УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

Милица З. Колунџија

ФРЕДХОЛМОВА СВОЈСТВА И УОПШТЕНИ ИНВЕРЗИ МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Докторска дисертација

Ниш, 2013.

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

Милица З. Колунџија

ФРЕДХОЛМОВА СВОЈСТВА И УОПШТЕНИ ИНВЕРЗИ МАТРИЦА ОПЕРАТОРА

Докторска дисертација

Ментор
Проф. Др. Драган С. Ђорђевић

Ниш, 2013.

Предговор

Предмет изучавања ове докторске дисертације су матрице чији су елементи линеарни ограничени оператори на Банаховим или Хилбертовим просторима. Такве матрице су заправо оператори који се називају матрице оператора.

Оператори који се на овај начин могу представити, део су разних области математике и налазе примену у њима. Користе се у теорији система, проблему седла у нелинеарној анализи, дискретизацији парцијалних диференцијалних једначина, итд.

У овој дисертацији изложени су нови и оригинални резултати који описују Фредхолмова својства, инвертибилност и уопштену инвертибилност матрица оператора. Приказани су резултати објављени у радовима [22], [23], [43], [44], [45], као и резултати из још увек необјављеног рада [46].

Фредхолмова теорија и теорија уопштених инверза налази своје корене у Фредхолмовом раду [31] из 1903. године. Касније Мур 1920. године уводи уопштени инверз матрица за који 1955. године Пенроуз доказује да је јединствен такав да задовољава четири матричне једначине. У њихову част, овај инверз се назива Мур-Пенроузов инверз. Тада теорија уопштених инверза налази ширу примену, између осталог и у проблемима везаним за интегралне и диференцијалне једначине. Примена и новодоказане особине уопштених инверза доводе до експанзије истраживања уопштених инверза у другој половини двадесетог века.

Доктроска дисертација је подељена на пет глава, а свака глава на одељке.

У првој глави се налазе основни појмови који се користе у дисертацији, као и њихове основне особине. Прва глава практично садржи најосновније ствари везане за теорију уопштених инверза и Фредхолмову теорију.

Друга глава се бави проблемом инвертибилности матрица оператора. Подељена је на два одељка. Одељак 2.1 испитује десну инвертибилност матрица оператора који имају задату прву врсту.

У овом одељку се налазе услови под којима постоје оператори из друге врсте матрице, тако да матрица оператора има десни инверз. Резултати овог одељка су објављени у раду [43]. У одељку 2.2 истражује се инвертибилност горње троугаоне матрице оператора. Еквивалентне услове под којима горња троугаона матрица оператора има инверз доказали су Х. Ду и Ј. Пан у раду [29]. У овом одељку испитивано је да ли део тих услова чини еквивалентне услове за леву инвертибилност, а други део еквивалентне услове за десну инвертибилност. Део ових резултата објављен у раду [22].

Трећа глава садржи резултате о уопштеним инверзима матрица оператора. У одељку 3.1 изложени су резултати из рада [22] који се баве уопштеном инвертибилношћу горње троугаоне матрице оператора. Остали одељци ове главе баве се уопштеним инверзима у Банаховим алгебрама. Наиме, и елементи Банахове алгебре се могу записати у облику матрице елемената одговарајућих Банахових алгебри у односу на неки идемпотент. Представљање елемената Банахове алгебре у матричном облику је уопштење представљања оператора у облику матрице јер скуп линеарних ограничених оператора чини својеврсну Банахову алгебру. У одељку 3.2 испитиване су две врсте уопштених инверза и то у пододељку 3.2.1 спољашњи инверз са фиксираним идемпотентима, а у пододељку 3.2.2 Дразинов и уопштени Дразинов инверз. Пододељак 3.2.1 чине резултати из рада [44], док је пододељак 3.2.2 садржан од резултата из објављеног рада [45] и послатог рада [46].

Четврта глава бави се Фредхолмовим својствима матрица оператора. Подељена је на два одељка. Први одељак 4.1 испитује десна и лева Фредхолмова својства матрица оператора са задатим операторима у првој врсти. Посебно се испитују еквивалентни услови под којима ове матрице оператора чине десни, односно леви Фредхолмов оператор. Резултати ове главе су објављени у раду [23]. Други одељак 4.2 бави се особинама левог Браудеровог оператора горње троугаоне матрице оператора као специјалног случаја Фредхолмових оператора. Резултати овог одељка чине део рада [22].

Пета глава дисертације описује спектрална својства матрица оператора. Као последице теорема доказаних у претходним главама описани су разни спектри матрица оператора. Ова глава садржи и одељак 5.1 који се бави условним спектром и псеудо-спектром блок матрица у Банаховим алгебрама као уопштењем стандардног спектра. Резултати овог одељка су објављени у раду [44].

*

* *

Желим да изразим своју дубоку захвалност свом ментору Проф. др. Драгану С. Ђорђевићу како на великој подршци и несебичној помоћи током мог научног рада, тако и на стручном усмеравању и ангажовању које је допринело квалитету ове дисертације.

Желим да се захвалим и др. Дијани Мосић на подршци и међусобној сарадњи приликом израде заједничких радова.

Посебно желим да се захвалим свом сину, супругу и родитељима чија велика подршка и стрпљење су умногоме олакшали рад током израде ове дисертације.

Садржај

Предговор i

1 Увод **1**
- 1.1 Матрице оператора и блок матрице . . . 4
- 1.2 Уопштени инверзи . . . 7
  - 1.2.1 Уопштени инверзи у Банаховим алгебрама . . . 8
  - 1.2.2 Уопштени инверзи оператора . . . 14
- 1.3 Фредхолмова својства . . . 19
- 1.4 Шуров комплемент . . . 23

2 Инвертибилност матрица оператора **26**
- 2.1 Десна инвертибилност матрица оператора облика $M_{(T,S)}$ . . . 27
- 2.2 Инвертибилност матрица оператора облика M_C . . . 30
  - 2.2.1 Лева инвертибилност матрица оператора облика M_C 32
  - 2.2.2 Десна инвертибилност матрица оператора облика M_C 36

3 Уопштени инверзи **39**
- 3.1 Регуларност матрица оператора облика M_C . . . 39
- 3.2 Уопштена инвертибилност у Банаховим алгебрама . . . 42
  - 3.2.1 (p, q)-спољашњи инверз блок матрица . . . 43
  - 3.2.2 Дразинов инверз блок матрица . . . 46

4 Фредхолмова својства матрица оператора **77**
- 4.1 Десни и леви Фредхолмов оператор $M_{(T,S)}$ . . . 77
  - 4.1.1 Десни Фредхолмов оператор . . . 79
  - 4.1.2 Леви Фредхолмов оператор . . . 84
- 4.2 Леви Браудеров оператор M_C . . . 87

5 Спектрална својства матрица оператора **91**
- 5.1 Условни и псеудо-спектар . . . 93

Литература **102**

1 Увод

У овој дисертацији биће представљени резултати у вези са линеарним ограниченим операторима на Банаховим просторима, специјално Хилбертовим, и резултати у Банаховим алгебрама. Од интереса ће бити матрично представљање оператора, односно елемената Банахове алгебре. Биће изучавана Фредхолмова својства и уопштена инвертибилност таквих оператора, односно елемената Банахове алгебре.

Уведимо најпре појмове и ознаке које ће бити од користи за излагање тих резултата.

Појмови у Банаховим просторима

Нека су X и Y произвољни Банахови простори. Означимо са $\mathcal{L}(X,Y)$ скуп свих линеарних ограничених оператора са простора X у простор Y. Скраћено пишемо $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$.

Слику оператора $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ означићемо са $\mathcal{R}(A)$ и то је скуп $\mathcal{R}(A)=\{Ax \mid x\in X\}$. Језгро оператора A означимо са $\mathcal{N}(A)$ и оно је једнако $\mathcal{N}(A)=\{x\in X \mid Ax=0\}$.

Нулост оператора A, у ознаци $\alpha(A)$, је димензија језгра тог оператора и важи $\alpha(A)=\dim\mathcal{N}(A)$ ако је $\mathcal{N}(A)$ коначно димензионалан и $\alpha(A)=\infty$ ако је $\mathcal{N}(A)$ бесконачно димензионалан.

Дефект оператора A, у ознаци $\beta(A)$, је кодимензија слике тог оператора и важи $\beta(A)=\dim Y/\mathcal{R}(A)$ ако је $Y/\mathcal{R}(A)$ коначно димензионалан и $\beta(A)=\infty$ ако је $Y/\mathcal{R}(A)$ бесконачно димензионалан.

Нека је оператор $A\in\mathcal{L}(X)$. Раст оператора A је најмањи природан број k за који важи $\mathcal{N}(A^k)=\mathcal{N}(A^{k+1})$, у ознаци $\operatorname{asc}(A)$. Уколико такав природан број не постоји, тада је $\operatorname{asc}(A)=\infty$.

Пад оператора A је најмањи природан број k за који важи $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$, у ознаци $\mathrm{dsc}(A)$. Ако такав број не постоји, за пад узимамо $\mathrm{dsc}(A) = \infty$.

Скуп свих оператора са коначном сликом простора X у простор Y означимо са $\mathcal{F}(X, Y)$. Краће $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

Компактан оператор је онај који сваки ограничен скуп слика у релативно компактан скуп (релативно компактан скуп је онај чије је затворење компактан скуп). Скуп свих компактних оператора из X у Y означимо са $\mathcal{K}(X, Y)$. Јасно $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.

Скуп $\mathcal{K}(X, Y)$ јесте идеал у Банаховој алгебри $\mathcal{L}(X, Y)$.

Сваки компактан оператор је ограничен, док је оператор са коначном сликом увек компактан.

Важи $\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

Јединични оператор на простору X означаваћемо са I_X.

Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ је инвертибилан ако постоји оператор $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ тако да је $AB = I_Y$ и $BA = I_X$. Такав оператор B назива се инверз оператора A.

Када важи само једнакост $BA = I_X$, тада је оператор A лево инвертибилан и оператор B је његов леви инверз. Ако важи једнакост $AB = I_Y$ тада је A десно инвертибилан и оператор B је његов десни инверз.

Користимо ознаке $\mathcal{G}_l(X, Y)$ и $\mathcal{G}_r(X, Y)$, редом, да означимо све лево и десно инвертибилне операторе из $\mathcal{L}(X, Y)$. Ознака $\mathcal{G}(X, Y)$ биће за све инвертибилне операторе. Скраћенице $\mathcal{G}_l(X)$, $\mathcal{G}_r(X)$ и $\mathcal{G}(X)$ су јасне.

Подсетимо се да $A \in \mathcal{G}_l(X, Y)$ ако и само ако $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ и $\mathcal{R}(A)$ је затворен и комплементаран у Y. Такође, $A \in \mathcal{G}_r(X)$ ако и само ако је $\mathcal{N}(A)$ комплементаран у X и $\mathcal{R}(A) = Y$.

Даље, $\sigma(A)$ и $r(A)$ представљаће редом спектар и спектрални полупречник оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и то су

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{G}(X, Y)\}, \qquad r(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Два Хилбертова простора, поред других ствари, могу се упоређивати својим ортогоналним димензијама.

У случају Банахових простора постојање лево инвертибилних оператора може бити корисна замена.

Дефиниција 1.1. [21] Нека су X и Y Банахови простори. Ако постоји лево инвертибилан оператор $J \in \mathcal{L}(X, Y)$, тада кажемо да се X може утопити у Y и означавамо са $X \preceq Y$.

Напомена 1. Такође, $X \preceq Y$ ако и само ако постоји десно инвертибилан оператор $J_1 : Y \to X$.

Ако су X и Y Хилбертови простори, тада важи $X \preceq Y$ ако и само ако $\dim X \leq \dim Y$.

Појмови у Банаховим алгебрама

Нека је $\mathcal{A}$ комплексна Банахова алгебра са јединицом 1 и нека је $a \in \mathcal{A}$. Када имамо производ елемента $\lambda \in \mathbb{C}$ и $1 \in \mathcal{A}$, ради лакшег записа, писаћемо $\lambda \cdot 1 = \lambda \in \mathcal{A}$.

Елемент a је инвертибилан ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$ такав да је $ab = ba = 1$. Како је такав елемент b јединствен, називамо га инверзом елемента a и означавамо са a^{-1}. Скуп свих инвертибилних елемената Банахове алгебре $\mathcal{A}$ означимо са $\mathcal{A}^{-1}$.

Елемент $a \in \mathcal{A}$ је идемпотент ако важи $a^2 = a$. Скуп свих идемпотената Банахове алгебре $\mathcal{A}$ означимо са $\mathcal{A}^{\bullet}$.

Спектар елемента $a \in \mathcal{A}$ је скуп $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \notin \mathcal{A}\}$, док је спектрални полупречник елемента $a \in \mathcal{A}$ број $r(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$. Важи $0 \leq r(a) \leq ||a||$. Спектрални полупречник се може рачунати и као $r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} ||a^n||^{\frac{1}{n}}$.

Скуп свих тачака нагомилавања спектра елемента a, означићемо са $\operatorname{acc}\sigma(a)$.

Нилпотентан елемент $a \in \mathcal{A}$ је онај за који постоји природан број n такав да је $a^n = 0$. Степен нилпотентности елемента a је најмањи такав природан број.

Квазинилпотентан елемент $a \in \mathcal{A}$ је онај елемент за који важи $r(a) = 0$, што је еквивалентно са тим да спектар тог елемента садржи само 0, тј. $\sigma(a) = \{0\}$.

Скуп свих нилпотентних и квазинилпотентних елемената означимо редом са $\mathcal{A}^{nil}$ и $\mathcal{A}^{qnil}$. Сваки нилпотентан елемент је и квазинилпотентан. Обрнуто у општем случају не важи.

1.1 Матрице оператора и блок матрице

Матрице оператора

Нека је Z бесконачно димензионалан Банахов простор, такав да је $Z = X \oplus Y$ за неке затворене потпросторе X и Y. Ова сума биће такође означена са $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$. Ако је Z Хилбертов простор, тада увек претпостављамо да су X и Y затворени и међусобно ортогонални потпростори простора Z, тако да у том случају $Z = X \oplus Y$ означава ортогоналну (директну) суму.

Ако је W коначно димензионалан потпростор Банаховог простора, тада $\dim W$ означава димензију простора W. Ако је W бесконачно димензионалан, тада једноставно пишемо $\dim W = \infty$. Међутим, ако је X Хилбертов простор и W затворен потпростор простора X, тада је $\dim W$ ортогонална димензија простора W.

Ако је $Z = X \oplus Y$, тада се сваки линеарни ограничени оператор $M \in \mathcal{L}(Z)$ може представити у следећем матричном облику:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

за неке $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $D \in \mathcal{L}(Y)$. Са друге стране, произвољни оператори A, B, C, D (линеарни и ограничени на одговарајућим потпросторима) дају линеаран и ограничен оператор M на простору Z.

Од интереса изучавања ове дисертације биће оператори у следећим матричним облицима:

- $M_{(T,S)} = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix}$, где су оператори A и C задати, а оператори T и S произвољни. Ознака $M_{(T,S)}$ је узета како би указивала на то да тај оператор зависи од оператора T и S;
- $M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, где су A и B задати, а оператор C произвољан. Такође, ознака M_C указује на зависност од оператора C.

Специјално, када за оператор C у матричном оператору M_C узмемо нула оператор, добијамо дијагоналну матрицу оператора коју ћемо означавати са M_0. Дакле,

$$M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Блок матрице у Банаховим алгебрама.

У Банаховим алгебрама можемо користити идемпотенте како би представили елементе у матричном облику.

Нека су $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$ произвољни идемпотенти. Тада произвољан елемент $a \in \mathcal{A}$ можемо записати у облику суме:

$$a = paq + pa(1-q) + (1-p)aq + (1-p)a(1-q)$$

и увести следеће ознаке:

$$a_{11} = paq, \quad a_{12} = pa(1-q), \quad a_{21} = (1-p)aq, \quad a_{22} = (1-p)a(1-q).$$

Одатле, идемпотенти $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$ одређују представљање произвољног елемента $a \in \mathcal{A}$ у облику суме елемената

$$a_{11} \in p\mathcal{A}q, \qquad a_{12} \in p\mathcal{A}(1-q), \qquad a_{21} \in (1-p)\mathcal{A}q, \qquad a_{22} \in (1-p)\mathcal{A}(1-q),$$

коју можемо записати у следећем матричном облику:

$$a = \begin{bmatrix} paq & pa(1-q) \\ (1-p)aq & (1-p)a(1-q) \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{p,q}.$$

Од интереса истраживања ове дисертације је представљање произвољног елемента Банахове алгебре у матричном облику када су идемпотенти p и q једнаки. У том случају, нека је $p \in \mathcal{A}^\bullet$ произвољан идемпотент. Репрезентација произвољног елемента $a \in \mathcal{A}$ изгледа на следећи начин:

$$a = \begin{bmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{bmatrix}_{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{p},$$

где $a_{11} \in p\mathcal{A}p, \quad a_{12} \in p\mathcal{A}(1-p), \quad a_{21} \in (1-p)\mathcal{A}p, \quad a_{22} \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ и тада кажемо да је то матрична репрезентација елемента a у односу на идемпотент p.

Приметимо да су $p\mathcal{A}p$ и $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ Банахове алгебре са јединицом. Јединица у Банаховој алгебри $p\mathcal{A}p$ је идемпотент p, док је јединица у $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ идемпотент $1-p$.

1.2 Уопштени инверзи

Посматрајмо основни проблем у решавању опште линеарне једначине

$$Ax = b, \tag{1}$$

где је $b \in Y$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Уколико је оператор A инвертибилан, тада једначина (1) има јединствено решење $x = A^{-1}b$. У општем случају није овако. Ако A није инвертибилан, дата једначина може имати више од једног решења уколико је $b \in \mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A) \neq 0$ или, пак, нула решења када $b \notin \mathcal{R}(A)$.

Чак и када не постоји решење једначине (1), можемо посматрати уопштени или псеудо-инверз оператора A да бисмо добили псеудо-решење једначине (1). Тражимо одговарајући оператор T тако да је $x = Tb$ нека врста решења једначине (1). Тај уопштени инверз оператора A своди се на обичан инверз тог оператора у случајевима када је A инвертибилан. Постоји више врста псеудорешења једначине (1).

Једно од решења је и најбоље апроксимативно решење једначине.

Дефиниција 1.2. Елемент $x_0 \in X$ је најбоље апроксимативно решење једначине (1) ако важи следеће:

$$||Ax_0 - b|| = \min_{x \in X} ||Ax - b||.$$

Најраспрострањенији пример једначине (1) је онај за који је $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ и A је матрица комплексних бројева типа $m \times n$.

Означимо са $\mathbb{C}_r^{m \times n}$ скуп свих матрица комплексних бројева типа $m \times n$ и ранга r.

Нека је $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ и нека A^* означава конјуговано транспоновану матрицу матрице A. Тада је A^*A инвертибилна матрица реда n и најмање квадратно решење једначине (1) може да се добије решавањем једначине

$$A^*Ax = A^*b.$$

Имамо да је $x = (A^*A)^{-1}A^*b$. Нека је $B = (A^*A)^{-1}A^*$.

Може се проверити да матрица B задовољава следеће једнакости:

$$\begin{array}{ll} (1) & ABA = A \\ (2) & BAB = B \\ (3) & (AB)^* = AB \\ (4) & (BA)^* = BA \end{array} \qquad (\Pi)$$

Ове четири једнакости се обично називају Пенроузови услови. Матрица B која задовољава те услове назива се Мур-Пенроузов уопштени инверз матрице A и означава са $B = A^\dagger$.

Дакле, најмање квадратно решење једначине (1) је $x = A^\dagger b$.

Специјално, када је $m = n = r$, имамо да је матрица A инвертибилна и важи $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^* = A^{-1}(A^*)-1A^* = A^{-1}$.

1.2.1 Уопштени инверзи у Банаховим алгебрама

Дефиниција 1.3. Елемент $a \in \mathcal{A}$ је регуларан (или унутрашње регуларан) ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$ такав да је $aba = a$. Елемент b назива се унутрашњи инверз елемента a.

Приметимо да уколико је елемент Банахове алгебре инвертибилан, тада је он и регуларан. Тако да је скуп свих инвертибилних елемената подскуп скупа свих регуларних елемената Банахове алгебре.

Дефиниција 1.4. Елемент $a \in \mathcal{A}$ има спољашњи инверз ако постоји елемент $b \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$ такав да је $bab = b$. За елемент a кажемо да је спољашње регуларан.

Скуп свих спољашње регуларних елемената означићемо са $\mathcal{A}^{(2)}$. Ознака потиче из Пенроузових једначина (П), од којих спољашњи инверз задовољава другу једначину.

Приметимо да ако је $b \in \mathcal{A}$ унутрашњи или спољашњи инверз елемента $a \in \mathcal{A}$, тада су елементи ba и $1 - ab$ идемпотенти. Може се посматрати унутрашњи или спољашњи инверз такав да ови идемпотенти буду фиксирани.

Дефиниција 1.5. [28] Нека је $a \in \mathcal{A}$ и $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Елемент $b \in \mathcal{A}$ који задовољава једнакости

$$aba = a, \qquad ba = p, \qquad 1 - ab = q,$$

називамо (p, q)-унутрашњи инверз елемента a.

Уколико постоји (p, q)-унутрашњи инверз елемента a, он не мора бити јединствен [57, 58].

Ђорђевић и Веи (Wei) су у [28] увели спољашње инверзе у односу на дате идемпотенте:

Дефиниција 1.6. [28] Нека је $a \in \mathcal{A}$ и $p, q \in \mathcal{A}^{\bullet}$. Елемент $b \in \mathcal{A}$ који задовољава једнакости

$$bab = b, \qquad ba = p, \qquad 1 - ab = q,$$

називамо (p, q)-спољашњи инверз елемента a.

Спољашњи инверз не мора бити јединствен, док је (p, q)-спољашњи инверз јединствен. Означимо га са $a^{(2)}_{p,q}$.

Јединственост $a^{(2)}_{p,q}$ је доказана у следећој теореми.

