



UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Marija S. Krstić

**UTICAJ GAUSSOVOG BELOG ŠUMA NA
STABILNOST NEKIH POPULACIONIH
I EPIDEMIOLOŠKIH MODELA**

Doktorska disertacija

Mentor
dr Miljana D. Jovanović

Niš, 2013.

Predgovor

U doktorskoj disertaciji *Uticaj Gaussovog belog šuma na stabilnost nekih populacionih i epidemioloških modela* proučava se stabilnost rešenja nekih stohastičkih populacionih i epidemioloških modela koji su opisani različitim tipovima stohastičkih diferencijalnih jednačina, u zavisnosti od toga na koji način je uticaj sredine inkorporiran u same modele.

Stohastičke diferencijalne jednačine matematički najrealnije opisuju mnoge pojave iz života, na primer u biologiji, ekologiji, epidemiologiji, mehanici, fizici, finansijama, zbog toga što uključuju slučajni uticaj sredine u modele kojima se ove pojave opisuju. S obzirom na činjenicu da većina ovih jednačina nije eksplizitno rešiva, od velikog je značaja ispitivanje asimptotskog ponašanja njihovih rešenja, s ciljem da se predviđi buduće ponašanje pojave koja se modelira ovakvom jednačinom.

Najpoznatiji metod za ispitivanje stabilnosti rešenja determinističkih diferencijalnih jednačina je direkstan metod Lyapunova, koji je 1892. godine uveo i razvio ruski matematičar A. M. Lyapunov. Ovaj metod je značajan zato što za ispitivanje stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina nije potrebno znati eksplizitno rešenje same jednačine. Na osnovu ovog metoda se razvio i metod za ispitivanje stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina. Postoje različite vrste stohastičke stabilnosti: stabilnost u verovatnoći, stabilnost momenata, skoro izvesna stabilnost, eksponencijalna stabilnost (videti [72]). Bucy je 1965. godine uočio da bi funkcija Lyapunova koja omogućava ispitivanje stabilnosti u verovatnoći i stabilnosti momenata rešenja stohastičke diferencijalne jednačine, trebalo da ima svojstvo supermartingala. U tom smislu, on je dao neočekivano jednostavne dovoljne uslove koje bi parametri razmatrane jednačine trebalo da zadovoljavaju da bi im rešenja bila stabilna u nekom od ova dva smisla. Skoro izvesnu stabilnost je razmatrao Hasminskii 1967. godine za linearne stohastičke diferencijalne jednačine. Stohastička stabilnost je danas jedna od najatraktivnijih tema u stohastičkoj analizi i njome su se bavili i bave se mnogi matematičari, medju kojima se ističu Arnold, Freidman, Ichikawa, Kolmanovskii, Kushner, Mao, Mohammed, Razumikhin i Shaikhet.

Stanje ekvilibrijuma predstavlja ravnotežno stanje sistema u kome se dejstvo spoljašnjih uticaja na sistem anulira, tako da on ostaje u tom stanju i u budućnosti. U ovoj disertaciji se proučavaju ekvilibrijumski stohastički populacioni i epidemiološki modeli. Preciznije, primenom postojećih metoda se ispituje stabilnost ekvilibrijuma nekih stohastičkih populacionih i epidemioloških modela. Modeli koji se koriste u disertaciji su uglavnom dobijeni uključivanjem slučajnosti tipa Gaussovog belog šuma u već postojeće determinističke modele.

Disertacija sadrži rezultate koji su izloženi u tri glave.

U prvoj glavi su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa

i teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina. Pre svega, izložene su osnovne teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja onih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina koje će se razmatrati u disertaciji, kao i teoreme o stabilnosti njihovih rešenja.

U drugoj glavi se razmatraju stohastički populacioni modeli: populacioni model sa Allee efektom, predator-plen model i Gompertzov model. Rezultati ovog dela disertacije su potpuno novi i sadržani su u publikovanim i još uvek nepublikovanim radovima.

Do Allee efekta dolazi kod populacija kod kojih koeficijent priraštaja populacije raste sa povećanjem broja jedinki u populaciji, a opada kad broj jedinki populacije padne ispod odredjene vrednosti koja se naziva *Allee prag*. Jedan od osnovnih razloga zbog kojih se Allee efekat sve više proučava u ekološkoj literaturi jeste činjenica da on može da dovede do istrebljenja neke vrste, tako da je poznavanje dinamike ovog modela značajno sa dva aspekta: zbog odredjivanja uslova pri kojima dolazi do očuvanja retkih vrsta, kao i zbog odredjivanja uslova pri kojima pojedine invazivne vrste štetočina mogu biti istrebljene sa određenog staništa. Zbog izloženosti ekoloških sistema slučajnim uticajima sredine (na primer, poplave, suše, zemljotresi), u Poglavlju 2.2 se razmatra stohastički populacioni model sa Allee efektom. Odredjuju se uslovi pri kojima dolazi kako do istrebljenja, tako i do očuvanja odredjene populacije u zavisnosti od vrednosti parametara modela. Rezultati sadržani u ovom poglavlju su novi i publikovani u radu [59].

S obzirom da u prirodi postoji izvestan vremenski period izmedju trenutka realizacije nekog procesa i trenutka kada se manifestuje njegov uticaj, a koji može biti zavisan od vremena (na primer, u populacionoj dinamici jedinkama je potrebno izvesno vreme da bi polno sazrele ili da bi reagovale na uticaje iz spoljašnje sredine), u Poglavlju 2.2 se razmatra i stohastički model sa Allee efektom i vremenski zavisnim kašnjenjem. Rezultati ovog poglavlja su originalni i sadržani u nepublikovanom radu [45].

Dinamika veze izmedju predatora i njihovog plena je bila i ostaće jedna od veoma važnih tema u ekologiji. Klasični predator-plen modeli su uglavnom varijacije Lotka–Volterra modela koji je nastao kao spoj principa dejstva masa iz hemije, zakona očuvanja iz fizike i elementarnih diferencijalnih jednačina iz matematike. Danas se u literaturi može naći veliki broj radova koji se bave proučavanjem, kako determinističkih, tako i stohastičkih predator-plen modela. U ovom delu, naučni doprinos disertacije se odnosi na uspostavljanje veze izmedju stohastičkih populacionih predator-plen modela i modela sa Allee efektom na taj način što se Allee efekat javlja u populaciji plena. Za takav model se zatim ispituje kako istrebljenje populacije plena utiče na veličinu populacije predatara i obrnuto, kako istrebljenje populacije predatara utiče na veličinu populacije plena. Rezultati Poglavlja 2.3 su originalni i nepublikovani.

U drugom delu disertacije se takođe razmatra i stohastički Gompertzov model. Gompertzov model je jedan od najpoznatijih nelinearnih modela koji opisuje rast "samoograđavajućih" celija neke populacije. Prvi put je predstavljen od strane Benjamina Gomperta 1825. u kontekstu aktuarske statistike, da bi 1932. godine Winsor modifikovao postojeći model i otkrio da tako modifikovani model empirijski dobro opisuje usporenje rasta tumorskih celija. Od tada se Gompertzov model

najčešće koristi da bi se opisao unutrašnji rast čelija tumora. Gompertzova stohastička diferencijalna jednačina spada u usku klasu efektivno rešivih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Kako prilikom opisivanja rasta tumorskih čelija treba uzeti u obzir i period koji je potreban da bi se bolest manifestovala, kao i period potreban da organizam reaguje na terapiju, u Gompertzovu jednačinu se uvodi kašnjenje da bi se model učinio još realnijim, a zatim se ispituju uslovi pod kojima se tumorske čelije mogu uništiti, kao i uslovi pri kojima one opstaju u okruženju. Takodje je važno napomenuti da na populacione sisteme osim Gaussovog belog šuma u mnogim slučajevima utiče i obojeni ili, takozvani, telegrafski šum. Njegov uticaj se manifestuje slučajnim prelazom iz jednog u neko drugo stanje sredine, što zavisi od faktora kao što su, na primer, raspoloživa količina hrane ili količina padavina, jer se stopa rasta populacije može razlikovati u vreme kišnog perioda i u vreme suše. Takodje, stopa rasta tumorskih čelija se razlikuje u zavisnosti od toga da li pacijent prima terapiju ili ne. Ovakvi prelazi sistema iz jednog stanja u drugo se matematički modeliraju pomoću lanaca Markova sa konačnim brojem stanja. Stoga se naučni doprinos ovog dela disertacije ogleda u razmatranju stohastičkog Gompertzovog modela sa kašnjenjem i Markovskim prelazima, a originalni naučni rezultati do kojih se tom prilikom došlo su sadržani u nepublikovanom radu [46].

U trećoj glavi se razmatraju stohastički epidemiološki modeli. Epidemiološki modeli su modeli koji opisuju prenošenje neke bolesti medju jedinkama razmatrane populacije. Širenje zaraznih bolesti su godinama proučavali mnogi naučnici s ciljem da se predvidjanjem širenja odredjene bolesti omogući razvoj strategija za njenu kontrolu. Većina matematičkih modела kojima se opisuje prenošenje neke bolesti je razmatrana u determinističkom slučaju. U radovima iz ove oblasti koji se mogu naći u literaturi, proučavani su uslovi stabilnosti trivijalnog i pozitivnog ekvilibrijuma ovih modела, tj. uslovi pod kojima ne dolazi do ekspanzije bolesti, kao i uslovi pri kojima se bolest može uništiti. S obzirom da parametri ovih modела mogu varirati tokom vremena na slučajan način zbog izloženosti velikom broju nepredvidivih faktora iz okruženja, stohastički epidemiološki modeli daju realniju sliku stvarnosti. U tom smislu, naučni doprinos ovog dela disertacije se odnosi na razmatranje stohastičkog modela širenja direktno prenosivih bolesti i stohastičkog modela koji opisuje širenje malarije. Kako se bolest u većini slučajeva ne manifestuje momentalno, već je potrebno da prodje odredjeno vreme (period inkubacije), u model se uključuje kašnjenje koje predstavlja period inkubacije. U slučaju direktno prenosivih bolesti kašnjenje se uključuje samo u jednačinu koja opisuje dinamiku populacije prenosioca bolesti, dok se kod malarije uzima u obzir i period inkubacije kod populacije domaćina. Za oba modela se odredjuju uslovi koje bi parametri modela trebalo da zadovolje da ne bi došlo do ekspanzije bolesti. Ovaj deo disertacije sadrži originalne rezultate koji su objavljeni u radovima [44, 58].

U Zaključku su izloženi neki od otvorenih problema i mogući pravci daljih istraživanja.

Ovim putem želim da zahvalim svom mentoru dr Miljani Jovanović na nesebičnoj pomoći i podršci koju mi je pružala od početka doktorskih studija pa sve do same izrade disertacije. Zahvaljujem i svom profesoru, dr Svetlani Janković, na korisnim savetima. Veliku zahvalnost dugujem i svojoj porodici i svima onima koji su me podržavali i verovali u mene i moj rad.

Sadržaj

1 Uvodni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina	9
1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa	9
1.2 Wienerov proces	13
1.3 Integral Itôa	16
1.3.1 Konstrukcija integrala Itôa	16
1.3.2 Neodredjeni integral Itôa	18
1.3.3 Formula Itôa	19
1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine	21
1.5 Funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine	24
1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem	27
1.7 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine	28
1.8 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Markovskim prelazima	30
1.9 Elementarne, integralne i nejednakosti sa matematičkim očekivanjem	32
2 Stohastički populacioni modeli	35
2.1 Uvodni pojmovi	35
2.2 Stohastički populacioni model sa Allee efektom	37
2.2.1 Uvodni pojmovi i rezultati	38
2.2.2 Konstrukcija, egzistencija i jedinstvenost rešenja stohastičkog modela	38
2.2.3 Stabilnost stohastičkog modela	43
2.2.4 Motivacija za uvođenje vremenski zavisnog kašnjenja u stohastički model	51
2.2.5 Egzistencija i jedinstvenost rešenja stohastičkog modela sa vremenski zavisnim kašnjenjem	52
2.2.6 Istrebljenje i neperzistentnost u stohastičkom modelu sa vremenski zavisnim kašnjenjem	54
2.2.7 Stabilnost pozitivnih ekvilibrijuma stohastičkog modela sa vremenski zavisnim kašnjenjem	59
2.3 Stohastički predator-plen model	67
2.3.1 Uvodni pojmovi i rezultati	68
2.3.2 Egzistencija, jedinstvenost i ograničenost pozitivnog rešenja stohastičkog modela	70
2.3.3 Istrebljenje u stohastičkom modelu	74

2.3.4	Stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma stohastičkog modela	75
2.4	Gompertzov stohastički model	78
2.4.1	Uvodni pojmovi i rezultati	79
2.4.2	Stohastički model sa kašnjenjem	82
2.4.3	Stohastički model sa kašnjenjem i Markovskim prelazima	93
3	Stohastički epidemiološki modeli	101
3.1	Stohastički model širenja direktno prenosivih bolesti	102
3.1.1	Uvodni pojmovi i rezultati	102
3.1.2	Stohastički model	105
3.1.3	Stohastički model sa kašnjenjem	108
3.1.4	Primeri i napomene	114
3.2	Stohastički model širenja malarije	117
3.2.1	Uvodni pojmovi i rezultati	118
3.2.2	Stohastički model sa kašnjenjem	120
3.2.3	Primeri i napomene	124
Zaključak		127
Summary		129
Literatura		130

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina

U ovoj glavi se uvode neki osnovni pojmovi i rezultati koji se eksplisitno koriste u nastavku, a koji su sa više detalja izloženi u [38]. U Poglavlju 1.1 se navode osnovni elementi teorije stohastičkih procesa kao što su merljivost, separabilnost, neprekidnost, Markovsko svojstvo, stacionarnost. Mnoge pojave u mehanici, inženjerstvu, biologiji i finansijama, izložene su determinističkim i slučajnim pobudama tipa Gaussovog belog šuma koji se matematički modelira generalisanim izvodom Wienerovog procesa, tj. Brownovog kretanja. U tom smislu je u Poglavlju 1.2 uvedena definicija Wienerovog procesa i navedene su njegove najvažnije osobine. Konstrukcija integrala Itōa, tj. integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu, kao i osobine tog integrala, predstavljene su u Poglavlju 1.3. Mnogi autori su se bavili egzistencijom, jedinstvenošću i stabilnošću rešenja, kao i proučavanjem kvalitativnih i kvantitativnih osobina rešenja različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. U Poglavljima 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 i 1.8 se navode teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih, funkcionalnih, stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem, neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina i stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i Markovskim prelazima, kao i teoreme teorije stabilnosti trivijalnog rešenja tih jednačina. Ova glava se završava Poglavlјem 1.9 koje sadrži neke elementarne nejednakosti, integralnu nejednakost Gronwall-Bellmana, kao i nejednakosti sa matematičkim očekivanjem koje se više puta primenjuju u dokazivanju glavnih rezultata.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Početkom prošlog veka veliki napredak tehničkih disciplina je pred teoriju verovatnoća postavio mnoge probleme koji nisu mogli biti rešeni metodama kojima je ona raspolagala. Naime, u to vreme su se fizika i tehnika bavile proučavanjem pojave koje se menjaju sa protokom vremena, dok teorija verovatnoća još uvek nije imala razvijenu metodologiju za tretiranje takvih pojava. Otuda se javila potreba za razvojem teorije stohastičkih procesa u okviru koje bi se razmatrale slučajne

promenljive koje su vremenski zavisne.

Pojam stohastičkog procesa je star oko sto godina, a vezuje se za imena Sluckog, Wienera, Kolmogorova, Cramera. U tom periodu je bilo više pokušaja proučavanja slučajnih pojava, medju kojima su najznačajniji pokušaj Sluckog [97] da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija kao i pokušaj Wienera [102], koji je dao matematičku formulaciju haotičnog kretanja čestica polena u tečnosti, poznatog kao Wienerov proces. Uvodjenje pojmljiva uslovne verovatnoće i uslovnog matematičkog očekivanja pružilo je mogućnost Kolmogorovu [56, 57] da postulira sistematsku i strogu konstrukciju osnova teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom. Pored toga, treba pomenuti i Khinchina [51] koji se smatra začetnikom teorije stacionarnih procesa, kao i Cramera [16] koji je razvio teoriju Gaussova procesa.

Doob je, u svojoj monografiji [21] sistematizovao brojne koncepte teorije stohastičkih procesa. Izmedju ostalog, on je proučavao koncept vremena zaustavljanja, što je dovelo do širenja teorije martingala. Doobov rad u ovoj oblasti su nastavili Meyer [78, 79, 80], Doleans-Dade [20], Dellacherie [19] i Kunita i Watanabe [60]. Teorija stohastičkih procesa je doprinela razvoju mnogobrojnih matematičkih teorija koje opisuju pojave iz realnog života, i kao takva je od velikog značaja za nematematičke nauke, kao što su ekonomija, inženjerstvo, biologija, epidemiologija i mehanika. Ova disertacija u najvećoj meri predstavlja primenu teorije stohastičkih procesa u ispitivanju osobina bioloških i epidemioloških sistema.

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoća i $T \subset \mathbb{R}$ parametarski skup. U predstojećem razmatranju, T će biti interval $[0, \infty)$, interval oblika $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, pri čemu parametar $t \in T$ predstavlja vreme.

Definicija 1.1.1 *Familija $\{x(t), t \in T\}$ slučajnih merljivih funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ se naziva stohastički proces sa faznim prostorom $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom T .*

Na osnovu prethodne definicije se može zaključiti da se za svako fiksirano $t \in T$ dobija slučajna promenljiva $\omega \mapsto x(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, tj. \mathcal{F} -merljiva funkcija. Takodje, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $x(\omega, t) \in \mathbb{R}^d$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$, koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Ako je $T = \mathbb{N}$, tj. ako je vremenski interval diskretan, onda se radi o stohastičkom nizu $\{x_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$. U nastavku će biti razmatrani isključivo procesi sa neprekidnim vremenom koji predstavljaju matematičke modele slučajnih pojava čiji se ishodi mogu registrovati neprekidno sa protokom vremena.

Stohastički proces određuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{x(t_1) < x_1, \dots, x(t_n) < x_n\},$$

pri čemu je $x_i \in \mathbb{R}^d$ i $t_i \in T$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in N$.

Zahteva se da familija konačno-dimenzionalnih raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

- uslov simetrije, tj. da za svaku permutaciju (i_1, \dots, i_n) skupa $\{1, \dots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n});$$

- uslov saglasnosti, tj. da važi

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Kolmogorov je dokazao da za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela, koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) i stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ definisan na tom prostoru kome odgovara data familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.

Neprebrojivost parametarskog skupa, u opštem slučaju, onemogućava određivanje verovatnoća dogadjaja opisanih pomoću stohastičkih procesa. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.1.2 Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subset T$ (separant) i dogadjaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $P(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset \mathbb{R}^d$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset T$, skupovi

$$\{\omega : x(\omega, t) \in F, t \in I\} \quad i \quad \{\omega : x(\omega, t) \in F, t \in I \cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ .

Definicija 1.1.3 Stohastički procesi $\{x(t), t \in T\}$ i $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisani na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1 \text{ za svako } t \in T.$$

U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija (verzija) drugog.

Definicija 1.1.4 Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je merljiv ako je $x(\omega, t)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, gde je \mathcal{B}_T Borelovo σ -polje nad T , tj. za svaki Borelov skup B , važi $\{(t, \omega) : x(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stohastički neprekidan u tački $t_0 \in T$ ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x(t) - x(t_0)| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.1)$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1) važi za svako $t_0 \in S$.

Teorema 1.1.1 (Doob, [21]) Za svaki stohastički neprekidan stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ iz Teoreme 1.1.1 se naziva separabilna i merljiva modifikacija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je neprekidan u srednjem reda p , tj. L_p -neprekidan, u tački $t_0 \in T$ ako važi

$$E|x(t) - x(t_0)|^p \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.2)$$

Stohastički proces je L_p -neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Za stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ se kaže da je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako važi

$$P\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

Ispitivanje skoro izvesne neprekidnosti se često vrši po kriterijumu Kolmogorova koji je iskazan sledećom teoremom.

Teorema 1.1.2 (Kriterijum Kolmogorova) *Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ ima skoro izvesnu neprekidnu modifikaciju ako postoje pozitivne konstante p, q i k , tako da za svako $T > 0$ i svako $0 \leq s, t \leq T$ važi*

$$E|x(t) - x(s)|^p \leq k|t - s|^{1+q}.$$

Definicija 1.1.5 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je proces drugog reda (L_2 -proces) ako je $E|x(t)|^2 < \infty$, za svako $t \in T$.*

Funkcija $K(s, t) = E(x(s) - Ex(s))(x(t) - Ex(t))$, $s, t \in T$ je korelaciona funkcija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Definicija 1.1.6 *Stohastički proces drugog reda $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u užem smislu) ako za svaki izbor parametara $t_1, \dots, t_n \in T$ i $h \in R$, za koje je $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$, zajednička raspodela za $(x(t_1 + h), \dots, x(t_n + h))$ ne zavisi od h .*

Definicija 1.1.7 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran (u širem smislu) ako za svako $t \in T$ važi $E|x(t)|^2 < \infty$, $Ex(t) = a = \text{const}$ i korelaciona funkcija $K(s, t)$ zavisi samo od $t - s$.*

Ako je (Ω, \mathcal{F}, P) dati prostor verovatnoća, onda se familija $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod- σ -algebri od \mathcal{F} za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leq t$, $s, t \in T$, naziva filtracija. Ako je $T = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s < t} \mathcal{F}_s\}$ σ -algebra dogadjaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\{\cap_{s > t} \mathcal{F}_s\}$ σ -algebra dogadjaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je neprekidna s desna (neprekidna s leva) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$). Za filtraciju se kaže da je neprekidna ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, za svako $t \geq 0$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava uobičajene uslove ako je neprekidna s desna i \mathcal{F}_0 sadrži sve dogadjaje iz \mathcal{F} čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.1.8 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ako je za svako $t \in T$ slučajna promenljiva $x(t)$ \mathcal{F}_t -merljiva.*

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ označava se sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in T\}$, prirodna filtracija je ona koja je generisana samim procesom, tj. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ -algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Dakle, X je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in T\}$ modifikacija procesa X , tada je i \tilde{X} adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$ ako \mathcal{F}_0 sadrži sve dogadjaje iz \mathcal{F} čija je verovatnoća nula.

Definicija 1.1.9 Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je progresivno merljiv ako za svako $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}^d$ važi

$$\{(s, \omega) : s \leq t, \omega \in \Omega, x(\omega, s) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0, t])$ Borelovo σ -polje nad $[0, t]$.

Očigledno, svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Pored toga, važe i sledeća tvrdjenja.

Teorema 1.1.3 (Meyer, [80]) Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.

Teorema 1.1.4 (Meyer, [80]) Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i neprekidan s desna ili s leva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.

Definicija 1.1.10 Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ je proces Markova ako je za svako $s < t$ i svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}^d$

$$P\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B | x(s)\}, \text{ skoro izvesno.}$$

Definicija 1.1.11 Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ako je

- (i) $E|x(t)| < \infty$;
- (ii) $E(x(t) | \mathcal{F}_s) = x(s)$ skoro izvesno, za $0 \leq s < t$.

1.2 Wienerov proces

Pojam Brownovog kretanja datira iz 1828. godine, kada je škotski botaničar Robert Brown proučavao haotično kretanje čestica polena rastvorenih u vodi. Haotičnost ovog kretanja je objašnjavana slučajnim sudarima do kojih dolazi izmedju molekula tečnosti i čestica polena. Međutim, prvo kvalitativno pručavanje Brownovog kretanja se pripisuje L. Bachelieru, koji je uz pomoć Brownovog kretanja opisao slučajne promene cena akcija 1900. godine. Sam Bachelier se smatra začetnikom probabilističkog pristupa finansijama. Na drugoj strani, u radu A. Einsteina iz 1905.

godine, Brownovo kretanje se proučava sa aspekta molekularno-kinetičke teorije topote.

Ipak, strogu matematičku formulaciju Brownovog kretanja je uveo Norbert Wiener 1923. Zahvaljujući njegovim rezultatima [102, 103] Brownovo kretanje više nije predstavljalo samo fizičku pojavu, već i matematički pojam. Često se Brownovo kretanje naziva i Wienerov proces. Danas Brownovo kretanje zauzima važno mesto u mnogim naučnim disciplinama i pomoću njega se opisuju različite pojave koje su prisutne u realnom životu.

Definicija 1.2.1 Stohastički proces $w = \{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $w(0) = 0$, skoro izvesno;
2. ima nezavisne priraštaje, tj. za svako $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, slučajne promenljive $w(t_0), w(t_1) - w(t_0), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ su nezavisne;
3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$, $0 \leq s < t$.

Parametar $\sigma^2 \neq 0$ predstavlja disperziju. Specijalno, za $\sigma^2 = 1$, radi se o standarnom Wienerovom procesu.

Može se dokazati da je stohastički proces $\{w(t), t \geq 0\}$ Wienerov ako i samo ako je Gaussov i $Ew(t) = 0$, $K(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\}$, $s, t \geq 0$.

Wienerov proces ima mnogo važnih osobina medju kojima su izdvojene sledeće:

- proces je drugog reda, tj. $E|w(t)|^2 < \infty$;
- n -dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 < \dots < t_n$ i $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ se može izraziti preko jednodimenzionalnih gustina raspodele $f_1(t, u)$ Gaussove slučajne promenljive, tj.

$$f_n(t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_n) = f_1(t_1; u_1) \cdot f_1(t_2 - t_1; u_2 - u_1) \cdot \dots \cdot f_1(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1});$$

- proces je Markova;
- srednje kvadratno je neprekidan;
- skoro izvesno je neprekidan, tj. skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije;
- skoro sve trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;
- proces $\{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, tj. za svako $t \geq s \geq 0$ važi

$$E(w(t)|\mathcal{F}_s) = w(s), \text{ skoro izvesno};$$

- skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne srednje-kvadratne varijacije na svakom segmentu $[a, b] \subset [0, \infty)$, tj. za proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu particiju $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ segmenta $[a, b]$ za koju $\max_{k=1, n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$,

$$P \left\{ \sum_{k=1}^n |w(t_k) - w(t_{k-1})| > c \right\} \rightarrow 1, \quad \sum_{k=1}^n |w(t_k) - w(t_{k-1})|^2 \rightarrow \sigma^2(b-a) \text{ s.k.},$$

- može se definisati na intervalu $(-\infty, +\infty)$, pri čemu je $Ew(t) = 0$ i $K(s, t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|)$. Na taj način se dobijaju nezavisni Wienerovi procesi $\{w(t), t \geq 0\}$ i $\{w(-t), t \geq 0\}$ čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$.

Definicija 1.2.2 Stohastički proces $w = \{w(t), t \geq 0\} = \{(w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)), t \geq 0\}$ je m -dimenzionalni Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $w(0) = 0$, skoro izvesno;
2. ima nezavisne priraštaje;
3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)I)$, $0 \leq s < t$, gde je I jedinična matrica reda m .

Dakle, koordinate Wienerovog procesa su jednodimenzionalni uzajamno nezavisni Wienerovi procesi i za m -dimenzionalni Wienerov proces važe sve osobine jednodimenzionalnog Wienerovog procesa.

Kada je reč o Wienerovom procesu, neizbežno je pomenuti pojam Gaussovog procesa kojim se modelira veliki broj pojava iz bioloških, fizičkih, tehničkih i ekonomskih nauka.

Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ se naziva Gaussov proces ako je svaka linearna kombinacija n -dimenzionalnog zaseka $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ Gaussova slučajna promenljiva, tj. ako je za svako $n \in N$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^n \alpha_i x(t_i)$ Gaussova.

U fizičkim sistemima beli šum se najčešće opisuje stacionarnim procesom ξ_t koji ima očekivanje nula i konstantnu spektralnu gustinu $S(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$. Ako je ξ_t Gaussov proces, tada se on naziva *Gaussov beli šum*. Reč "beli" u nazivu ima smisla ako se ima u vidu da je za ξ_t spektralni sastav nepromenljiv za svako $\nu \in \mathbb{R}$, kao i kod bele svetlosti, dok je reč "šum" više istorijskog karaktera. Naime, procesi ovog tipa su se najpre proučavali u radiotehnici gde su se javljali kao šumovi na linijama radiopredaje.

Za Gaussov beli šum vrednosti ξ_t i ξ_s su medjusobno nekorelirane ako je $t \neq s$, čak i kada su t i s vrlo bliske po vrednosti. Pored toga, disperzija belog šuma je $+\infty$, tako da ovaj proces u prirodi ne postoji, ali je pogodna matematička apstrakcija za opisivanje pojava koje mnogo variraju sa prelaskom iz jednog stanja u drugo.

1.3 Integral Itôa

U okviru teorije slučajnih procesa, 50-ih godina prošlog veka je počela da se razvija teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ovu teoriju su razvili, nezavisno jedan od drugog, I. I. Gikhman [25, 26] i K. Itô [33, 34, 35, 36, 37]. Danas je opšteprihvaćena terminologija koju je uveo Itô. On je uveo pojam stohastičkog integrala u odnosu na Wienerov proces 1949. godine, zbog čega se u literaturi najčešće i sreće pod nazivom *stohastički integral Itôa*, o čemu će biti reči u ovom poglavlju. S obzirom na činjenicu da je Wienerov proces neograničene varijacije i da skoro sve njegove trajektorije nemaju izvod ni u jednoj tački, stohastički integral po Wienerovom procesu se ne može definisati kao Riemann–Stieltjesov ili Lebesgueov integral. Međutim, zahvaljujući stohastičkoj prirodi Wienerovog procesa moguće je definisati stohastički integral i to za veliku klasu stohastičkih procesa.

1.3.1 Konstrukcija integrala Itôa

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoća na kome su definisane sve slučajne promenljive i procesi koji će biti razmatrani u nastavku.

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalni standardni Wienerov proces adaptiran u odnosu na rastuću familiju pod- σ -algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ -algebri \mathcal{F} pri čemu je $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t$ i $w(t) - w(s)$ nezavisno u odnosu na \mathcal{F}_s za svako $s \leq t$.

U daljem tekstu će $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ označavati klasu stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ za koje važi:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -merljiv;
2. φ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
3. $\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt < \infty$.

Prostor $(\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ je Banachov i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$.

U nastavku će najpre biti definisan stohastički integral stepenastog stohastičkog procesa iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$, a zatim će definicija biti proširena na čitavu klasu $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ metodom aproksimacije proizvoljnog procesa iz te klase nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.3.1 Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je stepenasti proces ako postoji particija $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, nezavisna od ω , tako da je

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \text{ s.i., } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definicija 1.3.2 Neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ stepenasti stohastički proces. Slučajna promenljiva

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t) dw(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k))$$

naziva se stohastički integral stepenastog procesa φ u odnosu na Wienerov proces w ili integral Itôa.

Naredna teorema je od velike važnosti za definisanje integrala Itôa za proizvoljno $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$.

Teorema 1.3.1 Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ Wienerov proces i neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Tada:

1. postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ tako da

$$\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

2. ako niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ aproksimira φ u smislu da je $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ i ako je integral $I(\varphi_n)$ definisan kao u Definiciji 1.3.2, tada niz slučajnih promenljivih $\{I(\varphi_n), n \in \mathbb{N}\}$ konvergira u srednje kvadratnom smislu kada $n \rightarrow \infty$;
3. ako su $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{\varphi'_n, n \in \mathbb{N}\}$ dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju φ , tada je

$$\text{s.k. } \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n) = \text{s.k. } \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi'_n).$$

Na osnovu Teoreme 1.3.1 se može zaključiti da se intergal Itôa $I(\varphi)$ može definisati kao srednje kvadratni limes niza $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$, tj.

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t) dw(t) := \text{s.k. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \varphi_n(t) dw(t).$$

U nastavku se navode najvažnije osobine integrala Itôa.

Teorema 1.3.2 Neka je $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante. Tada je:

1. $I(\varphi)$ \mathcal{F}_T -merljivo;
2. $EI(\varphi) = 0$;
3. $I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$;
4. $E|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt$ (stohastička integralna izometrija);
5. $E[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^T E[\varphi(t)\psi(t)]dt$.

Integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ klasa stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -merljivi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ za koje važi da je

$$P \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Očigledno da je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ šira klasa nego $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$.

Može se dokazati da za svako $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ postoji niz $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ tako da se integral Itôa procesa φ može definisati kao

$$I(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n) \text{ u verovatnoći.}$$

U ovom slučaju osobine 1-3 Teoreme 1.3.2 važe dok ostale ne važe. Međutim, integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ zadovoljava sledeću osobinu: za proizvoljne pozitivne konstante N i ε važi

$$P \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi(t) dw(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq P \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt > N \right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Integral Itôa se može definisati i za stohastičke procese iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$, u odnosu na m -dimenzionalni Wienerov proces $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ iz Definicije 1.2.2. Klasa $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ obuhvata sve $(d \times m)$ -dimenzionalne merljive i $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ -adaptirane stohastičke procese φ koji zadovoljavaju uslov

$$\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt < \infty,$$

pri čemu je $|\cdot|$ matrična norma definisana sa

$$|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m |\varphi_{ij}|^2 = \text{trace}(\varphi \varphi').$$

Kako je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ onda kada je $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}), i = \overline{1, d}, j = \overline{1, m}$, višedimenzionalni integral Itôa se može definisati kao d -dimenzionalni vektor

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t) dw(t) = \int_{t_0}^T \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ \varphi_{d1}(t) & \dots & \varphi_{dm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1(t) \\ \vdots \\ dw_m(t) \end{bmatrix},$$

gde je i -ta komponenta vektora $I(\varphi)$ suma jednodimenzionalnih integrala Itôa, tj.

$$I_i(\varphi) = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^T \varphi_{ij}(t) dw_j(t), \quad i = \overline{1, d}.$$

U tom smislu, sve osobine Teoreme 1.3.2 važe i u ovom slučaju. Analogno jednodimenzionalnom slučaju, definicija stohastičkog integrala Itôa se može proširiti na klasu $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$.

1.3.2 Neodredjeni integral Itôa

Definicija 1.3.3 Neka je $I_{\{s < t\}}, t_0 \leq s < t < T$ indikator skupa $[t_0, t]$. Neodredjeni integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je stohastički proces $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$, pri čemu je

$$x(t) := \int_{t_0}^T I_{\{s < t\}} \varphi(s) dw(s) = \int_{t_0}^t \varphi(s) dw(s), \quad t \in [t_0, T].$$

Osobine neodredjenog integrala Itôa su:

1. $x(t)$ je $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ -adaptiran;
2. $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;
3. $x(t_0) = 0$ s.i.;
4. $x(t) - x(s) = \int_s^t \varphi(u)dw(u);$
5. $E x(t) = 0;$
6. $E|x(t)|^2 = \int_{t_0}^t E|\varphi(s)|^2ds;$
7. proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ kvadratno integrabilni martingal sa kvadratnom varijacijom

$$u(t) = \int_{t_0}^t |\varphi(u)|^2 du;$$

8. proces x iz Definicije 1.3.3 je s.i. neprekidan;
9. ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$, stohastički proces

$$x(t \wedge \tau) = \int_{t_0}^{t \wedge \tau} \varphi(s)dw(s), \quad t \in [t_0, T],$$

martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ i $E x(t \wedge \tau) = 0$.

Analogno Definiciji 1.3.3, neodredjeni integral Itôa se može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Tada je proces $x = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ merljiv i s.i. neprekidan, dok u opštem slučaju, nije martingal. Međutim, proces x je lokalni martingal, tj. $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa

$$\tau_n = \inf_{t \in [t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \geq n \right\}.$$

1.3.3 Formula Itôa

Kao i kod klasične integracije u kojoj se često uvodi smena promenljivih da bi se integral efektivno rešio, prilikom rešavanja stohastičkog integrala Itôa se koristi smena promenljivih poznata pod nazivom *formula Itôa*. Pored toga, formula Itôa ima značajnu ulogu i u proučavanju različitih problema koji se tiču stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ovu formulu je prvi uveo K. Itô u radovima [36, 37], a uopštio je Meyer [81].

Na dalje će se kroz disertaciju podrazumevati da je $t_0 = 0$.

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalni Wienerov proces definisan na kompletnom prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) . Neka su $a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ i $b \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$

merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je, za svako $T > 0$,

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \quad \text{s.i.}, \quad \int_0^T |b(t)|^2 dt < \infty \quad \text{s.i.}$$

Definicija 1.3.4 Jednodimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, gde je

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

se naziva proces Itôa kada je $a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ i $b \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

Prvi integral u izrazu (1.3) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itôa. Kako su oba integrala merljiva, \mathcal{F}_t -adaptirana i s.i. neprekidna, to i proces Itôa ima iste osobine.

Teorema 1.3.3 (Formula Itôa) Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$ i neka je $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $f_t(t, x)$, $f'_x(t, x)$, $f''_{xx}(t, x)$. Tada je $\{f(t, x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itôa koji ima stohastički diferencijal

$$df(t, x(t)) = f'_t(t, x(t))dt + f'_x(t, x(t))dx(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, x(t))b^2(t)dt, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Izraz (1.4) je poznat kao Itôova formula za stohastičko diferenciranje.

Formula Itôa se može uopštiti na višedimenzionalni slučaj, pa se u tom smislu najpre uvodi pojam višedimenzionalnog stohastičkog diferencijala.

Definicija 1.3.5 Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalni Wienerov proces. Neprekidan i adaptiran d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, pri čemu je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$, je proces Itôa ako je oblika

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s),$$

gde je $a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ i $b \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$. Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

Da bi se integral Itôa uopštio na višedimenzionalan slučaj, uvodi se funkcija $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, pri čemu $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ predstavlja klasu svih nenegativnih funkcija $V(t, x)$ sa neprekidnim izvodima prvog i drugog reda po x i ograničenim neprekidnim prvim izvodom po t za skoro svako $t \geq 0$, i

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Kao u jednodimenzionalnom, tako je i u višedimenzionalnom slučaju za efektivno rešavanje integrala Itôa vrlo često neophodno primeniti formulu Itôa za stohastičko diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.3.4 (Višedimenzionalna formula Itôa) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ d -dimenzionalan proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$ i neka je $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Tada je $\{V(t, x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itôa koji ima stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} dV(t, x(t)) \\ = & \left[V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))a(t) + \frac{1}{2} \text{trace}(b^T(t)V_{xx}(t, x(t))b(t)) \right] dt \\ & + V_x(t, x(t))b(t)dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

U nastavku je formulisana teorema koja se odnosi na nejednakosti sa momen-tima za stohastički integral Itôa, a koja će se koristiti prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Teorema 1.3.5 ([72]) *Neka je $p \geq 2$ i neka $b \in \mathcal{M}_2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$, tako da je*

$$E \int_0^T |b(s)|^p ds < \infty.$$

Tada je

$$E \left| \int_0^T b(s) dw(s) \right|^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2} \right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E \int_0^T |b(s)|^p ds. \quad (1.5)$$

Specijalno, za $p = 2$ važi jednakost.

Pored prethodne nejednakosti, u dokazivanju glavnih rezultata će se koristiti eksponencijalna martingalna nejednakost.

Teorema 1.3.6 ([72]) *Neka je $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{1 \times m})$, i neka su T, α, β bilo koji pozitivni brojevi. Tada važi*

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \left[\int_0^t b(s) dw(s) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |b(s)|^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta}. \quad (1.6)$$

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina nepoznatog d -dimenzionalnog procesa $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ je jednačina oblika

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1.7)$$

pri čemu je $w = \{w(t), t \in [0, T]\}$ m -dimenzionalni Wienerov proces, početni uslov x_0 je d -dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na w i $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ su neslučajne Borelove funkcije.

U skladu sa Definicijom 1.3.5 stohastičkog diferencijala, jednačina (1.7) se može predstaviti u ekvivalentnom integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s))ds + b(s, x(s))dw(s), \quad t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

Nadalje će se kroz disertaciju podrazumevati da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, w(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Definicija 1.4.1 Merljiv stohastički proces $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.7) ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $x(t)$ je \mathcal{F}_t -merljivo za svako $t \in [0, T]$;
2. $\int_0^T |a(t, x(t))|dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |b(t, x(t))|^2 dt < \infty$ s.i.;
3. $x(0) = x_0$ s.i.;
4. integralni oblik jednačine (1.8) je zadovoljen s.i. za svako $t \in [0, T]$.

Na osnovu osobina 1 i 2 Definicije 1.4.1 sledi da su i Lebesgueov i Itôv integral na desnoj strani jednakosti (1.8) dobro definisani i s.i. neprekidni, zbog čega je i x s.i. neprekidan proces. Oba integrala su jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti. U tom slučaju, u skladu sa Teoremom Dooba 1.1.1, uvek se prepostavlja da se radi sa merljivom, separabilnom i s.i. neprekidnom modifikacijom strogog rešenja.

Definicija 1.4.2 Jednačina (1.7) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva strogta rešenja x i \tilde{x} važi

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [0, T]\} = 1.$$

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.7).

Teorema 1.4.1 Neka je w m -dimenzionalan Wienerov proces i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w , za koju je $E|x_0|^2 < \infty$. Neka su $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t, x), (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| &\leq L|x - y|, \\ |a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 &\leq L^2(1 + |x|^2). \end{aligned}$$

Tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno strogo rešenje jednačine (1.7) sa osobinom $E \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2 < \infty$. Pored toga, ako je $E|x_0|^p < \infty, p \geq 2$, tada je $E \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^p \leq \infty$.

U nastavku ovog poglavlja je navedena teorema uporedjenja za stohastičke diferencijalne jednačine, koja se može naći u [27].

Teorema 1.4.2 *Neka su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ rešenja jednačina*

$$dx_i(t) = a_i(t, x_i(t)) dt + dw(t), \quad i = 1, 2,$$

koja zadovoljavaju isti početni uslov $x_i(0) = x_0$. Ako za svako $t \geq 0$ i x_0 važi nejednakost $a_1(t, x_0) < a_2(t, x_0)$, tada je $x_1(t) < x_2(t)$ za svako $t \geq 0$ sa verovatnoćom jedan.

Ako se za koeficijente a i b jednačine (1.7) uvede dodatna pretpostavka da je

$$a(t, 0) = 0 \quad \text{s.i.} \quad \text{i} \quad b(t, 0) = 0 \quad \text{s.i.}, \quad t \in [0, T],$$

jednačina (1.7) ima rešenje $x(t) = 0$ koje odgovara početnom uslovu $x(0) = 0$. Ovo rešenje se naziva *trivijalnim rešenjem* stohastičke diferencijalne jednačine (1.7).

Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina

Ovo poglavlje će biti zatvoreno osnovnim definicijama i teorema teorije stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina koje se mogu naći, na primer, u [30].

Definicija 1.4.3 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je stohastički stabilno ili stabilno u verovatnoći ako za svaku $\varepsilon \in (0, 1)$ i $r > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$ tako da je*

$$P\{|x(t; 0, x_0)| < r, t \geq 0\} \geq 1 - \varepsilon$$

kad god je $|x_0| < \delta$.

Definicija 1.4.4 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je stohastički asimptotski stabilno ako je stohastički stabilno i ako za svaku $\varepsilon \in (0, 1)$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$ tako da je*

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0) = 0\right\} \geq 1 - \varepsilon$$

kad god je $|x_0| < \delta$.

Definicija 1.4.5 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je eksponencijalno stabilno sa verovatnoćom jedan ako je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t; 0, x_0)}{t} < 0 \quad \text{s.i.}$$

za svaku $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Kao i u prethodnom poglavlju, neka je $C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ familija svih nenegativnih funkcija $V(t, x)$ koje su jednom neprekidno-diferencijabilne po t a dva puta po x . Tada se funkcija $V(t, x)$ naziva *funkcijom Lyapunova*. Diferencijalni operator L pridružen jednačini (1.7) se definiše na sledeći način

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [b^T(t, x) b(t, x)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Jasno je da je za $V \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$,

$$LV(t, x) = V_t(t, x) + V_x(t, x)a(t, x) + \frac{1}{2} \text{trace} [b^T(t, x)V_{xx}(t, x)b(t, x)].$$

Sledeća teorema daje uslove stohastičke asimptotske stabilnosti trivijalnog rešenja jednačine (1.7) u terminima funkcije Lyapunova.

Teorema 1.4.3 *Neka postoji nenegativna funkcija $V(t, x) \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$, neprekidne funkcije $c, d : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ i pozitivna konstanta K tako da je, za svako $|x| < K$,*

$$c(|x|) \leq V(t, x) \leq d(|x|).$$

(a) *Ako je $LV \leq 0$, $|x| < K$, tada je trivijalno rešenje jednačine (1.7) stohastički stabilno.*

(b) *Ako postoji neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, tako da je $LV \leq -f(|x|)$, tada je trivijalno rešenje jednačine (1.7) stohastički asimptotski stabilno.*

Kako se mnogi problemi koji se tiču stabilnosti trivijalnog rešenja nelinearne stohastičke diferencijalne jednačine mogu svesti na probleme stabilnosti trivijalnog rešenja pridružene linearizovane stohastičke diferencijalne jednačine, u nastavku se razmatra linearni oblik jednačine (1.7)

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)dw(t), \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Teorema 1.4.4 *Ako je rešenje linearne jednačine (1.9) sa konstantnim koeficijentima ($A(t) = A$, $B(t) = B$) stohastički asimptotski stabilno i ako koeficijenti jednačina (1.7) i (1.9) zadovoljavaju nejednakost*

$$|a(t, x) - Ax| + |b(t, x) - Bx| < \delta|x| \quad (1.10)$$

u dovoljno maloj okolini tačke $x = 0$ i za dovoljno malu konstantu δ , tada je trivijalno rešenje jednačine (1.7) stohastički asimptotski stabilno.

1.5 Funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine

Neki od najzastupljenijih i najvažnijih stohastičkih modela u biologiji, ekonomiji, fizici u kojima buduća stanja sistema zavise ne samo od trenutnog stanja, već i od prošlih stanja, opisuju se pomoću stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Predmet proučavanja u ovoj oblasti je najčešće egzistencija, jedinstvenost i stabilnost, kao i kvalitativna i kvantitativna svojstva rešenja.

Pored ranije uvedenih oznaka i osnovnih prepostavki, biće uvedeni još neki pojmovi.

Polazna prepostavka je da su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove (tj., rastuća je i neprekidna s desna, dok \mathcal{F}_0 sadrži sve dogadjaje verovatnoće nula).

Za fiksirano $\tau > 0$, neka je $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ familija neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$, sa supremum-normom definisanom sa $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Pritom, $(C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ je Banachov prostor. Neka je $\mathcal{C} = C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, a \mathcal{D} prostor svih \mathcal{F}_0 -adaptiranih slučajnih promenljivih $\varphi \in \mathcal{C}$.

U ovom poglavlju se razmatra stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x_t, t) dt + g(x_t, t) dw(t), \quad t \in [0, T], \\ x_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{1.11}$$

pri čemu su funkcionali

$$f : \mathcal{C} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad g : \mathcal{C} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$$

Borel merljivi, $x(t)$ je d -dimenzionalan proces i $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ je stohastički proces iz klase \mathcal{C} i interpretira se kao prošlost datog stanja. Zbog zavisnosti od prošlosti, početni uslov se mora zadati na čitavom intervalu $[-\tau, 0]$, tj.

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\},$$

pri čemu je ξ \mathcal{F}_0 -merljiva slučajna promenljiva iz klase \mathcal{C} , za koju važi $E\|\xi\|^2 < \infty$.

Definicija 1.5.1 Za d -dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.11) ako je s.i. neprekidan, $\{x_t, t \in [0, T]\}$ je \mathcal{F}_t -adaptiran, $\int_0^T |f(x_t, t)| dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(x_t, t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$, integralni oblik jednačine (1.11) je zadovoljen s.i.

Definicija 1.5.2 Rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ stohastički ekvivalentno tom rešenju, tj. ako je

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\} = 1.$$

Sledeći fundamentalni rezultat u teoriji stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina se može naći, na primer, u [72].

Teorema 1.5.1 Ako za funkcionalne f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je

$$\begin{aligned} |f(\varphi, t) - f(\psi, t)| \vee |g(\varphi, t) - g(\psi, t)| &\leq K\|\varphi - \psi\|, \\ |f(\varphi, t)| \vee |g(\varphi, t)| &\leq K(1 + \|\varphi\|) \end{aligned}$$

za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$, tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.11). Uz to, ako je $E\|\xi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$.

Ako se prepostavi da je $f(0, t) \equiv 0$ i $g(0, t) \equiv 0$, jednačina (1.11) ima rešenje $x(t) \equiv 0$ koje odgovara početnom uslovu $x_0 = 0$. Ovo rešenje se naziva *trivialno rešenje* funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine (1.11).

Stabilnost funkcionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina

U nastavku su navedene definicije i teoreme teorije stabilnosti funkcionalnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, koje se mogu naći, na primer, u [55].

