UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Maja Vasilova

STOHASTIČKI GILPIN-AYALA MODEL KOMPETICIJE

Doktorska disertacija

Mentor
dr Miljana D. Jovanović

Niš, 2012.

Predgovor

Doktorska disertacija *Stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije* je zasnovana na originalnim rezultatima i bavi se proučavanjem različitih tipova populacionih Gilpin-Ayala modela, pri čemu se uz odredjene pretpostavke za parametre modela ispituje promena broja jedinki u populaciji.

Tokom poslednjih decenija ekološki populacioni modeli su predmet proučavanja mnogih naučnika. Jedna od najinteresantnijih tema koje se tiču različitih ekoloških populacija je proučavanje njihove dinamike. Naime, organizmi u prirodi žive u zajednici sa mnogim drugim vrstama na istom prostoru, deleći sve resurse neophodne za opstanak. U mnogim slučajevima dolazi do kompeticije medju vrstama i pritom se dešava da prisustvo neke vrste utiče na promenu u populaciji druge vrste (populacija raste sporije, ostavlja manje potomstva ili je izložena većem riziku od izumiranja). Kompeticija je jedan od najvažnijih načina interakcije izmedju jedinki, bez obzira da li pripadaju istoj vrsti (intraspecijska kompeticija) ili različitim vrstama (interspecijska kompeticija).

Najpoznatiji model koji razmatra ekološke populacione sisteme je klasični Lotka-Volterra sistem kompeticije. Njega su, nezavisno jedan od drugog, predložili Lotka i Volterra dvadesetih godina dvadesetog veka. Od tada do današnjih dana ovaj model je proučavan od strane mnogih autora, pa postoji veliki broj radova na tu temu. Medjutim, bez obzira na ovu činjenicu, Lotka-Volterra model kompeticije je često strogo kritikovan. Jedna od osnovnih primedbi se odnosi na činjenicu da je model linearan, tj. stopa promene veličine populacije je linearna funkcija veličina ostalih razmatranih populacija. Naime, 1973. godine su Gilpin i Ayala istakli da je neophodno uvesti komplikovaniji model da bi se dobila realnija rešenja. Oni su predložili nekoliko modela kompeticije uz uvodjenje novih parametara koji predstavljaju nelinearnu meru medjusobnog uticaja posmatranih vrsta.

U literaturi postoji veliki broj radova koji se bave determinističkim Gilpin-Ayala modelima kompeticije. Kako rešenja razmatranih sistema predstavljaju veličine populacija, ona moraju biti pozitivna i konačna. S tim u vezi, da rešenje determinističkog sistema ne bi eksplodiralo, neophodno je uvesti neke pretpostavke za parametre sistema. Neke od tih pretpostavki se mogu izbeći ukoliko se uzme u obzir da su populacioni sistemi vrlo često izloženi uticaju velikog broja nepredvidivih faktora. Uključivanjem u model slučajnih uticaja tipa Gausovog belog šuma, u nekim slučajevima se može sprečiti potencijalna eksplozija populacije, čime se dobija realniji model. Mnogi autori su se bavili stohastičkim populacionim modelima, ali su to uglavnom Lotka-Volterra modeli, dok samo dva rada proučavaju Gilpin-Ayala sisteme kompeticije, što je poslužilo kao motivacija za detaljnije proučavanje ovog modela.

Disertacija sadrži rezultate koji su izloženi u šest glava:

Prvi deo disertacije sadrži osnovne pojmove i rezultate teorije stohastičkih procesa i teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i osnovne osobine populacija koje će biti razmatrane u nastavku disertacije.

U drugom delu disertacije se razmatra stohastički Gilpin-Ayala sistem kompeticije za čije pozitivno rešenje se dokazuje da ne eksplodira u konačnom trenutku. Pored toga, dokazuje se da za rešenje važe osobine stohastičke ograničenosti i skoro izvesne neprekidnosti, a s obzirom da nije moguće odrediti eksplicitno rešenje, razmatra se asimptotsko ponašanje rešenja za dug vremenski period. Ove karakteristike će biti ispitivane i u ostalim modelima koji se razmatraju u disertaciji.

Na populacione sisteme osim Gausovog belog šuma u mnogim slučajevima utiče i obojeni ili, takozvani, telegrafski šum. Njegov uticaj se manifestuje slučajnim prelazom iz jednog u neko drugo stanje sredine, što zavisi od faktora kao što su, na primer, raspoloživa količina hrane ili količina padavina. Na primer, stopa rasta populacije u vreme kišnog perioda se može razlikovati od stope rasta u vreme suše. Ovi prelazi se modeliraju pomoću lanaca Markova sa konačnim brojem stanja. U trećem delu disertacije se razmatra stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa Markovskim prelazima. Dokazuje se da rešenja ovog sistema imaju napred pomenuta svojstva, a navedeni su i dovoljni uslovi pri kojima može doći do istrebljenja, odnosno preživljavanja nekih ili svih razmatranih populacija.

Mnogi procesi u biologiji, medicini, hemiji, inženjerstvu, ekonomiji, kako prirodni, tako i oni koji se dešavaju pod uticajem ljudskog faktora, uključuju vremensko kašnjenje. Ako se ignoriše vremensko kašnjenje, ignoriše se stvarnost. Generalno, značenje vremenskog kašnjenja je da postoji izvestan vremenski razmak izmedju trenutka realizacije nekog procesa i trenutka kada se manifestuje njegov uticaj (npr. u populacionoj dinamici jedinkama je potrebno izvesno vreme da bi polno sazrele ili da bi reagovale na uticaje iz spoljašnje sredine, u medicini infektivne bolesti imaju period inkubacije, itd.). Kako stohastički modeli sa kašnjenjem najverodostojnije opisuju stvarnost, poslednjih godina postoji sve veći interes za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem. Izvestan broj autora se bavio proučavanjem stohastičkih Lotka-Volterra modela sa konačnim ili beskonačnim kašnjenjem, dok se samo u jednom radu proučava stohastički Gilpin-Ayal model sa konačnim kašnjenjem. Zbog toga se u četvrtom delu disertacije razmatra stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa beskonačnim kašnjenjem. Dokazuje se da slučajni uticaj sredine uključen u model sa kašnjenjem, ne samo da obezbedjuje postojanje pozitivnog globalnog rešenja (ne eksplodira u konačnom trenutku), već je rešenje i stohastički ograničeno. Takodje se razmatra asimptotsko ponašanje rešenja.

U mnogim modelima se pretpostavlja da su svi parametri modela konstantni u vremenu. Medjutim, u stvarnosti oni su promenljivi u vremenu i, ako je neophodan model koji te fluktuacije uzima u obzir, on mora biti neautonoman. Dok su deterministički Gilpin-Ayala modeli kompeticije sa kašnjenjem zavisnim od vremena razmatrani od strane više autora, stohastički modeli nisu razmatrani. To je i bio motiv da se u petom delu disertacije prouče svojstva neautonomnog stohastičkog Gilpin-Ayala modelg kompeticije sa kašnjenjem zavisnim od vremena.

Šesti deo disertacije je posvećen stohastičkom predator-plen Gilpin-Ayala modelu sa kašnjenjem sa m vrsta plena i $n-m$ vrsta predatora koji je generalizacija klasičnog determinističkog Lotka-Volterra plen modela kompeticije. Razmatraju se dovoljni uslovi koji obezbedjuju egzistenciju globalnog pozitivnog rešenja.

U Zaključku su izloženi neki od otvorenih problema i mogući pravci daljih istraživanja.

Literatura sadrži sto bibliografskih jedinica koje su neposredno korišćene u izradi ove doktorske disertacije.

Želim da zahvalim svom mentoru dr Miljani Jovanović, kao i profesoru dr Svetlani Janković, na nesebičnoj pomoći i podršci i neprocenjivo korisnim savetima tokom rada na disertaciji.

Takodje, zahvaljujem svojoj porodici na neiscrpnoj podršci, razumevanju i veri u mene i moj rad.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi su uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati koji se eksplicitno koriste u nastavku, a detalji su izloženi u [37]. U Poglavlju 1.1 se navode osnovni elementi teorije stohastičkih procesa kao što su merljivost, separabilnost, neprekidnost, ograničenost, markovsko svojstvo, stacionarnost. Mnoge pojave u mehanici, inženjerstvu, biologiji i finansijama, izložene su determinističkim i slučajnim pobudama tipa Gaussovog belog šuma koji se matematički modelira generalisanim izvodom Brownovog kretanja, tj. Wienerovog procesa. U Poglavlju 1.2 je uvedena definicija Brownovog kretanja i navedene su njegove najvažnije osobine. Koristeći ova svojstva, u Poglavlju 1.3 je predstavljena konstrukcija integrala slučajne funkcije po Brownovom kretanju, tj. integrala Itôa, kao i osobine tog integrala. Mnogi autori su se bavili egzistencijom i jedinstvenošću rešenja, kao i proučavanjem kvalitativnih i kvantitativnih osobina rešenja različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. U Poglavljima 1.4, 1.5, 1.6 i 1.7 se navode teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, stohastičkih diferencijalnih jednačina sa beskonačnim kašnjenjem, sa vremenski zavisnim kašnjenjem i sa Markovskim prelazima. Na kraju glave, u Poglavljima 1.9 i 1.8 su navedene neke nejednakosti, odnosno definicije vezane za populacionu dinamiku koje se više puta primenjuju u radu.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Početkom prošlog veka, sa velikim napretkom tehničkih disciplina pojavili su se problemi za koje klasična teorija verovatnoća nije mogla da nadje rešenje. Već u to vreme su se fizika i tehnika bavile proučavanjem procesa i pojava promenljivih sa protokom vremena. Medjutim, teorija verovatnoća još uvek nije imala odgovarajuću metodologiju za tretiranje takvih pojava, pa se javila potreba za razvojem opšte teorije stohastičkih procesa u okviru koje bi se razmatrale slučajne promenljive koje zavise od jednog ili nekoliko parametara koji se neprekidno menjaju.

Pojam stohastičkog procesa su pre skoro jednog veka uveli Kolmogorov, Slucki, Wiener, Khincin i Cramer. Postojalo je nekoliko pokušaja proučavanja slučajnih pojava koji su prethodili aksiomatskoj teoriji Kolmogorova. Dva najznačajnija su pokušaj Sluckog [80] da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija, kao i rad

Wienera [91] koji je prvi matematički opisao haotično kretanje čestica polena u tečnosti, koje je danas poznato kao Wienerov proces, tj. Brownovo kretanje. Uvodjenje pojmova uslovne verovatnoće i uslovnog matematičkog očekivanja pružilo je mogućnost Kolmogorovu [41, 42] da postulira sistematsku i strogu konstrukciju osnova teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom. Zasluga za nastanak teorije stacionarnih procesa pre svega pripada Khinchinu [39], a za Gaussove procese Crameru [16].

Poseban doprinos razvoju teorije stohastičkih procesa je dao Doob koji je u svojoj monografiji [19] proučavao brojne koncepte iz ove oblasti, izmedju ostalog i koncept vremena zaustavljanja, koji je omogućio dalji razvoj teorije martingala. Rad Dooba u oblasti teorije martingala su nastavili Meyer [72, 73, 74], Dolean-Dade [18], Dellacherie [17], Kunita i Watanabe [45] i mnogi drugi. Teorija stohastičkih procesa spada u kategoriju najbrže razvijanih matematičkih disciplina, nesumnjivo zbog toga što je duboko povezana sa praksom. Ona je doprinela razvoju matematičkih teorija koje se primenjuju u matematičkom modeliranju pojava iz realnog života, što je od velikog značaja za nematematičke nauke poput biologije, biomedicine, ekonomije, inženjerstva, mehanike i drugih.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dati prostor verovatnoća i $T \subseteq R$ parametarski skup. U predstojećem razmatranju T će biti interval $[0, \infty)$, interval oblika $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, pri čemu je uobičajeno da se parametar $t \in T$ interpretira kao vreme.

Definicija 1.1.1 *Familija $\{x(t), t \in T\}$ slučajnih merljivih funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R^d, \mathcal{B})$ se naziva stohastički proces sa faznim prostorom $(R^d, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom T.*

Za svako fiksirano $t \in T$ dobija se slučajna promenljiva $\omega \mapsto x(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, tj. $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $x(\omega, t) \in R^d$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$, koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Ako je $T = N$, tj. ako je vremenski interval diskretan, onda se radi o stohastičkom nizu $\{x_n(\omega), n \in N\}$. U nastavku će se razmatrati isključivo procesi sa neprekidnim vremenom koji predstavljaju matematičke modele slučajnih pojava čiji se ishodi mogu registrovati neprekidno sa protokom vremena.

Stohastički proces odredjuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{x(t_1) < x_1, \ldots, x(t_n) < x_n\},$$

pri čemu je $x_i \in R^d$ i $t_i \in T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$. Zahteva se da familija konačno-dimenzionalnih raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

– uslov simetrije, tj. da za svaku permutaciju $(i_1, \ldots, i_n)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

– uslov saglasnosti, tj. da važi

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Kolmogorov je dokazao da za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela, koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ definisan na tom prostoru kome odgovara data familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.

Neprebrojivost parametarskog skupa, u opštem slučaju, onemogućava odredjivanje verovatnoća dogadjaja opisanih pomoću stohastičkih procesa. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.1.2 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subset T$ (separant) i dogadjaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $P(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset R^d$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset T$ skupovi*

$$\{\omega : x(\omega, t) \in F,\ t \in I\} \quad i \quad \{\omega : x(\omega, t) \in F,\ t \in I \cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ.

Definicija 1.1.3 *Stohastički procesi $\{x(t), t \in T\}$ i $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisani na istom prostoru verovatnoća i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1 \text{ za svako } t \in T.$$

U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija (verzija) drugog.

Definicija 1.1.4 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je merljiv ako je $x(\omega, t)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_T$ Borelovo σ-polje nad T, tj. za svaki Borelov skup B važi $\{(t, \omega) : x(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$.*

Naredna teorema ističe značaj merljivosti procesa.

Teorema 1.1.1 (teorema Fubinija) *Neka je $\{x(t), t \in T\}$ merljiv stohastički proces definisan na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada važe sledeća tvrdjenja:*

1. *skoro sve trajektorije su merljive funkcije za $t \in T$;*
2. *ako postoji očekivanje $Ex(t)$ za svako $t \in T$, tada je $m(t) = Ex(t)$ merljiva funkcija;*
3. *ako je S merljiv podskup od $T = [0, \infty)$ i ako je $\int_S E|x(t)|dt < \infty$, tada je*

   $$\int_S |x(t)|dt < \infty \quad \text{sa verovatnoćom 1},$$

   tj. skoro sve trajektorije $x(t) = x(t, \omega)$ su integrabilne na S i pritom važi

   $$\int_S E|x(t)|dt = E \int_S |x(t)|dt.$$

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stohastički neprekidan (neprekidan u verovatnoći) u tački $t_0 \in T$ ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x(t) - x(t_0)| > \varepsilon\} \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.1}$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1) važi za svako $t_0 \in S$.

Teorema 1.1.2 (Doob, [19]) *Za svaki stohastički neprekidan proces $\{x(t), t \in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.*

Jasno, stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ iz Teoreme 1.1.2 je separabilna i merljiva modifikacija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je neprekidan u srednjem reda p, tj. L_p-neprekidan, u tački $t_0 \in T$ ako važi

$$E|x(t) - x(t_0)|^p \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.2}$$

Stohastički proces je L_p-neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Za stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ se kaže da je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako važi

$$P\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

Često se za ispitivanje skoro izvesne neprekidnosti nekog slučajnog procesa koristi kriterijum koji je iskazan sledećom teoremom Kolmogorov-Čentsova o neprekidnosti stohastičkih procesa:

Teorema 1.1.3 (Kolmogorov-Čentsov [68]) *Neka d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ zadovoljava uslov*

$$E|x(t) - x(s)|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}, \quad 0 < s, t < \infty,$$

za neke pozitivne konstante α, β i C. Tada postoji neprekidna modifikacija $\tilde{x}(t)$ procesa $x(t)$ koja ima svojstvo da za svako $\gamma \in \left(0, \frac{\beta}{\alpha}\right)$ postoji pozitivna slučajna promenljiva $h(\omega)$ takva da je

$$P\left\{\omega : \sup_{0<|t-s|<h(\omega); 0 \leq s,t < \infty} \frac{|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s)|}{|t - s|^\gamma} \leq \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}}\right\} = 1.$$

Drugim rečima, skoro svaka trajektorija procesa $\tilde{x}(t)$ je lokalno uniformno Hölder-neprekidna sa eksponentom γ.

Definicija 1.1.5 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je drugog reda (L_2-proces) ako je $E|x(t)|^2 < \infty$ za svako $t \in T$.*

Funkcija $K(s,t) = E[x(s) - Ex(s)]E[x(t) - Ex(t)]$, $s, t \in T$ je korelaciona funkcija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Definicija 1.1.6 *Stohastički proces drugog reda $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u užem smislu) ako za svaki izbor parametara $t_1, \ldots, t_n \in T$ i $h \in R$, za koje je $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$, zajednička raspodela za $(x(t_1 + h), \ldots, x(t_n + h))$ ne zavisi od h.*

Definicija 1.1.7 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u širem smislu) ako za svako $t \in T$ važi $E|x(t)|^2 < \infty$, $Ex(t) = a = const$ i korelaciona funkcija $K(s,t)$ zavisi samo od $t - s$.*

Za dati prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se familija $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod-σ-algebri od $\mathcal{F}$ za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leq t$, $s, t \in T$, naziva filtracija. Ako je $T = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s<t} \mathcal{F}_s\}$ σ-algebra dogadjaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\{\cap_{s>t} \mathcal{F}_s\}$ σ-algebra dogadjaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je neprekidna s desna (neprekidna s leva) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ $(\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_-})$. Za filtraciju se kaže da je neprekidna ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava uobičajene uslove ako je neprekidna s desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.1.8 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ako je za svako $t \in T$ slučajna promenljiva $x(t)$ $\mathcal{F}_t$-merljiva.*

Činjenicu da je stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ označavaćemo sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in T\}$, prirodna filtracija je ona koja je generisana samim procesom, tj. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ-algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Dakle, X je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in T\}$ modifikacija procesa X, tada je i $\tilde{X}$ adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$ ako $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula.

Definicija 1.1.9 *Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je progresivno merljiv ako za svako $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}^d$ važi*

$$\{(s, \omega) : s \leq t,\ \omega \in \Omega,\ x(\omega, s) \in B\} \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0,t])$ Borelovo σ-polje nad $[0,t]$.

Očigledno, svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Medjutim, važe i sledeća tvrdjenja.

Teorema 1.1.4 (Meyer, [74]) *Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Teorema 1.1.5 (Meyer, [74]) *Ako je stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *i neprekidan s desna ili s leva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Definicija 1.1.10 *Stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *je proces Markova ako je za svako* $s < t$ *i svaki Borelov skup* $B \in \mathcal{B}^d$

$$P\{x(t) \in B|\mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B|x(s)\} \ s.i.$$

Definicija 1.1.11 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je martingal u odnosu na* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *ako je:*

(i) $E|x(t)| < \infty, \ t \geq 0;$

(ii) $E(x(t)|\mathcal{F}_s) = x(s)$ *s.i. za* $0 \leq s < t.$

Definicija 1.1.12 *Slučajna promenljiva* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *se naziva vreme zaustavljanja filtracije* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *ako važi* $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *za svako* $t \geq 0$.

Definicija 1.1.13 *Neka je* $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan progresivno merljiv proces i neka je* τ *vreme zaustavljanja. Tada se proces* $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *naziva zaustavljen proces od* X.

Naredno tvrdjenje je verzija poznate Doobove teoreme (*Dood martingale stopping theorem*).

Teorema 1.1.6 *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan martingal i neka je* τ *vreme zaustavljanja. Tada za svako* $0 \leq s < t < \infty$ *važi*

$$E(x_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s) = x_{\tau\wedge s} \ \ s.i.,$$

tj. zaustavljen proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je takodje martingal.*

Definicija 1.1.14 *Neprekidan (desno neprekidan) proces* $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *za koji je* $x(0) = 0$ *s.i., se naziva lokalni martingal ako postoji neopadajući niz vremena zaustavljanja* $\{\tau_k, k \geq 1\}$ *filtracije* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *pri čemu je* $P\{\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty\} = 1$, *takav da je* $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *martingal za svako* $k \geq 1$.

Iz Teoreme 1.1.6 se izvodi zaključak da je svaki martingal i lokalni martingal, dok u opštem slučaju obrat ne mora da važi.

Pre nego što se navede sledeći rezultat poznat kao strogi zakon velikih brojeva za martingale, uvodi se pojam kvadratne varijacije.

Definicija 1.1.15 *Neka je* $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan stohastički proces. Tada je kvadratna varijacija procesa* X *proces* $< X, X >_t$ *definisan kao*

$$< X, X >_t (\omega) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leq t} |X_{t_k+1}(\omega) - X_{t_k}(\omega)|^2 \ \text{(u verovatnoći)},$$

pri čemu je $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ *i* $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Teorema 1.1.7 (Strogi zakon velikih brojeva) *Neka je $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$. Tada ako je*

$$\lim_{t\to\infty} < X, X >_t = \infty \quad s.i. \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{< X, X >_t} = 0 \quad s.i.$$

i takodje

$$\lim_{t\to\infty} \frac{< X, X >_t}{t} < \infty \quad s.i. \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0 \quad s.i.$$

Naredna teorema je poznata kao eksponencijalna martingalna nejednakost i primenjuje se više puta u dokazima glavnih rezultata koji će biti izloženi u narednim glavama.

Lema 1.1.1 (X. Mao [63]) *Neka je $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan lokalni martingal. Tada za svaki izbor pozitivnih konstanti τ, γ, δ važi*

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} \left[X_t - \frac{\gamma}{2} < X, X >_t \right] > \delta \right) \leq e^{-\gamma\delta},$$

pri čemu je $< X, X >_t$ kvadratna varijacija od X.

1.2 Brownovo kretanje

Pojam Brownovog kretanja se odnosi na haotično kretanje čestica polena rastvorenih u vodi koje je proučavao škotski botaničar Robert Brown 1828. godine. Haotičnost ovog kretanja je kasnije objašnjena slučajnim sudarima čestica polena i molekula tečnosti. Kvantitativnom analizom osobina Brownovog kretanja prvi se bavio L.Bachelier koji je u svom radu iz 1900. godine pomoću Brownovog kretanja opisao nepredvidive promene u kretanju cena akcija. On se smatra začetnikom probabilističkog pristupa finansijama. Na drugoj strani, važan opis Brownovog kretanja dao je A. Einstein koji u svom radu iz 1905. godine Brownovo kretanje proučava sa aspekta molekularno-kinetičke teorije toplote.

Strogu matematičku formulaciju Brownovog kretanja je uveo Norbert Wiener [91, 92] 1923. godine. Zahvaljući njegovim rezultatima Brownovo kretanje se smatra matematičkim pojmom, a ne samo fizičkom pojavom, i često se naziva Wienerov proces. Danas Brownovo kretanje igra važnu ulogu u opisivanju različitih pojava koje su prisutne u realnom životu a koje se proučavaju u mnogim naučnim disciplinama.

Definicija 1.2.1 *Stohastički proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je Brownovo kretanje ili Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. *$w(0) = 0$ s.i.;*
2. *ima nezavisne priraštaje, tj. za svako $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, slučajne promenljive $w(t_0)$, $w(t_1) - w(t_0)$, $\ldots$, $w(t_n) - w(t_{n-1})$ su nezavisne;*
3. *$w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|)$, $s, t \geq 0$, $s \neq t$.*

Parametar $\sigma^2 > 0$ je koeficijent difuzije. Specijalno, za $\sigma^2 = 1$ radi se o standardnom Brownovom kretanju.

U vezi Brownovog kretanja, neizbežno je pomenuti pojam Gaussovog procesa kojim se mogu modelirati mnogobrojne pojave koje se razmatraju u okviru fizičkih, tehničkih i ekonomskih nauka.

Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ se naziva Gaussov proces ako je svaka linearna kombinacija n-dimenzionalnog zaseka $(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))$ Gaussova slučajna promenljiva ili, ekvivalentno, ako je za svako $n \in N$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x(t_i)$ Gaussova.

Može se dokazati da je $\{w(t), t \geq 0\}$ proces Braunovog kretanja ako i samo ako je Gaussov, $Ew(t) = 0$ i $K(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$, $s,t \geq 0$.

Brownovo kretanje ima mnogo važnih osobina medju kojima su sledeće:

- proces je drugog reda, tj. $E|w(t)|^2 < \infty$;
- n-dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 < \ldots < t_n$ i $u_1, \ldots, u_n \in R$ se može izraziti preko jednodimenzionalnih gustina raspodele $f_1(t,u)$ Gaussove slučajne promenljive, tj.

$$f_n(t_1,\ldots,t_n;u_1,\ldots,u_n) = f_1(t_1;u_1)\cdot f_1(t_2-t_1;u_2-u_1)\cdot\ldots\cdot f_1(t_n-t_{n-1};u_n-u_{n-1});$$

- proces je Markova;
- srednje kvadratno je neprekidan;
- skoro izvesno je neprekidan, tj. skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije;
- skoro sve trajektorije su skoro izvesno nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;
- proces $\{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, tj. za svako $t \geq s \geq 0$ važi

$$E(w(t)|\mathcal{F}_s) = w(s) \ \text{ s.i.};$$

- skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne srednje kvadratne varijacije na svakom segmentu $[a,b] \subset [0,\infty)$, tj. za proizvoljnu konstantu $c \in R$ i proizvoljnu particiju $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ segmenta $[a,b]$ za koje $\max_{1 \leq k \leq n}(t_k - t_{k-1}) \to 0$, $n \to \infty$,

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})| > c\right\} \to 1, \quad \sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})|^2 \to \sigma^2(b-a) \text{ s.k.},$$

- može se definisati na intervalu $(-\infty, \infty)$, pri čemu je $Ew(t) = 0$ i $K(s,t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t-s|)$. Na taj način se dobijaju nezavisni procesi Brownovog kretanja $\{w(t), t \geq 0\}$ i $\{w(-t), t \geq 0\}$ čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$.

Definicija 1.2.2 *Stohastički proces* $\{w(t),\, t \geq 0\} = \{(w_1(t),\, w_2(t),\, \ldots,\, w_m(t)),\, t \geq 0\}$ *je* m*-dimenzionalno Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $w(0) = 0$ *skoro izvesno;*

2. *ima nezavisne priraštaje;*

3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|I)$, $s, t \geq 0$, $s \neq t$, *gde je* I *jedinična matrica reda* m.

Dakle, koordinate Brownovog kretanja su jednodimenzionalna uzajamno nezavisna Brownova kretanja. Za m-dimenzionalno Brownovo kretanje važe sve osobine jednodimenzionalnog Brownovog kretanja, naravno, prilagodjene m-dimenzionalnom slučaju.

1.3 Integral Itôa

Pedesetih godina prošlog veka je počela da se razvija teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina kao deo opšte teorije stohastičkih procesa. Razvili su je I. I. Gikhman [24, 25] i K. Itô [32, 33, 34, 35, 36], nezavisno jedan od drugog, mada je danas opšte prihvaćen pristup Itôa. On je definisao pojam stohastičkog integrala u odnosu na Brownovo kretanje koji je danas poznat kao stohastički integral Itôa. U ovom poglavlju biće reči o konstrukciji tog integrala i njegovim osnovnim svojstvima. S obzirom da je Brownovo kretanje proces za koji važi da su skoro sve njegove trajektorije nediferencijabilne funkcije u svakoj tački i neograničene varijacije na svakom konačnom intervalu, stohastički integral po Brownovom kretanju se ne može definisati na uobičajeni način kao Riemann-Stieltjesov ili Lebesgueov integral. Medjutim, zahvaljujući stohastičkoj prirodi Brownovog kretanja moguće je definisati stohastički integral za veliku klasu stohastičkih procesa.

1.3.1 Postavka i osobine integrala Itôa

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno standardno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i adaptirano u odnosu na rastuću familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ-algebre $\mathcal{F}$, tj. $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s \leq t$ i $w(t) - w(s)$ je nezavisno u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$.

U daljem tekstu biće korišćena oznaka $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ za klasu stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ za koje važi:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-merljiv;

2. φ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;

3. $\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t)|^2 dt < \infty$.

Prostor $(\mathcal{M}_2([t_0,T];R), \|\cdot\|)$ je Banachov i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi-\tilde{\varphi}\|=0$.

Najpre će biti definisan stohastički integral stepenastog stohastičkog procesa iz klase $\mathcal{M}_2([t_0,T];R)$, a zatim će definicija biti proširena na čitavu klasu $\mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ metodom aproksimacije proizvoljnog procesa iz te klase nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.3.1 *Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ je stepenasti proces ako postoji particija $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, nezavisna od ω, tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \ s.i., \quad t_k \le t < t_{k+1}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Definicija 1.3.2 *Neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ stepenasti stohastički proces. Slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)) \tag{1.3}$$

se naziva stohastički integral Itôa stepenastog procesa φ u odnosu na Brownovo kretanje w.

Naredna teorema je od velike važnosti za definisanje integrala Itôa za proizvoljno $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$.

Teorema 1.3.1 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ Brownovo kretanje i neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$. Tada:*

1. *postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ tako da*

$$\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \to 0, \ n \to \infty;$$

2. *ako niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ aproksimira φ u smislu da je $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$, $n \to \infty$ i ako je integral $I(\varphi_n)$ definisan kao u Definiciji 1.3.2, tada niz slučajnih promenljivih $\{I(\varphi_n), n \in N\}$ konvergira u srednje kvadratnom smislu kada $n \to \infty$;*

3. *ako su $\{\varphi_n, n \in N\}$ i $\{\varphi'_n, n \in N\}$ dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju φ, tada je*

$$s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi'_n).$$

Na osnovu Teoreme 1.3.1 neposredno sledi da se intergal Itôa $I(\varphi)$ može definisati kao srednje kvadratni limes niza $\{I(\varphi_n), n \in N\}$, tj.

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) := \text{s.k.} \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{T} \varphi_n(t)dw(t).$$

Narednom teoremom su navedene najvažnije osobine stohastičkog integrala Itôa.

Teorema 1.3.2 *Neka je $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ i $\alpha, \beta \in R$ proizvoljne konstante. Tada je:*

1. *$I(\varphi)$ $\mathcal{F}_T$-merljivo;*

2. *$EI(\varphi) = 0$;*

3. *$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$;*

4. *$E|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt$ (stohastička integralna izometrija);*

5. *$E[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^T E[\varphi(t)\psi(t)]dt$.*

Integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ klasa stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-merljivi, adaptirani u odnosu na familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i za koje važi da je

$$P\left\{\int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Očigledno da je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ šira klasa nego $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$.

Može se dokazati da za svako $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ postoji niz $\{\varphi_n, n \in N\}$ iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R)$ tako da se integral Itôa procesa φ može definisati kao

$$I(\varphi) = \lim_{n \to \infty} I(\varphi_n) \text{ u verovatnoći.}$$

U ovom slučaju osobine 1-3 Teoreme 1.3.2 važe, dok ostale ne važe. Medjutim, integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; R)$ zadovoljava sledeću osobinu: za proizvoljne pozitivne konstante N i ε važi

$$P\left\{\left|\int_{t_0}^T \varphi(t) dw(t)\right| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Integral Itôa se može definisati i za stohastičke procese iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R^d \times R^m)$, u odnosu na m-dimenzionalno Brownovo kretanje $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ čije su osobine date u Definiciji 1.2.2. Klasa $\mathcal{M}_2([t_0, T]; R^d \times R^m)$ obuhvata sve $(d \times m)$-dimenzionalne merljive i $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$-adaptirane stohastičke procese φ koji zadovoljavaju uslov

$$\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt < \infty,$$

pri čemu je $|\cdot|$ matrična norma definisana sa

$$|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m |\varphi_{ij}|^2 = tr(\varphi\varphi').$$

Kako je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R^d \times R^m)$, onda je $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$, $i = 1,\ldots,d$, $j = 1,\ldots,m$, pa se višedimenzionalni integral Itôa može definisati kao d-dimenzionalni vektor

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) = \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ \varphi_{d1}(t) & \ldots & \varphi_{dm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1(t) \\ \vdots \\ dw_m(t) \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

gde je i-ta komponenta vektora $I(\varphi)$ suma jednodimenzionalnih integrala Itôa, tj.

$$I_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{T} \varphi_{ij}(t)dw_j(t), \quad i = 1,\ldots,d.$$

U tom smislu, sve osobine Teoreme 1.3.2 važe i u ovom slučaju. Analogno jednodimenzionalnom slučaju, definicija stohastičkog integrala Itôa se može proširiti na klasu $\mathcal{L}_2([t_0,T];R^d \times R^m)$.

1.3.2 Neodredjeni integral Itôa

Definicija 1.3.3 *Neka je $I_{\{s<t\}}$, $t_0 \le s < t < T$ indikator skupa $[t_0,t]$. Neodredjeni integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ je stohastički proces $x = \{x(t), t \in [t_0,T]\}$, pri čemu je*

$$x(t) := \int_{t_0}^{T} I_{\{s<t\}}\varphi(s)dw(s) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)dw(s), \quad t \in [t_0,T].$$

Osobine neodredjenog integrala Itôa su:

1. $x(t)$ je $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$-adaptiran;
2. $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;
3. $x(t_0) = 0$ s.i.;
4. $x(t) - x(s) = \int_s^t \varphi(u)dw(u)$, $s,t \in [t_0,T]$;
5. $Ex(t) = 0$ za svako $t \in [t_0,T]$;
6. $E|x(t)|^2 = \int_{t_0}^t E|\varphi(s)|^2 ds$ za svako $t \in [t_0,T]$;
7. proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ je kvadratno integrabilni martingal sa kvadratnom varijacijom
$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)|^2 ds;$$
8. proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ je s.i. neprekidan;

9. ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t,\, t \in [t_0, T]\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0,T];R)$ stohastički proces

$$x(t\wedge\tau) = \int_{t_0}^{t\wedge\tau} \varphi(s)dw(s), \quad t \in [t_0,T],$$

martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ i $Ex(t\wedge\tau) = 0$.

Neodredjeni integral Itôa se takodje može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0,T];R)$, analogno Definiciji 1.3.3. Tada je proces $x = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ merljiv i s.i. neprekidan, ali u opštem slučaju, nije martingal. Medjutim, proces x je lokalni martingal, tj. $\{x(t\wedge\tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0,T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in N\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa

$$\tau_n = \inf_{t\in[t_0,T]} \left\{ \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)|^2 ds \geq n \right\}.$$

U narednim tvrdjenjima će biti navedene neke nejednakosti sa momentina za stohastičke integrale.

Teorema 1.3.3 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, $p \geq 2$ i $\varphi \in \mathcal{M}_2([0,T]; R^d \times R^m)$ takvo da važi*

$$E\int_0^T |\varphi(s)|^p ds < \infty.$$

Tada je

$$E\left|\int_0^T \varphi(s)dw(s)\right|^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\int_0^T |\varphi(s)|^p ds.$$

Štaviše, za $p = 2$ važi jednakost.

Sledeće tvrdjenje, poznato kao Burkholder-Davis-Gundy nejednakost [9], ima veliku primenu u stohastičkoj analizi.

Teorema 1.3.4 (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost [67]) *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo kretanje i $\varphi \in \mathcal{L}_2(R_+; R^d \times R^m)$. Tada, za svako $p > 0$, postoje univerzalne konstante $\tilde{c}_p$ i c_p, koje zavise samo od p, tako da za svako $t \geq 0$ važi*

$$\tilde{c}_p E\left|\int_0^t |\varphi(u)|^2 du\right|^{p/2} \leq E\sup_{s\in[0,t]}\left|\int_0^s \varphi(u)dw(u)\right|^p \leq c_p E\left|\int_0^t |\varphi(u)|^2 du\right|^{p/2},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_p = (p/2)^p,\ c_p = (32/p)^{p/2},\ 0 < p < 2;\\
&\tilde{c}_p = 1,\ c_p = 4,\ p = 2;\\
&\tilde{c}_p = (2p)^{-p/2},\ c_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2},\ p > 2.
\end{aligned}$$

1.3.3 Formula Itôa

Slično kao i kod klasičnih integrala, prilikom rešavanja stohastičkog integrala Itôa se koristi smena promenljivih poznata pod nazivom formula Itôa. Formula Itôa je od velikog značaja ne samo za efektivno rešavanje integrala Itôa, već i za kvalitativnu analizu rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina, kojima se modeliraju neke realne pojave u različitim oblastima. Ovu formulu je prvi uveo K. Itô u radovima [35, 36], dok se njena uopštenja mogu naći u radu Meyera [75].

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo kretanje. Pretpostavimo da su $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$ merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tj. za svako $T > 0$ je

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \quad \text{s.i.}, \qquad \int_0^T |b(t)|^2 dt < \infty \quad \text{s.i.}$$

Definicija 1.3.4 *Jednodimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, gde je*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s), \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

se naziva proces Itôa kada je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$. Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t). \tag{1.6}$$

Prvi integral u izrazu (1.5) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itôa. Kako su oba integrala merljiva, $\mathcal{F}_t$-adaptirana i s.i. neprekidna, to i proces Itôa ima iste osobine.

Teorema 1.3.5 (Formula Itôa, [35]) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$, gde je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$, i neka je $f(t, x) : R_+ \times R \to R$ neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $f'_t(t, x)$, $f'_x(t, x)$, $f''_{xx}(t, x)$. Tada je $\{f(t, x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itôa i ima stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} df(t, x(t)) = &\Big[f'_t(t, x(t)) + f'_x(t, x(t))a(t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, x(t))b^2(t)\Big]dt \\ &+ f'_x(t, x(t))b(t)dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Izraz (1.7) je poznat kao Itôva formula za stohastičko diferenciranje.

Formula Itôa se može uopštiti na višedimenzionalni slučaj, pa se u tom smislu najpre uvodi pojam višedimenzionalnog stohastičkog diferencijala.

Definicija 1.3.5 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje. Neprekidan i adaptirani d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, pri čemu je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t))^T$, je proces Itôa ako je oblika*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s),$$

gde je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R^d)$ *i* $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R^d \times R^m)$. *Kaže se da* $\{x(t), t \geq 0\}$ *ima stohastički diferencijal* $dx(t)$ *za* $t \geq 0$, *pri čemu je*

$$dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

Da bi se integral Itôa uopštio na višedimenzionalni slučaj, uvodi se funkcija $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$, pri čemu je

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Kao u jednodimenzionalnom, tako je i u višedimenzionalnom slučaju za efektivno rešavanje integrala Itôa vrlo često je neophodno primeniti formulu Itôa za stohastičko diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.3.6 (Višedimenzionalna formula Itôa, [35]) *Neka je* $\{x(t), t \geq 0\}$ d*-dimenzionalni proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom* $dx(t) = a(t)dt+b(t)dw(t)$, *pri čemu je* $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R^d)$ *i* $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R^d \times R^m)$ *i neka je* $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$. *Tada je* $\{V(t, x(t)), t \geq 0\}$ *takodje proces Itôa i ima stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} dV(t, x(t)) = &\Big[V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))a(t) + \frac{1}{2}tr(b^T(t)V_{xx}(t, x(t))b(t))\Big]dt \\ &+ V_x(t, x(t))b(t)dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ako je data funkcija $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$, može se definisati operator $LV : R_+ \times R^d \to R$ sa

$$LV(t, x) = V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))a(t) + \frac{1}{2}tr(b^T(t)V_{xx}(t, x(t))b(t)),$$

koji se naziva operator difuzije koji odgovara procesu Itôa (1.6) kome je pridružena funkcija V. Koristeći ovaj operator formula Itôa (1.8) se može predstaviti i na sledeći način

$$dV(t, x(t)) = LV(t, x(t))dt + V_x(t, x(t))b(t)dw(t).$$

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina nepoznatog d-dimenzionalnog procesa $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je jednačina oblika

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.9}$$

pri čemu je $w = \{w(t), t \in [t_0, T]\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, početni uslov x_0 je d-dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na w i $f : [t_0, T] \times R^d \to R^d$, $g : [t_0, T] \times R^d \to R^d \times R^m$ su neslučajne Borelove funkcije.

U skladu sa Definicijom 1.3.5 stohastičkog diferencijala, jednačina (1.9) se može predstaviti u ekvivalentnom integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))dw(s), \quad t \in [t_0, T]. \tag{1.10}$$

U nastavku će se podrazumevati da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, w(s), 0 \le s \le t\}$.

Definicija 1.4.1 *Merljiv stohastički proces $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.9) ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. *$x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0, T]$;*
2. *$\int_{t_0}^{T} |f(t, x(t))|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^{T} |g(t, x(t))|^2 dt < \infty$ s.i.;*
3. *$x(t_0) = x_0$ s.i.;*
4. *integralni oblik jednačine (1.10) važi s.i. za svako $t \in [t_0, T]$.*

Na osnovu osobina *1* i *2* Definicije 1.4.1 sledi da su i Lebesgueov i Itôv integral na desnoj strani jednakosti (1.10) dobro definisani i s.i. neprekidni, zbog čega je i x s.i. neprekidan proces. Oba integrala su jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti. U skladu sa Teoremom Dooba 1.1.2, nadalje će se uvek pretpostavljati da je izabrana merljiva, separabilna i s.i. neprekidna modifikacija strogog rešenja.

Definicija 1.4.2 *Jednačina (1.9) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja x i $\tilde{x}$ važi*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [t_0, T]\} = 1.$$

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.9).

Teorema 1.4.1 *Neka je $w = \{w(t), t \in [t_0, T]\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w, za koju važi da je $E|x_0|^2 < \infty$. Dalje, neka su $f : [t_0, T] \times R^d \to R^d$, $g : [t_0, T] \times R^d \to R^d \times R^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t, x), (t, y) \in [t_0, T] \times R^d$, važi*

$$\begin{aligned} &|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \le L|x - y|, \\ &|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \le L^2(1 + |x|^2). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno strogo rešenje jednačine (1.9) sa osobinom $E \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)|^2 < \infty$.

Štaviše, ako je $E|x_0|^p < \infty$, $p \ge 2$, tada postoji konstanta $Q > 0$ tako da je $E \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)|^p \le Q$.

Teorema 1.4.1 obezbedjuje samo potrebne uslove za egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine (1.9). Može se dokazati da ako su funkcije a i b definisane na $[t_0, \infty) \times R^n$ i $[t_0, \infty) \times R^n \times R^m$, redom, i ako pretpostavke prethodne teoreme važe na svakom podintervalu $[t_0, T] \subset [t_0, \infty)$, tada jednačina (1.9) ima jedinstveno rešenje definisano na celom intervalu $[t_0, \infty)$ koje se naziva *globalno rešenje*.

Medjutim, Lipschitzov uslov je suviše restiktivan jer postoje mnoge funkcije koje ga ne zadovoljavaju (na primer, funkcija x^2). Naredna teorema prevazilazi ovaj problem i generalizuje Teoremu 1.4.1 tako što je uniformni (globalni) Lipschitzov uslov zamenjen tzv. *lokalnim Lipschitzovim uslovom.* To značajno proširuje klasu dopustivih funkcija a i b, jer na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti svaka neprekidno diferencijabilna funkcija zadovoljava lokalni Lipschitzov uslov.

Teorema 1.4.2 *Neka je $w = \{w(t), t \in [t_0, T]\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w, za koju važi da je $E|x_0|^2 < \infty$. Dalje, neka su $f : [t_0, T] \times R^d \to R^d$, $g : [t_0, T] \times R^d \to R^d \times R^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju uslov linearnog rasta* (1.11) *i lokalni Lipschitzov uslov, tj. za svako $N > 0$ postoji konstanta $L_N > 0$ tako da za svako $(t, x), (t, y) \in [t_0, T] \times R^d$, $|x| \vee |y| \le N$ važi*

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \le L_N |x - y|.$$

Tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.9) sa osobinom $E \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)|^2 < \infty$.

1.5 Stohastičke diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem

U mnogim situacijama iz realnog života su promene sistema uslovljene trenutnim stanjem, kao i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. Ukoliko te promene zavise od svih stanja sistema u prošlosti, u matematičkom modeliranju dinamike sistema se koriste stohastičke diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem.

Postoji opsežna literatura kako o determinističkim, tako i o stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa beskonačnim kašnjenjem i njihovoj primeni u populacionoj dinamici, medicini, teoriji materijala sa memorijom, itd. [6, 10, 14, 86, 89, 95]

Pored ranije uvedenih oznaka i osnovnih pretpostavki biće uvedeni još neki pojmovi. Polazna pretpostavka je da su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Neka je $BC((-\infty, 0]; R^d)$ familija ograničenih neprekidnih funkcija $\varphi : (-\infty, 0] \to R^d$ sa supremum-normom definisanom sa $||\varphi|| = \sup_{-\infty < \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$. Može se primetiti da je $(C((-\infty, 0]; R^d), || \cdot ||)$ je Banachov prostor.

U ovom poglavlju razmatraće se *stohastička diferencijalna jednačina sa beskonačnim kašnjenjem* oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x_t, t)\,dt + g(x_t, t)\,dw(t), \quad t \in [t_0, T], \\ x_{t_0} &= \xi, \end{aligned} \tag{1.12}$$

pri čemu su funkcionali

$$f : BC((-\infty, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d, \quad g : BC((-\infty, 0]; R^d) \times [t_0, T] \to R^d \times R^m$$

Borel merljivi, $x(t)$ je d-dimenzionalni proces i $x_t = \{x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0]\}$ je stohastički proces iz klase $BC((-\infty, 0]; R^d)$ i interpretira se kao prošlost datog stanja. Zbog zavisnosti od prošlosti, početni uslov se mora zadati na čitavom intervalu $(-\infty, t_0]$, tj.

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in (-\infty, 0]\},$$

pri čemu je ξ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva iz klase $BC((-\infty, 0]; R^d)$ za koju važi $E||\xi||^2 < \infty$.

Definicija 1.5.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine (1.12) ako je s.i. neprekidan, $\{x_t, t \in [t_0, T]\}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_{t_0}^T |f(x_t, t)|\,dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^T |g(x_t, t)|^2\,dt < \infty$ s.i., $x_{t_0} = \xi$ s.i. i za svako $t \in [t_0, T]$ integralni oblik jednačine (1.12) važi s.i.*

Definicija 1.5.2 *Rešenje $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ jednačine (1.12) je jedinstveno ako je bilo koje rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in (-\infty, T]\}$ stohastički ekvivalentno sa njim, tj. ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in (-\infty, T]\} = 1.$$

Sledi teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.12) koja važi uz uniformni Lipschitzov uslov i oslabljeni uslov linearnog rasta.

Teorema 1.5.1 *Ako za funkcionale f i g postoji konstanta $K > 0$ tako da važe uslovi:*

1. *(uniformni Lipschitzov uslov)* $|f(\varphi, t) - f(\psi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t) - g(\psi, t)|^2 \le K||\varphi - \psi||^2,$
2. $|f(0, t)|^2 \vee |g(0, t)|^2 \le K,$

za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi, \psi \in BC((-\infty, 0]; R^d)$, tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.12). Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \ge 2$, tada je $E \sup_{-\infty \le t \le T} |x(t)|^p < \infty$.