Теорема 1.1. [28] Нека је $a \in \mathcal{A}$ и $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$. Тада су следећа тврђења еквивалента:

(1) Постоји $a^{(2)}_{p,q}$;

(2) $(1-q)a = (1-q)ap$ и постоји неко $b \in \mathcal{A}$такво да је $pb = b, bq = 0$ и $ab = 1-q$.

Штавише, ако постоји $a^{(2)}_{p,q}$, тада је он и јединствен.

Скуп свих елемената из $\mathcal{A}$ који имају спољашњи уопштени инверз са датим идемпотентима $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$ означићемо са $\mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$.

Произвољни елемент $a \in \mathcal{A}$ не мора да има ни унутрашњи ни спољашњи инверз [9]. Специјално, у Банаховој алгебри линеарних ограничених оператора, увек постоји спољашњи инверз линеарног ограниченог оператора.

Уколико је елемент a инвертибилан, тада је он и спољашње и унутрашње регуларан. Инверз елемента a је и спољашњи и унутрашњи инверз тог елемента и важи $a^{-1} = a^{(2)}_{1,0}$.

Дефиниција 1.7. Елемент $b \in \mathcal{A}$ који је и спољашњи и унутрашњи инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ назива се рефлексивни уопштени инверз елемента a. За елемент a кажемо да је рефлексивно регуларан.

Ако елемент a Банахове алгебре има унутрашњи инверз $b \in \mathcal{A}$, тада је елемент bab рефлексивни уопштени инверз елемента a. Дакле, унутрашња регуларност у Банаховој алгебри повлачи рефлексивну регуларност.

Ако је $a \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ такав да је он и унутрашње регуларан, тада a има рефлексивни уопштени инверз у односу на дате идемпотенте p и q и означавамо га са $a^{(1,2)}_{p,q}$. Уколико постоји, јединственост елемента $a^{(1,2)}_{p,q}$ је очигледна.

Дефиниција 1.8. [24] Нека је $a \in \mathcal{A}$. Елемент $b \in \mathcal{A}$ је Дразинов инверз елемента a ако важе следеће једнакости:

$$bab = b, \quad ab = ba \quad \text{и} \quad a^{n+1}b = a^n,$$

за неки ненегативан цео број n. Најмањи такав n назива се Дразинов индекс елемента a.

Ако Дразинов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ постоји, онда је он јединствен и означавамо га са a^D и за a кажемо да је Дразин инвертибилан. Скуп свих Дразин инвертибилних елемената означимо са $\mathcal{A}^D$. Дразинов индекс означавамо са $\mathrm{ind}(a)$.

Елемент a је инвертибилан ако и само ако је $\mathrm{ind}(a) = 0$.

Уколико трећи услов из дефиниције Дразиновог инверза важи за $n = 1$, тј. ако важи $aba = a$, такав инверз називамо групни инверз елемента a и означавамо са $a^{\#}$. Дразинов индекс таквог елемента је $\mathrm{ind}(a) = 1$. Скуп свих елемената Банахове алгебре $\mathcal{A}$ који имају групни инверз означимо са $\mathcal{A}^{\#}$. Важи $\mathcal{A}^{\#} \subset \mathcal{A}^D$.

Услов из дефиниције Дразиновог инверза $a^{n+1}b = a^n$, за $n \geq 0$, је еквивалентан са условом $a(1 - ab) \in \mathcal{A}^{nil}$. Дразинов индекс елемента a је степен нилпотентности елемента $a(1 - ab)$.

Како је $\mathcal{A}^{nil} \subset \mathcal{A}^{qnil}$, уопштење Дразиновог инверза добијамо замењујући нилпотентност елемента $a(1-ax)$ са његовом квазинилпотентношћу.

Дефиниција 1.9. Уопштени Дразинов инверз елемента $a \in \mathcal{A}$ је елемент $b \in \mathcal{A}$ који задовољава услове:

$$bab = b, \qquad ab = ba, \qquad a(1 - ab) \in \mathcal{A}^{qnil}.$$

Ако уопштени Дразинов инверз елемента a постоји, тада је он јединствен и означавамо га са a^d. Скуп свих елемената за које постоји уопштени Дразинов инверз означимо са $\mathcal{A}^d$. Ако елемент

a има Дразинов инверз, онда он има и уопштени Дразинов инверз. Важи $\mathcal{A}^D \subset \mathcal{A}^d$.

Ако је $a \in \mathcal{A}^d \backslash \mathcal{A}^D$, тада Дразинов индекс елемента a дефинишемо као $\mathrm{ind}(a) = \infty$.

Колиха [41] је изучавао уопштени Дразинов инверз у Банаховим алгебрама. Из тог разлога се овај инверз назива још и Колиха-Дразинов инверз. Харте је дао алтернативну дефиницију уопштеног Дразиновог инверза у прстенима [39].

Приметимо да је: $\mathcal{A}^{-1} \subset \mathcal{A}^{\#} \subset \mathcal{A}^D \subset \mathcal{A}^d$.

Услове за егзистенцију и јединственост уопштеног Дразиновог инверза даје следећа теорема.

Теорема 1.2. [24] Нека је $a \in \mathcal{A}$. Тада су следећи услови еквивалентни:

(i) a има уопштени Дразинов инверз

(ii) $0 \notin \operatorname{acc} \sigma(a)$

(iii) Постоји идемпотент $p \in \mathcal{A}$ који комутира са a такав да је елемент ap квазинилпотентан и елемент $a + p$ инвертибилан.

Ако важи (i), (ii) или (iii) тада је $p = 1 - aa^d$ и

$$a^d = (a + p)^{-1}(1 - p).$$

Дакле, a^d је јединствен.

Идемпотент $p \in \mathcal{A}$ из претходне теореме назива се спектрални идемпотент елемента a. Има особину да важи $ap = pa \in \mathcal{A}^{qnil}$, $\quad a + p \in \mathcal{A}^{-1}$. Такав елемент је јединствен, ако постоји, и означавамо га са a^π [38, 37, 41, 42].

Ако је елемент $a \in \mathcal{A}$ уопштено Дразин инвертибилан и $a^\pi = 1 - aa^d$ његов спектрални идемпотент, тада је a^d спољашњи инверз у односу на идемпотенте $1 - a^\pi$ и a^π, тј. $a^d = a^{(2)}_{1-a^\pi, a^\pi}$.

Нека је елемент $a \in \mathcal{A}$ уопштено Дразин инвертибилан. Погледајмо његову матричну форму у односу на идемпотент $p = 1 - a^\pi$.

Како је $a^\pi = 1 - aa^d$ спектрални идемпотент, онда је и овако узето $p = aa^d$ идемпотент па можемо посматрати матричну форму елемента a у односу на њега. Имамо да је:

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} pap & pa(1-p) \\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p) \end{bmatrix}_p \\ &= \begin{bmatrix} a^2a^d & 0 \\ 0 & a(1-aa^d) \end{bmatrix}_{aa^d} = \begin{bmatrix} a^2a^d & 0 \\ 0 & aa^\pi \end{bmatrix}_{aa^d}. \end{aligned}$$

Означимо са $a_1 = a^2a^d$ и $a_2 = aa^\pi$ и Банахове алгебре са $\mathcal{B} = aa^d\mathcal{A}aa^d$ и $\mathcal{C} = (1-aa^d)\mathcal{A}(1-aa^d)$. Елемент a_2 је квазинилпотентан у Банаховој алгебри $\mathcal{A}$, па је онда квазинилпотентан и у Банаховој алгебри $\mathcal{C}$. Имамо да је $a^d = a^daa^d = (aa^d)a^d(aa^d) \in \mathcal{B}$ и још важи $a^da_1 = a_1a^d = a^2a^da^d = aa^d$. Како је aa^d јединица у $\mathcal{B}$, одатле следи да је елемент a_1 инвертибилан у $\mathcal{B}$ и његов инверз је a^d, тј. $a_1|_{\mathcal{B}}^{-1}$. Иначе, a_1 је групно инвертибилан у $\mathcal{A}$ и важи $(a^2a^d)^\# = a^d$.

Овим добијамо декомпозицију уопштеног Дразиновог инверза елемента a:

$$a^d = \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{aa^d} = \begin{bmatrix} a_1|_{\mathcal{B}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{aa^d} = (a^2a^d)^\#.$$

Специјално, ако је a Дразин инвертибилан, тада је елемент a_2 нилпотентан. Посебно, ако је a групно инвертибилан, тада је $a_2 = 0$.

1.2.2 Уопштени инверзи оператора

Дефинишимо унутрашњи, спољашњи и рефлексивни уопштени инверз ограниченог линеарног оператора и опишимо њихове особине.

Дефиниција 1.10. Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

- Ако постоји оператор $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ такав да важи $ABA = A$, тада је B **унутрашњи инверз** оператора A и оператор A је **регуларан** (или унутрашње инвертибилан).
- Ако постоји оператор $C \in \mathcal{L}(Y,X), C \neq 0$, такав да је $CAC = C$, тада је оператор C **спољашњи инверз** оператора A и оператор A је спољашње инвертибилан.
- Ако је оператор $D \in \mathcal{L}(X,Y)$ и унутрашњи и спољашњи инверз оператора A, тада је оператор D **рефлексиван уопштени инверз** оператора A.

Приметимо да су лево и десно инвертибилни оператори увек регуларни. Ако је A лево инвертибилан и B његов леви инверз, тада је B његов рефлексивни генералисани инверз. Слично, ако је оператор A десно инвертибилан и B његов десни инверз, тада је B рефлексивни генералисани инверз оператора A.

Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је регуларан ако и само ако су му језгро $\mathcal{N}(A)$ и слика $\mathcal{R}(A)$ затворени и комплементарни потпростори, редом, у просторима X и Y. Ова карактеризација регуларних оператора добијена је као последица следеће две теореме.

Теорема 1.3. Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ има унутрашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y,X)$. Тада важи:

(i) $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(BA) = \mathcal{N}(A)$.

(ii) $X = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(BA)$, где је $I - BA$ пројектор простора X на $\mathcal{N}(A)$ паралелно са $\mathcal{R}(BA)$.

(iii) $Y = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(AB)$, где је AB пројектор простора Y на $\mathcal{R}(A)$ паралелно са $\mathcal{N}(AB)$.

Теорема 1.4. Нека су X и Y Банахови простори и нека је оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ако су $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ затворени и комплементарни потпростори, редом, простора Y и X, тада је оператор A регуларан.

Као последицу Теореме 1.3 и Теореме 1.4, добијамо споменуту карактеризацију унутрашњег инверза.

Последица 1.1. Нека су X и Y Банахови простори. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ је регуларан ако и само ако су простори $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ затворени и комплементарни потпростори, редом, простора X и Y.

У случају када су X и Y Хилбертови простори, Последица 1.1 гласи:

Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ је регуларан ако и само ако је $\mathcal{R}(A)$ затворен.

Аналогно тврђење Теореме 1.3 за спољашње инверзе даје следећа теорема.

Теорема 1.5. Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ има спољашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тада важи:

(i) $\mathcal{R}(BA) = \mathcal{R}(B)$ и $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$.

(ii) $Y = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(AB)$, где је $I - AB$ пројектор простора Y на $\mathcal{N}(B)$ паралелно са $\mathcal{R}(AB)$.

(iii) $X = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(BA)$, где је BA пројектор простора X на $\mathcal{R}(B)$ паралелно са $\mathcal{N}(BA)$.

Сваки ненула оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ има спољашњи инверз. Приметимо да у Банаховим алгебрама ово не важи.

Следећа теорема показује постојање спољашњег инверза.

Теорема 1.6. Нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, X и Y Банахови простори. Тада постоји спољашњи инверз $B \in \mathcal{L}(Y,X), B \neq 0$ оператора A ако и само ако је $A \neq 0$.

Ако је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ регуларан са унутрашњим инверзом $B \in \mathcal{L}(Y,X)$, тада је оператор BAB рефлексивни уопштени инверз оператора A. Слично као и у Банаховим алгебрама, унутрашња регуларност повлачи рефлексивну регуларност.

Можемо посматрати унутрашњи и спољашњи инверз са унапред задатим језгром и сликом. Унутрашњи инверз ни тада није јединствен, док спољашњи инверз са фиксираним језгром и сликом јесте јединствен. Из тог разлога, интересантнији за посматрање је спољашњи инверз са фиксираним језгром и сликом.

Погледајмо, најпре, унутрашњи инверз са унапред задатим језгром и сликом. Следећа теорема показује да такав унутрашњи инверз није јединствен.

Теорема 1.7. Нека су X и Y Банахови простори и нека оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ има унутрашњи инверз и нека су T и S затворени потпростори простора X и Y, редом, такви да је $X = T \oplus \mathcal{N}(A)$ и $Y = \mathcal{R}(A) \oplus S$. Тада A има следећу матричну форму:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ S \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где је A_1 инвертибилан оператор.

Нека је оператор B унутрашњи инверз оператора A такав да је $\mathcal{R}(BA) = T$ и $\mathcal{N}(AB) = S$. Тада B има матричну форму:

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ S \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} T \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix},$$

где је $W \in \mathcal{L}(S, \mathcal{N}(A))$ произвољан ограничен оператор.

Следећа теорема говори о јединствености и матричној форми спољашњег инверза.

Теорема 1.8. Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ненула оператор. Нека је T потпростор простора X и S потпростор простора Y. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(а) Постоји ненула оператор $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ такав да важи $BAB = B$, $\mathcal{R}(B) = T$ и $\mathcal{N}(B) = S$.

(б) T и S су затворени и комплементарни потпростори, редом, простора X и Y, $A(T) \oplus S = Y$ и рестрикција $A|_T : T \mapsto A(T)$ је инвертибилни оператор.

Када је задовољено једно од тврђења (а) или (б), тада је оператор B из (а) јединствен.

На основу Теореме 1.8 закључујемо да постоји јединствен спољашњи инверз оператора A који има унапред задату слику T и језгро S. Означимо га са $A^{(2)}_{T,S}$.

Последица 1.2. Претпоставимо да важе услови Теореме 1.8 и нека је $A^{(2)}_{T,S}$ спољашњи инверз оператора A са унапред датом сликом и језгром. Тада A има следећу матричну форму:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix},$$

где је A_1 инвертибилан. Штавише, $A^{(2)}_{T,S}$ има следећу матричну форму:

$$A^{(2)}_{T,S} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix}.$$

Мур-Пенроузов инверз

Како је сваки затворен потпростор Хилбертовог простора увек комплементаран, занимљиво је посматрати уопштене инверзе на Хилбертовим просторима.

Нека су H и K Хилбертови простори и $A \in \mathcal{L}(H, K)$. Оператор A је регуларан ако и само ако му је слика затворена.

Како смо доказали да је спољашњи инверз јединствено одређен својом сликом и језгром, тада је и рефлексивни уопштени инверз јединствено одређен својом сликом и језгром.

Нека је $B \in \mathcal{L}(K, H)$ такав да важи $BAB = B$ и $ABA = A$. Можемо захтевати да су слика и језгро оператора B одређени са $\mathcal{R}(B) = \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)$ и $\mathcal{N}(B) = \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)$. Овако дефинисано B је зато јединствено одређено и назива се Мур-Пенроузов (Moore - Penrose) инверз оператора A. Ознака за Мур-Пенроузов инверз оператора A је $A^{\dagger}$.

Оператори AB и BA су само-конјуговани па се Мур-Пенроузов инверз може описати и Пенроузовим једначинама. Важи следећа теорема.

Теорема 1.9. Нека су H и K Хилбертови простори и нека $A \in \mathcal{L}(H, K)$ оператор са затвореном сликом. Тада постоји јединствен оператор $A^{\dagger} \in \mathcal{L}(K, H)$ који задовољава следеће једнакости:

$$(1)\quad ABA = A \qquad (2)\quad BAB = B \qquad (3)\quad (AB)^* = AB \qquad (4)\quad (BA)^* = BA$$

Важи следећа теорема која показује зашто је Мур-Пенроуз инверз битан у решавању линеарних једначина.

Теорема 1.10. [21] Нека су H и K Хилбертови простори, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ оператор са затвореном сликом и нека је $b \in K$. Тада је $x_0 = A^{\dagger}b$ најбоље апроксимативно решење линеарне једначине $Ax = b$. Штавише, ако је M скуп свих најбоље апроксимативних решења једначине $Ax = b$, тада је $x_0 = \min\{||x|| \mid x \in M\}$.

1.3 Фредхолмова својства

Дефинишимо Фредхолмове операторе и опишимо њихове особине.

Дефиниција 1.11. Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Оператор A је:

(i) **горње семи-Фредхолмов** оператор ако му је језгро коначно димензионално и слика затворена,

(ii) **доње семи-Фредхолмов** оператор ако му је кодимензија слике коначна,

(iii) **семи-Фредхолмов** оператор ако је горњи или доњи семи-Фредхолмов,

(iv) **Фредхолмов** оператор ако је и горњи и доњи семи-Фредхолмов.

Скуп свих оператора из X у Y који су горње семи-Фредхолмови, доње семи-Фредхолмови, семи-Фредхолмови и Фредхолмови означавамо, редом, са $\Phi_+(X,Y)$, $\Phi_-(X,Y)$, $\Phi_\pm(X,Y)$, $\Phi(X,Y)$. Дакле,

$$\begin{aligned}
&\Phi_+(X,Y) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \alpha(A) < \infty \text{ и } \mathcal{R}(A) \text{ је затворен}\}\\
&\Phi_-(X,Y) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \beta(A) < \infty\}\\
&\Phi_\pm(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y)\\
&\Phi(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \alpha(A) < \infty \wedge \beta(A) < \infty\}.
\end{aligned}$$

Слика $\mathcal{R}(A)$ и језгро $\mathcal{N}(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ на Банаховим просторима у општем случају не морају бити комплементарни потпростори у одговарајућим просторима. Међу семи-Фредхолмовим операторима можемо разликовати оне за које важе ове особине. Дефинишимо леви и десни Фредхолмов оператор.

Дефиниција 1.12. Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Оператор A је:

(i) **леви Фредхолмов** оператор ако је $\alpha(A) < \infty$ и $\mathcal{R}(A)$ је затворен и комплементаран у Y.

(ii) **десни Фредхолмов** оператор ако је $\beta(A) < \infty$ и $\mathcal{N}(A)$ комплементаран у X.

Скуп свих левих Фредхолмових оператора из X у Y означимо са $\Phi_l(X,Y)$, а скуп свих десних Фредхолмових са $\Phi_r(X,Y)$. Очигледно важи $\Phi_l(X,Y) \subset \Phi_+(X,Y)$, $\Phi_r(X,Y) \subset \Phi_-(X,Y)$ и $\Phi(X,Y) = \Phi_l(X,Y) \cap \Phi_r(X,Y)$.

За оператор $A \in \Phi_\pm(X,Y)$ дефинишимо *индекс оператора* A као

$$i(A) = \alpha(A) - \beta(A).$$

Фредхолмов оператор индекса 0 назива се Вејлов оператор. Скуп свих Вејлових оператора из простора X у простор Y означавамо са

$$\Phi_0(X,Y) = \{A \in \Phi(X,Y) \mid i(A) = 0\}.$$

Битан резултат у Фредхолмовој теорији је следећа теорема о индексу.

Теорема 1.11. (Теорема о индексу) Нека су X, Y и Z Банахови простори. Ако су оператори $A \in \Phi_+(X,Y)$ и $B \in \Phi_+(Y,Z)$, тада је $BA \in \Phi_+(X,Z)$ и важи

$$\alpha(BA) \leq \alpha(A)+\alpha(B), \qquad \beta(BA) \leq \beta(A)+\beta(B), \qquad i(BA) = i(A)+i(B).$$

Исто тврђење важи и за класе оператора Φ_- и Φ.

Како је скуп свих компактних оператора $\mathcal{K}(X)$ затворени идеал алгебре $\mathcal{L}(X)$, можемо посматрати квоцијент простор $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$.

Означимо га са $C(X)$. Овај квоцијент простор назива се Калкинова алгебра и чини Банахову алгебру у односу на норму

$$||A + \mathcal{K}(X)|| = \inf_{K \in \mathcal{K}(X)} ||A + K||, \qquad A \in \mathcal{L}(X).$$

Нека је $\pi : \mathcal{L}(X) \to C(X)$ природни хомоморфизам и као такав је сурјекција.

Теорема 1.12. (Аткинсон) Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(i) $A \in \Phi(X, Y)$,

(ii) Постоје оператори $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$, $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ и $K_2 \in \mathcal{K}(Y)$ тако да је

$$A_1 A = I_X + K_1, \qquad AA_2 = I_Y + K_2,$$

(iii) Постоје оператори $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$, $F_1 \in \mathcal{F}(X)$ и $F_2 \in \mathcal{F}(Y)$ тако да је

$$A_1 A = I_X + F_1, \qquad AA_2 = I_Y + F_2.$$

Као последицу Аткинсонове теореме добијамо везу између Фредхолмових оператора и инвертибилних елемената Калкинове алгебре.

Последица 1.3. Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ је Фредхолмов ако и само ако је $\pi(A)$ инвертибилан елемент Калкинове алгебре $C(X)$.

Као последице Аткинсонове теореме имамо и следеће леме.

Лема 1.1. Нека су X, Y и Z Банахови простори и нека су оператори $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Ако је $BA \in \Phi(X, Z)$, тада важи следеће:

$$A \in \Phi(X, Y) \text{ ако и само ако } B \in \Phi(Y, Z).$$

Лема 1.2. Нека су X и Y Банахови простори и нека су дати оператори $A \in \Phi(X, Y)$ и $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Тада $A + K \in \Phi(X, Y)$ и $i(A + K) = i(A)$.

Аналоган резултат важи и за класе оператора Φ_- и Φ_+.

Следеће две теореме нам дају везу између левих и десних Фредхолмових оператора и лево и десно инвертибилних елемената Калкинове алгебре.

Теорема 1.13. Нека је оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тада постоје оператори $A_1 \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $K \in \mathcal{K}(X)$ такви да је $A_1A = I_X + K$ ако и само ако је $A \in \Phi_l(X,Y)$.

Теорема 1.14. Нека је оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тада постоје оператори $A_1 \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $K \in \mathcal{K}(Y)$ такви да је $AA_1 = I_Y + K$ ако и само ако је $A \in \Phi_r(X,Y)$.