Definicija 1.5.3 Trivijalno rešenje jednačine (1.11) je stohastički stabilno ako za svako $\varepsilon \in (0, 1)$ i $r > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$, tako da je

$$P\{|x(t; \varphi)| > r, t \geq 0\} \leq \varepsilon,$$

za svaki početni uslov $\varphi \in \mathcal{D}$ za koji je $P\{\|\varphi\| \leq \delta\} = 1$.

Definicija 1.5.4 Trivijalno rešenje jednačine (1.11) je srednje-kvadratno stabilno ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da kad god je $\sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\varphi(\theta)|^2 < \delta$, tada je $E|x(t; \varphi)|^2 < \varepsilon$ za svako $t \geq 0$.

Definicija 1.5.5 Trivijalno rešenje jednačine (1.11) je asimptotski srednje-kvadratno stabilno ako je srednje-kvadratno stabilno i $\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t; \varphi)|^2 = 0$.

Diferencijalni operator pridružen jednačini (1.11) se definiše formulom

$$LV(t, \varphi) = \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{E}_{t, \varphi} V(t + \Delta, x_{t+\Delta}) - V(t, \varphi)}{\Delta},$$

gde je $x(s), s \geq t$ rešenje jednačine (1.11) sa početnim uslovom $x_t = \varphi$, a $V(t, \varphi)$ je funkcional definisan za $t \geq 0$ i $\varphi \in \mathcal{D}$.

U nastavku će klasa funkcionala $V(t, \varphi)$ biti redukovana da bi se odredio operator L . Najpre, za $t \geq 0$ i funkciju $\varphi \in \mathcal{D}$, neka je $V(t, \varphi) = V(t, \varphi(0), \varphi(\theta)), -\tau \leq \theta \leq 0$. Tada se definiše funkcija

$$V_\varphi(t, x) = V(t, \varphi) = V(t, x_t) = V(t, x, x(t + \theta)), \quad -\tau \leq \theta \leq 0,$$

gde je $\varphi = x_t$, $x = \varphi(0) = x(t)$.

Neka je $C_{1,2}$ klasa funkcionala $V(t, \varphi)$, tako da su, za skoro svako $t \geq 0$ prvi i drugi izvod po x od $V_\varphi(t, x)$ neprekidni, dok je prvi izvod po t neprekidan i ograničen. Tada se $V(t, \varphi)$ naziva funkcionalom Lyapunova. Primenom operatora L na jednačinu (1.11), dobija se

$$LV(t, x_t) = \frac{\partial V_\varphi(t, x)}{\partial t} + f^T(t, x_t) \frac{\partial V_\varphi(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[g^T(t, x_t) \frac{\partial^2 V_\varphi(t, x)}{\partial x^2} g(t, x_t) \right].$$

Sledeće teoreme daju dovoljne uslove asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti i stabilnosti u verovatnoći trivijalnog rešenja jednačine (1.11) u terminima funkcionala Lyapunova.

Teorema 1.5.2 Neka postoji funkcional $V(t, \varphi) \in C_{1,2}$ tako da je

$$\begin{aligned} c_1 E|x(t)|^2 &\leq EV(t, x_t) \leq c_2 \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(t + \theta)|^2, \\ ELV(t, x_t) &\leq -c_3 E|x(t)|^2, \end{aligned}$$

za $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.11) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Teorema 1.5.3 Neka postoji funkcional $V(t, \varphi) \in C_{1,2}$ tako da je

$$c_1|x(t)|^2 \leq V(t, x_t) \leq c_2 \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |x(t + \theta)|^2 \quad i \quad LV(t, x_t) \leq 0,$$

za $c_i > 0$, $i = 1, 2$ i za bilo koje $\varphi \in \mathcal{D}$ za koje je $P\{||\varphi|| \leq \delta\} = 1$, gde je $\delta > 0$ dovoljno mali broj. Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.11) stohastički stabilno.

1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U mnogim situacijama iz realnog života, promene sistema su uslovljene kako trenutnim stanjem, tako i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. U slučajevima kada te promene zavise od svih stanja sistema u toku prethodnog perioda fiksne dužine, koriste se funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine o kojima je bilo reči u Poglavlju 1.5. Međutim, često je priroda zavisnosti od prošlosti nekog sistema takva da se adekvatnije opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

Postoji opsežna literatura kako o determinističkim, tako i o stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa kašnjenjem i njihovoj primeni, izmedju ostalog, u populacionoj dinamici, medicini i teoriji materijala sa memorijom. Tako se, na primer, rast ćelijske populacije u okruženju koje je izloženo slučajnim uticajima može opisati sledećom stohastičkom diferencijalnom jednačinom sa vremenski zavisnim kašnjenjem,

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\rho_0 x(t) + \rho_1 x(t - \delta(t)))dt + \beta x(t)dw(t), \quad t \geq 0, \\ x_0 &= \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \end{aligned}$$

gde $x(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t . U ovom modelu se pretpostavlja da, kada otpočne, ćelijska deoba nije trenutna. U tom smislu ρ_0 predstavlja stopu trenutnog rasta populacije, ρ_1 je stopa zakasnelog rasta populacije, dok se δ može interpretirati kao vreme ćelijske deobe.

Pored toga, u radu [108] je razmatran sledeći stohastički Lotka–Volterra model sa vremenski zavisnim kašnjenjem,

$$dx_i(t) = x_i(t) \left[\left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j(t - \delta_j(t)) \right) dt + \sigma_i dw(t) \right],$$

za $t \geq 0$ i $i = 1, 2, \dots, n$, pri čemu $x_i(t)$ predstavlja veličinu populacije i -te vrste u trenutku t , b_i je stopa rasta i -te vrste, a_{ij} , b_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ predstavljaju mere interakcije izmedju vrsta x_i i x_j , $\delta_j \in C^1([0, \infty); [0, \tau])$, $\tau > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ su funkcije kašnjenja, a $x_j(t - \delta_j(t))$ predstavlja veličinu populacije koja je uslovljena nekim faktorima iz prošlosti.

Imajući u vidu ranije uvedene oznake, u nastavku će biti razmatrana stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem. U tom smislu se uvodi

Borelova funkcija $\delta : [0, T] \rightarrow [0, \tau]$ tako da je

$$dx(t) = f(x(t), x(t - \delta(t)), t)dt + g(x(t), x(t - \delta(t)), t)dw(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \quad (1.13)$$

pri čemu su $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ i $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ Borelove funkcije i $x(t)$ je d -dimenzionalan proces koji opisuje promenu stanja sistema tokom vremena. Prepostavka je da je početni uslov ξ \mathcal{F}_0 -merljiv, da pripada familiji $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ i da važi $E\|\xi\|^2 < \infty$.

Definicija 1.6.1 Za d -dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.12) sa početnim uslovom (1.13) ako je s.i. neprekidan, \mathcal{F}_t -adaptiran proces, $\int_0^T |f(x(t), x(t - \delta(t)), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(x(t), x(t - \delta(t)), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$ integralni oblik jednačine (1.12) je zadovoljen s.i.

Jedinstvenost rešenja jednačine (1.12) se definiše na isti način kao u Definiciji 1.5.2.

Dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim kašnjenjem su dati sledećom teoremom koja se može naći u [72].

Teorema 1.6.1 Ako koeficijenti f i g jednačine (1.12) zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $t \in [0, T]$ i $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$ važi

$$|f(x, y, t) - f(\tilde{x}, \tilde{y}, t)|^2 \vee |g(x, y, t) - g(\tilde{x}, \tilde{y}, t)|^2 \leq K(|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2),$$

i za svako $(x, y, t) \in R^d \times R^d \times [0, T]$, važi

$$|f(x, y, t)|^2 \vee |g(x, y, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.12). Pored toga, ako je $E\|\xi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$.

1.7 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine

Prirodno uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina koje imaju osobinu zavisnosti od prošlosti, predstavljaju neutralne stohastičke diferencijalne jednačine u kojima se, pored nepoznatog procesa x , pod diferencijalom javlja i argument sa kašnjenjem. U tom smislu, mnoga poznata tvrdjenja koja se odnose na funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine i stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjnjem, uspešno su proširena na klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina što potvrđuju, izmedju ostalih, radovi [47, 65, 70, 72, 86]. U ovom poglavlju se navode osnovni pojmovi vezani za funkcionalne neutralne stohastičke diferencijalne jednačine.

Neutralna funkcionalna stohastička diferencijalna jednačina je oblika

$$d[x(t) - u(x_t)] = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dw(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.14)$$

sa početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, pri čemu su

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C} \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ g : \mathcal{C} \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}, \\ u : \mathcal{C} \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

i $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\} \in \mathcal{C}$, pri čemu je $\mathcal{C} = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$.

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.14) [72].

Teorema 1.7.1 *Ako za funkcionele f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da važi*

$$\begin{aligned} |f(\varphi, t) - f(\psi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t) - g(\psi, t)|^2 &\leq K\|\varphi - \psi\|^2, \\ |f(\varphi, t)|^2 \vee |g(\varphi, t)|^2 &\leq K(1 + \|\varphi\|^2), \end{aligned}$$

za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$, i ako postoji $\kappa \in (0, 1)$ tako da važi

$$|u(\varphi) - u(\psi)| \leq \kappa\|\varphi - \psi\|,$$

za svako $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$ i ako je $u(0) = 0$, tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.14). Pored toga, ako je $E\|\xi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty.$$

Stabilnost neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina

U nastavku se navode teoreme koje daju dovoljne uslove stabilnosti neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina u terminima funkcionala Lyapunova (videti [55]).

Kao u Poglavlju 1.5, i ovde će \mathcal{D} označavati prostor svih \mathcal{F}_0 -adaptiranih funkcija $\varphi \in \mathcal{C}$. Takodje, neka važi

$$|u(t, \varphi)| \leq \int_0^\tau |\varphi(-s)|dK(s), \quad \int_0^\tau dK(s) < 1. \quad (1.15)$$

Ako koeficijenti jednačine (1.14) zadovoljavaju uslove: $f(0, t) \equiv 0$, $g(0, t) \equiv 0$ i $u(0) = 0$, jednačina ima *trivijalno rešenje* $x(t) \equiv 0$ sa početnim uslovom $x_0 = 0$.

Definicije 1.5.3, 1.5.4 i 1.5.5 se mogu proširiti i na jednačinu (1.14), pa će zbog toga ovde biti izostavljene.

Neka je $C_{1,2}$ klasa funkcionala $V(t, \varphi)$ za koje funkcije $V_\varphi(t, x)$ imaju neprekidne izvode prvog i drugog reda po x i ograničen neprekidan prvi izvod po t za skoro svako $t \geq 0$.

Teorema 1.7.2 Neka važi uslov (1.15) i neka postoji funkcional

$$V(t, \varphi) = W(t, \varphi) + |\varphi(0) - u(t, \varphi)|^2$$

tako da je $V(t, \varphi) \in C_{1,2}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq EW(t, x_t) \leq K_1 \sup_{-\tau < \theta < 0} E|x(t + \theta)|^2, \\ ELV(t, x_t) &\leq -K_2 E|x(t)|^2, \end{aligned}$$

za $K_i > 0$, $i = 1, 2$. Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.14) asimptotski srednjekvadratno stabilno.

Teorema 1.7.3 Neka postoji funkcional $V(t, \varphi) \in C_{1,2}$ tako da je

$$c_1|x(t)|^2 \leq V(t, x_t) \leq c_2\|x_t\|^2 \text{ i } LV(t, x_t) \leq 0,$$

za $c_i > 0$, $i = 1, 2$ i bilo koje $\varphi \in \mathcal{D}$ za koje je $P\{|\varphi| \leq \delta\} = 1$, gde je $\delta > 0$ dovoljno mali broj. Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.14) stohastički stabilno.

1.8 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Markovskim prelazima

Stohastičke diferencijalne jednačine su od velikog značaja zbog toga što opisuju mnoge pojave iz realnog života. Upravo iz praktičnih problema je proisteklo veće interesovanje za hibridne sisteme. Naime, uočeno je da se neki sistemi menjaju u skladu sa različitim zakonima u toku nekog vremenskog perioda i da u slučajnim momentima prelaze sa jednog režima rada na drugi. To je osnovna motivacija za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima koje predstavljaju posebnu klasu hibridnih sistema. U radovima [71, 74, 75, 76, 111] su razmatrane obične stohastičke diferencijalne jednačine kao i stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i Markovskim prelazima.

Pored već uvedenih oznaka, neka $\{r(t), t \in [0, T]\}$ označava neprekidan s desna lanac Markova definisan nad datim prostorom verovatnoća, sa konačnim skupom stanja $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ i generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ definisanim sa

$$P\{r(t + \Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases} \quad (1.16)$$

pri čemu je $\Delta > 0$, a $\gamma_{ij} \geq 0$ predstavlja gustinu prelaza iz stanja i u stanje j kada je $i \neq j$, dok je

$$\gamma_{ii} = - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}.$$

Prepostavlja se da je lanac Markova $r(\cdot)$ nezavisan u odnosu na Wienerov proces $w(\cdot)$. Pritom je skoro svaka trajektorija procesa $r(\cdot)$ neprekidna s desna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na intervalu $[0, T]$.

U nastavku se razmatra stohastička diferencijalna jednačina sa vremenskim kašnjenjem i Markovskim prelazima oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x(t), x(t-\tau), r(t), t)dt + g(x(t), x(t-\tau), r(t), t)dw(t), \quad t \in [0, T], \\ x_0 = \xi &= \{x(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}, \quad r(0) = r_0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

pri čemu su

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m},$$

Borelove funkcije i $x(t)$ je d -dimenzionalan proces.

Definicija 1.8.1 Za d -dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [0-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.17) ako je s.i. neprekidan, $x(t), t \in [0, T]$ je \mathcal{F}_t -adaptiran, $\int_0^T |f(x(t), x(t-\tau), r(t), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(x(t), x(t-\tau), r(t), t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$ integralni oblik jednačine (1.17) je zadovoljen s.i.

Teorema 1.8.1 Ako koeficijenti f i g jednačine (1.17) zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta, tj. ako postoji konstanta $\bar{K} > 0$ tako da za svako $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$, $i \in \mathbb{S}$ i $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1, i, t) - f(x_2, y_2, i, t)|^2 \vee |g(x_1, y_1, i, t) - g(x_2, y_2, i, t)|^2 \\ \leq \bar{K}(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2), \end{aligned}$$

i ako postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0, T]$, $i \in \mathbb{S}$,

$$|f(x, y, i, t)|^2 \vee |g(x, y, i, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ jednačine (1.17). Pored toga, ako je $E \sup_{t \in [-\tau, 0]} |\xi(t)|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{t \in [-\tau, T]} |x(t)|^p < \infty$.

Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima

Poslednjih godina se direktni metod Lyapunova razvio u smislu da može da se primeni prilikom dokazivanja stabilnosti i ograničenosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa Markovskim prelazima. Medju mnogobrojnim autorima koji su prilagodili ovaj metod stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa Markovskim prelazima ovde će biti istaknuti Mao [71, 74, 76], Mao i Shaikhet [75], Shaikhet [96], Yuan i Mao [111].

Neka za koeficijente jednačine (1.17) važe sledeće pretpostavke: $f(0, 0, t, i) \equiv 0$ i $g(0, 0, t, i) \equiv 0$, $\forall (t, i) \in [0, T] \times \mathbb{S}$. Tada jednačina (1.17) ima *trivijalno rešenje* $x(t) \equiv 0$ sa početnim uslovom $x_0 = 0$.

I u ovom poglavlju se koristi notacija $\mathcal{C} = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, \mathcal{D} je prostor svih \mathcal{F}_0 -adaptiranih slučajnih promenljivih $\varphi \in \mathcal{C}$, iz Poglavlja 1.5. Sledee definicije i teorema daju dovoljne uslove asymptotske srednje-kvadratne stabilnosti trivijalnog rešenja jednačine (1.17), a mogu se naći u [76, 96].

Definicija 1.8.2 Trivijalno rešenje jednačine (1.17) je stohastički stabilno ili stabilno u verovatnoći, ako za svako $\varepsilon \in (0, 1)$ i $r > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$, tako da je

$$P\{|x(t; \varphi, i)| > r, t \geq 0\} \leq \varepsilon,$$

za svaki početni uslov $\varphi \in \mathcal{D}$ za koji je $P\{\|\varphi\| \leq \delta\} = 1$.

Definicija 1.8.3 Trivijalno rešenje jednačine (1.17) je srednje-kvadratno stabilno ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da kad god je $\sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\varphi(\theta)|^2 < \delta$, tada je $E|x(t; \varphi, i)|^2 < \varepsilon$ za svako $t \geq 0$.

Definicija 1.8.4 Trivijalno rešenje jednačine (1.17) je asimptotski srednje-kvadratno stabilno ako je srednje-kvadratno stabilno i $\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t; \varphi)|^2 = 0$.

Neka je $C^{1,2}$ klasa svih nenegativnih funkcija $V(x, i, t)$ sa neprekidnim izvodima prvog i drugog reda po x i ograničenim neprekidnim prvim izvodom po t za skoro svako $t \geq 0$. Za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, $i \in \mathbb{S}$ i $V \in C^{1,2}$ operator L se definiše na sledeći način

$$\begin{aligned} LV(x, y, i, t) &= V_t(x, i, t) + V_x(x, i, t)f(x, y, i, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(x, y, i, t)V_{xx}(x, i, t)g(x, y, i, t)] + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}V(x, j, t). \end{aligned}$$

Teorema 1.8.2 Ako postoji funkcija $V \in C^{1,2}$ i pozitivne konstante $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ takve da je $\lambda_1 > \lambda_2$,

$$c_1|x|^2 \leq V(x, i, t) \leq c_2|x|^2$$

i

$$LV(x, y, i, t) \leq -\lambda_1|x|^2 + \lambda_2|y|^2$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $i \in \mathbb{S}$, tada je trivijalno rešenje jednačine (1.17) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

1.9 Elementarne, integralne i nejednakosti sa matematičkim očekivanjem

U ovom poglavlju biće navedene neke elementarne nejednakosti, integralna nejednakost Gronwall–Bellmana i neke nejednakosti sa matematičkim očekivanjem, koje će biti korišćene prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti [82] koje će biti korišćene su:

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2; \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\ln a - \ln b}{a - b} \leq \frac{1}{b}, \quad 0 < b < a; \tag{1.19}$$

$$\pm 2ab \leq a^2 + b^2; \tag{1.20}$$

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2. \tag{1.21}$$

$$a^\alpha b^\beta \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} a^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} b^{\alpha+\beta}, \quad a, b, \alpha, \beta > 0. \tag{1.22}$$

Poznato je da postoji više verzija Gronwall–Bellmanove nejednakosti. Za potrebe daljeg razmatranja biće navedena samo jedna od verzija, koja će biti eksplicitno korišćena i čiji se dokaz može naći u [72].

Teorema 1.9.1 *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(\cdot)$ Borelova ograničena nenegativna funkcija definisana na $[0, T]$ i neka je $v(\cdot)$ nenegativna integrabilna funkcija na $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq c e^{\int_0^t v(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

U nastavku će biti navedene neke od najpoznatijih nejednakosti koje važe za matematičko očekivanje, a koje će biti korišćene pri dokazivanju glavnih rezultata.

- **Nejednakost Chebysheva:** Neka slučajna promenljiva X ima momenat reda r , $r \in \mathbb{N}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}. \quad (1.23)$$

- **Nejednakost Lyapunova:** Ako je X slučajna promenljiva za koju je $E|X|^t < \infty$ i $0 < s < t$ realni brojevi, tada je

$$(E|X|^s)^{1/s} \leq (E|X|^t)^{1/t}. \quad (1.24)$$

- **Nejednakost Höldera:** Ako su p i q realni brojevi, takvi da je $1 < p, q < \infty$ i $1/p + 1/q = 1$, i ako za slučajne promenljive X i Y važi $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^q < \infty$, tada je

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}. \quad (1.25)$$

- **Nejednakost Jensena:** Neka je X slučajna promenljiva za koju je $E|X| < \infty$ i neka je $g = g(X)$ konveksna Borelova funkcija. Tada je

$$g(EX) \leq Eg(X). \quad (1.26)$$

Glava 2

Stohastički populacioni modeli

Populaciona dinamika je grana prirodnih nauka koja se bavi kratkoročnim i dugo-ročnim promenama u veličini i starosnoj strukturi populacije, biološkim i procesima u okruženju koji utiču na te promene. Ona izučava na koji način promene stope radjanja i umiranja, migracije i stareњe utiču na populaciju.

U ovoj glavi su predstavljena tri tipa populacionih modela. Svi rezultati iz ove glave su originalni naučni rezultati koji se mogu naći u objavljenim i još neobjavljenim naučnim radovima. U Poglavlju 2.2 se razmatraju stohastički populacioni modeli sa Allee efektom bez i sa vremenskim kašnjenjem. Dokazuje se egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja, ispituje stabilnost ekvilibrijuma razmatranih modela i određuju uslovi pri kojima dolazi do istrebljenja posmatrane populacije. Rezultati ovog poglavlja su potpuno novi i sadržani su u radovima [45, 59]. Poglavlje 2.3 je posvećeno stohastičkom predator-plen modelu pri čemu je u populaciju plena uključen Allee efekat. Za ovaj model se najpre dokazuje egzistencija, jedinstvenost i ograničenost pozitivnog rešenja. Pored toga, ispituje se pod kojim uslovima dolazi do istrebljenja kako populacije plena, tako i populacije predavara, a zatim kako istrebljenje jedne populacije utiče na ponašanje druge. U Poglavlju 2.4 je predstavljen stohastički Gompertzov model sa kašnjenjem, kao i modifikacija ovog modela u koji su uključeni i Markovski prelazi. Za oba modela je dokazana egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja, a zatim su odredjeni uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja tumorskih ćelija iz organizma, kao i uslovi pod kojima je populacija tumorskih ćelija perzistentna u srednjem. Rezultati sadržani u ovom poglavlju disertacije su originalni naučni rezultati koji se mogu naći u radu [46]. Za svaki od navedenih modela su pronadjeni primjeri iz realnog života koji ilustruju teorijske rezultate.

2.1 Uvodni pojmovi

Matematički model koji se najčešće koristi da bi se opisala dinamika bilo koje populacije je eksponencijalni model. Prema eksponencijalnom modelu promena veličine populacije je proporcionalna veličini populacije

$$dN(t) = r N(t) dt, \quad (2.1)$$

gde je $N(t)$ veličina populacije u trenutku t , a r koeficijent priraštaja, odnosno stopa rasta populacije. Jednačina (2.1) je linearna diferencijalna jednačina čije je rešenje $N(t) = N_0 e^{rt}$, gde je N_0 biomasa, tj. početni broj jedinki u populaciji. Jasno je da kada je $r > 0$ tada $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$, a kada je $r < 0$, tada $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$, tj. dolazi do istrebljenja populacije.

Ako je broj elemenata neke populacije odredjen modelom (2.1) može se uočiti da, kada je $r > 0$ dolazi do eksplozije veličine populacije, što nije realno. Razlog zbog koga nije realno da broj elemenata u populaciji neograničeno raste leži u činjenici da okruženje populacije ima odredjena ograničenja po pitanju resursa. Kada je veličina populacije daleko od svog maksimalnog broja ona može da raste eksponencijalno, ali kada počne da se približava maksimumu veličina populacije počinje da varira. Zato je predložen drugi model kojim bi se prevazišao ovaj nedostatak eksponencijalnog modela. To je logistički model

$$dN(t) = r N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) dt, \quad (2.2)$$

gde je K maksimalni broj jedinki populacije na odredjenom prostoru, tzv. kapacitet sredine (carrying capacity). Očigledno da se model (2.2) svodi na eksponencijalni (2.1) kada je $N(t) \ll K$.

S obzirom na činjenicu da su populacioni sistemi izloženi slučajnom uticaju sredine koji menja vrednost parametara modela, logično je proučavati stohastičke modele koji su nastali iz pomenutih determinističkih. Stohastičkom perturbacijom nekog od parametara determinističkog modela dobijaju se odgovarajući stohastički modeli. Najčešće se perturbuje stopa rasta r sa $r + \alpha \dot{w}_t$, pri čemu \dot{w}_t predstavlja Gaussov beli šum sa intenzitetom α^2 .

U nastavku su navedene osnovni pojmovi populacione dinamike.

Neka $N(t)$ predstavlja veličinu posmatrane populacije u trenutku $t \geq 0$ i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ kompletan prostor verovatnoća sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove (tj. rastuća je i neprekidna s desna, dok \mathcal{F}_0 sadrži sve dogadjaje verovatnoće nula). Kako $N(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t prepostavlja se, bez smanjenja opštosti, da je početni broj jedinki u populaciji $N(0) = N_0 > 0$ s.i.

Definicija 2.1.1 *Do lokalnog istrebljenja populacije dolazi ako za broj jedinki u populaciji $N(t)$ važi da je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0 \text{ s.i.}$$

Definicija 2.1.2 *Populacija je neperzistentna u srednjem ako za broj jedinki u populaciji $N(t)$ važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds = 0 \text{ s.i.}$$

Definicija 2.1.3 *Populacija je stohastički slabo perzistentna u srednjem ako za broj jedinki u populaciji $N(t)$ važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds > 0 \text{ s.i.}$$

Definicija 2.1.4 *Populacija je stohastički postojana ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoje pozitivne konstante β i M tako da za broj jedinki u populaciji $N(t)$ važi da je*

$$P \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \geq \beta \right\} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{i} \quad P \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq M \right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Na osnovu prethodnih definicija može se zaključiti da iz stohastičke postojanosti populacije sledi njena stohastička slaba perzistentnost u srednjem. Obrnuto ne važi.

2.2 Stohastički populacioni model sa Allee efektom

Jedna od najinteresantnijih tema u ekološkoj literaturi je svakako invazija novih vrsta na odredjena staništa. Invazija može da ima brojne pozitivne i negativne efekte na postojeće ekosisteme. U današnje vreme je sve veći broj naučnih radova posvećenih minimiziranju negativnih efekata koje invazija novih vrsta može da ima po lokalnu biološku zajednicu.

Poznato je da mnoge vrste često saradjuju izmedju sebe u potrazi za hranom ili u situacijama kada je neophodno da se brane od neke druge vrste. Neke vrste, kao što su ribe i ptice, formiraju grupe (jata) i na taj način postaju teži plen svojim predatorima. Na sličan način se i neke vrste parazita udružuju ne bi li zajedno lakše pobedile odbrambeni mehanizam domaćina. Vrste kao što su mravi i pčele, žive u zajednicama u kojima postoji podela rada, saradnja, itd. Ovakve zajednice se formiraju jer jedinke imaju veću šansu da opstanu u prirodi ako pripadaju nekoj grupi.

Allee efekat je otkriven od strane Warder Clyde Alleea [3] i njegovih kolega 1931. godine i odnosio se najpre samo na sisare, ali se danas koristi i za mnoge druge vrste. Allee je u svojim istraživanjima primetio da kod mnogih biljnih i životinjskih vrsta stopa rasta populacije po jedinki populacije opada kada je veličina populacije mala. U takvim uslovima, stopa rasta može pasti na nulu ili imati čak i negativnu vrednost zbog smanjenja stope razmnožavanja i/ili stope preživljavanja kada jedinke u populaciji nisu dovoljno brojne. Jedan od Alleejevih saradnika, Odum, ovaj proces je najpre nazvao *Allee pravilo*, ali danas je taj proces u literaturi poznat kao *Allee efekat*. Postoji nekoliko definicija Allee efekta, ali najopštija je ona u kojoj se Allee efekat posmatra kao korelacija veličine populacije i stope rasta populacije po jedinki populacije.

Razlikuju se dve vrste Allee efekta, strogi i slab Allee efekat. Kod strogog Allee efekta kada veličina populacije dosegne kritičnu vrednost, tzv. Allee prag, počinje da opada, odnosno raste, ispod, odnosno iznad njega, respektivno. Kod slabog Allee efekta veličina populacije nema kritičnu vrednost. Šta više, pri malim vrednostima veličine populacije, stopa rasta populacije raste sa povećanjem veličine populacije. Postoji više faktora koji mogu da izazovu Allee efekat, a neki od njih su: poteškoće u pronalaženju parnjaka, promene u okolini, uzajamno dejstvo jedinki jednih na druge unutar iste vrste ili uzajamno dejstvo različitih vrsta koje žive na istom prostoru, itd.

2.2.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Allee efekat je tema kojoj se sve više pridaje značaj u ekološkoj literaturi, naročito u poslednje dve decenije. Naime, sprečavanje istrebljenja pojedinih vrsta je jedan od prioriteta u očuvanju životne sredine, jer je poznato da su male populacije (sa malim brojem elemenata) izložene većem riziku od istrebljenja. Allee efekat takođe igra začajnu ulogu prilikom invazije novih vrsta u ekosisteme i u njihovoj kontroli (za više detalja pogledati [14]).

U matematičkoj literaturi se može naći veliki broj radova koji se bave populacionim modelima, i to od determinističkih, preko stohastičkih modela u kojima je veličina populacije predstavljena diskretnom slučajnom promenjivom, do radova koji proučavaju vrlo složene neprekidne stohastičke modele. Takođe su brojni autori proučavali i populacione modele sa Allee efektom. Naime, poznato je da je Allee efekat zastupljen u mnogim programima za očuvanje ugroženih biljnih i životinjskih vrsta, kao i u studijama o širenju pojedinih vrsta nakon invazije na novo stanište (videti, na primer, [2, 63]), jer može da dovede do istrebljenja populacije ukoliko veličina populacije padne ispod Allee praga. Sa druge strane, poslednjih godina je proučavanje Allee efekta privuklo dosta pažnje u populacionoj dinamici. Ranije studije su pokazale da Allee efekat može imati značajan uticaj na stabilnost populacionih modela. Dokazano je da može imati, kako destabilizacionu, tako i stabilizacionu ulogu (videti [22, 77]).

Svi prethodno pomenuti radovi se bave determinističkim modelima. Ipak, populacioni sistemi su izloženi slučajnom uticaju sredine, pa je zato korisno videti kako slučajne promene u okruženju utiču na njih. Jedan od radova koji se bavi stohastičkim modelima je rad D. Jianga, N. Shia i Y. Zhaoa [110], koji proučava egzistenciju, jedinstvenost i stabilnost rešenja stohastičkog populacionog modela sa ograničenom količinom hrane na određenom životnom staništu. Ovaj rad je poslužio kao motivacija za proučavanje stohastičkog populacionog modela sa Allee efektom.

A. Ackleh, L. Allen, J. Cartera [2] su uveli populacioni model sa Allee efektom, oblika

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{T}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1\right), \quad t \geq 0, \\ N(0) &= n_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gde $N(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t ; konstanta T je minimalan broj jedinki u populaciji neophodan za opstanak populacije (Allee prag); K je kapacitet sredine koji predstavlja maksimalan broj jedinki u populaciji koji može živeti na određenom prostoru, uzimajući u obzir veličinu samog prostora kao i bogatstvo hranom, $0 < T < K$; r je stopa rasta populacije.

2.2.2 Konstrukcija, egzistencija i jedinstvenost rešenja stohastičkog modela

S obzirom na činjenicu da su populacioni sistemi izloženi slučajnom uticaju sredine, logično je razmatrati stohastički model koji se zasniva na modelu (2.3) da bi se

ispitalo na koji način šum sredine utiče na njega. Stoga se pretpostavlja da je stopa rasta populacije r stohastički perturbovana sa $r \rightarrow r + \alpha \dot{w}(t)$, pri čemu $\dot{w}(t)$ predstavlja Gaussov beli šum sa intenzitetom α^2 . Na taj način se dobija stohastička diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} dN(t) &= N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{T}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1\right) (r dt + \alpha dw(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.4) \\ N(0) &= n_0, \end{aligned}$$

gde je $w = \{w(t), t \geq 0\}$ jednodimenzionalno standardno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P\}$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadowoljava uobičajene uslove, dok je n_0 je slučajna promenljiva nezavisna od w za koju je $0 < n_0 < K$ s.i.

Rezultati koji su izloženi u nastavku ovog poglavlja predstavljaju originalne naučne rezultate koji su objavljeni u radu [59].

Kako $N(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t , u nastavku će biti razmatrana samo nenegativna rešenja jednačine (2.4).

Očigledno je da su $E_0 = 0$, $E_* = T$ i $E^* = K$ rešenja jednačine (2.4). Ako je $N(t) \neq 0$, $N(t) \neq T$ i $N(t) \neq K$, primenom Itôve formule za stohastičko diferenciranje se dobija

$$\begin{aligned} d \ln \left| \frac{K - N(t)}{N(t) - T} \right| &= d \ln |K - N(t)| - d \ln |N(t) - T| \\ &= -\frac{dN(t)}{K - N(t)} - \frac{dN(t)dN(t)}{2(K - N(t))^2} - \frac{dN(t)}{N(t) - T} + \frac{dN(t)dN(t)}{2(N(t) - T)^2} \\ &= -\frac{K - T}{TK} N(t) \left[\left(r - \alpha^2 N(t) \frac{T + K - 2N(t)}{2TK} \right) dt + \alpha dw(t) \right]. \end{aligned}$$

Tada je,

$$\frac{K - N(t)}{N(t) - T} = C \exp[A(t)], \quad (2.5)$$

gde je

$$A(t) = -\frac{K - T}{TK} \int_0^t N(s) \left[\left(r - \alpha^2 N(s) \frac{T + K - 2N(s)}{2TK} \right) ds + \alpha dw(s) \right].$$

U zavisnosti od početnog broja jedinki u populaciji, n_0 , razlikuju se dva slučaja:

(i) Neka je $T < n_0 < K$. Tada je $C = \frac{K - n_0}{n_0 - T} > 0$ s.i., pa je

$$T < N(t) < K, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Dakle, na osnovu (2.5) može se zaključiti da je

$$N(t) = \frac{K + TC \exp[A(t)]}{1 + C \exp[A(t)]}.$$

(ii) Sa druge strane, neka je $0 < n_0 < T$. Tada je $C = \frac{K - n_0}{n_0 - T} < 0$ s.i. Kako je $T < K$, na osnovu (2.5) je

$$0 < N(t) < T, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

kao i,

$$N(t) = \frac{K - TC \exp[A(t)]}{1 - C \exp[A(t)]}.$$

U nastavku se dokazuje teorema egzistencije i jedinstvenosti pozitivnog rešenja $N(t)$ jednačine (2.4), kao i uniformna neprekidnost rešenja $N(t)$, pri čemu se pod uniformnom neprekidnošću rešenja podrazumeva da je rešenje neprekidno i da su mu skoro sve trajektorije uniformno neprekidne za $t \geq 0$.

Da bi se dokazala uniformna neprekidnost pozitivnog rešenja, potrebno je najpre formulisati teoremu Kolmogorov–Čentsova o neprekidnosti slučajnih procesa (videti [48, 73]).

Lema 2.2.1 *Neka n -dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ zadovoljava uslov*

$$E|x(t) - x(s)|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}, \quad 0 < s, t < \infty,$$

za neke pozitivne konstante α, β i C . Tada postoji neprekidna modifikacija $\tilde{x}(t)$ procesa $x(t)$, za koju važi da za svako $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$, postoji pozitivna slučajna promenljiva $h(\omega)$ tako da je

$$P \left\{ \omega : \sup_{0 < |t-s| < h(\omega); 0 \leq s, t < \infty} \frac{|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s)|}{|t - s|^\gamma} \leq \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} \right\} = 1.$$

Drugim rečima, skoro svaka trajektorija procesa \tilde{x}_t je lokalno uniformno Hölder-neprekidna sa eksponentom γ .

Teorema 2.2.1 *Za bilo koji početni uslov $N(0) = n_0$ za koji je $0 < n_0 < K$, postoji jedinstveno, uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4).*

Dokaz. Na osnovu prethodne diskusije, u ovom dokazu se razlikuju dva slučaja.

I. Neka je $T < n_0 < K$ i neka je stohastički proces $x = \{x(t), t \geq 0\}$ definisan na sledeći način

$$x(t) := \ln \frac{K - N(t)}{N(t) - T}.$$

Ovaj proces je dobro definisan na osnovu (2.6). Primenom formule Itôa na $x(t)$, dobija se

$$dx(t) = f(x(t)) dt + g(x(t)) dw(t), \quad t \geq 0 \tag{2.8}$$

gde je

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{(K - T)(K + Te^x)}{TK(1 + e^x)} \left[r - \alpha^2 \frac{(K - T)(K + Te^x)(e^x - 1)}{2TK(1 + e^x)^2} \right], \\ g(x) &= -\frac{(K - T)(K + Te^x)}{TK(1 + e^x)} \alpha \end{aligned}$$

za svako $t > 0$ i $x(0) = x_0 := \ln \frac{K - n_0}{n_0 - T}$. Lako se može proveriti da su funkcije f i g ograničene i neprekidne, kao i da zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta. Stoga, jednačina (2.8) ima jedinstveno neprekidno rešenje $x(t)$, $t \geq 0$ koje zadovoljava početni uslov $x(0) = x_0$.

Kako je

$$N(t) = \frac{K + Te^{x(t)}}{1 + e^{x(t)}},$$

primenom formule Itôa se može pokazati da je $N(t)$ rešenje jednačine (2.4). Zaista,

$$\begin{aligned} dN(t) &= d\left[\frac{K + Te^{x(t)}}{1 + e^{x(t)}}\right] \\ &= -(K - T)\frac{e^{x(t)}}{(1 + e^{x(t)})^2} \left[dx(t) + \frac{1 - e^{x(t)}}{1 + e^{x(t)}}dx(t)dx(t)\right] \\ &= \frac{(K - T)^2}{TK} \frac{e^{x(t)}}{(1 + e^{x(t)})^2} \frac{K + Te^{x(t)}}{1 + e^{x(t)}}(r dt + \alpha dw(t)) \\ &= N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{T}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1\right)(r dt + \alpha dw(t)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Pozitivnost i neprekidnost rešenja su očigledni.

II. Neka je $0 < n_0 < T$. Tada, ako se na proces $\{x(t), t \geq 0\}$,

$$x(t) := \ln \frac{K - N(t)}{N(t)}$$

primeni formula Itôa, dobija se

$$dx(t) = \tilde{f}(x(t)) dt + \tilde{g}(x(t)) dw(t), \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

gde je

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -\frac{K - T(e^x + 1)}{T(e^x + 1)} \left[r - \alpha^2 \frac{(e^x - 1)(K - T(e^x + 1))}{2T(e^x + 1)^2}\right], \\ \tilde{g}(x) &= -\frac{K - T(e^x + 1)}{T(e^x + 1)} \alpha. \end{aligned}$$

Analogno, kao i u prvom slučaju, može se zaključiti da jednačina (2.9) ima jedinstveno neprekidno rešenje $x(t)$, $t \geq 0$ koje zadovoljava početni uslov $x(0) = \tilde{x}_0$. S obzirom na to da je $N(t) = \frac{K}{e^{x(t)} + 1}$, primenom formule Itôa se proverava da je

$$\begin{aligned} dN(t) &= d\left[\frac{K}{e^{x(t)} + 1}\right] \\ &= -\frac{Ke^{x(t)}}{(e^{x(t)} + 1)^2} dx(t) + \frac{Ke^{x(t)}(e^{x(t)} - 1)}{2(e^{x(t)} + 1)^3} dx(t)dx(t) \\ &= \frac{Ke^{x(t)}(K - T(e^{x(t)} + 1))}{T(e^{x(t)} + 1)^3}(r dt + \alpha dw(t)) \\ &= N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{T}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1\right)(r dt + \alpha dw(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

pa je $N(t)$ pozitivno rešenje jednačine (2.4).

Da bi se dokazala uniformna neprekidnost skoro svih trajektorija $N(t)$ za $t \geq 0$, jednačina (2.4) se posmatra u integralnom obliku, tj.

$$N(t) = n_0 + \int_0^t f(N(s)) ds + \int_0^t g(N(s)) dw(s), \quad t \geq 0,$$

gde je $0 < n_0 < K$ i

$$\begin{aligned} f(N(s)) &= rN(s) \left(1 - \frac{N(s)}{T}\right) \left(\frac{N(s)}{K} - 1\right), \\ g(N(s)) &= \alpha N(s) \left(1 - \frac{N(s)}{T}\right) \left(\frac{N(s)}{K} - 1\right). \end{aligned}$$

Neka je $0 < u < v < \infty$, $v - u \leq 1$ i $p > 2$. Primenom Hölderove nejednakosti (1.25) i nejednakosti (1.5), dobija se

$$\begin{aligned} E|N(v) - N(u)|^p &\leq 2^{p-1}(v-u)^{p-1} \int_u^v E|f(N(s))|^p ds \\ &\quad + 2^{p-1} \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} (v-u)^{\frac{p}{2}-1} \int_u^v E|g(N(s))|^p ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kako je,

$$\begin{aligned} E|f(N(s))|^p &\leq \left(\frac{K(K-T)}{T}r\right)^p, \\ E|g(N(s))|^p &\leq \left(\frac{K(K-T)}{T}\alpha\right)^p, \end{aligned}$$

na osnovu (2.10) je

$$E|N(v) - N(u)|^p \leq A(v-u)^{\frac{p}{2}},$$

gde je $A = 2^{p-1} \left(\frac{K(K-T)}{T}\right)^p \left(r^p + \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^p\right)$. Na osnovu Leme 2.2.1 se dobija da je skoro svaka trajektorija $N(t)$ lokalno uniformno Hölder-neprekidna sa eksponentom $\gamma \in (0, \frac{p-2}{2p})$, pa je i uniformno neprekidna za $t \geq 0$.

Uobičajeno je da se jedinstvenost pozitivnog rešenja dokazuje kontradikcijom. Neka su $N_1(t)$ i $N_2(t)$ dva različita pozitivna rešenja jednačine (2.4) sa istim početnim uslovom n_0 , gde je $0 < n_0 < K$. Tada je

$$\begin{aligned} d(N_2(t) - N_1(t)) &= -(N_2(t) - N_1(t)) \\ &\times \left(1 - \frac{(N_2(t) + N_1(t))(T+K) - (N_2^2(t) + N_1(t)N_2(t) + N_1^2(t))}{TK}\right)(rdt + \alpha dw(t)). \end{aligned}$$

Neka je $J(t) = N_2(t) - N_1(t)$. Tada je,

$$\begin{aligned} J(t) &= - \int_0^t J(s) \left(1 - \frac{(N_2(s) + N_1(s))(T+K) - (N_2^2(s) + N_1(s)N_2(s) + N_1^2(s))}{TK}\right) \\ &\quad \times (r ds + \alpha dw(s)). \end{aligned}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.18), Hölderove nejednakosti (1.25), izometrije integrala Itôa i činjenice da je $0 < N_i(t) < K$, $i = 1, 2$, na osnovu (2.6) i (2.7) dobija se da je

$$\begin{aligned} EJ^2(t) &\leq 2(r^2t + \alpha^2) \\ &\times E \int_0^t J^2(s) \left(\frac{(N_2(s) + N_1(s))(T + K) - (N_2^2(s) + N_1(s)N_2(s) + N_1^2(s))}{TK} - 1 \right)^2 ds \\ &\leq 2(r^2t + \alpha^2) E \int_0^t J^2(s) \left(\frac{(N_2(s) + N_1(s))(T + K)}{TK} - 1 \right)^2 ds \\ &\leq 2M(r^2t + \alpha^2) \int_0^t EJ^2(s) ds, \end{aligned}$$

gde je $M = \left(\frac{T+2K}{T}\right)^2$. Najzad, primena Gronwall–Bellmanove leme (Teorema 1.9.1) povlači da je $EJ_t^2 = 0$ a samim tim i

$$E(N_2(t) - N_1(t))^2 = 0.$$

Na osnovu nejednakosti Chebysheva (1.23) (za $r = 2$), za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi da je

$$P\{|N_2(t) - N_1(t)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E|N_2(t) - N_1(t)|^2 = 0.$$

Dakle, $N_1(t) = N_2(t)$ s.i. za svako $t \geq 0$, čime je teorema u potpunosti dokazana.
◊

2.2.3 Stabilnost stohastičkog modela

U ovom delu se proučava ponašanje ekvilibrijuma jednačine (2.4) za dugi vremenski period. S tim ciljem, nekoliko puta će biti primenjena elementarna nejednakost (1.19), kao i sledeće tvrdjenje:

Lema 2.2.2 ([5]) *Neka je $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ integrabilna i uniformno neprekidna funkcija. Tada je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Sledećom teoremom dati su uslovi asymptotske srednje-kvadratne stabilnosti ekvilibrijuma E_* i E^* jednačine (2.4), kada je početni broj jedinki u populaciji $T < n_0 < K$.

Teorema 2.2.2 *Neka je $N(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4) sa početnim uslovom $N(0) = n_0$, gde je $T < n_0 < K$. Tada:*

- (a) *ako je $r > \frac{(3K-T)(K-T)}{2TK} \alpha^2$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} E(K - N(t))^2 = 0$;*
- (b) *ako je $r < -\frac{K-T}{T} \alpha^2$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} E(N(t) - T)^2 = 0$.*

Dokaz. Kako je $T < n_0 < K$, iz (2.6) sledi da je $T < N(t) < K$, $t \geq 0$.

(a) Primenom formule Itôa na $V^2(t)$, gde je

$$V(t) = \ln N(t) - \ln(N(t) - T), \quad t \geq 0$$

funkcija Lyapunova, dobija se

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= 2V(t)dV(t) + (dV(t))^2 \\ &= -2(\ln N(t) - \ln(N(t) - T))\frac{K - N(t)}{K} \\ &\quad \times \left[\left(r - \frac{(2N(t) - T)(K - N(t))}{2TK}\alpha^2 \right) dt + \alpha dw(t) \right] + \frac{(K - N(t))^2}{K^2}\alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} EV^2(t) &= EV^2(0) - 2E \int_0^t \left[(\ln N(s) - \ln(N(s) - T))\frac{K - N(s)}{K} \right. \\ &\quad \times \left. \left(r - \frac{(2N(s) - T)(K - N(s))}{2TK}\alpha^2 \right) - \frac{(K - N(s))^2}{2K^2}\alpha^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Primenom nejednakosti (1.19) i prepostavke teoreme da je $r > \frac{(3K-T)(K-T)}{2TK}\alpha^2$, može se zaključiti da je

$$\begin{aligned} \frac{dEV^2(t)}{dt} &< -\frac{2T}{K^2}E \left[(K - N(t)) \left(r - \frac{(2N(t) - T)(K - N(t))}{2TK}\alpha^2 \right) - \frac{(K - N(t))^2}{2K^2}\alpha^2 \right] \\ &= -\frac{2T}{K^2}E \left[(K - N(t))^2 \frac{1}{K - N(t)} \left(r - \frac{(2N(t) + K - T)(K - N(t))}{2TK}\alpha^2 \right) \right] \\ &< -AE(K - N(t))^2, \end{aligned}$$

gde je $A = \frac{1}{K^3(K-T)}(2TKr - (3K - T)(K - T)\alpha^2)$ pozitivna konstanta. Stoga je $EV^2(t)$ opadajuće i

$$EV^2(t) < EV^2(0) - A \int_0^t E(K - N(s))^2 ds.$$

Kako je $EV^2(0) = E(\ln n_0 - \ln(n_0 - T))^2 < \infty$, važi da je

$$EV^2(t) + A \int_0^t E(K - N(s))^2 ds < EV^2(0) < \infty,$$

što povlači $E(K - N(t))^2 \in \mathcal{L}^1[0, \infty)$. Na osnovu Teoreme 2.2.1 važi da je $E(K - N(t))^2$ uniformno neprekidno na $[0, \infty)$, pa se primenom Leme 2.2.2 može zaključiti da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(K - N(t))^2 = 0.$$

(b) Slično kao i u prvom delu dokaza, primenom formule Itôa na $V^2(t)$, gde je

$$V(t) = \ln(K - T) - \ln(K - N(t)), \quad t \geq 0$$

funkcija Lyapunova, dobija se da je

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= 2(\ln(K - T) - \ln(K - N(t))) \frac{N(t)(N(t) - T)}{TK} \\ &\quad \times \left[\left(r + \frac{N(t)(N(t) - T)}{2TK} \alpha^2 \right) dt + \alpha dw(t) \right] + \frac{N^2(t)(N(t) - T)^2}{T^2 K^2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Analogno prethodnoj diskusiji je

$$\frac{dEV^2(t)}{dt} < -F E(N(t) - T)^2,$$

pri čemu je $F = -\frac{2}{TK(K-T)}(Tr + (K-T)\alpha^2)$ pozitivna konstanta, pa je $EV^2(t)$ opadajuće. Dakle,

$$EV^2(t) + F \int_0^t E(N(s) - T)^2 ds < EV^2(0) < \infty,$$

gde je $EV^2(0) = E(\ln(K-T)-\ln(K-n_0))^2 < \infty$. Stoga je $E(N(t)-T)^2 \in \mathcal{L}^1[0, \infty)$. Na osnovu Teoreme 2.2.1 i Leme 2.2.2, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(N(t) - T)^2 = 0,$$

čime je teorema dokazana. \diamond

Sledećom teoremom su dati uslovi pod kojima su ekvilibrijumi $E^* = K$ i $E_* = T$ jednačine (2.4) asimptotski stabilni u srednjem u slučaju kada je početni broj jedinki u populaciji $T < n_0 < K$. Naime, iz asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti, na osnovu nejednakosti Lyapunova (1.24) (za $s = 1, t = 2$), pod istim uslovima sledi asimptotska stabilnost u srednjem ovih ekvilibrijuma. Međutim, sledećom teoremom su uslovi Teoreme 2.2.2 poboljšani u smislu da su dobijeni veći intervali stope rasta populacije r za koje važi asimptotska stabilnost u srednjem.