Kao što je napomenuto kod stohastičkih diferencijalnih jednačina, Lipschitzov uslov je isuviše restiktivan, pa naredna teorema generalizuje Teoremu 1.5.1 tako što je uniformni Lipschitzov uslov zamenjen lokalnim Lipschitzovim uslovom.

Teorema 1.5.2 *[90] Ako za funkcionale f i g važe:*

1. *lokalni Lipschitzov uslov, tj. za svako $N \geq 1$ postoji konstanta $L_N > 0$ tako da za svako $t \in [t_0, T]$ i takve $\varphi, \phi \in BC([-\infty, 0]; R^d)$ za koje je $||\varphi|| \vee ||\phi|| \leq N$ važi*
$$|f(\varphi, t) - f(\phi, t)|^2 + |g(\varphi, t) - g(\phi, t)|^2 \leq L_N ||\varphi - \phi||^2,$$

2. *uslov linearnog rasta, tj. za svako $t \in [t_0, T]$ i $\varphi, \psi \in BC((-\infty, 0]; R^d)$ postoji konstanta $K > 0$ takva da je*
$$|f(\varphi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t)|^2 \leq K(1 + ||\varphi||^2),$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.12). *Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\infty \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$.*

1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U prethodnom poglavlju su opisane stohastičke diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem kojima se modeliraju pojave iz realnog života u kojima su promene sistema uslovljene trenutnim stanjem kao i svim stanjima sistema u prošlosti. Medjutim, često je priroda zavisnosti od prošlosti nekog sistema takva da se opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

Imajući u vidu ranije uvedene oznake, u nastavku će biti razmatrana *stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.* U tom smislu se uvodi Borelova funkcija $\delta : [t_0, T] \to [0, \tau]$ tako da je

$$\begin{aligned} &dx(t) = f(x(t), x(t - \delta(t)), t)dt + g(x(t), x(t - \delta(t)), t)dw(t),\ t \in [t_0, T], \qquad (1.13)\\ &x_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \end{aligned}$$

pri čemu su $f : R^d \times R^d \times [t_0, T] \to R^d$ i $g : R^d \times R^d \times [t_0, T] \to R^{d \times m}$ Borelove funkcije i $x(t)$ je d-dimenzionalni proces koji opisuje promenu stanja sistema tokom vremena. Pretpostavka je da je početni uslov ξ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiv, da pripada familiji $C([-\tau, 0]; R^d)$ i da važi $E||\xi||^2 < \infty$.

Definicija 1.6.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \in [t_0 - \tau, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine (1.13) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces, pri čemu važe uslovi $\int_{t_0}^T |f(x(t), x(t - \delta(t)), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^T |g(x(t), x(t - \delta(t)), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_{t_0} = \xi$ s.i. i za svako $t \in [t_0, T]$ integralni oblik jednačine (1.13) važi s.i.*

Jedinstvenost rešenja jednačine (1.13) se definiše na isti način kao u Definiciji 1.5.2.

Dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem su dati sledećom teoremom koja je preuzeta iz [67].

Teorema 1.6.1 *Ako koeficijenti f i g jednačine (1.13) zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, po x i y, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $t \in [t_0, T]$ i $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in R^d$ važi*

$$|f(x,y,t) - f(\tilde{x},\tilde{y},t)|^2 \vee |g(x,y,t) - g(\tilde{x},\tilde{y},t)|^2 \le K(|x-\tilde{x}|^2 + |y-\tilde{y}|^2), \quad (1.14)$$
$$|f(x,y,t)|^2 \vee |g(x,y,t)|^2 \le K(1+|x|^2+|y|^2), \quad (1.15)$$

tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.13)*. Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \ge 2$, tada je $E\sup_{t_0-\tau \le t \le T} |x(t)|^p < \infty$.*

U narednoj teoremi je uniformni (globalni) Lipschitzov uslov (1.14) zamenjen tzv. lokalnim Lipschitzovim uslovom što uopštava Teoremu 1.6.1.

Teorema 1.6.2 *Ako za funkcionale f i g važe uslov linearnog rasta* (1.15) *i lokalni Lipschitzov uslov, tj. za svako $N \ge 1$ postoji konstanta $K_N > 0$ tako da za svako $t \in [t_0, T]$, $y \in R^d$ i $x, \tilde{x} \in R^d$ pri čemu je $|x| \vee |\tilde{x}| \le N$ važi*

$$|f(x,y,t) - f(\tilde{x},y,t)|^2 + |g(x,y,t) - f(\tilde{x},y,t)|^2 \le K_N|x-\tilde{x}|^2,$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.13)*. Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \ge 2$, tada je $E\sup_{t_0-\tau \le t \le T} |x(t)|^p < \infty$.*

1.7 Stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima

Stohastičke diferencijalne jednačine sa Markovskim prelazima [70] predstavljaju posebnu klasu hibridnih sistema. Ovi sistemi se menjaju u skladu sa različitim zakonima u toku nekog vremenskog perioda i u slučajnim momentima se prebacuju sa jednog režima rada na drugi. Najčešće je prelazak na novi režim proces bez memorije, a vreme čekanja do prelaska na novi režim je eksponencijalno raspodeljeno. Dakle, prelazak iz jednog režima u drugi se može modelirati pomoću neprekidnog lanca Markova sa konačim brojem stanja.

Neka je $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t))^T$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje definisano na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Neka je $\alpha(t)$, $t \ge t_0$ neprekidan s desna lanac Markova definisan na datom prostoru verovatnoća koji uzima vrednosti na konačnom prostoru stanja $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, N\}$ sa generatorom $Q = (q_{ij})_{N\times N}$ datim sa

$$P\{\alpha(t+\Delta t) = j | \alpha(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & \text{ako je } j \ne i, \\ 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & \text{ako je } j = i, \end{cases}$$

gde je q_{ij} vreme prelaza iz stanja i u stanje j i $q_{ij} \ge 0$ za $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, N$, dok je

$$q_{ii} = -\sum_{j\ne i} q_{ij}.$$

Pretpostavlja se da je lanac Markova $\alpha(t)$ nezavisan u odnosu na Brownovo kretanje $w(\cdot)$. Poznato je da je skoro svaka trajektorija za $\alpha(t)$ neprekidna s desna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na intervalu $[t_0, T]$.

U nastavku se razmatra *stohastička diferencijalna jednačina sa Markovskim prelazima* oblika

$$dx(t) = f(x(t), \alpha(t), t)dt + g(x(t), \alpha(t), t)dw(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1.16}$$

sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega; R^d)$ ($\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva koja uzima vrednost iz R^d, tako da je $E|x_0|^2 < \infty$) i $\alpha(t_0) = \alpha_0$, pri čemu je α_0 $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva slučajna promenljiva,

$$f : R^d \times \mathbb{S} \times [t_0, T] \to R^d, \quad g : R^d \times \mathbb{S} \times [t_0, T] \to R^{d\times m},$$

su Borelove funkcije, a $x(t)$ je d-dimenzionalni proces.

Definicija 1.7.1 *Za d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t),\ t \in [t_0, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine* (1.16) *ako je s.i. neprekidan i $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_{t_0}^T |f(x(t), \alpha(t), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^T |g(x(t), \alpha(t), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x(t_0) = x_0$ s.i. i za svako $t \in [t_0, T]$ integralni oblik jednačine* (1.16) *važi s.i.*

Teorema 1.7.1 *Ako koeficijenti f i g jednačine* (1.16) *zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $\bar{K} > 0$ tako da za svako $x, y \in R^d$, $i \in \mathbb{S}$ i $t \in [t_0, T]$,*

$$|f(x, i, t) - f(y, i, t)|^2 \vee |g(x, i, t) - g(y, i, t)|^2 \le \bar{K}|x - y|^2,$$

i ako postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(x, i, t) \in R^d \times \mathbb{S} \times [t_0, T]$

$$|f(x, i, t)|^2 \vee |g(x, i, t)|^2 \le K(1 + |x|^2), \tag{1.17}$$

tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.16)*. Štaviše, ako je $E|x_0|^p < \infty$, $p \ge 2$, tada je $E \sup_{-\infty\le t\le T} |x(t)|^p < \infty$.*

Kao što je istaknuto ranije uniformni Lipschitzov uslov je donekle restriktivan. Da bi se prevazišao taj problem uvodi se teorema u kojoj je globalni Lipschitzov uslov zamenjen lokalnim Lipschitzovim uslovom.

Teorema 1.7.2 *Ako koeficijenti f i g jednačine* (1.16) *zadovoljavaju uslov linearnog rasta* (1.17) *i lokalni Lipschitzov uslov, tj. za svako celobrojno $n \ge 1$ postoji konstanta $\bar{K}_n > 0$ tako da za svako $i \in \mathbb{S}$, $t \in [t_0, T]$ i one $x, y \in R^d$ za koje je $|x| \vee |y| \le n$, važi*

$$|f(x, i, t) - f(y, i, t)|^2 \vee |g(x, i, t) - g(y, i, t)|^2 \le \bar{K}_n|x - y|^2,$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ jednačine (1.16)*. Štaviše, ako je $E|x_0|^p < \infty$, $p \ge 2$, tada je $E \sup_{-\infty\le t\le T} |x(t)|^p < \infty$.*

Formula Itôa definisana u Poglavlju 1.3.3 pokazuje da funkcija $V \in C^{1,2}(R_+ \times R^d; R)$ preslikava proces Itôa $x(t)$ sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$, gde je $a \in \mathcal{L}_1(R_+; R)$ i $b \in \mathcal{L}_2(R_+; R)$, u proces Itôa $V(t, x(t))$. S druge strane, posmatra se par procesa $(x(t), \alpha(t))$ i funkcija $V : R_+ \times \mathbb{S} \times R^d \to R$ koja slika $(x(t), \alpha(t), t)$ u $V(x(t), \alpha(t), t)$, gde je $V \in C^{1,2}(R_+ \times \mathbb{S} \times R^d; R)$. Operator difuzuje $LV : R_+ \times \mathbb{S} \times R^d \to R$ se definiše na sledeći način

$$LV(x,i,t) = V_t(x,i,t) + V_x(x,i,t)a(t) + \frac{1}{2}tr(b^T(t)V_{xx}(x,i,t)b(t)) + \sum_{j=1}^{N} q_{ij}V(x,i,t),$$

pri čemu je

$$V_t(x,i,t) = \frac{\partial V(x,i,t)}{\partial t}, \quad V_x(x,i,t) = \left(\frac{\partial V(x,i,t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x,i,t)}{\partial x_d}\right),$$

$$V_{xx}(x,i,t) = \left(\frac{\partial^2 V(x,i,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d}.$$

1.8 Neke osobine stohastičkih populacionih modela

Populaciona dinamika ispituje promenu veličine jedne ili više populacija u vremenu, kao i biološke procese koji utiču na tu promenu. Matematički model koji se najčešće koristi da bi se opisala dinamika bilo koje populacije je eksponencijalni model. Prema eksponencijalnom modelu stopa promene veličine svake populacije je proporcionalna veličini te populacije, što je dato sistemom linearnih diferencijalnih jednačina

$$dx(t) = rx(t)dt, \tag{1.18}$$

gde je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))$ i $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$; $x_i(t)$ je veličina i-te populacije u trenutku t, a r_i je koeficijent priraštaja (stopa rasta) te populacije za $i = 1, \dots, d$. Rešenje ovog sistema je $x(t) = x(0)e^{rt}$, gde je $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_d(0))$ početni broj jedinki u razmatranim populacijama. Jasno je da kada je $r_i > 0$ za $i = 1, \dots, d$, tada $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \infty$, a kada je $r_i < 0$, tada $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, tj. dolazi do istrebljenja i-te populacije. Dakle, u slučaju modela (1.18) se može uočiti da dolazi do eksplozije veličine populacije kada je $r_i > 0$, što nije realno. Osnovni razlog ovome leži u činjenici da okruženje populacije ima odredjena ograničenja po pitanju resursa. Kada je veličina populacije daleko od svoje granice ona može da raste eksponencijalno, ali kada počne da se približava svojoj granici veličina populacije počinje da varira. Zbog toga je predložen drugi model kojim bi se prevazišao ovaj nedostatak eksponencijalnog modela. To je logistički model

$$dx(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)dt, \tag{1.19}$$

gde je $K = (K_1, K_2, \dots, K_d)$, pri čemu je K_i, $i = 1, \dots, d$ kapacitet sredine (*carrying capacity*) i-te populacije na odredjenom prostoru (kapacitet sredine je maksimalna gustina populacije, tj. broj jedinki populacije, koja može da opstane u datoj sredini). Iz modela (1.19) se vidi da se on svodi na eksponencijalni kada je $x(t) \ll K$.

S obzirom na činjenicu da su populacioni sistemi izloženi slučajnom uticaju sredine, logično je razmatrati stohastičke modele koji su nastali iz pomenutih determinističkih perturbacijom nekog od parametara modela. Najčešće se stopa rasta i-te vrste, r_i, $i = 1, \dots, d$ perturbuje sa $r_i + \sigma_i \dot{w}_i(t)$, pri čemu $\dot{w}(t) = (\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t), \dots, \dot{w}_d(t))$ predstavlja Gaussov beli šum sa intenzitetom $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$. Deterministički model (1.19) postaje sledeći stohastički model

$$dx(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)dt + \sigma x(t)dw(t). \tag{1.20}$$

Ovaj model predstavlja najjednostavniji stohastički logistički model, koji je poslužio kao osnova za uvodjenje drugih složenijih modela, na primer, uvodjenjem kašenjenja ili interakcije izmedju populacija. Neki od tih modela su proučavani u disertaciji.

U nastavku ovog poglavlja se navode definicije vezane za osnovne osobine populacija koje će biti razmatrane u narednim glavama. Definicije se odnose na model (1.20), ali analogne definicije važe i za ostale modele, izmedju ostalih i za modele koji se razmatraju u okviru disertacije.

Definicija 1.8.1 *Rešenje sistema* (1.20) *je stohastički ultimativno ograničeno ako za svako* $\varepsilon \in (0,1)$ *postoji pozitivna konstanta* $H = H(\varepsilon)$ *takva da, za svaku početnu vrednost* $x(0) \in R^d_+$, *rešenje* $x(t)$ *sistema zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} P\{|x(t)| \le H\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{1.21}$$

Definicija 1.8.2 *Populacija* x_i, $i = 1, \dots, d$ *je istrebljena sa verovatnoćom jedan ako je*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad s.i.$$

Definicija 1.8.3 *Populacija* x_i, $i = 1, \dots, d$ *je neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)ds = 0 \quad s.i.$$

Definicija 1.8.4 *Populacija* x_i, $i = 1, \dots, d$ *je slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) > 0 \quad s.i.$$

Definicija 1.8.5 *Rešenje sistema* (1.20) *je stohastički permanentno ako za svako* $\varepsilon \in (0,1)$ *postoji par pozitivnih konstanata* $H = H(\varepsilon)$ *i* $L = L(\varepsilon)$ *takvih da za svaku početnu vrednost* $x(0) \in R^d_+$ *rešenje* $x(t)$ *sistema zadovoljava*

$$\liminf_{t\to\infty} P\Big\{|x(t)| \le H\Big\} \ge 1 - \varepsilon \quad i \quad \liminf_{t\to\infty} P\Big\{|x(t)| \ge L\Big\} \ge 1 - \varepsilon.$$

Na osnovu prethodnih definicija može se zaključiti da iz stohastičke permanentnosti populacije sledi njena stohastička slaba perzistentnost u srednjem. Obrnuto ne važi.

1.9 Neke elementarne nejednakosti

Navode se neke elemenarne nejednakosti [76], Borel-Cantellijeva lema, neke nejednakosti vezane za matematičko očekivanje, kao i integralna nejednakost Gronwall-Bellmana [4, 46, 76], koje će se koristiti prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti koje će biti korišćene su:

- $$\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i\Big)^k \le (d^{k-1} \vee 1) \sum_{i=1}^{d} a_i^k, \quad a_i \ge 0,\ k \ge 0 \tag{1.22}$$

- **(Young)**

$$a^\alpha b^\beta \le \frac{\alpha}{\alpha+\beta} a^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} b^{\alpha+\beta}, \quad a, b \ge 0,\ \alpha, \beta > 0 \tag{1.23}$$

- **(Fatouova lema)** Neka su $Y, X_1, X_2, \ldots$ slučajne promenljive. Tada važi:

  1. ako je $X_n \ge Y$, $\forall n \ge 1$ i $EY > -\infty$, tada je
  $$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \le \liminf_{n\to\infty}(EX_n);$$
  2. ako je $X_n \le Y$, $\forall n \ge 1$ i $EY < \infty$, tada je
  $$\limsup_{n\to\infty}(EX_n) \le E(\limsup_{n\to\infty} X_n);$$
  3. ako je $|X_n| \le Y$, $\forall n \ge 1$ i $EY < \infty$, tada je
  $$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \le \liminf_{n\to\infty}(EX_n) \le \limsup_{n\to\infty}(EX_n) \le E(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

- **(nejednakost Chebysheva / Markova)** Neka slučajna promenljiva X ima moment reda r, $r \in N$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi
$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

- **(nejednakost Jensena)** Neka je X slučajna promenljiva takva da je $E|X| < \infty$ i neka je $g = g(x)$ konveksna Borelova funkcija. Tada je
$$g(EX) \le Eg(X).$$

- **(nejednakost Lyapunova)** Ako je X slučajna promenljiva takva da je $E|X|^t < \infty$ i $0 < s < t$ realni brojevi, tada je
$$(E|X|^s)^{1/s} \le (E|X|^t)^{1/t}.$$

- **(nejednakost Höldera)** Ako je $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ i ako je $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^q < \infty$, tada je

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}.$$

Poznato je da postoji više verzija Gronwall-Bellmanove nejednakosti, ali će za potrebe daljeg razmatranja biti navedena samo jedna od verzija koja će se eksplicitno koristiti, a čiji se dokaz može naći u [67].

Teorema 1.9.1 (Gronwall-Bellmanova lema) *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(\cdot)$ Borelova ograničena nenegativna funkcija definisana na $[0, T]$ i $v(\cdot)$ nenegativna integrabilna funkcija definisana na $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq c\, e^{\int_0^t v(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

Glava 2

Dinamika Gilpin-Ayala modela kompeticije sa perturbacijom

U ovoj glavi se razmatra dinamika Gilpin-Ayala modela kompeticije kod koga je unutrašnja stopa rasta vrsta perturbovana Gaussovim belim šumom. U Poglavlju 2.1 su najpre izloženi uvodni pojmovi i rezultati Liana i Hua [50], dok su novi rezultati, koji su publikovani u [85], izloženi u Poglavljima 2.2-2.5. U Poglavlju 2.2 se definiše model i dokazuje da je rešenje razmatranog sistema globalno i pozitivno, što je prirodno očekivati jer ono predstavlja veličine populacija razmatranih vrsta. Zatim, u Poglavlju 2.3 se dokazuje da je rešenje stohastički ultimativno ograničeno i skoro izvesno neprekidno. Kako nije moguće naći eksplicitno rešenje sistema, u Poglavlju 2.4 se analizira asimptotsko ponašanje momenata rešenja sistema, a u Poglavlju 2.5 ponašanje trajektorija rešenja.

2.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Organizmi u prirodi ne egzistiraju sami, već su povezani sa drugim organizmima različitih vrsta. Mnoge vrste nisu pod direktnim uticajem drugih vrsta u svojoj bližoj okolini, ali u najvećem broju slučajeva ipak dolazi do interakcije. Populaciona ekologija je glavno podpolje ekologije koje proučava dinamiku populacija različitih vrsta i način interakcije izmedju tih populacija. Naime, ona proučava grupe organizama koji žive zajedno u vremenu i prostoru i dele sve resurse neophodne za opstanak. Interakcije medju vrstama se mogu klasifikovati na osnovu mehanizama interakcije izmedju populacija. U nastavku će biti proučavana jedna vrsta interakcije koja se naziva *kompeticija*.

Kompeticija je jedan od najvažnijih načina na koji individue utiču jedna na drugu, bez obzira da li pripadaju istoj vrsti (intraspecijska kompeticija) ili različitim vrstama (interspecijska kompeticija). Kompeticija podrazumeva da različite vrste koriste iste resurse koji se nalaze u ograničenoj količini. Borba za resurse zna biti vrlo oštra, jer se, pre svega, potrošnja smanjuje raspoloživost i obnovljivih i neobnovljivih resursa. Smanjivanjem svojih resursa, potrošači ograničavaju sopstveni rast populacije. Kako populacija raste, rastu i njihovi zahtevi za resursima. Kada zahtevi toliko porastu da zalihe rasursa ne mogu više ispunjavati potrebe, veličina populacije počinje da opada. Zatim, prisustvo neke vrste može uticati na promenu u populaciji druge vrste. Na primer, jedna vrsta konzumira resurse koji mogu biti konzumirani i od strane druge vrste, što kao posledicu ima to da ta druga vrsta raste sporije, ostavlja manje potomstva ili je izložena većem riziku od smrti.

Modeliranje dinamike populacionih sistema u prirodi omogućava da se bolje razume kako te kompleksne interakcije i procesi zaista funkcionišu. Zbog toga su razvijeni matematički modeli koji se veoma često koriste da bi se pokazalo šta se zapravo dogadja kada vrste žive zajedno i kada koriste isti izvor hrane. Klasični matematički model koji se najčešće primenjuje je *Lotka-Voltera model* koji je izveden nezavisno od strane Lotke [60] u SAD-u 1925. godine i Volterre [87, 88] u Italiji 1926. godine. On je opisan sledećim diferencijalnim jednačinama

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left(1 - \frac{N_i}{k_i} - \alpha_{ij}\frac{N_j}{k_i}\right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

pri čemu su N_i i r_i veličina populacije i eksponencijalna stopa rasta i-te vrste, respektivno, k_i je kapacitet sredine (*carrying capacity*) i-te vrste u odsustvu njenog konkurenta – j-te vrste i α_{ij} je linearna redukcija (u terminima k_i) stope rasta i-te vrste od strane njenog konkurenta – j-te vrste (drugim rečima, α_{ij} je *koeficijent kompeticije*, tj. to je uticaj individua j-te vrste na stopu rasta populacije i-te vrste; može se posmatrati i kao stepen kojim svaka individua j-te vrste koristi resurse individua i-te vrste).

Tokom poslednjih decenija ekološki populacioni sistemi su bili intenzivno proučavani, tako da danas u literaturi postoji mnogo različitih oblika Lotka-Volterra modela kompeticije (videti, na primer, [6, 27, 30, 98]). Medjutim, bez obzira na ovu činjenicu, Lotka-Volterra modeli kompeticije su često strogo kritikovani. Naime, Lotka-Volterra model ima svojstvo koje se smatra njegovim nedostatkom, a to je linearnost, tj. stopa promene veličine populacije svake vrste je linearna funkcija veličina populacije vrsta koje su u medjusobnoj interakciji. Drugim rečima, Lotka-Volterra sistemi su linearizacija stope rasta veličine populacije po jedinki $\dot{N}_i/N_i$ oko ekvilibrijuma. Gilpin i Ayala [26] su 1973. godine istakli taj nedostatak i tvrdili su da je neophodno uvesti složeniji model da bi se dobila rešenja koja su bliža realnosti. Stoga su predložili nekoliko determinističkih modela kompeticije, a jedan od modela koji najviše odgovara eksperimentalnim rezultatima dobijenim proučavanjem dinamike voćne mušice je

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left(1 - \left(\frac{N_i}{K_i}\right)^{\theta_i} - \alpha_{ij}\frac{N_j}{K_i}\right), \quad i, j = 1, \ldots, d. \tag{2.1}$$

U ovom modelu θ_i su parametri koji modifikuju klasičan Lotka-Volterra model i predstavljaju nelinearnu meru kompeticije izmedju različitih vrsta ($i = 1, \ldots, d$). U nedostatku ove vrste kompeticije, populacije bi dostigle svoj kapacitet sredine. Deterministički Gilpin-Ayala modeli su dosta proučavani od tada do danas (videti, na primer [13, 22, 93, 97]).

Svi pomenuti modeli su imaju odredjena ograničenja kada je modeliranje ekoloških sistema u pitanju. Naime, može se desiti da, bez dodatne pretpostavke za matricu $(\alpha_{ij})_{d\times d}$, rešenja tih modela ne postoje na $[0,\infty)$ i da eksplodiraju u konačnom trenutku, tj. da veličine populacija neograničeno rastu. Medjutim, pošto rešenja jednačina predstavljaju veličine populacija, ona moraju biti pozitivna i konačna. S druge strane, u prirodi su populacioni sistemi neizbežno izloženi uticaju velikog broja nepredvidivih faktora, tj. slučajnosti koja predstavlja važnu komponentu ekosistema. Pod uticajem tih faktora, rast populacije, kapacitet sredine, koeficijenti kompeticije, kao i drugi parametri sistema, izloženi su fluktuacijama u manjoj ili većoj meri. To znači da uključivanje belog šuma u modele obezbedjuje realnije rezultate. Štaviše, pomenuta slabost determinističkih modela se izbegava tako što se umesto uvodjenja potrebnih uslova za matricu $(\alpha_{ij})_{d\times d}$ uzima u obzir slučajnost, tj. uticaj sredine. Iz tog razloga su mnogi autori proučavali uticaj sredine na populacionu dinamiku, pri čemu je najveći broj radova vezan za stohastičke Lotka-Volterra populacione modele (videti [20, 64, 65], na primer).

Kao ideja za rezultate koji će biti izloženi u nastavku ovog poglavlja, poslužio je rad o stohastičkom Gilpin-Ayala modelu kompeticije Liana i Hua [50], pa će ukratko biti navedeni rezultati tog rada.

Neka je $\{w(t),\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ standardno Brownovo kretanje. Zatim, neka je $R^d_+ = \{x\in R^d : x_i > 0 \text{ za svako } 1\leq i\leq d\}$ i $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$ je trag norma matrice A (gde je A^T transponovani vektor ili matrica A), a $A = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}$ njena operator norma. Lian i Hu su razmatrali sledeći model sa d vrsta koji je izveden iz modela (2.1) koji su predložili Gilpin i Ayala 1973. godine [26]:

$$dx_i(t) = r_ix_i(t)\left\{\left[1-\left(\frac{x_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i} - \sum_{j\neq i}^{d}\frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j}\right]dt + \sum_{i}^{d}\sigma_{ij}x_j(t)dw(t)\right\},\ i=1,\dots,d, \tag{2.2}$$

pri čemu je $(\sigma_{ij})\in R^{d\times d}$ i važi sledeći uslov

$$\sigma_{ii} > 0,\ i=1,\dots,d;\quad \sigma_{ij}\geq 0,\ i\neq j. \tag{2.3}$$

Najpre su dokazali da ako važi pretpostavka (2.3), tada za proizvoljne parametre sistema $(a_{ij})\in R^{d\times d}$ i svaku početnu vrednost $x_0\in R^d_+$ postoji jedinstveno rešenje $x(t)$ jednačine (2.2) za $t\geq 0$ i to rešenje ostaje u R^d_+ skoro izvesno. Pošto jednačinu nije moguće eksplicitno rešiti, proučavali su asimptotske ocene momenata rešenja jednačine (2.2), kao i ponašanje trajektorija tog rešenja i dokazali da za svaku početnu vrednost $x_0\in R^d_+$ rešenje posmatranog modela ima sledeće osobine:

- neka su dati parametri sistema $(a_{ij})\in R^{d\times d}$ i neka važi pretpostavka (2.3); tada za svako $\theta\in(0,1)$ postoji konstanta $K_\theta > 0$ takva da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\sum_{i=1}^{d}x_i^{2+\theta}(s)ds\leq K_\theta;$$

- neka je $\min_{1\le i\le d}\theta_i > 2$; tada za svako $\theta \in (0,1)$ postoji konstanta $K > 0$ takva da za proizvoljno σ_{ij}, $i,j = 1,\dots,d$ važi

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\sum_{i=1}^d\frac{1}{2k_i^{\theta_i}}x_i(s)^{\theta+\theta_i}ds \le K;$$

- za proizvoljno σ_{ij}, $i,j = 1,\dots,d$, postoji konstanta $K > 0$ takva da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\sum_{i=1}^d\frac{1}{2k_i^{\theta_i}}x_i(s)^{1+\theta_i}ds \le K;$$

- neka važi pretpostavka (2.3); tada postoji konstanta $K_\theta > 0$, koja nije obavezno nezavisna od parametara sistema, takva da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[\ln\prod_{i=1}^d(x_i(t))^{\frac{1}{r_i}}+\frac{r_i}{4}\lambda_{min}(\sigma^T\sigma)\int_0^t|x(t)|^2\right]\le K \quad s.i.,$$

  gde je $\lambda_{min}(\sigma^T\sigma)$ najmanja sopstvena vrednost matrice $\sigma^T\sigma$;

- neka je $\min_{1\le i\le d}\theta_i > 2$; tada za proizvoljno σ_{ij}, $i,j = 1,\dots,d$, postoji konstanta $K > 0$ takva da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\prod_{i=1}^d(x_i(t))^{\frac{1}{r_i}}}{t}\le K \quad s.i.;$$

- neka važi pretpostavka (2.3); tada je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\prod_{i=1}^d(x_i(t))^{\frac{1}{r_i}}}{\ln t}\le d \quad s.i;$$

- neka je $\min_{1\le i\le d}\theta_i > 2$; tada za proizvoljno σ_{ij}, $i,j = 1,\dots,d$, postoji konstanta $K > 0$ tako da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\prod_{i=1}^d(x_i(t))^{\frac{1}{r_i}}}{\ln t}\le d \quad s.i.$$

Dakle, Lian i Hu su za razmatranje modela (2.2) uveli pretpostavku (2.3) da ne bi došlo do eksplozije rešenja sistema u nekom konačnom trenutku. U modelu koji se razmatra u nastavku, koristi se drugačija pretpostavka koja se ne odnosi na šum već na parametre $(a_{ij}) \in R^{d\times d}$. Takodje, umesto jednodimenzionalnog posmatra se d-dimenzionalno Brownovo kretanje. Rezultati vezani za ovaj model su objavljeni u [85].

2.2 Pozitivno i globalno rešenje

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ kompletan prostor verovatnoća sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Neka je $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_d(t))^T$ d-dimenzionalno Brownovo kretanje definisano na tom prostoru i $R^d_+ = \{x \in R^d : x_i > 0$ za svako $1 \leq i \leq d\}$. Zatim, neka je $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$ trag norma matrice A (gde je A^T transponovani vektor ili matrica A), a $A = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}$ njena operator norma. Date pretpostavke su polazna osnova za sve dobijene rezultate izložene u ovoj disertaciji, tako da neće biti ponovo navodjene u narednim glavama.

Polazi se od determinističkog Gilpin-Ayala modela kompeticije sa d interagujućih vrsta

$$dx_i(t) = x_i(t)\left[r_i - \left(\frac{x_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i} - \sum_{j\neq i}^{d} \frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j}\right]dt, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{2.4}$$

gde su $x_i(t)$, r_i i k_i veličina populacije u trenutku t, unutrašnja eksponencijalna stopa rasta i kapacitet sredine u odsustvu kompeticije za i-tu vrstu, redom; dalje, a_{ij}, $i \neq j = 1, \ldots, d$ predstavlja meru medjusobnog uticaja različitih vrsta i $\theta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, d$ su parametri koji modifikuju klasičan Lotka-Volterra model.

Posmatra se slučaj perturbacije unutrašnje stope rasta. U praksi se unutrašnja stopa rasta i-te vrste ocenjuje kao srednja vrednost registrovanih stopa rasta plus greška. Drugim rečima, stopa r_i se može zameniti sa $r_i + \sigma_i \dot{w}_i(t)$, gde je σ_i intenzitet šuma, a $\dot{w}_i(t)$ beli šum $(i = 1, \ldots, d)$. Kao rezultat, sistem (2.4) postaje stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije:

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i - \left(\frac{x_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i} - \sum_{j\neq i}^{d} \frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j}\right]dt + \sigma_i dw_i(t)\right\}, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{2.5}$$

Pretpostavka je da su parametri a_{ij} nenegativni, tj. svaka vrsta ima negativan uticaj na ostale vrste ili da, eventualno, ne postoji uticaj izmedju pojedinih vrsta, dakle,

$$a_{ij} \geq 0, \; i \neq j. \tag{2.6}$$

U razmatranom sistemu (2.5) koeficijenti su lokalno Lipschitz neprekidni, ali ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta. S druge strane, prema teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja (Teorema 1.4.2), koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine moraju da zadovolje oba pomenuta uslova da bi jednačina imala jedinstveno globalno rešenje (tj. da ne bi došlo do eksplozije u konačnom trenutku) za svaku datu početnu vrednost. Pomenuti problem se prevazilazi uvodjenjem pretpostavke (2.6), tako da se dobija rešenje koje nije samo pozitivno već i ne eksplodira u konačnom trenutku, što je dokazano u narednoj teoremi.

Teorema 2.2.1 *Neka važi uslov* (2.6)*. Tada za svaku datu početnu vrednost* $x_0 \in R^d_+$ *postoji jedinstveno rešenje* $x(t)$, $t \geq 0$ *sistema* (2.5)*. Štaviše, ovo rešenje ostaje u* R^d_+ *sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Kako su koeficijenti sistema (2.5) lokalno Lipschitz neprekidni, za svaku datu početnu vrednost $x_0 \in R^d_+$ postoji jedinstveno maksimalno lokalno pozitivno rešenje $x(t)$ definisano za $t \in [0, \rho)$, gde je ρ trenutak eksplozije. Da bi se pokazalo da je to rešenje globalno, trebalo bi da se pokaže da je $\rho = \infty$ s.i.

Neka je n_0 dovoljno veliko tako da svaka komponenta od x_0 leži u intervalu $[n_0^{-1}, n_0]$. Za svako celobrojno $n \geq n_0$ definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_n = \inf\{t \in [0,\rho) | x_i(t) \notin (n^{-1}, n), \text{ za neko } i = 1, \dots, d\},$$

pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$ (kao i obično, $\emptyset$ označava prazan skup). Pošto je τ_n rastuće kad $n \to \infty$, neka je $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$. Ako se pokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i., tada je $\rho = \infty$ s.i. i $x(t) \in R^d_+$ s.i. za svako $t \geq 0$. Da bi se kompletirao dokaz, sve što treba je pokazati da je $\tau_\infty = \infty$ s.i. ili da za svako $T > 0$ važi $P(\tau_n \leq T) \to 0$ kada $n \to \infty$. Da bi se pokazalo ovo tvrdjenje, definiše se funkcija $V : R^d_+ \to R_+$ – funkcija Lyapunova,

$$V(x) = \sum_{i=1}^{d} (x_i^\gamma - 1 - \gamma \ln x_i), \ \ \gamma \geq \max_i \theta_i \vee 1.$$

Nenegativnost ove funkcije je očigledna jer je $t^\gamma - 1 - \gamma \ln t \geq 0$ za svako $t > 0$ i $\gamma > 0$. Primenjujući formulu Itôa na $V(x(t))$ dobija se

$$\begin{aligned}
dV(x(t)) = \gamma \sum_{i=1}^{d} \Bigg\{ &(x_i^\gamma(t) - 1)\Bigg[r_i - \left(\frac{x_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j}\Bigg] \\
&+ \frac{(\gamma-1)\sigma_i^2}{2} x_i^\gamma(t) + \frac{\sigma_i^2}{2}\Bigg\} dt + \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^\gamma(t) - 1) dw_i(t) \\
\leq \gamma \sum_{i=1}^{d} \Bigg\{ &r_i(x_i^\gamma(t) - 1) + \left(\frac{x_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i} + \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j} \\
&+ \frac{(\gamma-1)\sigma_i^2}{2} x_i^\gamma(t) + \frac{\sigma_i^2}{2}\Bigg\} dt + \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^\gamma(t) - 1) dw_i(t) \\
\leq \gamma \sum_{i=1}^{d} \Bigg\{ &\left[r_i + \frac{(\gamma-1)\sigma_i^2}{2}\right](1 + x_i(t))^\gamma + \frac{(1 + x_i(t))^{\theta_i}}{k_i^{\theta_i}} \\
&+ \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}(1 + x_j(t))}{k_j} + \frac{\sigma_i^2}{2} - r_i \Bigg\} dt + \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^\gamma(t) - 1) dw_i(t).
\end{aligned}$$

Kako je $\gamma \geq \max_i \theta_i \vee 1$, primenom nejednakosti (1.22) sledi

$$\begin{aligned}
dV(x(t)) \leq \gamma \sum_{i=1}^{d} \Bigg\{ (1 + x_i(t))^\gamma \Bigg[r_i + \frac{(\gamma-1)\sigma_i^2}{2} + \frac{1}{k_i^{\theta_i}} + \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ji}}{k_i}\Bigg] + \frac{\sigma_i^2}{2} - r_i \Bigg\} dt \\
+ \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^\gamma(t) - 1) dw_i(t)
\end{aligned}$$

$$= F(x(t))dt + \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^{\gamma}(t) - 1) dw_i(t),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
F(x(t)) &= \gamma \bigg(A_1 \sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma}(t) + dA_2 \bigg), \\
A_1 &= 2^{\gamma-1} \bigg[r + \frac{(\gamma-1)\sigma^2}{2} + \frac{1}{k^{\theta}} + \frac{(d-1)a}{k} \bigg], \\
A_2 &= [2^{\gamma-1} - 1] r + \frac{\sigma^2}{2} + 2^{\gamma-1} \bigg[\frac{(\gamma-1)\sigma^2}{2} + \frac{1}{k^{\theta}} + \frac{(d-1)a}{k} \bigg],
\end{aligned}$$

dok je $r = \max_i r_i$, $\sigma^2 = \max_i \sigma_i^2$, $a = \max_{i,j} a_{ij}$, $k = \min_i k_i$, $k^{\theta} = \min_i k_i^{\theta_i}$. Kako je $\gamma \geq 1$, na osnovu nejednakosti $x^{\gamma} \leq 2[x^{\gamma} - 1 - \gamma \ln x] + 2$, $\gamma \geq 0$, sledi

$$\begin{aligned}
F(x(t)) &\leq 2\gamma A_1 V(x(t)) + \gamma d(2A_1 + A_2) \\
&= K_1 V(x(t)) + K_2.
\end{aligned}$$

Tada je

$$dV(x(t)) \leq [K_1 V(x(t)) + K_2] dt + \gamma \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^{\gamma}(t) - 1) dw_i(t).$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge T$ dobija se

$$\begin{aligned}
V(x(\tau_n \wedge T)) \leq V(x(0)) &+ K_1 \int_0^{\tau_n \wedge T} V(x(s)) ds + K_2 \cdot (\tau_n \wedge T) \\
&+ \gamma \int_0^{\tau_n \wedge T} \sum_{i=1}^{d} \sigma_i (x_i^{\gamma}(t) - 1) dw_i(t).
\end{aligned}$$

Ako se nadje očekivanje za $V(x(\tau_n \wedge T))$ sledi

$$EV(x(\tau_n \wedge T)) \leq V(x(0)) + K_2 T + K_1 \int_0^T EV(x(\tau_n \wedge t)) dt.$$

Gronwall-Bellmanova nejednakost implicira

$$EV(x(\tau_n \wedge T)) \leq [V(x(0)) + K_2 T] e^{K_1 T}.$$

Za svako $\omega \in \{\tau_n \leq T\}$ postoji neko i takvo da $x_i(\tau_n, \omega) \notin (n^{-1}, n)$. Dakle,

$$V(x(\tau_n)) \geq (x_i(\tau_n))^{\gamma} - 1 - \gamma \ln x_i(\tau_n) = \bigg(\frac{1}{n^{\gamma}} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n} \bigg) \wedge \bigg(n^{\gamma} - 1 - \gamma \ln n \bigg),$$

a odatle sledi

$$\begin{aligned}
\infty &\geq [V(x(0)) + K_2 T] e^{K_1 T} \geq EV(x(\tau_n \wedge T)) \\
&= P(\tau_n \leq T) V(x(\tau_n)) + P(\tau_n > T) V(x(T)) \geq P(\tau_n \leq T) V(x(\tau_n)) \\
&\geq P(\tau_n \leq T) \bigg[\bigg(\frac{1}{n^{\gamma}} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n} \bigg) \wedge \bigg(n^{\gamma} - 1 - \gamma \ln n \bigg) \bigg].
\end{aligned}$$

Kako $(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)$ teži beskonačnosti kada $n \to \infty$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \le T) = 0$, odnosno $P(\tau_\infty \le T) = 0$. Pošto je $T > 0$ proizvoljno, može se zaključiti da je $P(\tau_\infty = \infty) = 1$, pa je teorema dokazana. $\diamondsuit$

2.3 Osobine rešenja

U ovom poglavlju se najpre utvrdjuje da je p-ti moment rešenja sistema (2.5) konačan za svako $p > 0$. Zatim se dokazuje da je rešenje stohastički ultimativno ograničeno i skoro izvesno neprekidno.

Teorema 2.3.1 *Neka važi uslov* (2.6). *Tada je za svako* $p > 0$

$$\sup_{t\ge 0} E \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \le K < \infty. \tag{2.7}$$

Dokaz. Neka je funkcija $V : R_+^d \to R_+$ definisana sa

$$V(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^p, \ p > 0.$$

Primenom formule Itôa na $e^t V(x(t))$ se dobija

$$\begin{aligned} d[e^t V(x(t))] &= e^t \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t)dt + pe^t \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \Big[r_i - \Big(\frac{x_i(t)}{k_i}\Big)^{\theta_i} - \sum_{i\ne j}^{d} \frac{a_{ij} x_j(t)}{k_j} \\ &\quad + \frac{(p-1)\sigma_i^2}{2} \Big] dt + pe^t \sum_{i=1}^{d} \sigma_i x_i^p(t) dw_i(t) \\ &\le e^t F(x(t))dt + pe^t \sum_{i=1}^{d} \sigma_i x_i^p(t) dw_i(t), \end{aligned}$$

pri čemu je

$$F(x(t)) = p \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \Big[\frac{1}{p} + r_i - \Big(\frac{x_i(t)}{k_i}\Big)^{\theta_i} + \frac{(p-1)\sigma_i^2}{2} \Big].$$

Jednostavno se izvodi zaključak da postoji pozitivna konstanta K takva da je $F(x(t)) \le K$. Odatle sledi da je

$$d[e^t V(x(t))] \le Ke^t dt + pe^t \sum_{i=1}^{d} \sigma_i x_i^p(t) dw_i(t).$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge t$ i izračunavanjem očekivanja se dobija

$$e^t EV(x(\tau_n \wedge t)) \le V(x(0)) + KE \int_0^{\tau_n \wedge t} e^s ds \le V(x(0)) + K(e^t - 1).$$

U Teoremi 2.2.1 je dokazano da je $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ s.i. Tada prema posledici Fatouove leme kada $n \to \infty$ sledi traženo tvrdjenje (2.7). $\diamondsuit$

Posledica 2.3.1 *Pod uslovima Teoreme 2.3.1, za svako $p > 0$ važi*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E|x(t)|^p dt < \infty. \tag{2.8}$$

Dokaz. Kako je

$$E|x(t)|^p \leq d^{\frac{p-2}{2}} E\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t), \tag{2.9}$$

na osnovu prethodne teoreme direktno sledi (2.8). $\diamondsuit$

Teorema 2.3.2 *Neka važi uslov* (2.6). *Rešenje sistema* (2.5) *je stohastički ultimativno ograničeno.*

Dokaz. Prema posledici nejednakosti Chebysheva i (2.9) za $H > 0$

$$P\Big\{|x(t)| > H\Big\} \leq \frac{E|x(t)|^2}{H^2} \leq \frac{K}{H^2}.$$

Dakle, ako se izabere dovoljno veliko H, važi (1.21). $\diamondsuit$

Da bi se pokazalo da je rešenje sistema (2.5) s.i. neprekidno, primenjuje se Teorema 1.1.3.

Teorema 2.3.3 *Rešenje $x(t)$ sistema* (2.5) *je s.i. neprekidno.*

Dokaz. Neka je za $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} f_i(x(t)) &= x_i(t)\Big[r_i - \Big(\frac{x_i(t)}{k_i}\Big)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}x_j(t)}{k_j}\Big],\\ g_i(x(t)) &= \sigma_i x_i(t) \end{aligned}$$

i $0 < s < t < \infty$, $t - s \leq 1$, $p \geq 2$. Kako je $dx_i(t) = f_i(x(t))dt + g_i(x(t))dw_i(t)$, sledi da je

$$x_i(t) - x_i(s) = \int_s^t f_i(x(u))du + \int_s^t g_i(x(u))dw_i(u),$$

pa je dalje

$$|x_i(t) - x_i(s)|^p \leq 2^{p-1}\Big\{\Big|\int_s^t f_i(x(u))du\Big|^p + \Big|\int_s^t g_i(x(u))dw_i(u)\Big|^p\Big\}.$$

Ako se izračuna očekivanje u poslednjoj nejednakosti i primeni Hölderova nejednakost i nejednakost momenata za integral Itôa (Teorema 1.3.3) dobija se

$$\begin{aligned} E|x_i(t) - x_i(s)|^p \leq 2^{p-1}\Big\{&(t-s)^{p-1}E\int_s^t |f_i(x(u))|^p du \\ &+ \Big(\frac{p(p-1)}{2}\Big)^{\frac{p}{2}}(t-s)^{\frac{p-2}{2}}E\int_s^t |g_i(x(u))|^p du\Big\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Zatim na osnovu nejednakosti (1.22), teoreme Fubinija i Hölderove nejednakosti sledi

$$
\begin{aligned}
E\int_s^t |f_i(x(u))|^p du \leq (d+1)^{p-1} E\int_s^t \Big\{ r_i^p |x_i(u)|^p + \frac{1}{k_i^{p\theta_i}} |x_i(u)|^{p(1+\theta_i)} \\
+ a^p \sum_{i\neq j}^{d} \left| x_i(u) \frac{x_j(u)}{k_j} \right|^p \Big\} du \\
\leq (d+1)^{p-1} \int_s^t \Big\{ r_i^p E|x_i(u)|^p + \frac{1}{k_i^{p\theta_i}} E|x_i(u)|^{p(1+\theta_i)} \\
+ a^p \sum_{i\neq j}^{d} \frac{1}{k_j^p} \Big(E|x_i(u)|^{2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(E|x_j(u)|^{2p} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\} du,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $a = \max_{i,j} a_{ij}$. Na osnovu Teoreme 2.3.1 postoje pozitivne konstante K_1, K_2 i K_3 takve da je $E|x_i(u)|^p \leq K_1$, $E|x_i(u)|^{p(1+\theta_i)} \leq K_2$ i $E|x_i(u)|^{2p} \leq K_3$ za svako $i = 1, \dots, d$, pa odatle sledi da je

$$
E\int_s^t |f_i(x(u))|^p du \leq C_1(t-s), \tag{2.11}
$$

gde je C_1 generička konstanta. Dalje je

$$
E\int_s^t |g_i(x(u))|^p du \leq |\sigma|^p E\int_s^t |x_i(u)|^p du \leq C_2(t-s), \tag{2.12}
$$

gde je $|\sigma| = \max_i |\sigma_i|$ i C_2 generička konstanta. Na osnovu (2.10)-(2.12) sledi

$$
E|x_i(t) - x_i(s)|^p \leq \tilde{K}(t-s)^{\frac{p}{2}},
$$

pri čemu je $\tilde{K}$ odgovarajuća konstanta. Primenom Teoreme 1.1.3 zaključuje se da je skoro svaka trajektorija procesa $x_i(t)$ lokalno uniformno Hölder-neprekidna sa eksponentom $\gamma \in (0, \frac{p-2}{2p})$, pa i skoro svaka trajektorija procesa $x_i(t)$ mora biti uniformno neprekidna na $t \geq 0$, tj. rešenje $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$ sistema (2.5) je s.i. neprekidno. $\diamondsuit$

2.4 Asimptotsko ponašanje rešenja

Kako razmatrani sistem (2.5) nema eksplicitno rešenje, logično je proučavati asimptotsku ocenu momenata.