Као последице последње две теореме, добијамо да је A леви (десни) Фредхолмов оператор ако и само ако је $\pi(A)$ лево (десно) инвертибилан елемент Калкинове алгебре.

Зато, ако са G_l и G_r, редом, означимо све лево и десно инвертибилне елементе Калкинове алгебре $C(X)$, тада имамо да важи

$$\Phi_l(X) = \pi^{-1}(G_l) \quad \text{и} \quad \Phi_r(X) = \pi^{-1}(G_r).$$

Нека је X Банахов простор. Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ је леви Браудеров ако је леви Фредхолмов са коначним растом.

Аналогно, оператор A је десни Браудеров ако је десни Фредхолмов са коначним падом.

Класу ових оператора означимо, редом, са $\mathcal{B}_l(X)$ и $\mathcal{B}_r(X)$. Скуп свих **Браудерових оператора** на X дефинишимо као $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_l(X) \cap \mathcal{B}_r(X)$.

Дакле,

$$\mathcal{B}_l(X) = \{A \in \Phi_l(X) \mid \operatorname{asc}(A) < \infty\}$$
$$\mathcal{B}_r(X) = \{A \in \Phi_r(X) \mid \operatorname{dsc}(A) < \infty\}$$
$$\mathcal{B}(X) = \{A \in \Phi(X) \mid \operatorname{asc} A < \infty \text{ и } \operatorname{dsc}(A) < \infty\}$$

Како $\operatorname{asc}(A) < \infty$ повлачи $\alpha(A) \leq \beta(A)$, а $\operatorname{dsc}(A) < \infty$ повлачи $\beta(A) \leq \alpha(A)$, имамо да за Браудеров оператор A важи $\alpha(A) = \beta(A)$ тј. $i(A) = 0$. Дакле, сваки Браудеров оператор је и Вејлов оператор.

Фредхолмова теорија у Банаховим алгебрама

Аткинсонова теорема даје карактеризацију да је линеаран ограничен оператор Фредхолмов ако и само ако му је слика инвертибилна у Калкиновој алгебри.

Инспирисан овом чињеницом, Харте је уопштио појам Фредхолмовог елемента на Банахове алгебре (видети [36]).

Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ комплексне Банахове алгебре са јединицом. Нека је $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ хомоморфизам Банахових алгебри такав да је ограничен и да важи $\mathcal{T}(1) = 1$.

Дефиниција 1.13. Елемент a Банахове алгебре $\mathcal{A}$ је

(i) **Фредхолмов** ако је $\mathcal{T}(a)$ инвертибилан у Банаховој алгебри $\mathcal{B}$, тј. $\mathcal{T}(a) \in \mathcal{B}^{-1}$,

(ii) **Вејлов** ако је једнак суми инвертибилног елемента и елемента језгра хомоморфизма $\mathcal{T}$, тј. $a \in \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{N}(\mathcal{T})$,

(iii) **Браудеров** ако је једнак суми инвертибилног елемента и елемента језгра хомоморфизма $\mathcal{T}$ који комутирају, тј. $a \in \{b + c \in \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{N}(\mathcal{T}) \mid bc = cb\}$.

Уколико за Банахову алгебру $\mathcal{A}$ узмемо Банахову алгебру линеарних ограничених оператора $\mathcal{L}(X)$, а за Банахову алгебру узмемо Калкинову алгебру $C(X) \equiv \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$, добијамо класичне дефиниције Фредхолмове теорије за линеарне ограничене операторе.

1.4 Шуров комплемент

Означимо са $\mathbb{C}^{m \times n}$ скуп свих матрица формата $m \times n$ над пољем комплексних бројева.

Дефиниција 1.14. Нека је $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ блок матрица, где су $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$ и $D \in \mathbb{C}^{l\times k}$. Ако је A инвертибилна матрица, тада се Шуров комплемент матрице A у матрици M дефинише као

$$S = D - CA^{-1}B.$$

Ако је матрица M инвертибилна, тада је и матрица S инвертибилна и M може да се представи у следећем облику:

$$M = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A^{-1}B \\ 0 & I_l \end{bmatrix},$$

где је I_t идентична матрица реда t. У том случају, инверз матрице M има облик

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Резултат (3) је познат као Банахиевич-Шурова форма матрице M и она се користи у раду са инверзима блок матрица.

Шуров комплемент у Банаховим алгебрама

Аналогно, можемо посматрати Шуров комплемент и Банахиевич-Шурову форму у Банаховим алгебрама.

Нека је

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_p$$

матрична репрезентација елемента $x \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$.

Ако је елемент a инвертибилан у Банаховој алгебри $p\mathcal{A}p$ и Шуров комплемент $s = d - ca^{-1}b$ инвертибилан у Банаховој алгебри $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$, тада инверз елемента x има Банахиевич-Шурову форму

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} + a^{-1}bs^{-1}ca^{-1} & -a^{-1}bs^{-1} \\ -s^{-1}ca^{-1} & s^{-1} \end{bmatrix}_p .$$

Ако елемент $a \in \mathcal{A}$ није инвертибилан можемо посматрати уопштени Шуров комплемент.

У случају да је a спољашње регуларан са датим идемпотентима $p, q \in \mathcal{A}$, можемо посматрати уопштени Шуров комплемент $s = d - ca^{(2)}_{p,q}b$ елемента a у x. Приметимо да је ово могуће због јединствености инверза $a^{(2)}_{p,q}$.

Слично, ако је a уопштено Дразин инвертибилан, тада за уопштени Шуров комплемент елемента a у x можемо узети $s = d - ca^{d}b$.

Интересантно је видети под којим условима уопштени инверзи елемента x имају Банахиевич-Шурову форму у Банаховој алгебри.

2 Инвертибилност матрица оператора

Један од начина проучавања оператора је њихово разлагање на једноставније операторе. Изучавајући једноставније операторе, долазимо до неких особина компликованијих оператора.

Како се Хилбертови простори могу записати као декомпозиција својих затворених потпростора, природно се долази до матричне декомпозиције ограниченог линеарног оператора.

Нека је H Хилбертов простор који се може разложити на ортогоналну декомпозицију својих потпростора H_1 и H_2, тј. $H = H_1 \oplus H_2$. Тада линеаран ограничен оператор A на простору H можемо записати у форми

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}.$$

Матрице оператора проучаване су у доста радова од разних аутора. Видети [21, 22, 29, 32, 35, 38, 43, 56, 69, 72].

Циљ резултата овог поглавља је уопштавање особина инвертибилности матрица оператора са Хилбертових простора на Банахове просторе. У Банаховим просторима разлагање на директну суму потпростора је могуће под строжим условима што чини већим изазовом налажење услова за инвертибилност матрица оператора.

У овом поглављу биће изложени резултати о десној инвертибилности матрица оператора $M_{(T,S)}$ из рада [43] и резултати о инјективности матрица оператора M_C из заједничког рада са Д.С.Ђорђевићем [22], као и неки још необјављени резултати.

2.1 Десна инвертибилност матрица оператора облика $M_{(T,S)}$

У овом одељку су представљени резултати из самосталног рада [43].

Од интереса је да за дате операторе A и C нађемо операторе T и S такве да је $M_{(T,S)}$ десно инвертибилан. Постоји више радова који испитују инвертибилност оваквих 2×2 матрица оператора ([21], [32], [35], [48]).

Као уопштење Теореме 1.1 у [32] доказана је следећа теорема.

Теорема 2.1. Нека су $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y,X)$ дати оператори. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(а) Постоје неки оператори $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$ такви да је $M_{(T,S)}$ десно инвертибилан;

(б) $[A \quad C] \in \mathcal{L}(X \oplus Y, Y)$ је десно инвертибилан и $Y \preceq \mathcal{N}([A \quad C])$.

Доказ: (а) $\Longrightarrow$ (б): Нека је $M_{(T,S)}$ десно инвертибилан за неке операторе $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$. Тада постоји ограничен линеаран оператор

$$\begin{bmatrix} E & G \\ H & F \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

такав да

$$\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & G \\ H & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix}.$$

Одатле следи да $[A \quad C] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = I_X$, па је оператор $[A \quad C]$ десно инвертибилан.

С друге стране, имамо $[T \quad S] \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} = I_Y$ и $[A \quad C] \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} = 0$, па постоји лево инвертибилан оператор $\begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} : Y \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ такав да $\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathcal{N}([A \quad C])$. Дакле, $Y \preceq \mathcal{N}([A \quad C])$.

(б) $\Longrightarrow$ (а): Претпоставимо да је оператор $[A \quad C] : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to X$ десно инвертибилан и нека важи $Y \preceq \mathcal{N}([A \quad C])$.

Нека је $K = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} : X \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ ограничен десни инверз оператора $[A \quad C]$. Тада $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathcal{R}(K) \oplus (\mathcal{N}([A \quad C]))$ и

$$[A \quad C] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = I_X. \tag{1}$$

Нека је $L : Y \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ лево инвертибилан оператор такав да је $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}([A \quad C])$. Тада $L = \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} : Y \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

Како је $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}([A \quad C])$, имамо да важи

$$[A \quad C] \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

$\mathcal{N}([A \quad C])$ је комплементаран у $X \oplus Y$ и $\mathcal{R}(L)$ је комплементаран у $X \oplus Y$. Из инклузије $\mathcal{R}(L) \subset \mathcal{N}([A \quad C])$ следи да је $\mathcal{R}(L)$ комплементаран у $\mathcal{N}([A \quad C])$. Одатле следи да постоји затворен потпростор W такав да $\mathcal{N}([A \quad C]) = \mathcal{R}(L) \oplus W$. Сада имамо разлагање $X \oplus Y = \mathcal{R}(K) \oplus \mathcal{N}([A \quad C]) = \mathcal{R}(K) \oplus W \oplus \mathcal{R}(L)$. Постоји ограничен леви инверз N оператора L, такав да $\mathcal{N}(N) = \mathcal{R}(K) \oplus W$. Такав оператор N има матричну форму $N = [T \quad S] : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to Y$. Тада

$$[T \quad S] \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} = I_Y. \tag{3}$$

Инклузија $\mathcal{R}(K) \subset \mathcal{N}(N)$ даје

$$[T \quad S] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0. \tag{4}$$

На крају, из (1), (2), (3) и (4) следи да

$$\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & G \\ H & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix}.$$

Тиме је доказ комплетиран. □

Као последицу, добијамо следећи резултат за операторе на Хилбертовим просторима, који је доказан у ([32], Теорема 1.1).

Последица 2.1. Нека је $Z = X \oplus Y$ Хилбертов простор, где су X и Y затворени и узајамно ортогонални простори. Нека су $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ дати оператори. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(а) Постоје оператори $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$ такви да је $M_{(T,S)}$ десно инвертибилан,

(б) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C) = Y$ и $\dim Y \leq \mathcal{N}([A \quad C])$,

(в) Оператор $[A \quad C]$ је десно инвертибилан и $\dim Y \leq \mathcal{N}([A \quad C])$.

Приметимо да је (б) еквивалентно са (в) из следећег разлога:
$[A \quad C]$ је десно инвертибилан ако и само ако је $\mathcal{R}([A \quad C]) = Y$.
С друге стране, лако је видети да је $\mathcal{R}([A \quad C]) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C)$.

Даље, као допуну Теореме 2.1 до инвертибилности оператора $M_{(T,S)}$, у раду [33], доказан је следећи резултат.

Теорема 2.2. Нека су X и Y Банахови простори и нека су дати оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y, X)$. Тада су следећи услови еквивалентни:

(i) $M_{(T,S)}$ је инвертибилан оператор за неке операторе $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$,

(ii) $[A \quad C] : X \oplus Y \to X$ је десно инвертибилан оператор и $\mathcal{N}([A \quad C]) \cong Y$,

(iii) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C) = Y$, $\mathcal{N}([A \quad C])$ је комплементаран у X и $\mathcal{N}([A \quad C]) \cong Y$.

2.2 Инвертибилност матрица оператора облика M_C

У овом делу испитиваћемо инвертибилност матрица оператора облика $M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Постоји доста радова на тему инвертибилности ових матрица оператора, на пример [8], [21], [34], [35].

Инвертибилност оператора A и B повлачи инвертибилност оператора M_C за произвољан оператор C. Важи следећа лема.

Лема 2.1. Нека су X и Y Банахови простори. Ако су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ инвертибилни, тада је оператор $M_C \in \mathcal{L}(X \oplus Y)$ инвертибилан за сваки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Доказ: Докажимо да је оператор $N = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$ инверз оператора M_C. Заиста, важи

$$NM_C = I_{X \oplus Y}, \qquad M_C N = I_{X \oplus Y}.$$

Дакле, за сваки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ важи

$$M_C^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

□

Специјално, ако посматрамо оператор $M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, добијамо за његов инверз дијагоналну матрицу оператора $M_0^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$.

Природно се намеће питање да ли важи и обрат. Тачније да ли инвертибилност оператора M_0 повлачи инвертибилност неког од оператора A и B. У случају инвертибилности оператора M_0 важи да је оператор A инвертибилан ако и само ако је B инвертибилан. Ову особину доказује следећи познат резултат.

Лема 2.2. Нека су X и Y Банахови простори и нека су дати оператори $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ и

$$M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Ако су два од дата три оператора инвертибилна, тада је инвертибилан и трећи.

Доказ: Доказ ове леме следи директно из декомпозиција

$$\mathcal{N}(M_0) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(M_0) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B)$$

□

Основна теорема на коју се ослањамо у овом делу је главни резултат у раду [35] и она даје потребне и довољне услове да матрични оператор M_C буде инвертибилан. Следи формулација теореме.

Теорема 2.3. Матрица оператора M_C је инвертибилна за неки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ ако и само ако оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ задовољавају следеће услове:

(i) A је лево инвертибилан,

(ii) B је десно инвертибилан,

(iii) $X/\mathcal{R}(A) \cong \mathcal{N}(B)$.

На основу ове теореме, испитиваћемо еквивалентне услове под којима је оператор M_C ињективан, односно сурјективан. Као уопштење, испитиваће се еквивалентни услови под којима је M_C лево, односно десно инвертибилан.

2.2.1 Лева инвертибилност матрица оператора облика M_C

Део заједничког рада са Д.С.Ђорђевићем [22] бави се особином ињективности оператора M_C. Доказана је следећа теорема о довољним условима да би оператор M_C имао особину "1-1".

Теорема 2.4. Нека су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ такви да задовољавају следеће: A је лево инвертибилан, $\mathcal{N}(B)$ је комплементаран и $\mathcal{N}(B) \preceq X/\mathcal{R}(A)$. Тада постоји неки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ такав да је M_C ињективно пресликавање.

Доказ: Како је A лево инвертибилан и $\mathcal{N}(B)$ комплементаран, постоје затворени потпростори $V \subset Y$ и $W \subset X$ такви да је $Y = \mathcal{N}(B) \oplus V$ и $X = W \oplus \mathcal{R}(A)$. Како $\mathcal{N}(B) \preceq X/\mathcal{R}(A)$, постоји лево инвертибилан оператор $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(B), W)$. Дефинишимо оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ на следећи начин:

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} W \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix}.$$

Докажимо да је M_C пресликавање ,,1-1". Нека је $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in (X \oplus Y)$. Из $M_C z = 0$, имамо

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тада $Ax+Cy=0$ и $By=0$. Из прве једнакости имамо да је $Ax=-Cy\in\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(C)\subseteq\mathcal{R}(A)\cap W=\{0\}$. Сада, следи $Ax=Cy=0$. Како је A инјективан, следи $x=0$. Из једнакости $By=0$ следи да $y\in\mathcal{N}(B)$. Имамо да важи $Cy=C_0y=0$. Како је оператор C_0 лево инвертибилан, он је и инјективан. Једнакост $C_0y=0$ повлачи $y=0$. Зато $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ што доказује да је оператор M_C инјективан. Тиме је доказ завршен. □

Као што се може приметити из доказа претходне теореме, услов $\mathcal{N}(B)\preceq X/\mathcal{R}(A)$ се може ослабити. Тачније, претпоставка да постоји лево инвертибилан оператор из $\mathcal{N}(B)$ у $X/\mathcal{R}(A)$, може се ослабити претпоставком постојања инјективног оператора.

Теорема тада гласи:

Теорема 2.5. Нека су оператори $A\in\mathcal{L}(X)$ и $B\in\mathcal{L}(Y)$ такви да задовољавају следеће услове:

(i) A је лево инвертибилан,

(ii) $\mathcal{N}(B)$ је комплементаран у Y,

(iii) Постоји инјективан оператор из $\mathcal{N}(B)$ у $X/\mathcal{R}(A)$.

Тада је оператор M_C инјективан за неки оператор $C\in\mathcal{L}(Y,X)$.

Сада се природно намеће питање да ли важи обрат у некој од претходних теорема. Није доказан директан обрат, али се испоставља да су два услова из Теореме 2.4 заправо еквивалентни услови за леву инвертибилност оператора M_C. Ово доказује следећа теорема.

Теорема 2.6. Оператор M_C је лево инвертибилан за неки оператор $C\in\mathcal{L}(Y,X)$ ако и само ако су оператори $A\in\mathcal{L}(X)$ и $B\in\mathcal{L}(Y)$ такви да задовољавају следеће услове:

(i) A је лево инвертибилан,

(ii) $\mathcal{N}(B) \preceq X/\mathcal{R}(A)$.

Доказ: ($\Longleftarrow$:) Нека је као и у доказу Теореме 2.4 оператор $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(B), W)$ лево инвертибилан и нека важи декомпозиција $X = W \oplus \mathcal{R}(A)$. Оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ дефинишимо као

$$Cy = \begin{cases} C_0 y, & y \in \mathcal{N}(B) \\ 0, & y \notin \mathcal{N}(B) \end{cases}.$$

Означимо са A_1 леви инверз оператора A, а са D_0 леви инверз оператора C_0. Тада је $D_0 : W \to \mathcal{N}(B)$ сурјективан оператор и важи $D_0 C_0 = I_{\mathcal{N}(B)}$. Дефинишимо оператор $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ тако да је

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} W \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix} \to Y.$$

Означимо са $V = Y \backslash \mathcal{N}(B)$. Приметимо да је рестрикција оператора $B : V \to \mathcal{R}(B)$ инвертибилна. Означимо са $B_0 : \mathcal{R}(B) \to V$ инверз те рестрикције. Важи $B_0 B = I_V$. Дефинишимо оператор $B_1 \in \mathcal{L}(Y)$ на следећи начин:

$$B_1 y = \begin{cases} B_0 y, & y \in \mathcal{R}(B) \\ 0, & y \notin \mathcal{R}(B) \end{cases}.$$

Нека је сада дефинисан матрични оператор

$$N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ D & B_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Важи

$$NM_C = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ D_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A & A_1 C \\ DA & DC + B_1 B \end{bmatrix}.$$

Како је A_1 леви инверз оператора A, важи $A_1A = I_X$. Даље, имамо да је $\mathcal{R}(C) \subset W \subset \mathcal{N}(A_1)$, па је $A_1C = 0$. Из дефиниције оператора D имамо да је $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{N}(D_1)$, што повлачи да је $D_1A = 0$.

Нека је $y \in Y$ произвољан. Тада важи

$$(DC + B_1B)y = \begin{cases} D_0C_0y, & y \in \mathcal{N}(B) \\ B_0By, & y \notin \mathcal{N}(B) \end{cases} = \begin{cases} y, & y \in \mathcal{N}(B) \\ y, & y \notin \mathcal{N}(B) \end{cases} = y,$$

одакле следи $D_1C + B_1B = I_Y$.

Сада имамо да важи

$$NM_C = \begin{bmatrix} A_1A & A_1C \\ D_1A & D_1C + B_1B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} = I_{X\oplus Y},$$

одакле следи да је M_C лево инвертибилан оператор и N његов леви инверз.

($\Longrightarrow$:) Нека је оператор M_C лево инвертибилан за неко $C \in \mathcal{L}(Y, X)$. Уколико је $C = 0$, тврђење тривијално важи. Претпоставимо да C није нула оператор.

Означимо са

$$N = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ D_1 & B_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

леви инверз оператора M_C. Важи

$$\begin{aligned} NM_C &= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ D_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1A & A_1C + C_1B \\ D_1A & D_1C + B_1B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} = I_{X\oplus Y}. \end{aligned}$$

Једнакост $A_1A = I_X$ доказује леву инвертибилност оператора A, одакле даље имамо да постоји потпростор $W \subset X$ тако да је $X = W \oplus \mathcal{R}(A)$. Тиме је услов (i) доказан.

Означимо са $C_0 : \mathcal{N}(B) \to X$ рестрикцију оператора C на $\mathcal{N}(B)$. Докажимо да је $\mathcal{R}(C_0) \subset W$. Нека је $x \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(C_0)$ произвољан. Тада постоје $x_0 \in X$ и $y_0 \in \mathcal{N}(B)$ тако да је $x = Ax_0 = C_0y_0 = Cy_0$. Посматрајмо како оператор M_C делује на $\begin{bmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Важи

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ax_0 + Cy_0 \\ By_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Како је оператор M_C лево инвертибилан, онда је и инјективан па из претходне једнакости следи да је $\begin{bmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, одакле је $x = 0$. Дакле, имамо да је $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(C_0) = \{0\}$, што имплицира да је $\mathcal{R}(C_0) \subset W$.

Посматрајмо сада једнакост $D_1C + B_1B = I_Y$. Нека је $y \in \mathcal{N}(B)$ произвољно, тада имамо да важи $y = I_{\mathcal{N}(B)}y = D_1Cy + B_1By = D_1Cy = D_1C_0y$. Дакле, $D_1C_0 = I_{\mathcal{N}(B)}$. Већ је доказано да је $\mathcal{R}(C_0) \subset W$. Зато постоји лево инвертибилан оператор из потпростора $\mathcal{N}(B)$ у $X/\mathcal{R}(A)$ па је и услов (ii) испуњен.

Тиме је доказана теорема. □

2.2.2 Десна инвертибилност матрица оператора облика M_C

Испитајмо довољне услове за особину сурјективности оператора M_C.

Теорема 2.7. Нека су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ такви да задовољавају следеће услове:

(i) B је десно инвертибилан,

(ii) $\mathcal{R}(A)$ је комплементаран у X,

(iii) Постоји сурјективан оператор из $\mathcal{N}(B)$ у $X/\mathcal{R}(A)$.