Teorema 2.2.3 *Neka je $N(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4) sa početnim uslovom n_0 , gde je $T < n_0 < K$. Tada:*

- (a) *ako je $r > \frac{(2K-T)(K-T)}{2TK} \alpha^2$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} EN(t) = K$;*
- (b) *ako je $r < -\frac{K-T}{2T} \alpha^2$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} EN(t) = T$.*

Dokaz. Kao i u prethodnom dokazu, važi da je $T < N(t) < K, t \geq 0$.

(a) Za dokaz prvog dela teoreme, formula Itôa se primenjuje na funkciju Lyapunova $V(t) = \ln N(t) - \ln(N(t) - T)$, $t \geq 0$. Na taj način se dobija

$$\begin{aligned} dV(t) &= \frac{dN(t)}{N(t)} - \frac{dN(t)^2}{2N(t)^2} - \frac{dN(t)}{N(t) - T} + \frac{dN(t)^2}{2(N(t) - T)^2} \\ &= -\frac{(K - N(t))}{K}(r dt + \alpha dw(t)) + \frac{\alpha^2(2N(t) - T)(K - N(t))^2}{2TK^2} dt \\ &= -\frac{K - N(t)}{K} \left[\left(r - \frac{\alpha^2}{2TK}(2N(t) - T)(K - N(t)) \right) dt + \alpha dw(t) \right]. \end{aligned}$$

Tada je

$$EV(t) = EV(0) - E \int_0^t \frac{K - N(s)}{K} \left(r - \frac{\alpha^2}{2TK} (2N(s) - T)(K - N(s)) \right) ds.$$

Kako je $r > \frac{(2K-T)(K-T)}{2TK}\alpha^2$, važi da je

$$\begin{aligned} \frac{dEV(t)}{dt} &= -E \frac{(K - N(t))}{K} \left(r - \frac{(2N(t) - T)(K - N(t))}{2TK} \alpha^2 \right) \\ &< -E(K - N(t)) \frac{1}{K} \left(r - \frac{(2K - T)(K - T)}{2TK} \alpha^2 \right) \\ &< -L E(K - N(t)), \end{aligned}$$

gde je $L = \frac{1}{2TK^2} (2TKr - \alpha^2(2K - T)(K - T))$ pozitivna konstanta. Slično kao i u prethodnom dokazu, s obzirom da je $EV(t)$ opadajuće i $V(0) = \ln n_0 - \ln(n_0 - T) < \infty$, važi da je

$$EV(t) + L \int_0^t E(K - N(s)) ds < EV(0) < \infty,$$

pa je $E(K - N(t)) \in \mathcal{L}^1[0, \infty)$, što povlači

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(K - N(t)) = 0.$$

(b) U drugom delu dokaza, uz korišćenje uslova $r < -\frac{K-T}{2T}\alpha^2$ i primenu formule Itôa na funkciju Lyapunova $V(t) = \ln(K - T) - \ln(K - N(t))$, $t \geq 0$, dobija se

$$\begin{aligned} dV(t) &= \frac{dN(t)}{K - N(t)} + \frac{(dN(t))^2}{2(K - N(t))^2} \\ &= -\frac{N(t)(N(t) - T)}{TK} \left[\left(-r - \frac{N(t)(N(t) - T)}{2TK} \alpha^2 \right) dt - \alpha dw(t) \right]. \end{aligned}$$

Ponavljanjem procedure iz prvog dela dokaza je

$$EV(t) = EV(0) - E \int_0^t \frac{N(s)(N(s) - T)}{TK} \left(-r - \frac{N(s)(N(s) - T)}{2TK} \alpha^2 \right) ds,$$

a, samim tim i

$$\frac{dEV(t)}{dt} < -E(N(t) - T) \frac{1}{K} \left(-r - \frac{K - T}{2T} \alpha^2 \right) = -R E(N(t) - T),$$

gde je $R = -\frac{1}{2TK} (2Tr + (K - T)\alpha^2) > 0$ pozitivna konstanta. Bez ublaženja u detalje, može se zaključiti da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(N(t) - T) = 0,$$

čime je dokaz završen. \diamond

Prethodna teorema pokazuje da pod izvesnim uslovima deterministički populacioni model (2.3) sa Allee efektom i odgovarajući stohastički model (2.4) imaju slično svojstvo - globalnu stabilnost pozitivnih i ograničenih rešenja.

Kao što je već rečeno na početku ovog poglavlja, veliki broj istraživanja iz oblasti ekologije je usmeren na ispitivanje uslova koji dovode do istrebljenja invazivnih vrsta. Pod istrebljenjem se u ovom slučaju podrazumeva totalno uklanjanje odredjene vrste sa nekog područja. Istrebljenje se najčešće obavlja fizičkim uklanjanjem, prskanjem područja pesticidima, ili nekim drugim mehanizmom. S obzirom na činjenicu da je jedan od procesa koji može izazvati istrebljenje odredjene vrste upravo Allee efekat, u sledećoj teoremi se razmatra asimptotska srednje-kvadratna stabilnost rešenja jednačine (2.4) u slučaju kada je početan broj jedinki u populaciji ispod Allee praga, tj. kada je $0 < n_0 < T$.

Teorema 2.2.4 *Neka je $N(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4) sa početnim uslovom n_0 , gde je $0 < n_0 < T$. Tada:*

- (a) ako je $r > \frac{\alpha^2}{2}$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} EN^2(t) = 0$;
- (b) ako je $r < -\alpha^2$, onda $\lim_{t \rightarrow \infty} E(T - N(t))^2 = 0$.

Dokaz. S obzirom na to da je $0 < n_0 < T$, onda je i $0 < N(t) < T$, $t \geq 0$, kao što je već dokazano u (2.7).

(a) Neka je $r > \frac{\alpha^2}{2}$. Primenom formule Itôa na funkciju Lyapunova

$$V(t) = \ln T - \ln(T - N(t)), \quad t \geq 0$$

se dobija

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= -2(\ln T - \ln(T - N(t))) \frac{N(t)(K - N(t))}{TK} \\ &\quad \times \left[\left(r + \frac{N(t)(K - N(t))}{2TK} \alpha^2 \right) dt + \alpha dw(t) \right] + \frac{N^2(t)(K - N(t))^2}{T^2 K^2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Ako se ponovi procedura korišćena u prethodnom dokazu, lako se može videti da je

$$\frac{dEV^2(t)}{dt} < -S EN^2(t),$$

gde je $S = \frac{(K-T)}{T^2 K} (2r - \alpha^2) > 0$, pa je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EN^2(t) = 0.$$

(b) Ako je $r < -\alpha^2$, primenom formule Itôa na funkciju Lyapunova

$$V(t) = \ln T - \ln N(t), \quad t \geq 0 \tag{2.11}$$

se dobija

$$\begin{aligned} dV^2(t) &= -2(\ln T - \ln N(t)) \frac{(T - N(t))(K - N(t))}{TK} \\ &\quad \times \left[\left(-r - \frac{(T - N(t))(K - N(t))}{2TK} \alpha^2 \right) dt - \alpha dw(t) \right] \\ &\quad + \frac{(T - N(t))^2(K - N(t))^2}{T^2 K^2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Istim rasudjivanjem kao i u prethodnom dokazu je

$$\frac{dEV^2(t)}{dt} < -D E(T - N(t))^2,$$

gde je $D = -\frac{2(K-T)}{T^2 K} (r + \alpha^2)$ pozitivna konstanta. Kako je $EV^2(t)$ opadajuće, može se zaključiti da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(T - N(t))^2 = 0.$$

Ovim je teorema u potpunosti dokazana. \diamond

Na osnovu prethodne teoreme, za ekvilibrijume $E_0 = 0$ i $E_* = T$ jednačine (2.4) važi asimptotska stabilnost u srednjem kada je $0 < n_0 < T$, pod istim uslovima kao u Teoremi 2.2.4. Sledeća posledica sledi direktno iz tvrdjenja Teoreme 2.2.4 (a) i na osnovu nje se može zaključiti da kada je intenzitet šuma dovoljno mali, dolazi do istrebljenja populacije sa verovatnoćom jedan.

Posledica 2.2.1 *Neka je $N(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4) sa početnim uslovom n_0 , gde je $0 < n_0 < T$. Ako je $r > \frac{\alpha^2}{2}$, tada je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EN(t) = 0.$$

Sledeće tvrdjenje predstavlja poboljšanje rezultata Teoreme 2.2.4 (b) u smislu da je odredjen veći interval za stopu rasta populacije r za koju važi asimptotska stabilnost u srednjem ekvilibrijuma $E_* = T$.

Teorema 2.2.5 *Neka je $N(t)$ uniformno neprekidno pozitivno rešenje jednačine (2.4) sa početnim uslovom n_0 , gde je $0 < n_0 < T$. Ako je $r < -\frac{\alpha^2}{2}$, tada je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EN(t) = T.$$

Dokaz. Kako je $0 < n_0 < T$, na osnovu (2.7) sledi da je $0 < N(t) < T$, $t \geq 0$.

U ovom dokazu se koristi funkcija Lyapunova definisana u (2.11), tj. $V(t) = \ln T - \ln N(t)$. Primenom iste procedure kao i u prethodnim dokazima, jednostavno se izvodi da je

$$dV(t) = \frac{(T - N(t))(K - N(t))}{TK} \left[\left(r + \frac{\alpha^2}{2TK} (T - N(t))(K - N(t)) \right) dt + \alpha dw(t) \right].$$

Kako je $r < -\frac{\alpha^2}{2}$ i $N(t) < T < K$, onda je

$$\frac{dEV(t)}{dt} < -ZE(T - N(t)),$$

gde je $Z = -\frac{K-T}{2TK}(2r + \alpha^2) > 0$. Činjenica da je $EV(t)$ opadajuće, povlači da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(T - N(t)) = 0,$$

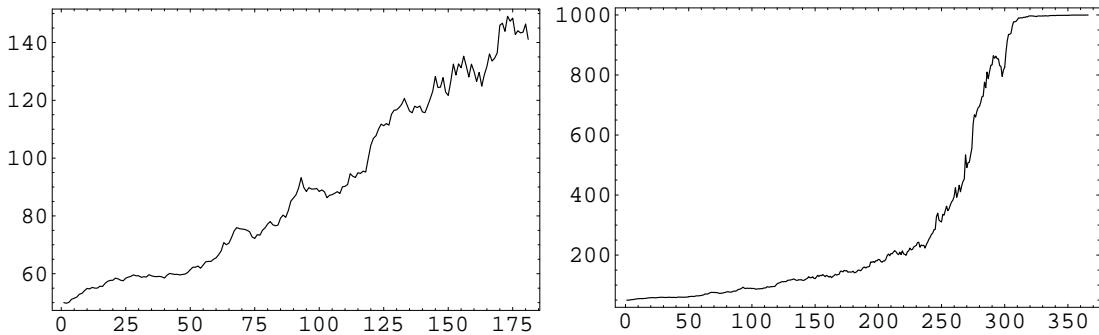
čime je teorema dokazana. \diamond

Primer 2.2.1 Da bi se ilustrovali prethodno dobijeni teorijski rezultati, u ovom primeru se koriste zvanični podaci sa www.fs.fed.us o populaciji noćnih leptira (gubara), *Lymantria dispar*, i njihovoj invaziji na Severnu Ameriku. Ova vrsta je u Severnu Ameriku došla iz Evrope i Azije 1868. godine. Oko deset godina po dolasku noćnih leptira u Severnu Ameriku javili su se i prvi problemi sa ogoljavanjem drveća, najviše hrasta i jasike, jer su ove dve vrste drveća najčešća staništa noćnih leptira. Državna i Federalna vlada su 1890. godine započele programe za istrebljenje ovih štetočina ne bi li smanjile njihov broj i na taj način sprečile dalje ogoljavanje drveća.

Poznato je da broj jaja noćnog leptira može da varira od jednog do preko 1000 po hektaru. Prirodni predatori koji uništavaju ovu vrstu štetočina su mali sisari i neke vrste ptica, ali oni ne mogu dovesti do totalnog istrebljenja populacije noćnog leptira. Zato je 1992. godine USDA Forest Service započeo pilot program da bi ispitao mogućnost usporenja širenja ove vrste Severnom Amerikom.

U ovom primeru se pretpostavlja da je $T = 5$ jaja/ha i $K = 1000$ jaja/ha. U zavisnosti od stope rasta r i početnog broja jedinki u populaciji n_0 , na Slikama 2.1-2.4 se može pratiti ponašanje veličine populacije $N(t)$ u zavisnosti od vremena (predstavljenog u danima).

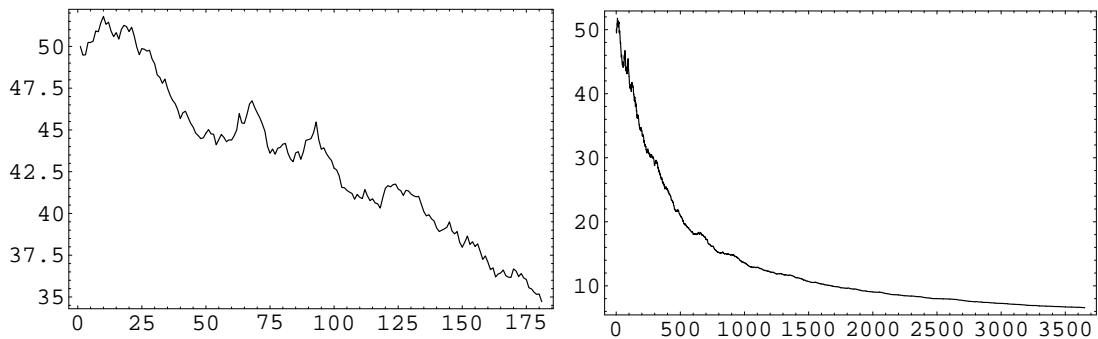
Ako je početni broj jedinki u populaciji $n_0 = 50$ jaja/ha i $\alpha = 0.02$, tada stopa rasta $r = 0.12$ zadovoljava uslov $r > \frac{(3K-T)(K-T)}{2TK} \alpha^2$ Teoreme 2.2.2 (a) i Teoreme 2.2.3 (a). Dakle, može se očekivati da veličina populacije dosegne ekvilibrijum $E^* = 1000$ za oko godinu dana (Slika 2.1, desno). Takodje se može primetiti rast veličine populacije u periodu od šest meseci, ali se ne može sa sigurnošću tvrditi konvergencija ka E^* (Slika 2.1, levo).



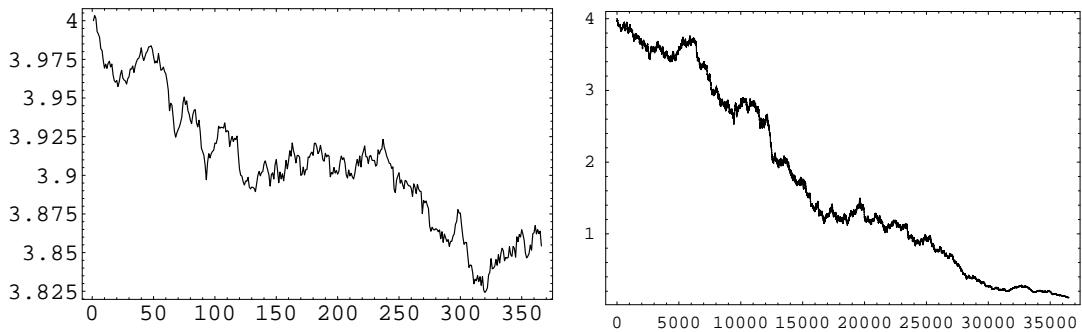
Slika 2.1: $N(t) = 50 + \int_0^t N(s) \left(1 - \frac{N(s)}{5}\right) \left(\frac{N(s)}{1000} - 1\right) (0.12 ds + 0.02 dw(s))$

Sa druge strane, ako je $r = -0.12$, uslov $r < -\frac{K-T}{T} \alpha^2$ Teoreme 2.2.2 (b) i Teoreme 2.2.3 (b) važi, pa se može uočiti pad u broju jedinki populacije do ekvilibrijuma $E_* = 5$ za otprilike 10 godina (Slika 2.2, desno), i mali pad u periodu od šest meseci (Slika 2.2, levo).

Neka je $n_0 = 4$ jaja/ha, tj. početni broj jedinki u populaciji je ispod Allee praga. Ako je $\alpha = 0.1$ i $r = 0.05$, uslov $r > \frac{\alpha^2}{2}$ Teoreme 2.2.4 (a) je zadovoljen pa se očekuje istrebljenje populacije u periodu od otprilike 100 godina (Slika 2.3, desno). Ako je $r = -0.05$, uslov $r < -\alpha^2$ Teoreme 2.2.4 (b) važi pa će populacija doći do nivoa $E_* = 5$ za oko 100 godina (Slika 2.4, desno). U oba slučaja, nebitno da li je stopa rasta pozitivna ili negativna, veličina populacije opada, odnosno raste, respektivno, na osnovu podataka za godinu dana (Slike 2.3 i 2.4, levo).

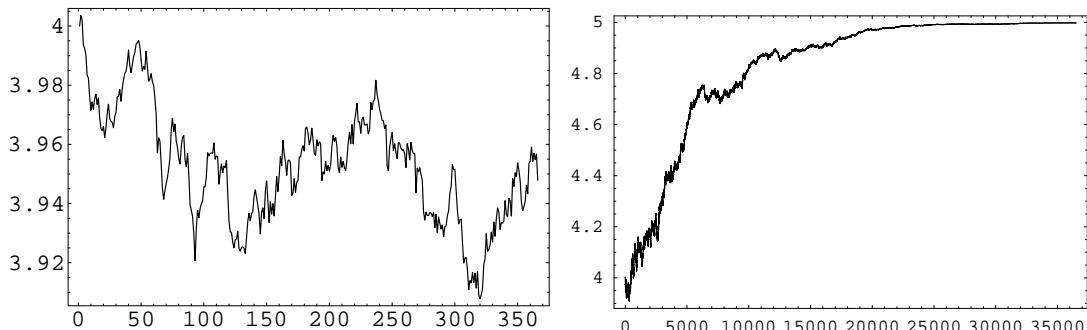


Slika 2.2: $N(t) = 50 + \int_0^t N(s) \left(1 - \frac{N(s)}{5}\right) \left(\frac{N(s)}{1000} - 1\right) (-0.12 ds + 0.02 dw(s))$



Slika 2.3: $N(t) = 4 + \int_0^t N(s) \left(1 - \frac{N(s)}{5}\right) \left(\frac{N(s)}{1000} - 1\right) (0.05 ds + 0.1 dw(s))$

Napomena 2.2.1 Na kraju ovog dela treba naglasiti da su prethodno izloženi rezultati poboljšani u radu [109], u kome su autori primenili Felerov test kao kriterijum za dobijanje uslova stabilnosti ekvilibrijuma modela (2.4). Ipak, kako Felerov test daje rezultate samo za jednodimenzionalne stohastičke diferencijalne jednačine koje su homogene u vremenu, metod funkcija i funkcionala Lyapunova (koji je korišćen u radu [59]) je efikasniji u višedimenzionalnim i slučajevima kada se razmatraju modeli sa vremenskim kašnjenjem.



Slika 2.4: $N(t) = 4 + \int_0^t N(s) \left(1 - \frac{N(s)}{5}\right) \left(\frac{N(s)}{1000} - 1\right) (-0.05 ds + 0.1 dw(s))$

2.2.4 Motivacija za uvodjenje vremenski zavisnog kašnjenja u stohastički model

Mnogi procesi u prirodi uključuju vremensko kašnjenje. Uopšteno, vremensko kašnjenje predstavlja period koji prodje izmedju uzroka nekog dogadjaja i njegovih posledica. Na primer, u populacionoj dinamici vremensko kašnjenje može predstavljati period neophodan za sticanje reproduktivne zrelosti jedinki neke populacije, vreme koje je neophodno da bi se jedinke neke populacije prilagodile promenama u okruženju, vreme koje je potrebno da bi se životni resursi obnovili, itd. Vremensko kašnjenje može biti jedan od izvora nestabilnosti dinamičkih sistema i može izazvati varijacije u broju jedinki populacije. Destabilizirajući efekat vremenskog kašnjenja se najčešće manifestuje kroz činjenicu da uvodjenje vremenskog kašnjenja koje prevaziđa osnovnu vremensku skalu čini da ekvilibrijumi, koji su inače stabilni, postanu nestabilni.

Kako su sve biljne i životinjske vrste izložene vremenskom kašnjenju, makar kroz period sticanja polne zrelosti, može se reći da stohastički populacioni modeli sa vremenskim kašnjenjem najverodostojnije oslikavaju stvarnost. To je poslužilo kao motivacija da se u jednačinu (2.4) uvede vremensko kašnjenje. U skladu sa činjenicom da vremensko kašnjenje nije otporno na fluktuacije u vremenu, ovde se razmatra stohastički populacioni model sa Allee efektom sa vremenski zavisnim kašnjenjem koji je konstruisan i razmatran u [45], oblika

$$\begin{aligned} dN(t) = & rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau(t))}{T} \right) \left(\frac{N(t-\tau(t))}{K} - 1 \right) dt \\ & + \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{T} \right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1 \right) dw(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

gde je $\tau(t)$ nenegativna, ograničena, neprekidno-diferencijabilna funkcija na $[0, +\infty)$ za koju važi

$$\bar{\tau} = \sup_{t \geq 0} \tau(t),$$

za neku konstantu $\bar{\tau} \geq 0$. Neka je $\mathcal{C} = C([- \bar{\tau}, 0]; \mathbb{R}^+)$ familija neprekidnih funkcija φ koje slikaju $[- \bar{\tau}, 0]$ u \mathbb{R}^+ sa normom $\|\varphi\| = \sup_{-\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Početni uslov za jednačinu (2.12) je

$$N_0 = \{\xi(\theta), -\bar{\tau} \leq \theta \leq 0\} \in \mathcal{C}. \quad (2.13)$$

Napomena 2.2.2 U prethodnim poglavljima, kao i u radovima [59] i [109] autori prepostavljaju da je početni broj jedinki u populaciji $0 < n_0 < K$ s.i., gde K predstavlja kapacitet sredine. Međutim, u nekim situacijama broj elemenata u populaciji može prevazići kapacitet sredine u kojoj žive kao rezultat povećanja stope radjanja, smanjenja stope smrtnosti, povećanja imigracije itd. Uzimajući ovu činjenicu u obzir, model (2.12) se razmatra i kada početni broj jedinki u populaciji prevaziđa kapacitet sredine, tj. kada za početne podatke (2.13) važi uslov $\inf_{-\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} \xi(\theta) > K$.

2.2.5 Egzistencija i jedinstvenost rešenja stohastičkog modela sa vremenski zavisnim kašnjenjem

Kako $N(t)$ u jednačini (2.12) predstavlja veličinu populacije u trenutku t , potrebno je dokazati egzistenciju i jedinstvenost pozitivnog rešenja razmatrane jednačine. Poznato je da ako koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearog rasta za bilo koji početni uslov, tada ta jednačina ima jedinstveno globalno rešenje, tj. rešenje koje ne eksplodira u konačnom vremenu (videti [73], na primer). Koeficijenti jednačine (2.12) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, ali ne zadovoljavaju uslov linearog rasta, pa rešenje jednačine (2.12) može da eksplodira u konačnom vremenu. Sledecom teoremom se određuju uslovi pod kojima jednačina (2.12) ima pozitivno i globalno rešenje.

Teorema 2.2.6 *Ako funkcija kašnjenja zadovoljava uslov*

$$\tau' = \sup_{t \geq 0} \tau'(t) < 1, \quad (2.14)$$

tada jednačina (2.12) ima jedinstveno pozitivno rešenje $N(t)$ za $t \geq -\bar{\tau}$, za svaki početni uslov (2.13).

Dokaz. S obzirom da su koeficijenti jednačine (2.12) lokalno Lipschitz-neprekidni, za svaki početni uslov $N_0 \in \mathcal{C}$, postoji jedinstveno maksimalno lokalno rešenje $N(t)$ na $t \in [-\bar{\tau}, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije. Dakle, da bi se dokazalo da je rešenje globalno, potrebno je pokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i. Neka je $k_0 > 0$ dovoljno velika konstanta tako da važi

$$\frac{1}{k_0} < \min_{-\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta)| \leq \max_{-\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta)| < k_0.$$

Za svaki ceo broj $k \geq k_0$, neka je

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : N(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \right\}$$

vreme zaustavljanja, pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$. Očigledno je da τ_k raste kada $k \rightarrow \infty$. Neka je $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Ako se dokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i., tada je $\tau_e = \infty$ s.i. i $N(t)$ je pozitivno globalno rešenje jednačine (2.12). Dakle, da bi se dokazala teorema, potrebno je pokazati da je $\tau_\infty = \infty$ s.i. ili da za svako $\bar{T} > 0$ važi $P\{\tau_k \leq \bar{T}\} \rightarrow \infty$ kada $k \rightarrow \infty$.

Neka je $V_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funkcija iz $C^{1,2}$ definisana sa

$$V_1(N) = \sqrt{N} - 1 - \frac{1}{2} \ln N.$$

Dalje, neka su $k \geq k_0$ i $\bar{T} > 0$ proizvoljne konstante. Za $0 \leq t \leq \tau_k \wedge \bar{T}$, primenom Itôove formule na $V_1(N(t))$ se dobija

$$dV_1(N(t)) = LV_1(N(t), N(t-\tau(t))) dt + \alpha \frac{\sqrt{N(t)} - 1}{2TK} (K - N(t))(N(t) - T) dw(t),$$

gde je

$$LV_1(N, N_1) = r \frac{\sqrt{N}-1}{2TK} (K-N_1)(N_1-T) - \alpha^2 \frac{\sqrt{N}-2}{8T^2K^2} (K-N)^2(N-T)^2.$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.20), je

$$\begin{aligned} LV_1(N, N_1) &\leq \frac{|r|}{4TK} (\sqrt{N}-1)^2 + \frac{|r|}{4TK} (K-N_1)^2(N_1-T)^2 \\ &\quad - \alpha^2 \frac{\sqrt{N}}{8TK} (K-N)^2(N-T)^2 + \frac{\alpha^2}{2TK} (K-N)^2(N-T)^2. \end{aligned}$$

Da bi se eliminisali članovi koji sadrže vremensko kašnjenje, uvodi se nenegativni funkcional

$$V_2(N(t)) = \frac{1}{1-\tau'} \frac{|r|}{4TK} \int_{t-\tau(t)}^t (K-N(s))^2(N(s)-T)^2 ds.$$

Nenegativnost funkcionala V_2 sledi iz uslova (2.14). Stoga je

$$d(V_1(N(t))) + V_2(N(t)) \leq F(N(t)) + \alpha \frac{\sqrt{N(t)}-1}{2TK} (K-N(t))(N(t)-T) dw(t),$$

gde je

$$\begin{aligned} F(N) &= \frac{|r|}{4TK} (\sqrt{N}-1)^2 + \frac{1}{4TK} \left(\frac{|r|}{1-\tau'} + \alpha^2 \right) (K-N)^2(N-T)^2 \\ &\quad - \alpha^2 \frac{\sqrt{N}}{8TK} (K-N)^2(N-T)^2. \end{aligned}$$

Očigledno da je $F(N(t))$ ograničeno, na primer konstantom $C \in \mathbb{R}^+$. Tada je

$$d(V_1(N(t)) + V_2(N(t))) \leq C dt + \alpha \frac{\sqrt{N(t)}-1}{2TK} (K-N(t))(N(t)-T) dw(t).$$

Integracijom prethodne nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge \bar{T}$ i izračunavanjem očekivanja se dobija

$$\begin{aligned} EV_1(N(\tau_k \wedge \bar{T})) &\leq EV_1(N(\tau_k \wedge \bar{T})) + EV_2(N(\tau_k \wedge \bar{T})) \\ &\leq V_1(\xi(0)) + V_2(\xi(0)) + C \bar{T}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Za svako $\omega \in \{\tau_k \leq \bar{T}\}$, važi da $N(\tau_k, \omega) \notin (k^{-1}, k)$. Tada je

$$\begin{aligned} V_1(N(\tau_k)) &= \sqrt{N(\tau_k)} - 1 - \frac{1}{2} \ln N(\tau_k) \\ &= \left(\sqrt{k} - 1 - \frac{1}{2} \ln k \right) \wedge \left(\sqrt{\frac{1}{k}} - 1 + \frac{1}{2} \ln k \right), \end{aligned}$$

pa se na osnovu (2.15) može zaključiti da je

$$\begin{aligned}\infty &> V_1(N(0)) + V_2(N(0)) + C\bar{T} \geq EV_1(N(\tau_k \wedge \bar{T})) \\ &= P\{\tau_k \leq \bar{T}\}V_1(N(\tau_k)) + P\{\tau_k > \bar{T}\}V_1(N(\bar{T})) \\ &\geq P\{\tau_k \leq \bar{T}\}V_1(N(\tau_k)) \\ &= P\{\tau_k \leq \bar{T}\} \left[\left(\sqrt{k} - 1 - \frac{1}{2} \ln k \right) \wedge \left(\sqrt{\frac{1}{k}} - 1 + \frac{1}{2} \ln k \right) \right].\end{aligned}$$

Kako $\left(\sqrt{k} - 1 - \frac{1}{2} \ln k \right) \wedge \left(\sqrt{\frac{1}{k}} - 1 + \frac{1}{2} \ln k \right)$ teži beskonačnosti kada $k \rightarrow \infty$, sledi da je $\lim_{k \rightarrow \infty} P\{\tau_k \leq \bar{T}\} = 0$. S obzirom na činjenicu da je $\bar{T} > 0$ proizvoljno, dobija se da je $P\{\tau_\infty < \infty\} = 0$ i $P\{\tau_\infty = \infty\} = 1$, čime je teorema dokazana. \diamond

2.2.6 Istrebljenje i neperzistentnost u stohastičkom modelu sa vremenski zavisnim kašnjenjem

Jedan od najvećih problema u populacionoj biologiji jeste utvrđivanje faktora koji određuju rizik od istrebljenja odredjene populacije. Poznato je da je rizik od istrebljenja veći za populacije koje se sastoje od malog broja jedinki u odnosu na rizik koji postoji kod brojnijih populacija. Što je viši Allee prag, Allee efekat je izraženiji, pa lakše dolazi do istrebljenja populacije. Vrste koje su izložene jakom Allee efektu su sa neznatnim povećanjem stope smrtnosti podložnije značajnom smanjenju veličine populacije.

Dinamika modela (2.12) je neobična i interesantna zbog toga što stabilnost ekvilibrijuma zavisi od veličine vremenski zavisnog kašnjenja. Kao što se može i očekivati, ako je vremenski zavisno kašnjenje predugo, model predviđa da u nekim slučajevima populacija neće biti perzistentna u srednjem.

U ovom delu se najpre određuju dovoljni uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja populacije, nezavisno od dužine vremenski zavisnog kašnjenja. U tom smislu se razmatra stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma $E_0 = 0$. Kao što je već pomenuto u Poglavlju 1.4, mnogi problemi koji se tiču stabilnosti ekvilibrijuma nelinearnih stohastičkih jednačina se svode na razmatranje stabilnosti ekvilibrijuma odgovarajućih linearizovanih stohastičkih jednačina. Linearizacijom jednačine (2.12) se dobija

$$d\tilde{N}(t) = -\tilde{N}(t)(r dt + \alpha dw(t)). \quad (2.16)$$

Sledećom teoremom se dokazuje asimptotska srednje-kvadratna stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma E_0 jednačine (2.16).

Teorema 2.2.7 Neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove (2.14) i $r > \frac{\alpha^2}{2}$, za svaki početni uslov (2.13), za koji je $N_0 < T$. Tada je trivijalno rešenje jednačine (2.16) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Dokaz. Neka je funkcija Lyapunova data sa $V = \tilde{N}^2$. Primenom operatora L na jednačinu (2.16) se dobija

$$\begin{aligned}LV(\tilde{N}(t)) &= -2r\tilde{N}^2(t) + \alpha^2\tilde{N}^2(t) \\ &= -(2r - \alpha^2)\tilde{N}^2(t).\end{aligned}$$

Uslov $r > \frac{\alpha^2}{2}$ obezbedjuje pozitivnost izraza u zagradi, pa je, na osnovu Teoreme 1.5.2 trivijalno rešenje jednačine (2.16) asimptotski srednje-kvadratno stabilno, čime je teorema dokazana. \diamond

Ovde treba primetiti da jednačina (2.12) ima stepen nelinearnosti veći od jedan. Na osnovu radova [54, 91, 95] može se zaključiti da, ako je stepen nelinearnosti jednačine koja se razmatra veći od jedan, tada su uslovi koji su dovoljni za asimptotsku srednje-kvadratnu stabilnost trivijalnog rešenja linearizovane jednačine, ujedno i dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja polazne jednačine. Zbog toga je sledeća teorema navedena bez dokaza.

Teorema 2.2.8 *Ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.2.7, tada je trivijalno rešenje jednačine (2.12) stabilno u verovatnoći.*

Na osnovu Terema 2.2.7 i 2.2.8, može se primetiti da uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja populacije ne zavise od dužine vremenski zavisnog kašnjenja. Međutim, vremensko kašnjenje može da ima vrlo značajnu ulogu pri istrebljenju populacije. Naime, ako je vremensko kašnjenje za neku populaciju suviše veliko, a početni broj jedinki u populaciji prevazilazi kapacitet sredine, sredina više ne može da zadovolji potrebe svih jedinki, tako da dolazi do smanjenja broja jedinki u populaciji. U mnogim situacijama do smanjenja broja jedinki dolazi veoma brzo jer prevelik broj jedinki na odredjenom prostoru može potpuno da opustosi taj prostor. Sredina na pustošenje može da "odgovori" na dva načina: istrebljenjem samo onog broja jedinki koji prevazilazi kapacitet sredine, ili istrebljenjem čitave vrste sa opustošenog staništa [106].

U nastavku se, zbog jednostavnosti zapisa, uvodi oznaka

$$M = \inf_{-\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} \xi(\theta).$$

Sledeća teorema daje uslove pod kojima populacija ne može opstati u srednjem na odredjenom prostoru.

Teorema 2.2.9 (a) *Neka su zadovoljeni bilo koji od sledećih uslova:*

(i) neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove (2.14), $r > 0$ i

$$\bar{\tau} > \frac{(1 - \tau')KT}{r[(1 - \tau')M^2 - (K + T)||\xi||]} \ln \frac{\xi(0)}{1 - \tau'} \frac{K + T}{KT}, \quad (2.17)$$

za svaki početni uslov (2.13), za koji je $\frac{K+T}{1-\tau'} < N_0 < (1 - \tau')\frac{M^2}{K+T}$;

(ii) neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove (2.14), $T > \frac{1}{1-\tau}$, $r > 0$ i

$$\bar{\tau} < \frac{(1 - \tau')KT}{r[(K + T)||\xi|| - (1 - \tau')\left(||\xi||^2 - (K + T)(||\xi|| - M)\right)]} \ln \frac{1 - \tau'}{\xi(0)} \frac{KT}{K + T}, \quad (2.18)$$

za svaki početni uslov (2.13), za koji je $0 < N_0 < T$ i $\xi(0) < (1 - \tau')\frac{KT}{K+T}$.

Tada je rešenje $N(t)$ jednačine (2.12) neperzistentno u srednjem.

(b) Specijalno, neka je $\tau(t) \equiv \tau$, za svako $t \geq 0$, i neka su zadovoljeni bilo koji od sledećih uslova:

(i) neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove $r > 0$ i

$$\tau > \frac{KT}{rM(M-K-T)} \ln \frac{K+T}{KT} \xi(0), \quad (2.19)$$

za svaki početni uslov (2.13), za koji je $N_0 > K+T$;

(ii) neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove $r > 0$ i

$$\tau < \frac{KT}{r\|\xi\|(K+T-\|\xi\|)} \ln \frac{KT}{\xi(0)(K+T)}, \quad (2.20)$$

za svaki početni uslov (2.13), za koji je $0 < N_0 < T$ i $\xi(0) < \frac{KT}{K+T}$.

Tada je rešenje $N(t)$ jednačine (2.12) neperzistentno u srednjem.

Dokaz. (a) Primenom formule Itôa na $\ln N(t) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_{t-\tau(t)}^t N(s) ds$, dobija se

$$\begin{aligned} & d \left(\ln N(t) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_{t-\tau(t)}^t N(s) ds \right) \\ &= \left[r \left(1 - \frac{N(t-\tau(t))}{T} \right) \left(\frac{N(t-\tau(t))}{K} - 1 \right) - \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{N(t)}{T} \right)^2 \left(\frac{N(t)}{K} - 1 \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} N(t) - r \frac{1-\tau'(t)}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} N(t-\tau(t)) \right] dt \\ & \quad + \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{T} \right) \left(\frac{N(t)}{K} - 1 \right) dw(t). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} & \ln N(t) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_{t-\tau(t)}^t N(s) ds \\ & \leq \ln \xi(0) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_{-\bar{\tau}}^0 \xi(\theta) d\theta + M(t) \\ & \quad + \int_0^t \left[r \left(1 - \frac{N(s-\tau(s))}{T} \right) \left(\frac{N(s-\tau(s))}{K} - 1 \right) - \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{N(s)}{T} \right)^2 \left(\frac{N(s)}{K} - 1 \right)^2 \right] ds \\ & \quad + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s) ds - r \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s-\tau(s)) ds, \end{aligned}$$

gde je $M(t) = \alpha \int_0^t \left(1 - \frac{N(s)}{T} \right) \left(\frac{N(s)}{K} - 1 \right) dw(s)$ realni neprekidni lokalni martingal koji iščezava u $t = 0$. Za svaki ceo broj $n \geq 1$, na osnovu eksponencijalne martingalne nejednakosti (1.6) je

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M(t) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(1 - \frac{N(s)}{T} \right)^2 \left(\frac{N(s)}{K} - 1 \right)^2 ds \right] > 2 \ln n \right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, na osnovu Borel–Cantellijeve leme postoji $\Omega_0 \subset \Omega$ tako da je $P(\Omega_0) = 1$ i za svako $\omega \in \Omega_0$ postoji ceo broj $n_0(\omega)$, za koji je $n \geq n_0(\omega)$ i $t \in [n-1, n]$. Stoga je

$$M(t) \leq 2 \ln n + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \left(1 - \frac{N(s)}{T}\right)^2 \left(\frac{N(s)}{K} - 1\right)^2 ds,$$

pa je

$$\begin{aligned} \ln N(t) &\leq \ln N(t) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s) ds \\ &\leq \ln \xi(0) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| \bar{\tau} + r \int_0^t \left(1 - \frac{N(s-\tau(s))}{T}\right) \left(\frac{N(s-\tau(s))}{K} - 1\right) ds \\ &\quad + r \frac{K+T}{KT} \left(\frac{1}{1-\tau'} \int_0^t N(s) ds - \int_0^t N(s-\tau(s)) ds\right) + 2 \ln n. \end{aligned}$$

Ako je $\psi(t) = t - \tau(t)$, $t \geq 0$, iz uslova (2.14) se može zaključiti da je $\psi(t)$ monotono rastuća funkcija. Tada postoji $t_1 > 0$ za koje je $t_1 - \tau(t_1) = 0$. Dalje je

$$\begin{aligned} \ln N(t) &\leq \ln \xi(0) + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| \bar{\tau} + r \int_{-\bar{\tau}}^0 \left(1 - \frac{\xi(\theta)}{T}\right) \left(\frac{\xi(\theta)}{K} - 1\right) d\theta \\ &\quad + r \int_{t_1}^t \left(1 - \frac{N(s-\tau(s))}{T}\right) \left(\frac{N(s-\tau(s))}{K} - 1\right) ds + 2 \ln n \\ &\quad + r \frac{K+T}{KT} \left(\frac{1}{1-\tau'} \int_0^t N(s) ds - \int_{-\bar{\tau}}^0 \xi(\theta) d\theta - \int_{t_1}^t N(s-\tau(s)) ds\right) \end{aligned}$$

za $t \in [n-1, n]$ i $n \geq n_0(\omega)$. Za dovoljno veliko $t \in (n-1, n)$ je $\frac{2 \ln n}{n-1} \leq \epsilon$, što znači da je $2 \ln n \leq \epsilon t$.

(i) Za svaki početni uslov (2.13), takav da je $\frac{K+T}{1-\tau'} < N_0 < (1-\tau') \frac{M^2}{K+T}$, dobija se da je $\left(1 - \frac{\xi(\theta)}{T}\right) \left(\frac{\xi(\theta)}{K} - 1\right) \leq -\frac{(M-T)(M-K)}{KT}$. Tada je

$$\begin{aligned} \ln N(t) &\leq \ln \xi(0) + r \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| - \frac{(M-T)(M-K)}{KT} - \frac{K+T}{KT} M \right) \bar{\tau} \\ &\quad + r \frac{K+T}{KT} \int_{t_1}^t N(s-\tau(s)) ds - r(t - \tau(t_1)) + \epsilon t \\ &\quad + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s) ds - r \frac{K+T}{KT} \int_{t_1}^t N(s-\tau(s)) ds \\ &\leq \ln \xi(0) + r \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| - \frac{M^2 + KT}{KT} + 1 \right) \bar{\tau} \\ &\quad + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s) ds - (r - \epsilon)t. \end{aligned}$$

Ako se uvede oznaka $f(t) = \int_0^t N(s) ds$, prethodna nejednakost postaje

$$\ln df(t) - \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} f(t) \leq \ln \xi(0) + r \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| - \frac{M^2}{KT} \right) \bar{\tau} - (r - \epsilon)t.$$

Dakle,

$$e^{-\frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} f(t)} df(t) \leq \xi(0) e^{A(r-\epsilon)t},$$

gde je $A = \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} ||\xi|| - \frac{M^2}{KT}\right) r\bar{\tau}$. Integracijom obe strane poslednje nejednakosti od 0 do t , dobija se

$$\int_0^t e^{-\frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} f(s)} df(s) \leq \xi(0) e^A \int_0^t e^{-(r-\epsilon)s} ds.$$

Odatle je

$$\frac{1-\tau'}{r} \frac{KT}{K+T} \left(1 - e^{-\frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} f(t)}\right) \leq \xi(0) e^A \frac{1}{r-\epsilon} (1 - e^{-(r-\epsilon)t}),$$

tj.

$$e^{-\frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} f(t)} \geq 1 - \frac{r}{r-\epsilon} \frac{K+T}{KT} \frac{\xi(0)}{1-\tau'} e^A (1 - e^{-(r-\epsilon)t}).$$

Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} f(t) &\leq -\frac{1-\tau'}{r} \frac{KT}{K+T} \ln \left[1 - \frac{r}{r-\epsilon} \frac{K+T}{KT} \frac{\xi(0)}{1-\tau'} e^A (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) \right] \\ &\leq -\frac{1-\tau'}{r} \frac{KT}{K+T} \ln \left[1 - \frac{K+T}{KT} \frac{\xi(0)}{1-\tau'} e^A (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) \right]. \end{aligned}$$

Logaritamska funkcija u poslednjoj nejednakosti je dobro definisana i ima negativnu vrednost. Naime, na osnovu uslova (2.17) je

$$A = \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} ||\xi|| - \frac{M^2}{KT}\right) r\bar{\tau} < \ln \left(\frac{1-\tau'}{\xi(0)} \frac{KT}{K+T}\right),$$

tj. $\frac{\xi(0)}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} e^A < 1$, pa je $\frac{\xi(0)}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} e^A (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) < 1$. Konačno,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} f(t) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ -\frac{1-\tau'}{r} \frac{KT}{K+T} \ln \left[1 - \frac{\xi(0)}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} e^A (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

što znači da je rešenje $N(t)$ jednačine (2.12) neperzistentno u srednjem.

(ii) Sa druge strane, za svaki početni uslov (2.13), za koji važi da je $0 < N_0 < T$ i $\xi(0) < (1-\tau') \frac{KT}{K+T}$, dobija se da je $\left(1 - \frac{\xi(\theta)}{T}\right) \left(\frac{\xi(\theta)}{K} - 1\right) \leq -\frac{(T-||\xi||)(K-||\xi||)}{KT}$. Stoga je

$$\begin{aligned} \ln N(t) &\leq \ln \xi(0) + r \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} ||\xi|| - \frac{||\xi||^2 - (K+T)(||\xi|| - M)}{KT} \right) \bar{\tau} \\ &\quad + \frac{r}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \int_0^t N(s) ds - (r-\epsilon)t. \end{aligned}$$

Kao i u delu (i), neka je $f(t) = \int_0^t N(s) ds$. Ponavljanjem procedure iz dela (i), dobija se da je

$$f(t) \leq -\frac{1-\tau'}{r} \frac{KT}{K+T} \ln \left[1 - \frac{K+T}{KT} \frac{\xi(0)}{1-\tau'} e^B (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) \right],$$

gde je $B = \left(\frac{1}{1-\tau'} \frac{K+T}{KT} \|\xi\| - \frac{\|\xi\|^2 - (K+T)(\|\xi\|-M)}{KT} \right) r\bar{\tau}$. Na osnovu uslova (2.18) je $B < \ln \left(\frac{1-\tau'}{\xi(0)} \frac{KT}{K+T} \right)$, tako da je $\frac{1-\tau'}{\xi(0)} \frac{KT}{K+T} e^B (1 - e^{-(r-\epsilon)t}) < 1$.

Kao i u (i), jednostavno se pokazuje da je $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s)ds = 0$, čime je dokazan deo (ii) tvrdjenja (a) teoreme.

(b) Specijalno, ako je $\tau(t) \equiv \tau$, za svako $t \geq 0$, primenom formule Itôa na $\ln N(t)$ i ponavljanjem čitave procedure primenjene u dokazu (a) se dobija tvrdjenje (b) teoreme. \diamond

Napomena 2.2.3 Iz Teoreme 2.2.9 se može zaključiti da intenzitet šuma α^2 nema uticaja na perzistentnost u srednjem populacije $N(t)$.

2.2.7 Stabilnost pozitivnih ekvilibrijuma stohastičkog modela sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom delu disertacije se metodom funkcionala Lyapunova određuju dovoljni uslovi pod kojima su pozitivni ekvilibrijumi E_* i E^* jednačine (2.12) stabilni u verovatnoći.