Teorema 2.4.1 *Za svako $\theta > 0$ postoji pozitivna konstanta K takva da, za svaku početnu vrednost $x_0 \in R_+^d$, rešenje sistema (2.5) ima svojstvo*

$$
\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{2k_i^{\theta_i}} x_i(s)^{\theta+\theta_i}\, ds \leq K.
$$

Dokaz. Neka je funkcija $V : R_+^d \to R_+$ definisana sa

$$V(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^\theta.$$

Ako se primeni formula Itôa na $V(x(t))$, dobija se

$$dV(x(t)) \leq \left[F(x(t)) - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{x_i^{\theta+\theta_i}(t)}{k_i^{\theta_i}}\right]dt + \sum_{i=1}^{d}\theta\sigma_i x_i^\theta(t)dw_i(t),$$

pri čemu je

$$F(x(t)) = \theta\sum_{i=1}^{d} x_i^\theta(t)\left[r_i - \frac{x_i^{\theta_i}(t)}{2k_i^{\theta_i}} - \frac{(1-\theta)\sigma_i^2}{2}\right].$$

Dalje, uzimajući u obzir da postoji pozitivna konstanta K koja predstavlja gornju granicu polinoma $F(x(t))$, poslednja nejednakost postaje

$$dV(x(t)) \leq Kdt - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{x_i^{\theta+\theta_i}(t)}{k_i^{\theta_i}}dt + \sum_{i=1}^{d}\theta\sigma_i x_i^\theta(t)dw_i(t).$$

Integracijom od 0 do t se dobija

$$V(x(t)) + \frac{\theta}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^{d}\frac{x_i^{\theta+\theta_i}(s)}{k_i^{\theta_i}}ds \leq V(x(0)) + Kt + M_t, \tag{2.13}$$

gde je $M_t = \theta\int_0^t \sum_{i=1}^d \sigma_i x_i^\theta(s)dw_i(t)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$. Izračunavanje očekivanja u (2.13) rezultira sa

$$E\int_0^t \sum_{i=1}^{d}\frac{x_i^{\theta+\theta_i}(s)}{k_i^{\theta_i}}ds \leq \frac{2}{\theta}[V(x(0)) + Kt],$$

pa odatle direktno sledi traženo tvrdjenje. $\diamondsuit$

Zaključak Teoreme 2.4.1 je veoma značajan jer ne zavisi od sistema parametara a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, d$, kao ni od početne vrednosti $x_0 \in R_+^d$. Takodje, ne zavisi ni od intenziteta šuma σ_i, $i = 1, \ldots, d$.

2.5 Asimptotsko ponašanje trajektorija

U ovom poglavlju se razmatraju neke granične nejednakosti za stopu rasta veličine populacije.

Teorema 2.5.1 *Neka važi uslov* (2.6). *Tada postoji pozitivna konstanta K takva da, za svaku početnu vrednost $x_0 \in R_+^d$, za rešenje sistema* (2.5) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\prod_{i=1}^d x_i(t)}{t} \leq K \quad s.i.$$

Dokaz. Za svako $i = 1, \ldots, d$, primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$ se dobija

$$d \ln x_i(t) = \left[r_i - \left(\frac{x_i(t)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \sum_{i \neq j}^{d} \frac{a_{ij} x_j(t)}{k_j} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right] dt + \sigma_i dw_i(t).$$

Integracijom obe strane ove nejednakosti od 0 do t dolazi se do

$$\ln x_i(t) = \ln x_i(0) + M_i(t) + \int_0^t \left[r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \sum_{i \neq j}^{d} \frac{a_{ij} x_j(s)}{k_j} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right] ds, \quad (2.14)$$

pri čemu je $M_i(t) = \sigma_i w_i(t)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom $\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = \sigma_i^2 t$. Iz (2.14) sledi

$$\sum_{i=1}^{d} \ln x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(0) + \sum_{i=1}^{d} M_i(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \left[r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right] ds.$$

Dalje, na osnovu Teoreme 1.1.7 važi da je $\lim_{t \to 0} \frac{M_i(t)}{t} = 0$ za $i = 1, \ldots, d$. Kako je

$$\sum_{i=1}^{d} \left[r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right] \leq K$$

za neku pozitivnu konstantu K, sledi da je

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \leq \limsup_{t \to \infty} \left[\frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(0)}{t} + K \right] = K \ s.i.,$$

što predstavlja traženo tvrdjenje. $\diamondsuit$

Teorema 2.5.2 *Pod uslovom* (2.5), *za svaku početnu vrednost* $x_0 \in R_+^d$, *rešenje sistema* (2.5) *zadovoljava*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i.$$

Dokaz. Za svako $i = 1, \ldots, d$, ako se primeni formula Itôa na $e^{\delta t} \ln x_i(t)$ za $\delta > 0$ i integrali od 0 do t

$$\begin{aligned} e^{\delta t} \ln x_i(t) &= \ln x_i(0) + M_i(t) \qquad (2.15) \\ &+ \int_0^t e^{\delta s} \left\{ \delta \ln x_i(s) + r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \sum_{i \neq j}^{d} \frac{a_{ij} x_j(s)}{k_j} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right\} dt, \end{aligned}$$

gde je $M_i(t) = \int_0^t e^{\delta s} \sigma_i dw_i(s)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = \frac{\sigma_i^2 (e^{2\delta t} - 1)}{2\delta}.$$

Neka je $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ proizvoljno i $\theta > 1$. Za svako celobrojno $n \geq 1$, primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Lema 1.1.1) dobija se

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_i(t) - \frac{\varepsilon}{2e^{\delta n}} \langle M_i(t), M_i(t) \rangle \right] \geq \frac{\theta e^{\delta n} \ln n}{\varepsilon} \right\} \leq \frac{1}{n^\theta}.$$

Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\theta}$ konvergentan, na osnovu Borel-Cantellijeve leme sledi da postoji $\Omega_i \subset \Omega$ za koje je $P(\Omega_i) = 1$ takvo da se za svako $\omega \in \Omega_i$ može naći celobrojno $n_i = n_i(\omega)$ tako da je

$$M_i(t) \leq \frac{\varepsilon}{2e^{\delta n}} \langle M_i(t), M_i(t) \rangle + \frac{\theta e^{\delta n} \ln n}{\varepsilon},$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Dakle, (2.15) postaje

$$\begin{aligned} e^{\delta t} \ln x_i(t) \leq \ln x_i(0) + \frac{\theta e^{\delta n} \ln n}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \sigma_i^2 e^{2\delta s - \delta n} ds \\ + \int_0^t e^{\delta s} \left\{ \delta \ln x_i(s) + r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \sum_{i \neq j}^{d} \frac{a_{ij} x_j(s)}{k_j} - \frac{\sigma_i^2}{2} \right\} ds \end{aligned}$$

za $0 \leq t \leq n_i(\omega)$ i $n \geq n_i(\omega)$ kad god je $\omega \in \Omega_i$. Neka je $\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^d \Omega_i$. Jasno je da je $P(\Omega_0) = 1$. Štaviše, za svako $\omega \in \Omega_0$ neka je $n_0 = \max\{n_i(\omega) : i = 1, \ldots, d\}$. Tada za svako $\omega \in \Omega_0$ iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$\begin{aligned} e^{\delta t} \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(0) + \frac{\theta d e^{\delta n} \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t e^{\delta s} \sum_{i=1}^{d} \Bigg[\delta \ln x_i(s) + r_i \\ - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \frac{\sigma_i^2 (1 - \varepsilon e^{\delta(s-n)})}{2} \Bigg] ds \end{aligned}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Kako je za dovoljno malo δ i za svako $x \in R_+^d$

$$\sum_{i=1}^{d} \left[\delta \ln x_i(s) + r_i - \left(\frac{x_i(s)}{k_i} \right)^{\theta_i} - \frac{\sigma_i^2 (1 - \varepsilon e^{\delta(s-n)})}{2} \right] \leq K$$

za neku pozitivnu konstantu $K = K(\theta_i)$, sledi da je

$$e^{\delta t} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \leq \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(0) + \frac{\theta d e^{\delta n} \ln n}{\varepsilon} + K \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Prema tome, za svako $\omega \in \Omega_0$, ako je $n - 1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$, važi

$$\frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq \frac{e^{-\delta(n-1)} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(0) + \frac{\theta d e^{\delta} \ln n}{\varepsilon} + \frac{K}{\delta} - \frac{K}{\delta} e^{-\delta(n-1)}}{\ln(n-1)},$$

što implicira

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq \frac{\theta d e^{\delta}}{\varepsilon} \quad s.i.$$

Na kraju, ako $\theta \to 1$, $\delta \to 0$ i $\varepsilon \to 1$, sledi da

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i.$$

i dokaz je kompletan. $\diamondsuit$

Zaključak Teoreme 2.5.2 je takodje značajan jer ne zavisi od veličine šuma σ_i, $i = 1, \ldots, d$, od početne vrednosti $x_0 \in R_+^d$, a ni od parametara sistema a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, d$.

Glava 3

Stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa Markovskim prelazima

U ovom delu su izloženi novi neobjavljeni rezultati vezani za Gilpin-Ayala model kompeticije u koji su uključeni i beli i obojeni, tj. telegrafski šum. U Poglavlju 3.1 su izloženi uvodni pojmovi, a u Poglavlju 3.2 se navode neke osobine globalnog i pozitivnog rešenja razmatranog sistema – stohastička ultimativna ograničenost, skoro izvesna neprekidnost, kao i ponašanje trajektorija rešenja (jer eksplicitno rešenje sistema nije moguće naći). Kritična granica izmedju istrebljenja i slabe perzistentnosti nalazi se u Poglavlju 3.3. U Poglavlju 3.4 se daju dovoljni uslovi za stohastičku permanentnost.

3.1 Uvodni pojmovi

Kao što je već rečeno, populacioni sistemi su neminovno izloženi uticaju različitih vrsta šuma sredine koji predstavlja važnu komponentu ekosistema i zbog toga je korisno utvrditi kako on deluje na populacione sisteme. Do sada je razmatran uticaj belog šuma, dok se u ovoj glavi akcenat stavlja na uticaj drugog tipa šuma, tzv. obojenog ili telegrafskog šuma.

Kvalitativne promene u stopi rasta populacija, kapacitetu sredine i interakcijama unutar populacije ili izmedju populacija predstavljaju poseban aspekt u dinamici ekosistema. Ove promene ne mogu biti opisane klasičnim determinističkim ili stohastičkim modelima. Na primer, stope rasta nekih vrsta u kišnoj sezoni se mogu veoma razlikovati od stopa rasta u sušnoj sezoni. Takodje, one mogu varirati pod uticajem promena u ishrani i/ili resursima hrane. Slično, kapaciteti sredine kao i interakcija unutar populacije ili izmedju populacija se razlikuju u različitim okruženjima. Vrsta šuma koja se javlja u ovim slučajevima je obojeni šum. On se može ilustrovati kao prelazak izmedju dva ili više režima, tj. stanja u kojima se nalazi sredina. Najčešće je prelazak u novo okruženje proces bez memorije, a vreme čekanja do prelaska u novo stanje je eksponencijalno raspodeljeno. Zbog toga se slučajne sredine i drugi slučajni faktori u ekološkom sistemu mogu modelirati pomoću neprekidnog lanca Markova sa konačnim brojem stanja. Nije poznato da je Gilpin-Ayala model sa Markovskim prelazima do sada razmatran, dok postoji veliki broj radova vezanih za Lotka-Volterra modele sa Markovskim prelazima (videti, na primer, [47, 48, 54, 55, 58, 59, 99, 100]).

Neka je $\alpha(t)$, $t \geq 0$ neprekidan s desna lanac Markova na datom prostoru verovatnoća koji uzima vrednosti na konačnom prostoru stanja $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, m\}$ sa generatorom $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ datim sa

$$P\{\alpha(t+\Delta t) = j|\alpha(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & \text{ako je } j \neq i, \\ 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & \text{ako je } j = i, \end{cases}$$

gde je q_{ij} vreme prelaza iz stanja i u stanje j i $q_{ij} \geq 0$ za $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$, dok je

$$q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}.$$

Pretpostavlja se da je lanac Markova $\alpha(\cdot)$ nezavisan od Brownovog kretanja $w(\cdot)$. Poznato je da je skoro svaka trajektorija za $\alpha(\cdot)$ neprekidna s desna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na svakom konačnom podintervalu od R^d_+.

Definicija 3.1.1 *[28] Lanac Markova je ergodičan lanac ako je verovatnoća prelaza iz svakog stanja u svako drugo stanje pozitivna (ne obavezno u jednom koraku).*

Pretpostavlja se da je lanac Markova $\alpha(\cdot)$ ireducibilan. U literaturi se najčešće pojam ireducibilnosti poistovećuje sa pojmom ergodičnosti (videti [28]). To znači da se za svako $i, j \in \mathbb{S}$ mogu naći brojevi $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{S}$ takvi da je $q_{i,i_1}q_{i_1,i_2}\cdots q_{i_k,j} > 0$. Može se primetiti da Q uvek ima sopstvenu vrednost 0. Algebarska interpretacija ireducibilnosti podrazumeva da je $rang(Q) = m - 1$. Pod ovim uslovom lanac Markova ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu (raspodelu u verovatnoći) $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)^T \in R^{1\times m}$, koja se odredjuje kao rešenje linearne jednačine

$$\pi Q = 0$$

tako da važe uslovi

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1 \quad \text{i} \quad \pi_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{S}.$$

Polazi se od Gilpin-Ayala modela kompeticije sa d interagujućih vrsta koji je razmatran u Glavi 2, pri čemu se u model uključuju Markovski prelazi, tj. obojeni šum:

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i(\alpha(t)) - \left(\frac{x_i(t)}{k_i(\alpha(t))}\right)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}(\alpha(t))x_j(t)}{k_j(\alpha(t))}\right]dt + \sigma_i(\alpha(t))dw_i(t)\right\}, \tag{3.1}$$

$i = 1, \ldots, d$, gde je $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))^T$; $x_i(t)$ je veličina populacije, $r_i(u)$ je unutrašnja eksponencijalna stopa rasta za i-tu vrstu u trenutku t u stanju u; $k_i(u)$

je kapacitet sredine u odsustvu kompeticije za i-tu vrstu u trenutku t u stanju u; $a_{ij}(u)$, $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,d$ predstavlja efekat interakcije medju različitim vrstama u stanju u; $\theta_i \geq 0$, $i = 1,\dots,d$ su parametri koji modifikuju klasičan Lotka-Volterra model; $\sigma_i(u)$ je intenzitet šuma ($i = 1,\dots,d$) u stanju u.

Mehanizam ekosistema koji je zadat sistemom (3.1) se može opisati na sledeći način: Neka se ekosistem na početku nalazi u stanju $u \in \mathbb{S}$, odnosno $\alpha(0) = u$. Lanac Markova se nalazi u tom stanju do slučajnog trenutka τ_1 (koji ima eksponencijalnu raspodelu) i ekosistem zadovoljava sledeći sistem

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i(u) - \left(\frac{x_i(t)}{k_i(u)}\right)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}(u)x_j(t)}{k_j(u)}\right]dt + \sigma_i(u)dw_i(t)\right\}, i = 1,\dots,d.$$

U trenutku τ_1 okruženje se menja, tj. lanac Markova prelazi u drugo stanje, npr. v. Tada ekosistem zadovoljava sistem

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i(v) - \left(\frac{x_i(t)}{k_i(v)}\right)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}(v)x_j(t)}{k_j(v)}\right]dt + \sigma_i(v)dw_i(t)\right\}, i = 1,\dots,d,$$

do nekog trenutka τ_2 kada se sredina ponovo menja, tj. lanac Markova $\alpha(t)$ prelazi u sledeće stanje, itd.

U nastavku su sadržani novi neobjavljeni rezultati.

Naredne oznake će biti korišćene u okviru ove glave. Za svaki konstantni niz (c_{ij}) $(i,j = 1,\dots,d)$, odnosno (c_i) $(i = 1,\dots,d)$, definiše se

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{ij} &= \max_{1\leq i,j\leq d, 1\leq k\leq m} c_{ij}(k), \quad \bar{c}_{ij}(k) = \max_{1\leq i,j\leq d} c_{ij}(k), \\
\tilde{c}_{ij} &= \min_{1\leq i,j\leq d, 1\leq k\leq m} c_{ij}(k), \quad \tilde{c}_{ij}(k) = \min_{1\leq i,j\leq d} c_{ij}(k), \\
\bar{c}_{i} &= \max_{1\leq i\leq d, 1\leq k\leq m} c_{i}(k), \quad \bar{c}_{i}(k) = \max_{1\leq i\leq d} c_{i}(k), \\
\tilde{c}_{i} &= \min_{1\leq i\leq d, 1\leq k\leq m} c_{i}(k), \quad \tilde{c}_{i}(k) = \min_{1\leq i\leq d} c_{i}(k).
\end{aligned}$$

3.2 Osobine rešenja

Kao u Glavi 2, pretpostavlja se da je kompeticija izmedju različitih vrsta nenegativna, tj.

$$a_{ij}(u) \geq 0, \ i \neq j, \ u \in \mathbb{S}. \tag{3.2}$$

Može se dokazati da postoji pozitivno i globalno rešenje razmatranog sistema (3.1) i da važe osobine koje su iskazane narednom teoremom.

Teorema 3.2.1 *Neka važi uslov* (3.2). *Tada za svaku datu početnu vrednost* $x_0 \in R^d_+$ *i* $\alpha(0) = u$ *važe sledeća tvrdjenja:*

(a) Postoji jedinstveno rešenje $x(t)$ sistema (3.1) *za* $t \geq 0$, *i to rešenje ostaje u* R^d_+ *sa verovatnoćom jedan.*

(b) Za svako $p > 0$ *moment reda* p *rešenja sistema* (3.1) *je konačan, odnosno,*

$$\limsup_{t\to\infty} E\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \leq K(p), \tag{3.3}$$

gde je $K(p)$ *nezavisno od početne vrednosti.*

(c) Za svako $p > 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E|x(s)|^p ds < \infty. \tag{3.4}$$

(d) Rešenje sistema (3.1) *je stohastički ultimativno ograničeno.*

(e) Rešenje $x(t)$ *sistema* (3.1) *je s.i. neprekidno.*

(f) Postoji pozitivna konstanta $\hat{K}$ *takva da rešenje sistema* (3.1) *ima svojstvo*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{t} \leq \hat{K} \quad s.i.$$

(g) Za rešenje sistema (3.1) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i.$$

Dokaz. Dokazi osobina (a)-(g) su analogni dokazima odgovarajućih osobina sistema iz Glave 2, pa će biti izostavljeni. $\diamondsuit$

Teorema 3.2.2 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.1 *i neka je* $\theta_i = \theta$ *za svako* $i = 1, \ldots, d$. *Tada za svaku datu početnu vrednost* $x_0 \in R^d_+$ *i* $\alpha(0) = u$:

(i) postoji pozitivna konstanta $\tilde{K}$ *takva da je za rešenje* $x(t)$ *sistema* (3.1)

$$\limsup_{t\to\infty} E\sup_{t\leq r\leq t+1} |x(r)| \leq \tilde{K} \tag{3.5}$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \leq 1 \quad s.i. \tag{3.6}$$

(ii) za rešenje sistema (3.1) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t} \leq 0 \quad s.i.$$

Dokaz. (*i*) Za $x \in R^d_+$ se definiše $V(x) = \sum_{i=1}^d x_i$ na koje se primeni formula Itôa i dobija se

$$\begin{aligned} & dV(x(t)) \\ &= \sum_{i=1}^d x_i(t)\Big\{\Big[r_i(\alpha(t)) - \Big(\frac{x_i(t)}{k_i(\alpha(t))}\Big)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j}^d \frac{a_{ij}(\alpha(t))x_j(t)}{k_j(\alpha(t))}\Big]dt + \sigma_i(\alpha(t))dw_i(t)\Big\}. \end{aligned}$$

Integracija od t do r implicira

$$V(x(r)) \leq V(x(t)) + \bar{r}_i \int_t^r V(x(s))ds + \int_t^r \sum_{i=1}^d \sigma_i(\alpha(s))x_i(s)dw_i(s).$$

Izračunavanjem supremuma i očekivanja dobija se

$$\begin{aligned} & E \sup_{t\leq r\leq t+1} V(x(r)) \\ & \leq EV(x(t)) + \bar{r}_i \int_t^{t+1} EV(x(s))ds + \sum_{i=1}^d E \sup_{t\leq r\leq t+1} \int_t^r \sigma_i(\alpha(s))x_i(s)dw_i(s). \end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti Burkholder-Davis-Gundy i Hölderove nejednakosti sledi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d E \sup_{t\leq r\leq t+1} \int_t^r \sigma_i(\alpha(s))x_i(s)dw_i(s) &\leq 4\sqrt{2}\ \bar{\sigma}_i \sum_{i=1}^d \Big(E\int_t^{t+1} x_i^2(s)ds\Big)^{1/2} \\ &\leq 4\sqrt{2d}\ \bar{\sigma}_i \Big(\int_t^{t+1} E\sum_{i=1}^d x_i^2(s)ds\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Iz (3.3) proizilazi

$$\limsup_{t\to\infty} E \sup_{t\leq r\leq t+1} V(x(r)) \leq \tilde{K},$$

gde je $\tilde{K} = (1+\bar{r}_i)K(1) + 4\sqrt{2}\ \bar{\sigma}_i(K(2))^{1/2}$. Koristeći činjenicu da je $|x(t)| \leq \sum_{i=1}^d x_i(t)$, dolazi se do ocene (3.5).

Na osnovu (3.5) sledi da postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ takva da je

$$E \sup_{n\leq t\leq n+1} |x(t)| \leq \bar{K}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Primenom nejednakosti Chebysheva se dobija

$$P\Big(\sup_{n\leq t\leq n+1} |x(t)| > n^{1+\varepsilon}\Big) \leq \frac{\bar{K}}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Prema Borell-Cantellijevoj lemi, za skoro svako $\omega \in \Omega$ važi

$$\sup_{n\leq t\leq n+1} |x(t)| \leq n^{1+\varepsilon}$$

za sve sem konačno mnogo n. Dalje, postoji $n_0(\omega)$ takvo da za skoro svako $\omega \in \Omega$, ako je $n \geq n_0$ i $n \leq t \leq n+1$, tada je

$$\frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \leq \frac{(1+\varepsilon)\ln n}{\ln n} = 1+\varepsilon.$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \leq 1+\varepsilon \quad s.i.$$

Konačno, kada $\varepsilon \to 0$ dobija se ocena (3.6).

(ii) Tvrdjenje sledi direktno jer je $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. $\diamondsuit$

Osobina (i) Teoreme 3.2.2 pokazuje da veličina populacije u ekosistemu ne raste isuviše brzo. Za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji slučajna promenljiva $T = T(\omega) > 0$ takva da je za $t \geq T$

$$\frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \leq 1+\varepsilon \quad \text{s.i.}$$

Odatle sledi da je $|x(t)| \leq t^{1+\varepsilon}$, $t \geq T$. Ako se označi sa $A = \sup_{0\leq t\leq T}|x(t)|$, tada je

$$|x(t)| \leq A + t^{1+\varepsilon}, \quad t \geq 0,$$

tj. rešenje $x(t)$ raste sa verovatnoćom jedan najviše polinomijalno sa redom veličine bliskim jedinici.

3.3 Istrebljenje i preživljavanje

Jedan od osnovnih problema u populacionoj biologiji je utvrditi šta uzrokuje istrebljenje populacije. Istrebljenje je najčešće rezultat uništenja ili modifikacije staništa. Zatim, pojavljivanje populacije nove vrste na nekom staništu može rezultirati dramatičnim promenama u strukturi ili funkciji ekosistema i izazvati istrebljenje domaćih populacija (na primer, invazije riba i rakova su predstavljale osnovni uzrok lokalnog istrebljenja kalifornijskih daždevnjaka; za detalje videti [23]). Rizik od istrebljenja je očigledno veći za populacije koje se sastoje iz malog broja jedinki nego za populacije sa velikim brojem jedinki. Takodje, rizik je veći za populacije čije gustine podležu velikim fluktuacijama tokom vremena nego za one sa privremenim varijacijama gustine. Dalje, populacije sa nižom stopom rasta su izložene većem riziku od istrebljenja jer se sporije oporavljaju od redukcije u gustini. Medjutim, i male i velike populacije mogu biti uništene ukoliko dodje do izuzetno velike perturbacije [78].

U dovoljno dalekoj budućnosti možda neće doći do istrebljenja populacije, ali veličina populacije može težiti nuli tako da će populacija biti ugrožena. To znači da postoji prag, tj. kritična tačka izmedju istrebljenja i preživljavanja populacije. U tom smislu su Hallam i Ma [29, 61] predložili koncept slabe perzistentnosti i neperzistentnosti u srednjem za neke determinističke modele, a Liu i Wang (videti [56, 57], na primer) su primenili taj koncept na stohastičke logističke modele. U ovom poglavlju se pokazuje da ako je intenzitet šuma dovoljno veliki, populacija može biti istrebljena sa veovatnoćom jedan, neperzistentna usrednjeno po vremenu ili slabo perzistentna.

Da bi se pojednostavio zapis, u narednim teoremama će biti korišćene sledece oznake

$$b_i(\alpha(t)) = r_i(\alpha(t)) - \frac{\sigma_i^2(\alpha(t))}{2} \quad \text{i} \quad b_i^\pi = \sum_{j=1}^{m} \pi_j b_i(j), \quad i = 1, \dots, d.$$

Teorema 3.3.1 *Neka su ispunjeni uslovi Teoreme* 3.2.1. *Tada za svako* $i = 1, \dots, d$ *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \le b_i^\pi.$$

Ako je $b_i^\pi < 0$ *za neko* $i = 1, \dots, d$, *tada s.i. dolazi do istrebljenja* i*-te populacije.*

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x_i$, $i = 1, \dots, d$, a zatim integracijom od 0 do t, dobija se

$$\ln x_i(t) = \ln x_i(0) + \int_0^t \left[b_i(\alpha(s)) - \left(\frac{x_i(s)}{k_i(\alpha(s))} \right)^{\theta_i} - \sum_{i\neq j} \frac{a_{ij}(\alpha(s))x_j(s)}{k_j(\alpha(s))} \right] ds + M_i(t), \tag{3.7}$$

pri čemu je $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i(\alpha(s))dw_i(s)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom $\langle M_i(t), M_i(t)\rangle = \int_0^t \sigma_i^2(\alpha(s))ds$. Sledi da je

$$\frac{\ln x_i(t)}{t} \le \frac{\ln x_i(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds + \frac{M_i(t)}{t}.$$

Kako je $\langle M_i(t), M_i(t)\rangle \le \bar{\sigma}_i^2 t$, na osnovu strogog zakona velikih brojeva za martingale (Teorema 1.1.7) važi $\lim_{t\to 0} \frac{M_i(t)}{t} = 0$ s.i. S druge strane, zbog ergodičnosti $\alpha(\cdot)$ sledi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds = \sum_{j=1}^{m} \pi_j b_i(j) = b_i^\pi \quad s.i., \tag{3.8}$$

pa kada $t \to \infty$, sledi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \le b_i^\pi.$$

Štaviše, kada je $b_i^\pi < 0$ za neko $i = 1, \dots, d$, tada važi $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, odnosno dolazi do istrebljenja i-te populacije. $\diamondsuit$

Teorema 3.3.2 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.1. *Ako je* $\theta_i \ge 1$ *i* $b_i^\pi = 0$ *za neko* $i = 1, \dots, d$, *tada je* i*-ta populacija neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Na osnovu (3.8) zaključuje se da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji konstanta T_1 takva da je

$$\frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds < b_i^\pi + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

za $t > T_1$. Zatim, za dovoljno veliko t takvo da je $T_1 \le T \le n-1 \le t \le n$ i $n \ge n_0$, važi $\frac{M_i(t)}{t} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Primenom ove ocene, iz (3.7) se dobija

$$\ln x_i(t) \le \ln x_i(0) + \varepsilon t - \frac{1}{\bar{k}_i^{\theta_i}}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds$$

za $T \le n-1 \le t \le n$ i $n \ge n_0$. Ako je $h_i(t) = \int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds$, tada je

$$\ln\left(\frac{dh_i(t)}{dt}\right) = \theta_i \ln x_i(t),$$

što sa poslednjom nejednakošću implicira

$$e^{\theta_i \bar{k}_i^{-\theta_i} h_i(t)}\frac{dh_i(t)}{dt} \le x_i^{\theta_i}(0)e^{\theta_i \varepsilon t}.$$

Integracijom od T do t se dobija

$$e^{\theta_i \bar{k}_i^{-\theta_i} h_i(t)} \le e^{\theta_i \bar{k}_i^{-\theta_i} h_i(T)} + \bar{k}_i^{-\theta_i}\varepsilon^{-1}x_i^{\theta_i}(0)e^{\theta_i\varepsilon t} - \bar{k}_i^{-\theta_i}\varepsilon^{-1}x_i^{\theta_i}(0)e^{\theta_i\varepsilon T}.$$

Logaritmovanjem obe strane ove nejednakosti sledi

$$h_i(t) \le \bar{k}_i^{\theta_i}\theta_i^{-1}\ln\left[e^{\theta_i \bar{k}_i^{-\theta_i} h_i(T)} + \bar{k}_i^{-\theta_i}\varepsilon^{-1}x_i^{\theta_i}(0)e^{\theta_i\varepsilon t} - \bar{k}_i^{-\theta_i}\varepsilon^{-1}x_i^{\theta_i}(0)e^{\theta_i\varepsilon T}\right].$$

Kada $t \to \infty$, primena L'Hospitalovog pravila dovodi do ocene

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds \le \varepsilon \tilde{k}_i^{\theta_i}.$$

Kako je ε proizvoljno, to je $\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds = 0$. Konačno, primenom nejednakosti Lyapunova se dobija

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)ds \le \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{1-1/\theta_i}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds\right)^{1/\theta_i} = 0,$$

tj. i-ta populacija je neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

Teorema 3.3.3 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.2. *Ako je $\theta \ge 1$ i $b_i^\pi > 0$ za neko $i = 1, \ldots, d$, tada je i-ta populacija slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.2.2 (ii) i činjenice da je $x_i \le \sum_{i=1}^d x_i \le d|x|$ za svako $i = 1, \ldots, d$, sledi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(s)}{t} \le 0 \quad s.i. \tag{3.9}$$

U nastavku se pokazuje da je $\limsup_{t\to\infty} x_i(t) > 0$ s.i. Neka je $F = \{\limsup_{t\to\infty} x_i(t) = 0\}$ i neka traženo tvrdjenje ne važi, tj. neka je $P(F) > 0$. Iz (3.7) sledi

$$\begin{aligned}\frac{\ln x_i(t)}{t} = &\frac{\ln x_i(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds - \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{x_i(s)}{k_i(\alpha(s))}\right)^{\theta_i} ds \\ &- \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i\neq j} \frac{a_{ij}(\alpha(s))x_j(s)}{k_j(\alpha(s))} ds + \frac{M_i(t)}{t}.\end{aligned}$$

Imajući u vidu da je $\lim_{t\to\infty} x_i(t,\omega) = 0$ za svako $\omega \in F$ i da prema zakonu velikih brojeva za martingale sledi da je $\limsup_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0$, to je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds = b_i^\pi > 0.$$

To znači da je $P(\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} > 0) > 0$, što je u kontradikciji sa (5.30), pa je time dokazano da je $\limsup_{t\to\infty} x_i(t) > 0$ s.i., tj. i-ta populacija je slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

Teorema 3.3.4 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.1. *Ako je* $\theta_i \ge 1$ *i* $b_i^\pi \ge 0$ *za neko* $i = 1, \ldots, d$, *tada* $x_i(t)$ *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)ds \le b_i^\pi \tilde{k}_i^{\tilde{\theta}_i} \quad s.i.$$

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x_i$, $i = 1, \ldots, d$, i integracijom od 0 do t, dobija se (3.7). Slično kao u Teoremi 3.3.2, za proizvoljno fiksirano $\varepsilon > 0$ postoji konstanta T takva da je

$$\frac{1}{t}\int_0^t b_i(\alpha(s))ds < b_i^\pi + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{\ln x_i(0)}{t} \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{M_i(t)}{t} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

za $T > t$. Primenom ovih ocena u (3.7) se dobija

$$\ln x_i(t) \le (b_i^\pi + \varepsilon)t - \frac{1}{\bar{k}_i^{\theta_i}}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds$$

za $T \le n-1 \le t \le n$ i $n \ge n_0$. Neka je $h_i(t) = \int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds$. Na sličan način kao u Teoremi 3.3.2, sledi

$$h_i(t) < \bar{k}_i^{\theta_i}\theta_i^{-1} \ln\left[e^{\theta_i \bar{k}_i^{-\theta_i} h_i(T)} + \bar{k}_i^{-\theta_i}(\bar{b}_i + \varepsilon)^{-1}\left(e^{\theta_i(\bar{b}_i+\varepsilon)t} - e^{\theta_i(\bar{b}_i+\varepsilon)T}\right)\right].$$

Kada $t \to \infty$, primena L'Hospitalovog pravila implicira

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds \le (\bar{b}_i + \varepsilon)\tilde{k}_i^{\theta_i}.$$

Kako je ε proizvoljno, sledi da je $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds \le b_i^\pi \bar{k}_i^{\theta_i}$ i, konačno, na osnovu nejednakosti Lyapunova se dobija

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)ds \le \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{1-1/\theta_i}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\theta_i}(s)ds\right)^{1/\theta_i} \le b_i^\pi \bar{k}_i^{\theta_i}.$$

$\diamondsuit$

Teoreme 3.3.1-3.3.3 imaju značajnu biološku interpretaciju. Vidi se da istrebljenje i perzistentnost i-te populacije sistema (3.1) zavise isključivo od b_i^π, $i = 1, \ldots, d$. Ako je $b_i^\pi < 0$, i-ta populacija će biti istrebljena, a ako je $b_i^\pi > 0$, biće slabo perzistentna. Kako je $b_i(\alpha(t)) = r_i(\alpha(t)) - \frac{\sigma_i^2(\alpha(t))}{2}$, vidi se da beli šum ima negativan uticaj na opstanak populacije. S druge strane, kako je $b_i^\pi = \sum_{j=1}^m \pi_j b_i(j)$, raspodela $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ lanca Markova $\alpha(t)$ igra važnu ulogu u odredjivanju da li dolazi do istrebljenja ili perzistentnosti populacije. Ako lanac Markova provodi dovoljno vremena u "dobrim" stanjima, tj. stanjima u kojima $b_i(\cdot)$ ima velike vrednosti, tada će populacija lakše opstati. U suprotnom, ako lanac Markova provodi više vremena u "lošim" stanjima, tj. stanjima u kojima $b_i(\cdot)$ ima male vrednosti, ugrožen je opstanak populacije.

3.4 Stohastička permanentnost

U populacionoj dinamici, permanentnost je veoma važno svojstvo. Naime, svojstvo stohastičke permanentnosti ukazuje da populacija neće izumreti tokom vremena sa verovatnoćom jedan.

Da bi se došlo do rezultata, potrebno je uvesti neke oznake. Neka je G vektor ili matrica. Kada su svi elementi u G nenegativni, koristi se oznaka $G \ge 0$, a kada su svi elementi u G pozitivni, oznaka $G \gg 0$. Neka je

$$Z^{m\times m} = \{A = (a_{ij})_{m\times m} : a_{ij} \le 0, i \ne j\}.$$

U nastavku se najpre navodi definicija nesingularne M-matrice, a zatim tri leme (preuzete iz [70] sa prilagodjenim oznakama) koje se koriste u daljem radu.

Definicija 3.4.1 *Kvadratna matrica $A = (a_{ij})_{m\times m}$ je nesingularna M-matrica ako se A može izraziti u obliku $A = sI - G$, pri čemu je $G \ge 0$ i $s > \rho(G)$, gde je I identična $m \times m$ matrica, a $\rho(G)$ je spektralni vektor od G.*

Lema 3.4.1 *[Minkowski,1907] Ako su sve sume vrsta matrice $A = (a_{ij})_{m\times m} \in Z^{m\times m}$ pozitivne, tj. ako je $\sum_{j=1}^m a_{ij} > 0$ za svako $i = 1, \ldots, m$, tada je* $\det A > 0$.

Lema 3.4.2 *Za matricu $A = (a_{ij})_{m\times m} \in Z^{m\times m}$ važe sledeća ekvivalentna tvrdjenja:*

(i) A je nesingularna M-matrica.

(ii) Svi glavni minori matrice A su pozitivni, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{za svako} \quad k = 1, \dots, m.$$

(iii) A je semi-pozitivna matrica, tj. postoji $\vec{p} \gg 0$ *iz* R^m *takav da je* $A\vec{p} \gg 0$.

Pretpostavka 3.4.1 *Za neko* $u \in \mathbb{S}$ *je* $q_{iu} > 0$ *za svako* $i \neq u$.

Lema 3.4.3 *Neka važi Pretpostavka* 3.4.1. *Ako je* $\sum_{j=1}^m \pi_j \tilde{b}_i(j) > 0$, *tada postoji konstanta* $\beta > 0$ *takva da je matrica*

$$A(\beta) = diag(\xi_1(\beta), \xi_2(\beta), \dots, \xi_m(\beta)) - Q$$

nesingularna M-matrica, pri čemu je $\xi_j(\beta) = \beta\tilde{b}_i(j) - 1/2\beta^2\bar{\sigma}_i^2(j)$, $j \in \mathbb{S}$.

Dokaz. Dokaz je motivisan radom [47]. Poznato je da determinanta ne menja svoju vrednost kada najpre i-ta i j-ta vrsta determinante zamene mesta, a zatim i-ta i j-ta kolona zamene mesta. Iz ovoga sledi da ako se u nesingularnoj M-matrici zamene mesta i-toj i j-toj vrsti, a zatim i-toj i j-toj koloni, novodobijena matrica je i dalje nesingularna M-matrica. Dalje, bez gubljenja opštosti, može se pretpostaviti da je $u = m$. Tada je po Pretpostavci 3.4.1

$$q_{im} > 0, \ i = 1, \dots, m-1.$$

Kako je $\sum_{j=1}^m q_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, tada je

$$detA(\beta) = \begin{vmatrix} \xi_1(\beta) - q_{11} & -q_{12} & \dots & -q_{1m} \\ -q_{21} & \xi_2(\beta) - q_{22} & \dots & -q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & -q_{m-1,2} & \dots & -q_{m-1,m} \\ -q_{m1} & -q_{m2} & \dots & \xi_m(\beta) - q_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1(\beta) - q_{11} & -q_{12} & \dots & \xi_1(\beta) - q_{11} - q_{12} \dots - q_{1m} \\ -q_{21} & \xi_2(\beta) - q_{22} & \dots & -q_{21} + \xi_2(\beta) - q_{22} \dots - q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & -q_{m-1,2} & \dots & -q_{m-1,1} \dots + \xi_{m-1}(\beta) - q_{m-1,m-1} - q_{m-1,m} \\ -q_{m1} & -q_{m2} & \dots & -q_{m1} - q_{m2} \dots + \xi_m(\beta) - q_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1(\beta) - q_{11} & -q_{12} & \dots & \xi_1(\beta) \\ -q_{21} & \xi_2(\beta) - q_{22} & \dots & \xi_2(\beta) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & -q_{m-1,2} & \dots & \xi_{m-1}(\beta) \\ -q_{m1} & -q_{m2} & \dots & \xi_m(\beta) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^m \xi_j(\beta) M_j(\beta), \tag{3.10}$$

gde je $M_i(\beta)$ odgovarajući minor za $\xi_i(\beta)$ iz poslednje kolone, odnosno

$$M_1(\beta) = (-1)^{1+m} \begin{vmatrix} -q_{21} & \dots & -q_{2,m-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & \dots & \xi_{m-1}(\beta) - q_{m-1,m-1} \\ -q_{m1} & \dots & -q_{m,m-1} \end{vmatrix},$$

$\vdots$

$$M_m(\beta) = (-1)^{m+m} \begin{vmatrix} \xi_1(\beta) - q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} \\ -q_{21} & \dots & -q_{2,m-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & \dots & \xi_{m-1}(\beta) - q_{m-1,m-1} \end{vmatrix}.$$

Očigledno da je $\xi_j(0) = 0$ i $\frac{d}{d\beta}\xi_j(0) = \tilde{b}_i(j)$, $j \in \mathbb{S}$. Tada na osnovu (3.10) sledi da je

$$\frac{d}{d\beta} det\, A(0) = \begin{vmatrix} -q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} & \tilde{b}_i(1) \\ -q_{21} & \dots & -q_{2,m-1} & \tilde{b}_i(2) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -q_{m1} & \dots & -q_{m,m-1} & \tilde{b}_i(m) \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

odnosno $\frac{d}{d\beta} det\, A(0) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_i(j) M_j(0)$.

Pokazuje se da je uslov

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j \tilde{b}_i(j) > 0 \tag{3.12}$$

ekvivalentan uslovu

$$\begin{vmatrix} -q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} & \tilde{b}_i(1) \\ -q_{21} & \dots & -q_{2,m-1} & \tilde{b}_i(2) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -q_{m1} & \dots & -q_{m,m-1} & \tilde{b}_i(m) \end{vmatrix} > 0 \tag{3.13}$$

pod Pretpostavkom 3.4.1 (analogno postupku u [66]).

Kako je $\pi Q = 0$ i $\pi \overrightarrow{1} = 1$, gde je $\overrightarrow{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$, sledi da je $\pi G = (0, \dots, 0, -1)$, pri čemu je

$$G = (g_{ij})_{m\times m} = \begin{bmatrix} -q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} & -1 \\ -q_{21} & \dots & -q_{2,m-1} & -1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -q_{m1} & \dots & -q_{m,m-1} & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Lanac Markova je ergodičan, pa je matrica G invertibilna, tj. $\pi = (0, \dots, 0, -1)G^{-1}$,

pri čemu je

$$G^{-1} = \frac{1}{det\, G} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} & \dots & G_{m1} \\ G_{12} & G_{22} & \dots & G_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{1m} & G_{2m} & \dots & G_{mm} \end{bmatrix},$$

tako da je G_{ij} minor koji odgovara elementu g_{ij} determinante matrice G. Specijalno, sledi da je

$$G_{jm} = (-1)^{j+m} \begin{vmatrix} -q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{j-1,1} & \dots & -q_{j-1,m-1} \\ -q_{j+1,1} & \dots & -q_{j+1,m-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m1} & \dots & -q_{m,m-1} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Odavde sledi da se stacionarna raspodela π lanca Markova može predstaviti na sledeći način

$$\pi_j = -\frac{G_{jm}}{det\, G}. \tag{3.15}$$

Prema (3.15) uslov (3.12) postaje

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{G_{jm}}{det\, G}\, \tilde{b}_i(j) > 0. \tag{3.16}$$

S druge strane, koristeći navedene oznake uslov (3.13) je

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_i(j) G_{jm} > 0. \tag{3.17}$$

Uporedjujući (3.16) i (3.17), zaključuje se da će uslovi (3.12) i (3.13) biti ekvivalentni ako je $det\, G < 0$. Da bi se pokazalo da je $det\, G < 0$, posmatra se

$$G_{mm} = \begin{vmatrix} -q_{11} & \dots & -q_{1,m-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{m-1,1} & \dots & -q_{m-1,m-1} \end{vmatrix}. \tag{3.18}$$

Svi elementi van glavne dijagonale determinante G_{mm} su nepozitivni, dok je suma elemenata u svakoj vrsti pozitivna, pa se prema Lemi 3.4.1 zaključuje da je $G_{mm} > 0$. Kako je $\pi_m > 0$, iz (3.15) sledi da je $det\, G < 0$, čime je ekvivalencija dokazana. Iz (3.11) sledi da je $\frac{d}{d\beta}\, det\, A(0) > 0$.

Kako je $det\, A(0) = 0$, može se naći dovoljno malo β tako da je

$$det\, A(\beta) > 0 \tag{3.19}$$

i

$$\xi_j(\beta) = \beta\tilde{b}_i(j) - 1/2\beta^2\bar{\sigma}_i^2(j) > -q_{jm},\ j = 1, \dots, m-1. \tag{3.20}$$

Za svako $j = 1, \dots, m-1$ se posmatra vodeća glavna podmatrica od $A(\beta)$

$$A_j(\beta) = \begin{pmatrix} \xi_1(\beta) - q_{11} & -q_{12} & \dots & -q_{1j} \\ -q_{21} & \xi_2(\beta) - q_{22} & \dots & -q_{2j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -q_{j1} & -q_{j2} & \dots & \xi_j(\beta) - q_{jj} \end{pmatrix}.$$

Jasno je da $A_j(\beta) \in Z^{j\times j}$. Štaviše, s obzirom na (3.20), svaka vrsta ove podmatrice ima sumu

$$\xi_i(\beta) - \sum_{k=1}^{j} q_{ik} \geq \xi_i(\beta) + q_{im} > 0.$$

Primenom Leme 3.4.2 se dolazi do zaključka da je $det\, A_j(\beta) > 0$, što zajedno sa (3.19) rezultira time da su svi vodeći glavni minori pozitivni. Tada traženo svojstvo sledi direktno iz Leme 3.4.2. $\diamondsuit$

Kako je u Poglavlju 3.2 dokazano postojanje gornje granice rešenja sistema (3.1), tj. dokazana je stohastička ultimativna ograničenost, da bi važila stohastička permanentnost potrebno je dokazati egzistenciju i donje granice.