Тада је оператор M_C сурјективан за неки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Доказ: Како је B десно инвертибилан и $\mathcal{R}(A)$ комплементаран, постоје затворени потпростори $V \subset Y$ и $W \subset X$ такви да је $Y = \mathcal{N}(B) \oplus V$ и $X = W \oplus \mathcal{R}(A)$.

Како постоји сурјективан оператор из $\mathcal{N}(B)$ у $X/\mathcal{R}(A)$, означимо га са $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(B), W)$. За њега важи $C_0(\mathcal{N}(B)) = W$. Дефинишимо оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ на следећи начин:

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} W \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix}.$$

Докажимо да је M_C сурјективно пресликавање. Тада важи

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(X) + C(Y) \\ B(Y) \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathcal{R}(C) = C_0(\mathcal{N}(B)) = W$, важи да је $A(X) + C(Y) = \mathcal{R}(A) \oplus W = X$. С друге стране, оператор B је десно инвертибилан, па је онда и сурјективан и важи $\mathcal{R}(B) = Y$. Одатле имамо да је

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

чиме је доказано да је оператор M_C сурјективан. $\square$

Као допуна Теореме 2.6 до Теореме 2.3, може се формулисати следећа теорема.

Теорема 2.8. Оператор M_C је десно инвертибилан за неки оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ ако и само ако су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ такви да задовољавају следеће услове:

(i) B је десно инвертибилан,

(ii) $X/\mathcal{R}(A) \preceq \mathcal{N}(B)$.

Претходна теорема остаје отворен проблем.

3 Уопштени инверзи

У литератури се први пут спомиње појам „pseudoinverse" у Фредхолмовом раду [31]. У том раду је дат уопштени инверз интегралног оператора. Касније су и други изучавали различита уопштења инверза оператора, као нпр. диференцијалних оператора што је урадио Хилберт.

Први пут је уопштене инверзе матрица увео Мур 1920. године у раду [54]. Дефинисао је јединствен уопштени инверз преко пројектора матрица. Тек 1950-тих година откривена је веза између уопштених инверза и решења линеарних система доказивањем особине најмањих квадрата одређених уопштених инверза.

Пенроуз је 1955.године доказао да је Муров инверз јединствена матрица која задовољава четири матричне једначине (као у (П)). После ових открића, теорија уопштених инверза је оживела и уопштени инверзи се интензивно изучавају.

3.1 Регуларност матрица оператора облика M_C

Резултати овог одељка су део заједничког рада са Д.С. Ђорђевићем [22] где се истражује регуларност оператора M_C.

Теорема 3.1. Нека су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ регуларни. Ако је $\mathcal{N}(B) \preceq X/\mathcal{R}(A)$, тада постоји оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ такав да је оператор M_C регуларан.

Доказ: Нека су $A_1 \in \mathcal{L}(X)$ и $B_1 \in \mathcal{L}(Y)$ рефлексивни уопштени инверзи оператора A и B, редом. Тада имамо разлагања $Y = \mathcal{R}(B_1) \oplus \mathcal{N}(B)$ и $X = \mathcal{N}(A_1) \oplus \mathcal{R}(A)$. Нека је $J : \mathcal{N}(B) \to \mathcal{N}(A_1)$ лево инвертибилно пресликавање и нека је $J_1 : \mathcal{N}(A_1) \to \mathcal{N}(B)$

леви инверз пресликавања J. Дефинишимо $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ и $C_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ на следећи начин:

$$C = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{R}(B_1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}(A_1) \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(A_1) \\ \mathcal{R}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{R}(B_1) \end{bmatrix}.$$

Посматрајмо оператор $N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(X \oplus Y)$. Тада имамо

$$NM_C = \begin{bmatrix} A_1 A & A_1 C \\ C_1 A & C_1 C + B_1 B \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathcal{R}(C) \subset \mathcal{N}(A_1)$ и $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{N}(C_1)$, имамо да важи $A_1 C = 0$ и $C_1 A = 0$, редом. Такође, $B_1 B$ је пројектор простора Y на $\mathcal{R}(B_1)$ паралелно са $\mathcal{N}(B)$ и $C_1 C$ је пројектор простора Y на $\mathcal{N}(B)$ паралелно са $\mathcal{R}(B_1)$. Дакле, $C_1 C + B_1 B = I$ и

$$NM_C = \begin{bmatrix} A_1 A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Како је $AA_1 A = A$ и $A_1 A A_1 = A_1$, имамо да је

$$M_C N M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA_1 A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = M_C,$$

и да је оператор M_C регуларан. $\square$

Формулисаћемо следећи резултат у вези са Мур-Пенроузовим инверзом оператора M_C на Хилбертовим просторима.

Теорема 3.2. Нека су H и K међусобно ортогонални Хилбертови простори и нека је $Z = H \oplus K$. Ако оператори $A \in \mathcal{L}(H)$ и $B \in \mathcal{L}(K)$ имају затворене слике и ако је $\alpha(B) = \beta(A)$, тада постоји неки оператор $C \in \mathcal{L}(K, H)$ такав да оператор M_C има затворену слику и важи

$$M_C^\dagger = \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix}.$$

Доказ: Подсетимо се ознака из доказа Теореме 3.1, са додатном претпоставком: J је инвертибилан. Тада имамо следеће:

$$NM_CN = \begin{bmatrix} A_1A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1AA_1 & 0 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} = N,$$

и

$$M_CN = \begin{bmatrix} AA_1 + CC_1 & CB_1 \\ BC_1 & BB_1 \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{N}(C)$ и $\mathcal{R}(C_1) = \mathcal{N}(B)$, следи да је $CB_1 = 0$ и $C_1B = 0$. Такође, AA_1 је пројектор на $\mathcal{R}(A)$ паралелно са $\mathcal{N}(A_1)$. Како је J инвертибилан, имамо да је CC_1 пројектор на $\mathcal{N}(A_1)$ паралелно са $\mathcal{R}(A)$. Дакле, $AA_1 + CC_1 = I$. Закључујемо да је N рефлексивни уопштени инверз оператора M_C.

Сада, узмимо да је $A_1 = A^\dagger$ и $B_1 = B^\dagger$. Тада сви претходни резултати важе, са додатном лепом особином да имамо ортогоналну декомпозицију. Тачније, $X = \mathcal{N}(A_1) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A)$ и $Y = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(B_1) = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(B^*)$. Како је оператор J инвертибилан, важи $J_1 = J^{-1}$ и зато $C_1 = C^\dagger$. Оператор N_C је још увек рефлексивни уопштени инверз оператора M_C. Даље, имамо да

$$NM_C = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

и

$$M_CN = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & BB^\dagger \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Пројектори NM_C и M_CN су очигледно самокоњуговани, па је $N = M_C^\dagger$. □

3.2 Уопштена инвертибилност у Банаховим алгебрама

Користићемо следећу лему.

Лема 3.1. Нека су p и q идемпотенти Банахове алгебре $\mathcal{A}$. Следећа тврђења су еквивалента:

(i) $p+q \in \mathcal{A}^\bullet$,

(ii) $pq = qp = 0$.

Доказ: (i) $\Rightarrow$ (ii): Нека је $p+q \in \mathcal{A}^\bullet$. Имамо да је

$$(p+q)^2 = p+q \Rightarrow pq+qp = 0 \Rightarrow pq = -qp.$$

Како следеће једнакости важе

$$pq = p^2q^2 = p(pq)q = p(-qp)q = -pq(pq) = pqqp = pqp = -ppq = -pq,$$

добијамо $pq = 0$. Аналогно се доказује да важи и $qp = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Нека су $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$ такви да је $pq = qp = 0$. Тада

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p+q,$$

па је $p+q \in \mathcal{A}^\bullet$. □

Ако је $u \in \mathcal{A}^\bullet$, тада је производ произвољних елемената алгебри $u\mathcal{A}u$ и $(1-u)\mathcal{A}(1-u)$ једнак 0, тј. за свако $a \in u\mathcal{A}u$ и свако $b \in (1-u)\mathcal{A}(1-u)$, важи $ab = 0$.

Као последицу Леме 3.1, формулисаћемо следећи резултат.

Лема 3.2. Нека је $u \in \mathcal{A}^\bullet$. Ако је $p_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$, тада је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$ идемпотент.

За доказивање резултата у овом поглављу биће нам потребни и следећи познати резултати за Банахове алгебре.

Лема 3.3. [59][63, Теорема 1.6.15] Нека је $\mathcal{A}$ комплексна Банахова алгебра са јединицом 1 и нека је p идемпотент алгебре $\mathcal{A}$. Ако је $x \in p\mathcal{A}p$, тада $\sigma_{p\mathcal{A}p}(x) \cup \{0\} = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, где је $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ спектар елемента x у алгебри $\mathcal{A}$ и $\sigma_{p\mathcal{A}p}(x)$ спектар елемента x у алгебри $p\mathcal{A}p$.

Лема 3.4. [11, Лема 2.4] Нека су $b, q \in \mathcal{A}^{qnil}$ такви да је $qb = 0$. Тада $q + b \in \mathcal{A}^{qnil}$.

Лема 3.5. Нека је $b \in \mathcal{A}^d$ и $a \in \mathcal{A}^{qnil}$.

(i) [11, Последица 3.4] Ако је $ab = 0$, тада $a + b \in \mathcal{A}^d$ и $(a+b)^d = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+1} a^n$.

(ii) Ако је $ba = 0$, тада $a + b \in \mathcal{A}^d$ и $(a+b)^d = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n (b^d)^{n+1}$.

Конкретизујући [11, Последица 3.4] (са обрнутим множењем) на ограничене линеарне операторе, Кастро-Гонзалес и Колиха [11] извели су [27, Теорема 2.2] која је специјални случај Леме 3.5(ii).

3.2.1 (p, q)-спољашњи инверз блок матрица

Први резултат описује адитивна својства (p, q)-спољашњег уопштеног инверза.

Теорема 3.3. Нека су $p, q \in \mathcal{A}^\bullet$ и $a, b \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$. Ако важи

$$a^{(2)}_{p,q} b + b^{(2)}_{p,q} a + 1 = 0 \quad \text{и} \quad a b^{(2)}_{p,q} + b a^{(2)}_{p,q} + 1 = 0, \tag{1}$$

тада је $a + b \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ и

$$(a+b)^{(2)}_{p,q} = a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q}.$$

Доказ: Користећи чињеницу да је $a, b \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, Теорему 1.1 и услове (1), имамо

$$
\begin{aligned}
&(a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q})(a+b)(a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q}) = \\
&= a^{(2)}_{p,q} + pb^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q}ba^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q}(1-q) + b^{(2)}_{p,q}(1-q) + b^{(2)}_{p,q}ab^{(2)}_{p,q} + pa^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} \\
&= a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q}ba^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q}ab^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} \\
&= a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q}(ba^{(2)}_{p,q} + 1) + b^{(2)}_{p,q}(1 + ab^{(2)}_{p,q}) + a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} \\
&= a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q}(-ab^{(2)}_{p,q}) + b^{(2)}_{p,q}(-ba^{(2)}_{p,q}) + a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} \\
&= a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} - pb^{(2)}_{p,q} - pa^{(2)}_{p,q} + a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q} \\
&= a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q})(a+b) &= a^{(2)}_{p,q}a + a^{(2)}_{p,q}b + b^{(2)}_{p,q}a + b^{(2)}_{p,q}b \\
&= p + pa^{(2)}_{p,q}b + pb^{(2)}_{p,q}a + p \\
&= p + p(a^{(2)}_{p,q}b + b^{(2)}_{p,q}a + 1) \\
&= p,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q}) &= aa^{(2)}_{p,q} + ba^{(2)}_{p,q} + ab^{(2)}_{p,q} + bb^{(2)}_{p,q} \\
&= (1-q) + ba^{(2)}_{p,q} + ab^{(2)}_{p,q} + (1-q) \\
&= (1-q) + ba^{(2)}_{p,q}(1-q) + ab^{(2)}_{p,q}(1-q) + (1-q) \\
&= (1-q) + (ba^{(2)}_{p,q} + ab^{(2)}_{p,q} + 1)(1-q) \\
&= (1-q).
\end{aligned}
$$

Тиме је доказано да је $(a+b)^{(2)}_{p,q} = a^{(2)}_{p,q} + b^{(2)}_{p,q}$. $\square$

Следећа теорема даје еквивалентне услове под којима $x^{(2)}_{p,q}$ има уопштену Банахиевич-Шурову форму у Банаховој алгебри.

Теорема 3.4. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$, $p_1, q_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2, q_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$ и нека је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$

и $q = q_1 + q_2 \in \mathcal{A}$.
Нека је $a \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ и нека је $s = d - ca^{(2)}_{p_1,q_1}b \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$ уопштени Шуров комплемент елемента a у x. Тада су следећи услови еквивалентни:

(i) $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ и $x^{(2)}_{p,q} = r$, где је

$$r = \begin{bmatrix} a^{(2)}_{p_1,q_1} + a^{(2)}_{p_1,q_1} bs^{(2)}_{p_2,q_2} ca^{(2)}_{p_1,q_1} & -a^{(2)}_{p_1,q_1} bs^{(2)}_{p_2,q_2} \\ -s^{(2)}_{p_2,q_2} ca^{(2)}_{p_1,q_1} & s^{(2)}_{p_2,q_2} \end{bmatrix}$$

(ii) $ca^{(2)}_{p_1,q_1}a = ss^{(2)}_{p_2,q_2}c$ и $aa^{(2)}_{p_1,q_1}b = bs^{(2)}_{p_2,q_2}s$.

Доказ: Из Леме 3.2 имамо да су p и q идемпотенти.
Користећи претпоставке теореме $a \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ и $s \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$, лако проверимо да важи $rxr = r$.

Једнакост $rx = p$ је еквивалентна са једнакостима:

$$s^{(2)}_{p_2,q_2}c = s^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1}a \quad \text{и} \quad a^{(2)}_{p_1,q_1}b = a^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2}s.$$

С друге стране, $1 - xr = q$ је еквивалентно са:

$$bs^{(2)}_{p_2,q_2} = aa^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2} \quad \text{и} \quad ca^{(2)}_{p_1,q_1} = ss^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1}.$$

Одатле, x има (p,q)-спољашњи уопштени инверз ако и само ако

$$\begin{gathered} s^{(2)}_{p_2,q_2}c = s^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1}a, \quad a^{(2)}_{p_1,q_1}b = a^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2}s, \\ bs^{(2)}_{p_2,q_2} = aa^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2}, \quad ca^{(2)}_{p_1,q_1} = ss^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1}, \end{gathered}$$

што је еквивалентно са

$$ca^{(2)}_{p_1,q_1}a = ss^{(2)}_{p_2,q_2}c, \quad bs^{(2)}_{p_2,q_2}s = aa^{(2)}_{p_1,q_1}b.$$

$\square$

Као последицу, формулишимо следећи резултат.

Последица 3.1. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$, $p_1, q_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2, q_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$ и нека је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$ и $q = q_1 + q_2 \in \mathcal{A}$.
Нека је $a \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ и нека је $s = d - ca^{(2)}_{p_1,q_1}b \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(i) $ca^{(2)}_{p_1,q_1} = a^{(2)}_{p_1,q_1}b = bs^{(2)}_{p_2,q_2} = s^{(2)}_{p_2,q_2}c = 0$,

(ii) $ca^{(2)}_{p_1,q_1}a = ss^{(2)}_{p_2,q_2}c, \qquad aa^{(2)}_{p_1,q_1}b = bs^{(2)}_{p_2,q_2}s$,
$a^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2} = s^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1} = 0$.

Ако је једно од ових тврђења задовољено, тада је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ и

$$x^{(2)}_{p,q} = \begin{bmatrix} a^{(2)}_{p_1,q_1} + a^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1} & -a^{(2)}_{p_1,q_1}bs^{(2)}_{p_2,q_2} \\ -s^{(2)}_{p_2,q_2}ca^{(2)}_{p_1,q_1} & s^{(2)}_{p_2,q_2} \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Дразинов инверз блок матрица

Дразинов инверз и уопштени Дразинов инверз имају широку примену и то у теорији линеарних једначина, ланцима Маркова, сингуларним диференцијалним и диференцним једначинама, итеративним методама нумеричке линеарне алгебре, криптографији, теорији оптималне контроле, итд.

Репрезентација Дразиновог инверза блок матрица под одређеним условима јавља се у литератури у [4, 5, 10, 18, 19, 20, 14, 26, 40, 50, 70, 12, 13].

Денг [15] је испитивао потребне и довољне услове за матрице оператора на Хилбертовим просторима да имају Дразинов инверз са уопштеном Банахиевич-Шуровом формом.

У раду [17], добијена је репрезентација Дразиновог инверза анти-троугаоне блок матрице под одређеним условима уопштавајући на више начина резултате из радова [7, 40]. Блок анти-троугаоне матрице налазе бројну примену почевши од ограничених оптимизационих проблема до решавања диференцијалних једначина, итд. Денг [16] је представио формуле за уопштени Дразинов инверз анти-троугаоне матрице оператора $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ на Банаховим просторима, са претпоставком да је CA^dB инвертибилан.

У овом одељку биће приказани резултати из заједничког рада са Д. Мосић и Д.С. Ђорђевићем [46] у коме су изучавани еквивалентни услови под којима уопштени Дразинов инверз има уопштену Банахиевич-Шурову форму у Банаховој алгебри. Такође, добијено је и неколико репрезентација под различитим условима за уопштени Дразинов инверз анти-троугаоне блок матрице $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}_p$ Банахове алгебре $\mathcal{A}$ у односу на идемпотент p. Тиме смо уопштили резултате из радова [15, 16, 17].

Хартвиг, Ли и Веи у [40] дају изразе Дразиновог инверза 2×2 блок матрица у случајевима када је уопштени Шуров комплемент несингуларан и када је једнак нули. Ови резултати су уопштени у раду [52] под другачијим условима и претпоставкама да је Шуров комплемент несингуларан или једнак нули.

У раду [12], Кастро-Гонзалес и Мартинез-Серано развили су услове под којима се Дразинов инверз блок матрице са групно инвертибилним уопштеним Шуровим комплементом, може представити у терминима матрице у Банахиевич-Шуровој форми и њихових степена.

Денг и Веи [20] су представили експлицитне репрезентације Дразиновог инверза матрице оператора са Дразин инвертибилним Шуровим комплементом под разним условима.

Такође, у овом одељку биће приказани резултати из заjедничког рада са Д. Мосић и Д.С. Ђорђевићем [45]. У том раду су представљене експлицитне формуле за уопштени Дразинов инверз елемента x у (2) у терминима уопштеног Дразиновог инверза елемента a и уопштеног Дразиновог инверза елемента s.

Доказани су потребни и довољни услови за егзистеницју и представљање групног инверза. На тај начин смо проучавали општији случај тако што је s уопштено Дразин инвертибилан што покрива случајеве када је s Дразин инвертибилан за све линеарне ограничене операторе у [20], када је s групно инвертибилан за комплексне матрице у [12] или када је s једнак нули за комплексне матрице [40].

Погледајмо најпре резултате из рада [46].

Нека је

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \tag{2}$$

у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s = d - ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$ уопштени Шуров комплемент елемента a у x.

У овом одељку, када се каже да је x дефинисан као у (2), претпоставићемо да x има матричну репрезентацију као у (2) у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$ и да важи $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и $s = d - ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$.

Следе помоћни резултати.

Лема 3.6. Нека је x дефинисан као у (2) и нека је $w_0 = p + a^d bs^\pi ca^d$ инвертибилан. Тада $w_0 a^2 a^d$ има групни инверз $(w_0 a^2 a^d)^\# = a^d w_0^{-1}$ и $(wa^2 a^d)^\pi = a^\pi$.

Доказ: Докажимо да је $a^d w_0^{-1}$ групни инверз $w_0^{-1} a^2 a^d$. Заиста,

$$\begin{aligned} (w_0 a^2 a^d)(a^d w_0^{-1}) &= w_0 a a^d w_0^{-1} = (p + a^d bs^\pi ca^d) a a^d w_0^{-1} \\ &= (a^d a + a^d a a^d bs^\pi ca^d) w_0^{-1} = a^d a w_0 w_0^{-1} = a^d a \\ &= a^d a^2 a^d = (a^d w_0^{-1})(w_0 a^2 a^d), \end{aligned}$$

$$(w_0a^2a^d)(a^dw_0^{-1})(w_0a^2a^d) = w_0a^2a^da^da^2a^d = w_0a^2a^d,$$

$$(a^dw_0^{-1})(w_0a^2a^d)(a^dw_0^{-1}) = a^da^2a^da^dw_0^{-1} = a^dw_0^{-1}$$

доказује да је $(w_0a^2a^d)^\# = a^dw_0^{-1}$. Спектрални идемпотент елемента $w_0a^2a^d$ једнак је $(w_0a^2a^d)^\pi = p - (w_0a^2a^d)(a^dw_0^{-1}) = p - aa^d = a^\pi$. $\square$

Лема 3.7. Нека је $x \in \mathcal{A}^d$ и $u \in \mathcal{A}$ произвољан инвертибилан елемент. Тада $u^{-1}xu \in \mathcal{A}^d$ и $(u^{-1}xu)^d = u^{-1}x^du$.

Следећа лема проширује добро познат резултат у вези са Дразиновим инверзом оператора на Хилбертовим просторима на уопштени Дразинов инверз елемената Банахове алгебре (видети [15, Теорема 1]). Приметимо да се услов (ii) следеће леме која се појављује у [15, Теорема 1] може заменити са еквивалентним условом (iii).

Лема 3.8. Нека је x дефинисан као у (2). Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(i) $x \in \mathcal{A}^d$ и $x^d = r$, где је

$$r = \begin{bmatrix} a^d + a^dbs^dca^d & -a^dbs^d \\ -s^dca^d & s^d \end{bmatrix}; \tag{3}$$

(ii) $a^\pi bs^d = a^dbs^\pi$, $s^\pi ca^d = s^dca^\pi$ и $y = \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ s^\pi ca^\pi & ss^\pi \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^{qnil}$;

(iii) $a^\pi b = bs^\pi$, $s^\pi c = ca^\pi$ и $y = \begin{bmatrix} aa^\pi & bs^\pi \\ ca^\pi & ss^\pi \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^{qnil}$.

