $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n(f(F_n)) = Y$. Imamo da je

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f(R_n(F_n)) = f(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)) = f(X) = Y.$$

Pošto je $f(R_n(F_n)) \subseteq S_n(f(F_n))$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, tvrdjenje je tačno. □

Kažemo da je relator prostor $(X,\mathcal{R})$ *relator kompaktan* (*relator Lindelöfov*) ako za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji konačan (prebrojiv) podskup A od X tako da je $R(A) = X$. $(X,\mathcal{R})$ je *relator σ-kompaktan* ako može da se predstavi kao prebrojiva unija relator kompaktnih potprostora.

Sledeće dve teoreme su uopštenja analognih tvrdjenja u topološkim prostorima.

Teorema 1.4 *Ako relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Mengera, onda je $(X, \mathcal{R})$ relator Lindelöfov.*

Dokaz. Neka je R proizvoljna relacija iz $\mathcal{R}$. Pošto $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Mengera, onda postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R(F_n) = X$. Neka je $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Važi da je $R(A) = R(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R(F_n) = X$. $\square$

Teorema 1.5 *Ako je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan, onda $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo strogo relator Mengera.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan. Onda možemo da pišemo $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$, gde je $(X_n, \mathcal{R})$ relator kompaktan prostor i $X_n \subseteq X_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Recimo da u n-toj rundi $PRVI$ bira relaciju R_n iz $\mathcal{R}$. Tada $DRUGI$ igrač odgovara tako što bira konačan podskup F_n od X tako da je $X_n \subset R_n(F_n)$. Dokazaćemo da je to pobednička strategija za $DRUGOG$ igrača.

Neka je $x \in X$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da $x \in X_n$. Pošto $X_n \subset R_n(F_n)$, zaključujemo da $x \in R_n(F_n)$. $\square$

U topološkim prostorima, obrat prethodnog tvrdjenja ne važi.

Problem1.**2**. Pod kojim uslovima je strogo relator Mengerov prostor relator σ-kompaktan?

Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *k-relator Mengerov* ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(K_n : n \in \mathbf{N})$ relator kompaktnih podskupova od X takav da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(K_n) = X$. Ako koristimo označavanje:

- $\mathcal{K}(R) = \{R(K) : K \subset X \text{ relator kompaktan}\}$,
- $\mathcal{K}(\mathcal{R})$=$\{\mathcal{K}(R) : R \in \mathcal{R} \text{ i } \mathcal{K}(R) \in \mathcal{C}\}$,

  onda je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ k-relator Mengerov ako i samo ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{S}_1(\mathcal{K}(\mathcal{R}), \mathcal{C})$.

Pokazaćemo da su pod nekim uslovima pojmovi relator Mengerovog i k-relator Mengerovog prostora ekvivalentni.

Teorema 1.6 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor takav da je R refleksivna i tranzitivna za svaki $R \in \mathcal{R}$. Onda je $(X, \mathcal{R})$ relator Mengerov ako i samo ako je k-relator Mengerov.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Tada postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) = X$. Pošto je svaki $R \in \mathcal{R}$ refleksivna relacija, za svaki $n \in \mathbf{N}$ imamo da je $F_n \subset R(F_n)$ za svaki $R \in \mathcal{R}$. Dakle, za svaki $n \in \mathbf{N}$, F_n je relator kompaktan pa odatle sledi da je $(X, \mathcal{R})$ k-relator Mengerov.

($\Leftarrow$) Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Tada postoji niz $(K_n : n \in \mathbf{N})$ relator kompaktnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(K_n) = X$. Pošto je K_n relator kompaktan, postoje konačni podskupovi F_n od X takvi da je $K_n = R_n(F_n)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Prema pretpostavci tvrdjenja, imamo da je

$$X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(K_n) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(R_n(F_n)) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n).\square$$

Posmatrajmo sada profinjenja relatora $\mathcal{R}$ u relator prostoru $(X, \mathcal{R})$. Uvešćemo sledeće pojmove:

Definicija 1.3 Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{R})$ *uniformno* (resp. *proksimalno*, *topološko*) *relator Mengerov* prostor ako je $(X, \mathcal{R}^*)$ (resp. $(X, \mathcal{R}^\sharp)$, $(X, \mathcal{R}^\wedge)$) relator Mengerov prostor.

Očigledno je da ako $(X, \mathcal{R})$ ima uniformno (topološko, proksimalno) svojstvo relator Mengera, onda $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Mengera. U slučaju uniformnog svojstva relator Mengera važi i obrat. Isto tako jasno je da "topološko relator Mengerov" $\Rightarrow$ "proksimalno relator Mengerov" $\Rightarrow$ "uniformno relator Mengerov". U [55] pokazano je da "proksimalno kompaktno svojstvo" ne implicira "topološko kompaktno svojstvo" i da "uniformno kompaktno svojstvo" ne implicira "proksimalno kompaktno svojstvo". Iskoristićemo Teoreme 3.3 i 3.6 iz [55] da pokažemo da "proksimalno relator Mengerovo svojstvo" ne implicira "topološko relator Mengerovo svojstvo" i da "uniformno relator Mengerovo svojstvo" ne implicira "proksimalno relator Mengerovo svojstvo".

Teorema 3.3 iz [55] kaže:

Teorema 1.7 *Ako je $\mathcal{R}$ inverzno ne-parcijalni relator na nepraznom skupu X i za svaki $x \in X$ i svaki $R \in \mathcal{R}$ stavimo da je $V_{(x,R)}(z) \subset X \times X$ relacija na X takva da je $V_{(x,R)}(z) = X$ za $z = x$ i $V_{(x,R)}(z) = R(z)$ za $z \in X \setminus \{x\}$, onda je $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \{V_{(x,R)} : x \in X, R \in \mathcal{R}\}$ uniformno kompaktan relator na X takav da su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ proksimalno ekvivalentni.*

Primer 1.4 Neka je X neprebrojiv skup i $\mathcal{R} = \{\Delta_X\}$, onda je $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ uniformno kompaktan relator na X pa samim tim i uniformno Mengerov relator na X. S druge strane, $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ nije proksimalno Mengerov, pošto $\Delta_X \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\sharp = (\mathcal{V}_{\mathcal{R}})^\sharp$. Samim tim, ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ uzmemo da je $R_n = \Delta_X$, onda ne postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) = X$, pošto je X neprebrojiv, a $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)$ je prebrojiv skup.

Napomena. Ovaj primer takodje pokazuje da postoji uniformno Lindelöfov relator koji nije proksimalno Lindelöfov.

Teorema 3.6 iz [55] kaže sledeće:

Teorema 1.8 *Ako je $\mathcal{R}$ relator na X i $card(X) > 1$, onda ako za svaki $x \in X$ i svaki $R \in \mathcal{R}$ stavimo da je $W_{(x,R)} \subset X \times X$ relacija takva da je $W_{(x,R)}(z) = R(x)$ za $z = x$ i $W_{(x,R)}(z) = X$ za $z \in X \setminus \{x\}$, onda je $\mathcal{W}_{\mathcal{R}} = \{W_{(x,R)} : x \in X, R \in \mathcal{R}\}$ proksimalno kompaktan relator na X takav da su $\mathcal{R}$ i $\mathcal{W}_{\mathcal{R}}$ topološki ekvivalentni.*

Primer 1.5 Neka je X neprebrojiv skup i neka je $\mathcal{R} = \{\Delta_X\}$. Tada je prema prethodnoj teoremi relator prostor $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{R}})$ proksimalno kompaktan pa je i proksimalno relator Mengerov. Relator prostor $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{R}})$ nije topološki relator Mengerov, jer $\Delta_X \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\wedge = {\mathcal{W}_{\mathcal{R}}}^\wedge$, pa ako je $R_n = \Delta_X$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, onda za svaki niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X familija skupova $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ne pokriva X pošto je X neprebrojiv, a $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)$ je prebrojiv skup.

Napomena. Prethodni primer takodje pokazuje da postoji proksimalno Lindelöfov relator koji nije topološki Lindelöfov.

Kažemo da je pokrivač $\mathcal{U}$ skupa X *slabo grupabilan* [5] ako može da se predstavi kao unija prebrojivo mnogo konačnih, medjusobno disjunktnih podfamilija $\mathcal{U}_n$ takvih da za svaki konačan podskup F od X postoji n takvo da je $F \subset \cup\mathcal{U}_n$. Drugim rečima, ako stavimo da je $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbf{N}\}$, onda postoji niz $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ prirodnih brojeva takav da za svaki konačan podskup F of X postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $F \subset \bigcup_{n_k \leq i < n_{k+1}} U_i$.

Teorema 1.9 *Za relator prostor $(X, \mathcal{R})$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(1) *Za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da je $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X;*

(2) *Za svaki niz* $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ *postoji niz* $(F_n : n \in \mathbf{N})$ *konačnih podskupova od* X *takav da je* $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ *slabo grupabilan pokrivač za* X.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Ovo je očigledno, jer je svaki ω-pokrivač slabo grupabilan.

(2) $\Rightarrow$ (1): Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{R}$. Prema (2), možemo da izaberemo niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da je $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ slabo grupabilan pokrivač za X. Stoga, postoji niz $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ prirodnih brojeva takav da je svaki konačan podskup F od X sadržan u $\bigcup_{n_k \leq i < n_{k+1}} R_i(F_i)$ za neko $k \in \mathbf{N}$. Stavimo da je

$$S_n = \cup_{i<n_1} F_i \ , \ n < n_1,$$
$$S_n = \cup_{n_k \leq i < n_{k+1}} F_i \ , \ n_k \leq n < n_{k+1}, \ k \geq 1.$$

Onda je svaki S_n konačan podskup od X i važi da je $\{R_n(S_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X. $\square$

Sada ćemo razmatrati pitanje proizvoda relator Mengerovih prostora. U opštem slučaju, proizvod relator Mengerovih prostora ne mora da bude relator Mengerov prostor. Sledeći primer, koji je modifikacija Primera 2.12. iz [18], nam upravo to pokazuje.

Primer 1.6 Neka su G i $\mathcal{D}$ isti kao u Primeru 1.3. Već je pokazano da je $(G, \mathcal{D})$ relator Mengerov prostor. Pokazaćemo da relator prostor $(G \times G, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ nema svojstvo relator Mengera.

Za svaki $n \in \mathbf{N}$, neka je $R_n = D_1^n$. Dokazaćemo da ne postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od G takav da je $G^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(F_n) \times R_n(F_n)$. Kad posmatramo $R_n(F_n)$, jedine koordinate elemenata od F_n koje su relevantne su $1, 2, ..., n$, pošto su projekcije od R_n na ostalih $\omega \backslash n$ koordinata jednake $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Zbog toga, možemo takodje da posmatramo samo F_n gde njihovi elementi imaju 0 na svakom od $\omega \backslash n$ mesta. Štaviše, možemo da pretpostavimo da je $F_n \subseteq F_{n+1}$. Neka je $A_n = \max\{|z(i)| : z \in F_n, 1 \leq i \leq n\}$. Primetimo da je $A_1 < A_2 < ....$ Naćićemo $x, y \in G$ takve da $(x, y) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(F_n) \times R_n(F_n)$. Stavimo $n_1 = 1$ i uzmimo da je $x(1) = x_1 > A_{n_1}$. Zatim biramo bilo koje $n_2 \in \mathbf{N}$ takvo da je $x_1/n_2 < 1/2$. Sada, za svaki i, $1 < i < n_2$, stavljamo $x(i) = 0$. Neka je $y(n_2) = y_{n_2} > A_{n_2}$. Onda uzimamo $n_3 \in \mathbf{N}$ tako da je $y_{n_2}/n_3 < 1/3$. Stavljamo $y(j) = 0$ ako je $1 \leq j < n_2$ ili $n_2 < j < n_3$. Nastavljamo da na ovaj način definišemo brojeve $\{n_k : k \in \mathbf{N}\}$. Stavljamo $x(n_k) = x_{n_k} > A_{n_k}$ za k neparno tako da je $x(n_k)/n_{k+1} < 1/k+1$. Druge vrednosti za $x(j)$ do sada nedefinisane $j < n_{k+1}$ stavićemo da su 0. Slično, ako je k parno, onda definišemo $y(n_k) = y_{n_k} > A_{n_k}$ i n_{k+1} uzmemo tako da je $y(n_k)/n_{k+1} < 1/k+1$. Jasno je da $x, y \in G$. Tvrdimo da $(x,y) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(F_n) \times R_n(F_n)$. Zaista, neka je $n \in \mathbf{N}$ i $n_k \leq n < n_{k+1}$. Ako je k parno, onda $x_{n_{k+1}} > A_{n_{k+1}} \geq A_n$, pa $x \notin R_n(F_n)$. Ako je k neparno, onda $y_{n_{k+1}} > A_{n_k+1} \geq A_n$, pa $y \notin R_n(F_n)$. Odatle sledi da je $(x,y) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(F_n) \times R_n(F_n)$. Time smo pokazali da $(G^2, \mathcal{D} \times \mathcal{D})$ nije relator Mengerov prostor. $\square$

Sledeća teorema je generalizacija Teoreme 5.3. iz [17] u kontekstu topoloških grupa.

Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan ako može da se predstavi kao prebrojiva unija relator kompaktnih potprostora.

Teorema 1.10 *Ako je $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan prostor, a $(Y, \mathcal{S})$ je relator Mengerov prostor, onda je $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ relator Mengerov prostor.*

Dokaz. Neka je $(T_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$, stavimo da je $T_n = R_n \times S_n$, gde su $R_n \in \mathcal{R}$, $S_n \in \mathcal{S}$. Pošto je $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan, možemo da pišemo $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$, gde je $(X_n, \mathcal{R})$ relator kompaktan i $X_n \subseteq X_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Zato, možemo da nadjemo konačne podskupove F_n od X takve da je $X_n \subseteq R_n(F_n)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Sa druge strane, neka je $\mathcal{S}_n = \{S_{n,i} : i \in \mathbf{N}\}$. Tada, prema uslovu teoreme, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji niz $\varepsilon_n = \{E_{n,i} : i \geq n\}$ konačnih podskupova od Y tako da je $Y = \bigcup_{i \geq n} S_i(E_{n,i})$. Stavimo da je $D_i = F_i \times (\bigcup_{n \leq i} E_{n,i})$. Pokazaćemo da je $X \times Y = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (R_i \times S_i)(D_i)$.

Neka je $(x,y) \in X \times Y$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $x \in X_n$. Odatle sledi da $x \in R_n(F_n)$. Dalje, postoji $i \geq n$ tako da je $y \in S_i(E_{n,i})$. Ali, $X_n \subseteq X_i$, pa $x \in R_i(F_i)$. Zato važi da je $(x,y) \in (R_i \times S_i)(D_i)$. $\square$

Sledeći rezultat se tiče svojstva relator Mengera u svim konačnim stepenima.

Teorema 1.11 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako je $(X^n, \mathcal{R}^n)$ relator Mengerov za svaki $n \in \mathbf{N}$, onda za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Neka je $\mathbf{N} = \mathbf{N_1} \cup \mathbf{N_2} \cup ... \cup \mathbf{N_k} \cup ...$ particija skupa $\mathbf{N}$ na beskonačno mnogo medjusobno disjunktnih beskonačnih podskupova. Fiksirajmo $k \in \mathbf{N}$. Tada je $(R_m^k : m \in N_k)$ niz elemenata iz $\mathcal{R}^k$. Kako je $(X^k, \mathcal{R}^k)$ relator Mengerov, to postoji niz $(F_m : m \in N_k)$ konačnih podskupova od X^k takav da je $\bigcup_{m \in N_k} R_m^k(F_m) = X$. Za svaki $m \in N_k$ možemo da nadjemo konačan podskup S_m od X takav da je $S_m^k \supseteq F_m$. Pokazaćemo da je $\{R_n(S_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X.

Neka je $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ konačan podskup od X. Tada tačka $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in X^p$, pa postoji $m \in N_p$ takvo da je $x \in R_m^p(F_m) \subseteq R_m^p(S_m^p)$. To povlači da $x_i \in R_m(S_m)$ za svaki $1 \leq i \leq p$. Odatle imamo da $F \subseteq R_m(S_m)$. $\Box$

Problem 1.3. Da li važi obrat ovog tvrdjenja?

Teorema 1.12 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor takav da je $\mathcal{R}$ filtriran. Ako je $k \in \mathbf{N}$, onda je $(X^k, \mathcal{R}^k)$ relator Mengerov prostor ako i samo ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki konačan podskup F od X kardinalnosti k postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $F \subset R_n(F_n)$.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$: Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Prema pretpostavci tvrdjenja, postoji niz $(G_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X^k tako da je $\{R_n^k(G_n) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X^k. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ možemo da nadjemo konačne podskupove F_n od X tako da je $G_n \subset F_n^k$. Pokazaćemo da je $(F_n : n \in \mathbf{N})$ traženi niz.

Neka je $G = \{g_1, g_2, ..., g_k\} \subset X$. Ako označimo sa $g = (g_1, g_2, ..., g_k) \in X^k$, onda postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $g \in R_n^k(F_n^k)$, pa za svaki $i \in \{1, ..., k\}$, $g_i \in R_n(F_n)$ pa zato važi da je $G \subset R_n(F_n)$.