Teorema 3.4.1 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.2, *Pretpostavka* 3.4.1 *i neka je* $\theta < 1$. *Ako je* $\sum_{j=1}^m \pi_j\tilde{b}_i(j) > 0$, *tada postoji konstanta* $\beta > 0$ *takva da za rešenje sistema* (3.1) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} E\left(\frac{1}{|x(t)|^\beta}\right) \leq H,$$

gde je H *pozitivna konstanta.*

Dokaz. Neka je $V(x) = \sum_{i=1}^d x_i$ za $x \in R_+^d$ i

$$U(x(t)) = \frac{1}{V(x(t))},\ t \geq 0.$$

Primenom uopštene formule Itôa se dobija

$$dU(x(t)) = \Big\{ - U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} x_i(t) \Big[r_i(\alpha(t)) - \Big(\frac{x_i(t)}{k_i(\alpha(t))}\Big)^\theta - \sum_{i\neq j}^{d} \frac{a_{ij}(\alpha(t))x_j(t)}{k_j(\alpha(t))}\Big]$$
$$+ U^3(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2(\alpha(t))x_i^2(t)\Big\}dt - U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha(t))x_i(t)dw_i(t).$$

Za β dato Lemom 3.4.3, na osnovu Leme 3.4.2 postoji vektor $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$ $\gg 0$ takav da je $A(\beta)\vec{p} \gg 0$, odnosno

$$p_l\beta\left[\tilde{r}_i(l) - \frac{\beta+1}{2}\bar{\sigma}_i^2(l)\right] - \sum_{j=1}^{m} q_{lj}p_j > 0, \quad l = 1, \dots, m. \tag{3.21}$$

Primenom uopštene formule Itôa na $U_1(x,l) = p_l(1+U(x))^\beta$ i izračunavanjem očekivanja dobija se

$$EU_1(x(t),\alpha(t)) = U_1(x(0),\alpha(0)) + E\int_0^t LU_1(x(s),\alpha(s))ds,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
&LU_1(x,l)\\
&= p_l\beta(1+U(x))^{\beta-2}\Big\{-(1+U(x))U^2(x)\sum_{i=1}^d x_i\Big[r_i(l) - \Big(\frac{x_i}{k_i(l)}\Big)^\theta - \sum_{i\neq j}^d \frac{a_{ij}(l)x_j}{k_j(l)}\Big]\\
&\qquad + \Big(1+\frac{\beta+1}{2}U(x)\Big)U^3(x)\sum_{i=1}^d \sigma_i^2(l)x_i^2\Big\} + (1+U(x))^\beta\sum_{j=1}^m q_{lj}p_j\\
&\le (1+U(x))^{\beta-2}\Big\{\Big[p_l\beta\Big(-\tilde r_i(l) + \frac{\beta+1}{2}\bar\sigma_i^2(l)\Big) + \sum_{j=1}^m q_{lj}p_j\Big]U^2(x)\\
&\qquad + \Big[p_l\beta\Big(-\tilde r_i(l) + \frac{\bar a_{ij}(l)}{\tilde k_i(l)} + \bar\sigma_i^2(l)\Big) + 2\sum_{j=1}^m q_{lj}p_j\Big]U(x) + p_l\beta\frac{\bar a_{ij}(l)}{\tilde k_i(l)}\\
&\qquad + \sum_{j=1}^m q_{lj}p_j + \frac{p_l\beta}{\tilde k_i^\theta(l)}U^{1-\theta}(x) + \frac{p_l\beta}{\tilde k_i^\theta(l)}U^{2-\theta}(x)\Big\}.
\end{aligned}$$

Kako važi (3.21), može se izabrati dovoljno malo η tako da je za svako $l = 1,\dots,m$ zadovoljeno

$$p_l\beta\Big[\tilde r_i(l) - \frac{\beta+1}{2}\bar\sigma_i^2(l)\Big] - \sum_{j=1}^m q_{lj}p_j - \eta p_l > 0. \tag{3.22}$$

Neka je $U_2(x,l) = e^{\eta t}U_1(x,l)$. Tada

$$EU_2(x(t),\alpha(t)) = U_1(x(0),\alpha(0)) + E\int_0^t L[e^{\eta s}U_1(x(s),\alpha(s))]ds,$$

gde je

$$\begin{aligned}
&L[e^{\eta s}U_1(x,l)] = \eta e^{\eta t}U_1(x,l) + e^{\eta t}LU_1(x,l)\\
&\le e^{\eta t}(1+U(x))^{\beta-2}\Big\{-\Big[p_l\beta\Big(\tilde r_i(l) - \frac{\beta+1}{2}\bar\sigma_i^2(l)\Big) - \sum_{j=1}^m q_{lj}p_j - \eta p_l\Big]U^2(x)\\
&\qquad + \Big[p_l\beta\Big(-\tilde r_i(l) + \frac{\bar a_{ij}(l)}{\tilde k_i(l)} + \bar\sigma_i^2(l)\Big) + 2\sum_{j=1}^m q_{lj}p_j + 2\eta p_l\Big]U(x)\\
&\qquad + p_l\beta\frac{\bar a_{ij}(l)}{\tilde k_i(l)} + \eta p_l + \sum_{j=1}^m q_{lj}p_j + \frac{p_l\beta}{\tilde k_i^\theta(l)}U^{1-\theta}(x) + \frac{p_l\beta}{\tilde k_i^\theta(l)}U^{2-\theta}(x)\Big\}\\
&\le e^{\eta t}H_1,
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$H_1 = \sup_{x \in R_d^+} \Bigg\{ (1+x)^{\beta-2} \Bigg\{ - \left[p_l \beta \left(\tilde{r}_i(l) - \frac{\beta+1}{2} \bar{\sigma}_i^2(l) \right) - \sum_{j=1}^{m} q_{lj} p_j - \eta p_l \right] x^2$$
$$+ \left[p_l \beta \left(-\tilde{r}_i(l) + \frac{\bar{a}_{ij}(l)}{\tilde{k}_i(l)} + \bar{\sigma}_i^2(l) \right) + 2 \sum_{j=1}^{m} q_{lj} p_j + 2\eta p_l \right] x$$
$$+ p_l \beta \frac{\bar{a}_i(l)}{\tilde{k}_i(l)} + \eta p_l + \sum_{j=1}^{m} q_{lj} p_j + \frac{p_l \beta}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} x^{1-\theta} + \frac{p_l \beta}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} x^{2-\theta} \Bigg\} \Bigg\}.$$

Tada je

$$E[e^{\eta t} p_l (1 + U(x(t)))^{\beta}] = p_l (1 + U(x(0))^{\beta} + H_1 \frac{e^{\eta t} - 1}{\eta}.$$

Dalje važi

$$\limsup_{t \to \infty} EU^{\beta}(x(t)) \le \limsup_{t \to \infty} E\Big[(1 + U(x(t)))^{\beta} \Big] \le \frac{H_1}{\eta \tilde{p}} = H_2, \tag{3.23}$$

gde je $\tilde{p} = \min_l p_l$. Na osnovu sledeće ocene

$$\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \right)^{\beta} \le \left(d \max_{1 \le i \le d} x_i \right)^{\beta} = d^{\beta} \left(\max_{1 \le i \le d} x_i^2 \right)^{\beta/2} \le d^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{\beta/2} = d^{\beta} |x|^{\beta}$$

i definicije funkcije $U(x)$, dobija se

$$\limsup_{t \to \infty} E\left(\frac{1}{|x(t)|^{\beta}} \right) \le d^{\beta} \limsup_{t \to \infty} EU^{\beta}(x(t)) \le d^{\beta} H_2 = H,$$

što je i trebalo dokazati. $\diamondsuit$

Teorema 3.4.2 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.4.1. *Tada je rešenje sistema* (3.1) *stohastički permanentno.*

Dokaz. Tvrdjenje direktno sledi na osnovu Teoreme 3.4.1 i primene nejednakosti Chebysheva. $\diamondsuit$

Teorema 3.4.3 *Neka važe uslovi Teoreme* 3.2.1 *i Pretpostavka* 3.4.1. *Ako je* $\theta_i = \theta$, $i = 1, \ldots, d$, *i* $b_i^{\pi} > 0$, *tada rešenje* $x(t)$ *sistema* (3.1) *zadovoljava*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \ge -\frac{1}{\beta} \quad s.i. \tag{3.24}$$

Dokaz. Na osnovu (3.23) postoji pozitivna konstanta H_3 takva da je

$$E\Big[(1 + U(x(t)))^{\beta} \Big] \le H_3, \ t \ge 0. \tag{3.25}$$

S druge strane, primenom uopštene formule Itôa, a kako je $\theta_i = \theta$, $i = 1, \ldots, d$, dobija se

$$
\begin{aligned}
& d\Big[(1+U(x(t)))^{\beta}\Big] \qquad (3.26)\\
& \le \beta(1+U(x(t)))^{\beta-2}\bigg\{ \Big[-\tilde{r}_i(l) + \frac{\beta+1}{2}\bar{\sigma}_i^2(l)\Big] U^2(x(t)) \\
& \quad + \Big[-\tilde{r}_i(l) + \frac{\bar{a}_{ij}(l)}{\tilde{k}_i(l)} + \bar{\sigma}_i^2(l)\Big] U(x(t)) + \frac{\bar{a}_{ij}(l)}{\tilde{k}_i(l)} + \frac{1}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} U^{1-\theta}(x(t)) \\
& \quad + \frac{1}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} U^{2-\theta}(x(t))\bigg\} dt - \beta(1+U(x(t)))^{\beta-1} U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(l) x_i(t) dw_i(t) \\
& = \beta(1+U(x(t)))^{\beta-2}\bigg\{ \Big[-\tilde{r}_i(l) + \frac{\beta+1}{2}\bar{\sigma}_i^2(l) + 1\Big] U^2(x(t)) - U^2(x(t)) \\
& \quad + \Big[-\tilde{r}_i(l) + \bar{\sigma}_i^2(l) + \frac{\bar{a}_{ij}(l)}{\tilde{k}_i(l)}\Big] U(x(t)) + \frac{\bar{a}_{ij}(l)}{\tilde{k}_i(l)} + \frac{1}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} U^{1-\theta}(x(t)) \\
& \quad + \frac{1}{\tilde{k}_i^{\theta}(l)} U^{2-\theta}(x(t))\bigg\} dt - \beta(1+U(x(t)))^{\beta-1} U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(l) x_i(t) dw_i(t) \\
& \le \beta(1+U(x(t)))^{\beta-2}\bigg\{ \Big[-\tilde{r}_i(l) + \frac{\beta+1}{2}\bar{\sigma}_i^2(l) + 1\Big] U^2(x(t)) + K_1 \bigg\} dt \\
& \quad - \beta(1+U(x(t)))^{\beta-1} U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(l) x_i(t) dw_i(t) \\
& \le \beta K_2 (1+U(x(t)))^{\beta} dt - \beta(1+U(x(t)))^{\beta-1} U^2(x(t)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(l) x_i(t) dw_i(t),
\end{aligned}
$$

gde su K_1 i K_2 generisane pozitivne konstante.

Neka je $\mu > 0$ dovoljno malo takvo da je

$$
\beta\left[\mu K_2 + 4\sqrt{2}\bar{\sigma}_i(l)\mu^{1/2}\right] < \frac{1}{2}. \qquad (3.27)
$$

Neka je $n = 1, 2, \ldots$ Na osnovu (3.26) sledi

$$
\begin{aligned}
& E\bigg(\sup_{(n-1)\mu \le t \le n\mu} (1+U(x(t)))^{\beta} \bigg) \qquad (3.28)\\
& \le E\left[1+U(x((n-1)\mu))\right]^{\beta} + \beta K_2 E\bigg(\sup_{(n-1)\mu \le t \le n\mu} \bigg| \int_{(n-1)\mu}^{t} (1+U(x(s)))^{\beta} ds \bigg| \bigg) \\
& \quad + \beta E\bigg(\sup_{(n-1)\mu \le t \le n\mu} \bigg| \int_{(n-1)\mu}^{t} (1+U(x(s)))^{\beta-1} U^2(x(s)) \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(l) x_i(s) dw_i(s) \bigg| \bigg).
\end{aligned}
$$

Dalje je

$$
E\bigg(\sup_{(n-1)\mu \le t \le n\mu} \bigg| \int_{(n-1)\mu}^{t} (1+U(x(s)))^{\beta} ds \bigg| \bigg) \le E\bigg(\int_{(n-1)\mu}^{n\mu} \Big|(1+U(x(s)))^{\beta}\Big| ds \bigg) \qquad (3.29)
$$

$$\leq \mu E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}\bigg).$$

Na osnovu Burkholder-Davis-Gandyjeve i Jensenove nejednakosti sledi

$$E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}\bigg|\int_{(n-1)\mu}^{t}(1+U(x(s)))^{\beta-1}U^2(x(s))\sum_{i=1}^{d}\sigma_i(l)x_i(s)dw_i(s)\bigg|\bigg) \tag{3.30}$$
$$\leq 4\sqrt{2}\ E\bigg(\int_{(n-1)\mu}^{n\mu}(1+U(x(s)))^{2\beta-2}U^4(x(s))\bigg(\sum_{i=1}^{d}\sigma_i(l)x_i(s)\bigg)^2ds\bigg)^{1/2}$$
$$\leq 4\sqrt{2}\ \bar{\sigma}_i(l)E\bigg(\int_{(n-1)\mu}^{n\mu}(1+U(x(s)))^{2\beta}ds\bigg)^{1/2}$$
$$\leq 4\sqrt{2}\ \bar{\sigma}_i(l)\mu^{1/2}E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}\bigg).$$

Na osnovu (3.29) i (3.30) i pretpostavke (3.27), (3.28) postaje

$$E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}\bigg)\leq E\left[1+U(x((n-1)\mu))\right]^{\beta}$$
$$+\beta\left(\mu K_2+4\sqrt{2}\ \bar{\sigma}_i(l)\mu^{1/2}\right)E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}\bigg),$$

tako da se primenom (3.25) dobija

$$E\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}\bigg)\leq 2H_3.$$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno. Na osnovu nejednakosti Chebysheva sledi

$$P\bigg(\sup_{(n-1)\mu\leq t\leq n\mu}(1+U(x(t)))^{\beta}>(n\mu)^{1+\varepsilon}\bigg)\leq\frac{2H_3}{(n\mu)^{1+\varepsilon}},\quad n=1,2,\ldots$$

Primenom Borell-Cantellijeve leme sledi da za skoro svako $\omega\in\Omega$, postoji ceo broj $n_0=n_0(\omega)$ takav da za $n\geq n_0$ i $(n-1)\mu\leq t\leq n\mu$

$$\frac{\ln(1+U(x(t)))^{\beta}}{\ln t}\leq\frac{(1+\varepsilon)\ln(n\mu)}{\ln((n-1)\mu)},$$

odakle sledi da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln(1+U(x(t)))^{\beta}}{\ln t}\leq 1+\varepsilon\quad s.i.$$

Kada $\varepsilon\to 0$, na osnovu činjenice da je $U(x)=(\sum_{i=1}^{d}x_i)^{-1}$ se dobija

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{d}x_i\right)^{-\beta}}{\ln t}\leq 1\quad s.i.,$$

pa na osnovu elementarne nejednakosti $\sum_{i=1}^{d}x_i\leq\sqrt{d}|x|$ sledi tražena nejednakost (3.24). $\diamondsuit$

Glava 4

Stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa beskonačnim kašnjenjem

Kako veliki broj procesa u prirodi uključuje vremensko kašnjenje, i modeli koji ga uključuju više odgovaraju realnosti, pa se u ovoj glavi razmatra stohastički Gilpin-Ayala model sa kašnjenjem. U Poglavlju 4.1 su dati uvodni pojmovi i rezultati za stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa konačnim kašnjenjem (videti [51]). U Poglavljima 4.2-4.6 su izloženi novi rezultati (objavljeni u [86]) vezani za model sa beskonačnim kašnjenjem. U Poglavlju 4.2 se uvodi pomenuti model sa beskonačnim kašnjenjem i dokazuje se da je rešenje posmatranog sistema globalno i pozitivno. U Poglavlju 4.3 se ispituje stohastička ultimativna ograničenost rešenja. Pošto nije moguće naći eksplicitno rešenje posmatranog sistema, analizira se asimptotsko ponašanje momenata rešenja sistema u Poglavlju 4.4 i ponašanje trajektorija u Poglavlju 4.5. Dva primera sa numeričkom simulacijom ilustruju dobijene rezultate u Poglavlju 4.6.

4.1 Poznati rezultati

Veliki broj procesa, kako prirodnih, tako i onih nastalih pod uticajem ljudskog faktora u biologiji, medicini, hemiji, fizici, inženjerstvu, ekonomiji, itd. uključuje vremensko kašnjenje. Vremensko kašnjenje se javlja toliko često da kada bi se ignorisalo, značilo bi da se ignoriše realnost. Uopšteno, vremensko kašnjenje predstavlja vreme koje protekne od nekog uzroka do njegove posledice (na primer, u populacionoj dinamici, jedinkama je potrebno izvesno vreme do sazrevanja, ili u medicini, infektivne bolesti imaju period inkubacije). Kako stohastički modeli sa kašnjenjem više odgovaraju realnosti, poslednjih godina postoji povećano interesovanje za proučavanjem stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem. Postoji izvestan broj radova koji proučavaju stohastičke Lotka-Volterra modele sa konačnim i beskonačnim kašnjenjem [2, 3, 71, 89, 95, 96] i samo jedan o stohastičkom Gilpin-Ayala modelu sa konačnim kašnjenjem [51]. To je poslužilo kao motivacija da se u ovoj doktorskoj disertaciji obradi stohastički Gilpin-Ayala model sa beskonačnim kašnjenjem.

Najpre se navode rezultati Liana i Hua [51] koji su proučavali stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa konačnim kašnjenjem. Oni su razmatrali sledeći sistem od d jednačina:

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i + \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j^{\theta_j}(t-\tau)\right]dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} x_j(t) dw(t)\right\},\ i = 1, \ldots, d, \quad (4.1)$$

gde je $(a_{ij})_{d\times d}, (\sigma_{ij})_{d\times d} \in R^{d\times d}$, a $w(t)$ jednodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Takodje je za model uvedena pretpostavka

$$\sigma_{ii} > 0,\ i = 1, \ldots, d; \quad \sigma_{ij} \geq 0,\ i \neq j. \quad (4.2)$$

Uz ovu pretpostavku i uslov $\max(\theta_1, \ldots, \theta_d) < 5/4$ dokazana je teorema o postojanju pozitivnog i globalnog rešenja sistema (4.1) za $t \geq -\tau$ za sve parametre sistema $(a_{ij})_{d\times d}$ i proizvoljne početne vrednosti $\{x(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C([-\tau, 0], R_+^d)$. Zatim je dokazano da je rešenje razmatranog sistema stohastički ultimativno ograničeno. Štaviše, kako nije moguće eksplicitno rešiti sistem, ispitivane su asimpotske ocene momenata, kao i ponašanje trajektorija. Pokazano je da ako važi pretpostavka (4.2) i $\max(\theta_1, \ldots, \theta_d) < 5/4$, za proizvoljne početne vrednosti $\{x(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C([-\tau, 0], R_+^d)$ za rešenje sistema (4.1) važe sledeće osobine:

- neka je $(a_{ij}) \in R^{d\times d}$; tada postoji konstanta $K > 0$ takva da je
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_i}(s) ds \leq K;$$
- postoje konstante $K, K_1 > 0$ takve da važi
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{\hat\sigma}{4d}\int_0^t |x(t)|^2\right] \leq K \quad s.i.,$$
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\ln |x_i(t)| + \frac{\hat\sigma}{4d}\int_0^t |x(t)|^2\right] \leq K_1 \quad s.i.,$$
gde je $\hat\sigma = \min_{i=1,\ldots,d} \sigma_{ii}$;
- $$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i.$$
i
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x_i(t)|}{\ln t} \leq 1 \quad s.i.$$

Model koji se razmatra u nastavku je uopštenje modela (4.1), pri čemu je u model uključeno i beskonačno kašnjenje, a izloženi rezultati su publikovani u [86].

4.2 Pozitivno i globalno rešenje

Razmatra se deterministički Gilpin-Ayala model kompeticije za sistem sa d interagujućih vrsta koji je izveden iz determinističkog modela iz rada Yana [97], ali neznatno modifikovan da bi imao beskonačno kašnjenje,

$$\begin{aligned} dx_i(t) = x_i(t)\Big[r_i - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}) \\ + c_{ij}\int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds\Big)\Big]dt,\ i = 1,\dots,d, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gde je $x(t) = (x_1(t),\dots,x_d(t))^T$; $x_i(t)$ i r_i su veličina populacije u trenutku t i unutrašnja eksponencijalna stopa rasta i-te vrste, respektivno; $A = (a_{ij})_{d\times d}$, $B = (b_{ij})_{d\times d}$, $C = (c_{ij})_{d\times d}$, gde su a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} parametri koji predstavljaju medjusobni uticaj jedinki različitih vrsta za $i \neq j$ i medjusobni uticaj jedinki unutar populacije iste vrste za $i = j$; izrazi $b_{ij}x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij})$ i $c_{ij}\int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds$ predstavljaju *negative feedback crowding* i efekat celokupnog životnog ciklusa vrste na trenutnu stopu rasta te vrste, respektivno. Pretpostavlja se da je τ_{ij}, α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, $\delta_{ij} \geq 0$ i da $K_{ij} \in C([-\infty,0];R_+^d)$ zadovoljava $\int_{-\infty}^{0} K_{ij}(t)\,dt = 1$, $i,j = 1,\dots,d$, pri čemu je $C([-\infty,0];R_+^d)$ familija neprekidnih funkcija koje slikaju $(-\infty,0]$ u R_+^d.

U praksi se unutrašnja stopa rasta i-te vrste ocenjuje kao suma srednje vrednosti registrovanih stopa rasta i greške. Drugim rečima, stopa r_i se može perturbovati na sledeći način

$$r_i \to r_i + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

gde je σ_{ij} intenzitet šuma $(i,j = 1,\dots,d)$ i $\sigma = (\sigma_{ij})_{d\times d}$ zadovoljava

$$\sigma_{ii} > 0,\ i = 1,\dots,d, \quad \sigma_{ij} \geq 0,\ i \neq j. \tag{4.4}$$

Eksponenti θ_{ij} ($\theta_{ij} \geq 0$, $i,j = 1,\dots,d$) se biraju u zavisnosti od parametara α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij}, tako da rešenje stohastički perturbovane jednačine poseduje neka svojstva, kao što su: pozitivnost rešenja, stohastička ultimativna ograničenost, ograničenost usrednjenog momenta po vremenu, itd. Dakle, deterministička jednačina (4.3) postaje sledeći stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa beskonačnim kašnjenjem sa d vrsta

$$\begin{aligned} dx_i(t) = x_i(t)\Big\{\Big[r_i - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}) \\ + c_{ij}\int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds\Big)\Big]dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t)\Big\}, \\ i = 1,\dots,d. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Početni uslovi su

$$x_i(\theta) = \varphi_i(\theta) > 0,\ -\infty < \theta \leq 0;\ \sup_{-\infty<\theta\leq 0}|\varphi(\theta)| < \infty, \tag{4.6}$$

gde su φ_i, $i = 1, \dots, d$ neprekidne funkcije na $(-\infty, 0]$.

Koeficijenti sistema (4.5) su lokalno Lipschitz neprekidni, ali ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta, pa nisu zadovoljeni uslovi teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (Teorema 1.6.2). Zbog toga je neophodno da se uvedu pretpostavke (4.4) da bi se dobilo rešenje koje ne samo da je pozitivno, nego i ne eksplodira u nekom konačnom trenutku. To je dokazano sledećom teoremom.

Teorema 4.2.1 *Neka važi pretpostavka* (4.4) *i neka je*

$$\theta_{ii} \geq \max_j \theta_{ij}, \; i = 1, \dots, d, \tag{4.7}$$

$$\max_i \theta_{ii} > \max_{i,j}\{\alpha_{ij}/2, \beta_{ij}, \gamma_{ij} + \delta_{ij}\}. \tag{4.8}$$

Tada za proizvoljne parametre sistema $A, B, C \in R^{d\times d}$ i proizvoljne početne uslove $\{x(t) : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R^d_+)$ postoji jedinstveno rešenje $x(t)$, $t \in R$ sistema (4.5) *i to rešenje ostaje u R^d_+ sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Kako su koeficijenti sistema (4.5) lokalno Lipschitz neprekidni, za proizvoljne početne uslove $\{x_t : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R^d_+)$ postoji jedinstveno maksimalno pozitivno rešenje $x(t)$ definisano na $t \in [0, \rho)$, gde je ρ trenutak eksplozije. Da bi se pokazalo da je rešenje globalno, trebalo bi pokazati da je $\rho = \infty$ s.i.

Neka je n_0 dovoljno veliko tako da svaka komponenta od $\{x_t : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R^d_+)$ leži u intervalu $[n_0^{-1}, n_0]$. Za svako celobrojno $n \geq n_0$ se definiše vreme zaustavljanja

$$\tau_n = \inf\{t \in [0, \rho) \,|\, x_i(t) \notin (n^{-1}, n) \text{ za neko } i = 1, \dots, d\},$$

pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$. Jasno, τ_n raste kad $n \to \infty$. Neka je $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$. Ako se pokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i., tada je $\rho = \infty$ s.i. i $x(t) \in R^d_+$ s.i. za svako $t \geq 0$. Drugim rečima, da bi se kompletirao dokaz, trebalo bi pokazati da je $\tau_\infty = \infty$ s.i. ili da za svako $T > 0$ važi $P(\tau_n \leq T) \to 0$ kada $n \to \infty$. Neka je C^2-funkcija $V : R^d_+ \to R_+$-funkcija Lyapunova, pri čemu je

$$V(x) = \sum_{i=1}^{d} \Big(x_i^\gamma - 1 - \gamma \ln x_i\Big),$$

gde je $0 < \gamma < 1$ i biće preciznije definisano u nastavku dokaza. Neka je $n \geq n_0$ i $T > 0$ proizvoljno. Za $0 \leq t \leq \tau_n \wedge T$, primenom formule Itôa na $V(x(t))$ se dobija

$$dV(x(t)) = LV(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

pri čemu je

$$LV(x(t)) = \gamma \sum_{i=1}^{d}(x_i^\gamma(t) - 1)\Bigg[r_i - \sum_{j=1}^{d}\Bigg(a_{ij}x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij})$$

$$+ c_{ij} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) x_i^{\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{\delta_{ij}}(t+s)\, ds \Big) \Big]$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 [1 - (1-\gamma) x_i^{\gamma}(t)] x_j^{2\theta_{ij}}(t).$$

Primenom elementarne nejednakosti $2xy \le x^2 + y^2$, sledi

$$-\gamma \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_i^{\gamma}(t) - 1) x_j^{\alpha_{ij}}(t) \le \gamma \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}| x_i^{\gamma}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(t),$$

$$-\gamma \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x_i^{\gamma}(t) - 1) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}) \le \frac{\gamma d}{4} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}^2 (x_i^{\gamma}(t) - 1)^2 + \frac{\gamma}{d} \sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}),$$

$$\begin{aligned}
-\gamma \sum_{i,j=1}^{d} c_{ij}(x_i^{\gamma}(t) - 1) \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) x_i^{\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{\delta_{ij}}(t+s) ds& \\
\le \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) \Big[\frac{d}{4} c_{ij}^2 (x_i^{\gamma}(t) - 1)^2 + \frac{1}{d} x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{2\delta_{ij}}(t+s) \Big] ds& \\
= \frac{\gamma d}{4} \sum_{i,j=1}^{d} c_{ij}^2 (x_i^{\gamma}(t) - 1)^2 + \frac{\gamma}{d} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{2\delta_{ij}}(t+s) ds.&
\end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned}
dV(x(t)) \le \gamma \Big[&\sum_{i=1}^{d} r_i (x_i^{\gamma}(t) - 1) + \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}| x_i^{\gamma}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\
&+ \frac{d}{4} \sum_{i,j=1}^{d} (b_{ij}^2 + c_{ij}^2)(x_i^{\gamma}(t) - 1)^2 + \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}) \\
&+ \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{2\delta_{ij}}(t+s) ds \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(t) - \frac{1-\gamma}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_i^{\gamma}(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t) \Big] dt \\
&+ \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij} (x_i^{\gamma}(t) - 1) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t).
\end{aligned}$$

Da bi se eliminisali članovi sa kašnjenjem, uvode se nenegativni funkcionali

$$V_1(x(t)) = \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} x_j^{2\beta_{ij}}(s) ds,$$

$$V_2(x(t)) = \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) \int_{t+s}^{t} x_i^{2\gamma_{ij}}(u) x_j^{2\delta_{ij}}(u) du\, ds,$$

za koje je

$$
\begin{aligned}
dV_1(x(t)) &= \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\Big[x_j^{2\beta_{ij}}(t) - x_j^{2\beta_{ij}}(t-\tau_{ij})\Big]dt,\\
dV_2(x(t)) &= \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)\Big[x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t) - x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)\Big]ds\,dt\\
&= \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\Big[x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t) - \int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)ds\Big]dt.
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$
d[V(x(t))+V_1(x(t))+V_2(x(t))] \le F(x(t))dt+\gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t), \tag{4.9}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
F(x(t)) = \gamma\Big[&\sum_{i=1}^{d} r_i(x_i^{\gamma}(t)-1) + \sum_{i,j=1}^{d}|a_{ij}|x_i^{\gamma}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \sum_{i,j=1}^{d}|a_{ij}|x_j^{\alpha_{ij}}(t) \qquad (4.10)\\
&+\frac{d}{4}\sum_{i,j=1}^{d}(b_{ij}^2+c_{ij}^2)(x_i^{\gamma}(t)-1)^2 + \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\Big[x_j^{2\beta_{ij}}(t) + x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t)\Big]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}^2x_j^{2\theta ij}(t) - \frac{1-\gamma}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ii}^2x_i^{\gamma+2\theta ii}(t)\Big].
\end{aligned}
$$

Polinom $F(x(t))$ je ograničen ako je stepen uz negativni koeficijent veći od bilo kog stepena uz pozitivne koeficijente. Kako uslovi (4.7) i (4.8) važe, za $\gamma < 2\max_i \theta_{ii} \wedge 1$ postoji pozitivna konstanta K takva da je $F(x(t)) \le K$. Dakle,

$$
d[V(x(t)) + V_1(x(t)) + V_2(x(t))] \le Kdt + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge T$ i izračunavanjem očekivanja dobija se

$$
\begin{aligned}
EV(x(\tau_n\wedge T)) &\le EV(x(\tau_n\wedge T)) + EV_1(x(\tau_n\wedge T)) + EV_2(x(\tau_n\wedge T))\\
&\le V(x(0)) + V_1(x(0)) + V_2(x(0)) + KE(\tau_n\wedge T)\\
&\le V(x(0)) + V_1(x(0)) + V_2(x(0)) + KT.
\end{aligned}
$$

Prema tome, za svako $\omega \in \{\tau_n \le T\}$ postoji neko i takvo da $x_i(\tau_n,\omega) \notin (n^{-1}, n)$. Odatle je

$$
V(x(\tau_n)) \ge x_i^{\gamma}(\tau_n) - 1 - \gamma\ln x_i(\tau_n) = \left(\frac{1}{n^{\gamma}} - 1 - \gamma\ln\frac{1}{n}\right)\wedge(n^{\gamma} - 1 - \gamma\ln n)
$$

i onda

$$\begin{aligned}\infty &> V(x(0)) + V_1(x(0)) + V_2(x(0)) + KT \geq EV(x(\tau_n \wedge T))\\ &= P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n)) + P(\tau_n > T)V(x(T)) \geq P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n))\\ &\geq P(\tau_n \leq T)\left[\left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)\right].\end{aligned}$$

Kako $\left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)$ teži beskonačnosti kad $n \to \infty$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \leq T) = 0$, odnosno $P(\tau_\infty \leq T) = 0$. Kako je $T > 0$ proizvoljno, sledi

$$P(\tau_\infty < \infty) = 0 \quad \text{i} \quad P(\tau_\infty = \infty) = 1,$$

čime je dokaz kompletiran. $\diamondsuit$

4.3 Stohastička ultimativna ograničenost

Kako je u prethodnoj teoremi pokazano da rešenja sistema (4.5) ostaju u pozitivnom konusu R^d_+, mogu se kreirati i drugi tipovi funkcija Lyapunova da bi se detaljnije diskutovalo ponašanje rešenja. Pošto je dokazano da rešenja ne eksplodiraju u konačnom vremenu, mogu se ispitati i druge njihove interesantne karakteristike. U tom smislu se dokazuje pomoćna lema na osnovu koje gotovo trivijalno sledi da rešenja posmatranog sistema zadovoljavaju osobinu stohastičke ultimativne ograničenosti.

Lema 4.3.1 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 4.2.1, neka je $\mu \in (0, 2\max_i \theta_{ii} \wedge 1)$ i konstanta $\lambda > 0$ takva da važi*

$$\int_{-\infty}^0 K_{ij}(s)e^{-\lambda s}\, ds = \bar{K}_{ij} < \infty,\ i,j = 1,\ldots,d. \tag{4.11}$$

Tada postoji pozitivna konstanta $C = C(\theta)$, koja je nezavisna od početnih uslova $\{x(t) : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R^d_+)$ koji zadovoljavaju (4.6), takva da za rešenje $x(t)$ sistema (4.5) važi

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^\mu \leq C.$$

Dokaz. Za $x \in R^d_+$ i $0 < \mu < 1$ neka je data funkcija Lyapunova

$$\bar{V}(x) = \sum_{i=1}^d x_i^\mu.$$

Primenom formule Itôa na $e^{\lambda t}\bar{V}(x(t))$ se dobija

$$\begin{aligned}d[e^{\lambda t}\bar{V}(x(t))] &= e^{\lambda t} d\bar{V}(x(t)) + \lambda e^{\lambda t}\bar{V}(x(t))dt\\ &= L\bar{V}(x(t))dt + e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^d \mu\sigma_{ij}x_i^\mu(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
L\bar{V}(x(t)) = e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{d}\Bigg[(\lambda+\mu r_i)x_i^{\mu}(t) - \mu x_i^{\mu}(t)\sum_{j=1}^{d}\Bigg(a_{ij}x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij})\\
+ c_{ij}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds\Bigg) - \frac{\mu(1-\mu)}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2 x_i^{\mu}(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t)\Bigg].
\end{aligned}$$

Koriščenje elementarne nejednakosti $2xy \le x^2 + y^2$ i uslova (4.11) implicira

$$\begin{aligned}
&-e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^{d}\mu a_{ij}x_i^{\mu}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) \le e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^{d}\mu|a_{ij}|x_i^{\mu}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t),\\
&-e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^{d}\mu b_{ij}x_i^{\mu}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}) \le e^{\lambda t}\frac{\mu^2 d}{4}\sum_{i,j=1}^{d}b_{ij}^2 x_i^{2\mu}(t) + \frac{e^{\lambda t}}{d}\sum_{i,j=1}^{d}x_j^{2\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}),\\
&-e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^{d}\mu c_{ij}x_i^{\mu}(t)\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds\\
&\quad\le e^{\lambda t}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)\left[\frac{d}{4}\mu^2 c_{ij}^2 x_i^{2\mu} + \frac{1}{d}x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)\right]ds\\
&\quad= e^{\lambda t}\frac{\mu^2 d}{4}\sum_{i,j=1}^{d}c_{ij}^2 x_i^{2\mu}(t) + \frac{e^{\lambda t}}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)ds.
\end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned}
&d\bar{V}(x(t))\\
&\le e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{d}\Bigg[(\lambda+\mu r_i)x_i^{\mu}(t) + \mu\sum_{j=1}^{d}|a_{ij}|x_i^{\mu}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{\mu^2 d}{4}\sum_{j=1}^{d}(b_{ij}^2 + c_{ij}^2)x_i^{2\mu}(t)\\
&\qquad + \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(x_j^{2\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}) + \int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)ds\right)\\
&\qquad - \frac{\mu(1-\mu)}{2}\sigma_{ii}^2 x_i^{\mu+2\theta_{ii}}(t)\Bigg]dt + e^{\lambda t}\mu\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}x_i^{\mu}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
\end{aligned}$$

Da bi se eliminisali članovi sa kašnjenjem, uvode se nenegativni funkcionali

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1(x(t)) &= \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}e^{\lambda(s+\tau_{ij})}x_j^{2\beta_{ij}}(s)ds,\\
\bar{V}_2(x(t)) &= \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)\int_{t+s}^{t}e^{\lambda(u-s)}x_i^{2\gamma_{ij}}(u)x_j^{2\delta_{ij}}(u)du\,ds,
\end{aligned}$$

za koje je

$$d\bar{V}_1(x(t)) = \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\Big[e^{\lambda(t+\tau_{ij})}x_j^{2\beta_{ij}}(t) - e^{\lambda t}x_j^{2\beta_{ij}}(t-\tau_{ij})\Big]\,dt,$$

$$d\bar{V}_2(x(t)) = \frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)\Big[e^{\lambda(t-s)}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t) - e^{\lambda t}x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)\Big]dsdt.$$

Na osnovu (4.11) se dobija da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)e^{\lambda(t-s)}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t)ds &= \frac{e^{\lambda t}}{d}\sum_{i,j=1}^{d}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t)\int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)e^{-\lambda s}ds\\ &= \frac{e^{\lambda t}}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\bar{K}_{ij}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t),\end{aligned}$$

odakle sledi

$$d\bar{V}_2(x(t)) = \frac{e^{\lambda t}}{d}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\bar{K}_{ij}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t) - \int_{-\infty}^{0}K_{ij}(s)x_i^{2\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{2\delta_{ij}}(t+s)ds\right)dt.$$

Tada je

$$d[e^{\lambda t}\bar{V}(x(t)) + \bar{V}_1(x(t)) + \bar{V}_2(x(t))] \le e^{\lambda t}\left(\bar{F}(x(t))\,dt + \sum_{i,j=1}^{d}\mu\sigma_{ij}x_i^{\mu}(t)x_j(t)\,dw_j(t)\right),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\bar{F}(x(t)) = \sum_{i=1}^{d}\Bigg\{(\mu r_i+\lambda)x_i^{\mu}(t) + \sum_{j=1}^{d}\Bigg[\mu|a_{ij}|x_i^{\mu}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{\mu^2 d}{4}(b_{ij}^2+c_{ij}^2)x_i^{2\mu}(t)\\ + \frac{1}{d}\left(e^{\lambda\tau}x_j^{2\beta_{ij}}(t) + \bar{K}x_i^{2\gamma_{ij}}(t)x_j^{2\delta_{ij}}(t)\right)\Bigg] - \frac{\mu(1-\mu)}{2}\sigma_{ii}^2x_i^{\mu+2\theta_{ii}}(t)\Bigg\}\end{aligned}$$

i $\tau = \max_{i,j}\tau_{ij}$, $\bar{K} = \max_{i,j}\bar{K}_{ij}$. Kako uslov (4.7) važi, za $\mu \in (0, 2\max_i\theta_{ii}\wedge 1)$ postoji pozitivna konstanta K takva da je $\bar{F}(x(t)) \le K$. Dalje je

$$d[e^{\lambda t}\bar{V}(x(t)) + \bar{V}_1(x(t)) + \bar{V}_2(x(t))] \le e^{\lambda t}\left(Kdt + \sum_{i,j=1}^{d}\mu\sigma_{ij}x_i^{\mu}(t)x_j(t)\,dw_j(t)\right).$$

Integracijom obe strane ove nejednakosti od 0 do t i izračunavanjem očekivanja dobija se

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}E\bar{V}(x(t)) &\le e^{\lambda t}E\bar{V}(x(t)) + E\bar{V}_1(x(t)) + E\bar{V}_2(x(t))\\ &\le \bar{V}(x(0)) + \bar{V}_1(x(0)) + \bar{V}_2(x(0)) + \int_0^t Ke^{\lambda s}\,ds\\ &\le \bar{V}(x(0)) + \bar{V}_1(x(0)) + \bar{V}_2(x(0)) + K\lambda^{-1}e^{\lambda t},\end{aligned}$$

pa je

$$\limsup_{t\to\infty} E\bar{V}(x(t)) \leq K\lambda^{-1}.$$

Kako je

$$|x(t)|^\mu = \left|\sum_{i=1}^{d} x_i^2(t)\right|^{\frac{\mu}{2}} \leq d^{\frac{\mu}{2}} \max_{1\leq i\leq d} x_i^\mu(t) \leq d^{\frac{\mu}{2}} \sum_{i=1}^{d} x_i^\mu(t) = d^{\frac{\mu}{2}}\ \bar{V}(x(t)),$$

sledi

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^\mu \leq \limsup_{t\to\infty} E\left(d^{\frac{\mu}{2}}\bar{V}(x(t))\right) \leq d^{\frac{\mu}{2}}K\lambda^{-1}.$$

Prema tome, ova lema je dokazana ako je $C = d^{\frac{\mu}{2}}K\lambda^{-1}$. $\diamondsuit$

Napomena 4.3.1 Funkcije $K_{ij}(t) \in C([-\infty,0]; R_+^d)$, $i,j = 1,\ldots,d$ se ponekad nazivaju težinskim funkcijama. Zahtev (4.11) redukuje efekat celokupnog životnog ciklusa vrsta na buduća stanja.

Teorema 4.3.1 *Neka važe uslovi Leme 4.3.1. Tada je rešenje sistema* (4.5) *stohastički ultimativno ograničeno.*

Dokaz. Na osnovu Leme 4.3.1, za fiksirano $\theta \in (0, 2\min_i \theta_{ii} \wedge 1)$ može se naći $C > 0$ takvo da je

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^\theta \leq C.$$

Na osnovu nejednakosti Markova se dobija

$$P\{|x(t)| > H\} \leq \frac{E|x(t)|^\theta}{H^\theta}.$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, neka je $H = (C/\varepsilon)^{1/\theta}$. Stoga je

$$\limsup_{t\to\infty} P\{|x(t)| > H\} \leq \varepsilon,$$

odakle sledi

$$\limsup_{t\to\infty} P\{|x(t)| \leq H\} \geq 1-\varepsilon,$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

4.4 Asimptotska ocena momenata

Imajući u vidu složenost sistema (4.5), prirodno je proučavati asimptotsku ocenu momenata rešenja. Naredna teorema pokazuje ograničenost p-tog momenta rešenja usrednjenog po vremenu za $p \in (0, 2\max_i \theta_{ii})$.

Teorema 4.4.1 *Neka važe uslovi Teoreme 4.2.1 i neka je $p \in (0, 2\max_i \theta_{ii})$. Tada postoji pozitivna konstanta C, nezavisna od početnog uslova $\{x(s) : -\infty < s \leq 0\}$ koji zadovoljava (4.6), tako da za rešenje $x(t)$ sistema (4.5) važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^p(s)ds \leq C.$$

Dokaz. Ako se podje od relacije (4.9), gde je $F(x(t))$ dato sa (4.10), tada je

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t)) + V_2(x(t))] \leq F(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \tag{4.12}$$

Neka je

$$F_1(x(t)) = F(x(t)) + \sum_{i=1}^d x_i^p(t).$$

Kako važe (4.7) i (4.8) i kako je $p \in (0, 2\max_i \theta_{ii})$, zaključuje se, slično dokazu Teoreme 4.2.1, da je $F_1(x)$ ograničeno. Dakle, postoji pozitivna konstanta C takva da je $F_1(x) \leq C$, pa je

$$F(x(t)) \leq C - \sum_{i=1}^d x_i^p(t).$$

Ako se iskoristi ova ocena, (4.12) postaje

$$\begin{aligned} d[V(x(t)) &+ V_1(x(t)) + V_2(x(t))] \\ &\leq \left[C - \sum_{i=1}^d x_i^p(t)\right] dt + \gamma \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Integracijom obe strane gornje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge t$ i izračunavanjem očekivanja se dobija

$$\begin{aligned} EV(x(\tau_n \wedge t)) &+ EV_1(x(\tau_n \wedge t)) + EV_2(x(\tau_n \wedge t)) \\ &\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + V_2(x(0)) + CE(\tau_n \wedge t) - E\int_0^{\tau_n \wedge t} \sum_{i=1}^d x_i^p(s)ds. \end{aligned}$$

Ako $n \to \infty$, tada je

$$E\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^p(s)\, ds \leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + V_2(x(0)) + Ct,$$

odakle tvrdjenje direktno sledi. $\diamondsuit$

Posledica 4.4.1 *Neka su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 4.4.1. Tada postoji pozitivna konstanta C', nezavisna od početnog uslova $\{x(s) : -\infty < s \leq 0\}$ koji zadovoljava (4.6), tako da za rešenje $x(t)$ sistema (4.5) važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t |x(s)|^p ds \leq C'.$$

Dokaz. Kako je $|x(t)|^p \leq d^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^d x_i^p(t)$, dokaz direktno sledi iz Teoreme 4.4.1 gde je $C' = Cd^{\frac{p}{2}}$. $\diamondsuit$

4.5 Asimptotsko ponašanje trajektorija

U ovom poglavlju se razmatraju granične nejednakosti za stope rasta veličina populacija. U dokazima ovih svojstava se primenjuje eksponencijalna martingalna nejednakost (Teorema 1.1.1).

Teorema 4.5.1 *Neka važe uslovi Teoreme 4.2.1. Tada za proizvoljan početni uslov* $\{x(t) : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R_+^d)$ *koji zadovoljava* (4.6)*, za rešenje* $x(t)$ *sistema* (4.5) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\ln\prod_{i=1}^d x_i(t) + \frac{\hat{\sigma}}{4}\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^{2\theta_{ii}}(s)ds\right] \leq K \quad s.i.,$$

gde je $\hat{\sigma} = \min_i \sigma_{ii}^2$.