Доказ: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Лако се проверава да је $rxr = r$. Како $a^\pi bs^d = a^dbs^\pi$ и $s^\pi ca^d = s^dca^\pi$ имплицира $a^\pi bs^dca^d = a^dbs^dca^\pi$, елементарним рачунањем, добијамо да важи $xr = rx$ ако и само ако је $a^\pi bs^d = a^d bs^\pi$ и $s^\pi ca^d = s^d ca^\pi$. Сада, можемо добити

$$x - x^2 r = \begin{bmatrix} p & -a^d b \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} p & a^d b \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}$$

и

$$r(x - x^2 r) = r\left(\begin{bmatrix} p & a^d b \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & -a^d b \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} y\right) = r(y).$$

Дакле, $x - x^2 r \in \mathcal{A}^{qnil}$ је еквивалентно са $y \in \mathcal{A}^{qnil}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Прво, проверимо да је $a^\pi bs^d = a^d bs^\pi$ еквивалентно са $a^\pi b = bs^\pi$. Ако помножимо једнакост $a^\pi bs^d = a^d bs^\pi$ са десне стране са s и са леве стране са a, редом, добијамо да је $a^\pi bs^d s = 0$ и $aa^d bs^\pi = 0$. Одатле, $bs^d s = aa^d bs^d s = aa^d b$ и

$$a^\pi b = b - aa^d b = b - bs^d s = bs^\pi.$$

Са друге стране, $a^\pi b = bs^\pi$ имплицира $(a^\pi b)s^d = bs^\pi s^d = 0$ и $a^d(bs^\pi) = a^d a^\pi b = 0$. Дакле, $a^\pi bs^d = a^d bs^\pi$.

Слично, доказујемо да је $s^\pi ca^d = s^d ca^\pi$ еквивалентно са $s^\pi c = ca^\pi$. Закључујемо да (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). □

Напомена 2. Користећи Лему 3.8, ако је x дефинисано као у (2) и r дефинисано као у (3), тада $x \in \mathcal{A}^\#$ и $x^\# = r$ ако и само ако $a \in (p\mathcal{A}p)^\#$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$, $a^\pi b = 0 = bs^\pi$ и $s^\pi c = 0 = ca^\pi$. Ови резултати су познати за комплексне матрице [3, Теорема 2] (видети такође [12, Последица 2.3]). Израз (3) се назива уопштена Банахиевич-Шурова форма елемента x. За више детаља видети [1, 3, 12, 15, 40, 67].

Представимо сада формулу за уопштени Дразинов инверз блок матрице x у (2) у погледу на уопштени Дразинов инверз Шуровог комплемента s. Проширујемо [20, Теорему 7] уопштавајући Дразинов инверз 2×2 матрице оператора.

Теорема 3.5. Нека је елемент x дефинисан као у (2). Ако је

$$ca^\pi bss^d = 0, \qquad aa^\pi bss^d = 0, \qquad ss^\pi c = 0, \qquad a^\pi bs^\pi c = bs^\pi caa^d = 0, \tag{4}$$

тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r + 1 \right) r \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & bs^\pi \\ ca^\pi & ds^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aa^\pi & bs^\pi \\ ca^\pi & ds^\pi \end{bmatrix}^n \right), \tag{5}$$

где је r дефинисан као у (3).

Доказ: Приметимо да, из $a^\pi + aa^d = p$ и $s^\pi + ss^d = 1 - p$,

$$x = \begin{bmatrix} aa^\pi & bs^\pi \\ ca^\pi & ds^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2a^d & bss^d \\ caa^d & dss^d \end{bmatrix} := y + z.$$

Из $a^d a^\pi = 0 = s^\pi s^d$, $d = s + ca^d b$, $bs^\pi ca^d = (bs^\pi caa^d)a^d = 0$ и (4), $yz = 0$.

Да бисмо доказали $y \in \mathcal{A}^{qnil}$, посматрајмо

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi bs^\pi \\ 0 & ss^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi ca^\pi & s^\pi ca^d bs^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aa^d bs^\pi \\ ss^d ca^\pi & ss^d ds^\pi \end{bmatrix} \\ &:= y_1 + y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Подсетимо се да ако је $u = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix}$, тада је

$$\lambda 1 - u = \begin{bmatrix} \lambda p - a_1 & 0 \\ -c_1 & \lambda(1-p) - b_1 \end{bmatrix}$$

и

$$\lambda \in \rho_{p\mathcal{A}p}(a_1) \cap \rho_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}(b_1) \;\Rightarrow\; \lambda \in \rho(u),$$

тј.

$$\sigma(u) \subseteq \sigma_{p\mathcal{A}p}(a_1) \cup \sigma_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}(b_1).$$

Како је $aa^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и $ss^\pi \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil}$, закључујемо да је $y_1 \in \mathcal{A}^{qnil}$. Из $r(s^\pi ca^d bs^\pi) = r(bs^\pi ca^d) = r(0) = 0$ и

$\sigma_{\mathcal{A}}(s^\pi ca^d bs^\pi) = \sigma_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}(s^\pi ca^d bs^\pi) \cup \{0\}$(Лема 3.3), $y_2 \in \mathcal{A}^{qnil}$. Можемо проверити да је $y_1y_2 = 0$ што даје $y_1 + y_2 \in \mathcal{A}^{qnil}$, користићи Лему 3.4. Такође, из Леме 3.4, $y_3^2 = 0$ (тј. $y_3 \in \mathcal{A}^{nil}$) и $(y_1 + y_2)y_3 = 0$ имплицира $y \in \mathcal{A}^{qnil}$.

У циљу доказивања да $z \in \mathcal{A}^d$, запишимо z у облику

$$z = \begin{bmatrix} a^2a^d & aa^dbss^d \\ ss^dcaa^d & ss^ddss^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi bss^d \\ s^\pi caa^d & s^\pi dss^d \end{bmatrix} := z_1 + z_2.$$

Провером добијамо $z_1z_2 = 0$ и $z_2^2 = 0$. Ако је $z_1 = \begin{bmatrix} A_{z_1} & B_{z_1} \\ C_{z_1} & D_{z_1} \end{bmatrix}$, означимо са $A_{z_1} \equiv a^2a^d \in (p\mathcal{A}p)^\#$, $(a^2a^d)^\# = a^d$, $S_{z_1} \equiv D_{z_1} - C_{z_1}A_{z_1}^\# B_{z_1} = s^2s^d \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$ и $(s^2s^d)^\# = s^d$. Користећи Лему 3.8, имамо $z_1 \in \mathcal{A}^d$ и $z_1^d = r$. Даље, из Леме 3.5, $z \in \mathcal{A}^d$ и $z^d = z_1^d + z_2(z_1^d)^2$.

Примењујући опет Лему 3.5, закључујемо да је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{\infty}(z^d)^{n+1}y^n = (1 + z_2z_1^d)z_1^d\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(z_1^d)^{n+1}y^{n+1}\right).$$

Тада, приметимо да је $z_1^d = r = r\begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix}r$,

$$z_2z_1^d = \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix}r = \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix}r$$

и

$$ry = r\begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix}y = r\begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & bs^\pi \\ ca^\pi & ds^\pi \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & bs^\pi \\ ca^\pi & ds^\pi \end{bmatrix}$$

па важи (5). □

Услови Теореме 3.5 су гломазни и компликовани али сама теорема има доста корисних последица.

Из Теореме 3.5, добијамо следећу последицу која је уопштење [12, Теорема 2.5] за Дразинов инверз комплексних матрица.

Последица 3.2. Нека је x дефинисан као у (2), $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$ и нека је $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$. Ако је $ca^{\pi} = 0$ и $bs^{\pi} = 0$, тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \begin{bmatrix} p - a^{\pi}bs^{\#}ca^{\#} & a^{\pi}bs^{\#} \\ s^{\pi}ca^{\#} & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{\#} + a^{\#}bs^{\#}ca^{\#} & -a^{\#}bs^{\#} \\ -s^{\#}ca^{\#} & s^{\#} \end{bmatrix}.$$

Ако у Теореми 3.5 претпоставимо да је уопштени Шуров комплемент s инвертибилан, тада је $s^{\pi} = 0$ и следећа последица уопштава [40, Теорема 3.1].

Последица 3.3. Нека је x дефинисан као у (2) и нека је $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$. Ако је $ca^{\pi}b = 0$ и $aa^{\pi}b = 0$, тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\pi}b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_1 + 1 \right) r_1 \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} r_1^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^n a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

где је $r_1 = \begin{bmatrix} a^d + a^d bs^{-1}ca^d & -a^d bs^{-1} \\ -s^{-1}ca^d & s^{-1} \end{bmatrix}$.

У следећем резултату уводимо другачији израз за уопштени Дразинов инверз елемента x који укључује инвертибилан елемент $w_0 = p + a^d bs^{\pi}ca^d$.

Теорема 3.6. Нека је x дефинисан као у (2). Ако је

$$aa^{\pi} - a^{\pi}bs^d ca^{\pi} = 0, \quad s^{\pi}ca^{\pi} = 0, \quad ca^{\pi}b = 0, \quad a^{\pi}bs^{\pi} = 0, \quad ss^{\pi}c = 0 = bss^{\pi} \tag{6}$$

и $w_0 = p + a^d bs^{\pi}ca^d$ је инвертибилан, тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\pi}b \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) wrw \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & bs^{\pi} \\ ca^{\pi} & ds^{\pi} \end{bmatrix} \right), \tag{7}$$

где је r дефинисан као у (3) и $w = \begin{bmatrix} w_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}$.

Доказ: Прво, приметимо да је $u = \begin{bmatrix} p & a^d b \\ s^d c & (1-p) + s^d c a^d b \end{bmatrix}$ инвертибилан у $\mathcal{A}$ и његов инверз је $u^{-1} = \begin{bmatrix} p + a^d b s^d c & -a^d b \\ -s^d c & 1-p \end{bmatrix}$.

Означимо са $X = uxu^{-1}$, па имамо да је

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = uxu^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} p & a^d b \\ s^d c & (1-p) + s^d c a^d b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p + a^d b s^d c & -a^d b \\ -s^d c & (1-p) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - a^\pi b s^d c + a^d b s^\pi c & a^\pi b + a^d b s \\ s^\pi c + s^d c(a - a^\pi b s^d c + a^d b s^\pi c) & s + s^d c(a^\pi b + a^d b s) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Први и трећи услов из (6) дају нам једнакости $caa^\pi = 0$ и $aa^\pi b = 0$. Други услов имплицира $s^\pi c a a^d = s^\pi c$.

Примењујући ове једнакости заједно са $a = aa^\pi + a^2 a^d$ имамо

$$\begin{aligned} A &= a - a^\pi b s^d c + a^d b s^\pi c = w_0 a^2 a^d + a a^\pi - a^\pi b s^d c, \\ B &= a^\pi b + a^d b s, \\ C &= s^\pi c + s^d c(a - a^\pi b s^d c + a^d b s^\pi c) = s^\pi c + s^d c w_0 a^2 a^d, \\ D &= s + s^d c(a^\pi b + a^d b s) = s + s^d c a^d b s. \end{aligned}$$

Из Леме 3.6, имамо $w_0 a^2 a^d \in (p\mathcal{A}p)^\#$, $(w_0 a^2 a^d)^\# = a^d w_0^{-1}$ и $(wa^2 a^d)^\pi = a^\pi$. Даље,

$$(aa^\pi - a^\pi b s^d c)^2 = (aa^\pi - a^\pi b s^d c a^\pi) a - a a^\pi b s^d c + a^\pi b s^d c a^\pi b s^d c = 0$$

имплицира $(aa^\pi - a^\pi b s^d c) \in (p\mathcal{A}p)^{nil} \subseteq (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и важи

$$w_0 a^2 a^d (aa^\pi - a^\pi b s^d c) = 0.$$

Примењујући Лему 3.5 (ii), закључујемо да је $A \in (p\mathcal{A}p)^d$ и

$$\begin{aligned} A^d &= (w_0 a^2 a^d)^\# + (aa^\pi - a^\pi b s^d c)((w_0 a^2 a^d)^\#)^2 \\ &= (p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1}) a^d w_0^{-1} \end{aligned}$$

Како из $w_0aa^d = aa^dw_0$ следи $(w_0a^2a^d)(a^dw_0^{-1}) = aa^d$ и важи $a^dw_0^{-1}a^\pi = (w_0a^2a^d)^\#(w_0a^2a^d)^\pi = 0$, имамо

$$\begin{aligned}
A^\pi &= p - AA^d \\
&= p - (w_0a^2a^d + aa^\pi - a^\pi bs^dc)(p - a^\pi bs^dca^dw_0^{-1})a^dw_0^{-1} \\
&= p - w_0a^2a^da^dw_0^{-1} - aa^\pi a^dw_0^{-1} + a^\pi bs^dca^dw_0^{-1} \\
&+ w_0a^2a^da^\pi bs^dca^dw_0^{-1}a^dw_0^{-1} + aa^\pi bs^dca^dw_0^{-1}a^dw_0^{-1} \\
&- a^\pi bs^dca^\pi bs^dca^dw_0^{-1}a^dw_0^{-1} \\
&= a^\pi + a^\pi bs^dca^dw_0^{-1}.
\end{aligned}$$

Приметимо да је $AA^\pi = 0$. Дакле, $A^d = A^\#$.

Сада,

$$\begin{aligned}
S &= D - CA^\#B = s + s^dca^dbs \\
&- (s^\pi c + s^dcw_0a^2a^d)(p - a^\pi bs^dca^dw_0^{-1})a^dw_0^{-1}(a^\pi b + a^dbs) \\
&= s + s^dca^dbs - (s^\pi c + s^dcw_0a^2a^d)a^dw_0^{-1}a^dbs \\
&= s + s^dca^dbs - s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbs - s^dcw_0a^2a^da^dw_0^{-1}a^dbs \\
&= s - s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbs.
\end{aligned}$$

Како је

$$s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d, \quad (s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbs)^2 = 0, \quad s(s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbs) = 0,$$

примењујући Лему 3.5 (ii), имамо да је $S \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$ и

$$S^d = s^d - s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbs^d.$$

Тада,

$$S^\pi = (1-p) - SS^d = s^\pi + s^\pi ca^dw_0^{-1}a^dbss^d.$$

Следеће једнакости важе

$$CA^\pi = 0, \quad BS^\pi = 0, \quad AA^\pi = 0, \quad SS^\pi C = 0,$$

што имплицира да X задовољава услове (4) Теореме 3.5. Користећи ову теорему, закључујемо да $X \in \mathcal{A}^d$ и

$$X^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ S^\pi C & S^\pi D \end{bmatrix} R + 1 \right) R,$$

где је

$$R = \begin{bmatrix} A^\# + A^\# BS^d CA^\# & -A^\# BS^d \\ -S^d CA^\# & S^d \end{bmatrix}$$

Тада, примењујући Лему 3.7 на $x = u^{-1}Xu$, имамо

$$x^d = u^{-1}X^d u = u^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ S^\pi C & S^\pi D \end{bmatrix} R + 1 \right) Ru.$$

Приметимо да

$$Ru = \begin{bmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p + BS^d CA^\# & -BS^d \\ -CA^\# & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & a^d b \\ s^d c & (1-p) + s^d ca^d b \end{bmatrix}.$$

Како је

$$\begin{bmatrix} p + BS^d CA^\# & -BS^d \\ -CA^\# & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & a^d b \\ s^d c & (1-p) + s^d ca^d b \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} p + a^\pi b(s^d)^2 caa^d + a^d bs^d caa^d & -a^\pi bs^d - a^d bss^d \\ -s^\pi ca^d w_0^{-1} - s^d caa^d & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & a^d b \\ s^d c & (1-p) + s^d ca^d b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p - a^\pi b(s^d)^2 ca^\pi - a^d bs^d ca^\pi & a^d bs^\pi - a^\pi bs^d \\ -s^\pi ca^d w_0^{-1} + s^d ca^\pi & (1-p) - s^\pi ca^d w_0^{-1} a^d b \end{bmatrix},$$

имамо

$$\begin{aligned} Ru &= \begin{bmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - a^\pi b(s^d)^2 ca^\pi - a^d bs^d ca^\pi & a^d bs^\pi - a^\pi bs^d \\ -s^\pi ca^d w_0^{-1} + s^d ca^\pi & (1-p) - s^\pi ca^d w_0^{-1} a^d b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - a^d bs^d ca^\pi & a^d bs^\pi \\ s^d ca^\pi & (1-p) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A^\# & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a^\pi b(s^d)^2 ca^\pi & -a^\pi bs^d \\ -s^\pi ca^d w_0^{-1} & -s^\pi ca^d w_0^{-1} a^d b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} -a^d b s^d c a^\pi & a^d b s^\pi \\ s^d c a^\pi & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&+ \begin{bmatrix} (p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1}) a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & ((1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b) s^d \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} -a^\pi b (s^d)^2 c a^\pi & -a^\pi b s^d \\ -s^\pi c a^d w_0^{-1} & -s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} a^d + a^d b s^d c a^d & -a^d b s^d \\ -s^d c a^d & s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b s^\pi \\ c a^\pi & d s^\pi \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & b s^\pi \\ c a^\pi & d s^\pi \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Можемо записати

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A^{\#} & 0 \\ 0 & S^d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} w.
\end{aligned}
$$

Одатле,

$$
\begin{aligned}
Ru &= \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} w \\
&\times \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & b s^\pi \\ c a^\pi & d s^\pi \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Означимо са $M = w \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & b s^\pi \\ c a^\pi & d s^\pi \end{bmatrix} \right)$. Приметимо да је
$r \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} = r.$
Користећи једнакост $a^d w_0^{-1} (p + a^d b s^d c a^d a) = a^d w_0^{-1} (a^d + a^d b s^d c a^d) a$,

имамо

$$\begin{aligned}
x^d &= u^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ S^\pi C & S^\pi D \end{bmatrix} R + 1\right) \\
&\times \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M \\
&= u^{-1} \begin{bmatrix} p - A^\pi B S^d C A^\# & A^\pi B S^d \\ S^\pi C A^\# & (1-p) \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M \\
&= u^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} p - a^\pi b (s^d)^2 c a a^d - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} a^d b s^d c a a^d & a^\pi b s^d + a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \\ s^\pi c a^d w_0^{-1} (a^d + a^d b s^d c a^d) a & (1-p) \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} p - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M \\
&= u^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} p - a^\pi b (s^d)^2 c a a^d - a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} (a^d + a^d b s^d c a^d) a & a^\pi b s^d + a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \\ s^\pi c a^d w_0^{-1} (a^d + a^d b s^d c a^d) a & (1-p) - s^\pi c a^d w_0^{-1} a^d b s s^d \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M \\
&= u^{-1}\left(1 + \begin{bmatrix} -a^\pi b s^d c a^d w_0^{-1} & a^\pi b s^d \\ s^\pi c a^d w_0^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a^d + a^d b s^d c a^d) a & -a^d b s^d s \\ -s^d c a^d a & s^d s \end{bmatrix}\right) \\
&\times \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M \\
&= u^{-1}\left(1 + \begin{bmatrix} -a^\pi b s^d c a^d & a^\pi b s^d \\ s^\pi c a^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right) \\
&\times \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} M
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix} p + a^d b s^d c & -a^d b \\ -s^d c & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. u^{-1} \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} w_0^{-1} & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ 0 & s^d \end{bmatrix} \right) M \\
&= \left(r + \begin{bmatrix} p + a^d b s^d c & -a^d b \\ -s^d c & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} rwr \right) M \\
&= \left(\begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a^d b s^d c & -a^d b \\ -s^d c & 0 \end{bmatrix} + 1 \right) \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r \right) wrM \\
&= \left(\begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^d b s^\pi c & -a^d b s^\pi d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r \right) wrM \\
&= \left(\begin{bmatrix} p + a^d b s^\pi c a^d & 0 \\ 0 & (1-p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^d b s^\pi c a^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r \right) wrM \\
&= \left(1 + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r \right) wrM.
\end{aligned}
$$

Замењујући M, добијамо (7). □

Ако је $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ у Теореми 3.6, тада је $ss^\pi = 0$ и добијамо као специјалан случај [20, Теорема 9].

Ако је $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$ у Теореми 3.6, добијамо следећу последицу.

Последица 3.4. Нека је x дефинисано као у (2) и нека је $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$. Ако $aa^\pi - a^\pi b s^{-1} c a^\pi = 0$ и $ca^\pi b = 0$, тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$
x^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r_1 + 1 \right) r_1 \left(1 + r_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix} \right),
$$

где је r_1 дефинисано као у Последици 3.3.

У следећој теореми, даћемо репрезентацију x^d под условима $a^\pi b = 0$ и $s^\pi c a a^d = 0$.

Теорема 3.7. Нека је x дефинисано као у (2). Ако је $a^\pi b = 0$ и $s^\pi caa^d = 0$, тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \left(1 + \begin{bmatrix} -a^d bs^d ca^\pi & a^d bs^\pi \\ s^d ca^\pi & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ s^\pi c & s^\pi s \end{bmatrix}^n, \tag{8}$$

где је r дефинисано као у (3).

Доказ: Из претпоставки $a^\pi b = 0$ и $s^\pi caa^d = 0$, важи $s^\pi ca^d = 0$ и пишемо

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d b \\ ss^d c & ss^d d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ s^\pi c & s^\pi s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d b \\ ss^d c & ss^d d \end{bmatrix} \\ &:= y + z. \end{aligned}$$

Сада, добијамо да $yz = 0$ и $y \in \mathcal{A}^{qnil}$, јер је $aa^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и $ss^\pi \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil}$.

Да бисмо доказали $z \in \mathcal{A}^d$, приметимо да је

$$z = \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d bss^d \\ ss^d caa^d & ss^d dss^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aa^d bs^\pi \\ ss^d ca^\pi & ss^d ds^\pi \end{bmatrix} := z_1 + z_2.$$

Из Леме 3.8, имамо да је $z_1 \in \mathcal{A}^d$ и $z_1^d = r$. Како је $z_2 z_1 = 0$ и $z_2^2 = 0$, из Леме 3.5(и), $z \in \mathcal{A}^d$ и $z^d = z_1^d + (z_1^d)^2 z_2 = r + r^2 z_2$.