$(\Leftarrow)$: Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{R}^k$, gde je $S_n = R_{n1} \times R_{n2} \times ... \times R_{nk}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Stavimo da je $R_n = R_{n1} \cap R_{n2} \cap ... \cap R_{nk}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Kako je $\mathcal{R}$ filtriran, R_n pripada $\mathcal{R}$. Neka je $(x_1, x_2, ..., x_k) \in X^k$ i $F = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Prema uslovu tvrdjenja, postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X i $n \in \mathbf{N}$ tako da je $F \subset R_n(F_n)$. Sada imamo da $x_1 \in R_{n1}(F_n)$,$x_2 \in R_{n2}(F_n)$,...,$x_k \in R_{nk}(F_n)$. Odatle sledi da $(x_1, x_2, ..., x_k) \in S_n(F_n^k)$, pa je $\{S_n(F_n^k) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X^k. $\Box$

1.2 Svojstvo n-relator Mengera i svojstva u vezi sa njim

Mnogi topolozi su istraživali n-zvezda kompaktna i n-zvezda Lindelöfova svojstva u topološkim prostorima. Van Douwen, Reed, Roscoe i Tree u radu

[13] posmatrali su zvezdakompaktna i zvezda-Lindelöfova svojstva i dali su karakterizaciju prebrojive kompaktnosti i pseudokompaktnosti preko pojma n-zvezda kompaktnosti. Takodje su naveli brojne primere koji pokazuju da pojmovi n-zvezda kompaktnosti (n-zvezda Lindelöfosti) i $(n+1)$-zvezda kompaktnosti ($(n+1)$-zvezda Lindelöfosti) nisu ekvivalentni. Iskoristićemo neke od tih primera da dokažemo analogna tvrdjenja u relator prostorima. Daćemo proširenja nekih tvrdjenja iz [21] koja se tiču operacija potprostora, proizvoda i relator neprekidnih preslikavanja na n-relator Mengerove prostore. U ovom odeljku pretpostavićemo da su sve relacije refleksivne.

Prvo ćemo uvesti pojmove n-relator Mengera i ω-relator Mengera, kao i odgovarajuće pojmove vezane za kompaktnost i Lindelöfost.

Definicija 1.4 Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Kažemo da je:

- $(X, \mathcal{R})$ *n-relator Mengerov (ω-relator Mengerov)*, gde je $n \in \mathbf{N}$, ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_k : k \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da je $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^n(F_k) = X$ (resp. $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^\infty(F_k) = X$);
- $(X, \mathcal{R})$ *n-relator kompaktan (n-relator Lindelöfov)* ako za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji konačan (resp. prebrojiv) podskup A od X takav da je $R^n(A) = X$;
- $(X, \mathcal{R})$ *ω-relator kompaktan (ω-relator Lindelöfov)* ako za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji konačan (resp. prebrojiv) podskup A od X tako da je $R^\infty(A) = X$.

U sledećem dijagramu prikazaćemo neke implikacije koje očigledno važe. U dijagramu koristićemo skraćenice (RM za relator Menger, RC za relator kompaktan, RL za relator Lindelöfov, i analogno za ostala svojstva).

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{RC} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left] & \mathsf{RL} \arrow[d] & \mathsf{RM} \arrow[l] \arrow[d] \\
2\text{-}\mathsf{RC} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left] & 2\text{-}\mathsf{RL} \arrow[d] & 2\text{-}\mathsf{RM} \arrow[l] \arrow[d] \\
3\text{-}\mathsf{RC} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left] & 3\text{-}\mathsf{RL} \arrow[d] & 3\text{-}\mathsf{RM} \arrow[l] \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n\text{-}\mathsf{RC} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left] & n\text{-}\mathsf{RL} \arrow[d] & n\text{-}\mathsf{RM} \arrow[l] \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\omega\text{-}\mathsf{RC} \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend left] & \omega\text{-}\mathsf{RL} & \omega\text{-}\mathsf{RM} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Prikazaćemo primere koji pokazuju da obrati ovih tvrdjenja ne važe. Sa druge strane, primetimo da ako relator ima samo jedan element, onda su svojstva n-relator Mengera i n-relator Lindelöfa ekvivalentna za svaki $n \in \mathbf{N}$. Takodje, važi sledeće tvrdjenje:

Teorema 1.13 *Neka je $\mathcal{R}$ familija relacija na X takva da je R tranzitivna za svaki $R \in \mathcal{R}$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(1) $(X, \mathcal{R})$ *ima svojstvo relator Mengera;*

(2) $(X, \mathcal{R})$ *je ω-relator Mengerov.*

U Primeru 2.2.5 iz [13] pokazano je da postoji topološki prostor koji je jako 2-zvezda kompaktan, a nije jako 1-zvezda kompaktan. Koristeći ovaj primer, dokazaćemo da postoji relator prostor koji je 2-relator kompaktan, a nije relator kompaktan.

Primer 1.7 Neka je $\mathcal{A} = \{N_s : s \in S\}$ beskonačna familija beskonačnih podskupova od $\mathbf{N}$ takva da za svaka dva različita s i s' iz S, $N_s \cap N_{s'}$ je konačan skup, svaki $n \in \mathbf{N}$ pripada samo konačno mnogo elemenata familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ je maksimalna familija sa ovim osobinama. Pretpostavimo da je $\mathbf{N} \cap \mathbf{S} = \emptyset$ i neka je $X = \mathbf{N} \cup \mathbf{S}$. Fiksirajmo konačan podskup F od X i definišimo relaciju R_F na X na sledeći način: za svaki $n \in \mathbf{N}$, $R_F(n) = \{n\} \cup \{s : \{n\} \in N_s \backslash F\}$, i za svaki $s \in S$, $R_F(s) = \{s\} \cup (N_s \backslash F)$. Tada je $\mathcal{R} = \{R_F\}$ relator na X.

Prvo ćemo pokazati da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ nije relator kompaktan. Neka je $B \subset X$ konačan. Tada $R_F(B)$ ne može da pokrije S pošto je S beskonačan, a $R_F(B)$ sadrži samo konačno mnogo elemenata iz S.

Da bismo dokazali da je $(X, \mathcal{R})$ 2-relator Mengerov, dovoljno je da pokažemo da postoji konačan podskup A od X takav da je $\mathbf{N} \subset \mathbf{R_F(A)}$ pošto je $R_F(\mathbf{N}) = \mathbf{X}$. Pretpostavimo suprotno. Stavimo da je $x_0 = 0$ i $B_0 = \{s : 0 \in N_s\}$. Pošto je B_0 konačno, možemo da biramo $x_1 \in \mathbf{N}$ tako da $x_1 \notin R_F(B_0)$. Neka je $B_1 = B_0 \cup \{s : x_1 \in N_s\}$. U n-tom koraku biramo $x_n \notin R_F(B_{n-1})$ i stavljamo da je $B_n = \bigcup_{0 \le i \le n-1} B_i \cup \{s : x_n \in N_s\}$. Neka je $A_n = \mathbf{N} \backslash \mathbf{R_F(B_n)}$. Tada je A_n beskonačno. Biramo $x_{n+1} > max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tako da je $x_{n+1} \in A_n$. Neka je $B = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Onda je $B \subset \mathbf{N}$ beskonačan i zbog maksimalnosti familije $\mathcal{A}$, postoji $s \in S$ takvo da je $B \cap N_s$ beskonačno. Izaberimo različite elemente x_k i $x_{k'}$ iz $B \cap N_s$ tako da je $x_k < x_{k'}$. Tada je $x_{k'} \in R_F(B_k) \subset R_F(B_{k'-1})$ što je u kontradiktornosti sa konstrukcijom niza $\{x_n\}$. $\square$

Sledeći primer pokazuje da postoji relator prostor koji je ω-relator kompaktan, a nije n-relator kompaktan ni za jedno $n \in \mathbf{N}$.

Primer 1.8 Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva i $\mathcal{D}$ relator na $\mathbf{R}$ definisan kao u Primeru 1.1. Relator prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ je ω-relator kompaktan pošto za sve $x, y \in \mathbf{R}$ postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $x \in (y - n\varepsilon, y + n\varepsilon)$, pa za svaki konačan $F \subset \mathbf{R}$ imamo da je ${D_\varepsilon}^\infty(F) = \mathbf{R}$.

Sada ćemo pokazati da $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ nije n-relator kompaktan ni za jedno $n \in \mathbf{N}$. Neka je $F \subset \mathbf{R}$ proizvoljan podskup od $\mathbf{R}$. Očigledno je da $\bigcup_{x \in F}(x - n\varepsilon, x + n\varepsilon) \neq \mathbf{R}$. $\square$

Sledeći primer pokazuje da postoji 2-relator Mengerov (2-relator Lindelöfov) prostor koji nije relator Mengerov (relator Lindelöfov).

Primer 1.9 Neka je S neprebrojiv skup takav da je $S \cap \omega_1 = \emptyset$ i neka je $\mathcal{A} = \{N_s : s \in S\}$ maksimalna familija neprebrojivih podskupova od ω_1 tako da je $N_s \cap N_{s'}$ prebrojiv za svaka dva različita $s, s' \in S$ i svaki $\alpha \in \omega_1$ pripada N_s za prebrojivo mnogo $s \in S$. Stavimo da je $X = \omega_1 \cup S$ i fiksirajmo prebrojiv podskup A od ω_1. Definisaćemo relaciju D_A na X na sledeći način: $D_A(\alpha) = \{\alpha\} \cup \{s \in S : \alpha \in N_s\}$ za svaki $\alpha \in \omega_1$ i $D_A(s) = \{s\} \cup \{N_s \backslash A\}$ za svaki $s \in S$. Neka je $\mathcal{D} = \{D_A\}$ relator na X. Pokazaćemo da je relator prostor $(X, \mathcal{D})$ 2-relator Mengerov (2-relator Lindelöfov), ali nije relator Mengerov (relator Lindelöfov) (pošto relator $\mathcal{D}$ ima samo jedan element, svojstva relator Mengera i relator Lindelöfa su ekvivalentna, pa je dovoljno da dokažemo samo jedno od ovih tvrdjenja).

Relator prostor $(X, \mathcal{D})$ nije relator Lindelöfov, jer za svaki prebrojiv podskup B od X, $D_A(B)$ nije pokrivač za S pošto $D_A(B)$ sadrži samo prebrojivo mnogo elemenata iz S, a S je neprebrojiv.

Da bismo dokazali da je $(X, \mathcal{D})$ 2-relator Lindelöfov, dovoljno je da pokažemo da postoji prebrojiv podskup L od X tako da je $\omega_1 \subset D_A(L)$, zato što je $D_A(\omega_1) = X$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $x_0 = 0$ i $L_0 = \{s \in S : 0 \in N_s\}$. Prema pretpostavci, postoji $x_1 \notin D_A(L_0)$ i stavićemo da je $L_1 = L_0 \cup \{s \in S : x_1 \in N_s\}$. Recimo da smo već izabrali x_i za svaki $i < \alpha$. Tada biramo $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} D_A(L_\beta)$ tako da je $x_\alpha > sup\{x_i : i < \alpha\}$, i stavljamo $L_\alpha = \bigcup_{0 \leq i < \alpha} L_i \cup \{s \in S : x_\alpha \in N_s\}$. Označimo sa $L = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Iz maksimalnosti familije $\mathcal{A}$ sledi da postoji $s \in S$ tako da je $L \cap N_s$ neprebrojiv. Uzmimo različite x_α and $x_{\alpha'}$ iz $L \cap N_s$. Tada je $x_{\alpha'} \in D_A(L_\alpha) \subset D_A(L_{\alpha'-1})$ što je suprotno pretpostavci. $\square$

Sledeći primer pokazuje da postoji ω-relator Mengerov prostor koji nije n-relator Mengerov ni za jedno $n \in \mathbf{N}$.

Primer 1.10 Neka je $\mathbf{R}^\omega$ skup svih nizova realnih brojeva i neka je $\mathcal{D} = \{D_{\varepsilon,k} : \varepsilon \in \mathbf{R}, \mathbf{k} \in \mathbf{N}\}$ relator na $\mathbf{R}^\omega$ definisan na isti način kao u Primeru 1.2.

Na sličan način kao u Primeru 1.2. može se pokazati da $(\mathbf{R}^\omega, \mathcal{D})$ nema svojstvo n relator Mengera ni za jedno $n \in \mathbf{N}$, pošto je
$D^n_{\varepsilon,k} = \underbrace{B_{n\varepsilon} \times B_{n\varepsilon} \times ... \times B_{n\varepsilon}}_{k} \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times ...,$.

Da bismo pokazali da relator prostor $(\mathbf{R}^\omega, \mathcal{D})$ ima svojstvo ω-relator Mengera, dokazaćemo i više, da je $(\mathbf{R}^\omega, \mathcal{D})$ ω-relator kompaktan prostor. Fiksirajmo $\varepsilon \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{N}$. Neka je $x \in \mathbf{R}^\omega$. Za svaki konačan podskup F od $\mathbf{R}^\omega$, možemo da nadjemo $n \in \mathbf{N}$ dovoljno veliko da x pripada $D^n_{\varepsilon,k}(F)$, pošto je bitno samo prvih k koordinata. □

Problem 1.4. Da li za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji relator prostor koji ima svojstvo $(n+1)$-relator Mengera, a nema svojstvo n-relator Mengera?

Sledeće četiri teoreme su zapravo uopštenja Teorema 1.2, 1.3, 1.10 i 1.11.

Teorema 1.14 *Neka je $(Y, \mathcal{R}_Y)$ potprostor n-relator Mengerovog prostora $(X, \mathcal{R})$. Ako za svaki $T \in \mathcal{R}$ postoji $R \in \mathcal{R}$ tako da je $R^n \circ R^{n-1} \subset T^n$, onda je $(Y, \mathcal{R}_Y)$ takodje n-relator Mengerov prostor.*

Dokaz. Neka je $(S_k : k \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}_Y$. Tada za svaki $k \in \mathbf{N}$ postoji $T_k \in \mathcal{R}$ tako da je $S_k = Y^2 \cap T_k$. Prema pretpostavci, za svaki $k \in \mathbf{N}$ možemo naći $R_k \in \mathcal{R}$ tako da je $R^n_k \circ R^{n-1}_k \subset T^n_k$. Pošto je $(X, \mathcal{R})$ n-relator Mengerov, to postoje F_k, $k \in \mathbf{N}$, takvi da je $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} R^n_k(F_k) = X$. Za svaki $x \in F_k$, uzimamo $a_x \in Y \cap R^n_k(x)$ ako je $Y \cap R^n_k(x) \neq \emptyset$. Inače, uzimamo proizvoljno $a_x \in Y$. Stavljamo da je $G_k = \{a_x : x \in F_k\}$ i tvrdimo da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} S^n_k(G_k) = Y$.

Neka je $y \in Y$. Tada postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $y \in R^n_k(F_k)$, pa možemo naći $x \in F_k$ tako da je $y \in R^n_k(x)$. Odatle sledi da je $R^n_k(x) \cap Y \neq \emptyset$, odnosno $a_x \in R^n_k(x) \cap Y$, pa $x \in R^{n-1}_k(a_x)$. Sada imamo da je $y \in R^n_k(R^{n-1}_k(a_x)) \subset T^n_k(a_x) \subset T^n_k(G_k)$. Pošto je $G_k \subset Y$ and $y \in Y$, imamo da je $y \in S^n_k(G_k)$. □

Teorema 1.15 *Neka su $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ relator prostori. Ako je $(X, \mathcal{R})$ n-relator Mengerov i $f : X \longrightarrow Y$ je relator neprekidna surjekcija, onda je $(Y, \mathcal{S})$ takodje n-relator Mengerov.*

Dokaz. Neka je $(S_k : k \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{S}$. Pošto je f neprekidna, za svaki $k \in \mathbf{N}$ možemo da nadjemo relaciju R_k iz $\mathcal{R}$ tako da je $f(R_k(x)) \subset S_k(f(x)$ za svaki $x \in X$. Ako to važi, onda tvrdimo da takodje važi i $f({R_k}^n(x)) \subset {S_k}^n(f(x))$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Pokazaćemo to indukcijom. Zaista, ako je $f({R_k}^n(x)) \subset {S_k}^n(f(x))$, onda je $f({R_k}^{n+1}(x)) = f(R_k({R_k}^n(x))) \subset S_k(f({R_k}^n(x))) \subset S_k({S_k}^n(f(x))) = {S_k}^{n+1}(f(x))$.

Prema uslovu teoreme, možemo da biramo F_k, $k \in \mathbf{N}$, tako da je $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} {R_k}^n(F_k) = X$. Označimo sa $G_k = f(F_k)$ za svaki $k \in \mathbf{N}$. Očigledno, G_k su konačni podskupovi od Y. Tvrdimo da je $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} {S_k}^n(G_k) = Y$. Imamo da je
$Y = f(X) = f(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} {R_k}^n(F_k)) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} f({R_k}^n(F_k)) \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} {S_k}^n(f(F_k))$
$= \bigcup_{k\in\mathbf{N}} {S_k}^n(G_k)$. $\square$

Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *σ-n-relator kompaktan* ako može da se predstavi kao prebrojiva unija n-relator kompaktnih podskupova.