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$ za svako $i = 1, \dots, d$, sledi

$$\begin{aligned} d\ln x_i(t) \leq \Bigg[r_i + \sum_{j=1}^d \Bigg(&|a_{ij}|x_j^{\alpha_{ij}}(t) + |b_{ij}|x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}) \\ &+ |c_{ij}|\int_{-\infty}^0 K_{ij}(s)x_i^{\gamma_{ij}}(t+s)x_j^{\delta_{ij}}(t+s)ds\Bigg) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(t)\Bigg]dt \\ &+ \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Tada se može definisati funkcional Lyapunova $\tilde{V}(x_i) = \ln x_i + \tilde{V}_1(x_i) + \tilde{V}_2(x_i)$, pri čemu su funkcionali $\tilde{V}_1$ i $\tilde{V}_2$ izabrani na takav način da eliminišu članove sa kašnjenjem,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(x_i(t)) &= \sum_{j=1}^d |b_{ij}|\int_{t-\tau_{ij}}^t x_j^{\beta_{ij}}(s)ds, \\ \tilde{V}_2(x_i(t)) &= \sum_{j=1}^d |c_{ij}|\int_{-\infty}^0 K_{ij}(s)\int_{t+s}^t x_i^{\gamma_{ij}}(u)x_j^{\delta_{ij}}(u)du\,ds. \end{aligned}$$

Dalje sledi

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(x_i(t)) \leq \Bigg[r_i + \sum_{j=1}^d \Bigg(&|a_{ij}|x_j^{\alpha_{ij}}(t) + |b_{ij}|x_j^{\beta_{ij}}(t) + |c_{ij}|x_i^{\gamma_{ij}}(t)x_j^{\delta_{ij}}(t) \\ &- \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(t)\Bigg)\Bigg]dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Integracijom od 0 do t se dobija

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x_i(t)) &\leq A_i + M_i(t)\\ &+ \int_0^t \left[r_i + \sum_{j=1}^d \left(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s)\right)\right] ds,\end{aligned}$$

gde je $A_i = \ln x_i(0) + \tilde{V}_1(x_i(0)) + \tilde{V}_2(x_i(0))$, $i = 1, \dots, d$, i

$$M_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} x_j^{\theta_{ij}}(s) dw_j(s)$$

je realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M_i(t), M_i(t)\rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) ds.$$

Neka je $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ proizvoljno. Tada za svaki ceo broj $n \geq 1$, primena eksponencijalne martingalne nejednakosti implicira

$$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq n} \left[M_i(t) - \frac{\varepsilon}{2}\langle M_i(t), M_i(t)\rangle\right] \geq \frac{2\ln n}{\varepsilon}\right\} < \frac{1}{n^2}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, na osnovu Borel-Cantellijeve leme sledi da postoji $\Omega_i \subset \Omega$ pri čemu je $P(\Omega_i) = 1$, tako da se za svako $\omega \in \Omega_i$ može naći ceo broj $n_i = n_i(\omega)$ tako da

$$M_i(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\langle M_i(t), M_i(t)\rangle + \frac{2\ln n}{\varepsilon}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i$, $i = 1, \dots, d$. Odatle sledi

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x_i(t)) \leq A_i + \frac{2\ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \bigg[r_i + \sum_{j=1}^d \bigg(&|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s)\\ &- \frac{1-\varepsilon}{2}\sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s)\bigg)\bigg] ds\end{aligned}$$

za $0 \leq t \leq n_i$ i $n \geq n_i$ kad god je $\omega \in \Omega_i$. Neka je $\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^d \Omega_i$. Očigledno je da je $P(\Omega_0) = 1$. Štaviše, za svako $\omega \in \Omega_0$ neka je $n_0 = \max\{n_i(\omega) : i = 1, \dots, d\}$. Tada za svako $\omega \in \Omega_0$ iz poslednje nejednakosti sledi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d \tilde{V}(x_i(t)) \leq \sum_{i=1}^d A_i + \frac{2d\ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \sum_{i=1}^d \bigg[r_i + \sum_{j=1}^d \bigg(&|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s)\\ &+ |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2}\sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s)\bigg)\bigg] ds.\end{aligned}$$

Može se primetiti da je

$$\sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) \geq \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ii}^2 x_i^{2\theta_{ii}}(s) \geq \hat{\sigma} \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s).$$

Tada se dobija

$$\begin{aligned}\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{2d \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \Big[r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s) \\ + |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) \Big) - \frac{(1-\varepsilon)\hat{\sigma}}{2} x_i^{2\theta_{ii}}(s) \Big] ds,\end{aligned}$$

što se može zapisati

$$\ln \prod_{i=0}^{d} x_i(t) + \frac{(1-2\varepsilon)\hat{\sigma}}{4} \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s) ds \leq \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{2d \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \tilde{F}(x(s)) ds,$$

gde je

$$\tilde{F}(x(s)) = \sum_{i=1}^{d} \Big[r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) \Big) - \frac{\hat{\sigma}}{4} x_i^{2\theta_{ii}}(s) \Big].$$

Kako važe uslovi (4.7) i (4.8), postoji pozitivna konstanta K takva da je $\tilde{F}(x(s)) \leq K$. Ako je $\omega \in \Omega_0$, tada

$$\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{(1-2\varepsilon)\hat{\sigma}}{4} \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s) ds \leq \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{2d \ln n}{\varepsilon} + Kt$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Za svako $\omega \in \Omega_0$, ako je $n-1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$, dobija se

$$\frac{1}{t}\Big[\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{(1-2\varepsilon)\hat{\sigma}}{4} \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s) ds \Big] \leq \frac{1}{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{2d \ln n}{\varepsilon} \Big] + K,$$

odakle sledi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big[\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{(1-2\varepsilon)\hat{\sigma}}{4} \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s) ds \Big] \leq K.$$

Konačno, ako $\varepsilon \to 0$ dobija se

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big[\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{\hat{\sigma}}{4} \int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s) ds \Big] \leq K.$$

čime je teorema dokazana. $\diamondsuit$

Teorema 4.5.2 *Neka važe uslovi Teoreme 4.2.1 i neka je $\theta_{ii} = \theta$, $i = 1, \ldots, d$. Tada za proizvoljan početan uslov $\{x(t) : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R_+^d)$ koji zadovoljava (4.6), za rešenje $x(t)$ sistema (4.5) važi*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t}\left[\ln|x(t)| + \frac{\hat{\sigma}}{4d^{1+\theta}}\int_0^t |x(s)|^{2\theta} ds\right] \leq K \quad s.i.,$$

gde je $\hat{\sigma} = \min_i \sigma_{ii}^2$.

Dokaz. Neka je data funkcija Lyapunova $\breve{V}_1(x) = \sum_{i=1}^d x_i$. Primenom formule Itôa na $\breve{V}(x(t)) = \ln \breve{V}_1(x(t)) + \breve{V}_2(x(t)) + \breve{V}_3(x(t))$, gde su nenegativni funkcionali

$$\breve{V}_2(x(t)) = \sum_{i,j=1}^d |b_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^t x_j^{\beta_{ij}}(s)ds \quad \text{i}$$

$$\breve{V}_3(x(t)) = \sum_{i,j=1}^d |c_{ij}| \int_{-\infty}^0 K_{ij}(s) \int_{t+s}^t x_i^{\gamma_{ij}}(u)x_j^{\delta_{ij}}(u)du\, ds$$

izabrani tako da eliminišu članove sa kašnjenjem, uzimajući u obzir da je $x_i(t) \leq \breve{V}_1(x(t))$, sledi

$$\begin{aligned}\breve{V}(x(t)) \leq A + &\int_0^t \sum_{i=1}^d \left[r_i + \sum_{j=1}^d \Big(|a_{ij}|x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}|x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}|x_i^{\gamma_{ij}}(s)x_j^{\delta_{ij}}(s)\Big)\right] ds \\ &- \int_0^t \frac{1}{2\breve{V}_1^2(x(s))} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2 x_i^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s)ds + M(t),\end{aligned}$$

gde je $A = \ln \breve{V}_1(x(0)) + \breve{V}_2(x(0)) + \breve{V}_3(x(0))$. Pritom je

$$M(t) = \int_0^t \frac{1}{\breve{V}_1(x(s))} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} x_i(s) x_j^{\theta_{ij}}(s)dw_j(s)$$

realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M(t), M(t)\rangle = \int_0^t \frac{1}{\breve{V}_1^2(x(s))} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2 x_i^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s)ds.$$

Slično kao u Teoremi 4.5.1,

$$\begin{aligned}\breve{V}(x(t)) \leq A &+ \frac{2\ln n}{\varepsilon} \\ &+ \int_0^t \sum_{i=1}^d \left[r_i + \sum_{j=1}^d \Big(|a_{ij}|x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}|x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}|x_i^{\gamma_{ij}}(s)x_j^{\delta_{ij}}(s)\Big)\right] ds \\ &- \frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^t \frac{1}{\breve{V}_1^2(x(s))} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2 x_i^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s)ds\end{aligned}$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_0$. Kako je $\theta_{ii} = \theta$, $i = 1, \ldots, d$, koristeći Hölderovu nejednakost je

$$\frac{1}{\breve{V}_1^2(x)} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_i^2 x_j^{2\theta_{ij}} \ge \frac{1}{\breve{V}_1^2(x)} \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ii}^2 x_i^{2(1+\theta_{ii})} ds \ge \frac{\hat{\sigma} \sum_{i=1}^{d} x_i^{2(1+\theta)}}{d|x|^2} \ge \frac{\hat{\sigma}}{d^{1+\theta}} |x|^{2\theta}.$$

Kako je $|x| \le \breve{V}_1(x)$, sledi da je

$$\begin{aligned}\ln|x(t)| \le A &+ \frac{2\ln n}{\varepsilon} \\ &+ \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \left[r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) \Big) \right] ds \\ &- \frac{1-\varepsilon}{2} \int_0^t \frac{\hat{\sigma}}{d^{1+\theta}} |x(s)|^{2\theta} ds.\end{aligned}$$

Ostatak dokaza je sličan kao u Teoremi 4.5.1, pa će biti izostavljen. $\diamondsuit$

Posledica 4.5.1 *Neka važe svi uslovi Teoreme 4.5.2. Tada za rešenje sistema* (4.5) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left[\ln \sum_{i=1}^{d} x_i(t) + \frac{\hat{\sigma}}{4d^{1+\theta}} \int_0^t |x(s)|^{2\theta} ds \right] \le \bar{K} \quad s.i.$$

Dokaz. Kako je $\sum_{i=1}^{d} x_i(t) \le \sqrt{d} \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2(t) \right)^{1/2} = \sqrt{d}\,|x(t)|$ za svako $x \in R_+^d$, dokaz direktno sledi na osnovu Teoreme 4.5.2. $\diamondsuit$

Teorema 4.5.3 *Neka važe uslovi Teoreme 4.2.1 i uslov* (4.11). *Tada za proizvoljan početan uslov* $\{x(t) : -\infty < t \le 0\} \in C((-\infty, 0], R_+^d)$ *koji zadovoljava* (4.6), *rešenje* $x(t)$ *sistema* (4.5) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \le d \quad s.i.$$

Dokaz. Primena formule Itôa na $\hat{V}(x_i(t)) = e^{\lambda t} \ln x_i(t) + \hat{V}_1(x_i(t)) + \hat{V}_2(x_i(t))$ za svako $i = 1, \ldots, d$ implicira

$$\begin{aligned}d\hat{V}(x_i(t)) \le d\hat{V}_1(x_i(t)) + d\hat{V}_2(x_i(t)) + e^{\lambda t} \Bigg[&\lambda \ln x_i(t) + r_i \\ &+ \sum_{j=1}^{d} \left(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(t) + |b_{ij}| x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}) + |c_{ij}| \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) x_i^{\gamma_{ij}}(t+s) x_j^{\delta_{ij}}(t+s) ds \right) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(t) \Bigg] dt + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t),\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\hat{V}_1(x_i(t)) = \sum_{j=1}^{d} |b_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^{t} e^{\lambda(s+\tau_{ij})} x_j^{\beta_{ij}}(s) ds,$$

$$\hat{V}_2(x_i(t)) = \sum_{j=1}^{d} |c_{ij}| \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s) \int_{t+s}^{t} e^{\lambda(u-s)} x_i^{\gamma_{ij}}(u) x_j^{\delta_{ij}}(u) du\, ds.$$

Primenom uslova (4.11) se dobija

$$\hat{V}(x_i(t)) \le B_i + M_i(t) + \int_0^t e^{\lambda s} \Big[\lambda \ln x_i(s) + r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| e^{\lambda \tau_{ij}} x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| \bar{K}_{ij} x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) \Big) \Big] ds,$$

gde je $B_i = \ln x_i(0) + \hat{V}_1(x_i(0)) + \hat{V}_2(x_i(0))$, a

$$M_i(t) = \int_0^t e^{\lambda s} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} x_j^{\theta_{ij}}(s) dw_j(s)$$

je realan neprekidan lokalni martingal sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = \int_0^t e^{2\lambda s} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) ds.$$

Neka je $\theta > 1$ i $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno. Tada za svako celobrojno $n \ge 1$, na osnovu eksponencijalne martingalne nejednakosti i Borel–Cantellijeve leme, slično kao u dokazu Teoreme 4.5.1, dobija se

$$M_i(t) \le \frac{\varepsilon}{2e^{\lambda n}} \langle M_i(t), M_i(t) \rangle + \frac{\theta e^{\lambda n}}{\varepsilon} \ln n$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Prema tome,

$$\hat{V}(x_i(t)) \le B_i + \frac{\theta e^{\lambda n}}{\varepsilon} \ln n + \int_0^t e^{\lambda s} \Big[\lambda \ln x_i(s) + r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| e^{\lambda \tau_{ij}} x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| \bar{K}_{ij} x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) \Big) \Big] ds$$

za $0 \le t \le n_i$ i $n \ge n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Odatle sledi

$$\sum_{i=1}^{d} e^{\lambda t} \ln x_i(t) \le \sum_{i=1}^{d} B_i + \frac{\theta d e^{\lambda n}}{\varepsilon} \ln n + \int_0^t e^{\lambda s} \sum_{i=1}^{d} \Big[\lambda \ln x_i(s) + r_i + \sum_{j=1}^{d} \Big(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(s) + |b_{ij}| e^{\lambda \tau_{ij}} x_j^{\beta_{ij}}(s) + |c_{ij}| \bar{K}_{ij} x_i^{\gamma_{ij}}(s) x_j^{\delta_{ij}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) \Big) \Big] ds$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Kako je

$$\sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 x_j^{2\theta_{ij}}(s) \geq \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ii}^2 x_i^{2\theta_{ii}}(s) \geq \hat{\sigma} \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}},$$

to je

$$e^{\lambda t} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{d} B_i + \frac{\theta d e^{\lambda n}}{\varepsilon} \ln n + \int_0^t e^{\lambda s} F_1(x(s)) ds,$$

pri čemu je

$$F_1(x(t)) = \sum_{i=1}^{d} \Bigg[\lambda \ln x_i(t) + r_i + \sum_{j=1}^{d} \Bigg(|a_{ij}| x_j^{\alpha_{ij}}(t) + |b_{ij}| e^{\lambda \tau_{ij}} x_j^{\beta_{ij}}(t) + |c_{ij}| \bar{K}_{ij} x_i^{\gamma_{ij}}(t) x_j^{\delta_{ij}}(t) \Bigg) \Bigg] - \frac{(1-\varepsilon)\hat{\sigma}}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(t).$$

Pošto važi uslov $\max_i \theta_{ii} > \max_{i,j}\{\alpha_{ij}/2, \beta_{ij}, \gamma_{ij} + \delta_{ij}\}$, postoji pozitivna konstanta K takva da je $F_1(x(t)) \leq K$, pa važi

$$e^{\lambda t} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \leq \sum_{i=1}^{d} B_i + \frac{\theta d e^{\lambda n}}{\varepsilon} \ln n + K \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Štaviše, ako je $n-1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$, tada

$$\frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln(n-1)} \left[e^{-\lambda(n-1)} \sum_{i=1}^{d} B_i + \frac{\theta d e^{\lambda}}{\varepsilon} \ln n + \frac{K}{\lambda} \right],$$

odakle sledi da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq \frac{\theta d e^{\lambda}}{\varepsilon}.$$

Konačno, kada $\varepsilon \to 1$, $\theta \to 1$ i $\lambda \to 0$, dobija se

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \leq d,$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Teorema 4.5.4 *Neka važe uslovi Teoreme 4.2.1 i pretpostavka* (4.11). *Ako je* $\theta_{ii} = \theta$, $i = 1, \dots, d$, *tada za proizvoljan početan uslov* $\{x(t) : -\infty < t \leq 0\} \in C((-\infty, 0], R_+^d)$ *koji zadovoljava* (4.6), *za rešenje* $x(t)$ *sistema* (4.5) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leq 1 \quad s.i.$$

Dokaz. Za $x \in R_+^d$ neka je data funkcija Lyapunova $\breve{V}(x) = \sum_{i=1}^d x_i$. Ako se primeni formula Itôa na $e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t)) + \breve{V}_1(x(t)) + \breve{V}_2(x(t))$, pri čemu su nenegativni funkcionali $\breve{V}_1$ i $\breve{V}_2$ izabrani na sličan način kao i ranije,

$$\breve{V}_1(x(t)) = \sum_{i,j=1}^d |b_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^t e^{\lambda(s+\tau_{ij})} x_j^{\beta_{ij}}(s) ds,$$
$$\breve{V}_2(x(t)) = \sum_{i,j=1}^d |c_{ij}| \int_{-\infty}^0 K_{ij}(s) \int_{t+s}^t e^{\lambda(u-s)} x_i^{\gamma_{ij}}(u) x_j^{\delta_{ij}}(u) du\, ds,$$

do tvrdjenja se dolazi slično dokazu Teoreme 4.5.3. $\diamondsuit$

Teorema 4.5.4 pokazuje da za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji slučajna promenljiva $T = T(\omega) > 0$ takva da za $t \geq T$ važi

$$\frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{s.i.}$$

Dakle, $|x(t)| \leq t^{1+\varepsilon}$, $t \geq T$. Ako se sa A označi $A = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$, tada je

$$|x(t)| \leq A + t^{1+\varepsilon}, \ t \geq 0,$$

tj. $x(t)$ raste najviše polinomijalno sa redom veličine bliskim jedinici.

Potrebno je skrenuti pažnju na to da sve dosad navedene pretpostavke obezbedjuju samo potrebne, ali ne i dovoljne uslove pri kojima važe razmatrana tvrdjenja.

Kao dodatak prethodnim tvrdjenjima, istraživanja su pokazala da parametri $\bar{\theta}_i$, $i = 1, \dots d$ osnovnog Gilpin-Ayala modela (2.1) zavise od veličine posmatrane vrste. U [79] je pokazano da je za male organizme $\bar{\theta}_i$ manje od 1, a za krupnije veće od 1.

4.6 Primeri

Da bi se bolje razumeli dobijeni teorijski rezultati, dati su primeri sa numeričkom simulacijom koji ilustruju te rezultate.

Primer 4.6.1 Insekti igraju važnu ulogu u biološkim istraživanjima. Na primer, neke vrste voćne mušice *Drosophila* su organizmi koji se najčešće koriste kao modeli u biologiji, uključujući proučavanja u genetici, psihologiji, mikrobijalnoj patogenezi i evoluciji životnog ciklusa, jer je lako voditi brigu o njima, brzo se razmnožavaju i polažu veliki broj jaja. Da bi dobili preciznije podatke o dinamici sistema kompeticije izmedju dve vrste, Gilpin i Ayala [26] su proučavali *Drosophila willistoni* i *Drosophila pseudoobscura*. Oni su uveli odrasle mušice u željenom broju u 0.24-litarsku posudu koja je sadržala izmerenu količinu hrane. Eksperimentalne vrednosti njihovog osnovnog modela (2.1) koje su dobili su:

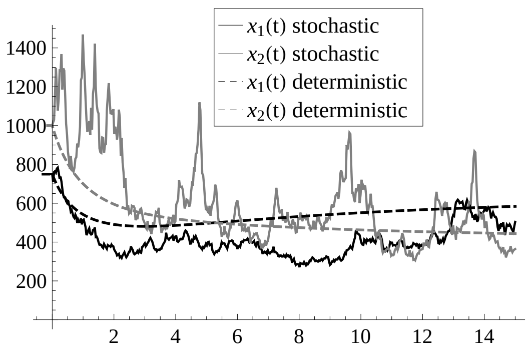
$$r_1 = 1.496, \ K_1 = 1332, \ \bar{\alpha}_{12} = 0.713, \ \bar{\theta}_1 = 0.35,$$
$$\bar{r}_2 = 4.513, \ K_2 = 791, \ \bar{\alpha}_{21} = 0.0869, \ \bar{\theta}_2 = 0.12.$$

Koristeći te rezultate dobijeni su sledeći parametri razmatranog modela (4.5):

$$
\begin{aligned}
&r_1 = 1.496, && r_2 = 4.513, \\
&a_{11} = \frac{r_1}{K_1^{\bar\theta_1}} = 0.12, && a_{22} = \frac{r_2}{K_2^{\bar\theta_2}} = 2.026, \\
&a_{12} = \frac{\bar\alpha_{12} r_1}{K_1} = 0.0008, && a_{21} = \frac{\bar\alpha_{21} r_2}{K_2} = 0.0005, \\
&\alpha_{11} = \bar\theta_1 = 0.35, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 1, && \alpha_{22} = \bar\theta_2 = 0.12.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

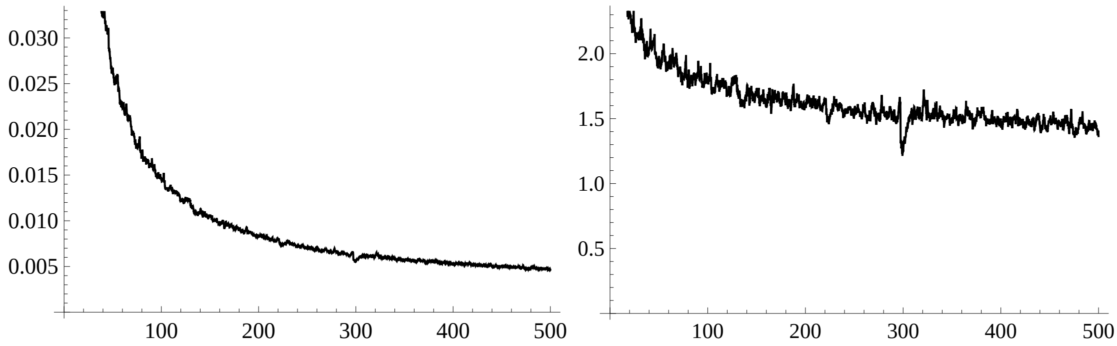
Reproduktivni kapacitet *Drosophila* značajno varira. Vreme razvoja vrsti *D. willistoni* i *D. pseudoobscura* varira od 7 do više od 60 dana i zavisi od faktora sredine kao što su temperatura, podloga za razmnožavanje i sl. U modelu (4.5) se pretpostavlja da je vreme razvoja vrste *D. willistoni* 100 dana ($\tau_{11} = 0.3$), a vrste *D. pseudoobscura* 50 dana ($\tau_{22} = 0.15$). Beskonačno kašnjenje predstavlja efekat celokupnog životnog ciklusa vrste na trenutnu stopu radjanja (npr. smanjenje plodnosti zbog nedostatka hrane, psihološkog stresa, itd.). Na osnovu ovog tvrdjenja predloženi su ostali parametri modela:

$$
\begin{aligned}
&b_{11} = 0.0009, && b_{22} = 0.003, \\
&\tau_{11} = 0.3, && \tau_{22} = 0.15, \\
&\beta_{11} = 0.4, && \beta_{22} = 0.3, \\
&c_{11} = 0.0001, && c_{22} = 0.002, \\
&K_{11}(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}},\ -\infty < t < 0, && K_{22}(t) = \frac{1}{5} e^{\frac{t}{5}},\ -\infty < t < 0, \\
&\gamma_{11} + \delta_{11} = 0.5, && \gamma_{22} + \delta_{22} = 0.25, \\
&\sigma_{11} = 0.005, && \sigma_{22} = 0.008, \\
&\theta_{11} = \theta_{22} = 0.6 && \\
&\text{sa početnim uslovima} && \\
&x_1(\theta) = 750,\ -\infty < \theta \le 0, && x_2(\theta) = 1000,\ -\infty < \theta \le 0.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$



Slika 4.1: Determinističke i stohastičke trajektorije Gilpin-Ayala modela (4.5) sa dve vrste sa parametrima (4.13) i (4.14) (vremenski korak $\Delta t = 0.03$)

Simulacija na Slici 4.1 pokazuje da do eksplozije ne dolazi ni u determinističkom ni u stohastičkom slučaju, što je u skladu sa prethodnim teorijskim razmatranjima. Simulacija na Slici 4.2 ilustruje teorijske rezultate za ocenu trajektorija iz Teoreme 4.5.1 i Teoreme 4.5.3.



Slika 4.2: Trajektorije funkcija $\frac{1}{t}\Big[\ln x_1(t)x_2(t) + \frac{\hat{\sigma}}{4}\int_0^t (x_1^{2\theta_{11}}(s) + x_2^{2\theta_{22}}(s))ds\Big]$ i $\frac{\ln x_1(t)x_2(t)}{\ln t}$ (vremenski korak $\Delta t = 0.1$)

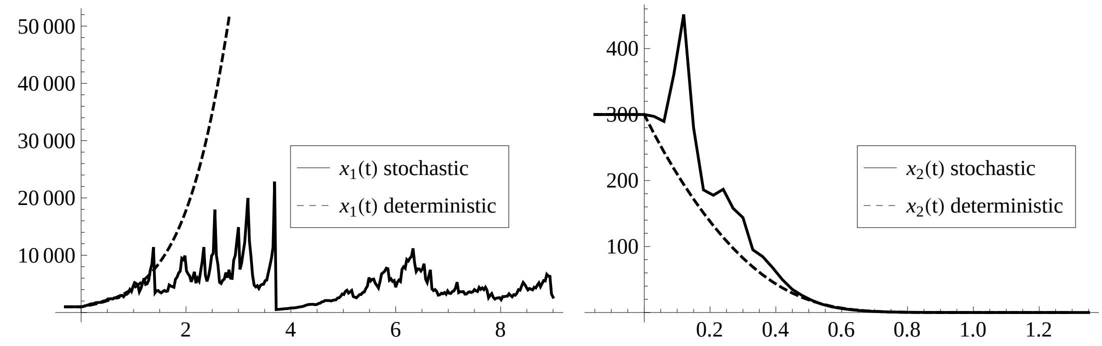
Primer 4.6.2 U osnovnom Gilpin-Ayala modelu (2.1) uslovi

$$K_1 < K_2/\bar{\alpha}_{21}, \quad \text{i} \quad K_2 < K_1/\bar{\alpha}_{12} \tag{4.15}$$

garantuju da rešenje neće eksplodirati u konačnom trenutku. Da bi se ilustrovao uticaj šuma sredine, modifikuju se eksperimentalne vrednosti tako da prvi uslov u (4.15) nije zadovoljen:

$$\begin{aligned}
&r_1 = 1.496, && r_2 = 4.513, \\
&a_{11} = 9.46 \times 10^{-9}, && a_{22} = 0.003, \\
&a_{12} = 0.00006, && a_{21} = 0.006, \\
&\alpha_{11} = 1.6, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 1, && \alpha_{22} = 1.1, \\
&b_{11} = 0.0003, && b_{22} = 0.002, \\
&\tau_{11} = 0.3, && \tau_{22} = 0.15, \\
&\beta_{11} = 0.4, && \beta_{22} = 0.6, \\
&c_{11} = 0.001, && c_{22} = 0.03, \\
&K_{11}(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}, \ -\infty < t < 0, && K_{22}(t) = \frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}}, \ -\infty < t < 0, \\
&\gamma_{11} + \delta_{11} = 0.5, && \gamma_{22} + \delta_{22} = 0.25. \\
&\text{sa početnim uslovima} && \\
&x_1(\theta) = 1000, \ -\infty < \theta < 0, && x_2(\theta) = 300, \ -\infty < \theta < 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Kao posledica dolazi do eksplozije prve posmatrane vrste u konačnom trenutku (videti Sliku 4.3 levo).



Slika 4.3: Determinističke i stohastičke trajektorije Gilpin-Ayala modela (4.5) sa dve vrste sa parametrima (4.16) (vremenski korak $\Delta t = 0.03$)

Medjutim, nakon uvodjenja šuma sredine sa parametrima

$$\sigma_{11} = 0.0004, \qquad \sigma_{22} = 0.008, \qquad \theta_{11} = \theta_{22} = 0.9, \tag{4.17}$$

može se primetiti da je eksplozija suzbijena, tj. ne dolazi do eksplozije (Slika 4.3).

U oba primera je korišćena Eulerova šema i integralni članovi su aproksimirani primenom tzv. *composite θ-rule as a quadrature* ([40], [81]).

Glava 5

Neautonomni stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom delu se razmatra neautonomni stohastički model sa vremenski zavisnim kašnjenjem, a izloženi rezultati su sadržani u [38]. U Poglavlju 5.1 se uvodi model, a u Poglavlju 5.2 se dokazuje da je rešenje razmatranog sistema globalno i pozitivno i ne eksplodira u konačnom trenutku. U Poglavljima 5.3-5.5 se razmatraju različita svojstva rešenja: stohastička ultimativna ograničenost, ocene momenata i ocene trajektorija. Istrebljenje, neperzistentnost i slaba perzistentnost se dokazuju u Poglavlju 5.6. U Poglavlju 5.7 se uvodi specijalan slučaj razmatranog sistema i opisuju njegova svojstva. U Poglavlju 5.8 je dat primer koji ilustruje izložene rezultate.

5.1 Uvodni pojmovi

Kod mnogih modela se pretpostavlja da su svi parametri koji odredjuju model konstantni u vremenu. Medjutim, u prirodi su parametri koji utiču na promenu veličine populacija zavisni od vremena, tako da ako model uzima u obzir te fluktuacije u vremenu, mora biti neautonoman. Deterministički neautonomni Gilpin-Ayala modeli su razmatrani od strane više autora, na primer [10, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 93, 97]), dok stohastički nije do sada razmatran, pa je proučavan u okviru ove disertacije. U ovoj glavi su izloženi novi originalni rezultati koji su sadržani u [38].

Deterministički Gilpin-Ayala model kompeticije [13, 97] za sistem koji se sastoji iz d interagujućih vrsta je oblika

$$dx_i(t) = x_i(t)\left[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\right]dt, \qquad (5.1)$$

$$i = 1, \dots, d,$$

gde je $x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^T$; $x_i(t)$ i $r_i(t)$ su veličina populacije i unutrašnja eksponencijalna stopa rasta i-te vrste u trenutku t, redom, $a_{ij}(t)$ i $b_{ij}(t)$ predstavljaju medjusobni uticaj jedinki različitih vrsta (za $i \neq j$) i medjusobni uticaj jedinki iste vrste (za $i = j$) u trenutku t, izrazi $b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t))$ predstavljaju tzv. *negative feedback crowding*, α_{ij}, β_{ij} su pozitivne konstante i predstavljaju nelinearnu meru interakcije izmedju jedinki različitih vrsti ili jedinki unutar neke vrste. Funkcije $r_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ su neprekidne, ograničene i nenegativne na $[0, \infty)$; $\tau_{ij}(t)$ su nenegativne, ograničene, neprekidno diferencijabilne funkcije na $[0, \infty)$; $\tau'_{ij}(t)$ su ograničene funkcije. Neka je $\tau = \max_{1 \leq i,j \leq d} \sup_{t \geq 0} \tau_{ij}(t)$.

U praksi se unutrašnja stopa rasta i-te vrste u trenutku t, $r_i(t)$, ocenjuje kao srednja vrednost registrovanih stopa rasta plus greška, tj. stopa $r_i(t)$ se može perturbovati na sledeći način

$$r_i(t) \to r_i(t) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t), \tag{5.2}$$

gde je $\sigma_{ij}(t)$ intenzitet šuma u trenutku t, pri čemu su funkcije $\sigma_{ij}(t)$ neprekidne, ograničene i nenegativne na $[0, \infty)$, a θ_{ij} su nenegativne konstante $(i, j = 1, \ldots, d)$. Nakon perturbacije deterministička jednačina (5.1) postaje stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa d vrsta

$$\begin{aligned} dx_i(t) = x_i(t) \Bigg\{ \Bigg[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d} \Big(a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) \Big) \Bigg] dt \qquad (5.3) \\ + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t) \Bigg\}, \quad i = 1, \ldots, d, \end{aligned}$$

koji će biti razmatran u ovoj glavi.

Neka je $C = C([-\tau, 0]; R_+^d)$ familija neprekidnih funkcija definisanih na $[-\tau, 0]$. Za svako dato $\varphi_i \in C$ početni uslovi su

$$x_i(\theta) = \varphi_i(\theta) > 0, \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| < \infty, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Naredne oznake će biti korišćene u nastavku ove, kao i naredne glave. Ako je $f(t)$ neprekidna i ograničena funkcija na $[0, \infty)$, definiše se

$$f^u = \sup_{t \in [0, \infty)} f(t), \quad f^l = \inf_{t \in [0, \infty)} f(t).$$

Za svaki niz konstanata (c_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, d)$ se definiše

$$(\bar{c}_{ij}) = \max_{1 \leq i,j \leq d} c_{ij}, \ (\bar{c}_{ii}) = \max_{1 \leq i \leq d} c_{ii}, \ (\tilde{c}_{ij}) = \min_{1 \leq i,j \leq d} c_{ij}, \ (\tilde{c}_{ii}) = \min_{1 \leq i \leq d} c_{ii}.$$

5.2 Neeksplozivnost

Koeficijenti sistema (5.3) su lokalno Lipschitz neprekidni, ali ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta. Zbog toga postoji mogućnost da rešenje sistema (5.3) eksplodira u konačnom trenutku. Sledeća teorema dokazuje da pri odredjenim uslovima do takve eksplozije neće doći u konačnom trenutku.

Teorema 5.2.1 *Neka je* $(\bar{\theta}_{ij}) > 0$. *Ako za proizvoljan početan uslov* $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \dots, d$, *važi*

$$(\bar{\tau}'^{u}_{ij}) < 1 \tag{5.4}$$

i ako je zadovoljen bilo koji od uslova:

1. $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} < 1$;
2. $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$, $(\bar{\theta}_{ii}) = (\bar{\theta}_{ij})$ *i* $(\bar{\theta}_{ii}) > \max_{i,j}\{\frac{\alpha_{ij}}{2}, \frac{\beta_{ij}}{2}\}$;
3. $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\bar{\alpha}_{ii}) = (\bar{\alpha}_{ij})$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > \max_{i,j}\{\beta_{ij}, 2\theta_{ij}\}$;
4. $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \geq 1$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$,

tada postoji jedinstveno rešenje $x(t)$, $t \geq -\tau$ *sistema* (5.3) *i to rešenje ostaje u* R^d_+ *sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Kako su koeficijenti sistema (5.3) lokalno Lipschitz neprekidni, za proizvoljan početan uslov $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$ postoji jedinstveno lokalno pozitivno rešenje $x(t)$ definisano na $t \in [0, \rho)$, gde je ρ trenutak eksplozije. Da bi se pokazalo da je rešenje globalno, trebalo bi dokazati da je $\rho = \infty$ s.i.

Neka je n_0 dovoljno veliko tako da svaka komponenta od $\varphi(t)$ leži unutar intervala $[n_0^{-1}, n_0]$. Za svako celobrojno $n \geq n_0$ definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_n = \inf\{t \in [0, \rho) : x_i(t) \notin (n^{-1}, n), \text{ za neko } i = 1, \dots, d\},$$

pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$. Očigledno, τ_n je rastuće kad $n \to \infty$. Ako je $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, tada je $\tau_\infty \leq \rho$ s.i. Ako je $\tau_\infty = \infty$ s.i., tada je $\rho = \infty$ s.i. i $x(t) \in R^d_+$ s.i. za svako $t \geq 0$. Drugim rečima, da bi se kompletirao dokaz potrebno je pokazati da je $\tau_\infty = \infty$ s.i. ili da za svako $T > 0$ važi $P(\tau_n \leq T) \to 0$ kada $n \to \infty$. Da bi se pokazalo ovo tvrdjenje, definiše se nenegativna C^2-funkcija $V : R^d_+ \to R_+$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{d} [x_i^\gamma - 1 - \gamma \ln x_i],$$

gde je $\gamma > 0$. Neka je $n \geq n_0$ i neka je $T > 0$ proizvoljno. Najpre, za $0 \leq t \leq \tau_n \wedge T$ primenom formule Itôa na $V(x(t))$ se dobija

$$\begin{aligned} dV(x(t)) = \gamma \sum_{i=1}^{d} \Bigg\{ (x_i^\gamma(t) - 1) \Bigg[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d} \Big(a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) \Big) \Bigg] \\ + \frac{1}{2} [(\gamma - 1) x_i^\gamma(t) + 1] \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t) \Bigg\} dt \\ + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) (x_i^\gamma(t) - 1) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Neka je $\gamma < 1$. Tada je

$$
\begin{aligned}
&dV(x(t)) \\
&\leq \gamma\Big[- d(\tilde{r}_i^l) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma}(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + (\bar{b}_{ij}^u)\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)) \\
&\quad + \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+2\theta_{ii}}(t)\Big]dt \\
&\quad + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
\end{aligned}
$$

Da bi se eliminisali izrazi sa kašnjenjem, uvodi se nenegativan funkcional

$$
V_1(x(t)) = \frac{\gamma(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} x_j^{\beta_{ij}}(s)ds. \tag{5.6}
$$

Primenom uslova (5.4) se dobija

$$
d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F(x(t))dt + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
F(x(t)) = \gamma\sum_{i=1}^{d}\Big[&(\bar{r}_i^u)x_i^{\gamma}(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{j=1}^{d} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{j=1}^{d} x_j^{\beta_{ij}}(t) \\
&+ \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2 x_i^{\gamma+2\theta_{ii}}(t)\Big] - \gamma d(\tilde{r}_i^l).
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

1. Neka je $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} \leq \gamma < 1$. Razlikuju se dva slučaja:

(a) Ako je $(\tilde{a}_{ii}^l) > 0$ ili $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) > 0$, tada postoji pozitivna konstanta K takva da je $F(x(t)) \leq K$, pa je

$$
d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq Kdt + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge T$ i izračunavanjem očekivanja dobija se

$$
\begin{aligned}
EV(x(\tau_n \wedge T)) &\leq EV(x(\tau_n \wedge T)) + EV_1(x(\tau_n \wedge T)) \\
&\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + KE(\tau_n \wedge T) \\
&\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + KT.
\end{aligned}
$$

Za svako $\omega \in \{\tau_n \leq T\}$ postoji neko i $(i = 1, \dots, d)$ takvo da $x_i(\tau_n, \omega) \notin (n^{-1}, n)$. Zbog toga je

$$V(x(\tau_n)) \geq x_i^\gamma(\tau_n) - 1 - \gamma \ln x_i(\tau_n) = \left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)$$

i sledi da je

$$\begin{aligned}\infty &> V(x(0)) + V_1(x(0)) + KT \geq EV(x(\tau_n \wedge T)) \\ &= P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n)) + P(\tau_n > T)V(x(T)) \geq P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n)) \\ &\geq P(\tau_n \leq T)\left[\left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)\right].\end{aligned}$$

Kako $(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)$ teži beskonačnosti kada $n \to \infty$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \leq T) = 0$, pa je i $P(\tau_\infty \leq T) = 0$. Kako je $T > 0$ proizvoljno, zaključuje se da je

$$P(\tau_\infty < \infty) = 0 \quad \text{i} \quad P(\tau_\infty = \infty) = 1,$$

čime je teorema dokazana.

(b) Ako je $(\tilde{a}_{ii}^l) = 0$ i $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) = 0$, korišćenjem Youngove nejednakosti (1.23) iz (5.7) se dobija

$$F(x(t)) \leq B_1 + B_2 \sum_{i=1}^d x_i^\gamma(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}B_1 &= -\gamma d(\tilde{r}_i^l) + d^2\left[(\bar{a}_{ij}^u)(\gamma - (\tilde{\alpha}_{ij})) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1 - (\bar{\tau}_{ij}'^u)}(\gamma - (\tilde{\beta}_{ij})) + \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}(\gamma - 2(\tilde{\theta}_{ij}))\right], \\ B_2 &= \gamma(\bar{r}_i^u) + d\left[(\bar{a}_{ij}^u)(\bar{\alpha}_{ij}) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)(\bar{\beta}_{ij})}{1 - (\bar{\tau}_{ij}'^u)} + (\bar{\sigma}_{ij}^u)^2(\bar{\theta}_{ij})\right].\end{aligned}$$

Kako je $x^\gamma \leq 2[x^\gamma - 1 - \gamma \ln x] + 2$ za $\gamma \geq 0$, sledi

$$F(x(t)) \leq K_1 + K_2 V(x(t)),$$

gde je $K_1 = B_1 + 2d\, B_2$ i $K_2 = 2B_2$. Tada je

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq [K_1 + K_2 V(x(t))]dt + \gamma \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge T$ i izračunavanjem očekivanja se dobija

$$\begin{aligned}EV(x(\tau_n \wedge T)) &\leq EV(x(\tau_n \wedge T)) + EV_1(x(\tau_n \wedge T)) \\ &\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + K_1 T + K_2 \int_0^T EV(x(\tau_n \wedge t))dt.\end{aligned}$$

Gronwall-Bellmanova lema implicira

$$EV(x(\tau_n \wedge T)) \leq [V(x(0)) + V_1(x(0)) + K_1 T]e^{K_2 T}.$$

Na sličan način kao u prvom slučaju, dobija se

$$\begin{aligned}\infty &> [V(x(0)) + V_1(x(0)) + K_1 T]e^{K_2 T} \geq EV(x(\tau_n \wedge T)) \\ &\geq P(\tau_n \leq T)\left[\left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)\right].\end{aligned}$$

Kada $n \to \infty$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \leq T) = 0$, pa samim tim i $P(\tau_\infty = \infty) = 1$. Dakle, prvi deo teoreme je dokazan.

2. Ako važe uslovi $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) > 0$, $(\bar{\theta}_{ii}) = (\bar{\theta}_{ij})$ i $(\bar{\theta}_{ii}) > \max_{i,j}\{\frac{\alpha_{ij}}{2}, \frac{\beta_{ij}}{2}\}$, na osnovu (5.7) sledi da postoji pozitivna konstanta $\tilde{K}$ takva da je $F(x(t)) < \tilde{K}$, pa se traženo tvrdjenje dobija slično kao u slučaju $1(a)$.

3. Neka je $\gamma \geq 1$. Da bi se iz (5.5) eliminisali izrazi sa kašnjenjem, koristi se isti nenegativni funkcional $V_1(x(t))$ dat sa (5.6). Tada je

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq \bar{F}(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}&\bar{F}(x(t)) \qquad (5.8)\\ &= \gamma\Bigg[-d(\tilde{r}_i^l) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{d} x_i^\gamma(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{\beta_{ij}}(t) \\ &\quad + \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) + \frac{\gamma-1}{2}(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2\sum_{i,j=1}^{d} x_i^\gamma(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t)\Bigg].\end{aligned}$$

Na osnovu uslova 3 zaključuje se da je $\bar{F}(x(t))$ ograničeno, tj. $\bar{F}(x(t)) \leq \check{K}$ za neku pozitivnu konstantu $\check{K}$. Kraj dokaza je sličan kao u slučaju $1(a)$.

4. Neka je $\gamma \geq \max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \geq 1$. Kako je $(\tilde{a}_{ii}^l) > 0$ i $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$, tada postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ takva da je $\bar{F}(x(t)) \leq \bar{K}$, pa tvrdjenje važi. $\diamondsuit$

Napomena 5.2.1 Ne razmatra se slučaj kada je $(\bar{\sigma}_{ij}^u) = 0$, jer se tada sistem (5.3) svodi na deterministički.

5.3 Ograničenost

Sa biološke tačke gledišta stohastička ultimativna ograničenost je poželjnije svojstvo od neeksplozivnosti. Prvo se pokazuje da je rešenje sistema (5.3) asimptotski ograničeno, a zatim da ima osobinu ultimativne ograničenosti.

Teorema 5.3.1 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Tada za:*

1. $0 < p < 1$, *ako je* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ *ili* $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$;
2. $p \geq 1$, *ako je* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$,

rešenje sistema (5.3) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} E\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \leq K(p), \tag{5.9}$$

gde je $K(p)$ *nezavisno od početnih podataka* $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$.

Dokaz. 1. Neka je $0 < p < 1$. Primena formule Itôa na $x_i^p(t)$, $i = 1, \ldots, d$ implicira

$$\begin{aligned} dx_i^p(t) &\leq p x_i^p(t)\Big[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) - \frac{1-p}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t)\Big]dt \\ &\quad + p x_i^p(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t)dw_j(t) \\ &\leq p x_i^p(t)\Big[r_i^u - a_{ii}^l x_i^{\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-p}{2}{\sigma_{ii}^l}^2 x_i^{2\theta_{ii}}(t)\Big]dt \\ &\quad + p x_i^p(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Razmatraju se sledeći slučajevi:

(a) Ako je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ i $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$, polazi se od nejednakosti

$$dx_i^p(t) \leq p x_i^p(t)\Big[r_i^u - a_{ii}^l x_i^{\alpha_{ii}}(t)\Big]dt + p x_i^p(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t)dw_j(t).$$

Otuda je

$$Ex_i^p(t) \leq x_i^p(0) + p\int_0^t E\Big[r_i^u x_i^p(s) - a_{ii}^l x_i^{p+\alpha_{ii}}(s)\Big]ds.$$

Na osnovu Hölderove nejednakosti sledi

$$\frac{dEx_i^p(t)}{dt} \leq p r_i^u E x_i^p(t) - p a_{ii}^l [E x_i^p(t)]^{\frac{p+\alpha_{ii}}{p}}.$$

Ako se označi $y(t) = Ex_i^p(t)$, tada je

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq p r_i^u y(t) - p a_{ii}^l (y(t))^{\frac{p+\alpha_{ii}}{p}}.$$

Rešenje jednačine

$$\frac{dz(t)}{dt} = p r_i^u z(t) - p a_{ii}^l (z(t))^{\frac{p+\alpha_{ii}}{p}}$$

je

$$z(t)=\left[\left((z(0))^{-\frac{\alpha_{ii}}{p}}-\frac{a^l_{ii}}{r^u_i}\right)e^{-\alpha_{ii}r^u_i t}+\frac{a^l_{ii}}{r^u_i}\right]^{-\frac{p}{\alpha_{ii}}},$$

pa ako se pusti da $t\to\infty$, tada

$$z(t)\to\left(\frac{r^u_i}{a^l_{ii}}\right)^{\frac{p}{\alpha_{ii}}}=K_i(p).$$

Medjutim, ako se krene od nejednakosti

$$dx^p_i(t)\le px^p_i(t)\left[r^u_i-\frac{1-p}{2}{\sigma^l_{ii}}^2x^{2\theta_{ii}}_i(t)\right]dt+px^p_i(t)\sum_{j=1}^d\sigma^2_{ij}(t)x^{2\theta_{ij}}_j(t)dw_j(t),$$

na sličan način se razmatra diferencijalna jednačina

$$\frac{dz_1(t)}{dt}=pr^u_iz_1(t)-\frac{p(1-p)}{2}{\sigma^l_{ii}}^2(z_1(t))^{\frac{p+2\theta_{ii}}{p}}$$

i kada $t\to\infty$ dobija se

$$z_1(t)\to\left(\frac{2r^u_i}{(1-p){\sigma^l_{ii}}^2}\right)^{\frac{p}{2\theta_{ii}}}=K^1_i(p).$$

Na osnovu teoreme uporedjenja za obične diferencijalne jednačine sledi da je $Ex^p_i(t)=y(t)\le\min\{z(t),z_1(t)\}$ i

$$\limsup_{t\to\infty}Ex^p_i(t)\le\min\{K_i(p),K^1_i(p)\},$$

odnosno

$$\limsup_{t\to\infty}E\sum_{i=1}^dx^p_i(t)\le K(p),$$

gde je $K(p)=\sum_{i=1}^d\min\{K_i(p),K^1_i(p)\}$. Time je ovaj deo teoreme dokazan.

(b) Ako je $(\tilde a^l_{ii})>0$ i $(\tilde\sigma^l_{ii})=0$, prateći proceduru iz (a) dokazuje se da je $\limsup_{t\to\infty}E\sum_{i=1}^dx^p_i(t)\le K(p)$, pri čemu je $K(p)=\sum_{i=1}^d\min K_i(p)$.

(c) Ako je $(\tilde a^l_{ii})=0$ i $(\tilde\sigma^l_{ii})>0$, slično kao u (a) dokazuje se da je $\limsup_{t\to\infty}E\sum_{i=1}^dx^p_i(t)\le K(p)$, gde je $K(p)=\sum_{i=1}^d\min K^1_i(p)$.