Одатле, користећи Лему 3.5(i), $x \in \mathcal{A}^d$ и $x^d = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^{n+1}(1 + rz_2)y^n$ што доказује (8). □

Такође, можемо извести следећи израз за уопштени Дразинов инверз блок матрице x.

Теорема 3.8. Нека је x дефинисано као у (2). Ако је $a^\pi b = 0 = bs^\pi$ и $s^\pi scaa^d = 0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi c & s^\pi d \end{bmatrix} r + 1 \right) r \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^n a^\pi & 0 \end{bmatrix} \right), \tag{9}$$

где је r дефинисано као у (3).

Доказ: На сличан начин као у доказу Теореме 3.5, користећи следећу декомпозицију

$$x = \begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ ca^\pi & ss^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2a^d & bss^d \\ caa^d & dss^d \end{bmatrix} := y + z,$$

добијамо тражено тврђење. □

Користећи Теорему 3.7, добијамо потребне и довољне услове за егзистенцију и израз групног инверза елемента x. Следећи резултат уопштава[20, Теорема 12] и [12, Теорема 2.2].

Теорема 3.9. Нека је x дефинисано као у (2). Претпоставимо да је $a^\pi b = 0$ и $s^\pi caa^d = 0$. Тада

$x \in \mathcal{A}^\#$ ако и само ако $a \in (p\mathcal{A}p)^\#$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$ и $s^\pi ca^\pi = 0$.

Даље, ако је $a \in (p\mathcal{A}p)^\#$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$, $a^\pi b = 0$ и $s^\pi c = 0$, тада

$$x^\# = \begin{bmatrix} a^\# + a^\# bs^\# ca^\# & -a^\# bs^\# \\ -s^\# ca^\# & s^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - a^\# bs^\# ca^\pi & a^\# bs^\pi \\ s^\# ca^\pi & 1-p \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Доказ: Ако је $x \in \mathcal{A}^\#$, из Теореме 3.7, $x^\#$ је једнако десној страни израза (8). Како је $xr^2 = (xr)r = \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix} r = r$, тада је

$$\begin{aligned} x^2x^\# &= x^2r\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &+ \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix}\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ s^\pi c & s^\pi s \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1}\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ s^\pi c & s^\pi s \end{bmatrix}^n \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Из једнакости $x - x^2x^{\#} = 0$ добијамо $I_3 = x - I_1 - I_2$. Сада приметимо да је

$$\begin{aligned} x^{\#} &= r\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &+ r^2\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ s^\pi c & s^\pi s \end{bmatrix} + r^2 I_3 \\ &= r\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right) + r^2(x - I_1) \\ &= r\left(1 + \begin{bmatrix} -a^dbs^dca^\pi & a^dbs^\pi \\ s^dca^\pi & 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned} x^2x^{\#} &= \begin{bmatrix} a^2a^d + a^\pi bs^dca^\pi & aa^dbs^\pi + bss^d \\ caa^d + ss^dca^\pi & ca^db + s^2s^d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2a^d & bs^\pi + bss^d \\ ss^dcaa^d + ss^dca^\pi & d - s + s^2s^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2a^d & b \\ ss^dc & d - s + s^2s^d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и $x^2x^{\#} = x$ имплицира $a^2a^d = a$, $s^2s^d = s$ и $ss^dc = c$. Одатле, $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ и $s^\pi ca^\pi = ca^\pi - ca^\pi = 0$.

Претпоставимо да је $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ и $s^\pi ca^\pi = 0$. Тада је $s^\pi c = s^\pi ca^\pi + s^\pi caa^{\#} = 0$. Означимо са u десну страну у изразу (10). Користећи Теорему 3.7, добијамо да је $x \in \mathcal{A}^d$ и $x^d = u$. Може се доказати да је $xx^dx = xux = x$ што имплицира да је $x \in \mathcal{A}^{\#}$ и $x^{\#} = u$. □

Примењујући Теорему 3.8, доказујемо следећи резултат на групни инверз $x^{\#}$ који је проширење [20, Теорема 13].

Теорема 3.10. Нека је x дефинисано као у (2). Ако је $a^\pi b = 0 = bs^\pi$ и $s^\pi scaa^d = 0$, тада је

$$x \in \mathcal{A}^{\#} \text{ ако и само ако } a \in (p\mathcal{A}p)^{\#},\ s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#} \text{ и } s^\pi ca^\pi = 0.$$

Даље, ако је $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$, $a^{\pi}b = 0 = bs^{\pi}$ и $s^{\pi}ca^{\pi} = 0$, тада је

$$x^{\#} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) r \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right), \tag{11}$$

где је r дефинисано као у (3).

Доказ: Нека је $x \in \mathcal{A}^{\#}$. Користећи Теорему 3.8 имамо да је $x^{\#}$ једнако десној страни у изразу (9). Из $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n+1}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix}$, добијамо

$$\begin{aligned}
x^{\#}x &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) r \left(x + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n+1}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) \left(rx + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) \left(rx - r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) \left(r \begin{bmatrix} a & b \\ caa^{d} & d \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1 \right) \left(\begin{bmatrix} aa^{d} & 0 \\ 0 & ss^{d} \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Приметимо да $x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r = x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}ca^{d} & 0 \end{bmatrix} = 0$ даје

$$x = x^2x^{\#} = xx^{\#}x = x \begin{bmatrix} aa^{d} & 0 \\ 0 & ss^{d} \end{bmatrix} + x \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Дакле $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix} = x - x \begin{bmatrix} aa^{d} & 0 \\ 0 & ss^{d} \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a^{\pi} & 0 \\ 0 & s^{\pi} \end{bmatrix}.$

Из ове једнакости и једнакости $rxr = r$, добијамо

$$\begin{aligned}
x^{\#} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1\right) r \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1\right) r \left(1 + rx \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^{n}a^{\pi} & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1\right) r \left(1 + rx \begin{bmatrix} a^{\pi} & 0 \\ 0 & s^{\pi} \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^{\pi}c & s^{\pi}d \end{bmatrix} r + 1\right) r \left(1 + r \begin{bmatrix} aa^{\pi} & 0 \\ ca^{\pi} & ss^{\pi} \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

имплицирајући

$$\begin{aligned}
x^2x^{\#} &= x^2 r \left(1 + r \begin{bmatrix} aa^{\pi} & 0 \\ ca^{\pi} & ss^{\pi} \end{bmatrix}\right) \\
&= x \begin{bmatrix} aa^{d} & 0 \\ s^{\pi}ca^{d} & ss^{d} \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} -a^{d}bs^{d}ca^{\pi} & 0 \\ s^{d}ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a^2a^{d} & bss^{d} \\ caa^{d} & dss^{d} \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} -a^{d}bs^{d}ca^{\pi} & 0 \\ s^{d}ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a^2a^{d} & bss^{d} \\ caa^{d} & dss^{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -aa^{d}bs^{d}ca^{\pi} + bs^{d}ca^{\pi} & 0 \\ -ca^{d}bs^{d}ca^{\pi} + ds^{d}ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2a^{d} & bss^{d} \\ caa^{d} & dss^{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ss^{d}ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2a^{d} & b \\ c - s^{\pi}ca^{\pi} & d - ss^{\pi} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Из разлога што је $x^2x^{\#} = x$, закључујемо да је $a^2a^d = a$, $ss^{\pi} = 0$ и $s^{\pi}ca^{\pi} = 0$ што доказује $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ и $s^{\pi}ca^{\pi} = 0$.

Претпоставимо да је $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$, $s \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ и $s^{\pi}ca^{\pi} = 0$. Одатле важи $a^n a^{\pi} = 0$ за свако $n \geq 1$. Ако означимо са v десну страну у једнакости (11), из Теореме 3.8, важи $x \in \mathcal{A}^d$ и $x^d = v$. Како је $xx^dx = xrx = x$, тада је $x \in \mathcal{A}^{\#}$ и $x^{\#} = v$. $\square$

У скоријој прошлости, проучавани су ЕР елементи Банахове алгебре. Другим речима, елементи алгебре такви да комутирају са својим Мур-Пенрозовим инверзом [55]. Делује као занимљив проблем наћи израз за ЕР блок матрице.

Представимо сада резултате из још увек необјављеног рада [45].

У следећој леми, представићемо потребне и довољне услове за које елемент $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Банахове алгебре има уопштени Дразинов инверз са уопштеном Банахиевич-Шуровом формом. Одатле добијамо скорашњи резултат у вези са Дразиновим инверзом оператора на Хилбертовим просторима (видети [15, Последица 3]).

Лема 3.9. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, $a \in (p\mathcal{A}p)^{\#}$ и нека је $s = d - ca^{\#}b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\#}$ уопштени Шуров комплемент елемента a у x. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(i) $x \in \mathcal{A}^d$ и
$$x^d = \begin{bmatrix} a^{\#} + a^{\#}bs^{\#}ca^{\#} & -a^{\#}bs^{\#} \\ -s^{\#}ca^{\#} & s^{\#} \end{bmatrix}; \tag{12}$$

(ii) $a^{\pi}bs^{\#} = a^{\#}bs^{\pi}, \quad s^{\pi}ca^{\#} = s^{\#}ca^{\pi} \quad$ и $\quad z = \begin{bmatrix} 0 & bs^{\pi} \\ ca^{\pi} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^{qnil}$;

(iii) $a^{\pi}b = bs^{\pi}, \quad s^{\pi}c = ca^{\pi} \quad$ и $\quad z = \begin{bmatrix} 0 & a^{\pi}b \\ s^{\pi}c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^{qnil}$.

Доказ: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Ако десну страну у једнакости (12) означимо са y, тада добијамо
$$xy = \begin{bmatrix} aa^{\#} - a^{\pi}bs^{\#}ca^{\#} & a^{\pi}bs^{\#} \\ s^{\pi}ca^{\#} & ss^{\#} \end{bmatrix},$$
$$yx = \begin{bmatrix} a^{\#}a - a^{\#}bs^{\#}ca^{\pi} & a^{\#}bs^{\pi} \\ s^{\#}ca^{\pi} & s^{\#}s \end{bmatrix}.$$

Дакле, $xy = yx$ ако и само ако је $a^\pi bs^\# = a^\# bs^\pi$ и $s^\pi ca^\# = s^\# ca^\pi$, зато што ове једнакости повлаче $(a^\pi bs^\#)ca^\# = a^\# b(s^\pi ca^\#) = a^\# bs^\# ca^\pi$. Даље, можемо проверити да је $yxy = y$. Користећи $s = d - ca^\# b$, $a^\pi bs^\# = a^\# bs^\pi$ и $s^\pi ca^\# = s^\# ca^\pi$, имамо

$$x - x^2 y = \begin{bmatrix} -bs^\# ca^\pi & bs^\pi \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Из $a^\# bs^\pi = a^\pi bs^\# = (p - aa^\#)bs^\# = bs^\# - aa^\# bs^\#$, добијамо $bs^\# = a^\# bs^\pi + aa^\# bs^\#$ што даје $ca^\pi bs^\# = 0 = bs^\# ca^\pi bs^\#$ и

$$x - x^2 y = \begin{bmatrix} p & -bs^\# \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} p & bs^\# \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}.$$

Како је $r(x - x^2 y) = r\left(\begin{bmatrix} p & bs^\# \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -bs^\# \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} z \right) = r(z)$, закључујемо да је $x - x^2 y \in \mathcal{A}^{qnil}$ еквивалентно са $z \in \mathcal{A}^{qnil}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Докажимо да је $a^\pi bs^\# = a^\# bs^\pi$ еквивалентно са $a^\pi b = bs^\pi$. Заиста, множењем $a^\pi bs^\# = a^\# bs^\pi$ са десне стране са s и са леве стране са a, редом, добијамо $a^\pi bs^\# s = 0$ и $aa^\# bs^\pi = 0$. Одатле, $bs^\# s = aa^\# bs^\# s = aa^\# b$ и

$$a^\pi b = b - aa^\# b = b - bs^\# s = bs^\pi.$$

С друге стране, ако је $a^\pi b = bs^\pi$, тада је $(a^\pi b)s^\# = bs^\pi s^\# = 0$ и $a^\#(bs^\pi) = a^\# a^\pi b = 0$, тј. $a^\pi bs^\# = a^\# bs^\pi$.

Аналогно, можемо проверити да је $s^\pi ca^\# = s^\# ca^\pi$ еквивалентно са $s^\pi c = ca^\pi$. Дакле, еквиваленција (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) важи. $\square$

Из Леме 3.9 следи последица која доказује [3, Теорема 2].

Последица 3.5. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, $a \in (p\mathcal{A}p)^\#$ и нека је $s = d - ca^\# b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$ уопштени Шуров комплемент елемента a у x. Тада $x \in \mathcal{A}^\#$ и

$$x^\# = \begin{bmatrix} a^\# + a^\# bs^\# ca^\# & -a^\# bs^\# \\ -s^\# ca^\# & s^\# \end{bmatrix}$$

ако и само ако

$$a^\pi b = 0 = bs^\pi, \quad s^\pi c = 0 = ca^\pi.$$

Сада, проширујемо добро познат резултат у вези са Дразиновим инверзом комплексних матрица на уопштени Дразинов инверз елемената Банахове алгебре (видети [17, Теорема 3.5]).

Теорема 3.11. Нека је

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \tag{13}$$

у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s = -ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$. Ако је

$$ss^d ca^\pi b = 0, \qquad ss^d ca^\pi a = 0, \qquad aa^d bs^\pi c = 0, \qquad bs^\pi ca^\pi = 0, \tag{14}$$

тада $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$\begin{aligned} x^d &= \left(r + \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi bs^\pi \\ s^\pi ca^\pi & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & a^\pi bss^d \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix} r^{n+2} \right) \\ &\times \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & aa^d bs^\pi \\ ss^d ca^\pi & 0 \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \tag{15}$$

где је

$$r = \begin{bmatrix} a^d + a^d bs^d ca^d & -a^d bs^d \\ -s^d ca^d & s^d \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Доказ: Примењујући једнакости $aa^d + a^\pi = p$ и $ss^d + s^\pi = 1 - p$, имамо

$$x = \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d b \\ ss^d c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ s^\pi c & 0 \end{bmatrix} := u + v.$$

Једнакости $a^d a^\pi = 0$ и (14) дају $uv = 0$.

Најпре докажимо да је $u \in \mathcal{A}^d$. Ако запишемо

$$u = \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d bss^d \\ ss^d caa^d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aa^d bs^\pi \\ ss^d ca^\pi & 0 \end{bmatrix} := u_1 + u_2,$$

можемо добити $u_2u_1 = 0$ и $u_2^2 = 0$.

Нека је $A_{u_1} \equiv a^2a^d$, $B_{u_1} \equiv aa^dbss^d$, $C_{u_1} \equiv ss^dcaa^d$ и $D_{u_1} \equiv 0$. Тада $u_1 = \begin{bmatrix} A_{u_1} & B_{u_1} \\ C_{u_1} & D_{u_1} \end{bmatrix}$ и $(a^2a^d)^\# = a^d$, $A_{u_1} \in (p\mathcal{A}p)^\#$. Такође, из $s = -ca^db$ следи $S_{u_1} \equiv D_{u_1} - C_{u_1}A_{u_1}^\# B_{u_1} = s^2s^d \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^\#$ и $(s^2s^d)^\# = s^d$. Због тога $A_{u_1}^\pi B_{u_1} S_{u_1}^\# = 0 = A_{u_1}^\# B_{u_1} S_{u_1}^\pi$, $S_{u_1}^\pi C_{u_1} A_{u_1}^\# = 0 = S_{u_1}^\# C_{u_1} A_{u_1}^\pi$ и $\begin{bmatrix} 0 & B_{u_1}S_{u_1}^\pi \\ C_{u_1}A_{u_1}^\pi & 0 \end{bmatrix} = 0 \in \mathcal{A}^{qnil}$. Из Леме 3.9 приметимо да $u_1 \in \mathcal{A}^d$ и

$$u_1^d = \begin{bmatrix} A_{u_1}^\# + A_{u_1}^\# B_{u_1} S_{u_1}^\# C_{u_1} A_{u_1}^\# & -A_{u_1}^\# B_{u_1} S_{u_1}^\# \\ -S_{u_1}^\# C_{u_1} A_{u_1}^\# & S_{u_1}^\# \end{bmatrix} = r.$$

Користећи Лему 3.5(i) важи $u \in \mathcal{A}^d$ и $u^d = u_1^d + (u_1^d)^2 u_2 = r + r^2 u_2$.

Да бисмо доказали да је $v \in \mathcal{A}^{qnil}$ посматрајмо

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi bs^\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi ca^\pi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi bss^d \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix} \\ &:= v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Ако је $z = \begin{bmatrix} m & t \\ 0 & n \end{bmatrix}$, тада $\lambda 1 - z = \begin{bmatrix} \lambda p - m & -t \\ 0 & \lambda(1-p) - n \end{bmatrix}$. Одатле

$$\lambda \in \rho_{p\mathcal{A}p}(m) \cap \rho_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}(n) \;\Rightarrow\; \lambda \in \rho(z),$$

тј.

$$\sigma(z) \subseteq \sigma_{p\mathcal{A}p}(m) \cup \sigma_{(1-p)\mathcal{A}(1-p)}(n).$$

Приметимо да из $aa^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ следи $v_1 \in \mathcal{A}^{qnil}$. Може се проверити да је $v_1v_2 = 0$ и $v_2^2 = 0$, тј. $v_2 \in \mathcal{A}^{nil}$. Сада, из Леме 3.4 имамо $v_1 + v_2 \in \mathcal{A}^{qnil}$. Користећи опет Лему 3.4 из $v_3^2 = 0$ и $v_3(v_1+v_2) = 0$ закључујемо да је $v \in \mathcal{A}^{qnil}$.

Примењујући Лему 3.5(ii) закључујемо да је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} v^{n+1}(u^d)^{n+2}\right) u^d = \left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} v^{n+1}(u^d)^{n+2}\right) r(1 + ru_2).$$

Како је $u_2r = u_2u_1^d = (u_2u_1)(u_1^d)^2 = 0$, тада $(u^d)^{n+2} = (r+r^2u_2)^{n+2} = r^{n+2}(1+ru_2)$. Из $r = \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix} r$, добијамо $vr = v \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 0 & a^\pi bss^d \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix}$. Из $v^{n+1} = (v_1+v_2)^n v$ имамо $v^{n+1}(u^d)^{n+2} = (v_1 + v_2)^n \begin{bmatrix} 0 & a^\pi bss^d \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix} r^{n+1}(1+ru_2)$. Опет примењујући $u_2r = 0$ добијамо (15). $\square$

Из Теореме 3.11, добијамо следећу последицу.

Последица 3.6. Нека је x дефинисан као у (13), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је r дефинисано као у (16).

(1) Ако је $ca^\pi = 0$ и уопштени Шуров комплемент $s = -ca^db$ је инвертибилан, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = r + \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r^{n+2}.$$

(2) Ако је $ca^\pi = 0$, $a^\pi b = 0$ и уопштени Шуров комплемент $s = -ca^db$ је инвертибилан, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \begin{bmatrix} a^d + a^dbs^{-1}ca^d & -a^dbs^{-1} \\ -s^{-1}ca^d & s^{-1} \end{bmatrix}.$$

(3) Ако је $ca^\pi b = 0$, $ca^\pi a = 0$ и уопштени Шуров комплемент $s = -ca^db$ је инвертибилан, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \left(r + \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & a^na^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r^{n+2} \right) \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix} \right).$$

У следећим теоремама, претпостављамо да је $s = -ca^db$ има уопштени Дразинов инверз и доказујемо репрезентације уопштеног Дразиновог инверза анти-троугаоне блок матрице.

Неколико резултата из [16] су проширени.

Теорема 3.12. Нека је x дефинисано као у (13), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s = -ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$. Ако је $bca^\pi = 0$ и $aa^d bs^\pi = 0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix}^n \left(1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi c & 0 \end{bmatrix} r\right) r^{n+1}, \tag{17}$$

где је r дефинисано као у (16).

Доказ: Можемо писати

$$x = \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d b \\ caa^d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix} := y + q.$$

Добијамо $yq = 0$ под претпоставком $bca^\pi = 0$.

У циљу доказивања $y \in \mathcal{A}^d$ приметимо да

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d bss^d \\ ss^d caa^d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aa^d bs^\pi \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 a^d & aa^d bss^d \\ ss^d caa^d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi caa^d & 0 \end{bmatrix} := y_1 + y_2, \end{aligned}$$

$y_1 y_2 = 0$ и $y_2^2 = 0$. Користећи Лему 3.9, имамо да је $y_1 \in \mathcal{A}^d$ и $y_1^d = r$. Из Леме 3.5(ii), $y \in \mathcal{A}^d$ и $y^d = y_1^d + y_2(y_1^d)^2 = r + y_2 r^2$.

Даље, проверимо да је $q \in \mathcal{A}^{qnil}$. Нека је

$$q = \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix} := q_1 + q_2.$$

Одатле закључујемо да $q_1 \in \mathcal{A}^{qnil}$ и $q_2 \in \mathcal{A}^{nil}$, јер је $aa^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и $q_2^2 = 0$. Како је $q_1 q_2 = 0$, из Леме 3.4 имамо $q \in \mathcal{A}^{qnil}$.

Примењујући Лему 3.5(ii) имамо да је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n (y^d)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n (1 + y_2 r) r^{n+1}.$$

Једнакост $r = \begin{bmatrix} aa^d & 0 \\ 0 & ss^d \end{bmatrix} r$ даје $y_2 r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s^\pi c & 0 \end{bmatrix} r$ што повлачи (17). $\square$

Замењујући претпоставку $aa^dbs^\pi = 0$ са $s^\pi caa^d = 0$ у Теореми 3.12, добијамо следећу теорему.

Теорема 3.13. Нека је x дефинисано као у (13), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s = -ca^db \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$. Ако је $bca^\pi = 0$ и $s^\pi caa^d = 0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix}^n r^{n+1} \left(1 + r \begin{bmatrix} 0 & bs^\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \tag{18}$$

где је r дефинисано на исти начин као у (16).