Teorema 1.16 *Ako je $(X, \mathcal{R})$ σ-n-relator kompaktan i $(Y, \mathcal{S})$ je n-relator Mengerov, onda je proizvod $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ n-relator Mengerov.*

Dokaz. Neka je $(T_k : k \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$. Onda za svaki $k \in \mathbf{N}$ postoje $R_k \in \mathcal{R}$ i $S_k \in \mathcal{S}$ takvi da je $T_k = R_k \times S_k$. Pošto je $(X, \mathcal{R})$ σ-n-relator kompaktan, bez gubljenja opštosti možemo da stavimo da je $X = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k$, gde je $X_k \subset X_{k+1}$ za svaki $k \in \mathbf{N}$ i $(X_k, \mathcal{R}_{X_k})$ je n-relator kompaktan. Tada za svaki $k \in \mathbf{N}$ postoji konačan podskup $F_k \subset X_k$ tako da je $X_k \subset {R_k}^n(F_k)$. Sa druge strane, za svaki $k \in \mathbf{N}$ postoje $G_{k,i}$ takvi da je $Y = \bigcup_{i\geq k} S_i^n(G_{k,i})$. Stavimo da je $B_i = F_i \times (\bigcup_{k\leq i} G_{k,i})$. Za svaki $i \in \mathbf{N}$, B_i je konačan podskup od $X \times Y$. Pokazaćemo da je $X \times Y = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} T_i^n(B_i)$.

Neka je $(x, y) \in X \times Y$. Tada postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in X_k$. Odatle sledi da je $x \in {R_k}^n(F_k)$. Dalje, postoji $i \geq k$ tako da je $y \in {S_i}^n(G_{k,i})$. Pošto je $X_k \subset X_i$, imamo da je $x \in {R_i}^n(F_i)$, pa je $(x, y) \in {R_i}^n(F_i) \times {S_i}^n(G_{k,i}) = (R_i \times S_i)^n(F_i \times G_{k,i}) \subset T_i^n(B_i)$. $\square$

Teorema 1.17 *Ako je $(X^m, \mathcal{R}^m)$ n-relator Mengerov prostor za svaki $m \in \mathbf{N}$, tada za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_k : k \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\{{R_k}^n(F_k) : k \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X.*

Dokaz. Neka je $(R_k : k \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$ i neka je $\mathbf{N} = \mathbf{N_1} \cup \mathbf{N_2} \cup ... \cup \mathbf{N_r} \cup ...$ particija skupa prirodnih brojeva na beskonačno mnogo medjusobno disjunktnih beskonačnih podskupova. Za svaku relaciju R iz $\mathcal{R}$ sa $m(R)$

označićemo $\underbrace{R \times R \times R \times ....}_{m}$ Tada je $(m(R_k) : k \in N_m)$ niz relacija iz $\mathcal{R}^m$. Prema uslovu teoreme, možemo da nadjemo niz $(F_k : k \in N_m)$ konačnih podskupova od X^m tako da je $\bigcup_{i \in N_m} (m(R_k))^n(F_k) = X^m$. Za svaki $m \in \mathbf{N}$ i svaki $k \in N_m$ biramo konačne podskupove G_k od X tako da je $F_k \subset {G_k}^m$. Tvrdimo da je $(G_k : k \in \mathbf{N})$ traženi niz.

Neka je F konačan podskup od X i neka je $F = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Tada je $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in X^m$. Onda postoji $k \in N_m$ tako da je $x \in (m(R_k))^n(F_k)$. Odatle sledi da je $x \in (m(R_k))^n({G_k}^m)$, pa imamo da je $x_p \in {R_k}^n(G_k)$ za $1 \leq p \leq m$, to jest $F \subset {R_k}^n(G_k)$. $\square$

Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, i neka je $\mathcal{D}$ relator na $\mathbf{R}$ definisan kao u Primeru 1.1. Tada važi sledeće tvrdjenje analogno tvrdjenju Teoreme 2.1.6. iz [13] u kontekstu topoloških prostora.

Teorema 1.18 *Ako je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ω-relator kompaktan, onda je svako relator neprekidno preslikavanje $f : X \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{D})$ ograničeno.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ i $S = D_\varepsilon$. Pošto je f relator neprekidno, onda postoji $R \in \mathcal{R}$ takvo da je $f(R(x)) \subset S(f(x))$ za svaki $x \in X$. Kako je $(X, \mathcal{R})$ ω-relator kompaktan, to postoje konačan podskup F od X i $n \in \mathbf{N}$ takvi da je $R^n(F) = X$. Tada je $f(X) = f(R^n(F)) \subset S^n(f(F))$ (videti dokaz Teoreme 1.15). Neka je $m = min\{f(x) : x \in F\}$ i $M = max\{f(x) : x \in F\}$. Tada je $f(X) \subset (m - n\varepsilon, M + n\varepsilon)$ čime je tvrdjenje dokazano. $\square$

Naravno, prirodno možemo uvesti i svojstvo n-relator Rothbergera i ω-relator Rothbergera.

Definicija 1.5 Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *n-relator Rothbergerov* (*ω-relator Rothbergerov*) ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(x_k : k \in \mathbf{N})$ elemenata iz X tako da je $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} R_k^n(x_k) = X$ (resp. $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} R_k^\infty(x_k) = X$).

Jasno je da za svaki $n \in \mathbf{N}$ n-relator Rothbergerov prostor ima svojstvo n-relator Mengera. Takodje, teoreme vezane za pitanje potprostora i relator neprekidne slike relator Mengerovih prostora se prirodno prenose na relator Rothbergerove prostore.

1.3 Svojstvo relator Hurewicza

Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor i neka $\Gamma_\mathcal{C}$ označava kolekciju svih γ-pokrivača relator prostora $(X, \mathcal{R})$.

Definicija 1.6 (Kočinac) Kažemo da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo *relator Hurewicza* ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da svaki $x \in X$ pripada $R_n(F_n)$ za sve $n \in \mathbf{N}$ sem konačno mnogo.

Očigledno je da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Hurewicza ako i samo ako zadovoljava selekcionu hipotezu $S_1(\Omega(\mathcal{R}), \Gamma_{\mathcal{C}})$.

Kao i u slučaju svojstva relator Mengera, svojstvo relator Hurewicza se čuva prilikom operacije potprostora i relator neprekidne slike. Takodje možemo da definišemo i odgovarajuću igru.

Jasno je da svaki relator kompaktan prostor ima svojstvo relator Hurewicza. Važi i jače tvrdjenje o čemu svedoči sledeća teorema.

Teorema 1.19 *Ako je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan, onda $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Hurewicza.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Pošto je $(X, \mathcal{R})$ relator σ-kompaktan, možemo da pišemo $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$, gde je $(X_n, \mathcal{R}_n)$ relator kompaktan za svaki $n \in \mathbf{N}$. Zato postoje konačni podskupovi F_n, $n \in \mathbf{N}$, takvi da je $X_n = R_n(F_n)$. Pošto je unija konačno mnogo relator kompaktnih prostora relator kompaktan prostor, možemo da pretpostavimo da je $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n \subset ....$ Tada za svaki $x \in X$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in X_{n_0}$. Odatle sledi da je $x \in R_n(F_n)$ za svaki $n \geq n_0$. $\square$

Pošto svaki relator Hurewiczev prostor ima svojstvo relator Mengera, važe sledeće implikacije medju selekcionim principima:

$$\begin{tikzcd}
TWO \uparrow \mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C}) \arrow[r] & PRVI \text{ nema p.s. u } \mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C}) \arrow[r] & \text{relator Mengerov} \\
\text{relator } \sigma\text{-kompaktan} \arrow[u] \arrow[r] & \text{relator Hurewiczev} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Problem 1.5.: Da li svojstvo relator Hurewicza implicira da $PRVI$ nema pobedničku strategiju u $\mathsf{G}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{C})$?

Kažemo da je prebrojiv pokrivač $\mathcal{U}$ od X *grupabilan* [32] ako može da se predstavi kao prebrojiva unija konačnih, medjusobno disjunktnih podfamilija $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$, tako da svaki $x \in X$ pripada svim $\cup \mathcal{U}_n$ sem konačno mnogo.

Koristićemo notaciju: $\mathcal{C}^{gp} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{C} : \mathcal{U} \text{ grupabilan}\}$.

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 1 iz [4] u kontekstu topoloških grupa.

Teorema 1.20 *Za relator prostor $(X, \mathcal{R})$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(1) $(X, \mathcal{R})$ *ima svojstvo relator Hurewicza;*

(2) $(X, \mathcal{R})$ *zadovoljava selekcionu hipotezu* $\mathsf{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C}^{gp})$.

Dokaz. Videti dokaz Teoreme 1.9. □

U Teoremi 5 iz [4] pokazano je da je svojstvo da $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C}^{gp})$ ekvivalentno važenju selekcione hipoteze $\mathsf{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C}^{gp})$ u metrizabilnim topološkim grupama.

Problem 1.6. Da li svojstvo relator σ-kompakta povlači da $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C}^{gp})$?

Jasno je da iz tvrdjenja da $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C}^{gp})$ sledi da $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C})$.

Problem 1.7. Da li svojstvo da $DRUGI \uparrow \mathsf{G}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{C})$ povlači svojstvo relator Hurewicza?

Sledeće dve teoreme razmatraju problem proizvoda relator prostora sa svojstvom relator Hurewicza i uopštenja su Teorema 10 i 11 iz [26] u kontekstu uniformnih prostora.

Teorema 1.21 *Ako relator prostori $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ imaju svojstvo relator Hurewicza, onda proizvod $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ takodje ima svojstvo relator Hurewicza.*

Dokaz. Neka je $(T_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$. Tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoje $R_n \in \mathcal{R}$ i $S_n \in \mathcal{S}$ takvi da je $T_n = R_n \times S_n$. Pošto $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ imaju svojstvo relator Hurewicza, postoje nizovi $(F_n : n \in \mathbf{N})$ i $(G_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X i Y, respektivno, tako da za svaki $x \in X$ i $y \in Y$ postoje $n_1 \in \mathbf{N}$ i $n_2 \in \mathbf{N}$ takvi da $x \in R_n(F_n)$ za svaki $n > n_1$ i $y \in S_n(G_n)$ za svaki $n > n_2$. Ako stavimo da je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, onda $(x, y) \in R_n(F_n) \times S_n(G_n)$ za svaki $n > n_0$, čime smo dokazali da $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ ima svojstvo relator Hurewicza. □

Na sličan način možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 1.22 *Ako relator prostor* $(X, \mathcal{R})$ *ima svojstvo relator Mengera, a* $(Y, \mathcal{S})$ *ima svojstvo relator Hurewicza, onda proizvod* $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ *ima svojstvo relator Mengera.*

Napomena. Iz Teorema 1.19 i 1.21, direktno sledi tvrdjenje Teoreme 1.10.

Prirodno možemo uvesti i pojam svojstva n-relator Hurewicza, odnosno ω-relator Hurewicza.

Definicija 1.7 Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *n-relator Hurewiczev* (*ω-relator Hurewiczev*) ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_k : k \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da svaki $x \in X$ pripada svim $R_k^n(F_k)$ (resp. $R_k^\infty(F_k)$) sem konačno mnogo.

Jasno je da za svaki $n \in \mathbf{N}$, n-relator Hurewiczev prostor ima svojstvo n-relator Mengera. Takodje, sva tvrdjenja iz ovog odeljka mogu da se prošire na n-relator Hurewiczeve prostore.

1.4 α_i-svojstva u relator prostorima

Pojam α_i-svojstva, $i = 1, 2, 3, 4$, za nizove u prostorima uveo je Arhangeljskiǐ ([2]). U [30] Kočinac je definisao i istraživao selekcione principe koji su u vezi sa α_i selekcionim principima (videti takodje [31, 60]). Ovde ćemo razmatrati α_i selekcione principe u relator prostorima na isti način kako je Kočinac razmatrao α_i selekcione principe u topološkim grupama. Prvo ćemo da se podsetimo definicije α_i selekcionih principa.

Definicija 1.8 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kolekcije podskupova beskonačnog skupa X. Simbol $\alpha_i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,$i = 1, 2, 3, 4$, označava sledeće selekcione hipoteze:

Za svaki niz $(A_n : n \in \mathbf{N})$ beskonačnih elemenata od $\mathcal{A}$ postoji element $B \in \mathcal{B}$ tako da je:

- $\alpha_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: za svaki $n \in \mathbf{N}$ skup $A_n \setminus B$ je konačan;
- $\alpha_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: za svaki $n \in \mathbf{N}$ skup $A_n \cap B$ je beskonačan;
- $\alpha_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: za beskonačno mnogo $n \in \mathbf{N}$ skup $A_n \cap B$ je beskonačan;
- $\alpha_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: za beskonačno mnogo $n \in \mathbf{N}$ skup $A_n \cap B$ je neprazan.

Važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.23 *Ako je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor takav da je $\mathcal{R}$ filtriran i za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji $S \in \mathcal{R}$ takvo da je $S \circ S \subset R$, tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(1) *$(X, \mathcal{R})$ zadovoljava $\alpha_4(\Omega(\mathcal{R}), \Gamma_{\mathcal{C}})$;*

(2) *$(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo Hurewicza;*

(3) *$(X, \mathcal{R})$ zadovoljava $\mathsf{S}_1(\mathcal{K}(\mathcal{R}), \Gamma_{\mathcal{C}})$.*

Dokaz. Implikacije (2) $\Rightarrow$ (1) i (2) $\Rightarrow$ (3) su očigledne.

(1) $\Rightarrow$ (2): Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Stavimo da je $S_n = R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Pošto je $\mathcal{R}$ filtriran, $S_n \in \mathcal{R}$. Prema (1), postoji rastući niz $(n_i : i \in \mathbf{N})$ prirodnih brojeva i konačni podskupovi $F_{n_i} \subset X$, $i \in \mathbf{N}$, takvi da je $\{S_{n_i}(F_{n_i}) : i \in \mathbf{N}\}$ γ-pokrivač za X.

Biramo konačne podskupove F_n od X na sledeći način:

Ako je $n_0 = 0$, onda za svaki $n \in \mathbf{N}$ gde je $n_{i-1} < n \leq n_i$, $i \in \mathbf{N}$, stavimo $F_n = F_{n_i}$. Prema konstrukciji, očigledno je da je $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ γ-pokrivač za X.

(3) $\Rightarrow$ (2): Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz elemenata iz $\mathcal{R}$. Prema pretpostavci, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji relacija $S_n \in \mathcal{R}$ tako da je $S_n \circ S_n \subset R_n$. Prema (3), možemo da nadjemo relator kompaktne podskupove K_n od X, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\{S_n(K_n) : n \in \mathbf{N}\}$ γ-pokrivač za X. Pošto su K_n-ovi relator kompaktni, za svaki $n \in \mathbf{N}$ možemo da biramo konačne podskupove F_n od X tako da je $K_n \subset S_n(F_n)$. Sada imamo da je $S_n(K_n) \subset S_n(S_n(F_n)) \subset R_n(F_n)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ svedoči da $(X, \mathcal{R})$ ima svojstvo relator Hurewicza. $\square$

Primetimo da su selekcioni principi $\alpha_2(\Omega(\mathcal{R}), \Gamma_{\mathcal{C}})$ i $\alpha_3(\Omega(\mathcal{R}), \Gamma_{\mathcal{C}})$ takodje ekvivalentni svojstvima nabrojanim u prethodnoj teoremi.

Glava 2

Svojstva slabija od svojstava Mengera, Rothbergera i Hurewicza

2.1 Svojstva lokalno zvezda-Mengera, lokalno zvezda-Rothbergera i lokalno zvezda-Hurewicza

U radu [9] definisani su selekcioni principi preko operatora okoline i zvezde odgovarajući poznatim svojstvima Mengera, Rothbergera i Hurewicza. Dokazano je da su ta svojstva slabija od odgovarajućih klasičnih svojstavaa, zapravo da su izmedju jako zvezda i zvezda verzije odgovarajućih svojstava. Pored primera koji to dokumentuju, ispitane su i neke osobine tih svojstava. U ovom odeljku daćemo kratak pregled rezultata iz tog rada. Da ne bude zabune, u ovoj glavi razmatraćemo selekcione principe u topološkim prostorima.

Definicija 2.1 Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kolekcije otvorenih pokrivača prostora X. Prostor X zadovoljava:

$\mathsf{NSR}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ako za svaki niz $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X tako da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih podskupova od X takvih da $x_n \in O_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ važi da $\{St(O_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$;

$\mathsf{NSM}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ako za svaki niz $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N}\}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih podskupova od X takvih da $F_n \subset O_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, važi da je $\{St(O_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\} \in \mathcal{B}$.

Odavde proizilaze definicije pojmova lokalno zvezda-Rothbergera, lokalno zvezda-Mengera i lokalno zvezda-Hurewicza.

Definicija 2.2 Prostor X je:

NSR: (*lokalno zvezda-Rothbergerov*) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{NSR}(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

NSM: (*lokalno zvezda-Mengerov*) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{NSM}(\mathcal{O},\mathcal{O})$;

NSH: (*lokalno zvezda-Hurewiczev*) ako zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathsf{NSM}(\mathcal{O},\Gamma)$.

Sledeće karakterizacije ovih pojmova su očigledne:

Teorema 2.1 *Za prostor X važi sledeće:*

1. *X je NSR ako i samo ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X takav da za svaki $x \in X$ postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da $x_n \in \overline{St(\{x\},\mathcal{U}_n)}$.*

2. *X je NSM ako i samo ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki $x \in X$ postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da $\overline{St(\{x\},\mathcal{U}_n)} \cap F_n \neq \emptyset$.*

3. *X je NSH ako i samo ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki $x \in X$, $\overline{St(\{x\},\mathcal{U}_n)} \cap F_n \neq \emptyset$ za sve $n \in \mathbf{N}$ sem konačno mnogo.*

Sledeći rezultat se tiče konačnih stepena prostora sa svojstvom NSM.