2. Neka je $p\ge1$. Primenjujući formulu Itôa na $e^tV(x)$ gde je $V(x)=\sum_{i=1}^dx^p_i$, dobija se

$$d(e^tV(x(t)))\le e^t\hat F(x(t))dt+pe^t\sum_{i,j=1}^d\sigma_{ij}(t)x^p_i(t)x^{\theta_{ij}}_j(t)dw_j(t),$$

gde je

$$\hat F(x(t))=p\sum_{i=1}^dx^p_i(t)\left[\frac{1}{p}+(\bar r^u_i)+\frac{p-1}{2}(\bar\sigma^u_{ij})^2\sum_{j=1}^dx^{2\theta_{ij}}_j(t)-(\tilde a^l_{ii})x^{\alpha_{ii}}_i(t)\right].$$

Za $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ i $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$ postoji pozitivna konstanta K zavisna od p takva da je $\hat{F}(x(t)) \leq K(p)$, pa je

$$d(e^t V(x(t))) \leq e^t K(p)dt + pe^t \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

odnosno,

$$e^t EV(x(t)) \leq V(x(0)) + K(p)(e^t - 1)$$

odakle direktno sledi (5.9). $\diamondsuit$

Posledica 5.3.1 *Neka važe pretpostavke Teoreme 5.3.1. Tada za proizvoljan početan uslov* $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$ *za rešenje sistema* (5.3) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \leq d^{\frac{p}{2}} K(p). \tag{5.10}$$

Dokaz. Kako je

$$E|x(t)|^p = E\bigg(\sum_{i=1}^{d} x_i^2(t)\bigg)^{p/2} \leq d^{\frac{p}{2}} E\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t),$$

tvrdjenje (5.10) direktno sledi na osnovu prethodne teoreme. $\diamondsuit$

Teorema 5.3.2 *Neka važe svi uslovi Teoreme 5.3.1. Tada je rešenje sistema* (5.3) *stohastički ultimativno ograničeno.*

Dokaz. Prema nejednakosti Chebysheva i Posledici 5.3.1 za $H > 0$ važi

$$P\Big\{|x(t)| > H\Big\} \leq \frac{E|x(t)|^2}{H^2} \leq \frac{K(2)}{H^2},$$

pa birajući dovoljno veliko H sledi da je ispunjeno (1.21). $\diamondsuit$

5.4 Ocena momenata

U ovom poglavlju se dokazuje da je p-ti moment rešenja sistema (5.3) usrednjen u vremenu asimptotski ograničen.

Teorema 5.4.1 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Tada za:*

1. $0<p<1+\max_i\{\alpha_{ii}, 2\theta_{ii}\}$, *ako je* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$, $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} < 1$;
2. $0 < p < 1 + (\bar{\alpha}_{ii})$, *ako je* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) = 0$, $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} < 1$;
3. $0 < p < 1 + 2(\bar{\theta}_{ii})$, *ako je* $(\tilde{a}^l_{ii}) = 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$, $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} < 1$;
4. $0 < p < 1 + 2(\bar{\theta}_{ii})$, *ako je* $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$, $(\bar{\theta}_{ii}) = (\bar{\theta}_{ij})$, $(\bar{\theta}_{ii}) > \max_{i,j}\{\frac{\alpha_{ij}}{2}, \frac{\beta_{ij}}{2}\}$;

5. *$p > 0$, ako je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\bar{\alpha}_{ii}) = (\bar{\alpha}_{ij})$, $(\bar{\alpha}_{ii}) > \max_{i,j}\{\beta_{ij}, 2\theta_{ij}\}$;*

6. *$p > 0$, ako je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \geq 1$, $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$,*

za proizvoljne početne uslove $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$ postoji pozitivna konstanta c takva da rešenje $x(t)$ sistema (5.3) zadovoljava

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^p(s)ds \leq c. \tag{5.11}$$

Dokaz. Ponavljanjem procedure iz Teoreme 5.2.1 primenom iste funkcije Lyapunova ako je $0 < \gamma < 1$, dobija se

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t), \tag{5.12}$$

gde je $F(x(t))$ dato sa (5.7).

Neka je

$$F_1(x(t)) = F(x(t)) + \sum_{i=1}^d x_i^p(t).$$

Uzimajući u obzir uslove 1, 2 ili 3, može se izabrati takvo γ da je $\max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, 2\theta_{ij}\} \leq \gamma < 1$, pri čemu je $p < \gamma + \max_i\{\alpha_{ii}, 2\theta_{ii}\}$, $p < \gamma + (\bar{\alpha}_{ii})$ ili $p < \gamma + 2(\bar{\theta}_{ii})$, respektivno, i zaključiti da je $F_1(x)$ ograničeno. Analogno, za proizvoljno $0 < \gamma < 1$ ako se uzme u obzir uslov 4, može se zaključiti da je $F_1(x)$ ograničeno. Dakle, postoji pozitivna konstanta c takva da je $F_1(x) \leq c$, pa je

$$F(x(t)) \leq c - \sum_{i=1}^d x_i^p(t).$$

Ako se primeni ova ocena, (5.12) postaje

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq \left[c - \sum_{i=1}^d x_i^p(t)\right]dt + \gamma \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).$$

Integracijom obe strane gornje nejednakosti od 0 do $\tau_n \wedge t$ i izračunavanjem očekivanja se dobija

$$\begin{aligned} &EV(x(\tau_n \wedge t)) + EV_1(x(\tau_n \wedge t)) \\ &\qquad \leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + cE(\tau_n \wedge t) - E\int_0^{\tau_n\wedge t} \sum_{i=1}^d x_i^p(s)ds. \end{aligned}$$

Ako $n \to \infty$, sledi da je

$$E\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^p(s)\, ds \leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + ct,$$

čime je teorema dokazana ako je bilo koji od uslova $1-4$ zadovoljen.

Za $\gamma \geq 1$, prateći prethodnu proceduru dobija se

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq \bar{F}(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

pri čemu je $\bar{F}(x(t))$ dato sa (5.8). Ako je $\bar{F}_1(x(t)) = \bar{F}(x(t)) + \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t)$, tada prema uslovu 5 za svako $p > 0$ možemo izabrati γ tako da je $\gamma > p$ i zaključiti da je $\bar{F}_1(x)$ ograničeno, odakle se tvrdjenje može dokazati kao u prethodnom slučaju.

Dokaz za uslov 6 je sličan prethodnom ako se izabere $\gamma \geq \max_{i,j}\{\frac{\alpha_{ij}}{2}, \frac{\beta_{ij}}{2}\} \geq 1$. $\diamondsuit$

Posledica 5.4.1 *Neka važe uslovi Teoreme 5.4.1. Tada postoji pozitivna konstanta C', nezavisna od bilo kojih početnih uslova $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$, takva da za rešenje $x(t)$ sistema* (5.3) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E \int_0^t |x(s)|^p ds \leq C'. \tag{5.13}$$

Dokaz. Kako je $|x(t)|^p \leq d^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t)$, dokaz direktno sledi na osnovu Teoreme 5.4.1 gde je $C' = cd^{\frac{p}{2}}$. $\diamondsuit$

S biološke tačke gledišta, ocene (5.10) i (5.13) ukazuju na to da će se u smislu statističke sredine i usrednjenja u vremenu veličina populacije bilo koje posmatrane vrste sa proizvoljnim početnim stanjem na kraju vratiti u granični opseg.

5.5 Ponašanje trajektorija

Teoreme u ovom poglavlju daju asimptotsku ocenu trajektorija rešenja sistema (5.3), tj. razmatraju se neke granične nejednakosti za stope rasta veličina populacija razmatranih vrsta koje pokazuju kako rešenje sistema (5.3) varira u R_+^d.

Teorema 5.5.1 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Za proizvoljne početne uslove $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$, postoji pozitivna konstanta K takva da rešenje sistema* (5.3) *ima svojstvo*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{t} \leq K \quad s.i. \tag{5.14}$$

Dokaz. Za svako $i = 1, \ldots, d$ primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$, se dobija

$$\ln x_i(t) \leq \ln x_i(0) + M_i(t) + \int_0^t \left[r_i(s) - \sum_{j=1}^{d} \left(a_{ij}(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s) \right) \right] ds, \tag{5.15}$$

gde je $M_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s)x_j^{\theta_{ij}}(s)dw_j(s)$ realan neprekidan lokalni martingal sa kvadratnom varijacijom $\langle M_i(t), M_i(t)\rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)ds$, koji se anulira u $t = 0$.

Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ i $\theta > 1$. Za svako celobrojno $n \geq 1$ na osnovu eksponencijalne martingalne nejednakosti sledi

$$P\left\{ \sup_{0\leq t\leq n} \left[M_i(t) - \frac{\varepsilon}{2}\langle M_i(t), M_i(t)\rangle\right] \geq \frac{\theta \ln n}{\varepsilon}\right\} \leq \frac{1}{n^\theta}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\theta}$ konvergira, primena Borel-Cantellijeve leme implicira da postoji $\Omega_i \subset \Omega$ za koje je $P(\Omega_i) = 1$, pri čemu se za svako $\omega \in \Omega_i$ može naći celobrojno $n_i = n_i(\omega)$ tako da je

$$M_i(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\langle M_i(t), M_i(t)\rangle + \frac{\theta \ln n}{\varepsilon},$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Dakle, (5.15) postaje

$$\ln x_i(t) \leq \ln x_i(0) + \frac{\theta \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \left[r_i(s) - \sum_{j=1}^d a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)\right]ds,$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$ kad je $\omega \in \Omega_i$. Neka je $\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^d \Omega_i$. Jasno, $P(\Omega_0) = 1$. Štaviše, za svako $\omega \in \Omega_0$ neka je $n_0 = \max\{n_i(\omega) : i = 1, \ldots, d\}$. Tada za svako $\omega \in \Omega_0$ iz poslednje nejednakosti sledi

$$\sum_{i=1}^d \ln x_i(t) \leq \sum_{i=1}^d \ln x_i(0) + \frac{\theta d \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \sum_{i=1}^d \left[r_i^u - a_{ii}^l x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2}{\sigma_{ii}^l}^2 x_i^{2\theta_{ii}}(s)\right] ds,$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Kako postoji pozitivna konstanta K takva da je

$$\sum_{i=1}^d \left[r_i^u - a_{ii}^l x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2}{\sigma_{ii}^l}^2 x_i^{2\theta_{ii}}(s)\right] ds \leq K$$

za svako $x \in R_+^d$, dobija se

$$\ln \prod_{i=1}^d x_i(t) \leq \ln \prod_{i=1}^d x_i(0) + \frac{\theta d \ln n}{\varepsilon} + Kt$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Prema tome, za svako $\omega \in \Omega_0$, ako je $n-1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$, dobija se da je

$$\frac{\ln \prod_{i=1}^d x_i(t)}{t} \leq \frac{1}{n-1}\left[\ln \prod_{i=1}^d x_i(0) + \frac{\theta d \ln n}{\varepsilon}\right] + K,$$

odakle sledi traženo tvrdjenje (5.14) kada $t \to \infty$. $\diamondsuit$

U nastavku se daju neke asimptotske ocene rešenja sistema (5.3), a dokazuju se primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti.

Teorema 5.5.2 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Ako je* $(\tilde{a}_{ii}^l) > 0$ *ili* $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) > 0$, *tada za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$ *za rešenje sistema* (5.3) *važi svojstvo*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^d x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i. \tag{5.16}$$

Dokaz. Za svako $i = 1, \ldots, d$, tvrdjenje (5.16) se dokazuje primenom formule Itôa na $e^{\delta t} \ln x_i(t)$ za $\delta > 0$ i ponavljanjem procedure iz prethodne teoreme. $\diamondsuit$

Teorema 5.5.3 *Neka važe pretpostavke Teoreme 5.3.1 i neka je* $\theta_{ij} = \theta$ *za svako* $i, j = 1, \ldots, d$. *Za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$, *postoji pozitivna konstanta* $\tilde{K}$ *takva da za rešenje* $x(t)$ *sistema* (5.3) *važe osobine*

$$\limsup_{t\to\infty} E \sup_{t\leq r\leq t+1} |x(r)| \leq \tilde{K} \tag{5.17}$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leq 1 \quad s.i. \tag{5.18}$$

Dokaz. Za $x \in R_+^d$ neka je

$$V(x) = \sum_{i=1}^d x_i.$$

Korišćenjem formule Itôa se dobija

$$\begin{aligned} dV(x(t)) = &\sum_{i=1}^d x_i(t) \Big[r_i(t) - \sum_{j=1}^d \Big(a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) \Big) \Big] dt \\ &+ \sum_{i=1}^d x_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t). \end{aligned}$$

Integracijom od t do r sledi

$$V(x(r)) \leq V(x(t)) + (\bar{r}_i^u) \int_t^r V(x(s)) ds + \int_t^r \sum_{i=1}^d x_i(s) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s) x_j^\theta(s) dw_j(s).$$

Odatle je

$$\begin{aligned} E \sup_{t\leq r\leq t+1} V(x(r)) \leq &\, EV(x(t)) + (\bar{r}_i^u) \int_t^{t+1} EV(x(s)) ds \\ &+ \sum_{j=1}^d E \sup_{t\leq r\leq t+1} \int_t^r \left(\sum_{i=1}^d \sigma_{ij}(s) x_i(s) x_j^\theta(s) \right) dw_j(s). \end{aligned}$$

Primenom nejednakosti Burkholder-Davis-Gundyja (1.3.4) i nejednakosti Höldera, a kako

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} x_j^{2\theta} \le \left(\sum_{j=1}^{d} x_j\right)^{2\theta} \le d^{2\theta}\sum_{j=1}^{d} x_j^{2\theta}$$

važi za svako $x \in R_+^d$, dobija se da je

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} E \sup_{t\le r\le t+1} \int_t^r \left(\sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(s) x_i(s) x_j^{\theta}(s)\right) dw_j(s) \\
&\qquad \le 4\sqrt{2d}\,(\bar{\sigma}_{ij}^u)\left(\int_t^{t+1} E\sum_{j=1}^{d} x_j^{2\theta}(s)\Big(\sum_{j=1}^{d} x_j(s)\Big)^2 ds\right)^{1/2} \\
&\qquad \le 4\sqrt{2}\,(\bar{\sigma}_{ij}^u) d^{\theta+2}\left(\int_t^{t+1} E\sum_{j=1}^{d} x_j^{2\theta+2}(s) ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Iz Teoreme 5.3.1 sledi

$$\limsup_{t\to\infty} E \sup_{t\le r\le t+1} V(x(r)) \le \tilde{K},$$

gde je $\tilde{K} = (1+(\bar{r}_i^u))K(1)+4\sqrt{2}\,(\bar{\sigma}_{ij}^u)d^{\theta+2}(K(2\theta+2))^{1/2}$. Kako je $|x(t)| \le \sum_{i=1}^{d} x_i(t)$, sledi (5.17).

Da bi se dokazao sledeći deo teoreme, polazi se od (5.17), pri čemu postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ takva da je

$$E \sup_{n\le t\le n+1} |x(t)| \le \bar{K}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, primenom nejednakosti Chebysheva se dobija

$$P\left(\sup_{n\le t\le n+1} |x(t)| > n^{1+\varepsilon}\right) \le \frac{\bar{K}}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Prema Borell-Cantellijevoj lemi, za skoro svako $\omega \in \Omega$ važi

$$\sup_{n\le t\le n+1} |x(t)| \le n^{1+\varepsilon}$$

za sve sem konačno mnogo n. Dalje, postoji $n_0(\omega)$ takvo da za skoro sve $\omega \in \Omega$, ako je $n \ge n_0$ i $n \le t \le n+1$, tada je

$$\frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \le \frac{(1+\varepsilon)\ln n}{\ln n} = 1+\varepsilon.$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{\ln t} \le 1+\varepsilon \quad s.i.$$

Konačno, ocena (5.18) se dobija kada $\varepsilon \to 0$, pa je time dokaz kompletiran. $\diamondsuit$

Tvrdjenje (5.18) pokazuje da totalna populacija ekosistema ne može da raste suviše brzo. Za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji slučajna promenljiva $T = T(\omega) > 0$ takva da je za $t \geq T$

$$\frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{s.i.}$$

Tada je $|x(t)| \leq t^{1+\varepsilon}$, $t \geq T$. Ako se uvede oznaka $A = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$, očigledno da je

$$|x(t)| \leq A + t^{1+\varepsilon}, \quad t \geq 0,$$

tj. rešenje $x(t)$ raste sa verovatnoćom jedan najviše polinomijalno sa redom veličine bliskim jedinici.

Posledica 5.5.1 *Pod uslovima Teoreme 5.5.3 važi*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\ln |x(t)|}{t} \leq 0 \quad s.i.$$

Dokaz. Kako je $\lim_{t \to \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, tvrdjenje direktno sledi. $\diamondsuit$

5.6 Istrebljenje i neperzistentnost

U proučavanju populacione dinamike istrebljenje i perzistentnost spadaju u važnija i interesantnija svojstva koja opisuju da li će populacija u nekom budućem periodu izumreti ili opstati.

Naredna teorema pokazuje važnu osobinu da izuzetno veliki intenzitet šuma sredine može dovesti do istrebljenja populacije.

Teorema 5.6.1 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Ako za neko i* ($i \in \{1, \ldots, d\}$) *važi* $\min_{1 \leq j \leq d} \theta_{ij} = 0$ *i*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} \right] ds < 0 \quad s.i. \tag{5.19}$$

tada će doći do istrebljenja i-te populacije sistema (5.3) *sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$, dobija se

$$\begin{aligned} \ln x_i(t) \leq \ln x_i(0) + &\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s) I_{\{\theta_{ij} \neq 0\}} \right] ds \\ &+ M_i^1(t) + M_i^2(t), \end{aligned} \tag{5.20}$$

pri čemu su

$$M_i^1(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} dw_j(s) \;\; \text{i} \;\; M_i^2(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) I_{\{\theta_{ij} \neq 0\}} dw_j(s)$$

realni neprekidni lokalni martingali koji se anuliraju u $t = 0$, sa kvadratnim varijacijama

$$\langle M_i^1(t), M_i^1(t)\rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} ds$$

i

$$\langle M_i^2(t), M_i^2(t)\rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s) I_{\{\theta_{ij}\neq 0\}} ds.$$

Kako je $\langle M_i^1(t), M_i^1(t)\rangle \leq (\bar{\sigma}_{ij}^u)^2 t$, prema strogom zakonu velikih brojeva za martingale je $\lim_{t\to\infty} \frac{M_i^1(t)}{t} = 0$.

S druge strane, za svako celobrojno $n \geq 1$, ako se primeni eksponencijalna martingalna nejednakost na martingal $M_i^2(t)$ dobija se

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq n}\left[M_i^2(t) - \frac{1}{2}\langle M_i^2(t), M_i^2(t)\rangle\right] \geq 2\ln n\right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergira, primena Borel-Cantellijeve leme implicira da postoji $\Omega_i \subset \Omega$ pri čemu je $P(\Omega_i) = 1$, tako da se za svako $\omega \in \Omega_i$ može naći celobrojno $n_i = n_i(\omega)$ za koje je

$$M_i^2(t) \leq \frac{1}{2}\langle M_i^2(t), M_i^2(t)\rangle + 2\ln n,$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$. Iz (5.20) sledi da

$$\ln x_i(t) \leq \ln x_i(0) + M_i^1(t) + 2\ln n + \int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right] ds$$

za $0 \leq t \leq n$, $n \geq n_i(\omega)$. Zbog toga je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right] ds < 0,$$

odakle se zaključuje da dolazi do istrebljenja i-te populacije sistema (5.3) sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

Iako je u Teoremi 5.6.1 eksponent Lyapunova negativan, to ne mora biti neophodan uslov da bi došlo do istrebljenja. Da bi se to pokazalo, primenjuje se LaSalleova teorema za stohastičke diferencijalne jednačine [62].

Neka je d-dimenzionalna stohastička diferencijalna jednačina

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dw(t) \tag{5.21}$$

definisana za $t \geq 0$ sa početnom vrednošću $x(0) \in R^d$, pri čemu je $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t))^T$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, $f : R^d \times \bar{R}_+ \to R^d$ i $g : R^d \times \bar{R}_+ \to R^{d\times m}$. Naredna pretpostavka je uvedena u [62].

Pretpostavka 5.6.1 *Za svaku početnu vrednost* $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$ *jednačina* (5.21) *ima jedinstveno rešenje* $x(t)$ *za* $t \geq 0$. *Štaviše, za svako* $h > 0$ *postoji konstanta* $K_h > 0$ *takva da je*

$$|f(x,t)| \vee |g(x,t)| \leq K_h \tag{5.22}$$

za svako $t \geq 0$ *i* $x \in R^d$, *gde je* $|x| \leq h$.

Naredna lema će se koristiti da bi se pokazalo da do istrebljenja dolazi pod odgovarajućim uslovima.

Lema 5.6.1 *[62] Neka važi Pretpostavka* 5.6.1. *Ako postoje funkcije* $V \in C^{2,1}(R^d \times \bar{R}_+; \bar{R}_+)$, $\gamma \in L^1(\bar{R}_+; \bar{R}_+)$ *i* $\omega \in C^{2,1}(R^d; \bar{R}_+)$ *takve da važi*

$$LV(x,t) \leq \gamma(t) - \omega(x), \ (x,t) \in R^d \times \bar{R}_+,$$

i

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf_{0\leq t<\infty} V(x,t) = \infty,$$

tada je $Ker(\omega) \neq \emptyset$ *i* $\lim_{t\to\infty} d(x(t), Ker(\omega)) = 0$ *s.i. za svako* $x(0) \in R^d$.

Sledeća teorema se dokazuje pomoću prethodne leme.

Teorema 5.6.2 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1, neka je* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ *i neka postoje konstante* $0 < \alpha_i \ll 1$, $i = 1, \ldots, d$ *takve da je*

$$\sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty \left[r_i(t) - \frac{1-\alpha_i}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(t) I_{\{\theta_{ij}=0\}} \right]^+ dt < \infty. \tag{5.23}$$

Tada za proizvoljne početne uslove $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$, *za rešenje* $x(t)$ *sistema* (5.3) *važi* $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ *s.i., tj. sve populacije će biti istrebljene sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Može se primetiti da sistem (5.3) zadovoljava Pretpostavku 5.6.1. Neka konstante α_i, $i = 1, \ldots, d$ zadovoljavaju uslove teoreme. Primenom formule Itôa na $x_i^{\alpha_i}(t)$ se dobija

$$\begin{aligned} dx_i^{\alpha_i}(t) \leq \alpha_i x_i^{\alpha_i}(t) \bigg(r_i(t) - \frac{1-\alpha_i}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} \bigg) - \alpha_i a_{ii}(t) x_i^{\alpha_i+\alpha_{ii}}(t) \\ + \alpha_i x_i^{\alpha_i}(t) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(t) x_j^{\theta_{ij}} dw_j(t). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Neka je

$$Z_i(t) = e^{-\alpha_i \int_0^t \left(r_i(s) - \frac{1-\alpha_i}{2} \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} \right) ds}, \quad i = 1, \ldots, d$$

i

$$\tilde{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{d} Z_i(t) x_i^{\alpha_i}.$$

Na osnovu (5.23) zaključuje se da je $V \in C^{2,1}(R^d \times \bar{R}_+; \bar{R}_+)$ i

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf_{0\le t<\infty} V(x,t) = \infty,$$

kao i da postoji konstanta $U_i > 0$ takva da je $Z_i(t) \ge U_i$. Primena formule Itôa na $\tilde{V}(x,t)$ daje

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(x,t) &= -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i Z_i(t) x_i^{\alpha_i}\Big(r_i(t) - \frac{1-\alpha_i}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\Big)ds + \sum_{i=1}^{d} Z_i(t) dx_i^{\alpha_i} \\ &\le -\sum_{i=1}^{d}\alpha_i a_{ii}(t) Z_i(t) x_i^{\alpha_i+\alpha_{ii}} dt + \sum_{i=1}^{d}\alpha_i Z_i(t) x_i^{\alpha_i}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{\theta_{ij}} dw_j(t) \\ &\le -\sum_{i=1}^{d}\alpha_i a_{ii}^l U_i x_i^{\alpha_i+\alpha_{ii}} dt + \sum_{i=1}^{d}\alpha_i Z_i(t) x_i^{\alpha_i}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t) x_j^{\theta_{ij}} dw_j(t). \end{aligned}$$

Sledi da je

$$L\tilde{V}(x,t) \le -\sum_{i=1}^{d}\alpha_i a_{ii}^l U_i x_i^{\alpha_i+\alpha_{ii}} =: -\omega(x),$$

pa na osnovu Leme 5.6.1 sledi da je $Ker(\omega) = \{(0,0,\ldots,0)^T$ i zaključuje se da je $\lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$ s.i., tj. sve populacije će biti istrebljene sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

U narednoj teoremi se odredjuje kritična vrednost izmedju slabe perzistentnosti i istrebljenja.

Teorema 5.6.3 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Ako je $a_{ii}^l > 0$, $\alpha_{ii} \ge 1$ i*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Big[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\Big] ds = 0 \quad s.i. \tag{5.25}$$

za neko $i = 1,\ldots,d$, tada je i-ta populacija sistema (5.3) neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan.

Dokaz. Neka je $a_{ii}^l > 0$ i $\alpha_{ii} \ge 1$ za neko $i = 1,\ldots,d$. Primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$ se dobija

$$\begin{aligned} \ln x_i(t) \le \ln x_i(0) &+ \int_0^t \Big[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s) I_{\{\theta_{ij}\neq 0\}}\Big] ds \\ &- a_{ii}^l \int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s) ds + M_i^1(t) + M_i^2(t), \end{aligned} \tag{5.26}$$

pri čemu su $M_i^1(t)$ i $M_i^2(t)$ isti realni neprekidni lokalni martingali kao u Teoremi 5.6.1 koji se anuliraju u $t=0$, sa odgovarajućim kvadratnim varijacijama.

Kao što je već rečeno, prema strogom zakonu velikih brojeva za martingale je $\lim_{t\to\infty}\frac{M_i^1(t)}{t}=0$. Otuda, za proizvoljno $\varepsilon>0$ postoji konstanta T_1 takva da je $\frac{M_i^1(t)}{t}\le\frac{\varepsilon}{4}$ za $t>T_1$.

Dalje, za svako celobrojno $n\ge 1$, ako se primeni eksponencijalna martingalna nejednakost na martingal $M_i^2(t)$, dobija se

$$M_i^2(t)\le\frac{1}{2}\langle M_i^2(t),M_i^2(t)\rangle+2\ln n,$$

za $0\le t\le n$ i $n\ge n_i(\omega)$ ($\omega\in\Omega_i$, $\Omega_i\subset\Omega$, $P(\Omega_i)=1$). Dakle, iz (5.26) sledi

$$\begin{aligned}\ln x_i(t)&\le\ln x_i(0)+\frac{\varepsilon t}{4}+2\ln n\\&+\int_0^t\left[r_i(s)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\sigma_{ij}^2(s)I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right]ds-a_{ii}^l\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds\end{aligned}\tag{5.27}$$

za $T_1\le t\le n$, $n\ge n_i(\omega)$.

Na osnovu uslova (5.25) postoji konstanta $T_2\ge T_1$ takva da je

$$\frac{1}{t}\int_0^t\left[r_i(s)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\sigma_{ij}^2(s)I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right]ds<\frac{\varepsilon}{4}$$

za $T_2\le t\le n$, $n\ge n_i(\omega)$. Može se primetiti da za dovoljno veliko t za koje je $T\le n-1\le t\le n$, $T\ge T_2$ i $n\ge n_i(\omega)$, važi $\frac{\ln n}{t}\le\frac{\varepsilon}{4}$. Prema tome, iz (5.27) sledi

$$\ln x_i(t)\le\ln x_i(0)+\varepsilon t-a_{ii}^l\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds\tag{5.28}$$

za $T\le n-1\le t\le n$ i $n\ge n_0$. Neka je $h_i(t)=\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds$. Kako je $\ln\left(\frac{dh_i(t)}{dt}\right)=\alpha_{ii}\ln x_i(t)$, iz (5.28) sledi

$$e^{\alpha_{ii}a_{ii}^l h_i(t)}dh_i(t)\le x_i^{\alpha_{ii}}(0)e^{\alpha_{ii}\varepsilon t}dt.$$

Integracijom ove nejednakosti od T do t se dobija

$$e^{\alpha_{ii}a_{ii}^l h_i(t)}\le e^{\alpha_{ii}a_{ii}^l h_i(T)}+a_{ii}^l\varepsilon^{-1}x_i^{\alpha_{ii}}(0)[e^{\alpha_{ii}\varepsilon t}-e^{\alpha_{ii}\varepsilon T}].$$

Logaritmovanje obe strane poslednje nejednakosti implicira

$$h_i(t)\le\frac{1}{\alpha_{ii}a_{ii}^l}\ln\left[e^{\alpha_{ii}a_{ii}^l h_i(T)}+a_{ii}^l\varepsilon^{-1}x_i^{\alpha_{ii}}(0)e^{\alpha_{ii}\varepsilon t}-a_{ii}^l\varepsilon^{-1}x_i^{\alpha_{ii}}(0)e^{\alpha_{ii}\varepsilon T}\right].$$

Dalje, primenom L'Hopitalovog pravila dobija se

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds\le\frac{\varepsilon}{a_{ii}^l}.$$

Kako je ε proizvoljno, kad $\varepsilon \to 0$ sledi da je $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds = 0$. Konačno, primenom nejednakosti Lyapunova se dobija

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x_i(s)ds \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{1-1/\alpha_{ii}}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t x_i^{\alpha_{ii}}(s)ds\right)^{1/\alpha_{ii}} = 0,$$

tj. i-ta populacija je neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

Teorema 5.6.4 *Neka važe uslovi Teoreme 5.2.1. Ako je $a_{ii}^l > 0$, $\alpha_{ii} \geq 1$ i*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right] ds > 0 \quad s.i. \tag{5.29}$$

za neko $i = 1,\ldots,d$, tada je i-ta populacija sistema (5.3) *slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Na osnovu Posledice 5.5.1 i činjenice da je $x_i \leq \sum_{i=1}^d x_i \leq d|x|$, sledi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(s)}{t} \leq 0 \ s.i. \tag{5.30}$$

Potrebno je dokazati da je $\limsup_{t\to\infty} x_i(t) > 0$ s.i. Ako ovo tvrdjenje ne bi važilo, tj. ako je $P(F) > 0$, pri čemu je $F = \{\limsup_{t\to\infty} x_i(t) = 0\}$, iz (5.26) se dobija

$$\begin{aligned}\frac{\ln x_i(t)}{t} &= \frac{\ln x_i(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right] ds \\ &\quad - \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{j=1}^d a_{ij}(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s) ds - \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{j=1}^d b_{ij}(s) x_j^{\beta_{ij}}(s-\tau_{ij}(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{2t}\int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) x_j^{2\theta_{ij}}(s) I_{\{\theta_{ij}\neq 0\}} ds + \frac{M_i^1(t)}{t} + \frac{M_i^2(t)}{t}.\end{aligned}$$

Za svako $\omega \in F$ je $\lim_{t\to\infty} x_i(t,\omega) = 0$, pa na osnovu zakona velikih brojeva za martingale sledi da je $\limsup_{t\to\infty} \frac{M_i^1(t)}{t} = 0$ i $\limsup_{t\to\infty} \frac{M_i^2(t)}{t} = 0$. Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) I_{\{\theta_{ij}=0\}}\right] ds > 0,$$

pa je $P(\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} > 0) > 0$, što je kontradiktorno sa pretpostavkom (5.30). Dakle, $\limsup_{t\to\infty} x_i(t) > 0$ s.i., tj. i-ta populacija je slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan. $\diamondsuit$

5.7 Specijalan slučaj sistema (5.3)

U ovom poglavlju se razmatra specijalan slučaj sistema (5.3) kada je $\theta_{ij} = 0$ za svako $i, j = 1, \ldots, d$, u sledećem obliku

$$dx_i(t) = x_i(t)\left\{\left[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\right]dt + \sigma_i(t)dw_i(t)\right\} \tag{5.31}$$

i dokazuje se da je rešenje ovog sistema pozitivno i da ne eksplodira u konačnom trenutku, ali pod uslovima koji su slabiji od uslova koji važe za sistem (5.3). U sledećoj teoremi su iskazana svojstva sistema (5.31) koja su slična onima koja važe za rešenje sistema (5.3) i koja su data teoremama iz Poglavlja 5.1-5.6.

Teorema 5.7.1 *Neka je*

$$(\bar{\tau}'^{u}_{ij}) < 1. \tag{5.32}$$

Tada za proizvoljne početne uslove $\{\varphi_i(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, $i = 1, \ldots, d$ *važe sledeća tvrdjenja:*

(a) Postoji jedinstveno rešenje $x(t)$, $t \geq -\tau$ *sistema* (5.31) *i to rešenje ostaje u* R^d_+ *sa verovatnoćom jedan.*

(b) Neka je $p > 0$ *i* $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$. *Tada rešenje sistema* (5.31) *zadovoljava* (5.9), *gde je* $K(p)$ *nezavisno od početnih uslova i definisano je sa*

$$K(p) = \sum_{i=1}^{d} K_i(p) \quad i \quad K_i(p) = \begin{cases} \left(\frac{r_i^u}{a_{ii}^l}\right)^{p/\alpha_{ii}}, & 0 < p < 1, \\ \left(\frac{r_i^u + \frac{p-1}{2}\sigma_i^{u\,2}}{a_{ii}^l}\right)^{p/\alpha_{ii}}, & p \geq 1. \end{cases}$$

Ovo rešenje zadovoljava i (5.11).

(c) Rešenje sistema (5.31) *je stohastički ultimativno ograničeno.*

(d) Postoji pozitivna konstanta K *takva da rešenje sistema* (5.31) *zadovoljava* (5.14).

(e) Rešenje sistema (5.31) *ima svojstvo* (5.16).

(f) Neka je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$. *Tada postoji pozitivna konstanta* K *takva da rešenje* $x(t)$ *sistema* (5.31) *ima osobine* (5.17) *i* (5.18).

(g) Ako važi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{\sigma_i^2(s)}{2}\right] ds < 0 \quad s.i.$$

za neko $i = 1, \ldots, d$, *tada će* i*-ta populacija sistema* (5.3) *biti istrebljena sa verovatnoćom jedan.*

(h) Ako važi $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ *i postoje konstante* $0 < \alpha_i \ll 1$ $(i = 1, \ldots, d)$ *takve da je*

$$\sum_{i=1}^{d}\int_0^\infty \left[r_i(t) - \frac{(1-\alpha_i)\sigma_i^2(t)}{2}\right]^+ dt < \infty \quad s.i.,$$

tada će sve populacije sistema (5.31) biti istrebljene sa verovatnoćom jedan.

(i) Ako važi $a_{ii}^l > 0$, $\alpha_{ii} \leq 1$ *i*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{\sigma_i^2(s)}{2}\right] ds = 0 \quad s.i.$$

za neko $i = 1, \ldots, d$, *tada je* i*-ta populacija sistema* (5.31) *neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan.*

(j) Ako važi $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_i(s) - \frac{\sigma_i^2(s)}{2}\right] ds > 0$ *s.i. za neko* $i = 1, \ldots, d$, *tada je* i*-ta populacija sistema* (5.3) *slabo perzistentna sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Dokaz je na neki način modifikacija dokaza Teorema 5.2.1-5.6.4 za sistem (5.3), pa je data samo skica dokaza.

(a) Primenom C^2-funkcije $V(x) = \sum_{i=1}^d [x_i^\gamma - 1 - \gamma \ln x_i]$ za $\gamma > 0$ i ponavljajući proceduru iz dokaza Teoreme 5.2.1, dobija se

$$\begin{aligned} dV(x(t)) \leq \gamma \sum_{i=1}^d &\left[\frac{\sigma_i^2(t)}{2} - r_i(t) + \Big(r_i(t) + \frac{\gamma-1}{2}\sigma_i^2(t)\Big)x_i^\gamma(t) + \sum_{j=1}^d a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)\right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^d b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\right]dt + \gamma\sum_{i=1}^d \sigma_i(t)(x_i^\gamma(t)-1)dw_i(t). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Neka je $\gamma \geq \max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$. Razlikuju se dva slučaja:

I. Neka je $\gamma < 1$ i $(\bar{r}_i^u) < \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_i^l)^2$. Da bi se eliminisali izrazi sa kašnjenjem, uvodi se isti nenegativni funkcional $V_1(x(t))$ kao u Teoremi 5.2.1 i korišćenjem uslova (5.32) se dobija

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F_1(x(t))dt + \gamma\sum_{i=1}^d \sigma_i(t)(x_i^\gamma(t)-1)dw_i(t),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} F_1(x(t)) = \gamma\Bigg[&d\left(\frac{(\bar{\sigma}_i^u)^2}{2} - (\tilde{r}_i^l)\right) + \sum_{i,j=1}^d \left((\bar{a}_{ij}^u)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})}x_j^{\beta_{ij}}(t)\right) \\ &- \left(\frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_i^l)^2 - (\bar{r}_i^u)\right)\sum_{i=1}^d x_i^\gamma(t)\Bigg]. \end{aligned}$$

Kako je $\gamma \geq \max_{i,j}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$, postoji pozitivna konstanta k takva da je $F_1(x(t)) \leq k$. Ostatak dokaza je sličan slučaju 1(a) u Teoremi 5.2.1.

II. Neka je $\gamma < 1$ i $(\bar{r}_i^u) \geq \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_i^l)^2$ ili neka je $\gamma \geq 1$. Iz (5.33) sledi da je

$$\begin{aligned} dV(x(t)) \leq \gamma\Bigg[&d\left(\frac{(\bar{\sigma}_i^u)^2}{2} - (\tilde{r}_i^l)\right) + \sum_{i,j=1}^d \left((\bar{a}_{ij}^u)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + (\bar{b}_{ij}^u)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\right) \\ &+ A\sum_{i=1}^d x_i^\gamma(t)\Bigg]dt + \gamma\sum_{i=1}^d \sigma_i(t)(x_i^\gamma(t)-1)dw_i(t), \end{aligned}$$

gde je $A = (\bar{r}_i^u) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_i^l)^2$ za $\gamma < 1$ i $A = (\bar{r}_i^u) + \frac{\gamma-1}{2}(\bar{\sigma}_i^u)^2$ za $\gamma \geq 1$. Ako se uzme u obzir isti funkcional $V_1(x(t))$ kao u prethodnim slučajevima i Youngova nejednakost (1.23), dokaz se izvodi primenom Gronwall-Bellmanove leme na sličan način kao u Teoremi 5.2.1 ($1(b)$).

(b) Primenom formule Itôa na $x_i^p(t)$ se dobija

$$dx_i^p(t) \leq p\Big[A(p)x_i^p(t) - a_{ii}^l x_i^{p+\alpha_{ii}}(t)\Big]dt + p\sigma_i(t)x_i^p(t)dw_i(t),$$

pri čemu je

$$A(p) = \begin{cases} r_i^u, & 0 < p < 1, \\ r_i^u + \frac{p-1}{2}\sigma_i^{u\ 2}, & p \geq 1. \end{cases}$$

Preostali deo dokaza tvrdjenja (5.9) je sličan dokazu Teoreme 5.3.1, pa će biti izostavljen.

Da bi se dokazalo tvrdjenje (5.11), potrebno je poći od iste funkcije Lyapunova kao u slučaju (a). Najpre se primeni formula Itôa na $V(x(t))$, a zatim da bi se eliminisali članovi sa kašnjenjem, uvodi se isti nenegativan funkcional $V_1(x(t))$ kao u Teoremi 5.2.1. Pritom je

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F(x(t))dt + \gamma\sum_{i=1}^{d}\sigma_i(t)(x_i^\gamma(t) - 1)dw_i(t),$$

gde je

$$F(x(t)) = \gamma\Bigg[d\left(\frac{(\bar{\sigma}_i^u)^2}{2} - (\tilde{r}_i^l)\right) + \sum_{i,j=1}^{d}\left((\bar{a}_{ij}^u)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}x_j^{\beta_{ij}}(t)\right)$$
$$+ A\sum_{i=1}^{d}x_i^\gamma(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d}x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t)\Bigg]$$

i

$$A = \begin{cases} (\bar{r}_i^u) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_i^l)^2, & 0 < \gamma < 1, \\ (\bar{r}_i^u) + \frac{\gamma-1}{2}(\bar{\sigma}_i^u)^2, & \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Neka je

$$F_1(x(t)) = F(x(t)) + \sum_{i=1}^{d}x_i^p(t).$$

Slično kao u dokazu Teoreme 5.2.1, ako je $\gamma \geq \max_{i,j}\{p, \alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$, zaključuje se da je $F_1(x)$ ograničeno i dokaz se kompletira kao ranije.

Dokazi osobina (c)-(j) su slični dokazima Teorema 5.3.2, 5.5.1-5.5.3, 5.6.1-5.6.4. $\diamondsuit$

5.8 Numerička simulacija

Primer 5.8.1 Neka se ekosistem sastoji od dve vrste, pri čemu $x_1(t)$ i $x_2(t)$ predstavljaju veličine populacija tih vrsta. Zbog uticaja različitih sezonskih faktora sredine na populacije, kao što su vremenski uslovi, zalihe hrane ili temperatura, važno je proučavati ekosisteme kod kojih su neki od koeficijenata $r_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ i $\tau_{ij}(t)$ periodične ili skoro periodične funkcije (videti [22, 93, 97]). U tom smislu, neka su unutrašnje stope rasta

$$r_1(t) = 1.5 + \frac{3}{1+t^2}, \qquad r_2(t) = \sqrt{6 + \frac{4}{2+\sin t}}, \tag{5.34}$$

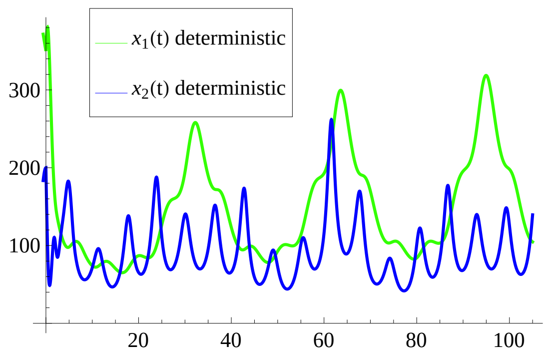
a ostali koeficijenti

$$\begin{aligned}
&a_{11}(t) = 0.01\left(0.4 + \sin^2\frac{t}{10}\right), && a_{21}(t) = 0.07\sin^2 t,\\
&a_{12}(t) = 0.1\sin^2\frac{t}{2}, && a_{22}(t) = 0.015\,(1 - 0.4\cos(0.3t)),\\
&b_{11}(t) = \frac{1}{7+t}, && b_{22}(t) = 0.001\,(1.1 + \sin t),\\
&\alpha_{11} = 1, \qquad \alpha_{12} = 1/4, && \alpha_{21} = 2/3, \qquad \alpha_{22} = 1,\\
&\beta_{11} = 1/2, && \beta_{22} = 3/2,\\
&\tau_{11}(t) = 0.6\sin^2 t, && \tau_{22}(t) = \frac{1}{\sqrt{3+t}}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Očigledno je $\tau = \max\sup_{t\geq 0}\{\tau_{11}(t), \tau_{22}(t)\} = 0.6$. Rešenje determinističkog sistema (5.1) sa koeficijentima (5.34) – (5.35) i početnim uslovima

$$\xi_1(t) = 350e^{-0.1t}, \quad \xi_2(t) = \frac{800}{4+t^2}, \quad -0.6 \leq t \leq 0 \tag{5.36}$$

je predstavljeno na Slici 5.1[1].



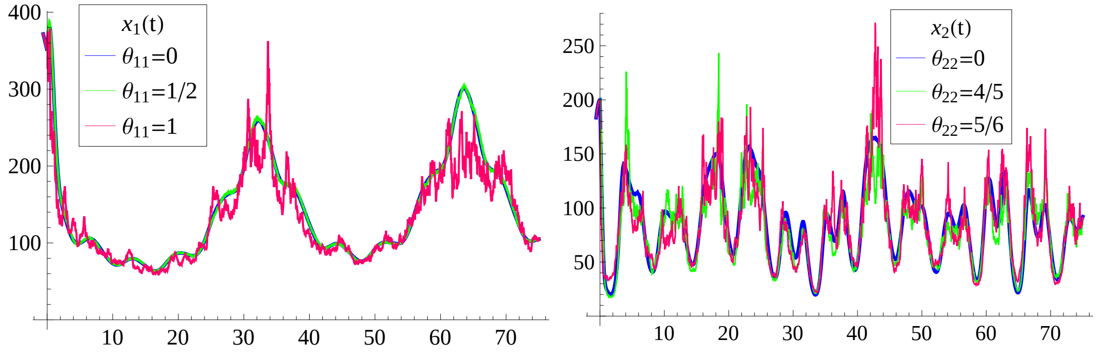
Slika 5.1: Dinamika Gilpin-Ayala modela (5.1) sa dve vrste, sa parametrima (5.34)-(5.36) (vremenski korak $\Delta t = 0.03$)

Neprekidan uticaj nepredvidivih sila na populacije može rezultirati promenama u biološkim parametrima, kao što su stope preživljavanja $r_i(t)$, $i = 1, 2$. Uzimajući u obzir perturbaciju (5.2), gde je intenzitet šuma

$$\sigma_{11}(t) = 0.001\left(1 + \frac{1}{\sqrt{4+t}}\right), \qquad \sigma_{22}(t) = 0.01\ln\left(2 + \frac{1}{1+t}\right), \tag{5.37}$$

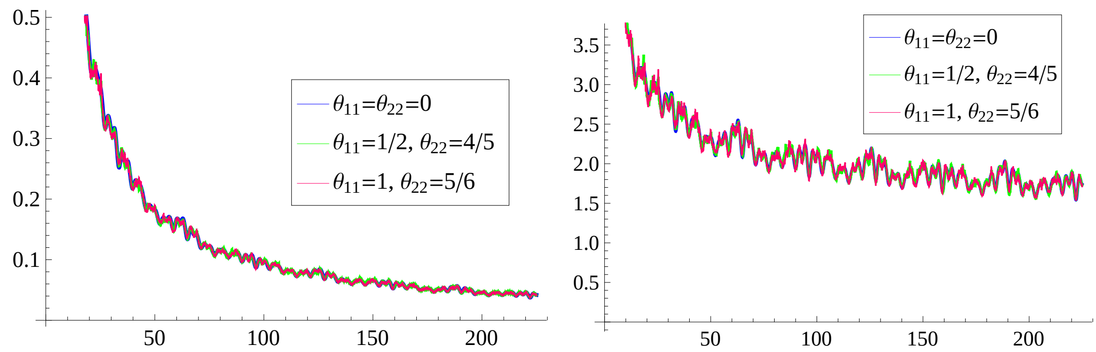
[1] Sva izračunavanja su radjena primenom programskog paketa MATHEMATICA.

sledi da je $(\tilde{a}_{ii}^l) > 0$ i $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) > 0$. Na osnovu Teoreme 5.2.1 se zaključuje da je neophodno da važi $(\bar{\theta}_{ii}) < 1/2$ (uslov 4) ili $(\bar{\theta}_{ii}) > 3/4$ (uslov 2). Za različite vrednosti parametara θ_{11} i θ_{22}, na primer, $\theta_{11} = \theta_{22} = 0$ (sistem (5.31)); $\theta_{11} = 1/2$, $\theta_{22} = 4/5$; $\theta_{11} = 1$, $\theta_{22} = 5/6$, može se posmatrati kako promene u tim parametrima utiču na rešenje stohastičkog sistema (5.3), što je ilustrovano na Slici 5.2.



Slika 5.2: Trajektorije Gilpin-Ayala modela (5.3) i (5.31) sa dve vrste sa parametrima (5.34)-(5.37)

Osim toga, simulacija na Slici 5.3 ilustruje teorijske rezultate ocene trajektorija u Teoremama 5.5.1, 5.5.2, 5.7.1(d) i 5.7.1(e).