Teorema 2.2.10 *Neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove*

$$\tau' < 2 - \sqrt{2}, \quad r > \frac{K-T}{T} \frac{1-\tau'}{(\tau'-2)^2 - 2} \alpha^2 \quad (2.21)$$

$$\bar{\tau} < \frac{T((\tau'-2)^2 - 2)r - (K-T)(1-\tau')\alpha^2}{(K-T)(2+\tau')r^2}, \quad (2.22)$$

za svaki početni uslov (2.13), takav da je $T < N_0 < K$ ili $N_0 > K$. Tada je pozitivni ekvilibrijum $E^ = K$ jednačine (2.12) stabilan u verovatnoći.*

Dokaz. Da bi se razmatrala stabilnost ekvilibrijuma $E^* = K$, najpre treba jednačinu (2.12) centrirati oko njega. Smenom promenljivih $y = K - N$, ova jednačina se transformiše u

$$\begin{aligned} dy(t) &= -ry(t-\tau(t)) \frac{(K-y(t))(K-T-y(t-\tau(t)))}{TK} dt \\ &\quad - \alpha y(t) \frac{(K-y(t))(K-T-y(t))}{TK} dw(t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

sa početnim uslovom

$$y_0 = \{K - \xi(\theta), -\bar{\tau} \leq \theta \leq 0\}. \quad (2.24)$$

Očigledno je da je proučavanje stabilnosti ekvilibrijuma $E^* = K$ jednačine (2.12) ekvivalentno pručavanju stabilnosti trivijalnog ekvilibrijuma jednačine (2.23). U tom smislu, jednačina (2.23) se linearizuje

$$d\tilde{y}(t) = -\frac{K-T}{T} r\tilde{y}(t-\tau(t)) dt - \frac{K-T}{T} \alpha \tilde{y}(t) dw(t). \quad (2.25)$$

Ako se razmatra neutralni oblik jednačine (2.25), dobija se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} & \left[\tilde{y}(t) - \frac{K-T}{T} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}(s) ds \right] \\ &= -\frac{K-T}{T} r \tilde{y}(t) - \frac{K-T}{T} r \tau'(t) \tilde{y}(t-\tau(t)) - \frac{K-T}{T} \alpha \tilde{y}(t) \dot{w}(t). \end{aligned}$$

Neka je $V = V_1 + V_2$ funkcional Lyapunova, pri čemu je

$$V_1(\tilde{y}(t)) = \left(\tilde{y}(t) - \frac{K-T}{T} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}(s) ds \right)^2,$$

dok će V_2 biti izabранo kasnije. Primenom operatora L na V_1 i korišćenjem elementarne nejednakosti (1.20), dobija se

$$\begin{aligned} LV_1(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t-\tau(t))) &= -2 \frac{K-T}{T} r \left(\tilde{y}(t) - \frac{K-T}{T} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}(s) ds \right) (\tilde{y}(t) + \tau'(t) \tilde{y}(t-\tau(t))) \\ &\quad + \frac{(K-T)^2}{T^2} \alpha^2 \tilde{y}^2(t) \\ &\leq -2 \frac{K-T}{T} r \tilde{y}^2(t) + \frac{(K-T)^2}{T^2} r^2 \left(\bar{\tau} \tilde{y}^2(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}^2(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{K-T}{T} r \tau' (\tilde{y}^2(t) + \tilde{y}^2(t-\tau(t))) \\ &\quad + \frac{(K-T)^2}{T^2} r^2 \tau' \left(\bar{\tau} \tilde{y}^2(t-\tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}^2(s) ds \right) + \frac{(K-T)^2}{T^2} \alpha^2 \tilde{y}^2(t) \\ &= -\frac{K-T}{T} \left[(2-\tau') r - \frac{K-T}{T} r^2 \bar{\tau} - \frac{K-T}{T} \alpha^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\ &\quad + \frac{K-T}{T} r \tau' \left(1 + \frac{K-T}{T} r \bar{\tau} \right) \tilde{y}^2(t-\tau(t)) + \frac{(K-T)^2}{T^2} r^2 (1+\tau') \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}^2(s) ds. \end{aligned}$$

Funkcional V_2 se bira tako da se eliminišu članovi koji sadrže vremenski zavisno kašnjenje, pa je

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{y}(t)) &= \frac{K-T}{T} r \frac{\tau'}{1-\tau'} \left(1 + \frac{K-T}{T} r \bar{\tau} \right) \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{y}^2(s) ds \\ &\quad + \frac{(K-T)^2}{T^2} r^2 \frac{1+\tau'}{1-\tau'} \int_{t-\tau(t)}^t (s-t+\tau(t)) \tilde{y}^2(s) ds, \end{aligned}$$

dok se za funkcional Lyapunova V dobija

$$\begin{aligned} LV(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t-\tau(t))) &\leq -\frac{K-T}{T} \left[\frac{(\tau'-2)^2 - 2}{1-\tau'} r - \frac{K-T}{T} \frac{2+\tau'}{1-\tau'} r^2 \bar{\tau} - \frac{K-T}{T} \alpha^2 \right] \tilde{y}^2(t). \end{aligned}$$

Pod uslovima (2.21) i (2.22), izraz u zagradi u prethodnoj nejednakosti je pozitivan. Stoga je, na osnovu Teoreme 1.7.2, trivijalno rešenje jednačine (2.25) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Kako jednačina (2.23) ima stepen nelinearnosti veći od jedan, kao i u Poglavlju 2.2.6, uslovi teoreme su dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja jednačine (2.23). ◇

U nastavku se odredjuju dovoljni uslovi stabilnosti u verovatnoći pozitivnog ekvilibrijuma $E_* = T$ jednačine (2.12).

Teorema 2.2.11 *Neka parametri modela (2.12) zadovoljavaju uslove*

$$\tau' < 2 - \sqrt{2}, \quad r < -\frac{K-T}{K} \frac{1-\tau'}{(\tau'-2)^2-2} \alpha^2, \quad (2.26)$$

$$\bar{\tau} < \frac{-K((\tau'-2)^2-2)r - (K-T)(1-\tau')\alpha^2}{(K-T)(2+\tau')r^2}, \quad (2.27)$$

za svaki početni uslov (2.13), takav da je $N_0 < T$ ili $T < N_0 < K$. Tada je pozitivni ekvilibrijum $E_* = T$ jednačine (2.12) stabilan u verovatnoći.

Dokaz. Kao i u dokazu Teoreme 2.2.10, najpre se sменом променљивих $x = N - T$ jednačina (2.12) трансформише у једначињу

$$\begin{aligned} dx(t) &= rx(t-\tau(t)) \frac{(T+x(t))(K-T-x(t-\tau(t)))}{TK} dt \\ &\quad + \alpha x(t) \frac{(T+x(t))(K-T-x(t))}{TK} dw(t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

са почетним условом

$$x_0 = \{\xi(\theta) - T, -\bar{\tau} \leq \theta \leq 0\}. \quad (2.29)$$

На тај начин се одредјивање довољних услова стабилности у вероватноћи еквilibrijuma $E_* = T$ једначиње (2.12) своди на одредјивање довољних услова асимптошке средњеквадратне стабилности тривijалног решења линаризованог дела једначиње (2.28), који је дат са

$$d\tilde{x}(t) = \frac{K-T}{K} r\tilde{x}(t-\tau(t)) dt + \frac{K-T}{K} \alpha\tilde{x}(t) dw(t). \quad (2.30)$$

Neutralni облик једначиње (2.30) је

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\tilde{x}(t) + \frac{K-T}{K} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}(s) ds \right] \\ = \frac{K-T}{K} r\tilde{x}(t) + \frac{K-T}{K} r\tau'(t)\tilde{x}(t-\tau(t)) + \frac{K-T}{K} \alpha\tilde{x}(t)\dot{w}(t). \end{aligned}$$

Ako се функционал V_1 дефинише са

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \left(\tilde{x}(t) + \frac{K-T}{K} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}(s) ds \right)^2,$$

i na njega primeni operator L , uz pomoć elementarne nejednakosti (1.20) sledi

$$\begin{aligned} LV_1(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau(t))) &= 2\frac{K-T}{K} r \left(\tilde{x}(t) + \frac{K-T}{K} r \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}(s) ds \right) \\ &\quad \times (\tilde{x}(t) + \tau'(t)\tilde{x}(t-\tau(t))) + \frac{(K-T)^2}{K^2} \alpha^2 \tilde{x}^2(t) \\ &\leq 2\frac{K-T}{K} r \tilde{x}^2(t) + \frac{(K-T)^2}{K^2} r^2 \left(\bar{\tau} \tilde{x}^2(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}^2(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{K-T}{K} |r| \tau' (\tilde{x}^2(t) + \tilde{x}^2(t-\tau(t))) \\ &\quad + \frac{(K-T)^2}{K^2} r^2 \tau' \left(\bar{\tau} \tilde{x}^2(t-\tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}^2(s) ds \right) + \frac{(K-T)^2}{K^2} \alpha^2 \tilde{x}^2(t). \end{aligned}$$

Iz uslova (2.26) i (2.27) sledi da je r negativno, pa je

$$\begin{aligned} LV_1(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau(t))) &\leq -\frac{K-T}{K} \left[(\tau'-2) r - \frac{K-T}{K} r^2 \bar{\tau} - \frac{K-T}{K} \alpha^2 \right] \tilde{x}^2(t) \\ &\quad + \frac{K-T}{K} r \tau' \left(\frac{K-T}{T} r \bar{\tau} - 1 \right) \tilde{x}^2(t-\tau(t)) + \frac{(K-T)^2}{K^2} r^2 (1+\bar{\tau}) \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}^2(s) ds. \end{aligned}$$

Da bi se eliminisali članovi koji sadrže vremenski zavisno kašnjenje, funkcional V_2 treba izabrati na sledeći način

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{x}(t)) &= \frac{K-T}{K} r \frac{\tau'}{1-\tau'} \left(\frac{K-T}{K} r \bar{\tau} - 1 \right) \int_{t-\tau(t)}^t \tilde{x}^2(s) ds \\ &\quad + \frac{(K-T)^2}{K^2} r^2 \frac{1+\tau'}{1-\tau'} \int_{t-\tau(t)}^t (s-t+\tau(t)) \tilde{x}^2(s) ds. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova (2.26), može se zaključiti da je $\frac{K-T}{K} r \bar{\tau} - 1 < 0$. Dakle, za funkcional Lyapunova $V = V_1 + V_2$ se zaključuje da je

$$\begin{aligned} LV(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau(t))) &\leq -\frac{K-T}{K} \left[\frac{(\tau'-2)^2 - 2}{1-\tau'} r - \frac{K-T}{K} \frac{2+\tau'}{1-\tau'} r^2 \bar{\tau} - \frac{K-T}{K} \alpha^2 \right] \tilde{x}^2(t). \end{aligned}$$

Iz uslova (2.26) i (2.27) sledi da je izraz u zagradi u prethodnoj nejednakosti pozitivan, pa se može zaključiti da je trivijalno rešenje jednačine (2.30) asimptotski srednje-kvadratno stabilno, na osnovu Teoreme 1.7.2.

Kako je stepen nelinearnosti jednačine (2.28) veći od jedan, uslovi teoreme su dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja jednačine (2.28) (videti, na primer, [54, 91, 95]). \diamond

Da bi se praktično potvrdili prethodni teorijski rezultati, predstavljena su dva primera iz realnog života. Proučavaju se populacije afričkih divljih pasa (*Lycaon pictus*) i noćnih smedjih zmija (*Boiga irregularis*) i određuju dovoljni uslovi stabilnosti ekvilibrijuma modela koji opisuju njihovu dinamiku. Uz pomoć Euler–Maruyama aproksimativnog metoda [53] se grafički ilustruje dinamika ovih populacija.

Primer 2.2.2 Afrički divlji psi, *Lycaon pictus*, su jedna od najugroženijih vrsta velikih mesoždera u Africi. Početkom XX veka, ovo je bila brojna vrsta rasprostranjena na gotovo čitavom afričkom kontinentu. Sada, uprkos zakonu o zaštiti ove vrste, njen opstanak nije zagarantovan. U literaturi se navodi veliki broj faktora kojima se može objasniti razlog izumiranja ove vrste, kao što su gonjenje od strane ljudi, bolesti, fragmentacija staništa, suparništvo sa drugim predatorima, itd. Međutim, ovi faktori utiču i na druge vrste, koje nisu u istoj meri ugrožene kao divlji psi. Naime, prisustvo Allee efekta vrstu divljih pasa čini osetljivijom na promene različitih faktora smrtnosti. Preciznije, strategija lova grupe obično predviđa donju granicu broja jedinki koje su neophodne da bi lov bio uspešan, naročito zbog kleptoparazitizma hijena koji može veoma negativno da utiče na male grupe divljih pasa. Uz to, ženkama koje gaje mladunce su potrebni pomoćnici. Legla mogu da budu jako velika, čak i do 20 mladunčadi, tako da pomoćnici pomažu oko hranjenja. Oni takodje pomažu tako što teraju predatore daleko od jazbine, ili ostaju u njoj da zaštite mladunce dok je čopor u lovnu. Dakle, da bi čopor opstao, neophodan je donji prag broja jedinki divljih pasa. Istraživanja pokazuju da fragmentacija i uništenje životne sredine, kao i ljudski faktor, povećavaju Allee efekat.

U poređenju sa sličnim mesožderima, afrički divlji psi su uvek manje brojni. Samim tim, na većini staništa broj jedinki ove vrste retko kad prelazi 500. Oni žive u čoporima koji imaju od tri do 20 odraslih jedinki. Ako se uzmu u obzir i mladunci, čopor može imati od tri do 44 jedinke. Tri najveća staništa na kojima se mogu naći afrički divlji psi su Nacionalni park Kruger (Južna Afrika), Selous Game Reserve (Tanzanija) i Severna Bocvana. U Krugeru i Bocvani stope rasta ove vrste su iznenadjujuće slične, vrlo bliske nuli. U Selosu je stopa rasta divljih pasa $r = 0.038$ [18]. S obzirom na činjenicu da divlji psi stiču polnu zrelost izmedju 12 i 18 meseci [69], u ovom primeru će vremenski zavisno kašnjenje biti predstavljeno funkcijom

$$\tau(t) = \frac{1}{4}(5 + \sin \frac{t}{3}), \quad t \geq 0.$$

Tada je $\bar{\tau} = 1.5$, i $\tau' = \frac{1}{12}$.

Da bi se odredio broj jedinki afričkih divljih pasa u Selosu, neka su parametri modela (2.12) dati na sledeći način:

$$T = 3, \quad K = 20, \quad (2.31)$$

$$r = 0.038, \quad \alpha = 0.07. \quad (2.32)$$

$$\xi(\theta) = 8e^{-0.2\theta}, \quad -1.5 \leq \theta \leq 0. \quad (2.33)$$

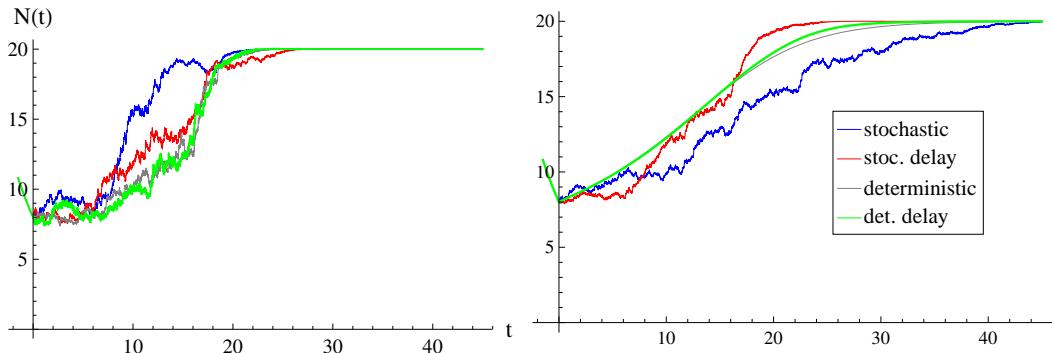
Ovi parametri zadovoljavaju uslove Teoreme 2.2.10, pa je ekvilibrijum $E^* = 20$ modela (2.12) stabilan u verovatnoći, što se može videti na Slici 2.5.

Na osnovu Slike 2.5 se može zaključiti da će populacija divljih pasa u Selosu dostići nivo kapaciteta sredine za otprilike 22 godine.

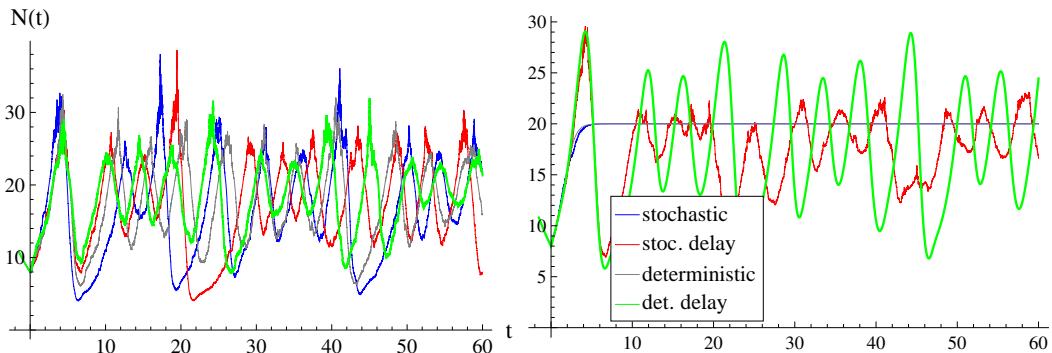
Ako se parametri modela promene, tj.

$$r = 0.3, \quad \alpha = 0.07, \quad (2.34)$$

uslov (2.22) Teoreme 2.2.10 nije zadovoljen, pa je ekvilibrijum $E^* = 20$ modela (2.12) nestabilan (Slika 2.6).



Slika 2.5: Četiri trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.31)-(2.33) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desно) (vremenski korak je $\Delta t=0.003$)



Slika 2.6: Četiri trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.31), (2.33) i (2.34) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desно) (vremenski korak je $\Delta t=0.003$)

Kada početni broj jedinki padne ispod Allee praga $T = 3$

$$\xi(\theta) = 2e^{-0.2\theta}, \quad -1.5 \leq \theta \leq 0, \quad (2.35)$$

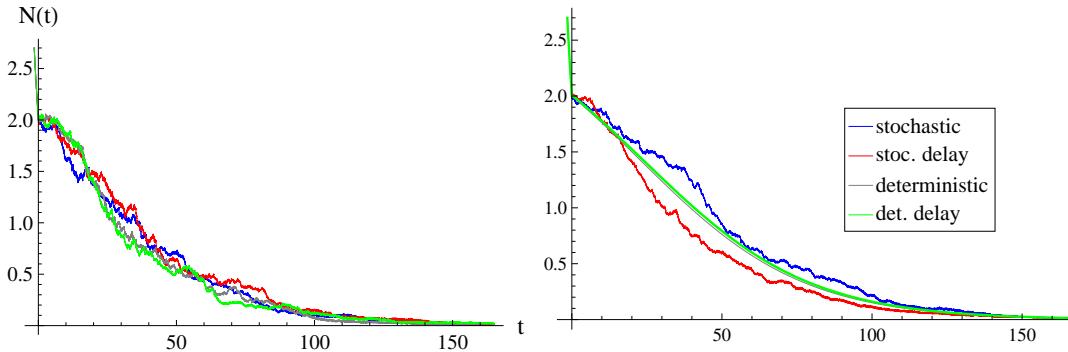
parametri (2.31) i (2.32) zadovoljavaju uslove Teoreme 2.2.7, pa se očekuje istrebljenje populacije za oko 150 godina (videti na Slici 2.7).

Kako su stope rasta u Krugeru i Bocvani jako blizu nuli, ovde se prepostavlja da mogu da postanu i negativne. Neka je

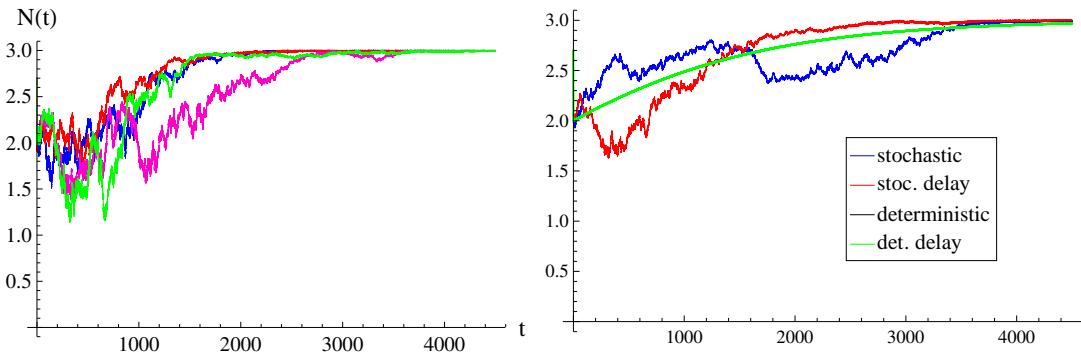
$$r = -0.001, \quad \alpha = 0.05. \quad (2.36)$$

Parametri (2.31), (2.36) i (2.33) ili (2.35) modela (2.12) zadovoljavaju uslove Teoreme 2.2.11, pa je ekilibrijum $E_* = 3$ stabilan (Slike 2.8 i 2.9). Može se videti da kada početni broj jedinki u populaciji zadovoljava (2.35), broj divljih pasa u Krugeru ili Bocvani dostiže vrednost $E_* = 3$ za oko 2600 godina, što se vidi na Slici 2.8, a ako je početni broj jedinki (2.33), za 1600 godina (Slika 2.9).

Na osnovu primera se može zaključiti da uvodjenje vremenskog kašnjenja u model (2.4) utiče da model (2.12) dostiže vrednosti svih ekilibrijuma brže od modela (2.4) i njihovih determinističkih analogona.



Slika 2.7: Četiri trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.31), (2.35) i (2.32) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desno) (vremenski korak je $\Delta t=0.003$)

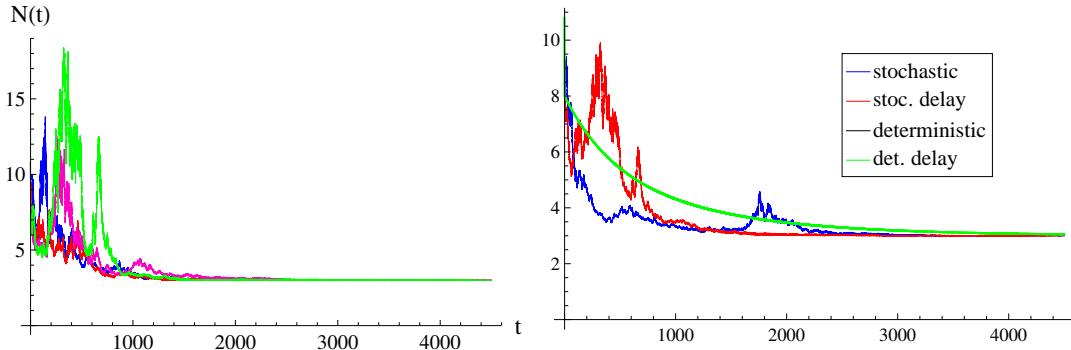


Slika 2.8: Četiri trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.31), (2.35) i (2.36) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desno) (vremenski korak je $\Delta t=0.03$)

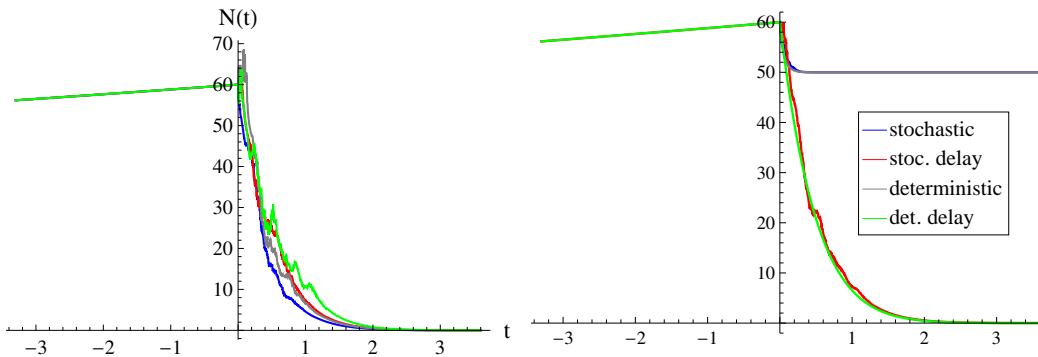
Primer 2.2.3 U ovom primeru se razmatra invazivna vrsta noćnih smedjih zmija, *Boiga irregularis*, koja se iz Australije i Nove Gvineje doselila na ostrvo Guam pedesetih godina prošloga veka. Sve do šezdesetih godina ova vrsta nije bila upadljiva na ostrvu, ali su do sredine šezdesetih zmije naselile više od pola ostrva. Kako izmedju ostrva Guam i Havaji postoji trgovina, zmije su zaposele i ostvo Oahu na Havajima. Sada su raspostranjene na teritoriji ovog ostrva na oko 150000 ha.

Ova vrsta zmija je dovela do istrebljenja jedanaest od osamnaest vrsta ptica koje su živele na Havajima, a 1997. zmije su prouzrokovale nestanke električne energije u trajanju od sat i po svakih tri do četiri dana. Ako se pretpostavi da je maksimalni broj zmija po hektaru 50, kapacitet ostva Oahu je 7500000 zmija. U radu [10] autori su simulirali broj noćnih smedjih zmija na ostrvu Oahu. U model su uključili i jaki Allee efekat i pretpostavili da je minimalan broj jedinki populacije koji obezbeđuje opstanak zmija dva. Međutim, minimalan broj reproduktivno zrelih jedinki populacije može biti i veći od 2 ako se ima u vidu veličina ostrva i rasprostranjenost jedinki različitih polova na njemu. Na osnovu procena veličine populacije u različitim periodima, odredjeno je da je stopa rasta populacije 0.6. Ova vrsta zmija stiče polnu zrelost tokom treće ili četvrte godine života [89], a u primeru je odabранo da je $\tau = 3.3$ godine.

Kako je reč o invazivnoj vrsti, u nekim slučajevima broj zmija može prevazići



Slika 2.9: Četiri trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.31), (2.33) i (2.35) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desno) (vremenski korak je $\Delta t=0.03$)



Slika 2.10: Četiri različite trajektorije modela (2.12) sa parametrima (2.37)-(2.39) (levo); usrednjene trajektorije modela (2.4) i (2.12) i trajektorije odgovarajućih determinističkih modela (desno) (vremenski korak je $\Delta t=0.003$)

kapacitet sredine. Kada se to desi, ova populacija počinje da koristi ograničene resurse u većem obimu nego što sredina može da podnese. U trenutku kada se iscrpe svi resursi, broj zmija će početi da opada. Stoga se u ovom primeru razmatra model (2.12) sa parametrima

$$T = 2, \quad K = 50, \quad (2.37)$$

$$r = 0.6, \quad \alpha = 0.08. \quad (2.38)$$

$$\xi(\theta) = 60e^{0.02t}, \quad -3.3 \leq \theta \leq 0. \quad (2.39)$$

S obzirom na činjenicu da je $M = \inf_{-3.3 \leq \theta \leq 0} \xi(\theta) = 56.17 > 52$ i $\tau > 2.446$, uslovi teoreme 2.2.9 (b(i)) su zadovoljeni, tako da je model (2.4) neperzistentan u srednjem, što se može videti na Slici 2.10. Sa slike se takođe može uočiti da populacija smedjih zmija prevaziđa kapacitet sredine i opstaje sve dok iz nje crpi resurse neophodne za opstanak. Kada se resursi iscrpe broj zmija neizbežno počinje da opada jer u okruženju nema više dovoljno resursa neophodnih za opstanak tolikog broja jedinki.

2.3 Stohastički predator-plen model

Dinamika veze izmedju plena i njegovih predavatora je bila i ostala jedna od dominantnih tema iz oblasti ekologije zbog toga što je, nezavisno od vremena, uvek prisutna i važna. Potreba za matematičkim modeliranjem predator-plen sistema se javila kao rezultat težnje da se na neki način, uz pomoć matematičkih modela, predvidi ponašanje ovakvih sistema. Klasični predator-plen modeli su uglavnom varijacije Lotka–Volterra modela koji je predstavljen sredinom 20-ih godina prošlog veka od strane Alfreda Lotke [66] i Vita Volterre [100]. Od tada pa do današnjih dana, predator-plen sistemi se sve više proučavaju u matematičkoj literaturi.

Ključni element interakcije izmedju predavatora i plena je funkcionalni odgovor (functional response). U populacionoj dinamici, funkcionalni odgovor predstavlja broj jedinki plena koje pojede jedan predavator u jedinici vremena. Funkcionalni odgovori se mogu podeliti u dve grupe: funkcionalni odgovori zavisni od plena i funkcionalni odgovori zavisni od predavatora. Funkcionalni odgovori zavisni od plena zavise jedino od veličine populacije plena, dok su funkcionalni odgovori zavisni od predavatora funkcije veličina populacija i predavatora i plena. U literaturi se najčešće javljaju funkcionalni odgovori zavisni od plena. Toj grupi pripadaju i Holling funkcionalni odgovori. U svojim radovima Holling [31, 32] je predložio tri tipa funkcionalnog odgovora:

$$(1) \quad p_1(x) = ax, \quad (2) \quad p_2(x) = \frac{ax}{m+x}, \quad (3) \quad p_3(x) = \frac{ax^2}{m+x^2},$$

pri čemu x predstavlja veličinu populacije plena. Funkcije $p_1(x)$, $p_2(x)$ i $p_3(x)$ se nazivaju funkcionalni odgovor Holling tipa I, II i III, respektivno.

Funkcionalni odgovor tipa I se javlja kod pasivnih predavatora, kao što su pauci, na primer. Kod njih je broj muva koje se uhvate u mrežu proporcionalan ukupnom broju muva, a stopa smrtnosti u populaciji plena je konstantna.

Funkcionalni odgovor tipa II se najčešće javlja kod predavatora koji love samo jednu ili nekoliko vrsta plena. U ovom slučaju $a > 0$ označava stopu pronalaženja plena od strane predavatora, dok $m > 0$ predstavlja polovinu maksimalne stope reakcije (half-saturation constant). Kod ovog tipa funkcionalnog odgovora smrtnost kod populacije plena opada sa povećanjem populacije plena. Predatori ovog tipa izazivaju najveću stopu smrtnosti kod populacija plena koje imaju mali broj jedinki. Primer predavatora koji imaju funkcionalni odgovor tipa II su mali sisari koji uništavaju većinu lutki noćnog leptira kada je populacija noćnih leptira mala. Međutim, kada je broj jedinki ove populacije veliki, mali sisari mogu da unište samo zanemarljiv broj lutki.

U III tipu funkcionalnog odgovora rizik da će neka jedinka iz populacije plena biti ulovljena je mali kada je broj jedinki populacije plena mali, ali raste do izvesne mere sa porastom veličine populacije plena. Postoji nekoliko faktora koji mogu da uslove funkcionalni odgovor tipa III, kao što su veština predavatora, skloništa za populaciju plena i prisustvo alternativnog plena.

Ako se uzme u obzir tip funkcionalnog odgovora, onda klasični predator-plen model ima oblik

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - p_i(x)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cp_i(x)y(t) - ey(t),\end{aligned}$$

gde je p_i , $i = 1, 2, 3$ tip funkcionalnog odgovora, $x(t)$ veličina populacije plena u trenutku t , a $y(t)$ veličina populacije predatora u trenutku t .

2.3.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Jedan od procesa koje su Lotka i Volterra u svom predator-plen modelu zanemarili je Allee efekat koji povećava verovatnoću lokalnog i globalnog istrebljenja populacije. U literaturi ne postoji veliki broj radova koji se bave proučavanjem posledica koje Allee efekat ima na stabilnost predator-plen sistema. U svom radu A. Kent, C.P. Doncaster i T. Sluckin [49] su zaključili da povećanje broja jedinki plena u smislu spasavanja ostalih, stabilizuje predator-plen sistem, dok ga Allee efekat destabilizuje. Kombinacijom matematičke analize i numeričke simulacije, S.R. Zhou, Y.F. Liu i G. Wang [112] su takođe pokazali da Allee efekat destabilizuje predator-plen sistem. Ipak, treba uzeti u obzir da su oni razmatrali Lotka–Volterra predator-plen model koji ima linearne funkcionalne odgovore, tj. funkcionalni odgovor Holling tipa I, koji jedino dobro modelira sisteme sa pasivnim predatorima. Od 1959. godine, u populacionoj teoriji se najčešće sreću oni predator-plen sistemi koji imaju funkcionalni odgovor tipa II. Međutim, uticaj Allee efekta na ovaj tip predator-plen sistema nije dovoljno istražen.

J. Zu i M. Mimura u svom radu [113] proučavaju uticaj Allee efekta na Rosenzweig–MacArthur predator-plen model koji ima funkcionalni odgovor tipa II, tako što uvode Allee efekat u populaciju plena. Pokazalo se da Allee efekat povećava rizik od istrebljenja kako populacije plena, tako i populacije predatora. Takodje, Allee efekat dovodi do promene stabilnosti pozitivnog ekvilibrijuma sa promenom parametara modela.

Svi pomenuti radovi se bave determinističkim predator-plen modelima. Međutim, kao što je do sada više puta istaknuto, populacioni sistemi su izloženi nepredvidivim uticajima sredine, na primer, promenama intenziteta sunčeve svetlosti, temperature vazduha, nivoa vode u rekama, jezerima, itd., pa stohastički modeli mogu realnije da opišu ovakve sisteme. Iz tog razloga su stohastički modeli sve zastupljeniji u populacionoj dinamici. Od radova koji se bave stohastičkim populacionim predator-plen modelima, ovde će biti pomenut [39] u kome se pokazuje egzistencija, jedinstvenost i ograničenost rešenja stohastičkog predator-plen modela

$$\begin{aligned}dx(t) &= x(t) \left[a - bx(t) - \frac{cy(t)}{x(t) + my(t)} \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[-g + \frac{fx(t)}{x(t) + my(t)} \right] dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t),\end{aligned}$$

a zatim se ispituje ponašanje tog modela za duži vremenski period.

U radu [40] se proučava Leslie–Gower stohastički predator-plen model sa fun-

kcionalnim odgovorom tipa II oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left[a - bx(t) - \frac{cy(t)}{x(t) + m} \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[r - \frac{fy(t)}{x(t) + m} \right] dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Primenom teoreme uporedjenja autori pokazuju da sistem (2.40) ima globalno pozitivno rešenje i određuju uslove pod kojima je perzistentan u srednjem, kao i pod kojima dolazi do istrebljenja. Ovaj model je modifikovan u radu [68] i dobijen je model

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left[a - bx(t) - \frac{cy(t)}{\lambda x(t) + Ay(t)} \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[f - \frac{gy(t)}{\lambda x(t) + h} \right] dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t), \end{aligned}$$

za koji su pokazane iste osobine kao i za sistem (2.40).

U nastavku će biti ispitane osobine stohastičkog Rosenzweig–MacArthur predator-plen modela sa Allee efektom u populaciji plena. U tom smislu, najpre će ukratko biti izložen deterministički Rosenzweig–MacArthur predator-plen model koji je proučavan u radu [113]. Ovaj model je predstavljen sistemom diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) \left[b - d_1 - \alpha x(t) - \frac{sy(t)}{1 + sh_1 x(t)} \right], \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(t) \left[\frac{c_1 sx(t)}{1 + sh_1 x(t)} - d_2 \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, u kome $x(t)$ i $y(t)$ označavaju redom veličine populacija plena i predatora u trenutku t , b je maksimalna stopa reprodukcije po jedinku populacije plena, d_i ($i = 1, 2$) su stope smrtnosti po jedinku populacije plena i predatora, α predstavlja jačinu kompeticije unutar populacije plena, s efektivnu stopu traženja plena, h_1 označava vreme koje je predatorima potrebno da bi uhvatili, ubili i pojeli jedinku plena, a c_1 efikasnost iskorišćenja hrane. Količnik $\frac{sx(t)}{1 + sh_1 x(t)}$ predstavlja funkcionalni odgovor predatora. Svi navedeni parametri modela su pozitivne konstante.

Poznato je da poteskoće u pronalaženju parnjaka mogu da utiču na smanjenje veličine populacije plena i dovedu do pojave Allee efekta. Tako, postoji određena kritična veličina populacije ispod koje je jako teško da se nadje parnjak, što kao posledicu ima da reprodukcija ne može da kompenzuje smrtnost. Neka je $f(x)$ stopa reprodukcije vrste koja ima x odraslih (reprodukтивно zrelih) jedinki. Tada, sa povećanjem veličine populacije, raste i stopa reprodukcije, što je opisano izrazom

$$f(x) = \frac{bx}{A_1 + x},$$

pri čemu b ima isto značenje kao u sistemu (2.41), dok A_1 predstavlja konstantu Allee efekta za posmatranu vrstu. Konstanta A_1 pokazuje koliko brzo će $f(x)$ da raste sa

porastom x . Što je A_1 veće, jači je Allee efekat. Biološki, A_1 predstavlja veličinu populacije pri kojoj ona dostiže polovinu svoje maksimalne stope reprodukcije, što se vidi iz činjenice da je $f(A_1) = b/2$. Kada je $A_1 = 0$, stopa reprodukcije ne zavisi od veličine populacije, tj. $f(x) = b$. Imajući u vidu prethodnu diskusiju, sistem (2.41) se može modifikovati da bi se dobio Rosenzweig–MacArthur predator-plen model sa Allee efektom u populaciji plena oblika

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t) \left[\frac{bx(t)}{A_1 + x(t)} - d_1 - \alpha x(t) - \frac{sy(t)}{1 + sh_1 x(t)} \right], \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(t) \left[\frac{c_1 sx(t)}{1 + sh_1 x(t)} - d_2 \right],\end{aligned}\quad (2.42)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Ako se pretpostavi da se slučajne promene u okruženju manifestuju kroz slučajne promene u stopama smrtnosti populacija plena i predatora, tj. da su parametri d_i , $i = 1, 2$ stohastički perturbovani sa $d_i \rightarrow d_i + \sigma_i \dot{w}_i(t)$, pri čemu $\dot{w}_i(t)$ predstavlja Gaussov beli šum sa intenzitetom σ_i^2 , dobija se stohastički Rosenzweig–MacArthur predator-plen model sa Allee efektom u populaciji plena

$$\begin{aligned}dx(t) &= x(t) \left[\frac{bx(t)}{A_1 + x(t)} - d_1 - \alpha x(t) - \frac{sy(t)}{1 + sh_1 x(t)} \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t), \\ dy(t) &= y(t) \left[\frac{c_1 sx(t)}{1 + sh_1 x(t)} - d_2 \right] dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t),\end{aligned}\quad (2.43)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. U sistemu (2.43) $w(t) = (w_1(t), w_2(t), t \geq 0)$ predstavlja dvodimenzionalno standardno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. U nastavku ovog poglavlja se razmatraju osobine modela (2.43), a rezultati koji su tom prilikom dobijeni predstavljaju originalne, još neobjavljene naučne rezultate.

2.3.2 Egzistencija, jedinstvenost i ograničenost pozitivnog rešenja stohastičkog modela

S obzirom na činjenicu da $x(t)$ i $y(t)$ predstavljaju redom veličine populacija plena i predatora, i ovde, kao i u prethodnim poglavljima se razmatraju samo pozitivna rešenja sistema (2.43). Kako koeficijenti sistema (2.43) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, a ne zadovoljavaju uslov ograničenog rasta, rešenje ovog sistema može da eksplodira u konačnom vremenu. U ovom delu će se primenom teoreme uporedjenja rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (Teorema 2.48) pokazati da sistem (2.43) ima jedinstveno pozitivno i globalno rešenje.

Teorema 2.3.1 Za bilo koji početni uslov $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, sistem (2.43) ima jedinstveno pozitivno rešenje $(x(t), y(t))$ za $t \geq 0$. Takodje, postoje funkcije $\phi(t)$, $\Phi(t)$, $\psi(t)$ i $\Psi(t)$, definisane na sledeći način

$$\phi(t) = \frac{e^{-\left(d_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t - s \int_0^t \Psi(z) dz + \sigma_1 w_1(t)}}{\frac{1}{x_0} + \alpha \int_{x_0}^t e^{-\left(d_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)z - s \int_0^z \Psi(r) dr + \sigma_1 w_1(z)} dz}, \quad (2.44)$$

$$\Phi(t) = \frac{e^{\left(b-d_1-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)t+\sigma_1 w_1(t)}}{\frac{1}{x_0} + \alpha \int_0^t e^{\left(b-d_1-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)z+\sigma_1 w_1(z)} dz}, \quad (2.45)$$

$$\psi(t) = y_0 e^{-\left(d_2+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t+\sigma_2 w_2(t)}, \quad (2.46)$$

$$\Psi(t) = y_0 e^{\left(\frac{c_1}{h_1}-d_2-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)t+\sigma_2 w_2(t)}, \quad (2.47)$$

za koje je

$$\phi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t), \quad \psi(t) \leq y(t) \leq \Psi(t), \quad s.i. \quad t \geq 0. \quad (2.48)$$

Dokaz. Da bi teorema bila dokazana, najpre se razmatra lokalno rešenje $(x(t), y(t))$ sistema (2.43) na intervalu $[0, \tau_e]$, gde je τ_e trenutak eksplozije rešenja. Uvodnjem smene $u(t) = \ln x(t)$, $v(t) = \ln y(t)$ i primenom formule Itôa, sistem (2.43) se transformiše u

$$\begin{aligned} du(t) &= \left[\frac{be^{u(t)}}{A_1+e^{u(t)}} - d_1 - \alpha e^{u(t)} - \frac{se^{v(t)}}{1+sh_1e^{u(t)}} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right] dt + \sigma_1 dw_1(t), \\ dv(t) &= \left[\frac{c_1 se^{u(t)}}{1+sh_1e^{u(t)}} - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] dt + \sigma_2 dw_2(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

sa početnim uslovom $u(0) = \ln x_0$, $v(0) = \ln y_0$. Koeficijenti sistema (2.49) zadowoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, što znači da postoji lokalno jedinstveno rešenje $(u(t), v(t))$ za $t \in [0, \tau_e]$. Na osnovu formule Itôa sledi da je $(x(t), y(t)) = (e^{u(t)}, e^{v(t)})$ jedinstveno, pozitivno lokalno rešenje sistema (2.43) za $t \in [0, \tau_e]$ sa početnim uslovom (x_0, y_0) .

Sledeći korak je da se dokaže da je ovo rešenje globalno, tj. da je $\tau_e = \infty$.

Zbog pozitivnosti rešenja na $[0, \tau_e]$, važi da je

$$dx(t) \leq x(t) (b - d_1 - \alpha x(t)) dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t).$$

Očigledno je da je $\Phi(t)$ definisano u (2.45) jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= \Phi(t) (b - d_1 - \alpha \Phi(t)) dt + \sigma_1 \Phi(t) dw_1(t), \\ \Phi(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pored toga, važi i da je

$$dy(t) \leq y(t) \left(\frac{c_1}{h_1} - d_2 \right) dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t),$$

pa je $\Psi(t)$ definisano u (2.47) jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} d\Psi(t) &= \Psi(t) \left(\frac{c_1}{h_1} - d_2 \right) dt + \sigma_2 \Psi(t) dw_2(t), \\ \Psi(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Za populaciju predatora važi i

$$dy(t) \geq -d_2 y(t)dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t).$$

Kako je $\psi(t)$ definisano u (2.46) jedinstveno rešenje jednačine

$$\begin{aligned} d\psi(t) &= -d_2\psi(t)dt + \sigma_2\psi(t)dw_2(t), \\ \psi(0) &= y_0, \end{aligned}$$

na osnovu Teoreme uporedjenja 2.48 dobija se da je

$$\psi(t) \leq y(t) \leq \Psi(t) \text{ s.i za } t \in [0, \tau_e]. \quad (2.51)$$

S druge stane, važi da je

$$dx(t) \geq x(t) (-d_1 - \alpha x(t) - sy(t)) dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t).$$

S obzirom na činjenicu da stohastički proces $\phi(t)$ definisan u (2.44) predstavlja jedinstveno rešenje jednačine

$$\begin{aligned} d\phi(t) &= -\phi(t) (d_1 + \alpha\phi(t) + s\Psi(t)) dt + \sigma_1\phi(t)dw_1(t), \\ \phi(0) &= x_0, \end{aligned}$$

na osnovu Teoreme uporedjenja 2.48, važi da je

$$\phi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t) \text{ s.i za } t \in [0, \tau_e].$$

Kako $\phi(t)$, $\Phi(t)$, $\psi(t)$ i $\Psi(t)$ postoje za svako $t \geq 0$, to je $\tau_e = \infty$, čime je teorema dokazana. \diamond

Da bi se dokazalo da je rešenje $(x(t), y(t))$ sistema (2.43) uniformno ograničeno u srednjem za bilo koji početni uslov $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, najpre će biti navedena lema dokazana u radu [42]. U ovom radu Jiang i ostali su razmatrali neautonomnu stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dN(t) = N(t) [(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t)], \quad t \geq 0. \quad (2.52)$$

Zbog jednostavnijeg zapisa za neprekidnu funkciju $f(t)$ se uvode sledeće oznake

$$f^l = \min_{t \in [0, T]} f(t), \quad f^u = \max_{t \in [0, T]} f(t).$$

Sa takvom notacijom dokazana je sledeća lema, koja će biti korišćena u dokazu uniformne ograničenosti u srednjem rešenja sistema (2.43).

Lema 2.3.1 *Neka je $N(t)$ rešenje jednačine (2.52) sa početnim uslovom $N(0) = N_0 > 0$. Tada je*

$$EN^p(t) \leq \left[\frac{a^u + \frac{1}{2}(p-1)(a^u)^2}{b^l} \right]^p := K(p).$$

Na osnovu ove leme direktno sledi sledeći rezultat.

Lema 2.3.2 *Neka je $\Phi(t)$ rešenje jednačine (2.50). Tada je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E\Phi(t) \leq \frac{b - d_1}{\alpha}.$$

Sada se može dokazati teorema kojom se tvrdi uniformna ograničenost u srednjem rešenja $(x(t), y(t))$ sistema (2.43).

Teorema 2.3.2 *Za rešenje $(x(t), y(t))$ sistema (2.43) sa bilo kojim početnim uslovom $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ važi*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Ex(t) \leq \frac{b - d_1}{\alpha}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} Ex(t) + \frac{1}{c_1} Ey(t) \leq \frac{(b - d_1 + d_2)^2}{4\alpha d_2}, \quad (2.53)$$

tj. uniformno je ograničeno u srednjem.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.3.1 važi da je $x(t) \leq \Phi(t)$ s.i. Imajući u vidu tu činjenicu, pomoću Leme 2.3.2 jednostavno se dobija da je $\limsup_{t \rightarrow \infty} Ex(t) \leq \frac{b - d_1}{\alpha}$, čime je dokazan prvi deo teoreme.

Za dokaz drugog dela neka je

$$G(t) = x(t) + \frac{1}{c_1} y(t).$$

Tada je

$$\begin{aligned} dG(t) &= x(t) \left[\frac{bx(t)}{A_1 + x(t)} - d_1 - \alpha x(t) - \frac{sy(t)}{1 + sh_1 x(t)} \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t) \\ &\quad + y(t) \left[\frac{sx(t)}{1 + sh_1 x(t)} - \frac{d_2}{c_1} \right] dt + \frac{\sigma_2}{c_1} y(t) dw_2(t) \\ &\leq \left[(b - d_1)x(t) - \alpha x^2(t) - \frac{d_2}{c_1} y(t) \right] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t) + \frac{\sigma_2}{c_1} y(t) dw_2(t) \\ &= [(b - d_1 + d_2)x(t) - \alpha x^2(t) - d_2 G(t)] dt + \sigma_1 x(t) dw_1(t) + \frac{\sigma_2}{c_1} y(t) dw_2(t). \end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do t i izračunavanjem matematičkog očekivanja sledi da je

$$EG(t) \leq G(0) + \int_0^t E[(b - d_1 + d_2)x(s) - \alpha x^2(s) - d_2 G(s)] ds,$$

tj.

$$\frac{dEG(t)}{dt} \leq (b - d_1 + d_2)Ex(t) - \alpha Ex^2(t) - d_2 EG(t).$$

Primenom Jensenove nejednakosti (1.26) prethodna nejednakost postaje

$$\frac{dEG(t)}{dt} \leq (b - d_1 + d_2)Ex(t) - \alpha(Ex(t))^2 - d_2 EG(t).$$

S obzirom na činjenicu da je maksimum funkcije $f(x) = (b-d_1+d_2)x - \alpha x^2$ jednak $\frac{(b-d_1+d_2)^2}{4\alpha}$, može se zaključiti da je

$$\frac{dEG(t)}{dt} \leq \frac{(b-d_1+d_2)^2}{4\alpha} - d_2 EG(t),$$

pa se, primenom Teoreme uporedjenja 2.48, dobija

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} EG(t) \leq \frac{(b-d_1+d_2)^2}{4\alpha d_2},$$

čime je teorema u potpunosti dokazana. \diamond

Sledeće tvrdjenje direktno sledi na osnovu pozitivnosti rešenja sistema (2.43) i prethodne teoreme.

Posledica 2.3.1 Za rešenje $(x(t), y(t))$ sistema (2.43) sa bilo kojim početnim uslovom $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, važi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E y(t) \leq \frac{c_1(b-d_1+d_2)^2}{4\alpha d_2}.$$

2.3.3 Istrebljenje u stohastičkom modelu

U ovom poglavlju se ispituju uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja kako populacije plena, tako i populacije predatora.

U dokazima teorema iz ovog poglavlja primenjivaće se sledeća lema, koja se može naći u [52].