Teorema 2.2 *Ako su svi konačni stepeni prostora X NSM, onda X zadovoljava selekcioni princip $\mathsf{NSM}(\mathcal{O},\Omega)$.*

Kažemo da je prostor X *jako zvezda-kompaktan* (resp. *jako zvezda-Lindelöfov*) (videti [13] ili [33]), skraćeno SSC (resp. SSL), ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji konačan (resp. prebrojiv) podskup A od X tako da je $St(A,\mathcal{U}) = X$; X je *zvezda-kompaktan* (resp. *zvezda-Lindelöfov*), skraćeno SC (resp. SL), ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji konačan (resp. prebrojiv) podskup $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ takav da je $St(\cup\mathcal{V},\mathcal{U}) = \mathcal{X}$.

Prirodno se uvodi sledeći pojam.

Definicija 2.3 Prostor X je NSL (*lokalno zvezda-Lindelöfov*) ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji prebrojiv podskup A od X tako da je za svaku okolinu U od A, $St(U,\mathcal{U}) = X$.

Važe sledeća dva tvrdjenja:

Teorema 2.3 *Prostor X je* NSL *ako i samo ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji prebrojiv podskup A od X takav da je za svaki $x \in X$, $\overline{St(\{x\},\mathcal{U})} \cap A \neq \emptyset$.*

Teorema 2.4 NSL *prostor X koji ima sledeće svojstvo:*

($*$) *za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ postoji otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ takav da je za svaki $x \in X$, $\overline{St(\{x\},\mathcal{V})} \subset St(\{x\},\mathcal{U})$*

je zvezda-Lindelöfov.

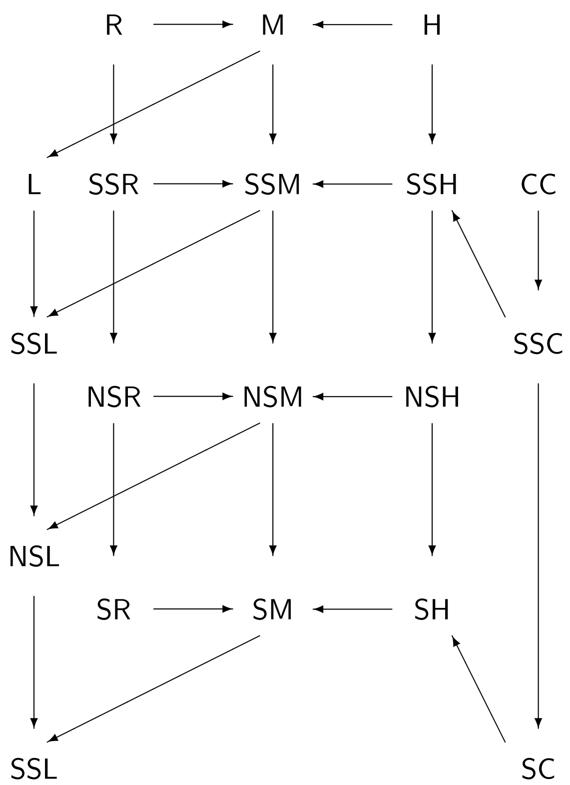
Sledeći primer ilustruje da svojstva NSL i SSL nisu ekvivalentna čak ni u klasi Urysohn-ovih prostora.

Primer 2.1 *Postoji Urisohn-ov* NSL *prostor koji nije* SSL.

Neka je $X = \mathbf{P} \times (\omega + \mathbf{1})$, gde $\mathbf{P}$ označava skup iracionalnih brojeva. Označimo sa $\mathcal{T}$ standardnu Tychonoff-sku topologiju na X. Definišimo finiju topologiju $\mathcal{T}'$ na X u kojoj će lokalna baza tačke $\langle x, n\rangle$, gde $x \in \mathbf{P}$, a $n \in \omega$, biti oblika $(U \setminus A) \times n$, gde je U okolina od x u $\mathbf{P}$ sa standardnom topologijom, a A je prebrojiv podskup od $\mathbf{P}$ koji ne sadrži x; tačka $\langle x, \omega\rangle$, gde je $x \in \mathbf{P}$, ima lokalnu bazu oblika $(U \setminus A) \times (n, \omega) \cup (x, \omega)$, gde je U okolina od x u $\mathbf{P}$ sa standardnom topologijom, a A je prebrojiv podskup od $\mathbf{P}$.

U [9] je pokazano da je $(X, \mathcal{T}')$ Urisohn-ov NSL prostor, a nije SSL.

Implikacije u dijagramu na sledećoj strani su očigledne (u dijagramu skraćenice CC i L označavaju svojstva prebrojive kompaktnosti i Lindelöfosti). Pošto je u [24] dokazano da je u klasi parakompaktnih Hausdorff-ovih prostora R $\Leftrightarrow$ SR i M $\Leftrightarrow$ SM, a u [8] da je H $\Leftrightarrow$ SH, imamo da su u klasi parakompaktnih Hausdorff-ovih prostora sva svojstva tipa Rothbergera, tipa Mengera i tipa Hurewicza respektivno, ekvivalentna. U radu [9] dati su primeri koji pokazuju da ne važe obrti tvrdjenja NSM $\Rightarrow$ SSM, SSH $\Rightarrow$ NSH, SSR $\Rightarrow$ NSR, NSR $\Rightarrow$ SR, NSM $\Rightarrow$ SM i NSH $\Rightarrow$ SH. Primetimo da za prostor koji je NSM, a nije SSM, takodje važi da je NSL, a nije SSL; takodje prostor koji je SM, a nije NSM, istovremeno je SL, a nije NSL.



Sledeći primer iz [9] pokazuje da, pod nekim uslovima, iz svojstva NSM, NSH i NSR, ne slede svojstva SSM, SSH i SSR, redom.

Podsetimo se prvo definicija brojeva $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ i $cov(\mathcal{M})$. Za $f, g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ stavimo

$$f \leq^* g \text{ ako je } f(n) \leq g(n) \text{ za sve sem konačno mnogo } n.$$

Podskup B od $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ je *ograničen* ako postoji $g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ tako da je $f \leq^* g$ za svaki $f \in B$. $D \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ je *dominantan* ako za svaki $g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ postoji $f \in D$ tako da je $g \leq^* f$. Minimalna kardinalnost neograničenog podskupa od $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ je označena sa $\mathbf{b}$, a minimalna kardinalnost dominantnog podskupa od $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ je označena sa $\mathbf{d}$. Kažemo da je podskup X od $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *pogodjen* funkcijom $g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ako za svaki $f \in X$ skup $\{n \in \mathbf{N} : f(n) = g(n)\}$ je beskonačan. Minimalna kardinalnost podskupa od $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ koji ne može biti pogodjen je označena sa $cov(\mathcal{M})$ (videti [35]).

Primer 2.2 ($\omega_1 < \mathbf{d}$) Postoji Urysohn-ov NSM prostor koji nije SSL.

Primer 2.3 ($\omega_1 < \mathbf{b}$) Postoji Urysohn-ov NSH prostor koji nije SSL.

Primer 2.4 ($\omega_1 < cov(\mathcal{M})$) Postoji Urysohn-ov NSR prostor koji nije SSL.

Prostor koji je poslužio kao kontraprimer u sva tri slučaja je sledeći:

Neka je S podskup skupa realnih brojeva takav da je za svaki neprazan otvoren podskup U skupa realnih brojeva $|S \cap U| = \omega_1$. Na skupu $X_S = S \times (\omega + 1)$ uvedimo topologiju na sledeći način: lokalna baza za $\langle x, n \rangle$, gde je $x \in S$, a $n \in \omega$, biće oblika $((U \cap S) \setminus A) \times \{n\}$, gde je U okolina od X u uobičajenoj topologiji skupa realnih brojeva, a A prebrojiv podskup od S koji ne sadrži x; lokalna baza za $\langle x, \omega \rangle$, gde je $x \in S$, biće oblika $((U \cap S) \setminus A) \times (n, \omega) \cup \langle x, \omega \rangle$, gde je U okolina od x u uobičajenoj topologiji skupa realnih brojeva, A proizvoljan prebrojiv podskup od S i $n \in \omega$.

Napomena. Pretpostavke iz Primera 2.2, 2.3 i 2.4 nisu korišćene u dokazu da prostor X_S sa ovako definisanom topologijom nije SSL.

Problem 2.1 Da li postoje primeri prostora u okviru **ZFC** koji zadovoljavaju tvrdjenja Primera 2.2, 2.3 i 2.4?

Sledeći primer iz [9] pokazuje da ne važe obrati tvrdjenja $\mathsf{NSM} \Rightarrow \mathsf{SM}$, $\mathsf{NSH} \Rightarrow \mathsf{SH}$ i $\mathsf{NSR} \Rightarrow \mathsf{SR}$.

Primer 2.5 Neka je $K = D \cup \{\infty\}$ kompaktifikacija jednom tačkom diskretnog prostora D neprebrojive kardinalnosti $\mathbf{k}$. Označimo sa $X_0 = K \times \mathbf{k}^+$, $X_1 = D \times \{\mathbf{k}^+\}$, $X = X_0 \cup X_1$; X ima topologiju nasledjenu iz proizvoda $K \times (\mathbf{k}^+ + 1)$.

Dokazano je u [9] da je X Tihonoff-ski prostor koji ima svojstva SR i SH (a samim tim i SM), a nema svojstvo NSL (pa zato nema ni svojstva NSR, NSM i NSH).

2.2 Svojstvo skoro Mengera i svojstva u vezi sa njim

U ovom odeljku koristimo zatvorenja otvorenih skupova da definišemo pojmove odgovarajuće pojmovima Mengera i zvezda-Mengera. Brojni autori su koristili sličnu tehniku da definišu selekcione principe. Tkachuk u [57] i Scheepers u [48] i posredno u [49] su razmatrali svojstvo slično klasičnom svojstvu Rothbergera ([43]) koristeći zatvorenja otvorenih skupova. U [25], Kočinac je uveo pojam skoro Mengerovog prostora (videti takodje [7]). U [11], Di Maio i Kočinac su posmatrali svojstvo skoro Mengera u hiperprostorima.

Pored pojma skoro Mengera, prirodno uvodimo i zvezda-verzije skoro Mengera, kao i odgovarajuće pojmove tipa Rothbergera i Hurewicza.

Definicija 2.4 Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je:

- AM (*skoro Mengerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\cup\{\mathcal{V}_n' : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{V}_n' = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$ ([25]);

- ASM (*skoro zvezda-Mengerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\{\overline{St(\cup\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X ([23]);

- ASSM (*skoro jako zvezda-Mengerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\{\overline{St(F_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač od X;

- AR (*skoro Rothbergerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $V_n \in \mathcal{U}_n$ i $\{\overline{V_n} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X;

- ASR (*skoro zvezda-Rothbergerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $V_n \in \mathcal{U}_n$ i $\{\overline{St(V_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X;

- ASSR (*skoro jako zvezda-Rothbergerov*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X takav da je $\{\overline{St(x_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X;

- AH (*skoro Hurewiczev*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i svaki $x \in X$ pripada svim sem konačno mnogo $\mathcal{V}_n' = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$;

- ASH (*skoro zvezda-Hurewiczev*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i svaki $x \in X$ pripada svim sem konačno mnogo $\overline{St(\cup\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)}$;

- ASSH (*skoro jako zvezda-Hurewiczev*) ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da svaki $x \in X$ pripada svim sem konačno mnogo $\overline{St(F_n, \mathcal{U}_n)}$.

Takodje možemo analogno da definišemo svojstva koja odgovaraju svojstvu Lindelöfa.

Definicija 2.5 Kažemo da je topološki prostor X:

- AL (*skoro Lindelöfov*) ako za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji prebrojiv podskup $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ tako da je $\bigcup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = X$;

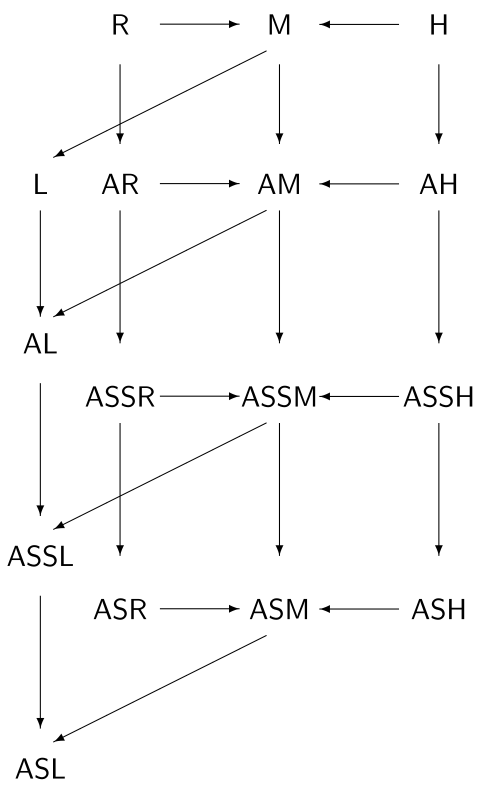
- ASL (*skoro zvezda-Lindelöfov*) ako za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji prebrojiv podskup $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ tako da je $\overline{St(\cup\mathcal{V}, \mathcal{U})} = X$;

- ASSL (*skoro jako zvezda-Lindelöfov*) ako za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji prebrojiv podskup A od X tako da je $\overline{St(A, \mathcal{U})} = X$.

Odnosi izmedju malopre definisanih pojmova su prikazani u dijagramu ispod.

Sledeći primer pokazuje da obrat implikacije $\mathsf{M} \Rightarrow \mathsf{AM}$ ne važi.

Primer 2.6 Neka je X Euklidska ravan sa "deleted radius" topologijom (videti [51], Primer 77). Pošto X nije Lindelöfov, X nema svojstvo Mengera. Da bismo dokazali da je X skoro Mengerov, iskoristićemo činjenicu da je zatvorenje svakog otvorenog skupa u "deleted radius" topologiji isto kao u uobičajenoj Euklidskoj topologiji i da je Euklidska ravan sa Euklidskom topologijom σ-kompaktna pa zato ima svojstvo Mengera (a samim tim i svojstvo skoro Mengera).



Videćemo da je svojstvo skoro Mengera ekvivalentno sa svojstvom Mengera u klasi regularnih prostora (analogno tvrdjenje važi i za svojstva tipa Rothbergera i tipa Hurewicza).

Teorema 2.5 *Neka je X regularan prostor. Ako je X skoro Mengerov prostor, onda je X Mengerov prostor.*

Dokaz: Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X. Kako je X regularan prostor, to postoji za svaki n otvoren pokrivač $\mathcal{V}_n$ od X takav da je $\mathcal{V}_n' = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$ profinjenje od $\mathcal{U}_n$. Prema pretpostavci, postoji niz $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki n, $\mathcal{W}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{V}_n$ i $\cup\{\mathcal{W}_n' : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{W}_n' = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_n\}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ i svaki $W \in \mathcal{W}_n$ možemo da nadjemo $U_W \in \mathcal{U}_n$ tako da je $\overline{W} \subset U_W$. Neka je $\mathcal{U}_n' = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$.

Dokazaćemo da je $\cup\{\mathcal{U}_n' : n \in \mathbf{N}\}$ otvoren pokrivač od X. Neka je $x \in X$. Tada postoje $n \in \mathbf{N}$ i $\overline{W} \in \mathcal{W}_n'$ tako da je $x \in \overline{W}$. Prema konstrukciji, postoji $U_W \in \mathcal{U}_n'$ tako da je $\overline{W} \subset U_W$. Zbog toga je $x \in U_W$. □

Sledeće tvrdjenje pokazuje da su u klasi parakompaktnih prostora svojstva AM, ASM i ASSM ekvivalentna. Naravno, analogno tvrdjenje važi i za svojstva tipa Rothbergera i tipa Hurewicza.

Teorema 2.6 *Ako je X parakompaktan prostor i X ima svojstvo skoro zvezda-Mengera, onda je X skoro Mengerov.*

Dokaz. Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X. Tada, prema karakterizaciji Stone-a iz [14], za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji otvoren pokrivač $\mathcal{V}_n$ od X tako da je $\mathcal{V}_n$ zvezda-profinjenje od $\mathcal{U}_n$. Kako je X ASM, to postoji niz $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbf{N})$, takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{W}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overline{St(\cup\mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n)} = X$. Za svaki $W \in \mathcal{W}_n$, neka je $U_W \in \mathcal{U}_n$ takvo da je $St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W$. Tada je i $\overline{St(W, \mathcal{V}_n)} \subset \overline{U_W}$. Stavimo da je $\mathcal{G}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$. Tada niz $(\mathcal{G}_n : n \in \mathbf{N})$ svedoči da je X skoro Mengerov. □

S obzirom da su u klasi parakompaktnih prostora svojstva Mengera, zvezda-Mengera i jako zvezda-Mengera ekvivalentna, imamo sledeću posledicu:

Posledica 2.1 *Za parakompaktan prostor X sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) X je Mengerov prostor;

(b) X je zvezda-Mengerov prostor;
(c) X je jako zvezda-Mengerov prostor;
(d) X je skoro Mengerov;
(e) X je skoro zvezda-Mengerov;
(f) X je skoro jako zvezda-Mengerov.

Napomena Analogno tvrdjenje važi i za svojstva tipa Rothbergera i tipa Hurewicza.

Sledeća teorema kaže da možemo da zamenimo otvorene skupove sa regularno otvorenim skupovima u definiciji skoro Mengerovih prostora .

Kažemo da je podskup B topološkog prostora X *regularno otvoren* (*regularno zatvoren*) ako je $B = int(\overline{B})(B = \overline{int(B)})$.