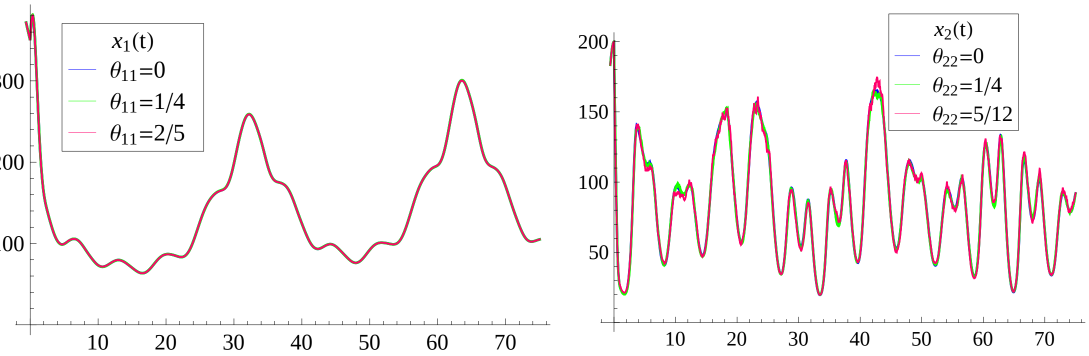


Slika 5.3: Trajektorije funkcija $\frac{\ln(x_1(t)x_2(t))}{t}$ i $\frac{\ln(x_1(t)x_2(t))}{\ln t}$ za sisteme (5.3) i (5.31)

Neka je intenzitet šuma dat sa

$$\sigma_{11}(t) = \frac{0.001}{\sqrt{4+t}}, \qquad \sigma_{22}(t) = 0.01 \ln\left(2 + \frac{1}{1+t}\right), \tag{5.38}$$

umesto (5.37). Tada je $(\tilde{a}_{ii}^l) > 0$, $(\tilde{\sigma}_{ii}^l) = 0$ i prema Teoremi 5.2.1 (uslov 4) parametri θ_{ii}, $i = 1, 2$ treba da zadovoljavaju uslov $(\bar{\theta}_{ii}) < 1/2$. Ako se uzmu u obzir sledeće vrednosti parametara $\theta_{11} = \theta_{22} = 0$ (sistem (5.31)); $\theta_{11} = 1/4$, $\theta_{22} = 1/4$; $\theta_{11} = 2/5$, $\theta_{22} = 5/12$ na Slici 5.4 se može videti da promena parametara ne implicira primetnu razliku u trajektorijama razmatranih vrsta.

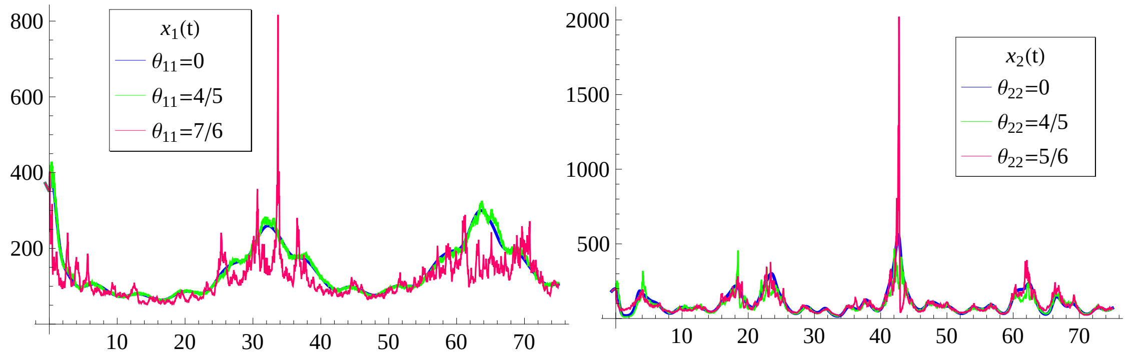


Slika 5.4: Trajektorije Gilpin-Ayala modela (5.3) i (5.31) sa dve vrste sa parametrima (5.34)-(5.36) i (5.38)

Ako je

$$a_{22}(t) = 0.015(1 - \cos(0.3t)) \tag{5.39}$$

umesto $a_{22}(t)$ u (5.35) i ako su intenziteti šuma dati sa (5.37), tada je $(\tilde{a}^l_{ii}) = 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$ i na osnovu Teoreme 5.2.1 (uslov 2) parametri $\theta_{ii},\ i = 1, 2$ treba da zadovoljavaju uslov $(\bar{\theta}_{ii}) > 3/4$. Na primer, za $\theta_{11} = \theta_{22} = 0$ (sistem (5.31)); $\theta_{11} = 4/5$, $\theta_{22} = 4/5$; $\theta_{11} = 7/6$, $\theta_{22} = 5/6$, na osnovu Slike 5.5 zaključuje se da parametri $\theta_{ii},\ i = 1, 2$ imaju značajnu ulogu u dinamici razmatranih vrsta.



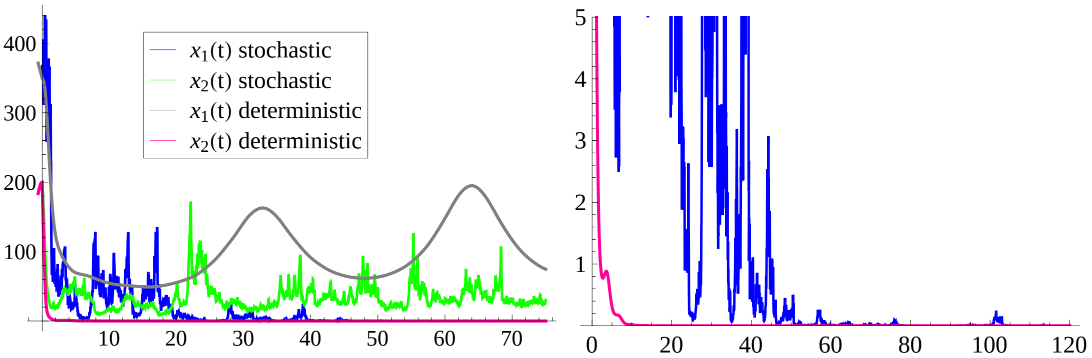
Slika 5.5: Trajektorije Gilpin-Ayala modela (5.3) i (5.31) sa dve vrste sa parametrima (5.34)-(5.37) i (5.39)

Primer 5.8.2 Osnovni cilj ovog primera je da ilustruje kako može doći do istrebljenja ili oporavka populacija ako je intenzitet šuma dovoljno veliki. Razmatra se ekosistem (5.31) sa dve vrste sa koeficijentima (5.35) i

$$r_1(t) = r_2(t) = 1 + \frac{3}{1+t^2}, \tag{5.40}$$

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_1(t) = 1.45 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad \sigma_{22}(t) = \sigma_2(t) = 0.1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \tag{5.41}$$

i $\theta_{11} = 0$, $\theta_{22} = 1/2$ za sistem (5.3).

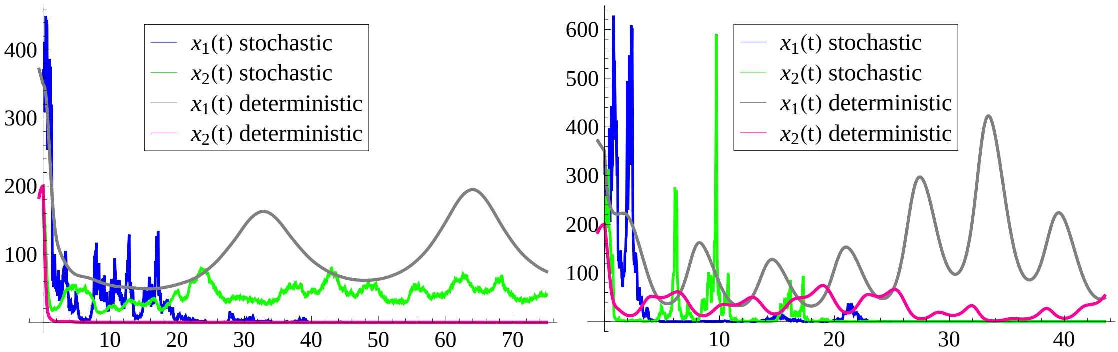


Slika 5.6: Trajektorije Gilpin-Ayala modela (5.31) sa dve vrste (sa parametrima (5.35), (5.40)- (5.41))

Na Slici 5.6 se može primetiti da perturbacija unutrašnjih stopa rasta dovodi do kompletne promene u dinamici posmatranog ekosistema. Kako je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left[r_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2(s)\right] ds = -0.05125,$$

na osnovu Teoreme 5.6.1 i Teoreme 5.7.1 (g) za početne podatke (5.36) sledi da će prva populacija biti dovedena do istrebljenja sa verovatnoćom jedan. Sa druge strane, uvodjenje šuma u deterministički sistem sa koeficijentima (5.40) i (5.35) dovodi do oporavka druge vrste koja bi u determinističkom slučaju bila istrebljena za kratko vreme (videti Sliku 5.6 za model (5.3) i Sliku 5.7 (levo) za model (5.31)).



Slika 5.7: Trajektorije Gilpin-Ayala modela sa dve vrste (5.31) (sa parametrima (5.35) , (5.40)-(5.41) (levo) i sa parametrima (5.35), (5.42)-(5.43) (desno))

Ako se zamene koeficijenti (5.40) i (5.41) u modelu (5.31) sa

$$r_1(t) = 1.5 + \sin t + \frac{1}{1+t^2}, \qquad r_2(t) = 1.5 + \frac{2}{1+t^2}, \tag{5.42}$$

$$\sigma_1(t) = 1.8 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \qquad \sigma_2(t) = 1.8 - \frac{1}{1+t}, \tag{5.43}$$

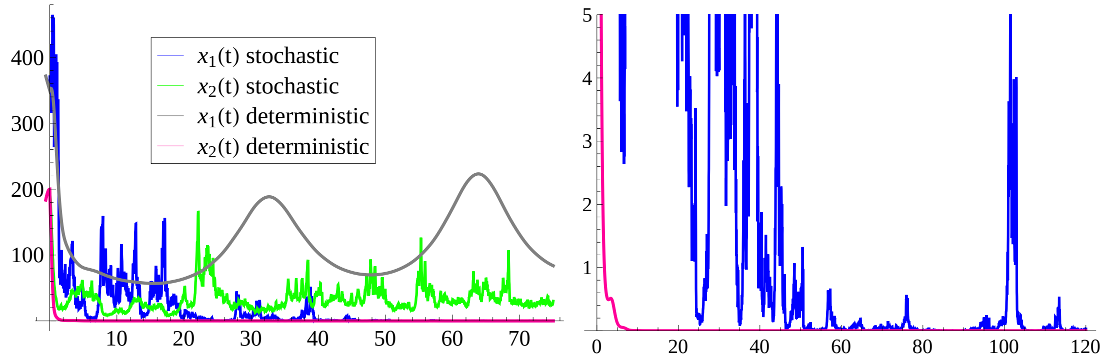
na osnovu Teoreme 5.7.1 (h) je jasno da će uz dovoljno veliki intenzitet šuma (5.43) obe populacije biti istrebljene, kao što je prikazano na Slici 5.7 (desno).

Za parametre

$$r_1(t) = 1.125 + \frac{3}{1+t^2} \qquad r_2(t) = 1 + \frac{3}{1+t^2}, \tag{5.44}$$

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_1(t) = 1.5 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \qquad \sigma_{22}(t) = \sigma_2(t) = 0.1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \tag{5.45}$$

ako je $\theta_{11} = 0$, $\theta_{22} = 1/2$, na osnovu Teoreme 6.3.2 se zaključuje da je prva populacija neperzistentna usrednjeno po vremenu sa verovatnoćom jedan (Slika 5.8).



Slika 5.8: Trajektorije Gilpin-Ayala modela sa dve vrste (5.3) (sa parametrima (5.35), (5.44)-(5.45))

Posmatrajući Sliku 5.6 (desno), očigledno je da će prva populacija biti istrebljena sa verovatnoćom jedan posle približno 1.5 godina. S druge strane, sa Slike 5.8 (desno) se zaključuje da će prva populacija biti ugrožena posle 1.5 godina, ali ako se uslovi sredine ne promene, populacije će biti istrebljena posle približno 3 godine.

Glava 6

Asimptotsko ponašanje stohastičkog Gilpin-Ayala predator-plen sistema sa kašnjenjem zavisnim od vremena

U ovoj glavi se razmatra stohastički Gilpin-Ayala sistem sa kašnjenjem zavisnim od vremena sa m vrsta plena i $(d-m)$ vrsta predatora. U Poglavlju 6.1 su dati uvodni pojmovi o predator-plen odnosima i pomenuti su postojeći rezultati vezani za njih. Novi rezultati, publikovani u [84], su izloženi u Poglavljima 6.2-6.7 U Poglavlju 6.2 su dati dovoljni uslovi za egzistenciju globalnog i pozitivnog rešenja razmatranog sistema. U Poglavljima 6.3-6.5 se navode različita svojstva rešenja: stohastička ultimativna ograničenost, asimptotska ocena momenata i asimptotsko ponašanje trajektorija. U Poglavlju 6.6 se uvodi specijalni slučaj razmatranog sistema i daju se dovoljni uslovi za istrebljenje vrsta plena i predatora. Na kraju, u Poglavlju 6.7 je dat primer sa numeričkim simulacijama koje ilustruju teorijske rezultate.

6.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Do sada je bilo reči samo o kompeticiji kao obliku interakcije izmedju vrsta. Medjutim, pored kompeticije, kao drugi važan tip interakcije izdvaja se predatorstvo. *Predatorstvo* u širokom smislu podrazumeva interakciju kada se članovi jedne vrste hrane članovima druge vrste. Ovo je usmerena interakcija u smislu da jedan član u paru (predator) ima dobitak iz interakcije, dok na drugi (plen) interakcija deluje negativno, za razliku od kompeticije, kod koje su obe vrste na gubitku. Predatori nisu u medjusobnoj vezi samo preko plena, već oni mogu delovati jedno na drugo i preko kompeticije. Kompeticija medju predatorima može biti direktna, kada sve vrste predatora jedu istu vrstu plena koga ima malo, ili može biti indirektna, preko više vrsta plena koje su izmedju sebe u kompeticiji za prostor ili hranu.

Ekološke zajednice se sastoje od mnogo vrsta povezanih u kompleksnu mrežu ishrane, pa su hranidbeni odnosi, kao što je predatorstvo, najbitniji i najučestaliji jer svaka životinja mora jesti da bi živela. Da bi se razumelo na koji način koegzistira više vrsta u lancu ishrane, mora se razumeti priroda kompetitivnih interakcija i predator-plen odnosa izmedju njih. Predator-plen odnos je važan u održavanju balansa izmedju različitih vrsta. Bez predatora pojedine vrste plena bi dovele druge vrste do istrebljenja kroz kompeticiju. S druge strane, bez plena ne bi bilo ni predatora [7, 77, 82, 83].

Matematičko proučavanje predator-plen sistema u populacionoj dinamici ima dugu istoriju počev od rada Lotke i Volterre. Volterra je 1926. godine predložio model sa differencijalnim jednačinama da bi objasnio zapaženi porast broja jedinki riba predatora i odgovarajuće opadanje broja jedinki riba plena u Jadranskom moru. Istovremeno je, nezavisno od Volterre, te jednačine izveo i Lotka (1925) da bi opisao hipotetičku hemijsku reakciju u kojoj koncentracije hemikalija osciliraju. Klasičan Lotka-Volterra predator-plen model je dat na sledeći način:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)(a - by(t)),\\ \dot{y}(t) &= y(t)(-c + dx(t)),\end{aligned}$$

gde $x(t)$ i $y(t)$ označavaju veličine populacija plena i predatora, redom, u trenutku t. Parametri a i b predstavljaju fiksne stope rasta i smrtnosti plena, dok parametri d i c predstavljaju fiksne stope rasta i smrtnosti predatora. Izraz $bx(t)y(t)$ predstavlja uklanjanje plena od strane predatora, dok izraz $dx(t)y(t)$ predstavlja rast populacije predatora koji zavisi od količine ulovljenog plena i efikasnosti pretvaranja hrane u populacioni rast.

Od tada do danas različite varijante Lotka-Volterra jednačina su korišćene da bi se opisala populaciona dinamika sa predator-plen odnosom [1, 43, 94]. Medjutim, kako je Lotka-Volterra model često kritikovan zbog svoje linearnosti, 1973. godine Gilpin i Ayala su uveli nešto komplikovanije jednačine da bi se dobila rešenja koja su približnija realnom rešenju. Takav tip jednačina je proučavan i kasnije u različitim varijantama [10, 11, 12, 14, 15, 31, 52, 53]. Na primer, Li i Lu [53] su proučavali sledeći model

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= x_i(t)\left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)\right],\ i = 1,\dots,m,\\ \dot{x}_i(t) &= x_i(t)\left[b_i(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)\right],\ i = m+1,\dots,n,\end{aligned}$$

gde x_i predstavlja veličinu i-te populacije plena za $i = 1,\dots,m$, x_i predstavlja veličinu i-te populacije predatora za $i = m+1,\dots,n$, a $\alpha_{ij} > 0$, $i,j = 1,\dots,n$ su parametri koji modifikuju klasični Lotka-Volterra model i predstavljaju nelinearnu meru medjusobnog uticaja izmedju različitih vrsta.

Deterministički Gilpin-Ayala model kompeticije za sistem sa m vrsta plena i $(d-m)$ vrsta predatora sa kašnjenjem zavisnim od vremena su predložili Chen, Xie i Shi u radu [15]:

$$dx_i(t) = x_i(t)\left[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d}\left(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\right)\right]dt,\ i = 1,\dots,m,$$

$$dx_i(t) = x_i(t)\Big[-r_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big) \tag{6.1}$$
$$- \sum_{j=m+1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\Big]dt,\ i = m+1,\dots,d,$$

gde je $x(t) = (x_1(t),\dots,x_d(t))^T$; $x_i(t)$, $i = 1,\dots,m$, označava veličinu populacije plena u trenutku t, $x_i(t)$, $i = m+1,\dots,d$, označava veličinu populacije predatora u trenutku t; α_{ij}, β_{ij} su pozitivne konstante i predstavljaju nelinearnu meru interakcije izmedju različitih populacija ($i \neq j$) ili izmedju jedinki unutar populacije jedne vrste ($i = j$); funkcije $r_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ su neprekidne, ograničene i nenegativne na $[0,\infty)$, $r_i(t)$, $i = 1,\dots,m$ su stope rasta populacije plena, a $r_i(t)$, $i = m+1,\dots,d$ su stope smrtnosti populacije predatora u trenutku t, $a_{ij}(t)$ i $b_{ij}(t)$ predstavljaju efekat interakcije izmedju populacija različitih vrsta za $i \neq j$, odnosno izmedju jedinki unutar populacije jedne vrste za $i = j$ u trenutku t; izrazi $b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))$ predstavljaju *negative feedback crowding*; $\tau_{ij}(t)$ su nenegativne, ograničene, neprekidno diferencijabilne funkcije na $[0,\infty)$; $\tau'_{ij}(t)$ su ograničene funkcije. Neka je $\tau = \max_{1\le i,j\le d}\sup_{t\ge 0}\tau_{ij}(t)$ i neka je $C = C([-\tau,0];R_+^d)$ familija neprekidnih funkcija definisanih na $[-\tau,0]$. Za svako dato $\varphi_i \in C$ početni uslovi sistema (6.1) su

$$x_i(\theta) = \varphi_i(\theta) \ge 0,\ -\tau \le \theta \le 0;\quad \varphi_i(0) > 0,\ \sup_{-\tau\le\theta\le 0}\varphi_i(\theta) < \infty,\ i = 1,\dots,d. \tag{6.2}$$

U sistemu (6.1) uz predator-plen odnose se razmatra istovremeno i kompeticija izmedju različitih vrsta plena, kao i kompeticija izmedju različitih vrsta predatora. Pretpostavke modela su sledeće:

(i) Kada ne postoji ni jedan predator, kompeticija izmedju različitih vrsta plena je opisana izrazima $x_i(t)[r_i(t) - \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)))]$, $i = 1,\dots,m$;

(ii) Efekat predatorstva se ogleda u redukciji stope rasta po jedinki plena i predstavljen je izrazima koji su proporcionalni veličini populacija plena i nelinearno zavisni od veličina populacija predatora: $-x_i(t)\sum_{j=m+1}^{d}(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)$ $+ b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)))$, $i = 1,\dots,m$;

(iii) Kada ne postoji ni jedna vrsta plena, srednja stopa rasta odgovarajuće vrste predatora se smanjuje i to je opisano izrazima $x_i(t)[-r_i(t) - \sum_{j=m+1}^{d}(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)))]$, $i = m+1,\dots,d$, u okviru dinamike predatora;

(iv) Doprinos postojanja plena za stope rasta predatora je opisan sledećim izrazima $x_i(t)\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)))$, $i = m+1,\dots,d$.

Medjutim, populacioni sistemi su izloženi uticaju velikog broja slučajnih nepredvidivih faktora, pa je neophodno posmatrati odgovarajući stohastički populacioni model. Stohastički pristup problemu omogućava da se realnije sagleda interakcija tih populacija.

U praksi se unutrašnja stopa rasta ili smrtnosti i-te vrste u trenutku t ocenjuje kao srednja vrednost registrovanih stopa rasta, odnosno smrtnosti, plus greška.

Drugim rečima, stope rasta $r_i(t)$, $i = 1,\dots,m$, odnosno smrtnosti $-r_i(t)$, $i = m+1,\dots,d$, mogu se perturbovati sa

$$r_i(t) \to r_i(t) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t), \qquad i = 1,\dots,m, \tag{6.3}$$

$$-r_i(t) \to -r_i(t) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t), \quad i = m+1,\dots,d,$$

pri čemu je $\sigma_{ij}(t)$ intenzitet šuma u trenutku t, funkcije $\sigma_{ij}(t)$ su neprekidne, ograničene i nenegativne na $[0,\infty)$ i θ_{ij} su nenegativne konstante $(i,j = 1,\dots,d)$. Kao rezultat perturbacije, deterministički model (6.1) postaje sledeći stohastički Gilpin-Ayala model sa m vrsta plena i $(d-m)$ vrsta predatora

$$\begin{aligned}
dx_i(t) &= x_i(t)\Bigg\{\Bigg[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\Bigg]dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t)\Bigg\}, \ i = 1,\dots,m, \\
dx_i(t) &= x_i(t)\Bigg\{\Bigg[-r_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big) \\
&\qquad - \sum_{j=m+1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\Bigg]dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t)\Bigg\}, \ i = m+1,\dots,d.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

sa početnim uslovima (6.2). Ovaj model se razmatra u nastavku glave, a dobijeni originalni rezultati su objavljeni u [84]. Inače, stohastički Gilpin-Ayala predator-plen sistem nije do sada razmatran od strane drugih autora.

6.2 Globalno pozitivno rešenje

Koeficijenti sistema (6.4) su lokalno Lipschitz neprekidni, ali ne zadovoljavaju uslov ograničenog rasta. Zbog te činjenice postavlja se pitanje da li će doći do eksplozije rešenja sistema (6.4). Sledeća teorema dokazuje da je pri nekim datim uslovima to rešenje pozitivno i globalno.

Teorema 6.2.1 *Neka je* $(\bar{\theta}_{ij}) > 0$ *i*

$$(\bar{\tau}'^{u}_{ij}) < 1 \tag{6.5}$$

za $i,j = 1,\dots d$. *Za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$, *ako je zadovoljen bilo koji od uslova:*

1. $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) \vee 2(\bar{\theta}_{ii}) > \max_{D_1}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge [\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij}) - 1]$;

2. $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > \max_{D_1}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge [\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij}) - 1]$;

3. $(\tilde{a}^l_{ii}) = 0$, $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) > 0$ *i* $2(\bar{\theta}_{ii}) > \max_{D_1}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge [\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij}) - 1]$;

4. $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > \max_{D_1}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij})$,

pri čemu je $D_1 = \{(i,j) : m+1 \le i \le d, 1 \le j \le m\}$ *i* $D_2 = \{(i,j) : 1 \le i \le m, 1 \le j \le d$, *ili* $m+1 \le i,j \le d\}$, *tada postoji jedinstveno rešenje* $x(t)$, $t \ge -\tau$ *sistema* (6.4), *koje ostaje u* R^d_+ *sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Kako su koeficijenti sistema (6.4) lokalno Lipschitz neprekidni, za svaku početnu vrednost $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$ postoji jedinstveno lokalno pozitivno rešenje $x(t)$ definisano na $t \in [0, \rho)$, gde je ρ trenutak eksplozije. Da bi se pokazalo da je rešenje globalno, neophodno je dokazati da je $\rho = \infty$ s.i.

Neka je n_0 dovoljno veliko tako da svaka komponenta od $\varphi(t)$ pripada intervalu $[n_0^{-1}, n_0]$. Za svako celobrojno $n \ge n_0$, definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_n = \inf\{t \in [0,\rho) \; : x_i(t) \notin (n^{-1}, n), \text{ za neko } i = 1, \dots, d\}.$$

Jasno, τ_n je rastuće kad $n \to \infty$. Neka je $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, što znači da je $\tau_\infty \le \rho$ s.i. Dakle, da bi se kompletirao dokaz, potrebno je dokazati da je $\tau_\infty = \infty$ s.i., ili da za svako $T > 0$, $P(\tau_n \le T) \to 0$ kada $n \to \infty$, jer je tada $\rho = \infty$ s.i. i $x(t) \in R^d_+$ s.i. za svako $t \ge 0$. Da bi se pokazalo ovo tvrdjenje, definiše se nenegativna C^2-funkcija $V : R^d_+ \to R_+$,

$$V(x) = \sum_{i=1}^d [x_i^\gamma - 1 - \gamma \ln x_i].$$

Neka je $n \ge n_0$ i neka je $T > 0$ proizvoljno. Ako je $\gamma > 0$ i $\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij}) - (\bar{\alpha}_{ii}) \vee 2(\bar{\theta}_{ii}) < \gamma < 1$ za $0 \le t \le \tau_n \wedge T$, primenom formule Itôa na $V(x(t))$ se dobija

$$\begin{aligned} dV(x(t)) \le \gamma \Big[&- \sum_{i=1}^m r_i(t) + \sum_{i=m+1}^d r_i(t) + \sum_{i=1}^m r_i(t) x_i^\gamma(t) + \sum_{D_2} a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\ &+ \sum_{D_1} a_{ij}(t) x_i^\gamma(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) - \sum_{D_2} a_{ij}(t) x_i^\gamma(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\ &+ \sum_{D_1} b_{ij}(t) x_i^\gamma(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) + \sum_{D_2} b_{ij}(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t) - \frac{1-\gamma}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}^2(t) x_i^\gamma(t) x_j^{2\theta_{ij}}(t) \Big] dt \\ + \gamma \sum_{i,j=1}^d &\sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t). \end{aligned}$$

Primenom Youngove nejednakosti (1.23) se dobija

$$
\begin{aligned}
dV(x(t)) \le \gamma \Bigg[& -m(\tilde{r}_i^l) + (d-m)(\bar{r}_i^u) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^{\gamma}(t) \\
& + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_2} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_1} x_i^{\gamma}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\
& + \frac{\gamma(\bar{b}_{ij}^u)}{\gamma+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{\gamma+\beta_{ij}}(t) + \frac{(\bar{\beta}_{ij})(\bar{b}_{ij}^u)}{\gamma+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_j^{\gamma+\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)) \\
& + (\bar{b}_{ij}^u)\sum_{D_2} x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)) + \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) \\
& - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+2\theta_{ii}}(t)\Bigg]dt \\
& + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
\end{aligned}
$$

Da bi se eliminisali članovi sa kašnjenjem, uvodi se nenegativni funkcional

$$
V_1(x(t)) = \frac{\gamma(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\Bigg[\frac{(\bar{\beta}_{ij})}{\gamma+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} x_j^{\gamma+\beta_{ij}}(s)ds + \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\sum_{D_2} x_j^{\beta_{ij}}(s)ds\Bigg].
$$

Primenom uslova (6.5) je

$$
d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \le F(x(t))dt + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
F(x(t)) \le \gamma\Bigg[& -m(\tilde{r}_i^l) + (d-m)(\bar{r}_i^u) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^{\gamma}(t) \\
& + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_2} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_1} x_i^{\gamma}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{\gamma(\bar{b}_{ij}^u)}{\gamma+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{\gamma+\beta_{ij}}(t) \\
& + \frac{(\bar{\beta}_{ij})(\bar{b}_{ij}^u)}{(1-(\bar{\tau}_{ij}'^u))(\gamma+(\tilde{\beta}_{ij}))}\sum_{D_1} x_j^{\gamma+\beta_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{D_2} x_j^{\beta_{ij}}(t) \\
& + \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-\gamma}{2}(\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+2\theta_{ii}}(t)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Ako važi uslov 1, postoji pozitivna konstanta K takva da je $F(x(t)) \le K$. Dalje je

$$
d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \le Kdt + \gamma\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t)-1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),
$$

odnosno,

$$\begin{aligned}EV(x(\tau_n \wedge T)) &\leq EV(x(\tau_n \wedge T)) + EV_1(x(\tau_n \wedge T))\\ &\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + KE(\tau_n \wedge T)\\ &\leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + KT.\end{aligned}$$

Za svako $\omega \in \{\tau_n \leq T\}$ postoji neko i takvo da $x_i(\tau_n, \omega) \notin (n^{-1}, n)$ $(i = 1, \ldots, d)$. Prema tome

$$V(x(\tau_n)) \geq x_i^\gamma(\tau_n) - 1 - \gamma \ln x_i(\tau_n) = \left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n),$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}\infty &> V(x(0)) + V_1(x(0)) + KT \geq EV(x(\tau_n \wedge T))\\ &= P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n)) + P(\tau_n > T)V(x(T)) \geq P(\tau_n \leq T)V(x(\tau_n))\\ &\geq P(\tau_n \leq T)\left[\left(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}\right) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)\right].\end{aligned}$$

Kako $(\frac{1}{n^\gamma} - 1 - \gamma \ln \frac{1}{n}) \wedge (n^\gamma - 1 - \gamma \ln n)$ teži beskonačnosti kada $n \to \infty$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} P(\tau_n \leq T) = 0$, pa je $P(\tau_\infty \leq T) = 0$. Kako je $T > 0$ proizvoljno, to je

$$P(\tau_\infty < \infty) = 0 \quad \text{i} \quad P(\tau_\infty = \infty) = 1,$$

čime je teorema dokazana.

Teorema se analogno dokazuje ako su zadovoljeni uslovi 2, odnosno 3.

Ako važi uslov 4, bira se γ tako da je $\gamma > [\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} - (\bar{\alpha}_{ii})] \wedge 1$. Prateći istu proceduru kao ranije, dobija se

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F'(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^\gamma(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}F'(x(t)) \leq \gamma\Bigg[&-m(\tilde{r}_i^l) + (d-m)(\bar{r}_i^u) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^\gamma(t)\\ &+ (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_2} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_1} x_i^\gamma(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{\gamma(\bar{b}_{ij}^u)}{\gamma + (\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{\gamma+\beta_{ij}}(t)\\ &+ \frac{(\bar{\beta}_{ij})(\bar{b}_{ij}^u)}{(1-(\bar{\tau}_{ij}'^u))(\gamma + (\tilde{\beta}_{ij}))}\sum_{D_1} x_j^{\gamma+\beta_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{D_2} x_j^{\beta_{ij}}(t)\\ &+ \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d} x_j^{2\theta_{ij}}(t) + \frac{\gamma-1}{2}(\bar{\sigma}_{ij}^u)^2\sum_{i,j=1}^{d} x_i^\gamma(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{\gamma+\alpha_{ii}}(t)\Bigg].\end{aligned} \tag{6.7}$$

Tada postoji pozitivna konstanta K takva da je $F'(x(t)) \leq K$. Dalje je dokaz sličan prethodnim slučajevima. $\diamondsuit$

6.3 Ultimativna ograničenost

Svojstva pozitivnosti i neeksplozije su suštinska u populacionom sistemu, ali se mogu razmatrati još neka svojstva rešenja sistema (6.4). S biološke tačke gledišta, zbog ograničenosti resursa svojstvo stohastičke ultimativne ograničenosti je poželjnije svojstvo od neeksplozivnosti. Nadalje, najpre se pokazuje da je rešenje sistema (6.4) asimptotski ograničeno, a zatim da ima svojstvo stohastičke ultimativne ograničenosti.

Teorema 6.3.1 *Ako za:*

1. $0 < p < 1$ *važi bilo koji od uslova* $1-4$ *Teoreme 6.2.1;*

2. $p = 1$ *važi bilo koji od uslova* $1,\ 2,\ 4$ *Teoreme 6.2.1;*

3. $p > 1$ *važi uslov* 4 *Teoreme 6.2.1,*

tada rešenje sistema (6.4) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} E\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) \le \bar{K}(p), \tag{6.8}$$

gde je $\bar{K}(p)$ *nezavisno od početnih uslova* $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$.

Dokaz. Primenom formule Itôa na $e^t\bar{V}(x)$, pri čemu je $\bar{V}(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^p$, dobija se

$$\begin{aligned} d(e^t\bar{V}(x(t))) \le pe^t\bigg\{&\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) + \sum_{i=1}^{m} x_i^p(t)\bigg[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)\bigg] \\ &+ \sum_{i=m+1}^{d} x_i^p(t)\bigg[-r_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big) \\ &- \sum_{j=m+1}^{d} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)\bigg] + \frac{p-1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t)x_i^p(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t)\bigg\}dt \\ &+ pe^t\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Za $0 < p \le 1$, primenom Youngove nejednakosti je

$$\begin{aligned} d(e^t\bar{V}(x(t))) \le pe^t\bigg\{&\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^p(t) - (\tilde{r}_i^l)\sum_{i=m+1}^{d} x_i^p(t) \\ &+ (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{D_1} x_i^p(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{p(\bar{b}_{ij}^u)}{p+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{p+\beta_{ij}}(t) \\ &+ \frac{(\bar{\beta}_{ij})(\bar{b}_{ij}^u)}{p+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_j^{p+\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t)) - (\tilde{a}_{ii}^l)\sum_{i=1}^{d} x_i^{p+\alpha_{ii}}(t) \\ &- \frac{1-p}{2}(\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2\sum_{i=1}^{d} x_i^{p+2\theta_{ii}}(t)\bigg\}dt + pe^t\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Da bi se eliminisali izrazi sa kašnjenjem uvodi se nenegativan funkcional

$$\bar{V}_1(x(t)) = \frac{p(\bar{\beta}_{ij})e^{\tau}(\bar{b}^u_{ij})}{(p+(\tilde{\beta}_{ij}))(1-\bar{\tau}'^u_{ij})} \sum_{D_1} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} e^s x_j^{p+\beta_{ij}}(s).$$

Tada je

$$d(e^t\bar{V}(x(t)) + \bar{V}_1(x(t))) \le e^t \bar{F}(x(t))dt + pe^t \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\bar{F}(x(t)) = p \Bigg\{ & \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^p(t) - (\tilde{r}_i^l)\sum_{i=m+1}^{d} x_i^p(t) + (\bar{a}^u_{ij})\sum_{D_1} x_i^p(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\ & + \frac{p(\bar{b}^u_{ij})}{p+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{p+\beta_{ij}}(t) + \frac{(\bar{\beta}_{ij})e^{\tau}(\bar{b}^u_{ij})}{(p+(\tilde{\beta}_{ij}))(1-(\bar{\tau}'^u_{ij}))}\sum_{D_1} x_j^{p+\beta_{ij}}(t) \\ & - (\tilde{a}^l_{ii})\sum_{i=1}^{d} x_i^{p+\alpha_{ii}}(t) - \frac{1-p}{2}(\tilde{\sigma}^l_{ii})^2 \sum_{i=1}^{d} x_i^{p+2\theta_{ii}}(t) \Bigg\}.\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir pretpostavke teoreme, za $0 < p < 1$ postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ zavisna od p takva da je $\bar{F}(x(t)) \le \bar{K}(p)$, pa sledi

$$d(e^t\bar{V}(x(t)) + \bar{V}_1(x(t))) \le e^t \bar{K}(p)dt + pe^t \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).$$

Otuda je

$$e^t E\bar{V}(x(t)) \le \bar{V}(x(0)) + \bar{V}_1(x(0)) + \bar{K}(p)(e^t - 1),$$

pa tvrdjenje (6.8) direktno sledi.

Analogno se izvodi zaključak za $p = 1$.

S druge strane, za $p > 1$, sledeći prethodnu proceduru nalazimo da je

$$d(e^t\bar{V}(x(t)) + \bar{V}_1(x(t))) \le e^t \bar{F}'(x(t))dt + pe^t \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)x_i^p(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}\bar{F}'(x(t)) = p \Bigg\{ & \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} x_i^p(t) + (\bar{r}_i^u)\sum_{i=1}^{m} x_i^p(t) - (\tilde{r}_i^l)\sum_{i=m+1}^{d} x_i^p(t) + (\bar{a}^u_{ij})\sum_{D_1} x_i^p(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\ & + \frac{p(\bar{b}^u_{ij})}{p+(\tilde{\beta}_{ij})}\sum_{D_1} x_i^{p+\beta_{ij}}(t) + \frac{(\bar{\beta}_{ij})e^{\tau}(\bar{b}^u_{ij})}{(p+(\tilde{\beta}_{ij}))(1-(\bar{\tau}'^u_{ij}))}\sum_{D_1} x_j^{p+\beta_{ij}}(t) \\ & + \frac{p-1}{2}(\bar{\sigma}^u_{ij})^2 \sum_{i,j=1}^{d} x_i^p(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t) - (\tilde{a}^l_{ii})\sum_{i=1}^{d} x_i^{p+\alpha_{ii}}(t) \Bigg\}.\end{aligned}$$

Tada ako je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ i $(\bar{\alpha}_{ii}) > 2(\bar{\theta}_{ij})$, postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ zavisna od p takva da je $\bar{F}'(x(t)) \leq \bar{K}(p)$. Ostatak dokaza je sličan kao u prethodnom slučaju. $\diamondsuit$

Posledica 6.3.1 *Neka važe pretpostavke Teoreme 6.3.1. Tada za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, *rešenje sistema* (6.4) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} E|x(t)|^p \leq d^{\frac{p}{2}} \bar{K}(p). \tag{6.9}$$

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme tvrdjenje se jednostavno dokazuje ako se primeti da je

$$E|x(t)|^p = E\bigg(\sum_{i=1}^d x_i^2(t)\bigg)^{p/2} \leq d^{\frac{p}{2}} E \sum_{i=1}^d x_i^p(t).$$

$\diamondsuit$

Teorema 6.3.2 *Ako važe uslovi Teoreme 6.3.1, rešenje sistema* (6.4) *je stohastički ultimativno ograničeno.*

Dokaz. Primenom nejednakosti Chebysheva i Posledice 6.3.1 sledi da za $H > 0$ važi

$$P\Big\{|x(t)| > H\Big\} \leq \frac{E|x(t)|^2}{H^2} \leq \frac{K(2)}{H^2}.$$

Dakle, izbor dovoljno velikog H implicira da je rešenje sistema (6.4) stohastički ultimativno ograničeno. $\diamondsuit$

6.4 Ocena momenata

Kako nije moguće naći eksplicitno rešenje sistema (6.4), opravdano je proučavati asimptotsko ponašanje njegovih momenata. U ovom poglavlju dokazujemo da je pri nekim uslovima p-ti moment rešenja sistema (6.4) usrednjen u vremenu asimptotski ograničen.

Teorema 6.4.1 *Ako važi ma koji od navedenih uslova:*

(a) $p < 1 + (\bar{\alpha}_{ii}) \vee 2(\bar{\theta}_{ii})$ *i uslov 1 Teoreme 6.2.1;*

(b) $p < 1 + (\bar{\alpha}_{ii})$ *i uslov 2 Teoreme 6.2.1;*

(c) $p < 1 + 2(\bar{\theta}_{ii})$ *i uslov 3 Teoreme 6.2.1;*

(d) $p > 0$ *i uslov 4 Teoreme 6.2.1,*

tada za proizvoljne početne uslove $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$ *postoji pozitivna konstanta* c *takva da rešenje* $x(t)$ *sistema* (6.4) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\int_0^t \sum_{i=1}^d x_i^p(s)ds \leq c. \tag{6.10}$$

Dokaz. Ponavljajući proceduru dokaza iz Teoreme 6.2.1 sa istom funkcijom Lyapunova, za $0 < \gamma < 1$ se dobija

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t), \tag{6.11}$$

gde je $F(x(t))$ dato sa (6.6).

Neka je

$$F_1(x(t)) = F(x(t)) + \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t).$$

U skladu sa uslovima (a) može se izabrati $\gamma > 0$ tako da je $\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge 2(\bar{\theta}_{ij}) \wedge p - (\bar{\alpha}_{ii}) \vee 2(\bar{\theta}_{ii}) < \gamma < 1$ i zaključiti da je $F_1(x)$ ograničeno. Dakle, postoji pozitivna konstanta c takva da je $F_1(x) \leq c$, pa sledi

$$F(x(t)) \leq c - \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t).$$

Na osnovu ove ocene, (6.11) postaje

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq \left[c - \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t)\right]dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

odakle je

$$EV(x(\tau_k \wedge t)) + EV_1(x(\tau_k \wedge t)) \leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + cE(\tau_k \wedge t) - E\int_0^{\tau_k \wedge t} \sum_{i=1}^{d} x_i^p(s)ds.$$

Kada $k \to \infty$, sledi da je

$$E\int_0^t \sum_{i=1}^{d} x_i^p(s)\,ds \leq V(x(0)) + V_1(x(0)) + ct.$$

Analogno se može zaključiti i ako važe uslovi (b) i (c).

Za $\gamma > 1$, prateći prethodnu proceduru dobija se

$$d[V(x(t)) + V_1(x(t))] \leq F'(x(t))dt + \gamma \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)(x_i^{\gamma}(t) - 1)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

gde je $F'(x(t))$ dato sa (6.7). Neka je $F_1'(x(t)) = F'(x(t)) + \sum_{i=1}^{d} x_i^p(t)$. Ako važi uslov (d), za svako $p > 0$ se može izabrati γ tako da je $\gamma > [\max_{D_2}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \wedge p - (\bar{\alpha}_{ii})] \wedge 1$ i zaključiti da je $F_1'(x)$ ograničeno. Dalje, dokaz sledi analogno prethodnim slučajevima. $\diamondsuit$

Posledica 6.4.1 *Neka važe uslovi Teoreme 6.4.1. Tada postoji pozitivna konstanta* $\bar{c}$ *nezavisna od početnih uslova* $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$*, takva da rešenje* $x(t)$ *sistema* (6.4) *zadovoljava*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E \int_0^t |x(s)|^p ds \leq \bar{c}. \tag{6.12}$$

Dokaz. Ako se primeti da je $|x(t)|^p \leq d^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^d x_i^p(t)$, tvrdjenje sledi direktno iz Teoreme 6.4.1, pri čemu je $\bar{c} = cd^{\frac{p}{2}}$. $\diamondsuit$

Sa biološke tačke gledišta, (6.9) i (6.12) ukazuju na to da veličine populacija bilo koje vrste usrednjene po vremenu sa odredjenim početnim stanjem neće prekoračiti neku granicu.

6.5 Ocena trajektorija

Teoreme u ovom poglavlju se odnose na neke granične nejednakosti za stope rasta veličina populacija razmatranih vrsta i pokazuju kako se rešenja sistema (6.4) menjaju u R^d_+.

Teorema 6.5.1 *Neka važe uslovi Teoreme 6.2.1. Tada za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$ *postoji pozitivna konstanta* $\tilde{K}$ *takva da je za rešenje sistema* (6.4)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^d x_i(t)}{t} \leq \tilde{K} \quad s.i. \tag{6.13}$$

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\sum_{i=1}^d \ln x_i(t)$, dobija se

$$\begin{aligned}
& d\left[\sum_{i=1}^d \ln x_i(t)\right] \\
& \leq \Bigg[\sum_{i=1}^m r_i(t) - \sum_{i=m+1}^d r_i(t) + \sum_{D_1} \left(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\right) \\
& \quad - \sum_{D_2} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)\right)^2\Bigg]dt + \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
\end{aligned}$$

Da bi se eliminisali izrazi sa kašnjenjem, uvodi se nenegativni funkcional

$$\tilde{V}_1(x(t)) = \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})} \sum_{D_1} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t x_j^{\beta_{ij}}(s),$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^d \ln x_i(t) + \tilde{V}_1(x(t))$$

$$\le \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(0) + \tilde{V}_1(x(0)) + M(t) + \int_0^t \Bigg[\sum_{i=1}^{m} r_i(s) - \sum_{i=m+1}^{d} r_i(s) + \sum_{D_1} a_{ij}(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s)$$
$$+ \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s) - \sum_{i=1}^{d} a_{ii}(s) x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \Bigg(\sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) \Bigg)^2 \Bigg] ds,$$

gde je $M(t) = \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) dw_j(s)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M(t), M(t) \rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \Bigg(\sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) \Bigg)^2 ds.$$

Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno i $\theta > 1$. Za svako celobrojno $n \ge 1$, na osnovu eksponencijalne martingale nejednakosti sledi

$$P\Bigg\{ \sup_{0\le t\le n} \Big[M(t) - \frac{\varepsilon}{2} \langle M(t), M(t) \rangle \Big] \ge \frac{\theta \ln n}{\varepsilon} \Bigg\} \le \frac{1}{n^\theta}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\theta}$ konvergira, na osnovu Borel-Cantellijeve leme sledi da postoji $\Omega_i \subset \Omega$ za koje je $P(\Omega_i) = 1$, tako da se za svako $\omega \in \Omega_i$ može naći celobrojno $n_i = n_i(\omega)$ takvo da je

$$M(t) \le \frac{\varepsilon}{2} \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{\theta \ln n}{\varepsilon}$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Dalje sledi

$$\sum_{i=1}^{d} \ln x_i(t) + \tilde{V}_1(x(t))$$
$$\le \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(0) + \tilde{V}_1(x(0)) + \frac{\theta \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \Bigg[\sum_{i=1}^{m} r_i(s) - \sum_{i=m+1}^{d} r_i(s) + \sum_{D_1} a_{ij}(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s)$$
$$+ \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s) - \sum_{i=1}^{d} a_{ii}(s) x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{d} \Bigg(\sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) \Bigg)^2 \Bigg] ds,$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_i(\omega)$ kad god je $\omega \in \Omega_i$. Zatim, neka je $\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^d \Omega_i$. Jasno je da važi $P(\Omega_0) = 1$. Za svako $\omega \in \Omega_0$, neka je $n_0 = \max_{1\le i\le d} n_i(\omega)$. Tada se za svako $\omega \in \Omega_0$ dobija

$$\sum_{i=1}^{d} \ln x_i(t) \le \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(0) + \tilde{V}_1(x(0)) + \frac{\theta \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t \tilde{F}(x(s)) ds,$$

pri čemu je

$$\tilde{F}(x(s)) = m(\bar{r}_i^u) - (d-m)(\tilde{r}_i^l) + (\bar{a}_{ij}^u) \sum_{D_1} x_j^{\alpha_{ij}}(s) + \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s)$$
$$- (\tilde{a}_{ii}^l) \sum_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1-\varepsilon}{2} (\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2 \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s)$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. U skladu sa uslovima teoreme, postoji pozitivna konstanta $\tilde{K}$ takva da je $\tilde{F}(x(s)) \leq \tilde{K}$ za svako $x \in R^d_+$, pa se za svako $\omega \in \Omega_0$, ako je $n-1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$, dobija

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\prod_{i=1}^d x_i(t)}{t} \leq \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\prod_{i=1}^d x_i(0)+\tilde{V}_1(x(0))}{n-1}+\frac{\theta\ln n}{\varepsilon(n-1)}+\tilde{K}\right]=\tilde{K}\ \ s.i.$$

čime je tvrdjenje dokazano. $\diamondsuit$

U sledećim teoremama su date neke asimptotske ocene trajektorija rešenja sistema (6.4). One se dokazuju korišćenjem eksponencijalne martingalne nejednakosti.