Доказ: На сличан начин као и у доказу Теореме 3.12, користећи

$$y = \begin{bmatrix} a^2a^d & aa^dbss^d \\ ss^dcaa^d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & aa^dbs^\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := y_1 + y_2$$

и $y_2y_1 = 0$ доказујемо и ову теорему. □

Ако је $s = -ca^db \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$ и $s' = -s$, тада је $s^\pi = 0$ и $(s')^{-1} = -s^{-1}$. Као специјалан случај Теореме 3.12 (или Теореме 3.13), добијамо следећи резултат који као последицу доказује и [16, Теорема 3.1] за ограничене линеарне операторе на Банаховим просторима.

Последица 3.7. Нека је x дефинисан као у (13), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s' = ca^db \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$. Ако је $bca^\pi = 0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix}^n t^{n+1},$$

где је $t = \begin{bmatrix} a^d - a^db(s')^{-1}ca^d & a^db(s')^{-1} \\ (s')^{-1}ca^d & -(s')^{-1} \end{bmatrix}$.

У следећем резултату су истраживани довољни услови под којима је уопштени Дразинов инверз x^d представљен као у (17) или (18).

Теорема 3.14. Нека је x дефинисан као у (2), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $s = -ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$. Претпоставимо да је $aa^d bca^\pi = 0$ и $ca^\pi b = 0$.

(1) Ако је $aa^d bs^\pi = 0$ и ($aa^\pi b = 0$ или $caa^\pi = 0$), тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и задовољено је (17),

(2) Ако је $s^\pi caa^d = 0$ и ($aa^\pi b = 0$ или $caa^\pi = 0$), тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и задовољено је (18).

Доказ: Овај резултат може бити доказан слично као и Теорема 3.12 и Теорема 3.13, примењујући $q_2 q_1 = 0$ када је $caa^\pi = 0$ и декомпозицију

$$q = \begin{bmatrix} aa^\pi & 0 \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

када $aa^\pi b = 0$. □

Напомена 3. У претходној теореми, ако је $ca^d b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{-1}$, тада имамо као специјални случај [16, Теорема 3.2] за операторе на Банаховим просторима

Следећи резултат је познат за комплексне матрице (видети [53]).

Лема 3.10. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $p \in \mathcal{A}$, $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $w = aa^d + a^d bca^d$ такав да је $aw \in (p\mathcal{A}p)^d$. Ако је $ca^\pi = 0$, $a^\pi b = 0$ и уопштени Шуров комплемент $s = d - ca^d b$ је једнак нули, тада је

$$x^d = \begin{bmatrix} p & 0 \\ ca^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2 a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & a^d b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Доказ: Означимо са y десну страну у једнакости (19). Тада добијамо

$$xy = \begin{bmatrix} (a+bca^d)[(a\omega)^d]^2 a & (a+bca^d)[(a\omega)^d]^2 b \\ (c+dca^d)[(a\omega)^d]^2 a & (c+dca^d)[(a\omega)^d]^2 b \end{bmatrix},$$

$$yx = \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2(a^2+bc) & [(a\omega)^d]^2(ab+bd) \\ ca^d[(a\omega)^d]^2(a^2+bc) & ca^d[(a\omega)^d]^2(ab+bd) \end{bmatrix}.$$

Из $ca^\pi = 0$ и $a^\pi b = 0$ закључујемо да $a+bca^d$ комутира са $a\omega$. Заиста,

$$\begin{aligned} (a+bca^d)(a\omega) &= (a^2+bca^d a)(aa^d + a^d bca^d) = (a^2 + aa^d bc)a^d(a+bca^d) \\ &= (a\omega)(a+bca^d). \end{aligned}$$

Како $a+bca^d$ комутира са $a\omega$, он такође комутира и са $(a\omega)^d$ и имамо

$$(a+bca^d)[(a\omega)^d]^2 a = [(a\omega)^d]^2(a+bca^d)a = [(a\omega)^d]^2(a^2+bc).$$

Из $s=0$ имамо $c+dca^d = ca^d a + ca^d bca^d = ca^d(a+bca^d)$. Због тога

$$(c+dca^d)[(a\omega)^d]^2 a = ca^d(a+bca^d)[(a\omega)^d]^2 a = ca^d[(a\omega)^d]^2(a^2+bc).$$

Такође, $ab+bd = ab+bca^d b = (a+bca^d)b$ и добијамо

$$(a+bca^d)[(a\omega)^d]^2 b = [(a\omega)^d]^2(ab+bd)$$

$$(c+dca^d)[(a\omega)^d]^2 b = ca^d[(a\omega)^d]^2(ab+bd).$$

Дакле, доказали смо да је

$$xy = yx = \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2(a+bca^d)a & [(a\omega)^d]^2(a+bca^d)b \\ ca^d[(a\omega)^d]^2(a+bca^d)a & ca^d[(a\omega)^d]^2(a+bca^d)b \end{bmatrix}.$$

Следеће, можемо проверити да је $yxy = y$. Заиста, имамо

$$\begin{aligned} yxy &= \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2 a & [(a\omega)^d]^2 b \\ ca^d[(a\omega)^d]^2 a & ca^d[(a\omega)^d]^2 b \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2(a+bca^d)a & [(a\omega)^d]^2(a+bca^d)b \\ ca^d[(a\omega)^d]^2(a+bca^d)a & ca^d[(a\omega)^d]^2(a+bca^d)b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^4(a+bca^d)^2 a & [(a\omega)^d]^4(a+bca^d)^2 b \\ ca^d[(a\omega)^d]^4(a+bca^d)^2 a & ca^d[(a\omega)^d]^4(a+bca^d)^2 b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Једнакости $a+bca^d = a-a^2a^d+a^2a^d+bca^d = aa^\pi+a\omega$ и $a^\pi\omega = 0 = \omega a^\pi$ дају $(a+bca^d)^2 = a^2a^\pi + (a\omega)^2$. Одатле,

$$\begin{aligned} (a\omega)^d(a+bca^d)^2 &= (a\omega)^d(a^2a^\pi + (a\omega)^2) \\ &= [(a\omega)^d]^2(a\omega)a^\pi a^2 + (a\omega)^d(a\omega)^2 = (a\omega)^d(a\omega)^2 \end{aligned}$$

и $[(a\omega)^d]^4(a+bca^d)^2 = [(a\omega)^d]^4(a\omega)^2 = [(a\omega)^d]^2$ повлачи

$$yxy = \begin{bmatrix} [(a\omega)^d]^2 a & [(a\omega)^d]^2 b \\ ca^d[(a\omega)^d]^2 a & ca^d[(a\omega)^d]^2 b \end{bmatrix} = y.$$

Добијамо

$$x - x^2y = \begin{bmatrix} (a\omega)^\pi a & (a\omega)^\pi b \\ ca^d(a\omega)^\pi a & ca^d(a\omega)^\pi b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ ca^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a\omega)^\pi a & (a\omega)^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приметимо да из $a + bca^d = aa^\pi + a\omega$, $(a\omega)^\pi(a+bca^d) = aa^\pi + (a\omega)(a\omega)^\pi$. Како је $aa^\pi, (a\omega)(a\omega)^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и $aa^\pi(a\omega)(a\omega)^\pi = 0$ помоћу Леме 3.4, имамо да је $aa^\pi + (a\omega)(a\omega)^\pi \in (p\mathcal{A}p)^{qnil}$ и $r_{p\mathcal{A}p}((a\omega)^\pi(a+bca^d)) = 0$. Из

$$\begin{aligned} r(x-x^2y) &= r\left(\begin{bmatrix} (a\omega)^\pi a & (a\omega)^\pi b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ ca^d & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= r\left(\begin{bmatrix} (a\omega)^\pi(a+bca^d) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r_{p\mathcal{A}p}((a\omega)^\pi(a+bca^d)) = 0, \end{aligned}$$

закључујемо да је $x - x^2y \in \mathcal{A}^{qnil}$ и тиме је доказано да је $x^d = y$.
$\square$

У следећој теореми, проширујемо [16, Теорема 3.3 и Теорема 3.4] са оператора на Банаховим просторима на елементе Банахових алгебри.

Теорема 3.15. Нека је x дефинисан као у (13), $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ и нека је $k = a^2a^d + aa^dbca^d \in (p\mathcal{A}p)^d$. Ако је $ca^db = 0$ и ако важе неки од следећих услова:

(1) $bca^\pi = 0$;

(2) $aa^dbca^\pi = 0$, $aa^\pi b = 0$ и $ca^\pi b = 0$;

(3) $aa^dbca^\pi = 0$, $caa^\pi = 0$ и $ca^\pi b = 0$;

тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} aa^\pi & a^\pi b \\ ca^\pi & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} (k^d)^2a & (k^d)^2b \\ ca^d(k^d)^2a & ca^d(k^d)^2b \end{bmatrix}^{n+1}. \qquad (20)$$

Доказ: Да бисмо доказали део (1) претпоставимо да је $x = y + q$, где су s и y дефинисани као у доказу Теореме 3.12. Следи да је $yq = 0$ и $q \in \mathcal{A}^{qnil}$. Примењујући Лему 3.10, закључујемо да је $y \in \mathcal{A}^d$ и

$$y^d = \begin{bmatrix} p & 0 \\ ca^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k^d)^2a^2a^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & a^db \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Како је $kaa^d = k$, тада је $k^daa^d = k^d$ и

$$y^d = \begin{bmatrix} (k^d)^2a & (k^d)^2b \\ ca^d(k^d)^2a & ca^d(k^d)^2b \end{bmatrix}.$$

Користећи Лему 3.5(ii), закључујемо да је $x \in \mathcal{A}^d$ и $x^d = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n(y^d)^{n+1}$.

Одатле важи (20).

Делови (2) и (3) могу да се провере на сличан начин као у делу (1) и доказу Теореме 3.14. □

Ако је $c=0$ или $b=0$ у Теореми 3.15, имамо да је $k=a^2a^d \in (p\mathcal{A}p)^d$ и $k^d=a^d$. Као последицу Теореме 3.15, добијамо следећи резултат.

Последица 3.8. Нека је x дефинисан као у (13) и нека је $a \in (p\mathcal{A}p)^d$.

(1) Ако је $c=0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \begin{bmatrix} a^d & (a^d)^2 b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Ако је $b=0$, тада је $x \in \mathcal{A}^d$ и

$$x^d = \begin{bmatrix} a^d & 0 \\ c(a^d)^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 Фредхолмова својства матрица оператора

Е. И. Фредхолм је у свом раду [31] из 1903. године о класама функционалних једначина решавао интегралну једначину, која је у његову част названа Фредхолмова интегрална једначина. Решавање ове интегралне једначине развило је Фредхолмову теорију. Фредхолмову интегралну једначину можемо записати и у операторском облику:

$$(I + \lambda K)f = g,$$

где је g позната непрекидна функција на $[a, b]$, f непозната функција непрекидна на $[a, b]$ и K интегрални оператор који је компактан на простору $C([a, b])$. Тада је $A = I + \lambda K$ Фредхолмов оператор.

Тиме је Фредхолмова теорија дата и за операторе у терминима спектралне теорије.

Рад [31] сматра се битном прекретницом у стварању теорије оператора. Између осталог, Д. Хилберт је развио концепт Хилбертових простора током истраживања интегралних једначина које је представио Фредхолм у свом раду.

4.1 Десни и леви Фредхолмов оператор $M_{(T,S)}$

Овај одељак бавиће се својствима десних и левих Фредхолмових оператора типа $M_{(T,S)}$. Тачније, за дате операторе $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ од интереса нам је да нађемо операторе $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$ такве да је оператор

$$M_{(T,S)} = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

десни или леви Фредхолмов оператор.

У том циљу, подсетимо се неких особина десних и левих Фредхолмових оператора [56].

Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је леви Фредхолмов оператор ако је $\alpha(A) = \dim \mathcal{N}(A) < \infty$ и $\mathcal{R}(A)$ је затворен и комплементаран у Y. Скуп свих левих Фредхолмових оператора из простора X у простор Y означавали смо са $\Phi_l(X,Y)$. Као последицу Теореме 1.13 познато је да важи $A \in \Phi_l(X,Y)$ ако и само ако постоје оператори $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $F \in \mathcal{F}(X)$ такви да $BA = I_X + F$ важи.

Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ је десни Фредхомов оператор ако је $\beta(A) = \dim Y/\mathcal{R}(A) < \infty$ и $\mathcal{N}(A)$ је комплементаран у простору X. Приметимо да ако је A десни Фредхолмов оператор, тада следи да $\mathcal{R}(A)$ мора да буде затворен и комплементаран потпростор простора Y. Скуп свих десних Фредхолмових оператора из X у Y означавали смо са $\Phi_r(X,Y)$. Као последица Теореме 1.14 познато је да важи $A \in \Phi_r(X,Y)$ ако и само ако постоји $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $F \in \mathcal{F}(Y)$ такви да $AB = I_Y + F$ важи.

Ако је $A \in \Phi_r(X,Y)$ и $B \in \Phi_r(Y,Z)$, тада је $BA \in \Phi_r(X,Z)$. Сличан резултат важи и за класу Φ_l. Скуп свих Фредхолмових оператора дефинисали смо као $\Phi(X,Y) = \Phi_r(X,Y) \cap \Phi_l(X,Y)$.

Како су оператори са затвореном сликом увек компактни, као последицу Леме 1.2 добијамо да важи следећа лема.

Лема 4.1. Нека су X и Y Банахови простори и нека су дати оператори $A \in \Phi_r(X,Y)$ и $P \in \mathcal{F}(X,Y)$. Тада $A + P \in \Phi_r(X,Y)$. Аналоган резултат важи и за класе оператора Φ_l и Φ.

Следећа лема нам је потребна.

Лема 4.2. Нека су M_1, M_2 и N векторски потпростори векторског простора X. Ако $M_1 \subseteq M_2$, тада $\dim M_1/(M_1 \cap N) \leq \dim M_2/(M_2 \cap N)$.

Особине десних, односно левих, Фредхолмових оператора могу да се нађу у [38] и [56].

Важност и примена матрица оператора може се видети у радовима [21], [29], [30], [32], [35], [43], [48] и [69]. У овом одељку биће изложени резултати из заједничког рада са Д.С. Ђорђевићем [23] који су повезани са истраживањем у радовима [32] и [43], где су испитиване лева и десна инвертибилност оператора $M_{(T,S)}$.

4.1.1 Десни Фредхолмов оператор

Посматрајмо десна Фредхолмова својства оператора $M_{(T,S)}$.

Теорема 4.1. Нека су дати оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y,X)$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(а) $[A \quad C] \in \Phi_r(X \oplus Y, X) \setminus \Phi(X \oplus Y, X)$ и постоји оператор $J \in \Phi_l(Y, \mathcal{N}([A \quad C]) \setminus \Phi(Y, \mathcal{N}([A \quad C]))$.

(б) $M_{(T,S)} \in \Phi_r(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$ за неке операторе $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$.

Доказ: (а) $\Longrightarrow$ (б): Нека је $[A \quad C] \in \Phi_r(X \oplus Y, X) \setminus \Phi(X \oplus Y, X)$. Одатле следи да је $\mathcal{N}([A \quad C])$ бесконачно димензионалан.

По претпоставци теореме, постоји оператор

$$J \in \Phi_l(Y, \mathcal{N}([A \quad C]) \setminus \Phi(Y, \mathcal{N}([A \quad C])),$$

па је $\mathcal{N}(J)$ коначно димензионалан и $\mathcal{N}([A \quad C])/R(J)$ бесконачно димензионалан. Оператор J има следећи облик

$$J = \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} : Y \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathcal{R}(J)$ затворен и комплементаран у $\mathcal{N}([A \quad C])$ и $\mathcal{N}([A \quad C])$ затворен и комплементаран у $X \oplus Y$ закључујемо да постоје затворени потпростори V и Wтакви да је $\mathcal{N}[A \quad C]) = R(J) \oplus V$ и $X \oplus Y = \mathcal{N}([A \quad C]) \oplus W = R(J) \oplus V \oplus W$. Приметимо да је V бесконачно димензионалан.

Постоји затворен потпростор Y_1 такав да је $Y = \mathcal{N}(J) \oplus Y_1$. Рестрикција оператора $J : Y_1 \to \mathcal{R}(J)$ је инвертибилна и нека је оператор $K_1 : \mathcal{R}(J) \to Y_1$ њен инверз. Дефинишимо оператор $K \in \mathcal{L}(X \oplus Y, Y)$ на следећи начин:

$$Kx = \begin{cases} K_1 x, & x \in \mathcal{R}(J), \\ 0, & x \in V \oplus W. \end{cases}$$

Тада је $K \in \mathcal{L}(X \oplus Y, Y)$ десни Фредхолмов оператор такав да је $\mathcal{N}(K) = V \oplus W$. Оператор K има матричну форму

$$K = [T \quad S] : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \to Y.$$

Такође, важи

$$KJ = [T \quad S] \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = I_Y - P_1, \tag{1}$$

где је P_1 пројектор простора Y на коначно димензионалан потпростор $\mathcal{N}(J)$ паралелно са Y_1.

Из $\mathcal{R}(J) \subset \mathcal{N}([A \quad C])$ доказујемо да је

$$[A \quad C] \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

Како је $[A \quad C] \in \Phi_r(X \oplus Y, X)$, имамо следећу декомпозицију простора: $X \oplus Y = \mathcal{N}([A \quad C]) \oplus W$ и $X = \mathcal{R}([A \quad C]) \oplus U$, где је U коначно димензионалан. Како је рестрикција оператора $[A \quad C] : W \to \mathcal{R}([A \quad C])$ инвертибилна, означимо са

$L_1 : \mathcal{R}([A \quad C]) \to W$ њен инверз. Тада посматрајмо оператор $L \in \mathcal{L}(X, X \oplus Y)$ који је дефинисан на следећи начин:

$$Lx = \begin{cases} L_1 x, & x \in \mathcal{R}([A \quad C]) \\ 0, & x \in U. \end{cases}$$

Оператор L има следећу матричну форму

$$L = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} : X \to \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Тада је $L \in \Phi_l(X, X \oplus Y)$, $\mathcal{R}(L) = W$, и

$$[A \quad C]L = [A \quad C] \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = I_X - P_2, \tag{3}$$

где је P_2 пројектор на коначно димензионалан потпростор U паралелно са $\mathcal{R}([A \quad C])$. Како је $\mathcal{N}([T \quad S]) = V \oplus W$, закључујемо да је

$$[T \quad S] \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = 0. \tag{4}$$

На крају, из (1), (2), (3) и (4), имамо да за $M = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix}$ и $N = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ важи следеће:

$$MN = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Како $\begin{bmatrix} -P_2 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix}$ има коначну слику, добијамо да је M десни Фредхолмов оператор. Штавише, приметимо да је

$$\mathcal{N}(M) = \mathcal{N}([A \quad C]) \cap \mathcal{N}([T \quad S]) = V,$$

$$\mathcal{R}(N) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}\right) + \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}\right) = W \oplus \mathcal{R}(J),$$

$$X \oplus Y = \mathcal{R}(J) \oplus V \oplus W.$$

Како је V бесконачно димензионалан, закључујемо да оператори M и N нису Фредхолмови.

(б) $\Longrightarrow$ (а): Претпоставимо да постоје неки оператори $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$ такви да је $M_{(T,S)} \in \Phi_r(X \oplus Y) \setminus \Phi(X,Y)$. Тада постоје оператори $N \in \mathcal{L}(X \oplus Y)$ и $P \in \mathcal{F}(X \oplus Y)$ такви да важи $MN = I + P$. Последња једнакост у матричној форми изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

где су сви P_{ij} оператори коначне слике. Такође, следи да је $N = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} \in \Phi_l(X \oplus Y)$.

Посебно, закључујемо

$$[A \quad C] \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = I_X + P_{11},$$

па је $[A \quad C]$ десни Фредхолмов оператор. Оператор $I_X + P_{11}$ је Фредхолмов. Ако претпоставимо да је оператор $[A \quad C]$ Фредхолмов, на основу Леме 1.1 следи да је $\begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}$ такође Фредхолмов. Како

$$\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}\right) + \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}\right) \supset \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}\right),$$

следи да $\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ припада $\Phi_r(X \oplus Y)$, па је $\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ Фредхолмов оператор. Опет, према Леми 1.1, закључујемо да је $\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix}$ Фредхолмов оператор ($I+P$ је Фредхолмов на основу Леме 4.1). Последње тврђење није могуће, па имамо да је

$[A \quad C] \in \Phi_r(X \oplus Y, X) \setminus \Phi(X \oplus Y, X)$.

Означимо са $L = \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(Y, X \oplus Y)$. Имамо $[T \quad S]L = I_Y + P_{22}$, па је $L \in \Phi_l(Y, X \oplus Y) \setminus \Phi(Y, X \oplus Y)$. Супротно, ако је L Фредхолмов оператор, тада је такође и $\begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ Фредхолмов, па је и $\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix}$ Фредхолмов.

Како имамо следећу декомпозицију простора $X \oplus Y = \mathcal{N}([A \quad C]) \oplus W$, оператор L има следећу матричну форму

$$L = \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} : Y \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}([A \quad C]) \\ W \end{bmatrix}.$$

Из чињенице да је

$$\mathcal{R}(P_{12}) = \mathcal{R}([A \quad C]L) = \mathcal{R}\left([A \quad C] \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix}\right) = [A \quad C](\mathcal{R}(K))$$

коначан простор и рестрикција $[A \quad C] : W \to \mathcal{R}([A \quad C])$ је бијекција, закључујемо да је $\mathcal{R}(K)$ коначно димензионалан потпростор простора W.

Како је $L \in \Phi_l(Y, X \oplus Y) \setminus \Phi(Y, X \oplus Y)$, имамо следећу декомпозицију простора $Y = \mathcal{N}(L) \oplus U$ и $X \oplus Y = \mathcal{R}(L) \oplus U_1$, где $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$ и $\dim U_1 = \infty$. Рестрикција $L : U \to \mathcal{R}(L)$ је инвертибилна и нека је $L_1 : \mathcal{R}(L) \to U$ њен инверз.