Teorema 2.7 *Topološki prostor X je skoro Mengerov ako i samo ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ pokrivača od X čiji su elementi regularno otvoreni skupovi, postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\cup\{\mathcal{V}_n^{'} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{V}_n^{'} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$.*

Dokaz $(\Rightarrow)$: Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz pokrivača od X čiji su elementi regularno otvoreni skupovi. Pošto je svaki regularno otvoren skup otvoren, $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ je niz otvorenih pokrivača.

Prema pretpostavci, postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\cup\{\mathcal{V}_n^{'} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{V}_n^{'} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$.

$(\Leftarrow)$: Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X. Neka je $(\mathcal{U}_n^{'} : n \in \mathbf{N})$ niz definisan sa $\mathcal{U}_n^{'} = \{int(\overline{U}) : U \in \mathcal{U}_n\}$. Tada je svaki $\mathcal{U}_n^{'}$ pokrivač za X sa regularno otvorenim skupovima. Zaista, svaki $int(\overline{U})$ je regularno otvoren skup (videti [14]), i $U \subset int(\overline{U})$ pošto je U otvoren skup.

Tada postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ je konačan podskup od $\mathcal{U}_n^{'}$ i $\cup\{\mathcal{V}_n^{'} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{V}_n^{'} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$. Prema konstrukciji, za svaki $n \in \mathbf{N}$ i $V \in \mathcal{V}_n$ postoji $U_V \in \mathcal{U}_n$ tako da je $\overline{V} = \overline{int(\overline{U_V})}$.

Pošto je U_V otvoren skup, $\overline{U_V}$ je regularno zatvoren skup (videti [14]). Zato važi da je $\overline{U_V} = \overline{int(\overline{U_V})}$. Odatle je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}}\{U_V : V \in \mathcal{V}_n\} = X$, pa je X skoro Mengerov prostor. $\Box$

Sada ćemo videti da se svojstvo skoro Mengera čuva pri neprekidnim preslikavanjima.

DEFINICIJA 2.6 Neka su X i Y topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je *skoro neprekidno* ako za svaki regularno otvoreni skup $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ je otvoren skup u X.

Teorema 2.8 *Neka je X skoro Mengerov prostor, i Y topološki prostor. Ako je $f : X \to Y$ skoro neprekidna surjekcija, onda je Y skoro Mengerov prostor.*

Dokaz. Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz pokrivača od Y sa regularno otvorenim skupovima. Neka je $\mathcal{U}_n' = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Tada je $(\mathcal{U}_n' : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X, pošto je f skoro neprekidna surjekcija. Kako je X skoro Mengerov prostor, to postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n'$ i $\cup\{\mathcal{V}_n' : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X, gde je $\mathcal{V}_n' = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ i $V \in \mathcal{V}_n$ možemo da nadjemo $U_V \in \mathcal{U}_n$ tako da je $V = f^{-1}(U_V)$. Neka je $\mathcal{W}_n = \{\overline{U_V} : V \in \mathcal{V}_n\}$. Pokazaćemo da je $\cup\{\mathcal{W}_n : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač od X.

Ako je $y = f(x) \in Y$, onda postoje $n \in \mathbf{N}$ i $V \in \mathcal{V}_n$ takvi da je $x \in \overline{V}$. Pošto je $V = f^{-1}(U_V)$, to je $x \in \overline{f^{-1}(U_V)} \subset f^{-1}(\overline{U_V})$. Zato imamo da je $y = f(x) \in \overline{U_V} \in \mathcal{W}_n$. $\square$

Sada razmatramo problem proizvoda prostora sa svojstvom skoro Mengera.

Teorema 2.9 *X^n je skoro Mengerov prostor za svaki $n \in \mathbf{N}$ ako i samo ako topološki prostor X zadovoljava selekcionu hipotezu da za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ ω-pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i za svaki konačan $F \subset X$ postoje $n \in \mathbf{N}$ i $V \in \mathcal{V}_n$ takvi da je $F \subset \overline{V}$.*

Dokaz ($\Rightarrow$): Neka je $k \in \mathbf{N}$ fiksirano i neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X^k, gde je svaki $\mathcal{U}_n = \{U_{nj} : j \in J_n\}$, gde je J_n beskonačan prebrojiv indeksni skup.

Neka je $F \subset X$ konačan skup. Tada je F^k konačan podskup od X^k, pa je F^k kompaktan skup. Kako je $\mathcal{U}_n$ otvoren pokrivač od X^k, to postoji konačan podskup J_n^F od J_n tako da je $F^k \subset \cup_{j \in J_n^F} U_{nj}$. Prema Teoremi Wallace-a (videti 3.2.10. iz [14]), postoji otvoren skup V_F u X takav da je $F \subset V_F$ i $V_F^k \subset \cup_{j \in J_n^F} U_{nj}$.

Ako je $\mathcal{V}_n = \{V_F : F \subset X \text{ konačan}\}$, onda za svaki konačan podskup F od X postoji $V_F \in \mathcal{V}_n$ tako da je $F \subset V_F$. Prema pretpostavci, postoji niz $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{W}_n$ konačan podskup od $\mathcal{V}_n$ i $\{\mathcal{W}_n' : n \in \mathbf{N}\}$ je ω-pokrivač za X, gde je $\mathcal{W}_n' = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_n\}$.

Neka za svaki $n \in \mathbf{N}$ $\mathcal{W}_n$ ima K_n elemenata.

Označimo sa $\mathcal{H}_n = \{\overline{U_{nj}} : j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$. Tada je niz $(\mathcal{H}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da:

(i): Za svaki $n \in \mathbf{N}$ ako označimo sa $I_n = \{j \in J_n : j \in J_n^{F_i}, i \in K_n\}$, onda je I_n konačan podskup od J_n i $\mathcal{H}_n = \{\overline{U_{nj}} : j \in I_n\}$.

(ii): Neka je $x = (x_1, ..., x_k) \in X^k$. Tada je $F = \{x_1, ..., x_k\}$ konačan podskup od X, pa postoje $n \in \mathbf{N}$ i $W \in \mathcal{W}_n$ takvi da je $F \subset \overline{W}$.

Neka je $W = V_{F_i}$ za neko $i \in K_n$. Tada je:

$F^k \subset \overline{V_{F_i}}^k \subset \overline{V_{F_i}^k} \subset \overline{\cup_{j \in J_n^{F_i}} U_{nj}} \subset \cup_{j \in J_n^{F_i}} \overline{U_{nj}}$.

Postoji $j \in J_n^{F_i}$ tako da je $F^k \subset \overline{U_{nj}}$, odakle sledi da je $x \in \overline{U_{nj}}$ za $\overline{U_{nj}} \in \mathcal{H}_n$. Time je dokazano da je X^k an skoro Mengerov prostor.

($\Leftarrow$): Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz ω-pokrivača od X, gde je svaki $\mathcal{U}_n = \{U_{nk} : k \in K_n\}$, gde je K_n beskonačan prebrojiv indeksni skup.

Neka je $\mathbf{N} = \mathbf{N_1} \cup \mathbf{N_2} \cup ... \cup \mathbf{N_n} \cup ...$ particija od $\mathbf{N}$ na prebrojivo mnogo beskonačnih, medjusobno disjunktnih podskupova. Za svaki $i \in \mathbf{N}$ i svaki $j \in N_i$ neka je $\mathcal{V}_j = \{U^i : U \in \mathcal{U}_j\}$. Očigledno, niz $\{\mathcal{V}_j : j \in N_i\}$ je niz otvorenih pokrivača od X^i. Kako je X^i skoro Mengerov prostor, za svaki $i \in \mathbf{N}$ možemo da izaberemo niz $(\mathcal{W}_j : j \in N_i)$ tako da za svaki j postoji konačan podskup $I_j \subset K_j$ takav da:

(1) $\mathcal{W}_j = \{\overline{U_{jk}^i} : k \in I_j\}$;

(2) $\{\mathcal{W}_j : j \in N_i\}$ je pokrivač od X^i.

Pokazaćemo da je $\{\overline{U_{jk}} : k \in I_j, j \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X. Zaista, neka je $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ konačan podskup od X. Tada je $(x_1, x_2, ..., x_p) \in X^p$, pa postoji neko $l \in N_p$ tako da je $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathcal{W}_l$. Sledi da možemo da nadjemo $k \in I_l$ tako da je $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \overline{U_{lk}^p} = \overline{U_{lk}}^p$. Odatle je jasno da je $F \subset \overline{U_{lk}}$. $\square$

Kažemo da je pokrivač $\mathcal{U}$ od X skoro γ-pokrivač ako je beskonačan i za svaki $x \in X$, $\{U \in \mathcal{U} : x \notin \overline{U}\}$ je konačan skup.

Definicija 2.7 Topološki prostor X je *skoro γ-skup* ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ ω-pokrivača od X postoji niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$, $V_n \in \mathcal{U}_n$ i $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ je skoro γ-pokrivač za X.

Teorema 2.10 *Topološki prostor X je skoro γ-skup ako i samo ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ ω-pokrivača od X sa regularno otvorenim skupovima, postoji niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $V_n \in \mathcal{U}_n$ i $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ je skoro γ-pokrivač od X.*

Dokaz.($\Rightarrow$): Ovaj smer je trivijalan.

($\Leftarrow$): Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz ω-pokrivača od X . Neka je $(\mathcal{U}_n' : n \in \mathbf{N})$ niz definisan sa $\mathcal{U}_n' = \{int(\overline{U}) : U \in \mathcal{U}_n\}$. Tada je svaki $\mathcal{U}_n'$ ω-pokrivač za X sa regularno otvorenim skupovima. Zaista, svaki $int(\overline{U})$ je regularno otvoren skup i $U \subseteq int(\overline{U})$ pošto je U otvoren skup.

Tada postoji niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $V_n \in \mathcal{U}_n'$ i $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ je skoro γ-pokrivač za X.

Iz istog razloga kao u dokazu Teoreme 2.6, $\overline{U} = \overline{int(\overline{U})}$, pa je $\overline{V_n} = \overline{U_n}$ za neko $U_n \in \mathcal{U}_n$ i time je dokazano da je X skoro γ-skup. $\Box$

Teorema 2.11 *Neka je X skoro γ-skup i neka je Y topološki prostor. Ako je $f : X \to Y$ skoro neprekidna surjekcija, onda je Y skoro γ-skup.*

Dokaz: Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz ω-pokrivača od Y sa regularno otvorenim skupovima. Neka je $\mathcal{U}_n' = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$. Tada je svaki $\mathcal{U}_n'$ ω-pokrivač za X. Zaista, ako je F konačan podskup od X, onda je $f(F)$ konačan podskup od Y. Prema uslovu teoreme, postoji $U \in \mathcal{U}_n$ tako da je $f(F) \subset U$. Tada imamo da je $F \subset f^{-1}(U)$. Kako je f skoro neprekidna, $f^{-1}(U)$ je otvoren skup za svaki $U \in \mathcal{U}_n$, pa je $\mathcal{U}_n'$ ω-pokrivač od X.

Pošto je X skoro γ-skup, to postoji niz $(V_n' : n \in \mathbf{N})$ takav da: za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $U_n \in \mathcal{U}_n$ tako da je $V_n' = f^{-1}(U_n)$ i $\{V_n' : n \in \mathbf{N}\}$ je skoro γ-pokrivač za X.

Za svaki $n \in \mathbf{N}$, neka je $V_n = U_n$ tako da je $f^{-1}(U_n) = V_n'$. Ako je $y = f(x) \in Y$, onda postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je:

$\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{n} > \mathbf{n_0} \Rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\mathbf{V_n'}}$.

Pošto je $\overline{V_n'} = \overline{f^{-1}(V_n)} \subseteq f^{-1}(\overline{V_n})$, imamo da je za svaki $n > n_0$ $y \in \overline{V_n}$. Odatle sledi da je Y skoro γ-skup. $\Box$

Kao i u slučaju svojstva skoro Mengera, i u definiciji svojstva skoro zvezda-Mengera se mogu otvoreni skupovi zameniti regularno otvorenim skupovima.

Teorema 2.12 *Topološki prostor X je skoro zvezda-Mengerov ako i samo ako za svaki niz pokrivača $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ čiji su elementi regularno otvoreni skupovi postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki n, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\{\overline{St(\cup\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač od X.*

Dokaz: ($\Rightarrow$): Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz pokrivača od X čiji su elementi regularno otvoreni skupovi. Tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ i svaki $U_n \in \mathcal{U}_n$ važi da je

$U_n = int(\overline{U_n})$ pa je svaki $U_n \in \mathcal{U}_n$ otvoren skup. Pošto je X skoro zvezda-Mengerov, postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki n, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i važi da je $\{\overline{St(\cup\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X.

($\Leftarrow$): Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od X. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ definišimo skup $\mathcal{U}_n' = \{int(\overline{U}) : U \in \mathcal{U}_n\}$. Tada je $\mathcal{U}_n'$ pokrivač od X koji se sastoji od regularno otvorenih skupova. Zaista, svaki $int(\overline{U})$ je regularno otvoren skup (videti [14]) i $U \subset int(\overline{U})$ odakle sledi da je $\mathcal{U}_n'$ pokrivač za X.

Tada postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki n, $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n'$ i $\{\overline{St(\cup\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n')} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X.

Tvrdnja 1: $St(U,\mathcal{U}_n) = St(int(\overline{U}),\mathcal{U}_n)$ za svaki $U \in \mathcal{U}_n$.

Dokaz Tvrdnje 1: Kako je $U \subset int(\overline{U})$, to je očigledno da je $St(U,\mathcal{U}_n) \subset St(int(\overline{U}),\mathcal{U}_n)$.

Neka je $x \in St(int(\overline{U}),\mathcal{U}_n)$. Tada postoji $V \in \mathcal{U}_n$ tako da je $x \in V$ i $V \cap int(\overline{U}) \neq \emptyset$. Tada imamo da je $V \cap U \neq \emptyset$ odakle sledi da $x \in St(U,\mathcal{U}_n)$. $\diamondsuit$

Za svako $V \in \mathcal{V}_n$ možemo da biramo $U_V \in \mathcal{U}_n$ tako da je $V = int(\overline{U_V})$. Stavimo da je $\mathcal{W}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}_n\}$. Pokazaćemo da je $\{\overline{St(\cup\mathcal{W}_n,\mathcal{U}_n)} : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X.

Neka je $x \in X$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in \overline{St(\cup\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n')}$. Za svaku okolinu V of x, imamo da je $V \cap St(\cup\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n') \neq \emptyset$. Tada postoji $U \in \mathcal{U}_n$ tako da je $(V \cap int(\overline{U}) \neq \emptyset) \wedge (\cup\mathcal{V}_n \cap int(\overline{U}) \neq \emptyset) \Rightarrow (V \cap U \neq \emptyset) \wedge (\cup\mathcal{V}_n \cap U \neq \emptyset)$. Prema **Tvrdnji1**, imamo da je $\cup\mathcal{W}_n \cap U \neq \emptyset$, pa $x \in \overline{St(\cup\mathcal{W}_n,\mathcal{U}_n)}$. $\square$

Svojstvo skoro zvezda-Mengera se takodje čuva pri skoro neprekidnim preslikavanjima.

Teorema 2.13 *Neka je X skoro zvezda-Mengerov topološki prostor i neka je Y topološki prostor. Ako je $f : X \to Y$ skoro neprekidna surjekcija onda je i Y skoro zvezda-Mengerov.*

Dokaz: Neka je $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ niz otvorenih pokrivača od Y čiji su elementi regularno otvoreni skupovi.

Neka je $\mathcal{U}_n' = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$. Tada je $\mathcal{U}_n'$ otvoren pokrivač od X za svaki n pošto je f skoro neprekidna funkcija i svi $U \in \mathcal{U}_n$ su regularno otvoreni. Kako je X skoro zvezda-Mengerov, postoji niz $(\mathcal{V}_n' : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki n, $\mathcal{V}_n'$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n'$ i $\{\overline{St(\cup\mathcal{V}_n',\mathcal{U}_n')} : n \in \mathbf{N}\}$ je pokrivač za X.

Stavimo da je $\mathcal{V}_n = \{V : f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_n'\}$. Tada je $f^{-1}(\mathcal{V}_n) = \mathcal{V}_n'$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da $x \in \overline{St(f^{-1}(\mathcal{V}_n),\mathcal{U}_n')}$. Ako je $y =$

$f(x) \in Y$ onda $y \in f(\overline{St(f^{-1}(\mathcal{V}_n),\mathcal{U}'_n)}) \subseteq \overline{f(St(f^{-1}(\mathcal{V}_n),\mathcal{U}'_n))} \subseteq \overline{St(\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n)}$. Dokazaćemo zadnju implikaciju.

Neka $f^{-1}(U) \in St(f^{-1}(\mathcal{V}_n),\mathcal{U}'_n)$. Tada je $f^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ pa je $f(f^{-1}(\mathcal{V}_n)) \cap U \neq \emptyset$ pa je $\mathcal{V}_n \cap U \neq \emptyset$ tj. $U \in St(\mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n)$.

Odatle sledi da je Y skoro zvezda-Mengerov. $\square$

2.3 Slabo Mengerovi prostori

U radu [38] uvedeno je svojstvo blisko svojstvu Mengera.

DEFINICIJA 2.8 Prostor X je *slabo Mengerov* ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$ $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i važi da je $\overline{\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N}\}} = X$.

Jasno je da je svaki skoro Mengerov prostor slabo Mengerov. U radu [38] navedena su dva primera koja pokazuju da obrat ne važi.