Teorema 6.5.2 *Neka važe uslovi Teoreme 6.2.1. Tada za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C$, *za rešenje sistema* (6.4) *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln\prod_{i=1}^d x_i(t)}{\ln t} \leq d \quad s.i. \tag{6.14}$$

Dokaz. Neka je $\lambda > 0$. Za $i = 1, \ldots, m$ primenom Itôve formule na $e^{\lambda t}\ln x_i(t)$ se dobija

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\ln x_i(t) &\leq \ln x_i(0) + M_i(t) \\ &+ \int_0^t e^{\lambda s}\left[\lambda \ln x_i(s) + r_i(s) - \sum_{j=1}^d a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)\right]ds, \end{aligned} \tag{6.15}$$

gde je $M_i(t) = \int_0^t e^{\lambda s}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s)x_j^{\theta_{ij}}(s)dw_j(s)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M_i(t), M_i(t)\rangle = \int_0^t e^{2\lambda s}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)ds.$$

Zatim, za $i = m+1, \ldots, d$ primenom formule Itôa na $e^{\lambda t}\ln x_i(t)$ sledi

$$\begin{aligned} &d[e^{\lambda t}\ln x_i(t)] \\ &\leq e^{\lambda t}\left[\lambda \ln x_i(t) - r_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\right. \\ &\qquad \left. - \sum_{j=m+1}^d a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t)\right]dt + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Uvodjenjem pozitivnog funkcionala

$$\hat{V}_1(x_i(t)) = \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})}\sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t e^{\lambda s}x_j^{\beta_{ij}}(s)ds$$

sledi da je

$$
\begin{aligned}
&d[e^{\lambda t}\ln x_i(t)+\hat{V}_1(x_i(t))]\\
&\le e^{\lambda t}\Bigg[\lambda\ln x_i(t)-r_i(t)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)-\sum_{j=m+1}^{d}a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)+\frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^{u})}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^{u})}\sum_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{ij}}(t)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(t)x_j^{2\theta_{ij}}(t)\Bigg]dt+e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).
\end{aligned}
$$

Odavde je

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda t}\ln x_i(t)+\hat{V}_1(x_i(t)) \qquad (6.16)\\
&\le \ln x_i(0)+\hat{V}_1(x_i(0))+M_i(t)+\int_0^t e^{\lambda s}\Bigg[\lambda\ln x_i(s)-r_i(s)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s)\\
&-\sum_{j=m+1}^{d}a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s)+\frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^{u})}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^{u})}\sum_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{ij}}(s)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)\Bigg]ds,
\end{aligned}
$$

gde je $M_i(t)$ isti realan neprekidan lokalni martingal pomenut ranije.

Neka je $\varepsilon\in(0,1)$ proizvoljno i $\theta>1$. Za svako celobrojno $n\ge 1$, kao u dokazu Teoreme 6.5.1, zaključuje se

$$
M_i(t)\le\frac{\varepsilon}{2e^{\lambda n}}\langle M_i(t),M_i(t)\rangle+\frac{\theta e^{\lambda n}\ln n}{\varepsilon}
$$

za $0\le t\le n$ i $n\ge n_i(\omega)$, $i=1,\dots,d$. Dakle, iz (6.15) za $i=1,\dots,m$ sledi

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}\ln x_i(t)\le \ln x_i(0)+\frac{\theta e^{\lambda n}\ln n}{\varepsilon}+\int_0^t e^{\lambda s}\Bigg[\lambda\ln x_i(s)+r_i(s) \qquad (6.17)\\
-\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s)-\frac{1-\varepsilon e^{\lambda(s-n)}}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)\Bigg]ds
\end{aligned}
$$

dok je iz (6.17) za $i=m+1,\dots,d$,

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}\ln x_i(t)&\le \ln x_i(0)+\hat{V}_1(x_i(0))+\frac{\theta e^{\lambda n}\ln n}{\varepsilon} \qquad (6.18)\\
&+\int_0^t e^{\lambda s}\Bigg[\lambda\ln x_i(s)-r_i(s)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s)-\sum_{j=m+1}^{d}a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s)\\
&+\frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^{u})}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^{u})}\sum_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{ij}}(s)-\frac{1-\varepsilon e^{\lambda(s-n)}}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s)x_j^{2\theta_{ij}}(s)\Bigg]ds
\end{aligned}
$$

za $0\le t\le n$ i $n\ge n_i(\omega)$. Zatim se iz ocena (6.17) i (6.18) dobija

$$
e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{d}\ln x_i(t)\le\sum_{i=1}^{d}\ln x_i(0)+\sum_{i=m+1}^{d}\hat{V}_1(x_i(0))+\frac{\theta d e^{\lambda n}\ln n}{\varepsilon}+\int_0^t e^{\lambda s}\hat{F}(x(s))ds
$$

pri čemu je

$$\hat{F}(x(s)) = \lambda \sum_{i=1}^{d} \ln x_i(s) + m(\bar{r}_i^u) - (d-m)(\tilde{r}_i^l) + (\bar{a}_{ij}^u) \sum_{D_1} x_j^{\alpha_{ij}}(s)$$
$$+ \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s) - (\tilde{a}_{ii}^l) \sum_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_{ii}}(s) - \frac{1-\varepsilon e^{\lambda(s-n)}}{2} (\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2 \sum_{i=1}^{d} x_i^{2\theta_{ii}}(s)$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_0(\omega)$. Za dovoljno malo $\lambda > 0$ može se naći pozitivna konstanta $\hat{K}$ takva da je $\hat{F}(x(s)) \le \hat{K}$ za svako $x \in R_+^d$. Tada je

$$e^{\lambda t} \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t) \le \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(0) + \sum_{i=m+1}^{d} \hat{V}_1(x_i(0)) + \frac{\theta d e^{\lambda n} \ln n}{\varepsilon} + \hat{K} \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda},$$

za $0 \le t \le n$ i $n \ge n_0(\omega)$. Tada ako je $n-1 \le t \le n$ i $n \ge n_0(\omega)$, dobija se

$$\frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \le \frac{Ce^{-\lambda(n-1)} + \frac{\theta d e^{\lambda} \ln n}{\varepsilon} + \frac{\hat{K}}{\lambda} - \frac{\hat{K}}{\lambda} e^{-\lambda(n-1)}}{\ln(n-1)},$$

gde je $C = \ln \prod_{i=1}^{d} x_i(0) + \sum_{i=m+1}^{d} \hat{V}_1(x_i(0))$, pa je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{d} x_i(t)}{\ln t} \le \frac{\theta d e^{\lambda}}{\varepsilon} \quad s.i.$$

Kada $\theta \to 1$, $\lambda \to 0$ i $\varepsilon \to 1$, dolazi se do tvrdjenja (6.14). $\diamondsuit$

Teorema 6.5.3 *Neka važe pretpostavke Teoreme 6.2.1 i neka je $\alpha_{ii} = \alpha$ i $\theta_{ii} = \theta$ za svako $i = 1, \dots, d$. Za date početne uslove $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$ rešenje $x(t)$ sistema (6.4) ima svojstvo*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \le 1 \quad s.i. \tag{6.19}$$

Dokaz. Za $x \in R_+^d$ neka je $\breve{V}(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i$ funkcija Lyapunova i neka je $\lambda > 0$. Primenjujući formulu Itôa na $e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t))$ dobija se

$$\begin{aligned}
& d[e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t))] \\
& \le e^{\lambda t} \Bigg\{ \lambda \ln \breve{V}(x(t)) + \frac{1}{\breve{V}(x(t))} \sum_{i=1}^{m} x_i(t) \Big[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d} a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) \Big] \\
& + \frac{1}{\breve{V}(x(t))} \sum_{i=m+1}^{d} x_i(t) \Big[\sum_{j=1}^{m} \Big(a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t) x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) \Big) \\
& - \sum_{j=m+1}^{d} a_{ij}(t) x_j^{\alpha_{ij}}(t) \Big] - \frac{1}{2\breve{V}^2(x(t))} \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_i(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) \Big)^2 \Bigg\} dt \\
& + \frac{e^{\lambda t}}{\breve{V}(x(t))} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) x_i(t) x_j^{\theta_{ij}}(t) dw_j(t).
\end{aligned}$$

Kako je $x_i \leq \breve{V}(x)$, to je

$$d[e^{\lambda t}\ln \breve{V}(x(t))] \leq e^{\lambda t}\Big[\lambda \ln \breve{V}(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} r_i(t) - \frac{1}{\breve{V}(x(t))}\sum_{D_2} a_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)$$
$$+ \sum_{D_1} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \sum_{D_1} b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))$$
$$- \frac{1}{2\breve{V}^2(x(t))}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)\Big)^2\Big]dt$$
$$+ \frac{e^{\lambda t}}{\breve{V}(x(t))}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t).$$

Uvodjenjem funkcionala

$$\breve{V}_1(x(t)) = \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{D_1}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} e^{\lambda s}x_j^{\beta_{ij}}(s)ds$$

sledi da je

$$d[e^{\lambda t}\ln \breve{V}(x(t)) + \breve{V}_1(x(t))]$$
$$\leq e^{\lambda t}\Big[\lambda \ln \breve{V}(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} r_i(t) - \frac{1}{\breve{V}(x(t))}\sum_{D_2} a_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \sum_{D_1} a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t)$$
$$+ \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(t) - \frac{1}{2\breve{V}^2(x(t))}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)\Big)^2\Big]dt$$
$$+ \frac{e^{\lambda t}}{\breve{V}(x(t))}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)x_i(t)x_j^{\theta_{ij}}(t)dw_j(t),$$

a zatim

$$e^{\lambda t}\ln \breve{V}(x(t)) + \breve{V}_1(x(t)) \tag{6.20}$$
$$\leq \ln \breve{V}(x(0)) + \breve{V}_1(x(0)) + M(t) + \int_0^t e^{\lambda s}\Big[\lambda \ln \breve{V}(x(s)) + \sum_{i=1}^{m} r_i(s)$$
$$- \frac{1}{\breve{V}(x(s))}\sum_{D_2} a_{ij}(s)x_i(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s) + \sum_{D_1} a_{ij}(s)x_j^{\alpha_{ij}}(s) + \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s)$$
$$- \frac{1}{2\breve{V}^2(x(s))}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{d}\sigma_{ij}(s)x_i(s)x_j^{\theta_{ij}}(s)\Big)^2\Big]ds,$$

gde je $M(t) = \int_0^t \frac{e^{\lambda s}}{\breve{V}(x(s))}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}(s)x_i(s)x_j^{\theta_{ij}}(s)dw_j(s)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t=0$, sa kvadratnom varijacijom

$$\langle M(t), M(t)\rangle = \int_0^t \frac{e^{2\lambda s}}{\breve{V}^2(x(s))}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{d}\sigma_{ij}(s)x_i(s)x_j^{\theta_{ij}}(s)\Big)^2 ds.$$

Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno i $\theta > 1$. Za svako celobrojno $n \geq 1$, slično kao u dokazu Teoreme 6.5.1, dobija se

$$M(t) \leq \frac{\varepsilon}{2e^{\lambda n}} \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{\theta e^{\lambda n} \ln n}{\varepsilon}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, d$. Tada (6.20) postaje

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t)) &\leq \ln \breve{V}(x(0)) + \breve{V}_1(x(0)) + \frac{\theta e^{\lambda n} \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t e^{\lambda s} \Big[\lambda \ln \breve{V}(x(s)) \\ &+ \sum_{i=1}^m r_i(s) - \frac{1}{\breve{V}(x(s))} \sum_{D_2} a_{ij}(s) x_i(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s) + \sum_{D_1} a_{ij}(s) x_j^{\alpha_{ij}}(s) \\ &+ \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s) - \frac{1-\varepsilon e^{\lambda(s-n)}}{2\breve{V}^2(x(s))} \sum_{j=1}^d \Big(\sum_{i=1}^d \sigma_{ij}(s) x_i(s) x_j^{\theta_{ij}}(s) \Big)^2 \Big] ds \end{aligned} \tag{6.21}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_i(\omega)$. Pošto je $\alpha_{ii} = \alpha$ i $\theta_{ii} = \theta$ za svako $i = 1, \ldots, d$, korišćenjem elementarne nejednakosti $\sum_{i=1}^d x_i^\alpha \leq (\sum_{i=1}^d x_i)^\alpha \leq d^{\alpha-1} \sum_{i=1}^d x^\alpha$ iz (6.21) sledi

$$e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t)) \leq \ln \breve{V}(x(0)) + \breve{V}_1(x(0)) + \frac{\theta e^{\lambda n} \ln n}{\varepsilon} + \int_0^t e^{\lambda s} \breve{F}(x(s)) ds,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \breve{F}(x(s)) &= \lambda \ln \breve{V}(x(s)) + m(\bar{r}_i^u) + (\bar{a}_{ij}^u) \sum_{D_1} x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{e^{\lambda\tau}(\bar{b}_{ij}^u)}{1-(\bar{\tau}_{ij}'^u)} \sum_{D_1} x_j^{\beta_{ij}}(s) \\ &- \frac{(\tilde{a}_{ii}^l)}{d^\alpha} \sum_{i=1}^d x_i^\alpha(s) - \frac{1-\varepsilon e^{\lambda(s-n)}}{2d^{1+2\theta}} (\tilde{\sigma}_{ii}^l)^2 \sum_{i=1}^d x_i^{2\theta}(s) \end{aligned}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Iz uslova teoreme, za dovoljno malo $\lambda > 0$ postoji pozitivna konstanta $\breve{K}$ takva da je $\breve{F}(x(s)) \leq \breve{K}$ za svako $x \in R_+^d$. Tada je

$$e^{\lambda t} \ln \breve{V}(x(t)) \leq \ln \breve{V}(x(0)) + \breve{V}_1(x(0)) + \frac{\theta e^{\lambda n} \ln n}{\varepsilon} + \breve{K} \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}$$

za $0 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$. Otuda, ako je $n-1 \leq t \leq n$ i $n \geq n_0(\omega)$ za svako $\omega \in \Omega_0$, sledi

$$\frac{\ln \breve{V}(x(t))}{\ln t} \leq \frac{e^{-\lambda(n-1)}(\ln \breve{V}(x(0)) + \breve{V}_1(x(0))) + \frac{\theta d e^\lambda \ln n}{\varepsilon} + \frac{\breve{K}}{\lambda} - \frac{\breve{K}}{\lambda} e^{-\lambda(n-1)}}{\ln(n-1)},$$

pa je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \breve{V}(x(t))}{\ln t} \leq \frac{\theta e^\lambda}{\varepsilon} \quad s.i.$$

Kako je $|x| \leq \breve{V}(x)$, tvrdjenje (6.19) sledi kada $\theta \to 1$, $\lambda \to 0$ i $\varepsilon \to 1$. $\diamondsuit$

Teorema 6.5.3 pokazuje da ukupna populacija u ekosistemu ne može da raste isuviše brzo. Analogno prethodnim glavama, može se zaključiti da rešenje $x(t)$ raste sa verovatnoćom jedan najviše polinomijalno sa stepenom bliskim jedinici.

6.6 Istrebljenje

U nastavku se razmatra efekat velikog šuma na specijalan slučaj sistema (6.4) kada je $\theta_{ij} = 0$ za svako $i, j = 1, \ldots, d$,

$$
\begin{aligned}
dx_i(t) &= x_i(t)\Bigg\{\Bigg[r_i(t) - \sum_{j=1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\Bigg]dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)dw_j(t)\Bigg\}, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
dx_i(t) &= x_i(t)\Bigg\{\Bigg[-r_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big) \\
&\qquad - \sum_{j=m+1}^{d}\Big(a_{ij}(t)x_j^{\alpha_{ij}}(t) + b_{ij}(t)x_j^{\beta_{ij}}(t-\tau_{ij}(t))\Big)\Bigg]dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)dw_j(t)\Bigg\}, \\
&\qquad i = m+1, \ldots, d.
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

U sledećoj teoremi se navode svojstva rešenja sistema (6.22), slična onima iz Poglavlja 6.1-6.5 koja se odnose na rešenja sistema (6.4).

Teorema 6.6.1 *Neka je* $(\bar{\tau}_{ij}'^{u}) < 1$. *Ako su zadovoljeni uslovi* $(\tilde{a}_{ii}^{l}) > 0$ *i* $(\bar{\alpha}_{ii}) > \max_{D_1}\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$, *pri čemu je* $D_1 = \{(i,j) : m+1 \le i \le d, 1 \le j \le m\}$, *tada za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$ *važe naredna tvrdjenja:*

(*a*) *Postoji jedinstveno rešenje* $x(t)$, $t \ge -\tau$ *sistema* (6.22) *i ono ostaje u* R_+^d *sa verovatnoćom jedan.*

(*b*) *Neka je* $p > 0$. *Tada rešenje sistema* (6.22) *zadovoljava* (6.8) *i* (6.10), *gde su* $\bar{K}(p)$ *i* c *pozitivne konstante nezavisne od početnih podataka.*

(*c*) *Rešenje sistema* (6.22) *je stohastički ultimativno ograničeno.*

(*d*) *Postoji pozitivna konstanta* $\tilde{K}$ *takva da za rešenje sistema* (6.22) *važi* (6.13).

(*e*) *Rešenje sistema* (6.22) *ima svojstvo* (6.14).

(*f*) *Ako je* $\alpha_{ii} = \alpha$ *za* $i = 1, \ldots, d$, *tada za rešenje* $x(t)$ *sistema* (6.22) *važi* (6.19).

Dokaz ove teoreme je modifikacija dokaza Teorema 6.2.1-6.5.3 koja važe za sistem (6.4), pa će biti izostavljen.

Naredna teorema pokazuje da ukoliko je intenzitet šuma dovoljno veliki, to može, sa verovatnoćom jedan, dovesti do istrebljenja nekih populacija plena, a ako dodje do istrebljenja svih populacija plena, biće istrebljene i sve populacije predatora sa verovatnoćom jedan.

Teorema 6.6.2 *Neka važe uslovi Teoreme 6.6.1. Za proizvoljne početne uslove* $\{\varphi(t) : -\tau \le t \le 0\} \in C$ *i za svako* $i = 1, \dots, m$ *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Big(r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)\Big)ds \quad s.i. \tag{6.23}$$

Ako za neko $i = 1, \dots, m$ *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Big(r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)\Big)ds < 0, \tag{6.24}$$

tada

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad s.i., \tag{6.25}$$

tj. i-ta populacija (plen) će biti istrebljena eksponencijalno sa verovatnoćom jedan.

Štaviše, ako dodje do istrebljenja svih vrsta plena ($i = 1, \dots, m$)*, doći će do istrebljenja svih vrsta predatora* ($i = m+1, \dots, d$) *sa verovatnoćom jedan.*

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$ za $i = 1, \dots, m$ se dobija

$$\ln x_i(t) \le \ln x_i(0) + \int_0^t \Big(r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)\Big)ds + M_i(t),$$

gde je $M_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dw_j(t)$ realan neprekidan lokalni martingal koji se anulira u $t = 0$, sa kvadratnom varijacijom $\langle M_i(t), M_i(t)\rangle = \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t)ds$. Kada $t \to \infty$, prema strogom zakonu velikih brojeva za martingale je $\lim_{t\to\infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0$, pa važi tvrdjenje (6.23). Dalje, ako za svako $i = 1, \dots, m$ važi pretpostavka (6.24), direktno sledi da će do istrebljenja i-te populacije plena doći sa verovatnoćom jedan.

Za $i = m+1, \dots, d$ primenom formule Itôa na $\ln x_i(t)$ se dobija

$$\begin{aligned} d\ln x_i(t) \le \Big[&- r_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t) + (\bar{a}_{ij}^u)\sum_{j=1}^m x_j^{\alpha_{ij}}(t) \\ &+ (\bar{b}_{ij}^u)\sum_{j=1}^m x_j^{\beta_{ij}}(t - \tau_{ij}(t)) - a_{ii}^l x_i^{\alpha_{ii}}(t)\Big]dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dw_j(t). \end{aligned}$$

Uvodjenjem pozitivnog funkcionala

$$\hat{V}_1(x_i(t)) = \frac{(\bar{b}_{ij}^u)}{1 - (\bar{\tau}_{ij}'^u)}\sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t x_j^{\beta_{ij}}(s)ds$$

se eliminišu članovi sa kašnjenjem, čime se dobija

$$d[\ln x_i(t) + \hat{V}_1(x_i(t))] \le \Big[- r_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t) + S_i(t)\Big]dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dw_j(t),$$

gde je $S_i(t) = (\bar{a}^u_{ij})\sum_{j=1}^m x_j^{\alpha_{ij}}(t) + \frac{(\bar{b}^u_{ij})}{1-(\bar{\tau}'^u_{ij})}\sum_{j=1}^m x_j^{\beta_{ij}}(t)$, odakle sledi

$$\ln x_i(t) \le \ln x_i(0) + \hat{V}_1(x_i(0)) + M_i(t) + \int_0^t \Big[-r_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s) + S_i(s)\Big] ds,$$

gde je $M_i(t)$ isti lokalni martingal kao i u prethodnom delu dokaza, tako da važi $\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t} = 0$. Ako za svako $i = 1,\ldots,m$ važi (6.25), tada $S_i(t) \to 0$ kada $t\to\infty$, pa za svako $i = m+1,\ldots,d$ sledi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \le 0,$$

odnosno dolazi do istrebljenja svih populacija predatora. $\diamondsuit$

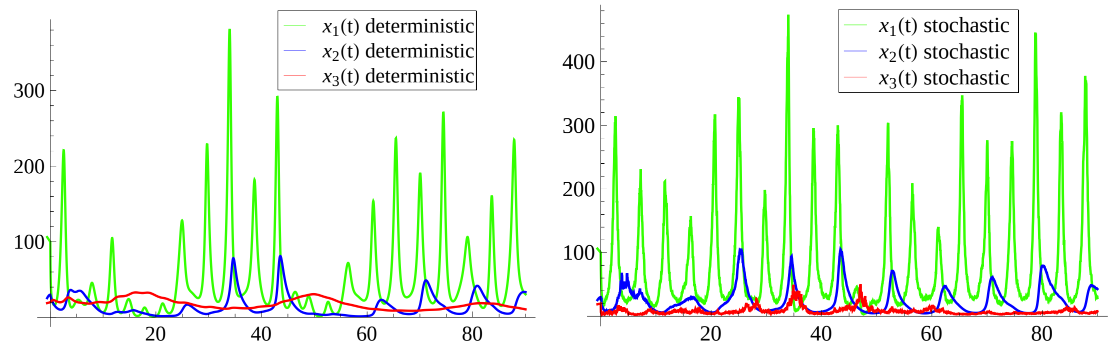
6.7 Numerička simulacija

Primer 6.7.1 Posmatra se ekosistem koji čine jedna vrsta plena i dve vrste predatora, gde $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ predstavljaju veličine populacija posmatranih vrsta, redom. Pošto različiti sezonski efekti faktora sredine utiču na populacije (kao što su sezonski efekti vezani za vremenske uslove, zalihe hrane, temperaturu, itd.), prirodna je pretpostavka da su neki od koeficijenata posmatranog ekosistema ($r_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $\tau_{ij}(t)$) periodične ili skoro periodične funkcije (videti, na primer [11, 12, 15, 53, 94]). U tom smislu, neka su date sledeće unutrašnje stope rasta za plen, odnosno smrtnosti za predatore

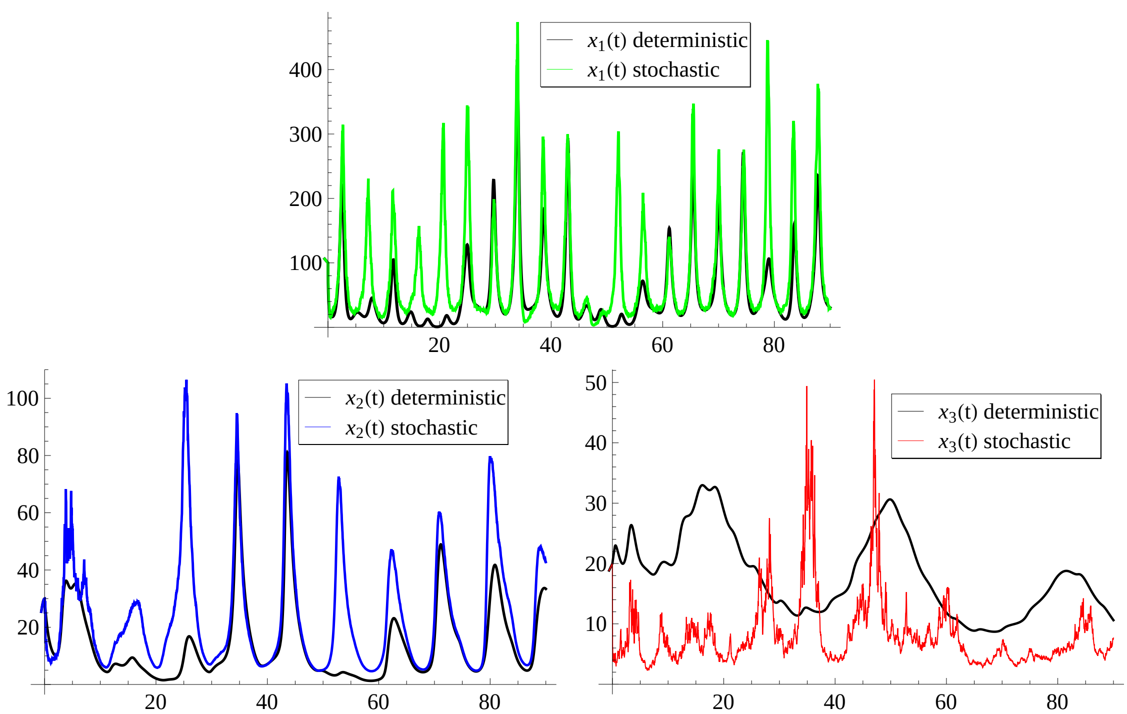
$$r_1(t) = \frac{9+\sin\sqrt{2t}}{3}, \quad r_2(t) = \frac{2.5+\sin t}{20} + \frac{1}{4+\sin^2 t}, \quad r_3(t) = 0.01 + \frac{\cos\sqrt{0.2t}}{10}, \tag{6.26}$$

a ostali parametri su

$$\begin{aligned}
&a_{11}(t) = 0.1\left(0.02+\cos^2(0.7t)\right), && b_{12}(t) = 0.01 + \frac{0.03}{10+t}, \\
&a_{22}(t) = 0.02\left(1-0.2\sin(t/3)\right), && b_{13}(t) = 0.05\cos^2 t, \\
&a_{33}(t) = \frac{0.02+0.1\cos^2(0.1t)}{5}, && b_{21}(t) = 0.2\sin^2\frac{t}{3}, \\
& && b_{31}(t) = \frac{2}{t+10}, \\
&\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1, && \\
&\beta_{12} = 3/4, \qquad \beta_{13} = 4/3, && \beta_{21} = 1/2, \qquad \beta_{31} = 1/3, \\
&\tau_{12}(t) = 0.2(2+\cos^2 t), && \tau_{21}(t) = 0.4\sin^2\frac{t}{2}, \\
&\tau_{13}(t) = \frac{1}{\sqrt{4+t}}, && \tau_{31}(t) = \frac{1}{\sqrt{5+t}}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$



Slika 6.1: Dinamika Gilpin-Ayala determinističkog modela sa jednom vrstom plena i dve vrste predatora (6.1) (levo) i stohastički model (6.4) (desno) sa početnim podacima (6.28) i parametrima (6.26)-(6.27), odnosno (6.26)-(6.27) i (6.29)-(6.30), respektivno (vremenski korak $\Delta t = 0.03$)



Slika 6.2: Determinističke i stohastičke trajektorije Gilpin-Ayala modela sa jednom vrstom plena i dve vrste predatora (6.1) i (6.4) sa početnim podacima (6.28) i parametrima (6.26)-(6.27),(6.29)-(6.30) (vremenski korak $\Delta t = 0.03$)

Očigledno, $\tau = \max_{1\le i,j\le 3}\sup_{t\ge 0}\tau_{ij}(t) = 0.6$. Rešenje determinističkog sistema (6.1) sa koeficijentima (6.26) – (6.27) i početnim uslovima

$$\xi_1(t) = 100e^{-0.1t}, \quad \xi_2(t) = \frac{60}{2+t^2}, \quad \xi_3(t) = 20e^{0.1t}, \quad -0.6 \le t \le 0 \tag{6.28}$$

je predstavljeno na Slici 6.1 (levo) [1].

Medjutim, kako na ekosisteme u realnom svetu utiču nepredvidivi faktori, to može rezultirati promenama u biološkim parametrima, kao što su stopa rasta $r_1(t)$ plena i stope smrtnosti $r_2(t)$ i $r_3(t)$ predatora. Ako se primene perturbacije date sa (6.3), pri čemu je

$$\sigma_{11}(t) = 0.2\left(1+\frac{1}{1+t}\right),\ \sigma_{22}(t) = 0.1\ln\left(1+\frac{1}{1+t}\right),\ \sigma_{33}(t) = 0.4\left(0.1+\frac{1}{\sqrt{2+t}}\right), \tag{6.29}$$

tada je $(\tilde{a}^l_{ii}) > 0$ i $(\tilde{\sigma}^l_{ii}) = 0$. Na osnovu uslova 2 Teoreme 6.2.1 zaključuje se da je potrebno da važi $(\bar{\theta}_{ij}) < 1$. Na primer, za vrednosti parametara θ_{ii}

$$\theta_{11} = 0, \qquad \theta_{22} = 4/5, \qquad \theta_{33} = 2/3, \tag{6.30}$$

rešenje stohastičkog sistema (6.4) je ilustrovano na Slici 6.1 (desno).

Na Slici 6.2 trajektorije razmatranih vrsta plena i predatora su pojedinačno predstavljene da bi se videla razlika u ponašanju u determinističkom i stohastičkom slučaju za svaku od vrsta posebno.

[1]Sva izračunavanja su radjena koristeći programski paket MATHEMATICA.

Zaključak

U ovoj disertaciji se proučavaju neki tipovi populacionih stohastičkih Gilpin-Ayala modela, pri čemu se uz različite pretpostavke za parametre modela ispituje promena broja jedinki u populaciji.

U Glavi 2 se razmatra Gilpin-Ayala sistem kompeticije u koji su uključeni slučajni uticaji tipa Gausovog belog šuma. U Glavi 3 se razmatra stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa Markovskim prelazima, tj. sistem na koji osim Gausovog belog šuma utiče i obojeni, tj. telegrafski šum. Glava 4 je posvećena stohastičkom Gilpin-Ayala modelu kompeticije sa beskonačnim kašnjenjem. U Glavi 5 se razmatra neautonomni stohastički Gilpin-Ayala model kompeticije sa kašnjenjem zavisnim od vremena. Glava 6 je posvećena stohastičkom predator-plen Gilpin-Ayala modelu sa kašnjenjem sa m vrsta plena i $n-m$ vrsta predatora.

Kako rešenja ovih sistema predstavljaju veličine populacija, za svaki od razmatranih modela je pokazana egzistencija i jedinstvenost pozitivnog globalnog rešenja. Pored toga, dokazuje se da za rešenja važi osobina stohastičke ograničenosti, a s obzirom da nije moguće odrediti eksplicitno rešenje, razmatraju se asimptotsko ponašanje rešenja i asimptotsko ponašanje trajektorija za dug vremenski period. Za pojedine modele je pokazano da su rešenja skoro izvesno neprekidna. Zatim, za neke modele su navedeni i dovoljni uslovi pri kojima neke ili sve razmatrane populacije mogu biti dovedene do istrebljenja, mogu biti neperzistentne, slabo perzistentne ili permanentne. Primeri sa numeričkom simulacijom ilustruju rezultate izložene u disertaciji.

Populacionim modelima opisanim u ovoj disertaciji nisu iscrpljene sve mogućnosti za razmatranje stohastičkih Gilpin-Ayala modela. U novije vreme se dosta pažnje poklanja izučavanju modela kojima se modeliraju neuronske mreže, kao i modela sa impulsivnim efektima. Takvi tipovi Gilpin-Ayala modela do sada nisu izučavani, tako da bi dalje istraživanje moglo biti usmereno u tom pravcu. Takodje, Gilpin-Ayla modeli mogu poslužiti i za opisivanje mnogih pojava iz drugih oblasti (medicine, hemije, inženjerstva, ekonomije), što takodje može biti tema budućeg istraživanja.

Summary

In this thesis several different types of stochastic Gilpin-Ayala population models are considered and it is observed how the size of considered populations changes under different conditions for parameters of these models.

In Chapter 2 Gilpin-Ayala competition system with random perturbation is considered. Chapter 3 is dedicated to a stochastic Gilpin-Ayala competition system with Markovian switching, i.e. system affected not only by white noise but also by colored noise. In Chapter 4 stochastic Gilpin-Ayala competition model with infinite delay is considered. In Chapter 5 nonautonomous stochastic Gilpin-Ayala competition model with time-varying delay is considered. Chapter 6 is dedicated to a stochastic predator-prey Gilpin-Ayala model with delay with m prey species and $n-m$ predator species.

Since the solutions of considered systems represent the sizes of populations, existence and uniqueness of positive global solutions is proved for each system. Moreover, it is proved that the solutions are stochastically ultimately bounded. Since it is not possible to find explicit solutions of considered systems, asymptotic behavior of solutions and trajectories is estimated. Also, almost sure continuity is proved for some models. Then, for some models sufficient conditions under which some or all considered species will become extinct, be nonpersistent, weak persistent or permanent are established. Examples with numerical simulations illustrate results represented in the thesis.

Population models observed in this thesis have not drained all possibilities for studying stochastic Gilpin-Ayala models. In the recent years, models which consider neural networks or impulsive effects attract great attention of researchers. These types of stochastic Gilpin-Ayala models have not yet been observed, so further investigation could be oriented in that direction. Also, many other phenomena from different ares of research (medicine, chemistry, engineering, economy) could be described by Gilpin-Ayla models, so it also could be a subject of future research.

Literatura

[1] A.S. Ackleh, D.F. Marshall, H.E. Heatherly, Extinction in a generalized Lotka-Volterra predator-prey model, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 13 (3) (2000) 287-297.

[2] A. Bahar, X. Mao, Stochastic delay Lotka-Volterra model, J. Math. Anal. Appl. 292 (2004) 364-380.

[3] A. Bahar, X. Mao, Stochastic delay population dynamics, Int. J. Pure Appl. Math. 11 (2004) 377-400.

[4] D. Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[5] I. Barbalat, Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées 4 (1959) 267-270.

[6] H. Bereketoglu, I. Gyori, Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka–Volterra type system with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 210 (1997) 279-291.

[7] A.A. Berryman, The origins and evolution of predator-prey theory, Ecology 73 (1992) 1530-1535.

[8] A. Beuter, J. Belair, C. Labrie, J. Belair, Feedback and delays in neurological diseases: a modelling study using dynamical systems, Bull. Math. Biol. 55 (1993) 525-541.

[9] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. 6th Berkley Symp. Math. Statis. Prob., Berkley, Univ. of California Press, 2 (1972) 223-240.

[10] F.D. Chen, Z. Li, X.D. Xie, Permanence of a nonlinear integro-differential prey-competition model with infinite delays, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13 (2008) 2290-2297.

[11] F. Chen, C. Shi, Global attractivity in an almost periodic multi-species nonlinear ecological model, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 376-392.

[12] F.D. Chen, J.L. Shi, Periodicity in a nonlinear predator-prey system with state dependent delays, Acta Math. Appl. Sin. 26 (1) (2005) 49-60.

[13] F.Chen, Some new results on the permanence and extinction of nonautonomous Gilpin-Ayala competition model with delays, Nonlinear Anal. Real World Appl. 7 (2006) 1205-1222.

[14] F.D. Chen, X.D. Xie, Periodicity and stability of a nonlinear periodic integro-differential prey-competition model with infinite delays, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 12 (6) (2007) 876-885.

[15] F. Chen, X. Xie, J.Shi, Existence, uniqueness and stability of positive periodic solution for a nonlinear prey-competition model with delays, J. Comput. Appl. Math. 194 (2) (2006) 368-387.

[16] H. Cramer, On the theory of random processes, Ann. Math. 41 (1940) 215-230.

[17] C. Delacherie, Capacites et processus stochastiques, Berlin, Springer Verlag, 1972.

[18] C. Dolean-Dade, P. Meyer, Integrales stochastiques par raport aux martingales, Lect. Notes Math. 124 (1970) 77-107.

[19] J.L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, New York, 1953.

[20] N.H. Du, V.H. Sam, Dynamics of a stochastic Lotka-Volterra model perturbed by white noise, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 82-97.

[21] C.W. Eurich, J.G. Milton, Noise-induced transitions in human postural sway, Phys. Rev. 54 (1996) 6681-6684.

[22] M. Fan, K. Wang, Global periodic solutions of a generalized n-species Gilpin-Ayala competition model, Comp. and Math. with Appl. 40 (2000) 1141-1151.

[23] S.C. Gamradt, L.B. Kats, Effect of introduced crayfish and mosquitofish on California newts, Conservation Biology 10 (1996) 1155-1162.

[24] I. I. Gikhman, Certain differential equations with random functions, Ukr. Math. J. 2 (3) (1950) 45-69. (In Russian)

[25] I. I. Gikhman, On the theory of differential equations of random processes, Ukr. Math. J. 2 (4) (1950) 37-63. (In Russian)

[26] M.E. Gilpin, F.J. Ayala, Global models of growth and competition, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 70 (1973) 3590-3593.

[27] K. Gopalsamy, Persistence in periodic and almost periodic Lotka-Volterra systems, J. Math. Biol. 21 (1984) 145-148.

[28] C. M. Grinstead, J. L. Snell, Introduction to Probability: Second Revised Edition, AMS, 1997.

[29] T.G. Hallam, Z.E. Ma, Persistence in population models with demographic fluctuations, J. Math. Biol. 24 (1986) 327-399.

[30] X. He, K. Gopalsamy, Persistence, attractivity and delay in facultative mutualism, J. Math. Anal. Appl. 215 (1997) 154-173.

[31] A. Huang, Permanence of a nonlinear prey-competition model with delays, Appl. Math. Comput. 197 (2008) 372-381.

[32] K. Itô, Stochastic integrals, Proc. Imperial Acad. Tokyo, 20 (1944) 519-524.

[33] K. Itô, On a stochastic integral equation, Proc. Imperial Acad. Tokyo 22 (1946) 32-35.

[34] K. Itô, On stochastic differential equations, Memorial Math. Society 4 (1951) 1-51.

[35] K. Itô, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J. 3 (1951) 55-65.

[36] K. Itô, On a formula of stochastic differentials, Mathematika, Sbornik perevodov inost. statei 3 (1959) 131-141.

[37] S. Janković, M. Jovanović, Analytic Approximations of Solutions to Stochastic Differential Equations, Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[38] M. Jovanović, M. Vasilova, Dynamics of non-autonomous stochastic Gilpin-Ayala competition model with time-varying delays, poslat.

[39] A. Ja. Khinchin, Correlation theory of stationar processes, Uspehi Mat. Nauk 5 (1939) 42-51. (in Russian)

[40] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical solution of stochastic differential equations, Springer, Berlin, 1995.

[41] A.N. Kolmogorov, Basic notions in probability theory, ONTI, 1936. (in Russian)

[42] A.N. Kolmogorov, Analytic methods in probability theory, Uspehi Matem. Nauk (1938) 5-41. (in Russian)

[43] A. Korobeinikov, G.C. Wake, Global properties of the three-dimensional predator-prey Lotka-Volterra systems, J. Appl. Math. Decis. Sci. 3 (2) (1999) 155-162.

[44] Y. Kuang, Rich dynamics of Gause-type ratio-dependent predator prey system, Fields Inst. Commun. 21 (1999) 325-337.

[45] H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967) 209-245.

[46] G. Ladde, V. Lakshmikantham, Random Differential Inequalities, Academic Press, New York, 1980.

[47] X.Y. Li, A. Gray, D. Jiang, X. Mao, Sufficient and necessary conditions of stochastic permanence and extinction for stochastic logistic populations under regime switching, J. Math. Anal. Appl. 376 (2011) 11-28.

[48] X.Y. Li, D.Q. Jiang, X.R. Mao, Population dynamical behavior of Lotka-Volterra system under regime switching, J. Comput. Appl. Math. 232 (2009) 427-448.

[49] X. Li, X. Mao, Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation, Discrete and Continuous Dynamical Systems 24 (2) (2009) 523-545.

[50] B. Lian, S. Hu, Asymptotic behaviour of the stochastic Gilpin-Ayala competition models, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 419-428.

[51] B. Lian, S. Hu, Stochastic delay Gilpin-Ayala competition models, Stoch. Dyn. 6 (4) (2006) 561-576.

[52] X. Liao, S. Zhou, Y. Chen, On permanence and global stability in a general Gilpin-Ayala competition predator-prey discrete system, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 500-509.

[53] C.R. Li, S.J. Lu, The qualitative analysis of N-species periodic coefficient, nonlinear relation, prey-competition systems, Appl Math-JCU 12 (2) (1997) 147-156 (in Chinese).

[54] M. Liu, K. Wang, Asymptotic properties and simulations of a stochastic logistic model under regime switching, Math. Comput. Modelling 54 (2011) 2139-2154.

[55] M. Liu, K. Wang, Asymptotic properties and simulations of a stochastic logistic model under regime switching II, Math. Comput. Modelling 55 (2012) 405-418.

[56] M. Liu, K. Wang, Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011) 42-57.

[57] M. Liu, K. Wang, Survival analysis of stochastic single-species population models in polluted environments, Ecol. Model. 220 (2009) 1347-1357.

[58] Q. Luo, X. Mao, Stochastic population dynamics under regime switching, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 69-84.

[59] Q. Luo, X.R. Mao, Stochastic population dynamics under regime switching II, J. Math. Anal. Appl. 355 (2009) 577-593.

[60] A. Lotka, Elements of Physical Biology, Williams and Wilkins, Baltimore, Md, 1924.

[61] Z.E. Ma, T.G. Hallam, Effects of parameter fluctuations on community survival, Math. Biosci. 86 (1987) 35-49.

[62] X. Mao, A note on the Lasalle-type theorems for stochastic differential delay equations, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 125-142.

[63] X. Mao, Exponential Stability for Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, 1994.

[64] X. Mao, G. Marion, E. Renshaw, Environmental noise suppresses explosion in population dynamics, Stochastic Process. Appl. 97 (2002) 95-110.

[65] X. Mao, S. Sabanis, E. Renshaw, Asymptotic behaviour of the stochastic Lotka-Volterra model, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003) 141-156.

[66] X. Mao, Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Stochastic Process. Appl. 79 (1999) 45-67.

[67] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horvood, Chichester, UK, 2008 (Second Edition).

[68] X. Mao, Stochastic version of the Lassalle theorem, J. Differential Equations 153 (1999) 175-195.

[69] X. Mao, G. Yin, C. Yuan, Stabilization and destabilization of hybrid systems of stochastic differential equations, Automatica 43 (2007) 264-273.

[70] X. Mao, C. Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperical college press, 2006.

[71] X. Mao, C.Yuan, J. Zou, Stochastic differential delay equations of population dynamics, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005) 296-320.

[72] P.A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ilinois J. Math. 2 (1962) 193-205.

[73] P.A. Meyer, Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem, Ilinois J. Math. 7 (1963) 1-17.

[74] P.A. Meyer, Probability and Potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.

[75] P.A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastic, Lecture Notes in Math. 511 (1976) 245-398.

[76] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[77] S.L. Pimm, Food Webs, Chapman and Hall, London, 1982.

[78] S.L. Pimm, H.L. Jones, J. Diamond, On the risk of exstinction, Amer. Natur. 132 (6) (1988) 757-785.

[79] A.R.E. Sinclair, Mammal population regulation, keystone processes and ecosystem dynamics, Phil. Trans. R. Soc. Lond. B 358 (2003) 1729-1740.

[80] E.E. Sluckii, Sur les fonctions éventelles continues intégrables et dérivables dans le sense stochastique, Comptes Rendus Acad. Sci. 187 (1928) 370-372.

[81] Y. Song, C.T.H. Baker, Qualitative behaviour of numerical approximations to Volterra integro-differential equations, J. Comput. Appl. Math. 172 (2004) 101-115.

[82] D.W. Stephens, J.R. Krebs, Foraging Theory, Princeton University Press, New Jersey, 1986.

[83] R.J. Taylor, Predation, Chapman and Hall, New York, 1984.

[84] M. Vasilova, Asymptotic behavior of a stochastic Gilpin-Ayala predator-prey system with time-dependent delay, Mathematical and Computer Modelling (2012), doi: 10.1016/j.mcm.2012.09.002

[85] M. Vasilova, M. Jovanović, Dynamics of Gilpin-Ayala competition model with random perturbation, Filomat 24 (1) (2010) 101-113.

[86] M. Vasilova, M. Jovanović, Stochastic Gilpin-Ayala competition model with infinite delay, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 4944-4959.

[87] V. Volterra, Lecons Sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[88] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie d'animali conviventi, Mem. Acad. Lincei 2 (1926) 31-113.

[89] L. Wan, Q. Zhou, Stochastic Lotka-Volterra model with infinite delay, Statist. Probab. Lett. 79 (2009) 698-706.

[90] F. Wei, K. Wang, The existence and uniqueness of the solution for stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 331 (2007) 516-531.

[91] N. Wiener, Differential spaces, J. Math. Phys. 2 (1923) 131-174.

[92] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math. 60 (1930) 897-936.

[93] Y. Xia, M. Han, Z. Huang, Global attractivity of an almost N-species nonlinear ecological competitive model, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008) 144-168.

[94] R. Xu, M.A.J. Chaplain, F.A. Davidson, Periodic solutions of a delayed predator-prey model with stage structure for predator, J. Appl. Math. 2004 (3) (2004) 255-270.

[95] Y. Xu, F. Wu, Y. Tan, Stochastic Lotka-Volterra system with infinite delay, Comput. Appl. Math. 232 (2009) 472-480.

[96] Y. Xu, S. Zhu, S. Hu, A stochastic Lotka-Volterra model with variable delay, The Sixth International Symposium on Neural Networks, Advances in soft computing 56 (2009) 91-100.

[97] J. Yan, Global positive periodic solutions of periodic n-species competition systems, J. Math. Anal. Appl. 356 (2009) 288-294.

[98] M.L. Zeeman, Extinction in competitive Lotka-Volterra systems, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1) (1995) 87-96.

[99] C. Zhu, G. Yin, On competitive Lotka-Volterra model in random environments, J. Math. Anal. Appl. 357 (2009) 154-170.

[100] C. Zhu, G. Yin, On hybrid competitive Lotka-Volterra ecosystems, Nonlinear Anal. 71 (2009) e1370-e1379.