Lema 2.3.3 Neka je $X(t)$ rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dw(t).$$

Ako je $S(-\infty) > -\infty$ i $S(\infty) = \infty$, gde je

$$S(u) = \int_0^u e^{-\int_0^v \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)} dy} dv,$$

tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty.$$

Uvodjenjem smene promenljivih $u(t) = \ln x(t)$, $v(t) = \ln y(t)$, dobija se sistem ekvivalentan sistemu (2.43), oblika

$$\begin{aligned} du(t) &= \left[\frac{be^{u(t)}}{A_1 + e^{u(t)}} - d_1 - \alpha e^{u(t)} - \frac{se^{v(t)}}{1 + sh_1 e^{u(t)}} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right] dt + \sigma_1 dw_1(t), \\ dv(t) &= \left[\frac{c_1 se^{u(t)}}{1 + sh_1 e^{u(t)}} - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] dt + \sigma_2 dw_2(t). \end{aligned}$$

Nije teško zaključiti da je

$$du(t) \leq \left(b - d_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dw_1(t).$$

Neka je $b < d_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}$. Tada se, za $\mu(t) = b - d_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}$ i $\sigma(t) = \sigma_1$, jednostavnim izračunavanjem dobija da je $S(-\infty) = \frac{\sigma_1^2}{2(b-d_1-\frac{\sigma_1^2}{2})} > -\infty$ i $S(\infty) = \infty$. Na taj način su zadovoljeni uslovi Leme 2.3.3, pa se na osnovu nje i Teoreme uporedjenja 2.48 dobija da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty \quad s.i.,$$

što znači da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad s.i.$$

Stoga, za svako $\varepsilon > 0$ postoje t_0 i skup Ω_ε takvi da je $P(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ i $\frac{c_1 s x(t)}{1 + s h_1 x(t)} \leq \varepsilon$, za svako $t \geq t_0$ i $\omega \in \Omega_\varepsilon$, pa je

$$-d_2 y(t) dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t) \leq dy(t) \leq (\varepsilon - d_2) y(t) dt + \sigma_2 y(t) dw_2(t),$$

i

$$- \left(d_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dw_2(t) \leq dv(t) \leq \left(\varepsilon - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dw_2(t).$$

Sličnim rasudjivanjem kao i za $du(t)$, zbog proizvoljnosti ε , na osnovu Leme 2.3.3 i Teoreme uporedjenja 2.48 sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\infty \quad s.i.,$$

tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad s.i.$$

Na ovaj način je dokazana sledeća

Teorema 2.3.3 *Neka je $(x(t), y(t))$ rešenje sistema (2.43) za bilo koji početni uslov $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$. Ako je $b < d_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}$, tada je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad s.i.$$

Prethodna teorema pokazuje da kada je $b < d_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}$ dolazi do istrebljenja populacije plena, ali zajedno sa populacijom plena dolazi do istrebljenja i populacije predatora.

2.3.4 Stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma stohastičkog modela

U radu [113], autori su proučavali stabilnost ekvilibrijuma sistema (2.42). Dobljeni su trivijalni ekvilibrijum $E_0 = (0, 0)$ i pozitivni ekvilibrijum $E^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{d_2}{s(c_1 - h_1 d_2)}, \frac{(1 + s h_1 x^*) \left(\frac{b x^*}{A_1 + x^*} - d_1 - \alpha x^* \right)}{s} \right)$.

Stohastički sistem (2.43) ima samo trivijalni ekvilibrijum $E_0 = (0, 0)$, tako da će se u ovom poglavlju proučavati njegova stabilnost metodom funkcije Lyapunova. U tom smislu, sistem (2.43) nejpre treba linearizovati. Nakon linearizacije se dobija sistem

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(t) &= -d_1\tilde{x}(t) dt + \sigma_1\tilde{x}(t) dw_1(t), \\ d\tilde{y}(t) &= -d_2\tilde{y}(t) dt + \sigma_2\tilde{y}(t) dw_2(t). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sledeća teorema daje dovoljne uslove stohastičke asimptotske stabilnosti trivijalnog rešenja sistema (2.54).

Teorema 2.3.4 *Neka parametri modela (2.43) zadovoljavaju uslov*

$$\sigma_1^2 < 2d_1, \quad \sigma_2^2 < 2d_2. \quad (2.55)$$

za bilo koji početni uslov $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$. Tada je trivijalno rešenje sistema (2.54) stohastički asimptotski stabilno.

Dokaz. Neka je $\mathbf{z} = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))^T$ dvodimenzionalni vektor kolona i $V(\mathbf{z}) = \tilde{x}^2(t) + \tilde{y}^2(t)$ funkcija Lyapunova. Primenom operatora L na V se dobija

$$\begin{aligned} LV(\mathbf{z}) &= -2d_1\tilde{x}^2(t) + \sigma_1^2\tilde{x}^2(t) - 2d_2\tilde{y}^2(t) + \sigma_2^2\tilde{y}^2(t) \\ &= -(2d_1 - \sigma_1^2)\tilde{x}^2(t) - (2d_2 - \sigma_2^2)\tilde{y}^2(t). \end{aligned}$$

Uslovi (2.55) garantuju pozitivnost vrednosti u zagradama u prethodnoj jednakosti, pa je na osnovu Teoreme 1.4.3 trivijalno rešenje sistema (2.54) stohastički asimptotski stabilno. ◇

U nastavku će biti odredjeni dovoljni uslovi pod kojima je trivijalno rešenje sistema (2.43) stohastički asimptotski stabilno.

Teorema 2.3.5 *Neka važe uslovi Teoreme 2.3.4. Tada je trivijalno rešenje sistema (2.43) stohastički asimptotski stabilno.*

Dokaz. Na osnovu Teorema 1.4.4 i 2.3.4, da bi se dokazalo tvrdjenje teoreme, dovoljno je pokazati da važi uslov (1.10). U ovom slučaju, leva strana nejednakosti (1.10) je

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{bx}{A_1+x} - \alpha x - \frac{sy}{1+sh_1x}\right)^2 x^2 + \left(\frac{c_1sxy}{1+sh_1x}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{b^2}{A_1^2}x^2 + \alpha^2x^2 + s^2y^2 + 2\alpha sxy\right)x^2 + c_1^2s^2x^2y^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{b^2}{A_1^2}\varepsilon^2x^2 + \alpha^2\varepsilon^2x^2 + s^2\varepsilon^2y^2 + 2\alpha s\varepsilon^2x^2 + c_1^2s^2\varepsilon^2y^2} \leq \bar{K}\varepsilon|\mathbf{Z}|, \end{aligned}$$

gde je $\mathbf{Z} = (x, y)$ iz okoline $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, za ε koje je dovoljno malo, a $\bar{K} = \sqrt{\max \left\{ \frac{b^2}{A_1^2} + \alpha^2 + 2\alpha s, s + c_1^2s^2 \right\}}$. Dakle, uslov (1.10) je zadovoljen, čime je teorema dokazana. ◇

Napomena 2.3.1 Stohastička asimptotska stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma znači da će rešenja sistema (2.43) koja su u početnom trenutku dovoljno blizu trivijalnom ekvilibrijumu, konvergirati ka njemu za duži vremenski period. Dakle, stohastička asimptotska stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma je slabiji uslov od uslova istrebljenja koji daje konvergenciju ka trivijalnom ekvilibrijumu svih rešenja, a ne samo onih koja su u početnom trenutku u njegovoј blizini.

Na kraju ovog poglavlja je dat primer koji ilustruje teorijske rezultate koji su u njemu dobijeni.

Primer 2.3.1 U ovom primeru se posmatra interakcija izmedju populacija vukova (*Canis lupus*) i losova (*Alces alces*) na Kraljevskom ostrvu (Isle Royale) koje predstavlja najveće ostrvo u istoimenom nacionalnom parku u SAD-u. Reč je o ostrvu koje je izolovano tako da na njemu nema ljudskog uticaja u interakciji izmedju predatora (vukova) i plena (losova).

S obzirom na činjenicu da je Kraljevsko ostrvo izolovano, ni losovi ni vukovi nisu tu živeli do početka dvadesetog veka. Losovi su doplivali do njega iz Minesote početkom 1900-ih, a 1949. godine je par vukova zalutalo na ostrvo preko mosta koji se tokom zime napravio od leda. Od tada, pa do današnjih dana, najveći broj losova na ovom ostrvu bio je 1995. godine, kada ih je bilo 2442, dok je najveći broj vukova zabeležen 1980. i iznosio je 50.

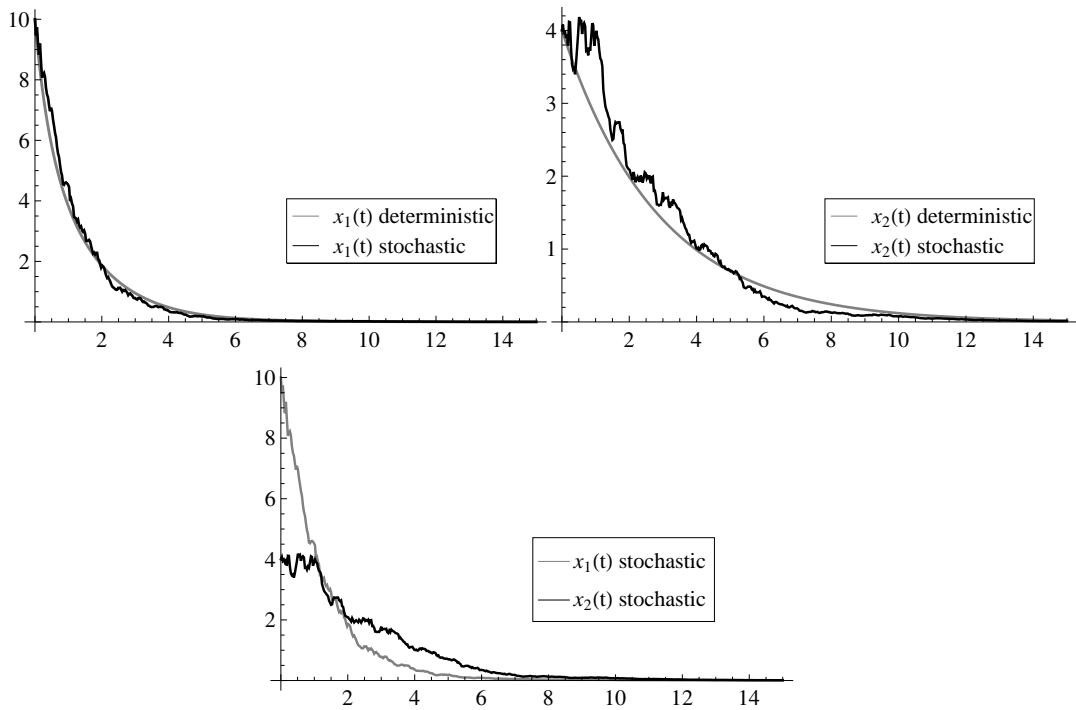
Vukovi koriste svoju inteligenciju da bi napali i savladali losove. Naime, oni ne napadaju zdrave losove, osim u slučaju kada ih glad u potpunosti savlada, jer su zdravi losovi u svojim prvim godinama života jako čvrsti i izdržljivi pa je bilo kom čoporu vukova teško da ih savlada. Pored toga, mladi i zdravi losovi su obično brži od vukova tako da uspevaju da im pobegnu. Zato vukovi najčešće napadaju novorodjene, stare i losove koji su zaraženi nekom bolešću. Tipičan los koga će vukovi napasti ima oko 12 godina i pati od artritisa, osteoporoze, itd. Kako je većina losova najčešće zaražena sa nekoliko različitih vrsta bolesti, može se reći da su izmedju 80% i 90% slučajeva vukovi odgovorni za smrt losova.

Poznato je da su na Kraljevskom ostrvu vukovi podeljeni u tri čopora: istočni, srednji i Chippewa Harbor čopor. Svaki čopor ima od tri do osam jedinki uključujući i dva do tri mладунца. Svaki od čopora tokom zime obično ulovi jednog losa na četiri do deset dana.

Da bi se potvrdili teorijski rezultati koji su dobijeni u ovom poglavlju, u primeru se koriste zvanični podaci o interakciji vukova i losova koji se mogu naći u radu [105], kao i na sajtovima www.isleroyalewolf.org i en.wikipedia.org. Ovde samo treba naglasiti da se podaci vezani za populaciju losova odnose na losove koji su stari oko 12 godina, zato što su oni, kao što je već i rečeno, idealan plen vukovima. Dakle, parametri modela (2.43) imaju sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} b &= 0.3, & d_1 &= 0.414, & d_2 &= 0.35, & A_1 &= 2, & \alpha &= 0.1, \\ c_1 &= 0.01, & h_1 &= 4, & s &= 0.6, & \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = 0.05. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ovako izabrani parametri modela (2.43) zadovoljavaju uslove Teoreme 2.3.4, kao i Teoreme 2.3.5, tako da je trivijalni ekvilibrijum modela (2.43) stabilan u



Slika 2.11: Determinističke i stohastičke trajektorije populacije losova (gore levo), vukova (gore desno) i stohastičke trajektorije i losova i vukova (dole) opisane modelima (2.42) i (2.43) sa parametrima (2.56) i početnim uslovom $x_0 = 10, y_0 = 4$.

verovatnoći, što se može videti na Slici 2.11. Takodje se može zaključiti da uvođenje slučajnosti tipa Gaussovog belog šuma ne destabilizuje trivijalni ekvilibrijum. Naprotiv, kod populacije vukova (Slika 2.11, gore desno) se vidi da stohastička trajektorija brže konvergira ka vrednosti trivijalnog ekvilibrijuma od odgovarajuće determinističke.

Kako parametri (2.56) zadovoljavaju i uslov Teoreme 2.3.3, na Slici 2.11 (dole) se može videti i da prvobitno istrebljenje populacije losova utiče na istrebljenje populacije vukova. Naime, sa ovako izabranim parametrima modela, očekuje se istrebljenje populacije losova za oko pet godina, dok do istrebljenja u populaciji vukova dolazi za otprilike osam godina.

2.4 Gompertzov stohastički model

Gompertzova jednačina potiče iz aktuarskog modela koji je 1825. godine razvio Benjamin Gompertz [28]. Ova jednačina je 1932. godine primenjena u izučavanju rasta u biološkim i ekonomskim modelima od strane Winsora [104], koji je primetio da ovaj model empirijski dobro opisuje usporenje rasta tumorskih ćelija. Godine 1964. je isti model primenio Laird [61] za opisivanje rasta tumorskih ćelija, a 1965. je Laird [62] po prvi put prilagodio eksperimentalne podatke za različite vrste tumora kod miševa, pacova i zečeva Gompertzovoj krivoj. Danas se za Gompertzov model uglavnom vezuje modeliranje rasta tumorskih ćelija.

Gompertzova diferencijalna jednačina je oblika

$$dN(t) = N(t) [a - b \ln N(t)] dt, \quad a > 0, b > 0,$$

gde $N(t)$ može da predstavlja broj jedinki neke populacije ili vrednost povezana sa veličinom populacije, na primer, njenu relativnu učestalost u staništu u trenutku t . Da bi ova jednačina opisivala rast, mora biti zadovoljen uslov $a > b$, pri čemu se a interpretira kao stopa razmnožavanja, a b objedinjuje u sebi uzajamno ograničavanje rasta i kompeticiju za hranu izmedju ćelija. Stopa b se ponekad naziva i faktor usporena rasta.

Gompertzov model pripada širokoj klasi modela rasta koji se zasnivaju na kompeticiji dva izraza: prvi je povezan sa stvaranjem, a drugi sa umiranjem. Broj ovakvih modela je veoma veliki uključujući i logistički zakon koji se dobija kada se u Gompertzovoj jednačini $\ln N(t)$ zameni sa $N(t)$ (jednačina (2.2)), kao i uopšteni logistički zakon kod koga se $\ln N(t)$ iz Gompertzove jednačine menja sa $N^p(t)$, gde je p realan broj.

Pored navedene Gompertzove jednačine, u literaturi se često koristi i uopštena Gompertzova jednačina oblika

$$dN(t) = N^\alpha(t) [a - b \ln N(t)] dt,$$

pri čemu je $\alpha < 1$ efekt usporena rasta, dok $\alpha > 1$ predstavlja meru razmnožavanja.

Pitanje koje se stalno ponavlja u literaturi jeste da li različite verzije Gompertzovog modela realnije opisuju rast populacije od logističkih modela, ili pak važi obrnuto. U literaturi se mogu naći različiti odgovori na ovo pitanje. Naime, s obzirom da se Gompertzov model najčešće koristi da bi se opisao rast tumorskih ćelija, a da se populacija tumorskih ćelija ponaša različito u zavisnosti od vrste i stadijuma u kojem se nalazi, modeli rasta tumorskih ćelija su jako različiti. Takođe, kod svih logističkih jednačina rasta relativna stopa rasta $dN(t)/N(t)$ teži beskonačnosti kada $N(t)$ teži nuli, pa zbog toga ovi modeli ne opisuju dobro rast tumorskih ćelija kada je njihova količina mala.

2.4.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Tumori su jedan od najrasprostranjenijih uzročnika smrti u ljudskoj populaciji. Naime, poznato je da u svetu svake godine više miliona ljudi umre od raka, a istraživanja pokazuju da će se taj trend nastaviti, iako su zadnjih godina učinjeni veliki pomaci u prevenciji raka, kao i u otkrivanju lekova koji su sada dostupni u vidu terapija koje oboleli od raka dobijaju. Jedan vid ovih terapija pripada klasi imunoterapija koje se ogledaju u stimulisanju imunosistema kako bi se bolje borio i iskorenio rak. Ovom problematikom se bavi Alberto d'Onofrio. U radu [83], on ističe da su glavne karakteristike matematičkih modela koji se bave proučavanjem rasta tumorskih ćelija postojanje ekvilibrijuma u kome nema tumora, mogućnost da broj tumorskih ćelija dostigne makroskopsku vrednost u zavisnosti od vrednosti parametara modela, kao i mogućnost postojanja ekvilibrijuma u kome je broj tumorskih ćelija mali. U radu [84], autori predstavljaju novo proširenje Gompertzovog zakona za rast tumorskih ćelija i terapiju kojom se tumor može iskoreniti.

Sa druge strane, kašnjenje se uvodi u modele rasta da bi se ovi modeli učinili što realnijim. U modelu rasta tumorskih ćelija kašnjenje može, između ostalog, da predstavlja period koji je potreban da bi se bolest manifestovala ili period potreban da organizam reaguje na terapiju. S obzirom na činjenicu da uvodjenje kašnjenja u model može na različite načine da utiče na osobine, Monika Piotrowska i Urszula Foryś u radu [85] proučavaju sličnosti i razlike koje se javljaju u Gompertzovoj jednačini sa kašnjenjem u zavisnosti od toga gde se u jednačini javlja kašnjenje.

Modeli proučavani u navedenim radovima su deterministički modeli. U literaturi se mogu naći i stohastički modeli koji se bave proučavanjem Gompertzove jednačine. S obzirom na činjenicu da Gompertzova stohastička diferencijalna jednačina spada u usku klasu efektivno rešivih stohastičkih diferencijalnih jednačina, većina radova posvećena stohastičkoj Gompertzovoj jednačini se bavi ocenom parametara ove jednačine (videti, na primer [23, 24]). U radu [24], autori razmatraju determinističku Gomperzovu jednačinu

$$dx(t) = x(t) (a - b \ln x(t)) dt, \quad (2.57)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, i parametrima koji imaju sledeće značenje: a je stopa unutrašnjeg rasta tumora, a b stopa usporena rasta.

Ako se u jednačini (2.57) a zameni sa $r \ln K$, a b sa r , dobija se jednačina

$$dx(t) = rx(t) (\ln K - \ln x(t)) dt, \quad (2.58)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$.

Već je više puta kroz ovu glavu napomenuto da stohastički modeli bolje opisuju pojave iz realnog života od determinističkih jer uzimaju u obzir slučajne faktore kojima su te pojave izložene. To važi i za modele rasta koji su izloženi slučajnim uticajima sredine.

Gompertzov stohastički model se dobija iz determinističkog modela (2.58) na sledeći način

$$dx(t) = rx(t) (\ln K - \ln x(t)) dt + \alpha x(t) dw(t), \quad (2.59)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$. U ovoj jednačini, pored parametara koji se javljaju u jednačini (2.58), $W = \{w(t), t \geq 0\}$ predstavlja jednodimenzionalno standardno Brownovo kretanje koje je definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove, dok je α realna konstanta.

Jednačina (2.59) je efektivno rešiva, a njeno jedinstveno rešenje je oblika

$$x(t) = e^{\frac{r \ln K - \alpha^2/2}{r} + \left(\ln x_0 - \frac{r \ln K - \alpha^2/2}{r} \right) e^{-rt} + \alpha \int_0^t e^{-r(t-s)} dw(s)},$$

što je dobijeno u [24].

U nastavku ovog poglavlja biće reči o stohastičkom Gompertzovom modelu sa kašnjenjem. Motivaciju za uvodjenje vremenskog kašnjenja u Gompertzov model dale su M. Piotrowska i U. Foryś u svom radu [85]. Zbog toga će ovde najpre biti izloženi njihovi rezultati. Osnovna jednačina koju autori razmatraju je oblika

$$dW(t) = -rW(t) \ln \frac{W(t)}{H} dt,$$

sa početnim uslovom $W(0) = W_0 > 0$, u kojoj $W(t)$ označava broj ćelija po jedinici količine ili broj jedinki po jedinici životnog prostora u trenutku t , a H je maksimalna veličina koju tumor može da dostigne ili kapacitet sredine, u zavisnosti od toga da li se posmatra rast tumorskih ćelija ili populacioni rast. Kako bi izbegli probleme sa jedinicima, autori uvode smenu $x = mW$ i $H = mK$, gde m predstavlja odnos izmedju količina tumorskih ćelija, odnosno, odnos medju životnim prostorima, i na taj način dobijaju model

$$dx(t) = -rx(t) \ln \frac{x(t)}{K} dt, \quad (2.60)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0 > 0$, gde je $x(t)$ broj ćelija, odnosno jedinki, a K je maksimalan broj (plateau number) ćelija ili jedinki na posmatranom staništu.

Kašnjenje se može uvesti u jednačinu (2.60) na dva biološki motivisana načina. Naime, u klasičnom populacionom modelu se razmatra rast populacije po jedinki populacije

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -r \ln \frac{x(t)}{K} dt,$$

a kašnjenje se uvodi u model da bi se opisalo da rast po jedinki populacije u trenutku t zavisi od proteklog vremenskog perioda τ . Na taj način se dobija model

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -r \ln \frac{x(t-\tau)}{K} dt,$$

odnosno

$$dx(t) = -rx(t) \ln \frac{x(t-\tau)}{K} dt. \quad (2.61)$$

Parametar τ ima više tumačenja, u zavisnosti od toga šta se jednačinom (2.61) opisuje. Ukoliko se radi o rastu populacije, vremensko kašnjenje τ predstavlja period sticanja polne zrelosti kod jedinki razmatrane populacije, dok kod rasta tumorskih ćelija τ predstavlja vreme koje je potrebno da bi ćelije prepoznale promene u okruženju u kome se nalaze i reagovale na njih.

Sa druge strane, ako se posmatra neto rast populacije, jednačina (2.60) postaje Gompertzov model sa dvostrukim kašnjenjem oblika

$$dx(t) = -rx(t-\tau) \ln \frac{x(t-\tau)}{K} dt. \quad (2.62)$$

Ako se uzmu u obzir obe ideje, može se razmatrati i model sa dva vremenska kašnjenja

$$dx(t) = -rx(t-\tau_1) \ln \frac{x(t-\tau_2)}{K} dt, \quad (2.63)$$

koji predstavlja uopštenje modela (2.61) (za $\tau_1 = 0$) i (2.62) (za $\tau_1 = \tau_2$). Iako je sa matematičkog aspekta potpuno prirodno uvesti ovakav model, treba naglasiti da model (2.63) nema biološko opravdanje, tj. interpretaciju. Zbog toga se proučava model sa vremenskim kašnjenjem kod koga se desna strana jednačine razdvaja na dva dela: prvi deo je izraz $r \ln K x(t)$ za $K \neq 1$ koji opisuje rast populacije, dok

drugi deo opisuje kompeticiju medju jedinkama populacije i predstavljen je izrazom $rx(t) \ln x(t)$. Na taj način se dolazi do modela

$$dx(t) = r \ln K x(t - \tau_1) - rx(t - \tau_2) \ln x(t - \tau_2) dt.$$

Može se zaključiti da ovaj model ne predstavlja uopštenje modela (2.61), niti modela (2.62).

2.4.2 Stohastički model sa kašnjenjem

U ovom delu disertacije se razmatra stohastički model sa kašnjenjem koji opisuje rast populacije po jedinki populacije, odnosno, u determinističkom modelu (2.61) parametar $r \ln K$ se stohastički perturbuje sa $r \ln K \rightarrow r \ln K + \alpha \dot{w}(t)$, pri čemu $\dot{w}(t)$ predstavlja Gaussov beli šum sa intenzitetom α^2 . Na taj način se dobija model proučavan u radu [46]

$$dx(t) = rx(t) (\ln K - \ln x(t - \tau)) dt + \alpha x(t) dw(t), \quad (2.64)$$

sa početnim uslovom

$$x_0 = \{\xi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in \mathcal{C}, \quad (2.65)$$

gde je $\mathcal{C} = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^+)$ familija svih neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sa normom $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$.

U ovom poglavlju važi pretpostavka koja je uvedena i za odgovarajući deterministički model u [85], da je $K > 1$.

Egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja

Jednačina (2.64) sa početnim uslovom (2.65) ima jedinstveno pozitivno rešenje, što će u nastavku biti i dokazano. Naime, uvodjenjem smene $y = \ln x$, pomoću formule Itôa se dobija stohastička diferencijalna jednačina

$$dy(t) = \left[r (\ln K - y(t - \tau)) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t), \quad (2.66)$$

sa početnim uslovom

$$y_0 = \ln x_0 = \{\zeta(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in \mathcal{C}. \quad (2.67)$$

Očigledno je da koeficijenti jednačine (2.66) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta, što znači da jednačina (2.66) za bilo koji početni uslov (2.67) ima jedinstveno globalno rešenje, tj. rešenje koje ne eksplodira u konačnom vremenu [73].

Kako je $x = e^y$, jednačina (2.64) takođe ima jedinstveno pozitivno globalno rešenje.

Stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma i istrebljenje

Za razliku od determinističke jednačine (2.61) koja ima dva ekvilibrijuma - trivijalni ekvilibrijum $E_0 = 0$ i pozitivni ekvilibrijum $E^* = K$, jednačina (2.64) ima samo trivijalni ekvilibrijum. U nastavku ovog poglavlja se ispituje stabilnost ovog ekvilibrijuma.

Da bi se ispitala stabilnost u verovatnoći trivijalnog ekvilibrijuma, jednačina (2.64) se najpre linearizuje, tako da se dobija jednačina

$$d\tilde{x}(t) = r \ln K \tilde{x}(t) dt + \alpha \tilde{x}(t) dw(t). \quad (2.68)$$

Sledeća teorema daje dovoljne uslove asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti trivijalnog rešenja jednačine (2.68).

Teorema 2.4.1 *Neka parametri modela (2.64) zadovoljavaju uslov $r < -\frac{\alpha^2}{2 \ln K}$, za bilo koji početni uslov (2.65). Tada je trivijalno rešenje jednačine (2.68) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.*

Dokaz. U dokazu ove teoreme se polazi od funkcije Lyapunova $V = \tilde{x}^2$. Primenom operatora L na jednačinu (2.68) se dobija

$$\begin{aligned} LV(\tilde{x}(t)) &= 2r \ln K \tilde{x}^2(t) + \alpha^2 \tilde{x}^2(t) \\ &= -(-2r \ln K - \alpha^2) \tilde{x}^2(t). \end{aligned}$$

Ako se uzme u obzir uslov $r < -\frac{\alpha^2}{2 \ln K}$, izraz u zagradi u prethodnoj jednakosti je pozitivan, pa je na osnovu Teoreme 1.5.2, trivijalno rešenje jednačine (2.68) asimptotski srednje-kvadratno stabilno, čime je teorema dokazana. \diamond

Jednačina (2.64) ima stepen nelinearnosti veći od jedan. Kao što je već pomenuto u Poglavlju 2.2.6, iz radova [92, 93] sledi da ako je stepen nelinearnosti jednačine koja se razmatra veći od jedan, tada su uslovi koji su dovoljni za asimptotsku srednje-kvadratnu stabilnost trivijalnog rešenja linearizovane jednačine, ujedno i dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja polazne jednačine. Zbog toga je sledeća teorema navedena bez dokaza.

Teorema 2.4.2 *Ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.4.1, trivijalno rešenje jednačine (2.64) je stabilno u verovatnoći.*

Sledećom teoremom su dati uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja populacije, odnosno tumorskih ćelija eksponencijalno sa verovatnoćom jedan.

Teorema 2.4.3 *Ako za parametre modela (2.64) i početni uslov (2.65) važi uslov*

$$\frac{-(\ln K + 1 - \xi(0)) - \sqrt{(\ln K + 1 - \xi(0))^2 + \alpha^2 I}}{I} < r < 0, \quad (2.69)$$

gde je

$$I = \int_{-\tau}^0 \xi^2(\theta) d\theta, \quad (2.70)$$

tada dolazi do istrebljenja populacije eksponencijalno sa verovatnoćom jedan.

Dokaz. Primenom nejednakosti $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ i elementarne nejednakosti (1.18), uz pretpostavku da je $r < 0$, iz jednačine (2.64) se dobija

$$\begin{aligned} dx(t) &\leq [rx(t)(\ln K + 1) - rx(t)x(t-\tau)] dt + \alpha x(t) dw(t) \\ &\leq \left[rx(t)(\ln K + 1) - \frac{r}{2}x^2(t) - \frac{r}{2}x^2(t-\tau) \right] dt + \alpha x(t) dw(t). \end{aligned}$$

Da bi se eliminisao član sa kašnjenjem, može se zaključiti da je

$$d \left[x(t) - \frac{r}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s) ds \right] \leq rx(t)(\ln K + 1 - x(t)) dt + \alpha x(t) dw(t),$$

odakle je

$$\begin{aligned} x(t) &\leq x(t) - \frac{r}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s) ds \\ &\leq \xi(0) - \frac{r}{2} I + r \int_0^t x(s)(\ln K + 1 - x(s)) ds + \alpha \int_0^t x(s) dw(s). \end{aligned}$$

Stohastička diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} dX(t) &= rX(t)(\ln K + 1 - X(t)) dt + \alpha X(t) dw(t), \\ X_0 &= \xi(0) - \frac{r}{2} I \end{aligned} \tag{2.71}$$

spada u klasu efektivno resivih stohastičkih diferencijalnih jednačina (videti [53]). Naime, jednačina oblika

$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= (a\Phi^2(t) + b\Phi(t)) dt + c\Phi(t) dw(t), \\ \Phi(0) &= \Phi_0, \end{aligned} \tag{2.72}$$

ima rešenje

$$\Phi(t) = e^{\left(b - \frac{c^2}{2}\right)t + cw(t)} \left[\frac{1}{\Phi_0} - a \int_0^t e^{\left(b - \frac{c^2}{2}\right)s + cw(s)} ds \right]^{-1}. \tag{2.73}$$

Dakle, jednačina (2.71) ima rešenje

$$X(t) = e^{At + \alpha w(t)} \left[\frac{1}{X_0} + r \int_0^t e^{As + \alpha w(s)} ds \right]^{-1},$$

gde je $A = r(\ln K + 1) - \frac{\alpha^2}{2} < 0$ na osnovu uslova (2.69). Tada je

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(t)} &= \frac{1}{X_0} e^{-At - \alpha w(t)} + r e^{-At - \alpha w(t)} \int_0^t e^{As + \alpha w(s)} ds \\ &\geq \frac{1}{X_0} e^{-At - \alpha w(t)} - \frac{r}{A} e^{-At - \alpha w(t) + \alpha \max_{0 \leq u \leq t} w(u)} (1 - e^{At}) \\ &\geq \frac{1}{X_0} e^{-At - \alpha w(t)} - \frac{r}{A} e^{-At - \alpha w(t) + \alpha \max_{0 \leq u \leq t} w(u)} \\ &\geq e^{-At + \alpha(\max_{0 \leq u \leq t} w(u) - w(t))} \left[\frac{1}{X_0} - \frac{r}{A} \right], \end{aligned}$$

odakle se na osnovu uslova (2.69) može zaključiti da je

$$-\ln X(t) \geq -At + \alpha(\max_{0 \leq u \leq t} w(u) - w(t)) + \ln \left[\frac{1}{X_0} - \frac{r}{A} \right],$$

odnosno

$$\ln X(t) \leq At - \alpha(\max_{0 \leq u \leq t} w(u) - w(t)) - \ln \left[\frac{1}{X_0} - \frac{r}{A} \right].$$

Iz prethodne nejednakosti, a na osnovu strogog zakona velikih brojeva za martingale, dobija se da je $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X(t)}{t} \leq A$, s.i.. Tada je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq A, \text{ s.i.,}$$

a kako je $A = r(\ln K + 1) - \frac{\alpha^2}{2} < 0$, teorema je dokazana. \diamond

Perzistentnost

U ovom delu disertacije se razmatra opstanak i ponašanje populacije tumorskih celija za duži vremenski period. U tom smislu, najpre se dokazuje sledeći rezultat.

Teorema 2.4.4 *Neka parametri modela (2.64) i početni uslov (2.65) zadovoljavaju bilo koji od uslova:*

(i)

$$\alpha^2 < \frac{4}{I}\xi(0)(\ln K + 1), \quad (2.74)$$

$$\frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)} < r < \min \left\{ \frac{2 + \alpha^2}{2 \ln K}, \frac{2}{I}\xi(0) \right\}; \quad (2.75)$$

(ii)

$$\xi(0) < \ln K - 1, \quad (2.76)$$

$$I < \frac{\ln^2 K - (\xi(0) + 1)^2}{2}, \quad (2.77)$$

$$\max \left\{ \frac{4}{I}\xi(0)(\ln K + 1), \frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2 \right\}$$

$$< \alpha^2 < \frac{1}{I}(\ln K + 1 + \xi(0))^2, \quad (2.78)$$

$$\frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)} < r < \frac{2 + \alpha^2}{2 \ln K}; \quad (2.79)$$

(iii)

$$\xi(0) < \frac{\ln K(\ln K + 1)}{\ln K + 2}, \quad (2.80)$$

$$I < (\ln K + 1)(\ln K - \xi(0)) - \xi(0), \quad (2.81)$$

$$\frac{4}{I}\xi(0)(\ln K + 1) < \alpha^2 < \min \left\{ \frac{1}{I}(\ln K + 1 + \xi(0))^2, \right. \quad (2.82)$$

$$\frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2, \frac{2}{I} (\ln K(\xi(0) + 1 + \ln K)) - 2 \Big\}, \\ \frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)} < r < r_1; \quad (2.83)$$

(iv)

$$(\sqrt{2} - 1) \ln K - 1 < \xi(0) < \ln K, \quad (2.84)$$

$$\max \left\{ 0, \frac{\ln^2 K - (\xi(0) + 1)^2}{2} \right\} < I \\ < \min \{ \ln K(\xi(0) + 1), 2(\ln K + 1)(\ln K - \xi(0)) \}, \quad (2.85)$$

$$\max \left\{ \frac{4}{I} \xi(0)(\ln K + 1), \frac{2}{I} (\ln K(\ln K + 1 + \xi(0))) - 2 \right\} < \alpha^2 \\ < \min \left\{ \frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2, \frac{1}{I} (\ln K + 1 + \xi(0))^2 \right\}, \quad (2.86)$$

i uslov (2.83);

(v)

$$\xi(0) < \ln K + 1, \quad (2.87)$$

$$I > \max \left\{ 0, \frac{\ln^2 K - (\xi(0) + 1)^2}{2} \right\}, \quad (2.88)$$

$$\max \left\{ \frac{4}{I} \xi(0)(\ln K + 1), \frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2 \right\} \\ < \alpha^2 < \frac{1}{I} (\ln K + 1 + \xi(0))^2, \quad (2.89)$$

$$r \in \left(\frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)}, r_1 \right) \cup \left(r_2, \frac{2 + \alpha^2}{2 \ln K} \right); \quad (2.90)$$

(vi)

$$\xi(0) > \ln K + 1, \quad (2.91)$$

$$uslov (2.89), \quad (2.92)$$

$$\max \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)}, r_2 \right\} < r < \frac{2 + \alpha^2}{2 \ln K}; \quad (2.93)$$

(vii)

$$\alpha^2 > \frac{1}{I} (\ln K + 1 + \xi(0))^2, \quad (2.94)$$

$$\frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)} < r < \frac{2 + \alpha^2}{2 \ln K}, \quad (2.95)$$

gde je I definisano u (2.70), a

$$r_{1,2} = \frac{\ln K + 1 + \xi(0) \mp \sqrt{(\ln K + 1 + \xi(0))^2 - \alpha^2 I}}{I}.$$

Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} = 0 \quad s.i.$$

Dokaz. Uvodjenjem smene $y(t) = \ln x(t)$, primenom formule Itôa i nejednakosti $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ se dobija

$$\begin{aligned} d \ln x(t) &= \left[r (\ln K - \ln x(t-\tau)) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t) \\ &= \left[r \ln K + \ln x^{-r}(t-\tau) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t) \\ &\leq \left[r \ln K + x^{-r}(t-\tau) - 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t). \end{aligned}$$

Da bi se eliminisao član sa kašnjenjem razmatra se

$$d \left(\ln x(t) + \int_{t-\tau}^t x^{-r}(s) ds \right) \leq (B + x^{-r}(t)) dt + \alpha dw(t),$$

pri čemu je $B = r \ln K - 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ negativna konstanta na osnovu uslova $r < \frac{2+\alpha^2}{2 \ln K}$ iz (2.75), odnosno (2.79), (2.83), (2.90), (2.93) i (2.95). Tada je

$$\begin{aligned} \ln x(t) &\leq \ln x(t) + \int_{t-\tau}^t x^{-r}(s) ds \\ &\leq \xi(0) + \int_{-\tau}^0 \xi^{-r}(\theta) d\theta + \int_0^t (B + x^{-r}(s)) ds + \alpha w(t), \end{aligned}$$

pa je

$$dy(t) \leq (B + e^{-ry(t)}(t)) dt + \alpha dw(t).$$

Stohastička diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} dY(t) &= (B + e^{-rY(t)}) dt + \alpha dw(t), \\ Y_0 &= \ln \xi(0) + \int_{-\tau}^0 \xi^{-r}(\theta) d\theta \end{aligned} \tag{2.96}$$

spada u klasu efektivno rešivih stohastičkih diferencijalnih jednačina [53]. Zaista, jednačina

$$\begin{aligned} d\Psi(t) &= (ae^{c\Psi(t)} + b) dt + \sigma dw(t), \\ \Psi(0) &= \Psi_0, \end{aligned} \tag{2.97}$$

ima rešenje

$$\Psi(t) = \Psi_0 + bt + \sigma w(t) - \frac{1}{c} \ln \left[1 - ac \int_0^t e^{c\Psi_0 + bcs + \sigma cw(s)} ds \right], \tag{2.98}$$

tako da je rešenje jednačine (2.96) oblika

$$Y(t) = Y_0 + Bt + \alpha w(t) + \frac{1}{r} \ln \left[1 + r \int_0^t e^{-rY_0 - Brs - \alpha rw(s)} ds \right].$$

Kako je $y(t) \leq Y(t)$, može se zaključiti da je

$$\begin{aligned} y(t) &\leq Y_0 + Bt + \alpha w(t) + \frac{1}{r} \ln \left[1 + re^{-rY_0 - \alpha r \min_{0 \leq u \leq t} w(u)} \int_0^t e^{-Brs} ds \right] \\ &= Y_0 + Bt + \alpha w(t) + \frac{1}{r} \ln \left[1 + e^{-rY_0 - \alpha r \min_{0 \leq u \leq t} w(u)} \frac{e^{-Brt} - 1}{-B} \right] \\ &\leq \ln e^{Y_0 + Bt + \alpha w(t)} + \ln \left[1 - \frac{1}{B} e^{-rY_0 - \alpha r \min_{0 \leq u \leq t} w(u) - Brt} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= \ln e^{Y_0 + Bt + \alpha w(t)} \left[1 - \frac{1}{B} e^{-rY_0 - \alpha r \min_{0 \leq u \leq t} w(u) - Brt} \right]^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^{Y_0 + Bt + \alpha w(t)} \left[1 - \frac{1}{B} e^{-rY_0 - \alpha r \min_{0 \leq u \leq t} w(u) - Brt} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq 2^{\left(\frac{1}{r}-1\vee 1\right)} e^{Y_0 + Bt + \alpha w(t)} \left[1 + \frac{1}{(-B)^{1/r}} e^{-Y_0 - \alpha \min_{0 \leq u \leq t} w(u) - Bt} \right] \\ &\leq 2^{\left(\frac{1}{r}-1\vee 1\right)} e^{Y_0 + Bt + \alpha w(t)} + \frac{1}{(-B)^{1/r}} e^{\alpha(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u))} \\ &\leq 2^{\left(\frac{1}{r}-1\vee 1\right)} e^{\alpha(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u))} \left[e^{Y_0 + Bt} + \frac{1}{(-B)^{1/r}} \right], \end{aligned}$$

pa je

$$\ln x(t) \leq \ln 2^{\left(\frac{1}{r}-1\vee 1\right)} + \alpha(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u)) + \ln \left[e^{Y_0 + Bt} + \frac{1}{(-B)^{1/r}} \right].$$

Na osnovu strogog zakona velikih brojeva za martingale važi da je $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\min_{0 \leq u \leq t} w(u)}{t} = 0$, pa je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq 0 \quad \text{s.i.} \quad (2.99)$$

Sa druge strane, primenom nejednakosti $\ln x \leq x - 1, x > 0$ i elementarne nejednakosti (1.18), jednačina (2.64) se transformiše u

$$\begin{aligned} dx(t) &= rx(t) (\ln K - \ln x(t-\tau)) dt + \alpha x(t) dw(t) \\ &\geq [rx(t) (\ln K + 1) - rx(t)x(t-\tau)] dt + \alpha x(t) dw(t) \\ &\geq \left[rx(t) (\ln K + 1) - \frac{r}{2} x^2(t) - \frac{r}{2} x^2(t-\tau) \right] dt + \alpha x(t) dw(t). \end{aligned}$$

Eliminacijom člana sa kašnjenjem dobija se

$$d \left(x(t) - \frac{r}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s) ds \right) \geq rx(t) (\ln K + 1 - x(t)) dt + \alpha x(t) dw(t),$$

pa je

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(t) - \frac{r}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s) ds \\ &\geq \xi(0) - \frac{r}{2} \int_{-\tau}^0 \xi^2(\theta) d\theta + r \int_0^t x(s) (\ln K + 1 - x(s)) ds + \alpha \int_0^t x(s) dw(s). \end{aligned}$$

Na ovaj način se dolazi do stohastičke diferencijalne jednačine (2.71), oblika (2.72) sa rešenjem (2.73), pa je

$$x(t) \geq e^{Ct+\alpha w(t)} \left[\frac{1}{X_0} + r \int_0^t e^{Cs+\alpha w(s)} ds \right]^{-1},$$

gde je $C = r(\ln K + 1) - \frac{\alpha^2}{2} > 0$ na osnovu uslova $r > \frac{\alpha^2}{2(\ln K + 1)}$ iz (2.75), odnosno (2.79), (2.83), (2.90), (2.93) i (2.95). Ponavljanjem procedure iz dokaza Teoreme 2.4.3 se dobija da je

$$\frac{1}{x(t)} \leq e^{\alpha(\max_{0 \leq u \leq t} w(u) - w(t))} \left[\frac{1}{X_0} + \frac{r}{C} \right],$$

odnosno

$$\ln x(t) \geq -\alpha(\max_{0 \leq u \leq t} w(u) - w(t)) - \ln \left[\frac{1}{X_0} + \frac{r}{C} \right].$$

Da bi logaritamska funkcija u poslednjoj nejednakosti bila dobro definisana, neophodno je razmatrati sledeće slučajevе.

(i) Ako važi $r < \frac{2\xi(0)}{I}$, tj. uslov (2.75), to znači da je $X_0 > 0$ pa je i $\frac{1}{X_0} + \frac{r}{C}$ pozitivno. Interval iz uslova (2.75) postoji na osnovu (2.74). Može se zaključiti da je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \geq 0 \quad \text{s.i.} \quad (2.100)$$

Iz nejednakosti (2.99) i (2.100) sledi tvrdjenje teoreme.

Sa druge strane, ako važi uslov $r > \frac{2\xi(0)}{I}$, X_0 je negativno, pa je neophodno da i $C + rX_0$ bude negativno. Na taj način se dobija kvadratna nejednačina po r

$$-\frac{I}{2}r^2 + (\ln K + 1 + \xi(0))r - \frac{\alpha^2}{2} < 0, \quad (2.101)$$

čija je diskriminanta $D = (\ln K + 1 + \xi(0))^2 - \alpha^2 I$. Ukoliko je $\alpha^2 < \frac{(\ln K + 1 + \xi(0))^2}{I}$, diskriminanta D je pozitivna pa kvadratna nejednačina (2.101) ima rešenja za $r < r_1$ i $r > r_2$, pri čemu su

$$r_{1,2} = \frac{\ln K + 1 + \xi(0) \mp \sqrt{(\ln K + 1 + \xi(0))^2 - \alpha^2 I}}{I}.$$

Dakle, za

$$\frac{4}{I}\xi(0)(\ln K + 1) < \alpha^2 < \frac{1}{I}(\ln K + 1 + \xi(0))^2, \quad (2.102)$$

nije teško dokazati da je $\max \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\ln K+1)}, \frac{2\xi(0)}{I} \right\} = \frac{\alpha^2}{2(\ln K+1)}$, pa r može pripadati jednom od intervala iz (2.79), (2.83) ili (2.90). Jedan od uslova egzistencije intervala u (2.79) i (2.83) je i $r_1 - \frac{\alpha^2}{2(\ln K+1)} > 0$, tj.

$$2(\ln K + 1)(\ln K + 1 + \xi(0)) - \alpha^2 I > 2(\ln K + 1)\sqrt{(\ln K + 1 + \xi(0))^2 - \alpha^2 I}. \quad (2.103)$$

Desna strana poslednje nejednakosti je pozitivna, pa bi takva trebalo da bude i leva. To važi ako je $\alpha^2 < \frac{2(\ln K+1)(\ln K+1+\xi(0))}{I}$. Kada je $\xi(0) < \ln K + 1$, važi da je $\alpha^2 < \frac{1}{I}(\ln K + 1 + \xi(0))^2 < \frac{2}{I}(\ln K + 1)(\ln K + 1 + \xi(0))$. Kvadriranjem se nejednačina (2.103) svodi na

$$\alpha^4 I^2 - 4\xi(0)(\ln K + 1)\alpha^2 I > 0,$$

odnosno $\alpha^2 > \frac{4\xi(0)(\ln K+1)}{I}$.

Za egzistenciju intervala u (2.79) neophodno je da važi uslov $\frac{2+\alpha^2}{2\ln K} < r_1$, odnosno

$$2\ln K(\ln K + 1 + \xi(0)) - (\alpha^2 + 2)I > 2\ln K\sqrt{(\ln K + 1 + \xi(0))^2 - \alpha^2 I}. \quad (2.104)$$

Pozitivnost leve strane je obezbedjena za $\alpha^2 < \frac{2}{I}(\ln K(\ln K + 1 + \xi(0))) - 2$. Pri tom, da bi postojalo α^2 koje zadovoljava ovu nejednakost treba da važi da je $I < \ln K(\ln K + 1 + \xi(0))$. Kvadriranjem nejednačine (2.104) dobija se kvadratna nejednačina po α^2 koja ima rešenja $\alpha_{1,2}^2 = \frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 \mp \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2$. Manja vrednost za α^2 je negativna, tako da je uslov $\frac{2+\alpha^2}{2\ln K} < r_1$ zadovoljen za $\alpha^2 > \frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2$. Na taj način se dobija da je $\frac{2+\alpha^2}{2\ln K} < r_1$ ako je

$$\frac{2}{I} \left(\ln K(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2 < \alpha^2 < \frac{2}{I} \left(\ln K(\ln K + 1 + \xi(0)) \right) - 2. \quad (2.105)$$

Interval u (2.105) postoji na osnovu uslova (2.77). Dakle, na osnovu uslova (2.76) i (2.77), može se zaključiti da α^2 zadovoljava (2.78), pa pod tim uslovima postoji interval iz (2.79).

Sličnim rasudjivanjem se može zaključiti da interval (2.83) iz (iii), odnosno (iv) ove teoreme postoji pod uslovima (2.80), (2.81) i (2.82), odnosno (2.84)-(2.86), respektivno. Ako važe uslovi (2.87), (2.88) i (2.89), tada postoji interval (2.90) iz dela (v) ove teoreme.

(vi) Pod uslovom (2.91) r ne zadovoljava uslove (2.79) i (2.83). Sa druge strane uslov (2.89) obezbeđuje postojanje intervala iz (2.93), što se može proveriti slično kao u delu (ii).

(vii) Na kraju, ako važi uslov (2.94), diskriminanta kvadratne nejednačine (2.101) je negativna, pa ova nejednačina važi za svako r , što znači da je i u ovom slučaju logaritamska funkcija dobro definisana.

U svakom od navedenih slučajeva se, na isti način kao i u dokazu nejednakosti (2.99), može zaključiti da važi (2.100), pa sledi tvrdjenje teoreme. \diamond

Sledećom teoremom su dati uslovi pod kojima je populacija tumorskih ćelija perzistentna u srednjem.