Primer 2.7 ([Bell-Ginsburg-Woods][42])

Neka je $A = \mathbf{Q} + \pi$ prebrojiv gust podskup skupa iracionalnih brojeva i $X = A \cup (\omega_1 \times \mathbf{Q})$ sa topologijom definisanom na sledeći način: za $r \in \mathbf{Q}$, lokalna baza za $r + \pi$ u X je oblika $(r + \pi - 1/n, r + \pi + 1/n) \cup (\omega_1 \times (r + \pi - 1/n, r + \pi + 1/n)$, a lokalna baza od (α, r), gde je $\alpha \in \omega_1$, je oblika $\{\alpha\} \times (r - 1/n, r + 1/n)$. X sa ovom topologijom je slabo Mengerov prostor, a nije skoro Mengerov prostor.

Primer 2.8 *Tychonovski slabo Mengerov prostor koji nije skoro Mengerov.*

Neka je X podskup od $\beta\omega$. Postoji familija $\mathcal{A}$ beskonačnih, medjusobno disjunktnih podskupova od $\mathcal{P}(X)$ takva da je $|\mathcal{A}| = \mathbf{c}$. Za svaki $A \in \mathcal{A}$, uzećemo $p_A \in cl_{\beta\omega}A \setminus A$. Tada je prostor X skup $\omega \cup \{p_A : A \in \mathcal{A}\}$. Ovako definisan topološki prostor X je slabo Mengerov, a nije skoro Mengerov prostor.

Kažemo da je pokrivač $\mathcal{U}$ *zvezda-konačan* ako svaki $U \in \mathcal{U}$ seče samo konačno mnogo $V \in \mathcal{U}$.

Kažemo da je prostor hipokompaktan ako svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X ima zvezda-konačno profinjenje.

U [38] je dokazano sledeće tvrdjenje:

Teorema 2.14 *Svaki hipokompaktan skoro Mengerov prostor je Mengerov.*

Takodje je u [38] pokazano da se slabo Mengerovo svojstvo čuva pri skoro neprekidnim preslikavanjima i da se u definiciji slabo Mengerovog svojstva otvoreni pokrivači mogu zameniti pokrivačima čiji su elementi regularno otvoreni skupovi.

Što se tiče konačnih stepena prostora sa slabo Mengerovim svojstvom, dokazano je sledeće tvrdjenje:

Teorema 2.15 *Za prostor X sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) Svaki konačan stepen prostora X je slabo Mengerov;

(b) Za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ ω-pokrivača od X, postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$ takav da je $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ i $\overline{\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N}\}} = X$.

Na prirodan način se uvodi i pojam slabo zvezda-Mengerovog prostora.

Definicija 2.9 Prostor X je *slabo zvezda-Mengerov* ako za svaki niz $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbf{N})$ otvorenih pokrivača od X postoji niz $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N})$, gde je $\mathcal{V}_n$ konačan podskup od $\mathcal{U}_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ i $\overline{\bigcup\{St(\bigcup\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\}} = X$.

Očigledno je da je svaki skoro zvezda-Mengerov prostor slabo zvezda-Mengerov.

Problem: Naći slabo zvezda-Mengerov prostor koji nije skoro zvezda-Mengerov?

Svojstvo slabo zvezda-Mengera se takodje čuva pri skoro neprekidnim preslikavanjima i u definiciji se otvoreni pokrivači mogu zameniti pokrivačima čiji su elementi regularno otvoreni skupovi.

Glava 3

Selekciona svojstva slabija od svojstava relator Rothbergera, relator Mengera i relator Hurewicza

3.1 Lokalna svojstva u relator prostorima

Kao u odeljku 2.1, koristimo okoline skupova da definišemo pojmove odgovarajuće svojstvima relator Rothbergera, relator Mengera i relator Hurewicza.

Ako je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor i A proizvoljan podskup od X, onda kažemo da je O okolina od A u relator prostoru $(X, \mathcal{R})$ ako važi da je $A \subset O$ i $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$.

Definicija 3.1 Relator prostor $(X, \mathcal{R})$ je:

- NRR (*lokalno relator Rothbergerov*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ možemo birati niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X, tako da je za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od x_n, $\{R_n(O_n) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X;
- NRM (*lokalno relator Mengerov*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od F_n, važi da je $\{R_n(O_n) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X;

- NRH (*lokalno relator Hurewiczev*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od F_n, svaki $x \in X$ pripada $R_n(O_n)$ za sve $n \in \mathbf{N}$ sem konačno mnogo.

Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako koristimo notaciju:

- $\mathcal{N}\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{R_\alpha(A_\alpha) : \alpha \in I, R_\alpha \in \mathcal{R},\ A_\alpha \subset X$ i za svaki $O_\alpha \supset A_\alpha, O_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}, \{R_\alpha(O_\alpha) : \alpha \in I\} \in \mathcal{C}\}$,
- $\mathcal{N}\Gamma_{\mathcal{R}} = \{R_\alpha(A_\alpha) : \alpha \in I, R_\alpha \in \mathcal{R},\ A_\alpha \subset X$ i za svaki $O_\alpha \supset A_\alpha, O_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}, \{R_\alpha(O_\alpha) : \alpha \in I\} \in \Gamma_{\mathcal{C}}\}$,

gde je I indeksni skup, onda važe sledeća tvrdjenja:

- $(X, \mathcal{R})$ je NRR akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{N}\mathcal{C}_{\mathcal{R}})$;
- $(X, \mathcal{R})$ je NRM akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{N}\mathcal{C}_{\mathcal{R}})$ akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{N}\mathcal{C}_{\mathcal{R}})$;
- $(X, \mathcal{R})$ je NRH akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{N}\Gamma_{\mathcal{R}})$ akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{N}\Gamma_{\mathcal{R}})$.

Dokazaćemo da su ova svojstva invarijantna u odnosu na relator neprekidne slike.

Teorema 3.1 *Neka su $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ relator prostori i neka je $f : X \to Y$ relator neprekidna surjekcija. Ako je $(X, \mathcal{R})$* NRM*, onda je i $(Y, \mathcal{S})$* NRM*.*

Dokaz: Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{S}$. Tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $R_n \in \mathcal{R}$ takvo da je za svaki $x \in X$, $f(R_n(x)) \subset S_n(f(x))$. Kako je $(X, \mathcal{R})$ NRM, to postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je za svaki niz okolina O_n od F_n, $\bigcup R_n(O_n) = X$. Tada imamo da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f(R_n(O_n)) = f(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(O_n)) = f(X) = Y$. Primetimo takodje da je $f(R_n(O_n)) \subset S_n(f(O_n))$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Dokazaćemo da niz $(f(F_n) : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od Y svedoči da je $(Y, \mathcal{S})$ NRM. Neka je $(B_n : n \in \mathbf{N})$, niz okolina od $f(F_n)$, i neka je

A_n podskup od X tako da je $A_n = f^{-1}(B_n)$. Tvrdimo da je $A_n \in \mathcal{T}_\mathcal{R}$. Zaista, ako je $x \in A_n$, onda je $y = f(x) \in B_n$. Pošto je $B_n \in \mathcal{T}_\mathcal{S}$, onda postoji $S \in \mathcal{S}$ tako da je $S(y) \subset B_n$. Prema pretpostavci da je f relator neprekidna, možemo da nadjemo $R \in \mathcal{R}$ tako da je $f(R(x)) \subset S(y) \subset B_n$. Odatle sledi da je $R(x) \subset A_n$, čime smo dokazali da je $A_n \in \mathcal{T}_\mathcal{R}$. Takodje imamo da je $A_n \supset F_n$ i $f(R_n(A_n)) \subset S_n(B_n)$, pa je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n(B_n) = Y$. $\square$

Prirodno se nameće pitanje u kakvom su odnosu gore definisani pojmovi sa odgovarajućim svojstvima u topološkim prostorima.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za svaki $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ možemo da definišemo relaciju $R_\mathcal{U}$ na X na sledeći način: $R_\mathcal{U}(x) = St(\{x\}, \mathcal{U})$ za svaki $x \in X$. Tada je $\mathcal{R}^*_\mathcal{T} = \{R_\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ relator na X i uredjeni par $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je relator prostor. Lako se proverava da važe sledeća tvrdjenja:

(1): $(X, \mathcal{T})$ je SSR akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je RR;
(2): $(X, \mathcal{T})$ je SSM akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je RM;
(3): $(X, \mathcal{T})$ je SSH akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je RH.

Da bismo pokazali slično tvrdjenje u kontekstu okolinskih selekcionih principa, treba nam sledeća lema:

Lema 3.1 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ regularan topološki prostor, onda je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ je proizvoljno. Kako je $(X, \mathcal{T})$ regularan, možemo naći $V \in \mathcal{T}$ takvo da je $x \in \overline{V} \subset U$. Tada je $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \overline{V}\}$ otvoren pokrivač od X i $R_\mathcal{U}(x) = U$, pa $R_\mathcal{U}$ svedoči da je $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$.

Sa druge strane, ako $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$, onda za svaki $x \in U$ možemo naći $R \in \mathcal{R}^*$ tako da je $R(x) \subset U$. Prema definiciji $\mathcal{R}^*$, postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X takav da je $R = R_\mathcal{U}$, pa je u stvari $St(\{x\}, \mathcal{U}) \subset U$. Pošto je $St(\{x\}, \mathcal{U})$ otvoren skup, onda je $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Teorema 3.2 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ regularan topološki prostor. Tada važi:*

(1) : *$(X, \mathcal{T})$ je NSR akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je NRR;*

(2) : *$(X, \mathcal{T})$ je NSM akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je NRM;*

(3) : *$(X, \mathcal{T})$ je NSH akko $(X, \mathcal{R}^*_\mathcal{T})$ je NRH.*

Dokaz. Dokazaćemo samo (2), pošto se druga dva tvrdjenja dokazuju analogno. Neka $(X, \mathcal{T})$ ima svojstvo lokalno zvezda-Mengera. Pokazaćemo da $(X, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$ ima svojstvo lokalno relator Mengera. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}^*_{\mathcal{T}}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$, postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}_n$ od X tako da je $R_n = R_{\mathcal{U}_n}$. Prema pretpostavci, možemo izabrati konačne podskupove $F_n \subset X$, $n \in \mathbf{N}$, tako da za svaki otvoren $O_n \supset F_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\{St(O_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbf{N}\}$ je otvoren pokrivač za X. Pošto je $R_n(O_n) = St(O_n, \mathcal{U}_n)$ i $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$ (prema Lemi 3.1), očigledno je da je $(F_n : n \in \mathbf{N})$ traženi niz. Na sličan način se pokazuje i obrat. $\Box$

Korišćenjem okoline možemo definisati i svojstvo odgovarajuće svojstvu Lindelöfa.

Definicija 3.2 Relator prostor $(X, \mathcal{R})$ je NRL (*lokalno relator Lindelöfov*) ako za svaku relaciju R iz $\mathcal{R}$ postoji prebrojiv podskup A od X tako da za svaku okolinu O od A važi da je $R(O) = X$.

Primetimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ SSC (resp., SSL) akko je relator prostor $(X, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$ RC (resp., RL), i ako je $(X, \mathcal{T})$ regularan, onda je $(X, \mathcal{T})$ NSL akko je $(X, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$ NRL.

U sledećem dijagramu predstavićemo neke očigledne implikacije.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{RR} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathsf{RM} \arrow[dd] \arrow[drr] & \mathsf{RH} \arrow[l] \arrow[dd] & \sigma\text{-}\mathsf{RC} \arrow[l] \\
 & & & \mathsf{RC} \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathsf{NRR} \arrow[r] & \mathsf{NRM} \arrow[drr] & \mathsf{NRH} \arrow[l] & \mathsf{RL} \arrow[d] \\
 & & & \mathsf{NRL}
\end{tikzcd}$$

Iskoristićemo isti prostor iz Primera 2.2, 2.3 i 2.4 da pokažemo da ne važe obrti tvrdjenja RL $\Rightarrow$ NRL, RR $\Rightarrow$ NRR, RM $\Rightarrow$ NRM and RH $\Rightarrow$ NRH.

Primer 3.1 Neka je $X = \mathbf{P} \times (\omega + \mathbf{1})$, gde $\mathbf{P}$ označava skup iracionalnih brojeva, sa istom topologijom kao u Primeru 2.1. Definišimo relator $\mathcal{R}^*_{\mathcal{T}}$ na X na isti način kao ranije u ovom odeljku.

Kako je $(X, \mathcal{T})$ NSL, a nije SSL, i važi da iz $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$ sledi $O \in \mathcal{T}$, zaključujemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$ NRL, a nije RL. $\Box$

Primer 3.2 *($\omega_1 <$***d***)* Postoji NRM prostor koji nije RL.

Primer 3.3 *($\omega_1 <$***b***)* Postoji NRH prostor koji nije RL.

Primer 3.4 *($\omega_1 <cov(\mathcal{M})$)* Postoji NRR prostor koji nije RL.

Neka je $X_S = S \times (\omega + 1)$ isto kao u Primerima 2.2, 2.3 i 2.4 i sa topologijom definisanom na isti način kao u navedenim primerima.

Kako je X_S sa ovom topologijom NSM (resp. NSH, NSR) pod uslovima ($\omega_1 <\mathbf{d}$) (resp. ($\omega_1 <\mathbf{b}$), ($\omega_1 <cov(M)$))), a nije SSL, i iz $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}^*}$ sledi da je $O \in \mathcal{T}$, to imamo da je relator prostor $(X_S, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$ NRM (resp. NRH, NRR) pod uslovima ($\omega_1 <\mathbf{d}$) (resp. ($\omega_1 <\mathbf{b}$), ($\omega_1 <cov(\mathcal{M})$))). $\square$

Problem 3.1 Da li postoje primeri prostora u okviru **ZFC** koji zadovoljavaju tvrdjenja iz Primera 3.2, 3.3 i 3.4?

Ispitajmo odnos izmedju svojstava NRM i n-RM.

Teorema 3.3 *Ako je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ lokalno relator Mengerov, svaka relacija $R \in \mathcal{R}$ je refleksivna i $R(x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ za svaki $R \in \mathcal{R}$ i svaki $x \in X$, onda je $(X, \mathcal{R})$ 2-relator Mengerov.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Prema pretpostavci, postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od F_n, $n \in \mathbf{N}$, $\{R_n(O_n) : n \in \mathbf{N}\}$ pokriva X. Pokazaćemo da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n^2(F_n) = X$. Prema uslovu teoreme, za svaki $n \in \mathbf{N}$, $R_n(F_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ i $F_n \subset R_n(F_n)$, pa imamo da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(R_n(F_n)) = X$, odnosno $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n^2(F_n) = X$. $\square$

Napomena. Analogno tvrdjenje važi i za odgovarajuća svojstva tipa Rothbergera i tipa Hurewicza.

Prirodno mogu da se definišu n i ω verzije lokalnih svojstava u relator prostorima.

Definicija 3.3 Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Kažemo da je:

- $(X, \mathcal{R})$ *n- lokalno relator Mengerov (ω-lokalno relator Mengerov)*, gde je $n \in \mathbf{N}$, ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_k : k \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki niz $(O_k : k \in \mathbf{N})$ okolina od F_k, $k \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^n(O_k) = X$ (resp. $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^\infty(O_k) = X$);

- $(X, \mathcal{R})$ *n-lokalno relator Rothbergerov (ω-lokalno relator Rothbergerov)* ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(x_k : k \in \mathbf{N})$ elemenata iz X takav da za svaki niz $(O_k : k \in \mathbf{N})$ okolina od x_k, $k \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^n(O_k) = X$ (resp. $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k^\infty(O_k) = X$); ;

- $(X, \mathcal{R})$ *n-lokalno relator Hurewiczev (ω-lokalno relator Hurewiczev)* ako za svaki niz $(R_k : k \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_k : k \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X takav da za svaki niz $(O_k : k \in \mathbf{N})$ okolina od F_k, $k \in \mathbf{N}$, svaki $x \in X$ pripada svim $R_k^n(O_k)$ (resp. $R_k^\infty(O_k)$) sem konačno mnogo.

Jasno je da pri uslovima iz Teoreme 3.3 imamo da za svaki $n \in \mathbf{N}$, svojstvo n-lokalno relator Mengera implicira svojstvo $n+1$-relator Mengera (analogno važi i za odgovarajuća svojstva tipa Rothbergera i tipa Hurewicza).

Sada razmatramo problem proizvoda prostora sa svojstvom NRM.