Teorema 2.4.5 Ako parametri modela (2.64) i početni uslov (2.65) zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4.4, populacija $x(t)$ je perzistentna u srednjem.

Dokaz. Primenom formule Itôa na $\ln x(t)$ i nejednakosti $\ln x \leq x - 1, x > 0$ se dobija

$$\begin{aligned} d\ln x(t) &= \left[r(\ln K - \ln x(t-\tau)) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t) \\ &\geq \left[r(\ln K + 1) - rx(t-\tau) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha dw(t). \end{aligned}$$

Slično dokazu prethodne teoreme, eliminacijom člana sa kašnjenjem, dobija se

$$\ln x(t) - \ln x(0) \geq Ct - r \int_0^t x(s)ds + \alpha w(t),$$

gde je $C = r(\ln K + 1) - \frac{\alpha^2}{2} > 0$ konstanta definisana u dokazu Teoreme 2.4.4. Tada je

$$\frac{\ln x(t) - \ln x(0)}{t} \geq C - \frac{r}{t} \int_0^t x(s)ds + \alpha \frac{w(t)}{t}.$$

Kada $t \rightarrow \infty$, na osnovu strogog zakona velikih brojeva je $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = 0$, pa sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \geq \frac{C}{r} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t}.$$

Teoremom 2.4.4 je dokazano da $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} = 0$, tako da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds \geq \frac{C}{r} > 0,$$

čime je teorema dokazana. \diamond

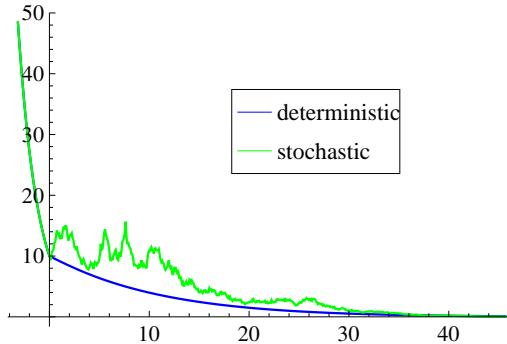
Primeri i napomene

Da bi se ilustrovali teorijski rezultati o stabilnosti modela (2.64) razmatraju se primeri koji se odnose na Ehrlich Ascites tumorske ćelije (EAT). U svom radu Schuster i Schuster [90] su opisali razvoj EAT-a kod miševa. Naime, u poslednje dve-tri decenije sve više se razvijaju tehnike za suzbijanje tumora koje se baziraju na terapijama kojima se podvrgavaju životinje, na taj način što im se u organizam ubacuju "eksperimentalni" tumori. Jedan od najčešće korišćenih tumora u ove svrhe je upravo EAT. Ova vrsta tumorskih ćelija se najpre pojavila kao rak dojke kod ženki miševa, a zatim su je Ehrlich i Apolant koristili u eksperimentalne svrhe tako što su presadjivali tumorske ćelije od jedne ženke miša na drugu. Godine 1932. Loewenthal i Jahn su izlovali tečni oblik ove vrste tumora u trbušnoj maramici miševa i dali mu ime *Ehrlich Ascites tumor* zbog toga što su tumorske ćelije bile u nakupljenoj tečnosti trbušne šupljine (ascites).

Primer 2.4.1 Parametri modela (2.64), koji opisuje rast tumorskih ćelija EAT-a, su ocenjeni u radu [8], a ovde će biti korišćene vrednosti sa najmanjom greškom pri ocenjivanju. Neka su maksimalan broj tumorskih ćelija K , vreme koje je potrebno tumorskim ćelijama da bi reagovale na promene u okruženju τ i početan broj tumorskih ćelija x_0 dati na sledeći način:

$$\begin{aligned} K &= 97.9509 \times 10^7, & \tau &= 3.1603 \text{ dana}, \\ x_0 &= \{10e^{-0.5\theta}, -3.1603 \leq \theta \leq 0\}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Ako se pretpostavi da je intenzitet šuma sredine $\alpha^2 = 0.05$, kada bi se prilikom eksperimenta miševi podvrgli terapiji došlo bi do smanjenja broja tumorskih ćelija, što praktično znači da bi stopa rasta tumorskih ćelija r bila negativna i vrlo bliska nuli. Ako se za parametre (2.106) provere uslovi Teorema 2.4.1, odnosno 2.4.2 i uslov (2.69) Teoreme 2.4.3, dobija se da r može biti iz intervala $-0.0121841 \leq r \leq -0.00120758$. Neka je $r = -0.005/\text{dan}$. Kako su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.4.1, 2.4.2, trivijalni ekvilibrijum $E_0 = 0$ je stabilan u verovatnoći. Ovako izabrani parametri takodje zadovoljavaju i uslov (2.69) Teoreme 2.4.3, pa dolazi do istrebljenja tumorskih ćelija (Slika 2.12).



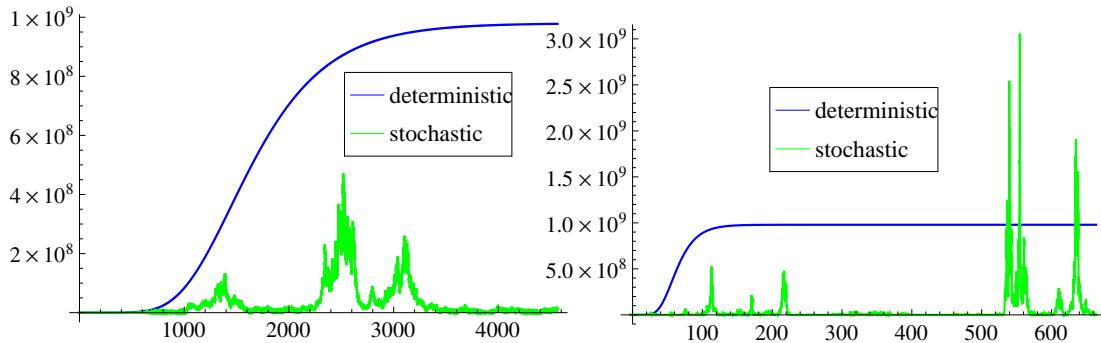
Slika 2.12: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (2.61) i (2.64) sa parametrima (2.106), $r = -0.005$ i $\alpha^2 = 0.05$.

Primer 2.4.2 Sa druge strane, ako su maksimalan broj tumorskih ćelija K , vreme koje je potrebno tumorskim ćelijama da bi reagovale na promene u okruženju τ i početan broj tumorskih ćelija x_0 isti kao u (2.106), u zavisnosti od šuma sredine mogu se odrediti vrednosti stope rasta tumorskih ćelija r , za koje će populacija tumorskih ćelija biti perzistentna u srednjem.

Ako je $\alpha^2 = 0.01$ i $r = 0.002$ zadovoljeni su uslovi (2.74) i (2.75) iz dela (i) Teoreme 2.4.4, odnosno uslovi Teoreme 2.4.5, tako da je populacija tumorskih ćelija perzistentna u srednjem što se može videti na Slici 2.13 (levo).

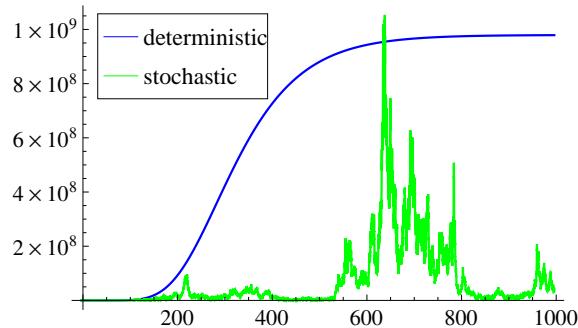
Ukoliko je intenzitet šuma sredine jako veliki $\alpha^2 = 0.45$ i ako se izabere $r = 0.045$, zadovoljeni su uslovi (2.94) i (2.95) iz dela (v) Teoreme 2.4.4, odnosno uslovi Teoreme 2.4.5. Slika 2.13 (desno) pokazuje da je i u ovom slučaju populacija tumorskih ćelija perzistentna u srednjem.

Napomena 2.4.1 Ovde treba naglasiti da su uslovi Teorema 2.4.1-2.4.5 dovoljni uslovi i da može da dodje do istrebljenja populacije tumorskih ćelija EAT-a čak



Slika 2.13: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (2.61) i (2.64) sa parametrima (2.106) i $r = 0.002$ i $\alpha^2 = 0.01$ (levo), odnosno $r = 0.045$ i $\alpha^2 = 0.45$ (desno).

i kada nisu zadovoljeni uslovi Teorema 2.4.1-2.4.3, kao što može da se desi da je populacija EAT-a perzistentna i pod širim uslovima u odnosu na uslove Teoreme 2.4.4, odnosno 2.4.5. Na primer, neka je intenzitet šuma $\alpha^2 = 0.05$ i $r = 0.01$. Ovako izabrani parametri zajedno sa parametrima (2.106) ne zadovoljavaju uslov (2.74) iz dela (i) Teoreme 2.4.4, uslove (2.76) iz dela (ii), (2.81) iz dela (iii), (2.84) iz (iv), (2.88) iz delova (v) i (vi), kao ni uslov (2.94) iz dela (vii). Dakle, za ovakav izbor parametara nije zadovoljen ni jedan od uslova Teoreme 2.4.4, odnosno Teoreme 2.4.5, dok Slika 2.14 pokazuje da je populacija tumorskih ćelija perzistentna u srednjem.



Slika 2.14: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (2.61) i (2.64) sa parametrima (2.106), $r = 0.01$ i $\alpha^2 = 0.05$.

2.4.3 Stohastički model sa kašnjenjem i Markovskim prelazima

Do sada je Gaussov beli šum bio jedini tip uticaja sredine na ponašanje stohastičkog Gompertzovog modela. U ovom delu disertacije se ide korak dalje i uzima se u razmatranje još jedan tip uticaja sredine. To je obojeni ili telegrafski šum. Obojeni šum se opisuje kao slučajni prelazak sistema iz jednog režima sredine u drugi pod uticajem slučajnih faktora iz okruženja. Tako se, na primer, ishrana većine populacija razlikuje u kišnim i sušnim periodima godine, stope reprodukcije i smrtnosti većine

biljnih i životinjskih populacija zavise od godišnjeg doba. U slučaju Gompertzovog modela kao modela koji opisuje rast tumorskih ćelija, proces rasta tumorskih ćelija zavisi od toga da li bolesna osoba uzima terapiju ili ne.

Prelasci sistema iz jednog režima u drugi su bez memorije, a vreme provedeno u jednom režimu do prelaska u sledeći ima eksponencijalnu raspodelu. Zbog toga se prelazak iz jednog režima u drugi opisuje pomoću lanca Markova sa konačnim brojem stanja. Ako se pretpostavi da sistem (2.64) ima n režima, tada je

$$dx(t) = r(1)x(t)(\ln K(1) - \ln x(t-\tau))dt + \alpha(1)x(t)dw(t),$$

sve dok je sistem u režimu 1. Sa prelaskom u režim 2, jednačina (2.64) postaje

$$dx(t) = r(2)x(t)(\ln K(2) - \ln x(t-\tau))dt + \alpha(2)x(t)dw(t),$$

itd. Dakle, u režimu i je

$$dx(t) = r(i)x(t)(\ln K(i) - \ln x(t-\tau))dt + \alpha(i)x(t)dw(t), \quad (2.107)$$

za $1 \leq i \leq n$.

Prelasci iz jednog režima u drugi uslovjeni su lancem Markova $q(t)$ koji je definisan na $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, n\}$ sa generatorom Γ koji je definisan izrazom (1.16) u Poglavlju 1.8.

Dakle, stohastički Gompertzov model (2.64) sa Markovskim prelazima se opisuje sledećim stohastičkim modelom

$$dx(t) = r(q(t))x(t)(\ln K(q(t)) - \ln x(t-\tau))dt + \alpha(q(t))x(t)dw(t), \quad (2.108)$$

sa početnim uslovom

$$x_0 = \{\xi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in \mathcal{C}, \quad q(0) = i_0. \quad (2.109)$$

Sistem (2.108) funkcioniše na sledeći način: ako je $q(0) = i_0$, sistem zadovoljava jednačinu (2.107) za $i = i_0$, sve do trenutka τ_1 kada lanac Markova prelazi iz stanja i_0 u i_1 . Tada se sistem ponaša kao jednačina (2.107) za $i = i_1$ do trenutka τ_2 kada lanac Markova prelazi iz stanja i_1 u stanje i_2 , itd. Sistem će nastaviti da menja režime sve dok lanac Markova prelazi iz jednog stanja u drugo. Stoga se sistem (2.108) može posmatrati kao sistem jednačina (2.107) koje se smenjuju izmedju sebe u skladu sa režimima lanca Markova.

Za lanac Markova $q(t)$ pretpostavlja da je ergodičan.

Definicija 2.4.1 ([29]) *Lanac Markova je ergodičan lanac ako je verovatnoća prelaza iz svakog stanja u svako drugo stanje pozitivna (ne obavezno u jednom koraku).*

Pored uvedenih pretpostavki, za lanac Markova $q(t)$ se pretpostavlja i da je ireducibilan. Pojam ireducibilnosti se u literaturi najčešće poistovećuje sa pojmom ergodičnosti (videti [29]). To znači da se za svako $i, j \in \mathbb{S}$ mogu naći brojevi $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{S}$ takvi da je $q_{i,i_1}q_{i_1,i_2}\dots q_{i_k,j} > 0$. Algebarska interpretacija ireducibilnosti podrazumeva da je $\text{rang}(\Gamma) = n - 1$. Pod ovim uslovima lanac Markova ima

jedinstvenu stacionarnu raspodelu $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. Ova raspodela se određuje iz linearne jednačine

$$\pi\Gamma = 0,$$

pri čemu je

$$\sum_{i=1}^n \pi(i) = 1, \quad \text{i} \quad \pi(i) > 0, \quad \text{za svako } i \in \mathbb{S}.$$

U nastavku ovog poglavlja se dokazuju osnovne osobine modela (2.108).

Egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja

Da bi se pokazalo da jednačina (2.108) ima jedinstveno globalno pozitivno rešenje i u ovom delu de primenjuje slična metodologija kao pri dokazivanju egzistencije i jedinstvenosti globalnog pozitivnog rešenja jednačine (2.64) u Poglavlju 2.4.2. Naime, smenom $y = \ln x$, pomoću formule Itôa se dolazi do stohastičke diferencijalne jednačine

$$dy(t) = \left[r(i) (\ln K(i) - y(t-\tau)) - \frac{\alpha^2(i)}{2} \right] dt + \alpha(i) dw(t), \quad (2.110)$$

sa početnim uslovom

$$y_0 = \ln x_0 = \{\zeta(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in \mathcal{C}, \quad q(0) = i_0. \quad (2.111)$$

Koeficijenti jednačine (2.110) kao i koeficijenti jednačine (2.66) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearног rasta, za svako $i \in \mathbb{S}$, što znači da za bilo koji početni uslov (2.111), postoji jedinstveno globalno rešenje $y(t)$. Kako je $y = \ln x$, to jednačina (2.108) ima jedinstveno globalno pozitivno rešenje.

Stabilnost trivijalnog ekvilibrijuma i istrebljenje

Da bi se razmatrala stabilnost u verovatnoći trivijalnog ekvilibrijuma $E_0 = 0$ jednačine (2.108), najpre treba tu jednačinu linearizovati. Na taj način se dobija

$$d\tilde{x}(t) = r(q(t)) \ln K(q(t)) \tilde{x}(t) dt + \alpha(q(t)) \tilde{x}(t) dw(t). \quad (2.112)$$

Da bi se uprostili zapisi u nastavku ovog poglavlja, neka je

$$\check{f} = \min_{1 \leq i \leq n} f(i), \quad \hat{f} = \max_{1 \leq i \leq n} f(i).$$

Sledeća teorema daje dovoljne uslove asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti trivijalnog rešenja jednačine (2.112).

Teorema 2.4.6 *Neka za bilo koji početni uslov (2.109), parametri modela (2.108) zadovoljavaju uslov $\hat{r} < -\frac{\hat{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}}$. Tada je trivijalno rešenje jednačine (2.112) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.*

Dokaz. U dokazu ove teoreme se kreće od iste funkcije Lyapunova kao i u dokazu Teoreme 2.4.1, tj. od funkcije $V = \tilde{x}^2$. S obzirom na činjenicu da V ne zavisi od stanja u kome se nalazi lanac Markova (videti [71]), ovde je

$$\begin{aligned} LV(\tilde{x}(t)) &= 2r(q(t)) \ln K(q(t)) \tilde{x}^2(t) + \alpha^2(q(t)) \tilde{x}^2(t) \\ &\leq -(-2\hat{r} \ln \check{K} - \hat{\alpha}^2) \tilde{x}^2(t). \end{aligned}$$

Uslov $\hat{r} < -\frac{\hat{\alpha}^2}{2 \ln \check{K}}$, obezbeđuje pozitivnost izraza u zagradi u prethodnoj jednakosti, tako da je, na osnovu Teoreme 1.8.2, trivijalno rešenje jednačine (2.112) asimptotski srednje-kvadratno stabilno. \diamond

Teorema 2.4.7 Neka važe uslovi Teoreme 2.4.6. Tada je trivijalno rešenje jednačine (2.108) stabilno u verovatnoći.

Dokaz. Neka je funkcija Lyapunova definisana sa $V = x^2$. Ako se primeni operator L na jednačinu (2.108), dobija se

$$LV(x(t), x(t-\tau)) = 2r(q(t)) \ln K(q(t)) x^2(t) - 2r(q(t)) x^2(t) \ln x(t-\tau) + \alpha^2(q(t)) x^2(t).$$

Primenom nejednakosti $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ i elementarne nejednakosti (1.18), prethodna jednačina postaje

$$\begin{aligned} LV(x(t), x(t-\tau)) &= 2r(q(t)) \ln K(q(t)) x^2(t) - 2r(q(t)) x^2(t) x(t-\tau) + 2r(q(t)) x^2(t) + \alpha^2(q(t)) x^2(t) \\ &\leq 2r(q(t)) \ln K(q(t)) x^2(t) - 2r(q(t)) \varepsilon x^2(t) + \alpha^2(q(t)) x^2(t) \\ &\leq -[-2\hat{r} \ln \check{K} - \hat{\alpha}^2 + 2\hat{r}\varepsilon] x^2(t). \end{aligned}$$

Kako važe uslovi Teoreme 2.4.6, za dovoljno mali pozitivan broj ε , vrednost izraza u zagradi u poslednjoj nejednakosti je pozitivna, čime je pokazana stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja jednačine (2.108). \diamond

Kao i u slučaju modela bez Markovskih prelaza (2.64), i ovde se može zaključiti da uslovi Teoreme 2.4.6, odnosno Teoreme 2.4.7, važe nezavisno od dužine vremenskog intervala τ . Sledeći korak je da se odrede uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja populacije $x(t)$ iz modela (2.108).

Teorema 2.4.8 Neka za parametre modela (2.108) i početni uslov (2.109) važi

$$\frac{-(\ln \check{K} + 1 - \xi(0)) - \sqrt{(\ln \check{K} + 1 - \xi(0))^2 + \check{\alpha}^2 I}}{I} < \check{r} \leq \hat{r} < 0, \quad (2.113)$$

gde je I definisano u (2.70). Tada dolazi do istrebljenja populacije eksponencijalno sa verovatnoćom jedan.

Dokaz. Primenom nejednakosti $\ln x \leq x - 1$, $x > 0$ i elementarne nejednakosti (1.18), uz uslov $\hat{r} < 0$, jednačina (2.108) se transformiše u

$$\begin{aligned} dx(t) &\leq [r(q(t))x(t)(\ln K(q(t)) + 1) - r(q(t))x(t)x(t-\tau)] dt + \alpha(q(t))x(t) dw(t) \\ &\leq \left[r(q(t))x(t)(\ln K(q(t)) + 1) - \frac{r(q(t))}{2}x^2(t) - \frac{r(q(t))}{2}x^2(t-\tau) \right] dt \\ &\quad + \alpha(q(t))x(t) dw(t). \end{aligned}$$

Kako je $dx(t) \leq d \left[x(t) - \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t r(q(s))x^2(s)ds \right] \leq d \left[x(t) - \frac{\check{r}}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s)ds \right]$, može se zaključiti da je

$$\begin{aligned} x(t) &\leq x(t) - \frac{\check{r}}{2} \int_{t-\tau}^t x^2(s)ds \\ &\leq \xi(0) - \frac{\check{r}}{2} I + \int_0^t x(s)(r(q(s))(\ln K(q(s)) + 1) - \check{r}x(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(q(s))x(s)dw(s). \end{aligned}$$

Stohastička diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} dX(t) &= [r(q(t))X(t)(\ln K(q(t)) + 1) - \check{r}X^2(t)]dt + \alpha(q(t))X(t)dw(t), \\ X_0 &= \xi(0) - \frac{\check{r}}{2}I, \quad q(0) = i_o, \end{aligned}$$

je efektivno rešiva, a njeno rešenje je oblika

$$X(t) = e^{\int_0^t A(q(s))ds + \int_0^t \alpha(q(s))dw(s)} \left[\frac{1}{X_0} + \check{r} \int_0^t e^{\int_0^s A(q(v))dv + \int_0^s \alpha(q(v))dw(v)} ds \right]^{-1},$$

gde je $A(q(t)) = r(q(t))(\ln K(q(t)) + 1) - \frac{\alpha^2(q(t))}{2}$. Neka je $\bar{A} = \sum_{i=1}^n \pi(i)A(i)$. Kao i u dokazu Teoreme 2.4.3, ocenjuje se $1/X(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(t)} &= \frac{1}{X_0} e^{-\int_0^t A(q(s))ds + \int_0^t \alpha(q(s))dw(s)} \\ &\quad + \check{r} e^{-\int_0^t A(q(s))ds + \int_0^t \alpha(q(s))dw(s)} \int_0^t e^{\int_0^s A(q(v))dv - \int_0^s \alpha(q(v))dw(v)} ds \\ &\geq \frac{1}{X_0} e^{-\sum_{i=1}^n \pi(i)A(i)t + \check{\alpha}w(t)} - \frac{\check{r}}{\hat{A}} e^{-\sum_{i=1}^n \pi(i)A(i)t + \hat{\alpha}w(t) - \check{\alpha} \min_{0 \leq u \leq t} w(u)} (1 - e^{\hat{A}t}) \\ &\geq \frac{1}{X_0} e^{-\bar{A}t + \check{\alpha}w(t)} - \frac{\check{r}}{\hat{A}} e^{-\bar{A}t + \check{\alpha}(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u))} \\ &\geq e^{-\bar{A}t + \check{\alpha}(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u))} \left[\frac{1}{X_0} - \frac{\check{r}}{\hat{A}} \right]. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodne nejednakosti je

$$-\ln X(t) \geq -\bar{A}t + \check{\alpha}(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u)) + \ln \left[\frac{1}{X_0} - \frac{\check{r}}{\hat{A}} \right],$$

odnosno

$$\ln X(t) \leq \bar{A}t - \alpha(w(t) - \min_{0 \leq u \leq t} w(u)) - \ln \left[\frac{1}{X_0} - \frac{\check{r}}{\hat{A}} \right].$$

Ovde treba primetiti da je na osnovu uslova (2.113) logaritamska funkcija na desnoj strani prethodne nejednakosti dobro definisana. Zaista, kako je X_0 pozitivno, a \check{r} i \hat{A} su negativne konstante, na osnovu uslova (2.113) važi da je $\hat{A} - \check{r}X_0 < 0$. Kako

je $\ln x(t) \leq \ln X(t)$, iz prethodne nejednakosti i na osnovu strogog zakona velikih brojeva po kome je $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = 0$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\min_{0 \leq u \leq t} w(u)}{t} = 0$, dobija se da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \bar{A}.$$

Kako je na osnovu uslova (2.113) $\bar{A} = \sum_{i=1}^n \pi(i)A(i) = \sum_{i=1}^n \pi(i)r(i)(\ln K(i) + 1) - \frac{\check{\alpha}^2(i)}{2} \leq \hat{r}(\ln \hat{K} + 1) - \frac{\check{\alpha}^2}{2} < 0$, teorema je dokazana. \diamond

Perzistentnost

U ovom delu disertacije su navedene teoreme koje daju uslove pod kojima je populacija iz modela (2.108) perzistentna u srednjem. S obzirom na činjenicu da se dokazi ovih teorema dobijaju praćenjem procedure iz dokaza Teoreme 2.4.4, odnosno Teoreme 2.4.5 i Teoreme 2.4.8, teoreme su navedene bez dokaza.

Teorema 2.4.9 *Neka parametri modela (2.108) i početni uslov (2.109) zadovoljavaju bilo koji od uslova:*

(i)

$$\begin{aligned} \check{\alpha}^2 &< \frac{4}{I}\xi(0)(\ln \check{K} + 1), \\ \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)} &< \check{r} \leq \hat{r} < \min \left\{ \frac{2 + \check{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}}, \frac{2\xi(0)}{I} \right\}; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \xi(0) &< \ln \check{K} - 1, \\ I &< \frac{\ln^2 \check{K} - (\xi(0) + 1)^2}{2}, \\ \max \left\{ \frac{4}{I}\xi(0)(\ln \check{K} + 1), \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2 \right\} \\ &< \check{\alpha}^2 < \frac{1}{I}(\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2, \\ \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)} &< \check{r} \leq \hat{r} < \frac{2 + \check{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}}; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \xi(0) &< \frac{\ln \check{K}(\ln \check{K} + 1)}{\ln \hat{K} + 2}, \\ I &< (\ln \check{K} + 1)(\ln \check{K} - \xi(0)) - \xi(0), \\ \frac{4}{I}\xi(0)(\ln \check{K} + 1) &< \check{\alpha}^2 < \min \left\{ \frac{1}{I}(\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0) + 1 + \sqrt{(\xi(0) + 1)^2 + 2I}) \right) - 2, \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0) + 1 + \ln \check{K}) \right) - 2 \right\}, \\ \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)} &< \check{r} \leq \hat{r} < r_1; \end{aligned} \tag{2.114}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{2}-1) \ln \check{K} - 1 < \xi(0) < \ln \check{K}, \\
& \max \left\{ 0, \frac{\ln^2 \check{K} - (\xi(0)+1)^2}{2} \right\} < I < \min \left\{ \ln \check{K}(\xi(0)+1), 2(\ln \check{K}+1)(\ln \check{K} - \xi(0)) \right\}, \\
& \max \left\{ \frac{4}{I} \xi(0)(\ln \check{K} + 1), \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0)+1 + \ln \check{K}) \right) - 2 \right\} < \check{\alpha}^2 \\
& < \min \left\{ \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0)+1 + \sqrt{(\xi(0)+1)^2 + 2I}) \right) - 2, \frac{1}{I} (\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2 \right\},
\end{aligned}$$

i uslov (2.114);

(v)

$$\begin{aligned}
& \xi(0) < \ln \check{K} + 1, \\
& I > \max \left\{ 0, \frac{\ln^2 \check{K} - (\xi(0)+1)^2}{2} \right\}, \\
& \max \left\{ \frac{4}{I} \xi(0)(\ln \check{K} + 1), \frac{2}{I} \left(\ln \hat{K}(\xi(0)+1 + \sqrt{(\xi(0)+1)^2 + 2I}) \right) - 2 \right\} \\
& < \check{\alpha}^2 < \frac{1}{I} (\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2, \\
& \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)} < \check{r} \leq \hat{r} < r_1 \bigvee r_2 < \check{r} \leq \hat{r} < \frac{2 + \check{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}};
\end{aligned} \tag{2.115}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
& \xi(0) > \ln \check{K} + 1, \\
& \text{uslov (2.115)}, \\
& \max \left\{ \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)}, r_2 \right\} < \check{r} \leq \hat{r} < \frac{2 + \check{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}};
\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}
& \check{\alpha}^2 > \frac{1}{I} (\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2, \\
& \frac{\check{\alpha}^2}{2(\ln \check{K} + 1)} < \check{r} \leq \hat{r} < \frac{2 + \check{\alpha}^2}{2 \ln \hat{K}},
\end{aligned}$$

gde je I definisano u (2.70), dok je

$$r_{1,2} = \frac{\ln \check{K} + 1 + \xi(0) \mp \sqrt{(\ln \check{K} + 1 + \xi(0))^2 - \check{\alpha}^2 I}}{I}.$$

Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} = 0 \quad s.i.$$

Teorema 2.4.10 Ako početni uslov (2.109) i parametri modela (2.108) zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4.9, populacija je perzistentna u srednjem.

Glava 3

Stohastički epidemiološki modeli

Nastanak i širenje razlicitih bolesti je tema koja se već godinama proučava u literaturi. Mnoge studije su posvećene modelima kojima bi se tok odredjene bolesti najrealnije opisao, jer bi tada mogle da se predvide dalje faze širenja bolesti. Mogućnost predviđanja bolesti je jako značajna jer bi omogućila naučnicima da izoluju određenu bolest i povećaju stopu uništenja te bolesti. Modeliranje se koristi da bi se ispitati mehanizmi kojima se bolest širi, da bi se predviđao dalji tok razvoja bolesti i da bi se razvile strategije za kontrolu bolesti.

Začetnikom matematičkog modeliranja širenja bolesti se smatra dansko-švajcarski fizičar Daniel Bernoulli, koji je 1766. godine matematičkim modelom opisao širenje malih boginja. Ubrzo zatim su i drugi fizičari počeli da se bave matematičkim modelima u epidemiologiji. Pre svih, izdvajaju se A. G. McKendrick i W. O. Kermack [50], koji su izložili jednostavan deterministički model kojim se uspešno opisivalo ponašanje većine registrovanih epidemijskih bolesti. U svom radu, autori su populaciju osoba koje su izložene nekoj bolesti podelili u tri podklase: podložni bolesti (susceptible), zaraženi (infected) i oporavljeni (recovered). Ovakav tip epidemioloških modela se naziva SIR model. Osnovna prepostavka kod ovog tipa epidemioloških modela je da oporavljeni jedinke stiču trajni imunitet na bolest. Sa druge strane, ako oporavljeni jedinke ne stiču trajni imunitet na bolest, posle oporavka one opet pripadaju klasi podložnih jedinki, pa se dobija SIS epidemiološki model. Kombinacija ova dva tipa epidemioloških modela je SIRS model, kod koga oporavljeni jedinke mogu da steknu trajni imunitet na bolest i ostanu u klasi oporavljenih, ali isto tako mogu i da predju u klasu podložnih jedinki. Ako se u podelu populacije uključe i jedinke koje su izložene bolesti (exposed) dobijaju se odgovarajući SEIR i SEIS modeli. Postoji izvestan broj bolesti kod kojih se jedinke radaju sa urođenim pasivnim imunitetom na njih, a koji su nasledile od majke. Za takve bolesti dobijaju se odgovarajući MSIR, MSEIR i MSEIS modeli. Većina ovih modela je razmatrana u determinističkom slučaju. Deterministički modeli se najčešće koriste kada se razmatraju velike populacije.

S obzirom na činjenicu da parametri epidemioloških modela mogu da variraju tokom vremena na slučajan način, a zbog izloženosti ovih modela velikom broju nepredvidivih faktora iz okruženja, stohastički epidemiološki modeli daju realniju sliku stvarnosti. Posebno su od velikog značaja u slučajevima kada se radi sa malim populacijama jer su kod njih varijacije parametara modela izraženije. Zbog toga se

u ovom delu disertacije razmatraju upravo stohastički epidemiološki modeli.

U Poglavlju 3.1 se razmatra stabilnost endemskog ekvilibrijuma stohastičkih modela za širenje direktno prenosivih bolesti bez i sa kašnjenjem, pri čemu oba modela pripadaju klasi SIR modela. Poglavlje 3.2 je posvećeno stabilnosti endemskog ekvilibrijuma stohastičkog modela sa kašnjenjem koji opisuje širenje malarije. Ovaj model spada u klasu SIS modela. Rezultati predstavljeni u ovoj glavi su originalni naučni rezultati koji su objavljeni u radovima [44] i [58].

3.1 Stohastički model širenja direktno prenosivih bolesti

Prenosive bolesti su bolesti koje izazivaju zaraženi mikrobi. Njih do podložnih ljudi prenose insekti tako što im sisaju krv. Obično su prenosioci bolesti beskičmenjaci, najčešće insekti, a redje to mogu biti i kičmenjaci, kao lisice, rakuni, pacovi, koji ljudima prenose bolest. Ipak, najznačajniji prenosioci bolesti su komarci i krpelji.

Najveći broj prenosivih bolesti opstaje u prirodi tako što koristi životinje kao domaćine. Međutim, postoje i bolesti, kao što je malarija, čiji su domaćini ljudi. Prenosive bolesti su najrasprostranjenije u tropskim i subtropskim područjima, a redje se javljaju u umerenim klimatskim zonama. Ipak, klimatske promene su doprinele činjenici da se neke prenosive bolesti, kao što su malarija i žuta groznica, sve češće javljaju i u umerenim zonama. Postoje različiti načini za ispoljavanje prenosivih bolesti. Parazitske i bakteriološke bolesti, kao što je malarija, se javljaju sa visokom učestalošću, ali ne izazivaju epidemije velikih razmera. Jedini izuzetak je kuga. Sa druge strane, mnoga virusna oboljenja, kao što su žuta groznica i denga, izazivaju veće epidemije.

3.1.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Prenosive bolesti, posebno malarija, su proučavane od strane velikog broja matematičara. Najzastupljeniji su radovi u kojima se širenje bolesti opisuje determinističkim modelima, kao što su radovi [13, 87, 88, 99, 101]. Ipak, kao što je već pomenuto, u slučajevima kada se radi sa malim populacijama, realnije rezultate daju stohastički modeli. U svom radu E. Tornatore, S. M. Bucellato i P. Vetro [98] su razmatrali stabilnost ekvilibrijuma u kome nema bolesti za stohastički SIR, a Q. Lu [67] za SIRS epidemiološki model. Sa druge strane, J. Yu, D. Jiang i N. Shi [110] su ispitivali stabilnost endemskog ekvilibrijuma SIR modela. E. Beretta, V. Kolmanovskii i L. Shaikhet [7] su u SIR model uveli i kašnjenje i odredili uslove za parametre modela pod kojima je rešenje takvog stohastičkog modela stabilno u verovatnoći. Međutim, u svim ovim radovima se razmatra samo populacija domaćina bolesti, a ne i interakcija između domaćina i prenosioca.

Da bi se došlo do stohastičkog modela koji razmatra interakciju domaćina i prenosioca bolesti, ovde će najpre ukratko biti izložen deterministički model koji su formulisali H. M. Wei, X. Z. Li i M. Martcheva [101].

U ovom modelu ukupna populacija domaćina u trenutku t je $N_1(t)$ i podeljena je na podklase jedinki koje su podložne bolesti $S(t)$, zaražene $I(t)$, i oporavljene

$R(t)$. Osnovne pretpostavke modela su da u populaciji domaćina ne dolazi do vertikalnog prenošenja bolesti, tj. da su sve novorodjene jedinke podložne bolesti, i da sve oporavljenе jedinke stiču trajni imunitet na bolest. Dakle, radi se o SIR epidemiološkom modelu. Ukupna populacija prenosica u trenutku t označena sa $N_2(t)$, je podeljena na jedinke koje nose bolest $V(t)$, i one koje su podložne bolesti $M(t)$. Kao i kod populacije domaćina, i kod populacije prenosica se smatra da ne dolazi do vertikalnog prenošenja bolesti. Ipak, za razliku od domaćina, jedinke prenosica koje se zaraze bolešću ne mogu se oporaviti, tj. nose bolest do kraja života.

Dinamika obe populacije (i domaćina i prenosica) je data sistemom

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= b_1 - \lambda_1 S(t)I(t) - \lambda_2 S(t)V(t) - \mu_1 S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda_1 S(t)I(t) + \lambda_2 S(t)V(t) - (\gamma + \mu_1)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu_1 R(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} &= b_2 - \lambda_3 M(t)I(t) - \mu_2 M(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \lambda_3 M(t)I(t) - \mu_2 V(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, $M(0) = M_0$ i $V(0) = V_0$. Parametri modela (3.1) su opisani na sledeći način:

λ_1 - stopa direktnog prenosa,

λ_2 - stopa po kojoj se domaćin zarazi nakon uboda zaraženog prenosica,

λ_3 - stopa po kojoj se prenosioč zarazi nakon uboda zaraženog domaćina,

μ_1 - stopa smrtnosti domaćina,

μ_2 - stopa smrtnosti prenosica,

b_1 - stopa radjanja domaćina,

b_2 - stopa radjanja prenosica,

γ - stopa oporavka domaćina po glavi stanovnika,

gde su $\gamma > 0$, $b_i > 0$, $\mu_i > 0$, za $i = 1, 2$ i $\lambda_j > 0$, za $j = 1, 2, 3$. Kako λ_1 predstavlja stopu direktnog prenosa bolesti, može se zaključiti da je ovakav način pojave infekcije predstavljen izrazom $\lambda_1 S(t)I(t)$. Takodje, izraz $\lambda_2 S(t)V(t)$ predstavlja pojavu bolesti u populaciji domaćina, s obzirom da je λ_2 stopa po kojoj se domaćin zarazi nakon uboda zaraženog prenosica. Slično, kako λ_3 predstavlja stopu po kojoj se prenosioč zarazi nakon uboda zaraženog domaćina, izraz $\lambda_3 M(t)I(t)$ predstavlja pojavu infekcije u populaciji prenosica.

Jasno je da je $N_1(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Sabiranjem prve tri jednačine iz (3.1) dobija se diferencijalna jednačina $N'_1(t) = b_1 - \mu_1 N_1(t)$. Na sličan način, $N_2(t) = M(t) + V(t)$, gde je $N_2(t)$ rešenje diferencijalne jednačine $N'_2(t) = b_2 - \mu_2 N_2(t)$ dobijene sabiranjem četvrte i pete jednačine sistema (3.1). S obzirom da je $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = \frac{b_1}{\mu_1}$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} N_2(t) = \frac{b_2}{\mu_2}$, bez gubljenja opštosti, Wei i ostali [101] su pretpostavili da su ukupne populacije domaćina i prenosica konstantne, tj. $N_1(t) = \frac{b_1}{\mu_1}$ i $N_2(t) = \frac{b_2}{\mu_2}$, za svako $t \geq 0$, pod uslovom da je $S_0 + I_0 + R_0 = \frac{b_1}{\mu_1}$ i

$M_0 + V_0 = \frac{b_2}{\mu_2}$. Tada, kako je

$$R(t) = \frac{b_1}{\mu_1} - (S(t) + I(t)), \quad M(t) = \frac{b_2}{\mu_2} - V(t),$$

sistem (3.1) se svodi na sistem

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= b_1 - \lambda_1 S(t)I(t) - \lambda_2 S(t)V(t) - \mu_1 S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda_1 S(t)I(t) + \lambda_2 S(t)V(t) - (\gamma + \mu_1)I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V(t) \right) I(t) - \mu_2 V(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ i $V(0) = V_0$. Kako rešenja sistema (3.2) predstavljaju broj jedinki populacije, ona treba na budu nenegetativna. Šta više, rešenja ovog sistema treba da se nalaze u oblasti

$$\Gamma = \left\{ (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq S + I \leq \frac{b_1}{\mu_1}, 0 \leq V \leq \frac{b_2}{\mu_2}, S \geq 0, I \geq 0 \right\}. \quad (3.3)$$

Za sistem (3.2), kao i za bilo koji epidemiološki sistem uopšte, važna je i veličina koja se naziva *reprodukcioni broj* (reproduction number) koji je za razmatrani sistem dat sa

$$\mathcal{R}_0 = \frac{b_1}{\mu_1} \left(\frac{\lambda_2}{\gamma + \mu_1} \frac{\lambda_3}{\mu_2} \frac{b_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_1}{\gamma + \mu_1} \right).$$

Reprodukciono broj \mathcal{R}_0 predstavlja očekivani broj novih slučajeva infekcije medju domaćinima i prenosiocima koje je izazvao jedan zaraženi domaćin. Ovaj broj određuje broj ekilibrijuma sistema (3.2). Naime, ako je $\mathcal{R}_0 \leq 1$, sistem u oblasti Γ ima samo ekilibrijum $E_0 = (\frac{b_1}{\mu_1}, 0, 0)$ u kome nema bolesti. Međutim, ako je $\mathcal{R}_0 > 1$, pored ekilibrijuma E_0 , sistem (3.2) ima i pozitivni endemski ekilibrijum $E^* = (S^*, I^*, V^*)$, gde je

$$S^* = \frac{b_1 - (\gamma + \mu_1)I^*}{\mu_1} \quad V^* = \frac{\lambda_3 b_2 I^*}{\mu_2(\lambda_3 I^* + \mu_2)},$$

a I^* predstavlja rešenje jednačine

$$\frac{b_1 - (\gamma + \mu_1)I^*}{\mu_1} \left[\frac{\lambda_1}{\gamma + \mu_1} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 b_2}{\mu_2(\gamma + \mu_1)(\lambda_3 I^* + \mu_2)} \right] = 1. \quad (3.4)$$

Wei i ostali [101] su pokazali da, ako je $\mathcal{R}_0 \leq 1$, tada je ekilibrijum E_0 globalno asimptotski stabilan, tj. bolest izumire; ako je $\mathcal{R}_0 > 1$, ekilibrijum E^* je lokalno asimptotski stabilan u unutrašnjosti oblasti (3.3).

Rezultati koji su izloženi u nastavku Poglavlja 3.1 su objavljeni u radu [44].

3.1.2 Stohastički model

U ovom delu se u sistem (3.2) uvode stohastičke perturbacije da bi se videlo kako promene u okruženju utiču na stabilnost endemskog ekvilibrijuma ovog sistema. Sistem (3.2) se perturbuje u okolini ekvilibrijuma E^* Gaussovim belim šumom, pri čemu je intenzitet perturbacija proporcionalan razlici slučajnih procesa S , I , V i konstanti S^* , I^* , V^* , respektivno. Na taj način se dobija stohastički model za širenje direktno prenosivih bolesti oblika

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= b_1 - \lambda_1 S(t)I(t) - \lambda_2 S(t)V(t) - \mu_1 S(t) + \sigma_1(S(t) - S^*)\dot{w}_1(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda_1 S(t)I(t) + \lambda_2 S(t)V(t) - (\gamma + \mu_1)I(t) + \sigma_2(I(t) - I^*)\dot{w}_2(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V(t) \right) I(t) - \mu_2 V(t) + \sigma_3(V(t) - V^*)\dot{w}_3(t),\end{aligned}\quad (3.5)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ i $V(0) = V_0$, dok $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ predstavlja trodimenzionalno standardno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja zadovoljava uobičajene uslove, dok su σ_1 , σ_2 i σ_3 realne konstante.

Pretpostavlja se da je $\mathcal{R}_0 > 1$, da bi se obezbedilo postojanje endemskog ekvilibrijuma E^* . Za proučavanje stabilnosti trivijalnog rešenja razmatranog sistema (3.5), neophodno ga je centrirati oko ekvilibrijuma E^* . U tom smislu se uvode nove promenljive, $x = S - S^*$, $y = I - I^*$ i $z = V - V^*$ i dobija se sistem

$$\begin{aligned}dx(t) &= [-(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1)x(t) - \lambda_1 S^*y(t) - \lambda_2 S^*z(t) \\ &\quad - \lambda_1 x(t)y(t) - \lambda_2 x(t)z(t)] dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= [(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*)x(t) - (\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*)y(t) + \lambda_2 S^*z(t) \\ &\quad + \lambda_1 x(t)y(t) + \lambda_2 x(t)z(t)] dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t), \\ dz(t) &= \left[\lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) y(t) - (\lambda_3 I^* + \mu_2)z(t) - \lambda_3 y(t)z(t) \right] dt \\ &\quad + \sigma_3 z(t)dw_3(t),\end{aligned}\quad (3.6)$$

sa početnim uslovom $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ i $z(0) = z_0$. Proučavanje stabilnosti endemskog ekvilibrijuma E^* sistema (3.5) je ekvivalentno proučavanju stabilnosti trivijalnog rešenja sistema (3.6).

Kao što je već pomenuto u Poglavlju 1.4, mnogi problemi koji se tiču stabilnosti ekvilibrijuma nelinearnih sistema se svode na razmatranje stabilnosti ekvilibrijuma odgovarajućih linearizovanih sistema. Linearizacijom sistema (3.6) dobija se sistem

$$\begin{aligned}d\tilde{x}(t) &= [-(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1)\tilde{x}(t) - \lambda_1 S^*\tilde{y}(t) - \lambda_2 S^*\tilde{z}(t)] dt + \sigma_1 \tilde{x}(t)dw_1(t), \\ d\tilde{y}(t) &= [(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*)\tilde{x}(t) - (\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*)\tilde{y}(t) + \lambda_2 S^*\tilde{z}(t)] dt + \sigma_2 \tilde{y}(t)dw_2(t), \\ d\tilde{z}(t) &= \left[\lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) \tilde{y}(t) - (\lambda_3 I^* + \mu_2)\tilde{z}(t) \right] dt + \sigma_3 \tilde{z}(t)dw_3(t).\end{aligned}\quad (3.7)$$

U nastavku se metodom funkcija Lyapunova dobiju dovoljni uslovi stohastičke asimptotske stabilnosti trivijalnog rešenja linearizovanog sistema (3.7).

Teorema 3.1.1 Neka je $\mathcal{R}_0 > 1$ i neka parametri sistema (3.6) zadovoljavaju uslov

$$\lambda_1 S^* < \mu_2. \quad (3.8)$$

Za proizvoljan broj \hat{c} za koji važi da je

$$\max\{c_1, c_*\} < \hat{c} < \min\{c_2, \bar{c}\}, \quad (3.9)$$

neka parametri σ_1, σ_2 i σ_3 zadovoljavaju uslove

$$0 \leq \sigma_1^2 < 2\mu_1 + \frac{2\hat{j}(\gamma+2\mu_1)}{2\hat{m} + \lambda_3 I^* + \mu_1 - \mu_2 - \frac{2\mu_2(\hat{m}-\mu_2)}{\hat{c}\lambda_2 S^*}}, \quad (3.10)$$

$$0 \leq \sigma_2^2 < \frac{2\hat{n}}{\gamma+2\mu_1+\hat{j}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\hat{m} + \lambda_3 I^* - \frac{2\mu_2(\hat{m}-\mu_2)}{\hat{c}\lambda_2 S^*}} \right) \quad (3.11)$$

$$0 \leq \sigma_3^2 < 2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - \hat{c}\lambda_2 S^*, \quad (3.12)$$

gde je

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \mu_2 + \gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*, \quad \hat{j} = \lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*, \quad \hat{n} = (\hat{m} - \mu_2)(\gamma + 2\mu_1) + \hat{j}(\gamma + \mu_1), \\ c_* &= \frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \mu_2)}, \quad \bar{c} = \frac{2(\lambda_3 I^* + \mu_2)}{\lambda_2 S^*}, \\ c_{1,2} &= \frac{\hat{m} + \lambda_3 I^* \pm \sqrt{(\hat{m} + \lambda_3 I^* - 2\mu_2)^2 + 4\lambda_3 I^* \mu_2}}{\lambda_2 S^*}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tada je trivijalno rešenje sistema (3.7) stohastički asimptotski stabilno.