Teorema 3.4 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako je $(X^n, \mathcal{R}^n)$* NRM *za svaki $n \in \mathbf{N}$, tada za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da za svaki niz $(O_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od F_n, $n \in \mathbf{N}$, $\{R_n(O_n) : n \in \mathbf{N}\}$ je ω-pokrivač za X.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$ i neka je $\mathbf{N} = \mathbf{N_1} \cup \mathbf{N_2} \cup ...$ particija od $\mathbf{N}$ na prebrojivo mnogo beskonačnih, medjusobno disjunktnih, podskupova. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ i $m \in N_k$ neka je $S_m = (R_m)^k$. Tada je $(S_m : m \in N_k)$ niz relacija iz $\mathcal{R}^k$. Pošto je $(X^k, \mathcal{R}^k)$ NRM, možemo da nadjemo konačne podskupove $A_m \subset X^k$, $m \in N_k$, takve da je za svaki niz $(O_m : m \in N_k)$ okolina od A_m, $m \in N_k$, $\{S_m(O_m) : m \in N_k\}$ pokrivač za X^k. Za svaki $m \in N_k$, neka je F_m konačan podskup od X takav da je $(F_m)^k \supset A_m$. Posmatrajmo niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$. Neka je $(T_n : n \in \mathbf{N})$ niz okolina od F_n, $n \in \mathbf{N}$. Tvrdimo da je $\{R_n(T_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X. Neka je $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ konačan podskup od X. Tada je $\langle x_1, x_2, ..., x_p\rangle \in X^p$, pa postoji $n \in N_p$ tako da je $\langle x_1, x_2, ..., x_p\rangle \in S_n({T_n}^p)$, pa odatle sledi da je $F \subset R_n(T_n)$. $\square$

Teorema 3.5 *Ako su relator prostori $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$* NRH*, onda je relator prostor $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ takodje* NRH*.*

Dokaz. Neka je $(T_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$, $T_n = R_n \times S_n$, gde su $R_n \in \mathcal{R}$, $S_n \in \mathcal{S}$. Biramo niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da za svaki niz $(U_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od F_n, $n \in \mathbf{N}$, svaki $x \in X$ pripada svim $R_n(U_n)$ sem konačno mnogo. Možemo takodje naći niz $(G_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od Y tako da za svaki niz $(V_n : n \in \mathbf{N})$ okolina od G_n, $n \in \mathbf{N}$, svaki $y \in Y$ pripada svim sem konačno mnogo $S_n(V_n)$. Pokazaćemo da niz $(A_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od $X \times Y$, gde je $A_n = F_n \times G_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, svedoči da je relator prostor $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ NRH. Neka je $O_n \supset A_n$, $O_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}$. Tada postoje $U_n \subset X$ i $V_n \subset Y$ tako da je $O_n = U_n \times V_n$, gde je $U_n \supset F_n$ i $V_n \supset G_n$. Pokažimo da je $U_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ i $V_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Neka je $(x, y) \in O_n$. Tada postoje $R \in \mathcal{R}$ i $S \in \mathcal{S}$ takvi da je $(R \times S)(x, y) \subset O_n$. Odatle sledi da je $R(x) \subset U_n$ i $S(y) \subset V_n$.

Neka je $(x, y) \in X \times Y$. Tada postoje $n_1 \in \mathbf{N}$ i $n_2 \in \mathbf{N}$ tako da x pripada $R_n(U_n)$ za svaki $n > n_1$ i y pripada $S_n(V_n)$ za svaki $n > n_2$. Stavimo da je $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Sada imamo da je $(x, y) \in R_n(U_n) \times S_n(V_n)$ za svaki $n > n_0$, t.j. $(x, y) \in T_n(O_n)$ za svaki $n > n_0$. $\square$

Na sličan način možemo pokazati sledeće tvrdjenje:

Teorema 3.6 *Ako je relator prostor* $(X, \mathcal{R})$ NRM*, a relator prostor* $(Y, \mathcal{S})$ NRH*, onda je relator prostor* $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ NRM*.*

3.2 Operator zatvorenja i selekcioni principi u relator prostorima

U relator prostorima možemo uvesti pojmove korišćenjem operatora zatvorenja na sličan način kao što smo definisali selekcione principe u odeljku 2.2. U ovom odeljku pretpostavićemo da su sve relacije refleksivne.

Definicija 3.4 Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$:

- ARM (*Skoro relator Mengerov*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\{cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X;

- ARR (*Skoro relator Rothbergerov*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X tako da je $\{cl_{\mathcal{R}}(R_n(x_n)) : n \in \mathbf{N}\}$ pokrivač za X;

- ARH (*Skoro relator Hurewiczev*) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da svaka tačka $x \in X$ pripada svim $cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))$ sem konačno mnogo.

Ako koristimo notaciju:

- $cl(\omega(R)) = \{cl_{\mathcal{R}}(R(F)) : F \subset X \text{ konačan}\}$,
- $cl(\Omega(\mathcal{R}))= \{cl(\omega(R)) : R \in \mathcal{R}\}$,
- $cl(\mathcal{U}_R) = \{cl_{\mathcal{R}}(R(x)) : x \in X\}$,
- $cl(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}) = \{cl(\mathcal{U}_R) : R \in \mathcal{R}\}$,

onda za relator prostor $(X, \mathcal{R})$ važe sledeća tvrdjenja:

- $(X, \mathcal{R})$ je ARM akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(cl(\Omega(\mathcal{R})), \mathcal{C})$ akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_{fin}(cl(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}), \mathcal{C})$;
- $(X, \mathcal{R})$ je ARR akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(cl(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}), \mathcal{C})$;
- $(X, \mathcal{R})$ je ARH akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_1(cl(\Omega(\mathcal{R})),\Gamma_{\mathcal{C}})$ akko $(X, \mathcal{R})$ zadovoljava selekcionu hipotezu $\mathcal{S}_{fin}(cl(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}), \Gamma_{\mathcal{C}})$.

Jasno je da iz svojstva RM sledi ARM, iz svojstva RR sledi ARR, iz svojstva RH sledi ARH. Postavlja se logično pitanje je da li važe obrti za ova tri tvrdjenja i kako su ova svojstva povezana sa odgovarajućim svojstvima u topološkim prostorima.

Sledeći primer pokazuje da obrti tvrdjenja RM $\Rightarrow$ ARM i RH $\Rightarrow$ ARH ne važe. Ovaj primer takodje pokazuje da postoji ARM (resp. ARH) prostor koji nije NRM (NRH).

Primer 3.5 Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva i neka je D prebrojiv gust podskup od $\mathbf{R}$. Označimo sa $X = \mathbf{R}$ i za svaki $\varepsilon \in \mathbf{R}$ definišimo relaciju R_ε tako da je $R_\varepsilon(x) = \{x\} \cup (D \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ (videti [51], Primer 68). Tada je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor, gde je $\mathcal{R} = \{R_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbf{R}\}$.

Da bismo pokazali da relator prostor $(X, \mathcal{R})$ nije RM, pokazaćemo da nije ni RL. Neka je A prebrojiv podskup od X i $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Tada je $R_\varepsilon(A) \subset A \cup D$. Skup $A \cup D$ je prebrojiv, a $\mathbf{R}$ je neprebrojiv, pa $R_\varepsilon(A)$ ne može da pokrije X.

Primetimo da $(X,\mathcal{R})$ nije čak ni NRM. Zaista, neka je $(R_{\varepsilon_n}: n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ biramo proizvoljno konačne podskupove F_n of X. Za svaki $x \in F_n$, $R_{\varepsilon_n}(x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. Označimo sa $O_n = R_{\varepsilon_n}(F_n)$. Tada je $R_{\varepsilon_n}(O_n) \subset F_n \cup D$. Ako je $B = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, onda je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_{\varepsilon_n}(O_n) \subset B \cup D$. Kako je $B \cup D$ prebrojiv, a $\mathbf{R}$ je neprebrojiv, sledi da $(X,\mathcal{R})$ nije NRM.

Dokazaćemo da je $(X,\mathcal{R})$ ARM. Štaviše, pokazaćemo da je $(X,\mathcal{R})$ ARH. Neka je $(R_{\varepsilon_n}: n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon \in \mathbf{R}$, važi da je $cl_{\mathcal{R}}(R_\varepsilon(x)) = cl_{\mathcal{D}}(D_\varepsilon(x))$, gde je $\mathcal{D} = \{D_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbf{R}\}$ i $D_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$ (Ova zatvorenja su jednaka, jer je skup D gust u $\mathbf{R}$). Pokazaćemo da je prostor $(\mathbf{R},\mathcal{D})$ RH. Zaista, za svaki $n \in \mathbf{N}$, prostor $([-n,n],\mathcal{D})$ je relator kompaktan, pa možemo da nadjemo konačne podskupove F_n od $\mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $[-n,n] \subset D_{\varepsilon_n}(F_n)$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in [-n_0, n_0]$, pa za svaki $n \geq n_0$, važi da $x \in D_{\varepsilon_n}(F_n)$. Pošto je $(\mathbf{R},\mathcal{D})$ RH, prostor $(X,\mathcal{R})$ je ARH. $\square$

Problem 3.1. Da li postoji ARR prostor koji nije RR?

Problem 3.2. Da li postoji NRM (resp. NRR, NRH) prostor koji nije ARM (ARR, ARH)?

Teorema 3.7 *Ako je relator prostor $(X,\mathcal{R})$ ARM i za svaki $R \in \mathcal{R}$ i svaki $x \in X$, $R(x)$ ima neprazan presek sa samo konačno mnogo $R(y), y \in X$, onda je X prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Pošto je $(X,\mathcal{R})$ ARM, možemo da biramo konačne podskupove F_n, $n \in \mathbf{N}$ tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) = X$. Stavimo da je $A_n = \{x \in X : R_n(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset\}$. Prema pretpostavci, skup A_n je konačan za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Pokazaćemo da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = X$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))$. Za svaki $R \in \mathcal{R}$, $R(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$, pa je $R_n(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$. Odatle sledi da $x \in A_n$. $\square$

Zanimljivo je videti kakav je odnos izmedju svojstva ARM i svojstva n-relator Mengera.

Teorema 3.8 *Ako je relator prostor $(X,\mathcal{R})$ skoro relator Mengerov i svaka relacija $R \in \mathcal{R}$ je simetrična, onda je $(X,\mathcal{R})$ 2-relator Mengerov.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Prema pretpostavci, postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) = X$. Pokazaćemo da je $cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) \subset R_n^2(F_n)$.

Neka je $x \in cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))$. Tada za svaki $R \in \mathcal{R}$, $R(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$, pa je $R_n(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$. Tada postoji $y \in R_n(x)$ tako da je $y \in R_n(F_n)$. Sada imamo da je $x \in R_n^{-1}(y) \Rightarrow x \in R_n^{-1}(R_n(F_n)) \Rightarrow x \in R_n(R_n(F_n))$ (zadnja implikacija važi, jer je R_n simetrična). Ostatak dokaza je trivijalan. $\square$

Lema 3.2 *Ako je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ regularan, onda je za svaki podskup A od X, $\overline{A} = cl_{\mathcal{R}^*_{\mathcal{T}}}(A)$.*

Dokaz je sličan dokazu Lemme 3.1.

Sledeće tvrdjenje je trivijalno:

Teorema 3.9 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ regularan prostor, onda je$(X, \mathcal{T})$* ASSM *ako i samo ako je relator prostor $(X, \mathcal{R}^*_{\mathcal{T}})$* ARM.

U odeljku 2.2, pokazano je da se svojstvo skoro Mengera čuva skoro neprekidnim preslikavanjima. Videćemo da slično tvrdjenje važi u relator prostorima. Prvo ćemo definisati pojam skoro relator neprekidne funkcije.

Definicija 3.5 Neka su $(X, \mathcal{R})$ i $(Y, \mathcal{S})$ relator prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : (X, \mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{S})$ *skoro relator neprekidno* ako za svaki $S \in \mathcal{S}$ postoji $R \in \mathcal{R}$ tako da je za svaki $x \in X$, $f(cl_{\mathcal{R}}(R(x))) \subset S(f(x))$.

Teorema 3.10 *Neka je $(X, \mathcal{R})$* ARM *i neka je $(Y, \mathcal{S})$ relator prostor. Ako je $f : (X, \mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{S})$ skoro relator neprekidna surjekcija, onda je $(Y, \mathcal{S})$* RM.

Dokaz: Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{S}$. Kako je funkcija f skoro relator neprekidna, možemo da biramo relaciju $R_n \in \mathcal{R}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ tako da je $f(cl_{\mathcal{R}}(R_n(x))) \subset S_n(f(x))$ za svaki $x \in X$. Prema pretpostavci, možemo da nadjemo konačne podskupove $F_n \subset X$, $n \in \mathbf{N}$, tako da je $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))) = X$. Sada imamo da je $Y = f(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f(cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n(f(F_n))$. Dakle, niz $(f(F_n) : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od Y svedoči da je $(Y, \mathcal{S})$ RM. $\square$

Sada ćemo razmatrati svojstvo ARM u konačnim stepenima.

Teorema 3.11 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako su svi konačni stepeni prostora $(X, \mathcal{R})$* ARM, *onda za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$, postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X, tako da je $\{cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X.*

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$ i neka je $\mathbf{N} = \mathbf{N_1} \cup \mathbf{N_2} \cup ...$ particija od $\mathbf{N}$ na beskonačno mnogo beskonačnih, medjusobno disjunktnih podskupova. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ i svaki $m \in N_k$ neka je $S_m = (R_m)^k$. Tada je $(S_m : m \in N_k)$ niz relacija iz $\mathcal{R}^k$. Kako je $(X^k, \mathcal{R}^k)$ ARM, možemo da nadjemo konačne podskupove A_m od X^k, $m \in N_k$, tako da je $\{cl_{\mathcal{R}^k}(S_m(A_m)) : m \in N_k\}$ pokrivač za X^k. Za svaki $m \in N_k$, neka je F_m konačan podskup od X takav da je $F_m^k \supset A_m$. Posmatrajmo niz svih $F_m, m \in N_k$, $k \in \mathbf{N}$, izabranih ovako i označimo sa $(F_n : n \in \mathbf{N})$. Tvrdimo da je $\{cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) : n \in \mathbf{N}\}$ ω-pokrivač za X. Neka je $F = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ konačan podskup od X. Tada je $\langle x_1, x_2, ..., x_p\rangle \in X^p$. Postoji $n \in N_p$ tako da je $\langle x_1, x_2, ..., x_p\rangle \in cl_{\mathcal{R}^p}(R_n^p(F_n^p))$, pa zato imamo da je $F \subset cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))$.
$\square$

Sledeća dva tvrdjenja (i njihovi dokazi) su slična tvrdjenjima teorema 3.5 i 3.6.

Teorema 3.12 *Proizvod dva* ARH *prostora je* ARH.

Teorema 3.13 *Ako je relator prostor* $(X, \mathcal{R})$ ARM, *a relator prostor* $(Y, \mathcal{S})$ ARH, *onda je relator prostor* $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ ARM.

Sada definišemo selekciono svojstvo u relator prostorima odgovarajuće svojstvu slabo Mengera u topološkim prostorima.

DEFINICIJA 3.6 Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *slabo relator Mengerov* (WRM) ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)) = X$.

Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako označimo sa $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{(A_n)_{n\in\mathbf{N}} : A_n \subset X, cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) = X\}$, onda su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

- (1): $(X, \mathcal{R})$ je WRM;
- (2): Selekciona hipoteza $\mathcal{S}_1(\Omega(\mathcal{R}), \mathcal{D}_{\mathcal{R}})$ važi u X;
- (3): Selekciona hipoteza $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}, \mathcal{D}_{\mathcal{R}})$ važi u X.

Ispitajmo odnos izmedju skoro relator Mengerovog i slabo relator Mengerovog svojstva.

Teorema 3.14 *Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Ako je $(X, \mathcal{R})$* ARM*, onda je $(X, \mathcal{R})$* WRM.

Dokaz. Neka je $(R_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R}$. Kako je $(X, \mathcal{R})$ ARM, postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n)) = X$. Pokazaćemo da je $cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n)) = X$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je $x \in cl_{\mathcal{R}}(R_n(F_n))$. Dakle, za svaki $R \in \mathcal{R}$, $R(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$. Odatle sledi da je $R(x) \cap \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) \neq \emptyset$ za svaki $R \in \mathcal{R}$, pa $x \in cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n))$. $\square$

Pokazaćemo da obrat ne važi.

Primer 3.6 *Postoji* WRM *prostor koji nije* ARM.

Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, $\mathbf{Q}$ skup racionalnih brojeva i $\mathbf{P}$ skup iracionalnih brojeva. Za svaki $x \in \mathbf{P}$ numerišimo sve nizove racionalnih brojeva koji konvergiraju ka x u Euklidskoj topologiji sa $\{x_\alpha : \alpha < \mathbf{c}\}$. Konstruišimo relator $\mathcal{D}$ na $\mathbf{R}$ na sledeći način: za svaki $\alpha < \mathbf{c}$, definisaćemo relaciju D_α tako da je $D_\alpha(r) = \{r\}$ za svaki $r \in \mathbf{Q}$ i $D_\alpha(x) = \{x\} \cup \{x_{\alpha,i} : i \in \mathbf{N}\}$ za svaki $x \in \mathbf{P}$ i stavimo da je $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \mathbf{c}\}$ (videti [51], Primer 65).

Relator prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ je WRM zato što za svaki niz $(D_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{D}$, možemo da biramo konačne podskupove F_n od $\mathbf{R}$ tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n(F_n) = \mathbf{Q}$ i važi da je $cl_{\mathcal{D}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.

Pokazaćemo da relator prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{D})$ nije ARM. Primetimo da je $cl_{\mathcal{D}}(D(x)) = D(x)$ za svaki $D \in \mathcal{D}$ i svaki $x \in \mathbf{R}$. Neka je $(D_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{D}$. Pošto je $\mathbf{P}$ neprebrojiv i za svaki $D \in \mathcal{D}$ i svaki $x \in \mathbf{P}$ samo $D(x)$ sadrži x, onda za svaki niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od $\mathbf{R}$ postoji $x \in \mathbf{P}$ tako da $x \notin \bigcup_{n\in\mathbf{N}} cl_{\mathcal{D}}(D_n(F_n))$. $\square$

Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *skoro relator Lindelöfov* (ARL) ako za svaku relaciju $R \in \mathcal{R}$ postoji prebrojiv podskup A od X tako da je $cl_{\mathcal{R}}(A) = X$.