Dokaz. S obzirom na složenost sistema (3.7) u ovom dokazu se ne može primeniti neka standardna funkcija Lyapunova, nego se razmatra funkcija $U(\mathbf{x})$ oblika

$$U(\mathbf{x}) = a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 + c\tilde{y}\tilde{z} + d(\tilde{x} + \tilde{y})^2,$$

pri čemu je $\mathbf{x} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$ trodimenzionalni vektor, a a, b, c, d su nenegativne konstante koje će biti izabrane kasnije. Primenom operatora L na $U(\mathbf{x})$, dobija se

$$\begin{aligned} LU &= 2[(a+d)x(t) + d \cdot y(t)] \\ &\times [-(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1)x(t) - \lambda_1 S^* y(t) - \lambda_2 S^* z(t) - \lambda_1 x(t)y(t) - \lambda_2 x(t)z(t)] \\ &+ 2 \left[d \cdot x(t) + (b+d)y(t) + \frac{c}{2}z(t) \right] \\ &\times [(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*)x(t) + (\lambda_1 S^* - \gamma - \mu_1)y(t) + \lambda_2 S^* z(t) + \lambda_1 x(t)y(t) + \lambda_2 x(t)z(t)] \\ &+ 2 \left[\frac{c}{2}y(t) + z(t) \right] \left[\lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) y(t) - (\lambda_3 I^* + \mu_2)z(t) - \lambda_3 y(t)z(t) \right] \\ &+ (a+d)\sigma_1^2 x^2(t) + (b+d)\sigma_2^2 y^2(t) + \sigma_3^2 z^2(t). \end{aligned}$$

Iz jednačine (3.4) se jednostavnim izvodjenjem može dobiti da je $\lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) = \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*}$. Dalje je

$$LU = [-2a(\hat{j} + \mu_1) - 2d\mu_1 + (a+d)\sigma_1^2]\tilde{x}^2(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-2b(\hat{m} - \mu_2) - 2d(\gamma + \mu_1) + c \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} + (b+d)\sigma_2^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\
& + [-2(\lambda_3 I^* + \mu_2) + c\lambda_2 S^* + \sigma_3^2] \tilde{z}^2(t) + 2[-a\lambda_1 S^* + b\hat{j} - d(\gamma + 2\mu_1)] \tilde{x}(t) \tilde{y}(t) \\
& + [-2a\lambda_2 S^* + c\hat{j}] \tilde{x}(t) \tilde{z}(t) + \left[2b\lambda_2 S^* + 2 \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} - c(\hat{m} + \lambda_3 I^*) \right] \tilde{y}(t) \tilde{z}(t).
\end{aligned}$$

Da bi se anulirale vrednosti u zagradama koje stoje uz $\tilde{x}\tilde{y}$, $\tilde{x}\tilde{z}$ i $\tilde{y}\tilde{z}$, konstante a , b i d se biraju na sledeći način:

$$\begin{aligned}
a &= c \frac{\hat{j}}{2\lambda_2 S^*}, \quad b = \frac{c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^*) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2(\lambda_2 S^*)^2}, \\
d &= \frac{\hat{j}[c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \lambda_1 S^*) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)]}{2(\lambda_2 S^*)^2(\gamma + 2\mu_1)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Uslovi (3.8) i (3.9), tj. $c > c_* > \frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \lambda_1 S^*)}$, obezbedjuju pozitivnost konstanti a , b i d . Jednostavnom proverom se takodje dobija da je $\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^* > 0$, što znači da je $\hat{m} > \mu_2$. Stoga,

$$\begin{aligned}
LU &\leq \tag{3.15} \\
&- \hat{j} \frac{[c\lambda_2 S^*(2\hat{m} + \lambda_3 I^* + \mu_1 - \mu_2) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)](2\mu_1 - \sigma_1^2) + 2c\lambda_2 S^*\hat{j}(\gamma + 2\mu_1)}{2(\lambda_2 S^*)^2(\gamma + 2\mu_1)} \tilde{x}^2(t) \\
&- \frac{2\hat{n}[c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \mu_2) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)] - (\gamma + 2\mu_1 + \hat{j})[c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^*) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)]\sigma_2^2}{2(\lambda_2 S^*)^2(\gamma + 2\mu_1)} \tilde{y}^2(t) \\
&- [2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^* - \sigma_3^2] \tilde{z}^2(t).
\end{aligned}$$

Na osnovu uslova (3.9) se može zaključiti da je $c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \mu_2) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2) > 0$ i $2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^* > 0$.

Ostalo je još da se opravlja uvodenje ovako definisane funkcije Lyapunova U , tj. da se dokaze njena nenegativnost. Da bi funkcija U bila nenegativna, potrebno je da konstante b i c zadovoljavaju uslov $b > \frac{c^2}{4}$, tj.

$$\frac{c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^*) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2(\lambda_2 S^*)^2} > \frac{c^2}{4}.$$

Ova nejednakost važi ako $c \in (c_1, c_2)$, gde su c_1 i c_2 pozitivne različite konstante definisane u (3.13). Jednostavnim izvodjenjem se može proveriti da je $\bar{c} > c_1$ i $c_2 > c_*$. Dakle, postoji pozitivna konstanta $c = \hat{c}$ iz intervala $(\max\{c_1, c_*\}, \min\{c_2, \bar{c}\})$. Za takav izbor konstante \hat{c} , na osnovu uslova (3.10), (3.11) i (3.12), dobija se da su sve vrednosti u zagradama nejednakosti (3.15) pozitivne. Na osnovu Teoreme 1.4.3, može se zaključiti da je trivijalno rešenje sistema (3.7) stohastički asimptotski stabilno. ◇

Sledećom teoremom se pokazuje stohastička asimptotska stabilnost sistema (3.6).

Teorema 3.1.2 *Neka je $\mathcal{R}_0 > 1$ i neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.1.1. Tada je trivijalno rešenje sistema (3.6) stohastički asimptotski stabilno.*

Dokaz. Na osnovu Teorema 1.4.4 i 3.1.1, da bi se dokazalo tvrdjenje teoreme, dovoljno je pokazati da važi uslov (1.10). U ovom slučaju, leva strana nejednakosti (1.10) je

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-\lambda_1 x y - \lambda_2 x z)^2 + (\lambda_1 x y + \lambda_2 x z)^2 + (-\lambda_3 y z)^2} \\ &= \sqrt{2\lambda_1^2 x^2 y^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 x^2 y z + 2\lambda_2^2 x^2 z^2 + \lambda_3^2 y^2 z^2} \\ &\leq \sqrt{2\lambda_1^2 \varepsilon^2 x^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 \varepsilon^2 x^2 + 2\lambda_2^2 \varepsilon^2 z^2 + \lambda_3^2 \varepsilon^2 y^2} \leq \bar{M} \varepsilon |\mathbf{X}|, \end{aligned}$$

pod uslovom da $\mathbf{X} = (x, y, z)$ pripada okolini $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, za ε koje je dovoljno malo i $\bar{M} = \sqrt{\max\{2\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_2), 2\lambda_2^2, \lambda_3^2\}}$. Kako uslov (1.10) važi, teorema je dokazana. \diamond

3.1.3 Stohastički model sa kašnjenjem

U ovom delu disertacije se u sistem (3.5) uvodi kašnjenje koje predstavlja period inkubacije kod populacije prenosilaca, tj. vreme koje prodje od trenutka kada zdravi prenosilac dodje u kontakt sa zaraženim domaćinom, do trenutka kada se kod prenosioca bolest manifestuje. Dakle, prve dve jednačine modela (3.5) ostaju nepromjenjene. Što se tiče treće jednačine, u trenutku t , samo prenosioci koji su došli u kontakt sa zaraženim domaćinom u trenutku $t - \tau$ i preživeli period inkubacije dužine τ , postaju zaraženi. Dakle, izraz $\lambda_3 M(t)I(t)$, koji opisuje pojavu infekcije u populaciji prenosilaca, postaje $\lambda_3 M(t - \tau)I(t - \tau)$. S obzirom na to da je $M(t) = \frac{b_2}{\mu_2} - V(t)$, dobija se model sa kašnjenjem opisan sistemom

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= b_1 - \lambda_1 S(t)I(t) - \lambda_2 S(t)V(t) - \mu_1 S(t) + \sigma_1(S(t) - S^*)\dot{w}_1(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda_1 S(t)I(t) + \lambda_2 S(t)V(t) - (\gamma + \mu_1)I(t) + \sigma_2(I(t) - I^*)\dot{w}_2(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V(t - \tau) \right) I(t - \tau) - \mu_2 V(t) + \sigma_3(V(t) - V^*)\dot{w}_3(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

sa početnim uslovom $S(\theta) = S_0$, $I(\theta) = I_0$, $V(\theta) = V_0$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Svi parametri ovog modela su isti kao i kod modela (3.5), uz dodatak pozitivne konstante τ koja predstavlja period inkubacije kod populacije prenosilaca.

Sistem (3.16) ima iste ekvilibrijume kao i sistem bez kašnjenja (3.5). Sa istom motivacijom kao i u Poglavlju 3.1.2, i ovde se razmatra stabilnost endemskog ekvilibrijuma E^* u unutrašnjosti zatvorenog skupa Γ definisanog sa (3.3), pod uslovom da je $\mathcal{R}_0 > 1$. Kao i u prethodnom poglavlju, najpre se sistem (3.16) centriira oko ekvilibrijuma E^* smenom promenljivih $S = x + S^*$, $I = y + I^*$ i $V = z + V^*$. Na taj način se dobija sistem

$$\begin{aligned} dx(t) &= [-(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1)x(t) - \lambda_1 S^* y(t) - \lambda_2 S^* z(t) \\ &\quad - \lambda_1 x(t)y(t) - \lambda_2 x(t)z(t)] dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= [(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*)x(t) - (\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*)y(t) + \lambda_2 S^* z(t) \\ &\quad + \lambda_1 x(t)y(t) + \lambda_2 x(t)z(t)] dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$dz(t) = \left[-\mu_2 z(t) + \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) y(t-\tau) - \lambda_3 I^* z(t-\tau) - \lambda_3 y(t-\tau) z(t-\tau) \right] dt + \sigma_3 z(t) dw_3(t).$$

Sledećom teoremom se dokazuje asimptotska srednje-kvadratna stabilnost sistema dobijenog linearizacijom sistema (3.17), tj. sistema

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(t) &= [-(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1) \tilde{x}(t) - \lambda_1 S^* \tilde{y}(t) - \lambda_2 S^* \tilde{z}(t)] dt + \sigma_1 \tilde{x}(t) dw_1(t), \\ d\tilde{y}(t) &= [(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*) \tilde{x}(t) - (\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*) \tilde{y}(t) + \lambda_2 S^* \tilde{z}(t)] dt + \sigma_2 \tilde{y}(t) dw_2(t), \\ d\tilde{z}(t) &= \left[-\mu_2 \tilde{z}(t) + \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) \tilde{y}(t-\tau) - \lambda_3 I^* \tilde{z}(t-\tau) \right] dt + \sigma_3 \tilde{z}(t) dw_3(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Teorema 3.1.3 Neka je $\mathcal{R}_0 > 1$ i neka parametri sistema (3.17) zadovoljavaju uslove

$$\lambda_3 I^* < \mu_2, \quad (3.19)$$

$$\mu_2^2 (\hat{m} - \mu_2)^2 (2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*) (\gamma + 2\mu_1) < \lambda_2 S^* (\mu_2 - \lambda_3 I^*)^2 \hat{k}. \quad (3.20)$$

Za proizvoljne brojeve \hat{E} , \hat{C} za koje važi

$$\max\{E_*, E_1\} < \hat{E} < E_2, \quad (3.21)$$

$$\frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)(\gamma + 2\mu_1)}{\hat{k}} \hat{E}^2 < \hat{C} < \frac{4\lambda_2 S^* (\mu_2 - \lambda_3 I^*) \hat{E} - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^* (2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*)}, \quad (3.22)$$

neka parametri σ_1 , σ_2 i σ_3 zadovoljavaju uslove

$$0 \leq \sigma_1^2 < 2\mu_1 + \frac{2\hat{j}(\gamma + 2\mu_1)}{2\hat{m} - \mu_2 + \mu_1}, \quad (3.23)$$

$$0 \leq \sigma_2^2 < \frac{\hat{k} - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)(\gamma + 2\mu_1) \frac{\hat{E}^2}{\hat{C}}}{\hat{m}(\gamma + 2\mu_1 + \hat{j}) - \hat{j}\lambda_1 S^*}, \quad (3.24)$$

$$0 \leq \sigma_3^2 < 2(\mu_2 - \lambda_3 I^*) - \frac{\lambda_2 S^* (2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*) \hat{C} + 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2\lambda_2 S^* \hat{E}}, \quad (3.25)$$

gde je

$$\begin{aligned} \hat{k} &= (2(\hat{m} - \mu_2)^2 - \lambda_3 I^* \lambda_2 S^*) (\gamma + 2\mu_1) + 2\hat{j}(\hat{m} - \lambda_1 S^*) (\gamma + \mu_1), \\ \hat{q} &= \lambda_2 S^* \hat{k} [\lambda_2 S^* (\mu_2 - \lambda_3 I^*)^2 \hat{k} - \mu_2^2 (\hat{m} - \mu_2)^2 (2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*) (\gamma + 2\mu_1)], \\ E_* &= \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2\lambda_2 S^* (\mu_2 - \lambda_3 I^*)}, \quad E_{1,2} = \frac{\lambda_2 S^* (\mu_2 - \lambda_3 I^*) \hat{k} \pm \sqrt{\hat{q}}}{\lambda_2 S^* (2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*) \mu_2 (\hat{m} - \mu_2) (\gamma + 2\mu_1)}, \end{aligned}$$

a konstante \hat{m} i \hat{j} su definisane u (3.13). Tada je trivijalno rešenje sistema (3.18) asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Dokaz. Da bi se dokazala asimptotska srednje-kvadratna stabilnost sistema (3.18), potrebno je konstruisati odgovarajući funkcional Lyapunova. U tom smislu, neka je $U = V_1 + V_2$ funkcional Lyapunova, pri čemu će V_2 biti izabранo kasnije, dok je

$$V_1 = A\tilde{x}^2 + B\tilde{y}^2 + C\tilde{y}\tilde{z} + D(\tilde{x} + \tilde{y})^2 + E\tilde{z}^2,$$

a A, B, C, D, E su nenegativne konstante koje će biti izabrane u odgovarajućem trenutku. Primenom operatora L na funkciju V_1 se dobija

$$\begin{aligned} LV_1 = & \left[-2A(\hat{j} + \mu_1) - 2D\mu_1 + (A+D)\sigma_1^2 \right] \tilde{x}^2(t) \\ & + \left[-2B(\hat{m} - \mu_2) - 2D(\gamma + \mu_1) + (B+D)\sigma_2^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\ & + \left[-2E\mu_2 + C\lambda_2 S^* + E\sigma_3^2 \right] \tilde{z}^2(t) + \left[-2A\lambda_1 S^* + 2B\hat{j} - 2D(\gamma + 2\mu_1) \right] \tilde{x}(t)\tilde{y}(t) \\ & + \left[-2A\lambda_2 S^* + C\hat{j} \right] \tilde{x}(t)\tilde{z}(t) + [2B\lambda_2 S^* - C\hat{m}] \tilde{y}(t)\tilde{z}(t) \\ & + C \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \tilde{y}(t-\tau)\tilde{y}(t) - C\lambda_3 I^* \tilde{y}(t)\tilde{z}(t-\tau) \\ & + 2E \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \tilde{y}(t-\tau)\tilde{z}(t) - 2E\lambda_3 I^* \tilde{z}(t-\tau)\tilde{z}(t). \end{aligned}$$

Da bi se anulirali izrazi u zagradama koje stoje uz $\tilde{x}\tilde{y}$, $\tilde{x}\tilde{z}$ i $\tilde{y}\tilde{z}$, konstante A, B i D se biraju na sledeći način:

$$A = C \frac{\hat{j}}{2\lambda_2 S^*}, \quad B = C \frac{\hat{m}}{2\lambda_2 S^*}, \quad D = C \frac{\hat{j}(\hat{m} - \lambda_1 S^*)}{2\lambda_2 S^*(\gamma + 2\mu_1)}.$$

Ako se na prethodnu jednakost primeni elementarna nejednakost (1.20), dobija se

$$\begin{aligned} LV_1 \leq & \left[-2A(\hat{j} + \mu_1) - 2D\mu_1 + (A+D)\sigma_1^2 \right] \tilde{x}^2(t) \\ & + \left[-2B(\hat{m} - \mu_2) - 2D(\gamma + \mu_1) + \frac{C}{2} \left(\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} + \lambda_3 I^* \right) + (B+D)\sigma_2^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\ & + \left[-2E \left(\mu_2 - \frac{\lambda_3 I^*}{2} \right) + C\lambda_2 S^* + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} + E\sigma_3^2 \right] \tilde{z}^2(t) \\ & + \left(\frac{C}{2} + E^2 \right) \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \tilde{y}^2(t-\tau) + \left(\frac{C}{2} + E \right) \lambda_3 I^* \tilde{z}^2(t-\tau). \end{aligned}$$

Funkcional V_2 se bira tako da se iz prethodne nejednakosti eliminišu članovi koji sadrže kašnjenje, tj.

$$V_2 = \left(\frac{C}{2} + E^2 \right) \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{y}^2(s) ds + \left(\frac{C}{2} + E \right) \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{z}^2(s) ds.$$

Tada je

$$\begin{aligned} LU = & LV_1 + LV_2 \\ \leq & -C\hat{j} \left[\frac{(\hat{j} + \mu_1)(\gamma + 2\mu_1) + \mu_1(\hat{m} - \lambda_1 S^*)}{\lambda_2 S^*(\gamma + 2\mu_1)} - \frac{(2\hat{m} + \mu_1 - \mu_2)\sigma_1^2}{2\lambda_2 S^*(\gamma + 2\mu_1)} \right] \tilde{x}^2(t) \\ & - \left[C \frac{\hat{k}}{2\lambda_2 S^*(\gamma + 2\mu_1)} - E^2 \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} - \frac{\hat{m}(\gamma + 2\mu_1 + \hat{j}) - \hat{j}\lambda_1 S^*}{2\lambda_2 S^*(\gamma + 2\mu_1)} \sigma_2^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\ & - \left[2E(\mu_2 - \lambda_3 I^*) - C \frac{2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*}{2} - \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} - E\sigma_3^2 \right] \tilde{z}^2(t). \end{aligned}$$

Na osnovu uslova (3.22) je $C \frac{\hat{k}}{2\lambda_2 S^*(\gamma+2\mu_1)} - E^2 \frac{\mu_2(\hat{m}-\mu_2)}{\lambda_2 S^*} > 0$. Dalje, iz (3.19) i (3.20) sledi da je $C > 0$. Uslov (3.19) obezbeđuje pozitivnost konstante E_* , dok uslovi (3.19), (3.22) i $E > E_*$ povlače da je $2E(\mu_2 - \lambda_3 I^*) - C \frac{2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*}{2} - \frac{\mu_2(\hat{m}-\mu_2)}{\lambda_2 S^*} > 0$. Kako je $C < \frac{4\lambda_2 S^*(\mu_2 - \lambda_3 I^*)E - 2\mu_2(\hat{m}-\mu_2)}{\lambda_2 S^*(2\lambda_2 S^* + \lambda_3 I^*)} < \frac{2E\hat{m}}{\lambda_2 S^*}$, to znači da je $4BE > C^2$, što obezbeđuje pozitivnost funkcije V_1 . Uslov (3.22) je zadovoljen za $E_1 < E < E_2$, pri čemu konstante E_1 i E_2 postoje na osnovu uslova (3.20). Jednostavnom proverom se dobija da je $E_* < E_2$, pa je i $\max\{E_*, E_1\} < E_2$ što znači da postoji konstanta $E = \hat{E}$ za koju važi da je $\max\{E_*, E_1\} < \hat{E} < E_2$. Stoga se može izabrati i bilo koja konstanta $C = \hat{C}$ koja zadovoljava uslov (3.22). Sa ovakvim izborom konstanti C i E , na osnovu (3.23), (3.24) i (3.25), sve vrednosti u zagradama u poslednjoj nejednakosti su pozitivne. Dakle, na osnovu Teoreme 1.5.2, trivijalno rešenje sistema (3.18) je asimptotski srednje-kvadratno stabilno. \diamond

Ovde treba naglasiti da sistem (3.17) ima stepen nelinearnosti veći od jedan. Naime, u svojim radovima L. Shaikhet [92, 93] je pokazao da su dovoljni uslovi asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti linearizovanog sistema ujedno i dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći polaznog sistema, ako je njegov stepen nelinearnosti veći od jedan. Dakle, ako važe uslovi (3.19)-(3.25) prethodne teoreme, trivijalno rešenje sistema (3.17) je stabilno u verovatnoći, čime je dokazana sledeća teorema.

Teorema 3.1.4 *Neka je $\mathcal{R}_0 > 1$ i neka su zadovoljeni uslovi (3.19)-(3.25). Tada je trivijalno rešenje sistema (3.17) stabilno u verovatnoći.*

Napomena 3.1.1 Uobičajeno je da se prilikom dokazivanja stabilnosti trivijalnog rešenja stohastičkog modela sa kašnjenjem koristi ista funkcija Lyapunova kao pri dokazivanju stabilnosti trivijalnog rešenja stohastičkog modela bez kašnjenja. Međutim, zbog velikog broja parametara koji figurišu u sistemima (3.5), tj. (3.16), u dokazu Teoreme 3.1.3 nije bilo moguće iskoristiti funkciju Lyapunova konstruisanu u dokazu Teoreme 3.1.1.

Na osnovu uslova (3.19)-(3.25) Teoreme 3.1.3, može se zaključiti da asimptotska srednje-kvadratna stabilnost trivijalnog rešenja sistema (3.18), a samim tim i stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja sistema (3.17), ne zavisi od dužine perioda inkubacije τ . Međutim, ako neki od uslova (3.19) ili (3.20) nije zadovoljen, stabilnost trivijalnog rešenja zavisi od veličine kašnjenja. Sa promenom vrednosti perioda inkubacije, logično je očekivati da se i stabilnost trivijalnog rešenja menja. Ova pojava je poznata pod imenom *promena stabilnosti* (stability switches).

Da bi se pokazala asimptotska srednje-kvadratna stabilnost trivijalnog rešenja sistema (3.18), a kasnije i stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja sistema (3.17), uzimajući u obzir dužinu perioda inkubacije, potrebno je sistem (3.18) napisati u neutralnom obliku. Dakle, sistem (3.18) se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= -(\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^* + \mu_1)\tilde{x}(t) - \lambda_1 S^*\tilde{y}(t) - \lambda_2 S^*\tilde{z}(t) + \sigma_1 \tilde{x}(t)\dot{w}_1(t), \\ \frac{d}{dt}\tilde{y}(t) &= (\lambda_1 I^* + \lambda_2 V^*)\tilde{x}(t) - (\gamma + \mu_1 - \lambda_1 S^*)\tilde{y}(t) + \lambda_2 S^*\tilde{z}(t) + \sigma_2 \tilde{y}(t)\dot{w}_2(t), \\ \frac{d}{dt}\left[\tilde{z}(t) + \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^*\right) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s)ds - \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{z}(s)ds\right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$= \lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) \tilde{y}(t) - (\lambda_3 I^* + \mu_2) \tilde{z}(t) + \sigma_3 \tilde{z}(t) \dot{w}_3(t).$$

U nastavku se dokazuje asimptotska srednje-kvadratna stabilnost sistema (3.26).

Treorema 3.1.5 Neka je $\mathcal{R}_0 > 1$ i neka parametri sistema (3.17) zadovoljavaju uslov (3.8). Za proizvoljan broj \tilde{c} za koji važi

$$\max\{c_1, c_*\} < \tilde{c} < \frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*}, \quad (3.27)$$

neka parametri σ_1, σ_2 i σ_3 zadovoljavaju uslove (3.10)-(3.12). Tada, ako je $\tau < \min\{\tau_0^1, \tau_0^2, \tau_0^3\}$, gde je

$$\begin{aligned} \tau_0^1 &= \frac{\left(2\hat{m} + \lambda_3 I^* + \mu_1 - \mu_2 - \frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\tilde{c}\lambda_2 S^*}\right)(2\mu_1 - \sigma_1^2) + 2\hat{j}(\gamma + 2\mu_1)}{(\lambda_2 S^* \lambda_3 I^* + \mu_2(\hat{m} - \mu_2))(\gamma + 2\mu_1)}, \\ \tau_0^2 &= \frac{\left(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\tilde{c}\lambda_2 S^*}\right)(2\hat{n} - (\gamma + 2\mu_1 + \hat{j})\sigma_2^2) - 2\hat{n}\mu_2}{(\hat{m} - \mu_2)(\gamma + 2\mu_1)\left[\lambda_2 S^* \lambda_3 I^* + \mu_2 \hat{j} + (2\lambda_2 S^* \lambda_3 I^* + \mu_2(2\hat{m} + \lambda_2 S^* - 2\mu_2))\left(\frac{2\mu_2}{\tilde{c}\lambda_2 S^*} - 1\right)\right]}, \\ \tau_0^3 &= \frac{2[2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - \tilde{c}\lambda_2 S^* - \sigma_3^2]}{4\lambda_3 I^*\left(\lambda_3 I^* + \mu_2 + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*}\right) + \frac{2\mu_2^2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} - \tilde{c}\left[\lambda_3 I^*(\hat{m} + 2\lambda_2 S^* - \mu_2 - \hat{j}) + \mu_2(\hat{m} - \mu_2)\right]}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

a konstante $c_*, c_1, \hat{m}, \hat{j}$ i \hat{n} su definisane u (3.13), trivijalno rešenje sistema (3.18) je asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Dokaz. Neka je funkcional Lyapunova V_1 definisan sa

$$\begin{aligned} V_1 &= a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z} \left[\tilde{z}(t) + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) ds - \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{z}(s) ds \right] \\ &\quad + d(\tilde{x} + \tilde{y})^2 + \left[\tilde{z}(t) + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) ds - \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{z}(s) ds \right]^2, \end{aligned}$$

gde su a, b, c, d nenegativne konstante koje će kasnije biti izabrane. Kako je, na osnovu (3.4), $\lambda_3 \left(\frac{b_2}{\mu_2} - V^* \right) = \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*}$, primenom operatora L na sistem (3.26) se dobija

$$\begin{aligned} LV_1 &= \left[-2a(\hat{j} + \mu_1) - 2d\mu_1 + (a+d)\sigma_1^2 \right] \tilde{x}^2(t) \\ &\quad + \left[-2b(\hat{m} - \mu_2) - 2d(\gamma + \mu_1) + c\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} + (b+d)\sigma_2^2 \right] \tilde{y}^2(t) \\ &\quad + \left[-2(\lambda_3 I^* + \mu_2) + c\lambda_2 S^* + \sigma_3^2 \right] \tilde{z}^2(t) \\ &\quad + \left[-2a\lambda_1 S^* + 2b\hat{j} - 2d(\gamma + 2\mu_1) \right] \tilde{x}(t)\tilde{y}(t) + \left[-2a\lambda_2 S^* + c\hat{j} \right] \tilde{x}(t)\tilde{z}(t) \\ &\quad + \left[2b\lambda_2 S^* - c(\hat{m} + \lambda_3 I^*) + 2\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right] \tilde{y}(t)\tilde{z}(t) \\ &\quad + c\hat{j} \left(\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s)\tilde{y}(s) ds - \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s)\tilde{z}(s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\hat{m} - \mu_2) \left(\frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*} - c \right) \left(\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) \tilde{y}(s) ds - \lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) \tilde{z}(s) ds \right) \\
& + (2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^*) \left(\lambda_3 I^* \int_{t-\tau}^t \tilde{z}(s) \tilde{z}(s) ds - \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{z}(s) \tilde{y}(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Da bi se anulirale vrednosti u zagradama uz $\tilde{x}\tilde{y}$, $\tilde{x}\tilde{z}$ i $\tilde{y}\tilde{z}$, konstante a, b i d treba izabrati kao u (3.14). Kako je $c > c_* > \frac{2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \lambda_1 S^*)}$, konstante a, b i d su pozitivne, pri čemu je c_* pozitivna konstanta definisana u (3.13). Na osnovu uslova (3.27) važi da je $2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^* > 0$, kao i $\frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*} - c > 0$. Primenom elementarne nejednakosti (1.20) i uslova (3.27), dobija se

$$\begin{aligned}
LV_1 \leq & - \left[2a(\hat{j} + \mu_1) + 2d\mu_1 - (a+d)\sigma_1^2 - \frac{\tau}{2} c \hat{j} \left(\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) \right] \tilde{x}^2(t) \\
& - \left[2b(\hat{m} - \mu_2) + 2d(\gamma + \mu_1) - c \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} - (b+d)\sigma_2^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau}{2} \left(\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) (\hat{m} - \mu_2) \left(\frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*} - c \right) \right] \tilde{y}^2(t) \\
& - \left[2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^* - \sigma_3^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau}{2} \left(\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) (2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^*) \right] \tilde{z}^2(t) \\
& + \hat{w} \left(\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2\lambda_2 S^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{y}^2(s) ds + \frac{\lambda_3 I^*}{2} \int_{t-\tau}^t \tilde{z}^2(s) ds \right),
\end{aligned}$$

gde je $\hat{w} = 2 \left(\frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} + \lambda_3 I^* + \mu_2 \right) - c(\hat{m} + \lambda_2 S^* - \mu_2 - \hat{j})$ pozitivna konstanta. Može se primetiti da se sve vrednosti u zagradama uz \tilde{x}^2 , \tilde{y}^2 i \tilde{z}^2 , osim izraza koji sadrže τ , iste kao one u (3.15), što ukazuje na to da bi uslovi (3.8)-(3.12) Teoreme 3.1.1 trebalo da budu zadovoljeni i u ovoj teoremi. Da bi se eliminisali izrazi koji sadrže kašnjenje, uvodi se funkcional

$$V_2 = \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{2\lambda_2 S^*} \hat{w} \int_{t-\tau}^t (s - t + \tau) \tilde{y}^2(s) ds + \frac{\lambda_3 I^*}{2} \hat{w} \int_{t-\tau}^t (s - t + \tau) \tilde{z}^2(s) ds.$$

Primenom operatora L na funkcional Lyapunova $U = V_1 + V_2$ se vidi da je

$$\begin{aligned}
& LU \\
& \leq - \left[\hat{j} \frac{[c\lambda_2 S^*(2\hat{m} + \lambda_3 I^* + \mu_1 - \mu_2) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)](2\mu_1 - \sigma_1^2) + 2c\lambda_2 S^* \hat{j}(\gamma + 2\mu_1)}{2(\lambda_2 S^*)^2(\gamma + 2\mu_1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau}{2} c \hat{j} \left(\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) \right] \tilde{x}^2(t) \\
& - \left[\frac{2\hat{n}[c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^* - \mu_2) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)] - (\gamma + 2\mu_1 + \hat{j})[c\lambda_2 S^*(\hat{m} + \lambda_3 I^*) - 2\mu_2(\hat{m} - \mu_2)]\sigma_2^2}{2(\lambda_2 S^*)^2(\gamma + 2\mu_1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau}{2}(\hat{m} - \mu_2) \left[\frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*} \left(2\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(2\hat{m} + \lambda_2 S^* - 2\mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c \left(\lambda_3 I^* + \frac{\mu_2(2\hat{m} + \lambda_2 S^* - 2\mu_2 - \hat{j})}{\lambda_2 S^*} \right) \right] \tilde{y}^2(t) \\
& - \left[2(\lambda_3 I^* + \mu_2) - c\lambda_2 S^* - \sigma_3^2 - \frac{\tau}{2} \left[4\lambda_3 I^* \left(\lambda_3 I^* + \mu_2 + \frac{\mu_2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right) + 2\frac{\mu_2^2(\hat{m} - \mu_2)}{\lambda_2 S^*} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - c \left(\lambda_3 I^* (\hat{m} + 2\lambda_2 S^* - \mu_2 - \hat{j}) + \mu_2(\hat{m} - \mu_2) \right) \right] \tilde{z}^2(t).
\end{aligned}$$

Kako je $\min\{\bar{c}, c_2, \frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*}\} = \frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*}$ i $\frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*} > \max\{c_1, c_*\}$, što se jednostavno može proveriti, uslov (3.9) se može zameniti uslovom (3.27), tako da postoji $c = \tilde{c}$ za koje je $\max\{c_1, c_*\} < \tilde{c} < \frac{2\mu_2}{\lambda_2 S^*}$. Za tako izabranu konstantu c i $\tau < \min\{\tau_0^1, \tau_0^2, \tau_0^3\}$, gde su $\tau_0^1, \tau_0^2, \tau_0^3$ dati u (3.28), sve vrednosti u zagradama u prethodnoj nejednakosti su pozitivne. Dakle, trivijalno rešenje sistema (3.18) je asimptotski srednje-kvadratno stabilno. ◇

Kao što je već pomenuto, stepan nelinearnosti sistema (3.17) je veći od jedan. Dakle, uslovi Teoreme 3.1.5 su takodje i dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja sistema (3.17), što su svojim radovima pokazali V. Kolmanovskii i L. Shaikhet [54], i L. Shaikhet [91, 95]. Zbog toga je sledeća teorema navedena bez dokaza.

Teorema 3.1.6 *Neka važe svi uslovi Teoreme 3.1.5. Tada je trivijalno rešenje sistema (3.17) stabilno u verovatnoći.*

3.1.4 Primeri i napomene

Da bi se ilustrovali teorijski rezultati dobijeni u poglavljima 3.1.2 i 3.1.3, koriste se realni podaci koji se odnose na prenošenje malarije, a mogu se naći u [13]. Trajektorije rešenja jednačina (3.5) i (3.16) dobijene su primenom Euler–Maruyama aproksimativnog metoda [53].

Primer 3.1.1 Zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da je $b_1 = \mu_1$ i $b_2 = \mu_2$, tj. da su populacije domaćina i prenosioča standardizovane ($N_1(t) = 1$ i $N_2(t) = 1$). Kao i do sada, $S(t)$, $I(t)$, $V(t)$ predstavljaju procenat podložnih i zaraženih jedinki domaćina i prenosioča bolesti, respektivno. Poznato je da kod prenosioča period inkubacije traje od 5 do 15 dana [6]. Neka je period inkubacije $\tau = 7$ dana. Ostali parametri modela (3.5), odnosno (3.16), su:

$$b_1 = \mu_1 = 0.00009/\text{dan}, \quad (3.29)$$

$$b_2 = \mu_2 = 0.033/\text{dan}, \gamma = 0.0035/\text{dan}, \quad (3.30)$$

$$\lambda_1 = 0.00004/\text{dan}, \lambda_2 = 0.3/\text{dan}, \lambda_3 = 0.48/\text{dan}.$$

Početni uslov za sistem (3.5) je $S(0) = 0.6$, $I(0) = 0.005$, $V(0) = 0.2$, a za sistem sa kašnjenjem (3.16) je $S(\theta) = 0.6$, $I(\theta) = 0.005$, $V(\theta) = 0.2$, $-7 \leq \theta \leq 0$.

Za ovakav izbor parametara endemski ekvilibrijum je

$$E^* = (S^*, I^*, V^*) = (0.00112239, 0.0250415, 0.266991),$$

a reprodukcioni broj je $\mathcal{R}_0 = 1215.51$. Jednostavnom proverom se može zaključiti da parametri zadovoljavaju uslov (3.8), kao i uslove (3.19) i (3.20). Dakle, na osnovu uslova (3.9) se može izabrati $\hat{c} = 200$, čime se, na osnovu uslova (3.10)-(3.12), dobija da je

$$0 \leq \sigma_1^2 < 0.012, \quad 0 \leq \sigma_2^2 < 0.0019, \quad 0 \leq \sigma_3^2 < 0.0226.$$

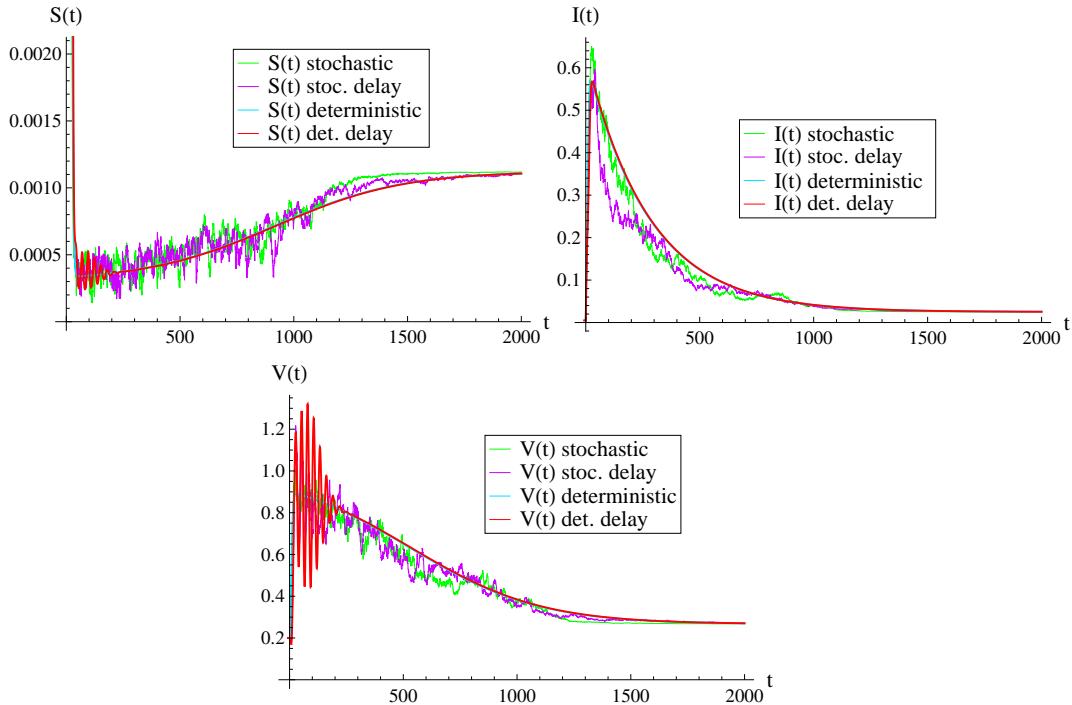
Slično, iz uslova (3.21) i (3.22) se može izabrati $\hat{E} = 120$ i $\hat{C} = 700$, pa je, iz uslova (3.23)-(3.25),

$$0 \leq \sigma_1^2 < 0.0148, \quad 0 \leq \sigma_2^2 < 0.00103, \quad 0 \leq \sigma_3^2 < 0.002005.$$

Ako se izabere

$$\sigma_1^2 = 0.005, \quad \sigma_2^2 = 0.001, \quad \sigma_3^2 = 0.002,$$

endemski ekvilibrijum E^* sistema (3.5) i (3.16) je stabilan, što se jasno vidi i na Slici 3.1.

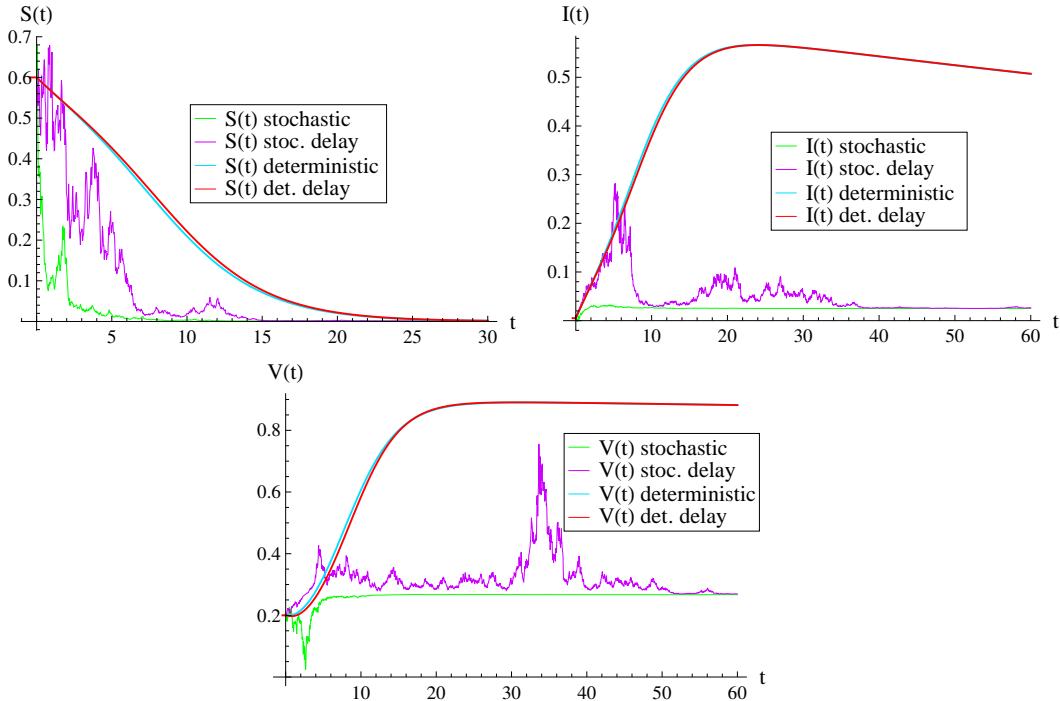


Slika 3.1: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (3.5) i (3.16) sa parametrima (3.29), (3.30) i $\sigma_1^2 = 0.005, \sigma_2^2 = 0.001, \sigma_3^2 = 0.002$ (vremenski korak je $\Delta t = 0.5$ ili 12 sati).

Ovde treba naglasiti da Teoreme 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 i 3.1.4 daju samo dovoljne uslove da bi endemski ekvilibrijum E^* bio stabilan u nekom smislu. Na osnovu numeričkih simulacija se može zaključiti da je E^* stabilno i za vrednosti parametara modela (3.5) koji ne zadovoljavaju uslove (3.10)-(3.12), odnosno modela (3.16) koji ne zadovoljavaju uslove (3.23)-(3.25). Naime, ako se parametri modela izaberu kao u (3.29) i (3.30), a

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.4,$$

uslovi pomenutih teorema nisu zadovoljeni. Međutim, Slika 3.2 pokazuje da je endemski ekvilibrijum E^* i dalje stabilan. Šta više, može se primetiti da za tako velike vrednosti intenziteta šuma, stohastički model mnogo brže dodje u stanje ekvilibrijuma nego odgovarajući deterministički model.



Slika 3.2: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (3.5) i (3.16) sa parametrima (3.29), (3.30) i $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.4$ (vremenski korak je $\Delta t = 0.5$).

Primer 3.1.2 Ako se posmatra model (3.16) sa parametrima (3.30) i

$$b_1 = \mu_1 = 0.0004, \quad (3.31)$$

dobija se da je endemski ekvilibrijum

$$E^* = (0.002224, 0.102336, 0.598155),$$

a reprodukcioni broj $\mathcal{R}_0 = 1118.89$. U ovom slučaju, uslov (3.19) Teoreme 3.1.3 je narušen, dok važi uslov (3.8) Teoreme 3.1.5. Iz uslova (3.27) se može izabrati $\tilde{c} = 9.5$, da bi se na osnovu (3.10)-(3.12) dobilo da je

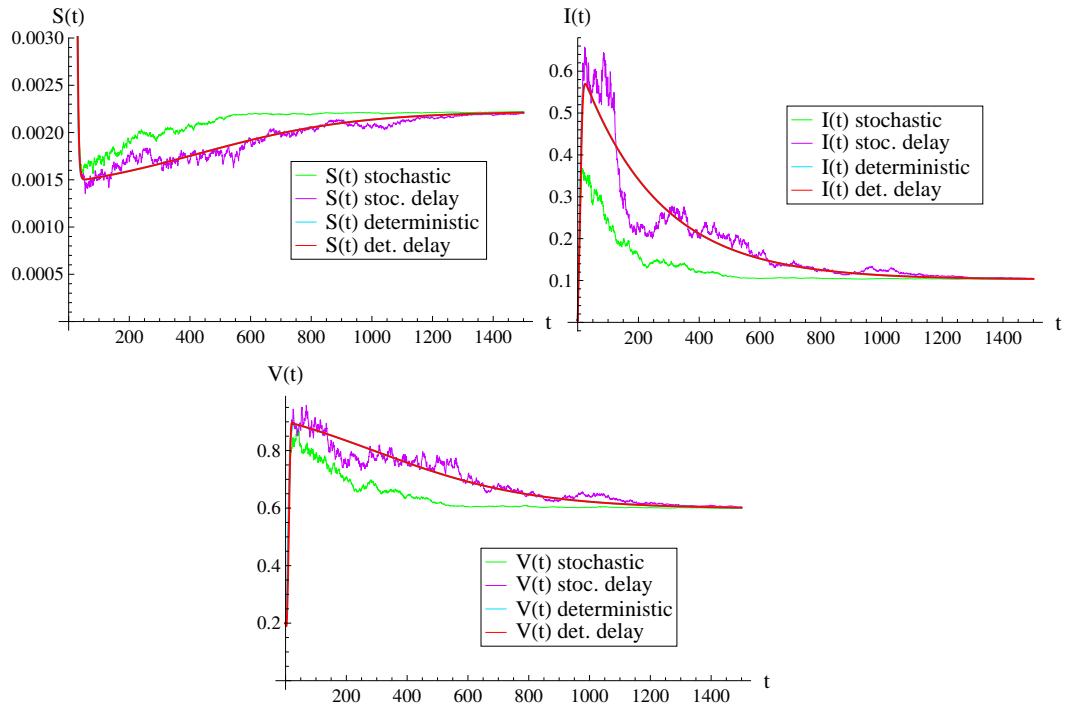
$$0 \leq \sigma_1^2 < 0.0318, \quad 0 \leq \sigma_2^2 < 0.00213, \quad 0 \leq \sigma_3^2 < 0.1579.$$

Izborom

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.002$$

se dobija da je ekvilibrijum E^* modela (3.16) stabilan u verovatnoći ako je $\tau < 2.1234$, što je oko dva dana (Slika 3.3).

Kako period inkubacije kod prenosioca traje od 5 do 15 dana [6], može se zaključiti da pod uslovima Teoreme 3.1.5 endemski ekvilibrijum modela (3.16) nije stabilan za sve prirodno očekivane vrednosti vremenskog kašnjenja.



Slika 3.3: Determinističke i stohastičke trajektorije modela (3.34) i (3.16) sa parametrima (3.30), (3.31) i $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.002$ (vremenski korak $\Delta t = 0.03$).

Napomena 3.1.2 Na kraju ovog poglavlja treba napomenuti da je jedan od osnovnih ciljeva autora prilikom dokazivanja teorema bio da se zbog praktične provere uslovi teorema učine što jednostavnijim, ili bar onoliko jednostavnim koliko je složenost razmatranih modela dozvoljavala. Zbog toga su u dokazima Teorema 3.1.1-3.1.5 korišćene aproksimacije zbog kojih su dobijeni manji intervali u kojima intenzitet šuma može da se kreće, od onih koji bi se dobili inače.

3.2 Stohastički model širenja malarije

Malaria je jedna od najrasprostranjenijih prenosivih bolesti. Ime "malaria" potiče od italijanskog izraza "mala aria", što znači "loš vazduh". Prvi slučaj oboljenja od malarije otkrio je francuski vojni lekar C. Laveran 1880. godine, koji je uočio *Plasmodium* parazit (koji izaziva malariju) u crvenim krvnim zrncima zaraženih vojnika. Za otkriće ovog parazita, nagradjen je Nobelovom nagradom za fiziologiju i medicinu 1907. godine. Od otkrića parazita 1880. godine, mnogi naučnici su pokušavali da otkriju na koji način se ova bolest širi, sve dok 1898. godine Sir Ronald Ross nije konačno otkrio da su komarci glavni prenosnici malarije.

Postoji pet vrsta *Plasmodium* parazita koji izazivaju malariju kod ljudi. Najozbiljniji oblici bolesti su prouzrokovani vrstom *Plasmodium falciparum*, dok *Plasmodium vivax*, *Plasmodium ovale* i *Plasmodium malariae* izazivaju blaže oblike ove bolesti koji, u opštem slučaju, nemaju fatalan ishod. Peta vrsta, *Plasmodium knowlesi*, izaziva bolest najčešće kod nekih vrsta majmuna, a redje kod ljudi.

Ova bolest je najrasprostranjenija u tropskim i subtropskim krajevima, najviše

u Africi. Medjutim, zahvaljujući rastu otpornosti parazita na lekove, kao i rastu otpornosti komaraca na insekticide, seobama ljudi u portazi za poslom, ratovima, elementarnim nepogodama (sušama, poplavama, zemljotresima, itd.), malarija se širi i na druge kontinente. Poznato je da se godišnje malarijom zarazi izmedju 350 i 500 miliona ljudi, pri čemu umre izmedju jedan i tri miliona ljudi, medju kojima je najviše dece uzrasta do pet godina i trudnih žena iz oblasti Sahare.

3.2.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Kao što je već rečeno, malarija predstavlja bolest koja se sve više širi i zahvata sve veći broj područja. Zbog toga je jako važno razumeti sve parametre koji utiču na prenošenje bolesti i razviti efikasne strategije kojima bi se ova bolest kontrolisala i suzbijala, kao što je naglašeno u [13, 99].

Problem prenošenja malarije je jako zastupljena tema u matematičkoj literaturi. U nekim radovima ([13, 87, 88, 99, 101], na primer) se razmatraju deterministički modeli prenošenja bolesti i dokazuje se globalna stabilnost njihovih ekvilibrijuma. N. Chitnis, J. M. Cushing i J. M. Hyman [13] su razmatrali sistem običnih diferencijalnih jednačina kojima su predstavljene ljudska i populacija komaraca, i dokazali lokalnu asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma u kome nema bolesti, ali nisu mogli da dokažu stabilnost endemskog ekvilibrijuma u bilo kom smislu. Medjutim, S. Ruana, D. Xiaob i J. C. Beierc idu korak dalje u radu [87], i u model uključuju kašnjenje koje predstavlja period inkubacije. Za takav model, oni ispituju na koji način stabilnost ekvilibrijuma zavisi od reprodupcionog broja. Takodje i Saker [88] proučava ograničenost, perzistentnost i stabilnost nelinearnog modela koji opisuje širenje malarije. J. Tumwiine, J. Y. T. Mugisha i L.S. Luboobi u radu [99] ispituju stabilnost ekvilibrijuma modela širenja malarije u kome je sadržan oporavak ljudske populacije kroz stalne imigracije. U zavisnosti od veličine koja predstavlja zaražene imigrante, oni određuju uslove stabilnosti ekvilibrijuma.

Sa druge strane, postoje stohastički modeli koji proučavaju uticaj stohastičkih perturbacija tipa Gaussovog belog šuma oko endemskog ekvilibrijuma na stabilnost samog ekvilibrijuma kod običnih epidemioloških modela ([12, 110], na primer), kao i kod epidemioloških modela sa kašnjenjem. Naime, u radu [1] autori razmatraju kako uvodenje slučajnosti tipa Gaussovog belog šuma utiče na stabilnost pozitivnog ekvilibrijuma sistema

$$\begin{aligned} du(t) &= [\gamma_1 u(t) - a_1 u(t)u(t-\tau) - b_1 u(t)v(t)] dt + \sigma_1(u(t) - u^*) dw_1(t), \\ dv(t) &= [\gamma_2 v(t) - a_2 v(t)v(t-\tau) - b_2 v(t)u(t)] dt + \sigma_2(v(t) - v^*) dw_2(t), \end{aligned}$$

kojim je opisan stohastički model kompeticije dveju vrsta na istom životnom prostoru. U ovom modelu a_1 i a_2 predstavljaju koeficijente kompeticije unutar populacije u i v , respektivno, b_1 i b_2 koeficijente kompeticije izmedju vrsta u i v , γ_1 i γ_2 stope rasta populacija u i v , respektivno, u^* , v^* su koordinate pozitivnog ekvilibrijuma $E_4 = (u^*, v^*)$ koji opisuje stanje koegzistencije ovih vrsta, $w = (w_1(t), w_2(t))$ standardno dvodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja zadovoljava uobičajene uslove, dok σ_1^2 i σ_2^2 predstavljaju intenzitete za w_1 i w_2 , redom. Može se primetiti da autori prepostavljaju da je kašnjenje τ , koje predstavlja period koji je potreban da bi

se hrana i ostali životni resursi prerađili i iskoristili za rast populacije, isto za obe populacije, što u prirodi nije uvek slučaj.

U radu [7] autori ispituju stabilnost endemskog ekvilibrijuma stohastičkog epidemiološkog SIR modela datog na sledeći način

$$\begin{aligned} dS(t) &= -\beta S(t) \int_0^h f(s) I(t-s) ds - \mu_1 S(t) + b + \sigma_1 (S(t) - S^*) dw_1(t), \\ dI(t) &= \beta S(t) \int_0^h f(s) I(t-s) ds - (\mu_2 + \lambda) I(t) + \sigma_2 (I(t) - I^*) dw_2(t), \\ dR(t) &= \lambda I(t) - \mu_3 R(t) + \sigma_3 (R(t) - R^*) dw_3(t). \end{aligned}$$

U ovom modelu $\beta, b, \lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ predstavljaju pozitivne konstante, S^*, I^*, R^* koordinate endemskog ekvilibrijuma $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$, $w = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ je standardno trodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja zadovoljava uobičajene uslove, dok su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ realne konstante. Funkcija $f(s)$ je nenegativna funkcija za koju važi

$$\int_0^h f(s) ds = 1, \quad \int_0^s sf(s) ds < \infty.$$

Primenom funkcionala Lyapunova, autori su za ovaj sistem dobili uslove koje bi parametri modela trebalo da zadovoljavaju da bi sistem bio stabilan u verovatnoći. Uslovi stabilnosti koji su dobijeni ne zavise od dužine kašnjenja.

S obzirom na činjenicu da u prirodi vremenski period potreban za inkubaciju neke bolesti varira od populacije do populacije, kao i da je različitim biljnim i životinjskim vrstama potreban različit vremenski period da bi polno sazrele, iskoristile resurse sredine ili se prilagodile promenama u sredini, u model koji se razmatra u nastavku se uvode dva različita kašnjenja koja opisuju periode inkubacije malarije kod ljudi i komaraca. Osnovna motivacija za model širenja malarije proistekla je iz rada [88], u kome se pružava stabilnost nelinearnog modela širenja malarije sa kašnjenjem. U [88] autor polazi od modela koji opisuje promenu procenata zaraženih ljudi h i komaraca m , datog na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \left(ab \frac{\bar{N}}{N} \right) m(t)[1 - h(t)] - \mu h(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} &= ach(t)[1 - m(t)] - \delta m(t), \end{aligned} \tag{3.32}$$

pri čemu je:

N - veličina ljudske populacije,

\bar{N} - veličina populacije ženskih komaraca,

a - stopa napada komaraca na ljude,

b - stopa ljudi koji se zaraze nakon uboda zaraženog komarca,

μ - stopa oporavka ljudi,

c - stopa komaraca koji se zaraze nakon uboda zaraženog čoveka,

δ - stopa smrtnosti komaraca,

$\left(ab \frac{\bar{N}}{N} \right) m(t)$ - stopa inokulacije, odnosno sticanja imuniteta na bolest.

Prepostavlja se da u prvoj jednačini izraz $1 - h(t)$ predstavlja procenat ljudi koji nisu zaraženi, tj. procenat podložnih ljudi. Takođe, izraz $1 - m(t)$ predstavlja procenat podložnih komaraca. Iz modela (3.32) se vidi da do infekcije u ljudskoj populaciji dolazi kada zaraženi komarac napadne zdravog čoveka, a kod komaraca kada zdravi komarac napadne zaraženog čoveka. Jedna od pretpostavki je da su ukupna ljudska populacija, kao i ukupna populacija komaraca, konstantne, tako da $h(t)$ i $m(t)$ predstavljaju procenat zaraženih ljudi i komaraca u trenutku t , respektivno. Za konstante a, b, c, μ, δ se prepostavlja da su pozitivne. Saker [88] za model (3.32) takođe prepostavlja da nema vertikalnog prenošenja bolesti, tj. da su svi novorodjeni ljudi i komarci podložni bolesti. Za stopu smrtnosti kod ljudi se prepostavlja da je zanemarljiva u poređenju sa stopom oporavka. Kod komaraca važi obrnuto, stopa oporavka je zanemarljiva u odnosu na stopu smrtnosti. Kako izraz $\mu h(t)$ predstavlja oporavljene ljude, to znači da se ne stiče trajni imunitet na bolest. Dakle, model (3.32) spada u klasu SIS epidemioloških modela.

Kako do infekcije ne dolazi istog trenutka kada ženski komarac ubode čoveka, Saker u model (3.32) uvodi konstantna kašnjenja kojima predstavlja periode inkubacije kod ljudi i komaraca. Na taj način se dobija model

$$\begin{aligned}\frac{dh(t)}{dt} &= \alpha m(t - \tau)[1 - h(t - \tau)] - \gamma h(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \beta h(t - \sigma)[1 - m(t - \sigma)] - \delta m(t),\end{aligned}\quad (3.33)$$

sa početnim uslovom

$$\begin{aligned}h(\theta) &= \Phi_1(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \\ m(\eta) &= \Phi_2(\eta), \quad \eta \in [-\sigma, 0],\end{aligned}$$

u kome je $\alpha = ab\frac{\bar{N}}{N}$, $\beta = ac$, $\gamma = \mu + \mu_1$, a μ_1 je stopa smrtnosti kod ljudi. Očigledno, α, β i γ su pozitivne konstante. Dalje, Φ_i su ograničene, neprekidne i nenegativne funkcije definisane na $[-\tau, 0]$ i $[-\sigma, 0]$ za $i = 1, 2$, respektivno.

U radu [88] su odredjena dva ekvilibrijuma modela (3.33): trivijalni ekvilibrijum $E_0 = (h_0, m_0) = (0, 0)$ koji predstavlja slučaj kada nema bolesti, i pozitivni, endemski ekvilibrijum, $E^* = (h^*, m^*) = \left(\frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{(\alpha + \gamma)\beta}, \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha(\beta + \delta)} \right)$, koji postoji ako je $\alpha\beta > \gamma\delta$.

3.2.2 Stohastički model sa kašnjenjem

Malaria se širi i zahvata sve veći broj područja zahvaljujući, izmedju ostalog, i elementarnim nepogodama. Ove pojave se u prirodi dešavaju pod uticajem nepredvidivih faktora iz okruženja, tako da je prirodno posmatrati kako ti nepredvidivi faktori utiču na stabilnost ekvilibrijuma modela (3.33).

Rezultati izloženi u nastavku ovog poglavlja predstavljaju originalne naučne rezultate koji su sadržani u radu [58].

U većini radova posvećenim ispitivanju stabilnosti ekvilibrijuma epidemioloških sistema (videti [1, 7, 11, 12, 44, 58, 87, 88, 99, 101, 110], na primer), standardan pristup je pretpostavka da su stohastičke perturbacije oko ekvilibrijuma E^* tipa Gaussovog belog šuma i da su proporcionalne razlikama izmedju h , m i h^* , m^* ,

respektivno, u konkretnom slučaju. Na taj način se obezbedjuje da ekvilibrijum E^* determinističkog modela (3.33) takodje bude i ekvilibrijum stohastičkog modela. Takvom pristupom se dobija stohastički model širenja malarije sa kašnjenjem oblika

$$\begin{aligned} dh(t) &= [\alpha m(t-\tau)(1-h(t-\tau)) - \gamma h(t)]dt + \sigma_1(h(t)-h^*)dw_1(t), \\ dm(t) &= [\beta h(t-\sigma)(1-m(t-\sigma)) - \delta m(t)]dt + \sigma_2(m(t)-m^*)dw_2(t), \end{aligned} \quad (3.34)$$

u kome je $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ standardno dvodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja zadovoljava uobičajene uslove, a σ_1^2 i σ_2^2 predstavljaju intenzitete za w_1 i w_2 , redom.

Da bi se model (3.34) centrirao oko ekvilibrijuma E^* , uvodi se smena $h(t) = x(t) + h^*$ i $m(t) = y(t) + m^*$. Tada se dobija

$$\begin{aligned} dx(t) &= [\alpha(y(t-\tau)+m^*)(1-x(t-\tau)-h^*) - \gamma x(t) - \gamma h^*]dt + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= [\beta(x(t-\sigma)+h^*)(1-y(t-\sigma)-m^*) - \delta y(t) - \delta m^*]dt + \sigma_2 y(t)dw_2(t). \end{aligned}$$

Kako je $h^* = \frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)\beta}$ i $m^* = \frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha(\beta+\delta)}$, dobija se sistem

$$\begin{aligned} dx(t) &= [-\gamma x(t) - \alpha m^* x(t-\tau) + \alpha(1-h^*)y(t-\tau) - \alpha x(t-\tau)y(t-\tau)]dt \\ &\quad + \sigma_1 x(t)dw_1(t), \\ dy(t) &= [-\delta y(t) - \beta h^* y(t-\sigma) + \beta(1-m^*)x(t-\sigma) - \beta x(t-\sigma)y(t-\sigma)]dt \\ &\quad + \sigma_2 y(t)dw_2(t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Očigledno je da je proučavanje stabilnosti endemskog ekvilibrijuma modela (3.34) ekvivalentno proučavanju stabilnosti trivijalnog rešenja sistema (3.35).

Sa istom motivacijom kao i u prethodnom poglavlju, i ovde se najpre razmatra sistem dobijen linearizacijom sistema (3.35), tj.

$$\begin{aligned} d\tilde{x}(t) &= [-\gamma \tilde{x}(t) - \alpha m^* \tilde{x}(t-\tau) + \alpha(1-h^*)\tilde{y}(t-\tau)]dt + \sigma_1 \tilde{x}(t)dw_1(t), \\ d\tilde{y}(t) &= [-\delta \tilde{y}(t) - \beta h^* \tilde{y}(t-\sigma) + \beta(1-m^*)\tilde{x}(t-\sigma)]dt + \sigma_2 \tilde{y}(t)dw_2(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Zbog prisustva kašnjenja, sistem (3.36) se može prevesti u neutralni oblik. Na taj način se dobijaju uslovi stabilnosti ekvilibrijuma E^* modela (3.34) koji zavise od dužine perioda inkubacije τ i σ . Dakle, razmatra se stabilnost trivijalnog rešenja sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\left[\tilde{x}(t) - \alpha m^* \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s)ds + \alpha(1-h^*) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s)ds \right] \\ &= -(\alpha m^* + \gamma) \tilde{x}(t) + \alpha(1-h^*) \tilde{y}(t) + \sigma_1 \tilde{x}(t) \dot{w}_1(t), \\ \frac{d}{dt} &\left[\tilde{y}(t) - \beta h^* \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}(s)ds + \beta(1-m^*) \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}(s)ds \right] \\ &= -(\beta h^* + \delta) \tilde{y}(t) + \beta(1-m^*) \tilde{x}(t) + \sigma_2 \tilde{y}(t) \dot{w}_2(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Primenom metoda funkcionala Lyapunova, u sledećoj teoremi su određeni dovoljni uslovi asimptotske srednje-kvadratne stabilnosti trivijalnog rešenja sistema (3.36), odnosno (3.37).

Jedan od uslova pod kojima važe tvrdjenja u ovom poglavlju je uslov $\alpha\beta > \gamma\delta$, koji obezbeđuje postojanje endemskog ekvilibrijuma E^* .

Zbog jednostavnijeg zapisa, uvode se sledeće oznake:

$$\begin{aligned} A &= \alpha((\alpha m^* + \gamma)^2 + \alpha^2(1 - h^*)^2), & B &= \beta((\beta h^* + \delta)^2 + \beta^2(1 - m^*)^2), \\ C &= \alpha m^* + \gamma - \alpha(1 - h^*) - \beta(1 - m^*), & D &= \beta h^* + \delta - \alpha(1 - h^*) - \beta(1 - m^*), \\ \Gamma &= \left\{ (\tau_0, \sigma_0) \mid \tau_0 \alpha(m^*(A+1) + 1 - h^*) + \sigma_0 \beta(h^*(B+1) + 1 - m^*) < C - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right. \\ &\quad \left. \wedge \tau_0 \alpha(m^*(1 - h^*)(A+1)) + \sigma_0 \beta(h^*(B+1) + 1 - m^*) < D - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Teorema 3.2.1 Neka je $\alpha\beta > \gamma\delta$ i neka parametri sistema (3.35) zadovoljavaju uslov

$$\alpha(1 - h^*) + \beta(1 - m^*) < \min\{\alpha m^* + \gamma, \beta h^* + \delta\}. \quad (3.39)$$

Tada, ako je

$$\sigma_1^2 < 2C, \quad \sigma_2^2 < 2D \quad i \quad (\tau, \sigma) \in \Gamma, \quad (3.40)$$

gde su C, D pozitivne konstante, a Γ oblast, definisani u (3.38), trivijalno rešenje sistema (3.36) ja asimptotski srednje-kvadratno stabilno.

Dokaz. Da bi se teorema dokazala, razmatra se sistem (3.37). Definisanjem funkcionala V_1 sa

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{1}{2} &\left[\left(\tilde{x}(t) - \alpha m^* \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) ds + \alpha(1 - h^*) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{y}(t) - \beta h^* \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}(s) ds + \beta(1 - m^*) \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}(s) ds \right)^2 \right], \end{aligned}$$

i primenom operatora L na njega, dobija se

$$\begin{aligned} LV_1 &= \left(\tilde{x}(t) - \alpha m^* \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) ds + \alpha(1 - h^*) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) ds \right) \\ &\quad \times \left(-(\alpha m^* + \gamma) \tilde{x}(t) + \alpha(1 - h^*) \tilde{y}(t) \right) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \tilde{x}^2(t) \\ &\quad + \left(\tilde{y}(t) - \beta h^* \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}(s) ds + \beta(1 - m^*) \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}(s) ds \right) \\ &\quad \times \left(-(\beta h^* + \delta) \tilde{y}(t) + \beta(1 - m^*) \tilde{x}(t) \right) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \tilde{y}^2(t) \\ &= -[\alpha m^* + \gamma - \frac{1}{2} \sigma_1^2] \tilde{x}^2(t) + [\alpha(1 - h^*) + \beta(1 - m^*)] \tilde{x}(t) \tilde{y}(t) - [\beta h^* + \delta - \frac{1}{2} \sigma_2^2] \tilde{y}^2(t) \\ &\quad + \alpha m^* (\alpha m^* + \gamma) \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) \tilde{x}(t) ds - \alpha(1 - h^*) (\alpha m^* + \gamma) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) \tilde{x}(t) ds \\ &\quad - \alpha^2 m^* (1 - h^*) \int_{t-\tau}^t \tilde{x}(s) \tilde{y}(t) ds + \alpha^2 (1 - h^*)^2 \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(s) \tilde{y}(t) ds \\ &\quad + \beta h^* (\beta h^* + \delta) \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}(s) \tilde{y}(t) ds - \beta^2 h^* (1 - m^*) \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}(s) \tilde{x}(t) ds \\ &\quad - \beta(1 - m^*) (\beta h^* + \delta) \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}(s) \tilde{y}(t) ds + \beta^2 (1 - m^*)^2 \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}(s) \tilde{x}(t) ds. \end{aligned}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.21), prethodna jednakost postaje

$$\begin{aligned}
 LV_1 \leq & - \left[\alpha m^* + \gamma - \varepsilon_1 (\alpha(1-h^*) + \beta(1-m^*)) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right. \\
 & - \tau \left(\frac{\alpha m^*(\alpha m^* + \gamma)}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha(1-h^*)(\alpha m^* + \gamma)}{\varepsilon_6} \right) \\
 & - \sigma \left(\frac{\beta^2(1-m^*)^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2 h^*(1-m^*)}{\varepsilon_7} \right) \left. \tilde{x}^2(t) \right] \\
 & - \left[\beta h^* + \delta - \frac{\alpha(1-h^*) + \beta(1-m^*)}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right. \\
 & - \tau \left(\frac{\alpha^2 m^*(1-h^*)}{\varepsilon_4} + \frac{\alpha^2(1-h^*)^2}{\varepsilon_8} \right) \\
 & - \sigma \left(\frac{\beta(1-m^*)(\beta h^* + \delta)}{\varepsilon_5} + \frac{\beta h^*(\beta h^* + \delta)}{\varepsilon_9} \right) \left. \tilde{y}^2(t) \right] \\
 & + \alpha m^*((\alpha m^* + \gamma)\varepsilon_2 + \alpha(1-h^*)\varepsilon_4) \int_{t-\tau}^t \tilde{x}^2(s) ds \\
 & + \beta(1-m^*)(\beta(1-m^*)\varepsilon_3 + (\beta h^* + \delta)\varepsilon_5) \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}^2(s) ds \\
 & + \alpha(1-h^*)((\alpha m^* + \gamma)\varepsilon_6 + \alpha(1-h^*)\varepsilon_8) \int_{t-\tau}^t \tilde{y}^2(s) ds \\
 & + \beta h^*(\beta(1-m^*)\varepsilon_7 + (\beta h^* + \delta)\varepsilon_9) \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}^2(s) ds.
 \end{aligned}$$

Ako se izabere da je $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_6 = \alpha m^* + \gamma$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_7 = \beta(1 - m^*)$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_8 = \alpha(1 - h^*)$ i $\varepsilon_5 = \varepsilon_9 = \beta h^* + \delta$, dobija se

$$\begin{aligned}
 LV_1 \leq & - \left[C - \frac{1}{2} \sigma_1^2 - \tau \alpha(m^* + 1 - h^*) - \sigma \beta(h^* + 1 - m^*) \right] \tilde{x}^2(t) \\
 & - \left[D - \frac{1}{2} \sigma_2^2 - \tau \alpha(m^* + 1 - h^*) - \sigma \beta(h^* + 1 - m^*) \right] \tilde{y}^2(t) \\
 & + m^* A \int_{t-\tau}^t \tilde{x}^2(s) ds + (1 - m^*) B \int_{t-\sigma}^t \tilde{x}^2(s) ds \\
 & + (1 - h^*) A \int_{t-\tau}^t \tilde{y}^2(s) ds + h^* B \int_{t-\sigma}^t \tilde{y}^2(s) ds,
 \end{aligned}$$

gde su A, B, C i D pozitivne konstante definisane u (3.38). Pozitivnost ovih konstanti je obezbedjena uslovom (3.39). Da bi se eliminisali članovi koji sadrže kašnjenje definiše se funkcional V_2 na sledeći način

$$\begin{aligned}
 V_2 = & m^* A \int_{t-\tau}^t (s - t + \tau) \tilde{x}^2(s) ds + (1 - h^*) A \int_{t-\tau}^t (s - t + \tau) \tilde{y}^2(s) ds \\
 & + (1 - m^*) B \int_{t-\sigma}^t (s - t + \sigma) \tilde{x}^2(s) ds + h^* B \int_{t-\sigma}^t (s - t + \sigma) \tilde{y}^2(s) ds.
 \end{aligned}$$

Dakle, za funkcional Lyapunova $V = V_1 + V_2$ se dobija ocena

$$\begin{aligned} LV \leq & -\left[C - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \tau\alpha(m^*(A+1) + 1 - h^*) - \sigma\beta(h^* + (1-m^*)(B+1)) \right] \tilde{x}^2(t) \\ & - \left[D - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \tau\alpha(m^* + (1-h^*)(A+1)) - \sigma\beta(h^*(B+1) + 1 - m^*) \right] \tilde{y}^2(t). \end{aligned}$$

Na osnovu uslova (3.40) se može tvrditi da su izrazi u zagradama poslednje nejednakosti pozitivni, pa je trivijalno rešenje sistema (3.36) asimptotski srednjekvadratno stabilno na osnovu Teoreme 1.7.2. ◇

Očigledno da sistem (3.35) ima stepen nelinearnosti veći od jedan, pa su dovoljni uslovi asimptotske srednjekvadratne stabilnosti trivijalnog rešenja linearizovanog sistema ujedno i dovoljni uslovi stabilnosti u verovatnoći trivijalnog rešenja polaznog sistema, (videti [54, 91, 95]). Dakle, uslovi Teoreme 3.2.1 su takodje i dovoljni uslovi za stabilnost u verovatnoći trivijalnog rešenja sistema (3.35), čime je dokazana sledeća teorema.

Teorema 3.2.2 *Neka je $\alpha\beta > \gamma\delta$ i neka važe uslovi Teoreme 3.2.1. Tada je trivijalno rešenje sistema (3.35) stabilno u verovatnoći.*

3.2.3 Primeri i napomene

Da bi se proverili teorijski rezultati koji se odnose na stabilnost endemskog ekvilibrijuma dobijeni u Poglavlju 3.2.2, u ovom poglavlju su predstavljena dva primera. U oba primera se koriste verodostojne vrednosti parametara koje se mogu naći u radu [87].

Primer 3.2.1 Neka su $h(t)$ i $m(t)$ procenti zaraženih ljudi i komaraca u trenutku t , redom. Ako je

$$\mu = 0.055/\text{dan}, \quad a = 0.2/\text{dan}, \quad b = c = 0.5, \quad \delta = 0.05/\text{dan},$$

može se izračunati da su parametri modela (3.34)

$$\alpha = 0.2/\text{dan}, \quad \beta = 0.1/\text{dan}, \quad \gamma = 0.055/\text{dan}, \quad \delta = 0.05/\text{dan}.$$

Kako je $\alpha\beta > \gamma\delta$, to znači da endemski ekvilibrijum postoji, i za ovakav izbor parametara iznosi

$$E^* = (h^*, m^*) = (0.676471, 0.575).$$

Da bi se proverili uslovi Teoreme 3.2.1, treba izračunati konstante A, B, C, D iz (3.38). Zamenom se dobija da je:

$$A = 0.00661737, \quad B = 0.00156471, \quad C = 0.0627942, \quad D = 0.0104413.$$

Uslovi Teoreme 3.2.1, odnosno Teoreme 3.2.2 su zadovoljeni ako za intenzitete šuma σ_1^2 i σ_2^2 važi

$$0 \leq \sigma_1^2 \leq 0.125588, \quad 0 \leq \sigma_2^2 \leq 0.0208826.$$

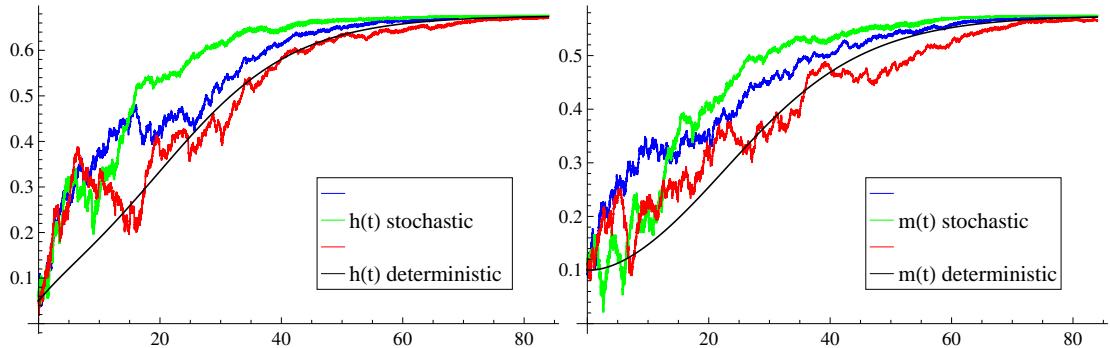
Ako se izabere da je, na primer,

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.01,$$

dobija se da je

$$\Gamma = \{(\tau_0, \sigma_0) \mid 0 \leq \tau_0 \leq 0.609082 \wedge 0 \leq \sigma_0 \leq 0.0901681\}.$$

Vrednosti $\tau = 0.0411$ i $\sigma = 0.01919$ pripadaju oblasti Γ , pa se na Slici 3.4 može uočiti stabilnost endemskog ekvilibrijuma modela (3.34). Na svakoj slici su prikazane po tri različite trajektorije rešenja koje predstavljaju procenat zaraženih ljudi i komaraca da bi se video slučajni uticaj šuma sredine na model (3.33). Kao što se može primetiti, taj uticaj je takav da trajektorije $h(t)$, odnosno $m(t)$ dostižu vrednosti h^* , odnosno m^* , u različitim vremenskim trenucima, iako su parametri modela isti kod svih trajektorija.



Slika 3.4: Determinističke i stohastičke trajektorije proporcija zaraženih ljudi $h(t)$ (levo) i zaraženih komaraca $m(t)$ (desno), $0 \leq t \leq 80$. Početni uslov je $h(\theta) = 0.005$, $m(\eta) = 0.1$, a vremenski korak $\Delta t = 0.03$.

Primer 3.2.2 Ovim primerom se pokazuje da uvodenje slučajnosti u deterministički model (3.33), predstavljen u [88], ne narušava stabilnost endemskog ekvilibrijuma E^* , kao ni biološki značaj parametara modela. Šta više, na Slici 3.4 se može uočiti da uvodenje Gaussovog belog šuma, u nekim slučajevima, dovodi do toga da stohastički model (3.34) brže dostigne ekvilibrijum E^* nego deterministički model (3.33) (zelene i plave trajektorije).

Ako se vrednosti parametara modela (videti [87]) izaberu na sledeći način:

$$\alpha = 0.3/dan, \beta = 0.15/dan, \gamma = 0.062/dan \text{ i } \delta = 0.13/dan,$$

dobija se

$$E^* = (h^*, m^*) = (0.680295, 0.439762).$$

Neka su intenziteti šuma sredine $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.001$, period inkubacije kod ljudi $\tau = 0.042$, a period inkubacije kod komaraca $\sigma = 0.01919$. Tada su svi uslovi Teoreme 3.2.1, odnosno Teoreme 3.2.2 zadovoljeni, što znači da je endemski ekvilibrijum modela (3.34) stabilan u verovatnoći. Međutim, uslov

$$(H_1) \quad r_{22} + r_{11} \geq 2(a_{12} + a_{21})$$

Teoreme 4.1 iz [88] koji garantuje lokalnu asimptotsku stabilnost pozitivnog ekvilibrijuma $E^* = (h^*, m^*)$ nije zadovoljen, pri čemu je

$$\begin{aligned} r_{11} &= \alpha \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha(\beta + \delta)} + \gamma, & r_{22} &= \beta \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{(\alpha + \gamma)\beta} + \delta, \\ a_{12} &= \alpha \left(1 - \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{(\alpha + \gamma)\beta} \right), & a_{21} &= \beta \left(1 - \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha(\beta + \delta)} \right). \end{aligned}$$

Ovaj primer pokazuje da uvodjenje stohastičkih perturbacija stabilizuje model (3.33).

Napomena 3.2.1 Teoreme 3.2.1 i 3.2.2 daju samo dovoljne uslove stabilnosti ekvilibrijuma E^* u nekom smislu. Stoga, treba imati na umu da su uslovi stabilnosti širi od uslova (3.39) i (3.40). To znači da ekvilibrijum E^* modela (3.34) može biti stabilan i za neke vrednosti perioda inkubacije τ i σ koje ne pripadaju oblasti Γ definisanoj u (3.38), kao i za neke vrednosti šuma sredine koje ne zadovoljavaju uslov (3.40).

Zaključak

U ovoj disertaciji su razmatrani stohastički populacioni i epidemiološki modeli koji su opisani različitim tipovima stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Od stohastičkih populacionih modela, koji se razmatraju u Glavi 2, proučavani su modeli sa Allee efektom bez i sa vremenski zavisnim kašnjenjem, predator-plen model sa Allee efektom u populaciji plena bez kašnjenja i Gompertzov model sa kašnjenjem i Markovskim prelazima. Za svaki od razmatranih modela pokazana je egzistencija i jedinstvenost pozitivnog rešenja, s obzirom na činjenicu da rešenja razmatranih jednačina i sistema predstavljaju broj jedinki neke populacije, pa samim tim moraju biti nenegativna. Kako se većina ovih modela opisuje stohastičkim diferencijalnim jednačinama koje nisu efektivno rešive, razmatrano je ponašanje rešenja ovih modela na duži vremenski period. Naime, odredjeni su ekvilibrijumi za svaki od pomenutih modela i ispitivano je ponašanje modela u blizini ekvilibrijuma. Takodje su odredjeni i uslovi pod kojima dolazi do istrebljenja populacija opisanih ovim modelima, kao i uslovi pri kojima razmatrane populacije mogu da opstanu u okruženju.

U Glavi 3 su razmatrani stohastički epidemiološki modeli koji opisuju prenošenje direktno prenosivih bolesti bez i sa kašnjenjem, kao i prenošenje malarije sa kašnjenjem. Za ove modele su odredjeni uslovi koje bi parametri modela trebalo da zadovoljavaju da bi pozitivni ekvilibrijumi bili stabilni. Pod tim uslovima rešenja sistema stohastičkih diferencijalnih jednačina kojima su ovi modeli opisani ostaju u okolini ekvilibrijuma, odnosno ne dolazi do ekspanzije bolesti.

Uslovi koji su dobijeni za parametre svih modela, kako onih iz Glave 2, tako i onih iz Glave 3, su provereni na primerima iz realnog života i pokazano je da razmatrani modeli predstavljaju jako dobru aproksimaciju realnosti, u smislu da su se svi dobijeni teorijski rezultati pokazali kao praktično primenjivi.

S obzirom na činjenicu da se mnoge pojave iz drugih oblasti života (mehanike, fizike, ekonomije) mogu opisati matematičkim modelima sličnim onima koji su razmatrani u ovoj disertaciji, na osnovu već opisanih metoda bi se moglo ispitivati ponašanje takvih modela. U zavisnosti od prirode problema koji se modelira, u stohastički model bi se uključivali različiti tipovi kašnjenja, kao i Poissonovi skokovi, i na taj način bi se dobijali složeniji modeli, koji bi mogli da budu predmet daljeg istraživanja.

Summary

The subject of the present PhD thesis are stochastic population and epidemiological models which are described with the different types of stochastic differential equations.

Chapter 2 is dedicated to stochastic population models. In the first instance, stochastic population model with the Allee effect is studied, and then, time dependent delay is included in the model. Also, in Chapter 2 stochastic predator-prey model with the Allee effect on prey population and delayed Gompertz stochastic model with Markovian switching are considered. Since solutions of the considered models represent population size, they are expected to be non-negative. Thus, for all of these models existence and uniqueness of the positive solutions is proved. In most cases, stochastic differential equations which are used in population dynamics are not effectively solvable, and, hence, long time behavior of the mentioned models is studied. For all of these models equilibrium states are found and, then, their stability is considered.

Stochastic epidemiological models are subject of the Chapter 3. Two epidemiological models are considered: stochastic vector-borne disease model with direct transmission and stochastic model which describes spread of malaria disease. A time delay is introduced into mentioned models to represent the incubation time. In stochastic vector-borne disease model with direct transmission one time delay is introduced and it represents time that the vectors need to become infectious. On the other hand, host population also needs some time to become infectious. This time is different in regard to the vector's incubation period. Hence, two time delays are introduced in stochastic malaria model. In both cases, positive (endemic) equilibrium states are found and, then, their stability is considered.

All theoretical results obtained through the thesis are verified with real-life examples. Thereby, it is demonstrated that obtained results are applicable in the real life.

It is well known that similar mathematical models can be used for modeling phenomena in mechanics, physics, economy, etc. Thus, with some modifications, these models have a number of real-life applications. These modifications could rather be topics of the further research.

Literatura

- [1] S. Abbas, D. Bahuguna, M. Banerjee, Effect of stochastic perturbation on a two species competitive model, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 3 (2009) 195–206.
- [2] A. Ackleh, L. Allen, J. Carter, Establishing a beachhead: A stochastic population model with an Allee effect applied to species invasion, *Theoretical population Biology* 71 (2007) 290–300.
- [3] W. C. Allee, *Animal aggregations, a study in general sociology*, University of Chicago Press, Chicago, 1931.
- [4] M. Bandyopadhyay, J. Chattopadhyay, Ratio-dependent predator-prey model: effect of environmental fluctuation and stability, *Nonlinearity* 18 (2005) 913–936.
- [5] I. Barbalat, Systems d'équations differential d'oscillations nonlinéaires, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 4 (2) (1959) 267–270.
- [6] J.C. Beier, Malaria parasite development in mosquitoes, *Annu. Rev. Entomol.* 43 (1998) 519–543.
- [7] E. Beretta, V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, Stability of epidemic model with time delays influenced by stochastic perturbations, *Math. and Computers in Simulation*, 45 (1998) 269–277.
- [8] M. Bodnar, U. Foryś, Three types of simple DDEs describing tumour growth, *J. Biol. Systems* 15 (2007) 1–19.
- [9] P. Borne, V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, Stabilization of inverted pendulum by control with delay, *Dynam. Systems Appl.* 9 (2000) 501–514.
- [10] K. M. Burnetta, S. D'Evelynb, B. A. Kaiserc, P. Nantamanasikarnb, J. A. Roumasset, Beyond the lamppost: Optimal prevention and control of the Brown Tree Snake in Hawaii, *Ecological Economics* 67 (2008) 66–74.
- [11] M. Carletti, Mean-square stability of a stochastic model for bacteriophage infection with time delays, *Mathematical Biosciences* 210 (2007) 395–414.
- [12] M. Carletti, On the stability properties of a stochastic model for phage-bacteria interaction in open marine environment, *Mathematical Biosciences* 175 (2002) 117–131.

- [13] N. Chitnis, J.M. Cushing, J.M. Hyman, Bifurcation analysis of a mathematical model for malaria transmission, SIAM J. Appl. Math. 67(1) (2006) 24–45.
- [14] F. Courchamp, T. Clutton-Brock, B. Grenfell, Inverse density dependence and the Allee effect, TREE 14 (1999) 405–410.
- [15] F. Courchamp, T. Clutton-Brock, B. Grenfell, Multipac dynamic and the Allee effect in the African wild dog, *Lycaon pictus*, Anim. Behav. 3 (2000) 277–285.
- [16] H. Cramer, On the theory of random processes, Ann. Math., 41 (1940) 215–230.
- [17] S. Creel, N.M. Creel, Communal hunting and pack size in African wild dogs, *Lycaon pictus*, Anim. Behav. 50 (1995) 1325–1339.
- [18] S. Creel, M.G.L. Mills, J.W. McNutt, Demography and population dynamics of African wild dogs in three critical populations in Biology and Conservations of Wild Canids, Oxford University Press, 2004, 337–350.
- [19] C. Dellacherie, Capacites et processus stochastiques, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [20] C. Doleans-Dade, P. Meyer, Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Lect. Notes Math., 124 (1970) 77–107.
- [21] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, New York, 1953.
- [22] O. Duman, H. Merdan, Stability analysis of continuous population model involving predation and Allee effect, Chaos, Solitons and Fractals 41 (2009) 1218–1222.
- [23] L. Ferrante, S. Bompadre, L. Leone, M. P. Montanari, A stochastic formulation of the Gompertzian growth model for *in vitro* bactericidal kinetics: parameter estimation and extinction probability, Biometrical Journal 47 (2005) 309–318.
- [24] L. Ferrante, S. Bompadre, L. Possati, L. Leone, Parameter estimation in a Gompertzian stochastic model for tumor growth, Biometrics 56 (2000) 1076–1081.
- [25] I. I. Gikhman, Certain differential equations with random functions, Ukr. Math. J., 2 (3) (1950) 45–69. (In Russian)
- [26] I. I. Gikhman, On the theory of differential equations of random processes, Ukr. Math. J., 2 (4) (1950) 37–63. (In Russian)
- [27] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1968. (In Russian)
- [28] B. Gompertz, On the nature of the function expressive of human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies, Philos. Trans. Roy. Soc. London 115 (1825) 513–583.

- [29] C. M. Grinstead, J. L. Snell, Itnroduction to Probability: Second Revisted Edition, AMS, 1997.
- [30] R. Z. Has'minskij, Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoof & Noordhoof, Aplohen aan der Rijn, The Nederlands, 1980.
- [31] C. S. Holling, Some characteristics of simple types of predation and parasitism, *Can. Entomol.*, 91 (1959) 385–398.
- [32] C. S. Holling, The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly, *Can. Entomol.*, 91 (1959) 293–320.
- [33] K. Itô, Stochastic integrals, *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, 20 (1944) 519–524.
- [34] K. Itô, On a stochastic integral equation, *Proc. Imperial Acad. Tokyo*, 22 (1946) 32–35.
- [35] K. Itô, On stochastic differential equations, *Memorial Math. Society*, 4 (1951) 1–51.
- [36] K. Itô, On a formula concerning stochastic differentials, *Nagoya Math. J.*, 3 (1951) 55–65.
- [37] K. Itô, On a formula of stochastic differentials, *Mathematika, Sbornik perevodov inost. statei*, 3 (1959) 131–141.
- [38] S. Janković, M. Jovanović, Analytic approximations of solutions to stochastic differential equations, Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.
- [39] C. Ji, D. Jiang, X. Li, Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (2011) 1326–1341.
- [40] C. Ji, D. Jiang, N. Shi, Analysis of a predatorprey model with modified LeslieGower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation, *J. Math. Anal. Appl.* 359 (2009) 482–498.
- [41] C. Ji, D. Jiang, N. Shi, D. O'Regan, Existence, uniqueness, stochastic persistence and global stability of positive solutions of the logistic equation with random perturbation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 30 (2007) 77–89.
- [42] D. Jiang, N. Shi, X. Li, Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation, *J. Math. Anal. Appl.* 340 (2008) 588–597.
- [43] D. Jiang, N. Shi, Y. Zhao, Existence, Uniqueness and Global Stability of Positive Solutions to the Food-Limited Population Model with Random Perturbation, *Mathematical and Computer Modelling* 42 (2005) 651–658.

- [44] M. Jovanović, M. Krstić, Stochastically perturbed vector-borne disease models with direct transmission, *Appl. Math. Modell.* 36 (2012) 5214–5228.
- [45] M. Jovanović, M. Krstić, The influence of time-dependent delay on behavior of stochastic population model with the Allee effect (submitted).
- [46] M. Jovanović, M. Krstić, The features of delay stochastic Gompertz model with regime switching (submitted).
- [47] M. Jovanović, S. Janković, Neutral stochastic functional differential equations with additive perturbations, *Applied Mathematics and Computation*, 213 (2009) 370–379.
- [48] I. Karatzas, S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [49] A. Kent, C.P. Doncaster, T. Sluckin, Consequences for predators of rescue and Allee effects on prey, *Ecological Modelling* 162 (2003) 233–245.
- [50] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, Vol. 115, No. 772 (1927), 700–721.
- [51] A. J. Khinchin, Correlation theory of stationar processes, *Uspehi Matem. Nauk*, 5 (1939) 42–51. (in Russian)
- [52] F. C. Klebaner, *Itroduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, London, 1998.
- [53] P.E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1995.
- [54] V. Kolmanovskii, L. Shaikhet, Construction of Lyapunov functionals for stochastic hereditary systems: A survey of some recent results, *Math. Comput. Modelling* 36 (2002) 691–716.
- [55] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic press, New York, 1986.
- [56] A. N. Kolmogorov, Basic notions in probability theory, ONTI, 1936. (in Russian)
- [57] A. N. Kolmogorov, Analytic methods in probability theory, *Uspehi Matem. Nauk*, (1938) 5–41. (in Russian)
- [58] M. Krstić, The effect of stochastic perturbation on a nonlinear delay malaria epidemic model, *Math. and Computers in Simulation* 82 (2011) 558–569.
- [59] M. Krstić, M. Jovanović, On stochastic populatiom model with the Allee effect, *Math. Comput. Modelling* 52 (2010) 370–379.

- [60] H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967) 209–245.
- [61] A. K. Laird, Dynamics of tumour growth, Br. J. Cancer 18 (1964) 490-502.
- [62] A.K. Laird, Dynamics of tumour growth: comparison of growth rates and extrapolation of growth curve to one cell, Br. J. Cancer 19 (1965) 278-291.
- [63] A. Liebhold, J. Bascompte, The Allee effect, stochastic dynamics and the eradication of alien species, Ecology Letters 6 (2003) 133–140.
- [64] H.Y. Liu, Z.S Lin, H.Liu, Response of oriental white storks *Ciconia bouciana* to the accumulative impact of anthropogenic habitat destruction and possible Allee effect, Bird Conservation International 18 (2008) 292–300.
- [65] K. Liu, X. Xia, On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations, Systems Control Lett., 37 (1999) 207–215.
- [66] A. Lotka, Elements of Physical Biology, Williams and Wilkins, Baltimore, Md, 1924.
- [67] Q. Lu, Stability of SIRS system with random perturbations, Physica A 388 (2009) 3677–3686.
- [68] J. Lv, K. Wang, Analysis of stochastic predator-prey model with modified Leslie-Gower response, Abstractand Applied Analysis, doi: 10.1155/2011/518719.
- [69] D. Macdonald, The encyclopedia of mammals, Facts on File Publications, New York, 1984.
- [70] X. Mao, Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997) 389–401.
- [71] X. Mao, Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Sto. Proce. Their Appl., 79 (1999) 45–67.
- [72] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood, Chichester, UK, 2007 (Second edition).
- [73] X. Mao, Stochastic version of the Lassalle theorem, J. Differential Equations 153 (1999) 175–195.
- [74] X. Mao, A. Matasov, A.B. Piunovskiy, Stochastic differential delay equation with Markovian switching, Bernoulli 6 (2000) 73–90.
- [75] X. Mao, L. Shaikhet, Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching, Stability and control: Theory and applications 3 (2000) 87–101.
- [76] X. Mao, C. Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperical college press, 2006.

- [77] H. Merdan, O. Duman, O. Akin, C. Celik, Allee effects on population dynamics in continuous (overlapping) case, *Chaos, Solitons and Fractals* 39 (2009) 1994–2001.
- [78] P. A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, *Illinois J. Math.* 2 (1962) 193–205.
- [79] P. A. Meyer, Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem, *Illinois J. Math.* 7 (1963) 1–17.
- [80] P. A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell, Waltham, 1966.
- [81] P. A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastiques, *Lecture Notes in Math.* 511 (1976) 245–398.
- [82] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [83] A. dOnofrio, A general framework for modeling tumor-immune system competition and immunotherapy: Mathematical analysis and biomedical inferences, *Physica D* 208 (2005) 220–235.
- [84] A. dOnofrio, A. Fasano, B. Monechi, A generalization of Gompertz law compatible with the GyllenbergWebb theory for tumour growth, *Mathematical Biosciences* 230 (2011) 45–54.
- [85] M. J. Piotrowska, U. Foryś, The nature of Hopf bifurcation for the Gompertz model with delays, *Math. Comput. Modelling* 54 (2011) 2183–2198.
- [86] J. Randjelović, S. Janković, On the p th moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 326 (2007) 266–280.
- [87] S. Ruan, D. Xiao, J. Beier, On the delayed Ross-Macdonald model for malaria transmission, *Bull. of Math. Biology* 70 (2008) 1098–1114.
- [88] S. H. Saker, Stability and Hopf Bifurcations of nonlinear delay malaria epidemic model, *Nonlinear Analysis: Real World Appl.* 11 (2010) 784–799.
- [89] J.A. Savidge, F.J. Qualls, G. Rodda, Reproductive biology of the Brown Tree Snake, *Bioiga irregularis* (Reptilia: Colubridae), during colonization of Guam and comparation with that in their native range, *Pacific Science*, 61 (2) (2007) 191–199.
- [90] R. Schuster, H. Schuster, Reconstruction models for the Ehrlich Ascites tumor for the mouse, in: O. Arino, D. Axelrod, M. Kimmel (Eds.), in: *Mathematical Population Dynamics*, vol. 2, Wuertz, Winnipeg, Canada, 1995, 335–348.
- [91] L. Shaikhet, Some new aspects of Lyapunov type theorems for stochastic differential equations of neutral type, *SIAM J. Control Optim.* 48(7) (2010) 4481–4499.

- [92] L. Shaikhet, Stability in probability of nonlinear stochastic hereditary systems, *Dynam. Systems Appl.* 4(2) (1995) 199–204.
- [93] L. Shaikhet, Stability in probability of nonlinear stochastic systems with delay, *Math. Notes* 57(1-2) (1995) 103–106.
- [94] L. Shaikhet, Stability of a positive point of equilibrium of one nonlinear system with aftereffect and stochastic perturbations, *Dynam. Systems Appl.* 17 (2008) 235–253.
- [95] L. Shaikhet, Stability of predator-prey model with aftereffect by stochastic perturbation, *SACTA* 1(1) (1998) 3–13.
- [96] L. Shaikhet, Stability of stochastic hereditary systems with Markov switching, *Theory of stochastic processes*, 2 (1996) 180–184.
- [97] E. E. Sluckii, Sur les fonctions éventuelles continues intégrables et dérivables dans le sens stochastique, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 187 (1928) 370–372.
- [98] E. Tornatore, S.M. Buccellato, P. Vetro, Stability of stochastic SIR system, *Physica A* 354 (2005) 111–126.
- [99] J. Tumwiine, J.Y.T. Mugisha, L.S. Luboobi, A host-vector model for malaria with infective immigrants, *J. of Math. Anal. and Appl.* 361 (2010) 139–149.
- [100] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie d'animali conviventi, *Mem. Acad. Lincei* 2 (1926) 31–113.
- [101] H.-M. Wei, X.-Z. Li, M. Martcheva, An epidemic model of a vector-borne disease with direct transmission and time delay, *J. of Math. Anal. and Appl.* 342 (2008) 895–908.
- [102] N. Wiener, Differential spaces, *J. Math. Phys.*, 2 (1923) 131–174.
- [103] N. Wiener, The homogeneous chaos, *Amer. J. Math.*, 60 (1930) 897–936.
- [104] C.P. Winsor, The Gompertz curve as a growth curve, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* (1932) 1–7.
- [105] M. L. Wolfe, Mortality Patterns in the Isle Royale Moose Population, *American Midland Naturalist*, 97 (1977) 267–279.
- [106] www.populationmatters.org
- [107] R. Xu, L. Chen, M. A. J. Chaplain, Persistence and global stability in a delayed predator-prey system with Holling-type functional response, *ANZIAM J.* 46 (2004) 121–141.
- [108] Y. Xu, S. Zhu, S. Hu, A stochastic Lotka-Volterra model with variable delay, THE SIXTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NEURAL NETWORKS, *Advances in soft computing* 56 (2009) 91–100.

- [109] Q. Yang, D. Jiang, A note on asymptotic behaviors of stochastic population model with Allee effect, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 4611–4619.
- [110] J. Yu, D. Jiang, N. Shi, Global stability of two-group SIR model with random perturbation, *J. of Math. Anal. and Appl.* 360 (2009) 235–244.
- [111] C. Yuan, X. Mao, Asymptotic stability and boundedness of stochastic differential equations with Markovian switching, *Sto. Proce. Their Appl.* 103 (2003) 277–291.
- [112] S.R. Zhou, Y.F. Liu, G. Wang, The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theoretical Population Biology* 67 (2005) 23–31.
- [113] J. Zu, M. Mimura, The impact of Allee effect on a predator-prey system with Holling type II functional response, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 3542–3556.