Teorema 3.15 *Ako je relator prostor $(X, \mathcal{R})$* WRM*, onda je $(X, \mathcal{R})$* ARL.

Dokaz. Neka je $R \in \mathcal{R}$. Tada postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R(F_n)) = X$. Ako stavimo da je $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, onda je A prebrojiv i važi da je $cl_{\mathcal{R}}(A) = X$. $\square$

Svojstvo WRM se čuva relator neprekidnim preslikavanjima.

Teorema 3.16 *Ako je relator prostor* $(X, \mathcal{R})$ WRM *i* $f : (X, \mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{S})$ *je relator neprekidna surjekcija, onda je* $(Y, \mathcal{S})$ *takodje* WRM*.*

Dokaz. Neka je $(S_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{S}$. Kako je f relator neprekidna, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $R_n \in \mathcal{R}$ tako da je $f(R_n(x)) \subset S_n(f(x))$ za svaki $x \in X$. Tada možemo da nadjemo konačne podskupove F_n od X tako da je $cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n)) = X$. Pokazaćemo da niz $(f(F_n) : n \in \mathbf{N})$ svedoči da je relator prostor $(Y, \mathcal{S})$ WRM.

Neka je $y \in Y$. Tada postoji $x \in X$ tako da je $y = f(x)$. Imamo da je $x \in cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n))$. Znači, za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da je $R(x) \cap R_n(F_n) \neq \emptyset$. Odatle sledi da je $f(R(x)) \cap f(R_n(F_n)) \neq \emptyset$ za neko $n \in \mathbf{N}$. Ako uzmemo proizvoljno $S \in \mathcal{S}$, onda postoji $R \in \mathcal{R}$ tako da je $f(R(x)) \subset S(f(x))$ za svaki $x \in X$. Zaključujemo da je $S(f(x)) \cap S_n(f(F_n)) \neq \emptyset$ za neko $n \in \mathbf{N}$, t.j. važi da je $S(y) \cap \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n(f(F_n)) \neq \emptyset$. Odatle sledi da $y \in cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n(f(F_n)))$. $\square$

Sada ćemo razmatrati problem prizvoda prostora sa svojstvom WRM .

Kažemo da je relator prostor $(X, \mathcal{R})$ *skoro relator kompaktan* (ARC) ako za svaki $R \in \mathcal{R}$ postoji konačan podskup F od X tako da je $cl_{\mathcal{R}}(R(F)) = X$.

Teorema 3.17 *Neka su* $(X, \mathcal{R})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *relator prostori. Ako je* $(X, \mathcal{R})$ WRM*, a* $(Y, \mathcal{S})$ ARC*, onda je proizvod* $(X \times Y, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ WRM*.*

Dokaz. Neka je $(T_n : n \in \mathbf{N})$ niz relacija iz $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$, $T_n = R_n \times S_n$, gde su $R_n \in \mathcal{R}$, $S_n \in \mathcal{S}$. Postoje nizovi $(F_n : n \in \mathbf{N})$ i $(G_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X i Y respektivno, tako da je $cl_{\mathcal{R}}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n)) = X$ i $cl_{\mathcal{S}}(S_n(G_n)) = Y$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Pokazaćemo da je $cl_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}}(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} T_n(F_n \times G_n)) = X \times Y$. Neka je $(x, y) \in X \times Y$. Tada za svaki $R \in \mathcal{R}$, $R(x) \cap (\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n(F_n)) \neq \emptyset$ i za svaki $S \in \mathcal{S}$ i svaki $n \in \mathbf{N}$, $S(y) \cap S_n(G_n) \neq \emptyset$. Možemo naći $n \in \mathbf{N}$ tako da je za svaki $T = R \times S \in \mathcal{R} \times \mathcal{S}$, $T(x, y) \cap T_n(F_n \times G_n) \neq \emptyset$. $\square$

Problem . Da li je proizvod dva WRM prostora takodje WRM prostor?

3.3 Relativna selekciona svojstva u relator prostorima

Za sve selekcione principe koje smo uveli u ovom doktoratu možemo definisati i relativne verzije. Relativne verzije zvezda-selekcionih principa i lokalnih selekcionih principa sistematski su obradjene u radu [10]. Mi ćemo se ograničiti na relativna svojstva relator Rothbergera, relator Mengera i relator Hurewicza.

Definicija 3.7 Neka je $(X, \mathcal{R})$ relator prostor. Kažemo da je potprostor $(Y, \mathcal{R}_Y)$ od $(X, \mathcal{R})$:

- *relativno relator Rothbergerov u* X ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elemenata iz X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(x_n) \supset Y$;
- *relativno relator Mengerov u* X ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da je $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n(F_n) \supset Y$;
- *relativno relator Hurewiczev u* X ako za svaki niz $(R_n : n \in \mathbf{N})$ relacija iz $\mathcal{R}$ postoji niz $(F_n : n \in \mathbf{N})$ konačnih podskupova od X tako da svaki $y \in Y$ pripada svim $R_n(F_n)$ sem konačno mnogo.

Jasno je da ako je Y relativno relator Rothbergerov u X, onda je Y i relativno relator Menger u X. Takodje, ako je Y relativno relator Hurewiczev u X, onda je Y i relativno relator Mengerov u X.

Ako sa $\mathcal{C}_{YX}$ označimo sve pokrivače od Y relacijama i skupovima iz $(X, \mathcal{R})$, a sa Γ_{YX} označimo sve γ-pokrivače od Y relacijama i skupovima iz $(X, \mathcal{R})$, onda važe sledeća tvrdjenja:

- Y je relativno relator Rothberger u X akko važi selekciona hipoteza $\mathsf{S}_1(\mathcal{C}_\mathcal{R}, \mathcal{C}_{YX})$ u X;
- Y je relativno relator Menger u X akko važi selekciona hipoteza $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{C}_\mathcal{R}, \mathcal{C}_{YX})$ u X akko važi selekciona hipoteza $\mathsf{S}_1(\Omega_\mathcal{R}, \mathcal{C}_{YX})$ u X;
- Y je relativno relator Hurewiczev u X akko važi selekciona hipoteza $\mathsf{S}_{fin}(\mathcal{C}_\mathcal{R}, \Gamma_{YX})$ u X akko važi selekciona hipoteza $\mathsf{S}_1(\Omega_\mathcal{R}, \Gamma_{YX})$ u X.

Relativna svojstva u relator prostorima se takodje čuvaju relator neprekidnim preslikavanjima, odnosno važi sledeće:

Teorema 3.18 *Ako su* $(X, \mathcal{R})$ *i* $(Z, \mathcal{S})$ *relator prostori i* $f : X \longrightarrow Z$ *je relator neprekidna funkcija, onda važi da ako je* $(Y, \mathcal{R}_Y)$ *relativno relator Mengerov u* X*, onda je i* $(f(Y), \mathcal{S}_{f(Y)})$ *relativno relator Mengerov u* Z*.*

Dokaz je sličan dokazu Teoreme 1.3. $\square$

Analogno Teoremi 1.9. važi i sledeće tvrdjenje:

Teorema 3.19 *Neka je* $(X, \mathcal{R})$ *relator prostor i neka je* $(Y, \mathcal{R}_Y)$ *relator potprostor od* X*. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(1) *Za svaki niz* $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ *postoji niz* $(F_n : n \in \mathbf{N})$ *konačnih podskupova od* X *takav da je* $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ ω*-pokrivač za* Y*;*

(2) *Za svaki niz* $(R_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{R}$ *postoji niz* $(F_n : n \in \mathbf{N})$ *konačnih podskupova od* X *takav da je* $\{R_n(F_n) : n \in \mathbf{N}\}$ *slabo grupabilan pokrivač za* Y*.*

Ako sa $\mathcal{C}_{YX}^{gp}$ označimo skup svih grupabilnih pokrivača od Y relacijama i skupovima iz $(X, \mathcal{R})$, onda važi sledeće tvrdjenje analogno Teoremi 1.20:

Teorema 3.20 *Neka je* $(X, \mathcal{R})$ *relator prostor i neka je* $(Y, \mathcal{R}_Y)$ *relator potprostor od* X*. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*
(1) Y *je relativno relator Hureviczev u* X*;*
(2) X *zadovoljava selekcioni princip* $\mathsf{S}_1(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{C}_{YX}^{gp})$*.*

Sledeće tvrdjenje razmatra relativno svojstvo relator Mengera u konačnim stepenima prostora.

Teorema 3.21 *Ako je za svaki* $n \in \mathbf{N}$, $(Y^n, \mathcal{R}_{Y^n})$ *relativno relator Mengerov u* $(X^n, \mathcal{R}^n)$*, onda za svaki niz relacija* $(R_n : n \in \mathbf{N})$ *iz* $\mathcal{R}$ *postoji niz* $(F_n : n \in \mathbf{N})$ *konačnih podskupova od* X *tako da za svaki konačan podskup* F *od* Y *postoji* $n \in \mathbf{N}$ *tako da je* $F \subset R_n(F_n)$*.*

Dokaz je analogan dokazu Teoreme 1.11.

Literatura

[1] D. Andrijević, M. Jelić, M. Mršević, *On function spaces topologies in the setting of Čech closure spaces*, Topology and its Applications 158 (2011), 1390–1395.

[2] A.V. Arhangel'skiĭ, *The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces*, Soviet Mathematics Doklady 13 (1972), 1185–1189.

[3] A.V. Arhangelskiĭ, *Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces*, Soviet Mathematics Doklady 33 (1986), 396–399.

[4] L. Babinkostova, *Metrizable groups and strict o-boundedness*, Matematički Vesnik 58 (2006), 131–138.

[5] L. Babinkostova, Lj.D.R. Kočinac, M. Scheepers, *Combinatorics of open covers* (VIII), Topology and its Applications 140 (2004), 15–32.

[6] L. Babinkostova, Lj.D.R. Kočinac, M. Scheepers, *Combinatorics of open covers* (XI): *Menger- and Rothberger-bounded groups*, Topology and its Applications 154 (2007), 1269–1280.

[7] L. Babinkostova, B.A. Pansera, M. Scheepers, *Weak covering properties and infinite games*, arXiv:1202.0194.

[8] M. Bonanzinga, F. Cammaroto, Lj.D.R. Kočinac, *Star-Hurewicz and related properties*, Applied General Topology 5 (2004), 79–89.

[9] M. Bonanzinga, F. Cammaroto, Lj.D.R. Kočinac, M.V. Matveev, *On weaker forms of Menger, Rothberger and Hurewicz properties*, Matematički Vesnik 61 (2009), 13–23.

[10] M. Bonanzinga, B.A. Pansera, *Relative versions of some star-selection principles*, Acta Mathematica Hungarica 117 (2007), 231–143.

[11] G. Di Maio, Lj.D.R. Kočinac, *Some covering properties of hyperspaces*, Topology and its Applications 155 (2008), 1959–1969.

[12] D. Djurčić, Lj.D.R. Kočinac, M.R. Žižović, *Classes of sequences of real numbers, games and selection properties*, Topology and its Applications 156 (2008), 46–55.

[13] E.K. van Douwen, G.M. Reed, I.J. Tree, *Star covering properties*, Topology and its Applications 39 (1991), 71–103.

[14] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[15] D.H. Fremlin, A.W. Miller, *On some properties of Hurewicz, Menger, and Rothberger*, Fundamenta Mathematicae 129 (1988), 17–33.

[16] J. Gerlits, Zs. Nagy, *Some properties of C(X)*, I, Topology and its Applications 14 (1982), 151–161.

[17] C. Hernández, *Topological groups close to being σ-compact*, Topology and its Applications 102 (2000), 101–111.

[18] C. Hernández, D. Robbie, M. Tkachenko, *Some properties of o-bounded and strictly o-bounded groups*, Applied General Topology 1 (2000), 29–43.

[19] W. Hurewicz, *Über die Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Mathematische Zeitschrift 24 (1925), 401–425.

[20] W. Just, A.W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki, *The combinatorics of open covers* II, Topology and its Applications 73 (1996), 241–266.

[21] D. Kocev, *Selection principles in relator spaces*, Acta Mathematica Hungarica 126 (1-2) (2010), 78–93.

[22] D. Kocev, *On weaker forms of relator Menger, relator Rothberger and relator Hurewicz properties*, Filomat 26 (2012), 427–437.

[23] D. Kocev, *Almost Menger and related spaces*, Matematički Vesnik 61 (2009), 173–180.

[24] Lj.D.R. Kočinac, *Star-Menger and related spaces*, Publicationes Mathematicae Debrecen 55 (1999), 421–431.

[25] Lj. Kočinac, *Star-Menger and related spaces*, II, Filomat (Niš) 13 (1999), 129–140.

[26] Lj.D.R. Kočinac, *Selection principles in uniform spaces*, Note di Matematica 22:2 (2003/2004), 127–139.

[27] Lj.D.R. Kočinac, *Selected results on selection principles*, Proceedings of the Third Seminar on Geometry and Topology (July 15–17, 2004, Tabriz, Iran), 71–104.

[28] Lj.D.R. Kočinac, *Some covering properties in topological and uniform spaces*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 252 (2006), 122–137.

[29] Lj.D.R. Kočinac (ed.), *Selection Principles and Covering Properties in Topology*, Quaderni di Mathematica 18, 2006.

[30] Lj.D.R. Kočinac, *Selection principles related to α_i-properties*, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008), 561–571.

[31] Lj.D.R. Kočinac, *On the α_i-selection principles and games*, Contemporary Mathematics 533, 107–124.

[32] Lj.D.R. Kočinac, M. Scheepers, *The combinatorics of open covers* (VII): *Groupability*, Fundamenta Mathematicae 179 (2003), 131–155.

[33] M.V. Matveev, *A survey on star covering properties*, Topology Atlas, Preprint No. 330 (1998).

[34] K. Menger, *Einige Überdeckungssätze der Punltmengenlehre*, Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie, Wien) 133 (1924), 421–444.

[35] A. Miller, *Some properties of measure and category*, Transactions of the American Mathematical Society 266 (1981), 93–114.

[36] M. Mršević, M. Jelić, *Selection principles and hyperspace topologies in Čech closure spaces*, Journal of the Korean Mathematical Society 43:5 (2006), 1099–1114.

[37] M. Mršević, M. Jelić, *Selection principles, γ-sets and α_i-properties in Čech closure spaces*, Topology and its Applications 155 (2008), 1947–1958.

[38] B.A. Pansera, *Weaker forms of the Menger property*, Quaestiones Mathematicae, prihvaćen za štampu.

[39] V. Pavlović, *A note on some closure type properties in function spaces*, Journal of the Korean Mathematical Society 43 (2006), 677–690.

[40] V. Pavlović, *Neke selekcione osobine prostora funkcija*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, 2008, str. viii+94.

[41] V. Pavlović, *A selective bitopological version of the Reznichenko property in function spaces*, Topology and its Applications 156 (2009), 1636–1645.

[42] J.R. Porter, R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, 1988.

[43] F. Rothberger, *Eine Vershärfung der Eigenschaft* C, Fundamenta Mathematicae 30 (1938), 50–55.

[44] M. Sakai, *Property* C'' *and function spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society 104 (1988), 917–919.

[45] M. Sakai, *Special subsets of reals characterizing local properties of function spaces*, In: Selection Principles and Covering Properties in Topology (Lj.D.R. Kočinac, ed.), Quaderni di Matematica, Vol. 18, Caserta, 2006, pp. 195–225.

[46] M. Sakai, M. Scheepers, *The combinatorics of open covers*, In: Recent Progress in Topology III (K.P. Hart, J. van Mill, P. Simon, eds.), u štampi.

[47] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers* I: *Ramsey theory*, Topology and its Applications 69 (1996), 31–62.

[48] M. Scheepers, *Lusin sets*, Proceedings of the American Mathematical Society 127 (1999), 251–257.

[49] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers* (IV): *subspaces of the Alexandroff double of the unit interval*, Topology and its Applications 83 (1998), 63–75.

[50] M. Scheepers, *Selection principles and covering properties in topology*, Note di Matematica 22:2 (2003/2004), 3–41.

[51] L.A. Steen, J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag (1978).

[52] Á. Száz, *Basic tools and mild continuities in relator spaces*, Acta Mathematica Hungarica 50 (1987), 177–201.

[53] Á. Száz, *Structures derivable from relators*, Singularité 3 (8) (1992), 14–30.

[54] Á. Száz, *Inverse and symmetric relators*, Acta Mathematica Hungarica 60 (1992), 157–176.

[55] Á. Száz, *Uniformly, proximally and topologically compact relators*, Mathematica Pannonica 8/1 (1997), 103–116.

[56] F.D. Tall, *Lindelöf spaces which are Menger, Hurewicz, Alster, productive or D*, Topology and its Applications 158 (2011), 2556–2563.

[57] V.V. Tkachuk, *Some new versions of an old game*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 36 (1995), 179–198.

[58] B. Tsaban, *Selection principles in Mathematics: a milestone of open problems*, Note di Matematica 22:2 (2003/2004), 179–208.

[59] B. Tsaban, *Some new directions in infinite-combinatorial topology*, In: Set Theory (Joan Bagaria, Stevo Todorčević, eds.), Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2006, 225–255.

[60] B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Hereditarily Hurewicz spaces and Arhangelski sheaf amalgamations*, Journal of the European Mathematical Society 12 (2012), 353–372.

[61] L. Zdomskyy, *A semifilter approach to selection principles*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 46 (2005), 525–539.