Како је доказано, $\mathcal{R}(K)$ је коначно димензионалан потпростор, па $Y_1 = L_1(\mathcal{R}(K))$ мора бити коначно димензионалан потпростор простора U и постоји затворен потпростор Y_2 такав да је $U = Y_1 \oplus Y_2$.

Сада, оператор L има следећу матричну форму

$$L = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_1 \\ \mathcal{N}(L) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}([A \quad C]) \\ W \end{bmatrix},$$

где је Y_1 коначно димензионалан. Закључујемо да је $\mathcal{N}(J) = Y_1 \oplus \mathcal{N}(L)$, па је $\dim \mathcal{N}(J) < \infty$.

Из чињенице да је $[T \quad S]L = I_Y + P_{22}$ следи да

$$L_1(\mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(L)) \subseteq \mathcal{N}(I_Y + P_{22}).$$

Како је $I_Y + P_{22}$ Фредхолмов оператор, имамо да је $L_1(\mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(L))$ коначно димензионалан, па је и $\mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(L)$ коначно димензионалан потпростор.

Означимо са $V = \mathcal{N}([A \quad C]) \cap \mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(J)$. Даље,

$$V \subseteq \mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(J) \subseteq \mathcal{N}([T \quad S]) \cap \mathcal{R}(L),$$

па следи да је $\dim V < \infty$. Тада, постоји затворен потпростор V_1 такав да је $\mathcal{N}(M_{(T,S)}) = \mathcal{N}([A \quad C]) \cap \mathcal{N}([T \quad S]) = V \oplus V_1$. Како је $\mathcal{N}(M_{(T,S)})$ бесконачно димензионалан, тада је и V_1 бесконачно димензионалан потпростор.

Сада, примењујући Лему 4.2 на просторе $\mathcal{N}([A \quad C]) \cap \mathcal{N}([T \quad S])$, $\mathcal{N}([A \quad C])$ и $\mathcal{R}(J)$, добијамо

$$\dim V_1 = \dim(\mathcal{N}([A \quad C]) \cap \mathcal{N}([T \quad S]))/V \leq \dim \mathcal{N}([A \quad C])/\mathcal{R}(J).$$

Закључујемо да је $\dim \mathcal{N}([A \quad C])/\mathcal{R}(J) = \infty$.

Доказали смо за оператор $J : Y \to \mathcal{N}([A \quad C])$ да је $\dim \mathcal{N}(J) < \infty$ и $\dim \mathcal{N}([A \quad C])/\mathcal{R}(J) = \infty$.
Дакле, постоји оператор $J \in \Phi_l(Y, \mathcal{N}([A \quad C]) \setminus \Phi(Y, \mathcal{N}([A \quad C]))$.
$\square$

4.1.2 Леви Фредхолмов оператор

Сада испитајмо лева Фредхолмова својства оператора $M_{(T,S)}$. Посматрајмо два засебна случаја у зависности од димензије простора Y.

Теорема 4.2. Нека је X бесконачно димензионалан и нека је Y коначно димензионалан простор. За дате операторе $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, следећа тврђења су еквивалентна:

(a) $M_{(T,S)} \in \Phi_l(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$ за сваки оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и сваки оператор $S \in \mathcal{L}(Y)$;

(b) $A \in \Phi_l(X) \setminus \Phi(X)$.

Доказ: Пре доказа еквиваленције, приметимо да је

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}(A) \oplus Y, \quad \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}(A) \oplus \{0\}.$$

Како је Y коначно димензионалан, имамо да је $A \in \Phi_l(X) \setminus \Phi(X)$ ако и само ако је $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Phi_l(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$.

(а) $\Longrightarrow$ (б): Нека је $M_{(T,S)}$ леви Фредхолмов али није Фредхолмов оператор, за сваки $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и сваки $S \in \mathcal{L}(Y)$. Имамо да је $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -C \\ -T & -S \end{bmatrix}$ где је $\begin{bmatrix} 0 & -C \\ -T & -S \end{bmatrix}$ оператор са коначном сликом. Примењујући Лему 4.1, добијамо да је $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ леви Фредхолмов оператор.

Претпоставимо да је $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Фредхолмов оператор. Примењујући Лему 4.1 на оператор $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ добијамо да оператор $M_{(T,S)}$ мора да буде Фредхолмов, што не важи. Дакле, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ је леви Фредхолмов али није Фредхолмов оператор, па имамо да је $A \in \Phi_l(X) \setminus \Phi(X)$.

(б) $\Longrightarrow$ (а): Нека је сада A леви Фредхолмов али није Фредхолмов оператор. Тада је оператор $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ такође леви Фредхолмов али није Фредхолмов оператор.

Нека су $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$ произвољни оператори. Тада је оператор $M_{(T,S)}$ у класи пертурбација оператора коначне слике оператора $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Заиста, $\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C \\ T & S \end{bmatrix}$, где је $\begin{bmatrix} 0 & C \\ T & S \end{bmatrix}$ оператор са коначном сликом јер је Y коначно димензионалан простор. Примењујући Лему 4.1 на оператор $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ добијамо да је $M_{(T,S)}$ леви Фредхолмов оператор. Ако претпоставимо да је $M_{(T,S)}$ Фредхолмов оператор, из Леме 4.1, закључујемо да оператор $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ мора бити Фредхолмов, што није случај. Тиме доказујемо да је оператор $M_{(T,S)}$ леви Фредхолмов али није Фредхолмов оператор. $\square$

Теорема 4.3. Нека су X и Y бесконачно димензионални такви да је Y изоморфан са $Z = X \oplus Y$. Нека су $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y,X)$ произвољни. Тада $M_{(T,S)} \in \Phi_l(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$ за неке $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$.

Доказ: Како је Y изоморфан са Z, тада $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где је X изоморфан са Y_1 и Y изоморфан са Y_2. Нека су $T \in \mathcal{L}(X,Y_1)$ и $S \in \mathcal{L}(Y,Y_2)$ одговарајући изоморфизми. Тада је $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ лево инвертибилан са левим инверзом $K \in \mathcal{L}(Y,X)$ и $\mathcal{N}(K) = Y_2$. Такође, $S \in \mathcal{L}(Y,Y_2)$ је лево инвертибилан са левим инверзом L и $\mathcal{N}(L) = Y_1$. Тада

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix},$$

па је $M_{(T,S)}$ лево инвертибилан. Следи да је оператор $M_{(T,S)}$ леви Фредхолмов за одабране операторе T и S. Претпоставимо да је $M_{(T,S)}$ Фредхолмов оператор. Како је $\begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix}$ Фредхолмов, из Леме 1.1 следи да је N такође Фредхолмов. Међутим, приметимо да је $\mathcal{N}(N) = X$ који је бесконачно димензионалан. Дакле, N није Фредхолмов оператор. Тада ни $M_{(T,S)}$ није Фредхолмов оператор, тј. $M_{(T,S)} \in \Phi_l(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$. $\square$

Формулишимо последицу за операторе на Хилбертовим просторима.

Последица 4.1. Нека су X и Y бесконачно димензионални и ортогонални потпростори Хилбертовог простора $Z = X \oplus Y$. Нека је $\dim_H Y = \dim_H Z$ и нека су оператори $A \in \mathcal{L}(X)$ и $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ произвољни. Тада $M_{(T,S)} \in \Phi_l(X \oplus Y) \setminus \Phi(X \oplus Y)$ за неке операторе $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $S \in \mathcal{L}(Y)$.

4.2 Леви Браудеров оператор M_C

У склопу Фредхолмове теорије, изучавају се Браудерови оператори. Подсетимо се ознака у вези са Браудеровим операторима.

Леви Браудерови оператори:	$\mathcal{B}_l(X) = \{A \in \Phi_l(X) \mid \operatorname{asc}(A) < \infty\}$
Десни Браудерови оператори:	$\mathcal{B}_r(X) = \{A \in \Phi_r(X) \mid \operatorname{dsc}(A) < \infty\}$
Браудерови оператори:	$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_l(X) \cap \mathcal{B}_r(X)$

Међу левим Браудеровим операторима, разликоваћемо нову класу оператора на следећи начин:

$$\mathcal{B}_{lc}(X) = \{T \in B_l(X) : \overline{\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^{\operatorname{asc}(T)})} \text{ је комплементаран у} X\}.$$

Аналогно, међу десним Браудеровим операторима разликоваћемо класу оператора:

$$\mathcal{B}_{rc}(X) = \{T \in B_r(X) : \overline{\mathcal{R}(T^{\operatorname{dsc}(T)}) + \mathcal{N}(T)} \text{ је комплементаран у } X\}.$$

Као део рада [22], испитивани су услови под којима постоји оператор C тако да матрични оператор M_C припада класи оператора $\mathcal{B}_l(Z)$

Теорема 4.4. Нека важи следеће: $A \in \mathcal{B}_{lc}(X)$, B је регуларан и $\mathcal{N}(B)$ је изоморфан са $X/\overline{(\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^{\mathrm{asc}(A)}))}$. Тада постоји оператор $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ такав да је $M_C \in \mathcal{B}_l(Z)$.

Доказ: Нека је $A \in \mathcal{B}_{lc}(X)$, $\mathrm{asc}(A) = p$ и нека је W затворен потпростор простора X такав да је $X = \overline{\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^p)} \oplus W$. Како је $\mathcal{N}(B)$ комплементаран, тада је $Y = \mathcal{N}(B) \oplus V$ за затворен потпростор V. Како постоји линеаран ограничен и инвертибилан оператор $T : \mathcal{N}(B) \to W$, можемо дефинисати оператор $C : Y \to X$ са

$$C = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} W \\ \overline{\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^p)} \end{bmatrix}.$$

Докажимо да је M_C леви Фредхолмов оператор. Нека је $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(M_C)$, па је $Ax + Cy = 0$ и $By = 0$. Имамо $Ax = -Cy = -Ty \in \mathcal{R}(A) \cap W \subseteq \overline{\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^p)} \cap W = \{0\}$. Како је $y \in \mathcal{N}(B)$ то важи $Cy = Ty$, па је $x \in \mathcal{N}(A)$ и $Ty = 0$. Инвертибилност оператора T даје $y = 0$. То значи да је $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A) \oplus \{0\}$, па је $\mathcal{N}(M_C) \subseteq \mathcal{N}(A) \oplus \{0\}$. Одатле следи да $\alpha(M_C) \leq \alpha(A) < \infty$.

Приметимо да је очигледно $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(M_C)$, па заиста имамо $\alpha(M_C) = \alpha(A)$.

Нека је S рефлексивни уопштени инверз оператора A и K рефлексивни уопштени инверз оператора B и нека је $L = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Докажимо да је $N = \begin{bmatrix} S & 0 \\ L & K \end{bmatrix}$ унутрашњи инверз оператора M_C. Имамо да важи

$$M_C N M_C = \begin{bmatrix} ASA + CLA & ASC + CLC + CKB \\ BLA & BLC + BKB \end{bmatrix}.$$

Како је $\mathcal{R}(A) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^p)} = \mathcal{N}(L)$, даље је $LA = 0$ што повлачи да је $BLA = 0$ и $CLA = 0$. Из чињенице да је S рефлексивни уопштени инверз оператора A, имамо $ASA = A$ и AS

је пројектор простора X на простор $\mathcal{R}(A)$. Како је $\mathcal{R}(C) = W$, $W \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$ и AS пројектор на $\mathcal{R}(A)$, следи да је $ASC = 0$. Аналогно, из чињенице да је K рефлексивни уопштени инверз оператора B, имамо да је $BKB = B$ и KB је пројектор простора Y на простор V. Како је $V = \mathcal{N}(C)$ и $\mathcal{R}(KB) = V$, важи $CKB = 0$. Имамо да је $LC = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ V \end{bmatrix}$, па је $\mathcal{R}(LC) \subseteq \mathcal{N}(B)$ и тада је $BLC = 0$. Очигледно, $CLC = C$ важи.

Следи да је

$$\begin{bmatrix} ASA + CLA & ASC + CLC + CKB \\ BLA & BLC + BKB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = M_C.$$

Дакле, M_C је регуларан. Закључујемо да $M_C \in \Phi_l$.

Сада, докажимо да је $\operatorname{asc}(M_C) < \infty$. Довољно је показати да $\mathcal{N}(M_C^{p+1}) \subseteq \mathcal{N}(M_C^p)$. Нека је $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(M_C^{p+1})$, тада

$$\begin{cases} A^{p+1}x + A^pCy + A^{p-1}CBy + \cdots + ACB^{p-1}y + CB^py = 0, \\ B^{p+1}y = 0. \end{cases}$$

Како $B^py \in \mathcal{N}(B)$, следи да $A^{p+1}x + A^pCy + A^{p-1}CBy + \cdots + ACB^{p-1}y = -CB^py \in \mathcal{R}(A) \cap W \subseteq \overline{\mathcal{R}(A) + \mathcal{N}(A^p)} \cap W = \{0\}$. Дакле,

$$\begin{cases} A^{p+1}x + A^pCy + A^{p-1}CBy + \cdots + ACB^{p-1}y = 0, \\ CB^py = 0. \end{cases}$$

Из дефиниције оператора C и из $B^p \in \mathcal{N}(B)$, знамо да је $CB^py = TB^py = 0$. Како је T инвертибилан оператор, закључујемо да је $B^py = 0$.

Из чињенице да је $A^{p+1}x + A^pCy + A^{p-1}CBy + \cdots + ACB^{p-1}y = 0$, имамо да важи $x_1 = A^px + A^{p-1}Cy + A^{p-2}CBy + \cdots + ACB^{p-2}y + CB^{p-1}y \in \mathcal{N}(A)$. Тада

$$\begin{cases} A^px + A^{p-1}Cy + A^{p-2}CBy + \cdots + ACB^{p-2}y - x_1 + CB^{p-1}y = 0, \\ B^py = 0. \end{cases}$$

Дакле, $B^{p-1}y \in \mathcal{N}(B)$. Одакле следи да $A^px+A^{p-1}Cy+A^{p-2}CBy+\cdots+ACB^{p-2}y-x_1 = -CB^{p-1}y \in (\mathcal{R}(A)+\mathcal{N}(A))\cap W \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)+\mathcal{N}(A^p)}\cap W = \{0\}$, па тада $B^{p-1}y = 0$ и $A^px + A^{p-1}Cy + A^{p-2}CBy + \cdots + ACB^{p-2}y = x_1$. Како је $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, следи да $A^{p-1}x + A^{p-2}Cy + A^{p-3}CBy + \cdots + CB^{p-2}y \in \mathcal{N}(A^2)$. Нека је $x_2 = A^{p-1}x + A^{p-2}Cy + A^{p-3}CBy + \cdots + CB^{p-2}y$. Тада

$$\begin{cases} A^{p-1}x + A^{p-2}Cy + A^{p-3}CBy + \cdots + ACB^{p-3}y - x_2 + CB^{p-2}y = 0 \\ B^{p-1}y = 0. \end{cases}$$

Ако наставимо овај поступак, добићемо

$$\begin{cases} A^2x + ACy - x_{p-1} + CBy = 0 \\ B^2y = 0, \end{cases}$$

где је $x_{p-1} \in \mathcal{N}(A^{p-1})$. Тада постоји $x_p \in \mathcal{N}(A^p)$ такав да је

$$\begin{cases} Ax + Cy - x_p = 0 \\ By = 0. \end{cases}$$

Отуда $Ax - x_p = -Cy \in \overline{\mathcal{R}(A)+\mathcal{N}(A^p)} \cap W = \{0\}$. Следи да $x \in \mathcal{N}(A^{p+1}) = \mathcal{N}(A^p)$ и $y = 0$, па $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(M_C^p)$. Како је $\mathcal{N}(M_C^{p+1}) \subseteq \mathcal{N}(M_C^p)$, имамо $\operatorname{asc}(M_C) \leq p$. $\square$

5 Спектрална својства матрица оператора

Спектрална теорија је битан део функционалне анализе. Има велику примену у више грана математике и физике као што су комплексна анализа, теорија функција, теорија матрица, диференцијалне и интегралне једначине, квантна физика, теорија управљања, итд. Битан допринос је и књига [56].

Кроз историју су проучаване разне врсте спектра. Основни спектар се односи на инвертибилне елементе. За оператор $A \in \mathcal{L}(X)$, спектар је дефинисан на следећи начин:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ није инвертибилан}\}.$$

Спектар се може дефинисати и у односу на неки други скуп елемента као што су регуларни, Фредхолмови, лево и десно инвертибилни елементи, итд. Издвајамо неке од тих спектара за оператор $A \in \mathcal{L}(X)$:

Леви спектар:	$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{G}_l(X)\}$
Десни спектар:	$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{G}_r(X)\}$
Регуларни спектар:	$\sigma_g(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ није регуларан}\}$
Есенцијални спектар:	$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \Phi(X)\}$
Леви Фредхолмов спектар:	$\sigma_{le}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \Phi_l(X)\}$
Десни Фредхолмов спектар:	$\sigma_{re}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \Phi_r(X)\}$
Тачкасти спектар:	$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ није "1-1"}\}$

Спектар матрица оператора изучаван је у литератури и то у [21, 29, 32, 35, 44, 48]. Када се ради о матрицама оператора типа M_C, интересантно је посматрати како се понаша спектар за произвољно C, односно наћи

$$\bigcap_{C \in \mathcal{L}(Y,X)} \sigma_\tau,$$

где је σ_τ неки од наведених спектара.

Ово је предмет изучавања у радовима Д.С. Ђорђевића [21] и Х. Дуа и Ј. Пана [29].

У раду [22] наведена је последица Теореме 2.4 за тачкасти спектар.

Последица 5.1. За дате операторе $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$, имамо

$$\begin{aligned}\bigcap_{C\in\mathcal{L}(X,Y)} \sigma_p(M_C) \subseteq \;& \sigma_l(A) \\ & \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(B-\lambda I) \preceq X/\mathcal{R}(A-\lambda I) \text{ не важи}\} \\ & \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(B-\lambda I) \text{ није комплементаран у } Y\}\end{aligned}$$

Слично, као последица Теореме 2.6 добија се следећа оцена за пресек левих спектара оператора M_C.

Последица 5.2. За дате операторе $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$, имамо

$$\bigcap_{C\in\mathcal{L}(X,Y)} \sigma_l(M_C) = \sigma_l(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(B-\lambda I) \preceq X/\mathcal{R}(A-\lambda I) \text{ не важи}\}$$

Као последицу Теореме 3.1, добијамо следећи резултат за регуларни спектар.

Последица 5.3. Нека су $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(Y)$ дати оператори. Тада важи следећа инклузија:

$$\begin{aligned}\bigcap_{C\in\mathcal{L}(Y,X)} \sigma_g(M_C) \subseteq \;& \sigma_g(A) \cup \sigma_g(B) \\ & \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(B-\lambda I) \preceq X/\mathcal{R}(A-\lambda I) \text{ не важи}\}.\end{aligned}$$

5.1 Условни и псеудо-спектар

Кроз историју спектралне теорије дошло се и на идеју уопштеног спектра. Постоји више уопштења и проширења спектра. Рансфорд је дефинисао један уопштен спектар у [62]. Као специјални случај Рансфордовог спектра, проучаван је условни спектар, а и псеудо-спектар и то у [47], [64] и [68].

Дефинишимо условни и псеудо-спектар у Банаховим алгебрама. Нека је $\mathcal{A}$ Банахова алгебра са јединицом.

Дефиниција 5.1. [68] (Псеудо-спектар)
Нека је $\epsilon > 0$. ϵ-псеудо-спектар елемента $a \in \mathcal{A}$ је дефинисан као

$$\Lambda_\epsilon(a) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid a - z \notin \mathcal{A}^{-1} \quad \vee \quad ||(a-z)^{-1}|| \geq \epsilon\right\}.$$

Дефиниција 5.2. [47] (Условни спектар)
Нека је $0 < \epsilon < 1$. ϵ-условни спектар елемента $a \in \mathcal{A}$ је дефинисан као

$$\sigma_\epsilon(a) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid a - z \notin \mathcal{A}^{-1} \quad \vee \quad ||(a-z)^{-1}|| \cdot ||a-z|| \geq \frac{1}{\epsilon}\right\}.$$

Псеудо-спектар има примену у нумеричким израчунавањима, док је условни спектар користан у нумеричком решавању операторских једначина.

Нека је $A \in \mathcal{L}(X)$ линеаран ограничен оператор на Банаховом простору X и $x, y \in X$. Посматрајмо једначину

$$Ax - \lambda x = y. \tag{1}$$

Важи следеће:

- $\lambda \notin \sigma(A)$ повлачи да једначина (1) има решења,
- $\lambda \notin \sigma_\epsilon(A)$ повлачи да једначина (1) има стабилно решење.

У самосталном раду [44], дефинисана су и испитивана уопштења псеудо-спектра и условног спектра. Биће изложени резултати из тог рада.

Дефинишимо (p,q)-псеудо-спектар и (p,q)-условни спектар на следећи начин:

Дефиниција 5.3. ((p,q)-псеудо-спектар)
Нека је $\epsilon > 0$. $(p,q)-\epsilon$-псеудо-спектар елемента $a \in \mathcal{A}$ је дефинисан као

$$\Lambda_\epsilon(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid a - z \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q} \text{ или } ||(a-z)^{(2)}_{p,q}|| \geq \epsilon \right\}.$$

Дефиниција 5.4. ((p,q)-условни спектар)
Нека је $0 < \epsilon < 1$. $(p,q)-\epsilon$-условни спектар елемента $a \in \mathcal{A}$ је дефинисан као

$$\sigma_{(p,q)-\epsilon}(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid a - z \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q} \text{ или } ||(a-z)^{(2)}_{p,q}|| \cdot ||a-z|| \geq \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

Приметимо да јединственост $a^{(2)}_{p,q}$ дозвољава разматрање (p,q)-псеудо-спектра и (p,q)-условног спектра.

Ако је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на дати идемпотент $u \in \mathcal{A}$, тада норма елемента x може бити дефинисана са

$$||x|| = \max\{||a||, ||b||\}.$$

Сада ћемо формулисати помоћни резултат.

Лема 5.1. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$, $p_1, q_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2, q_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$ и нека је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$ и $q = q_1 + q_2 \in \mathcal{A}$.
Тада је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ ако и само ако $a \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ и $b \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$.
Ако је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, тада је

$$x^{(2)}_{p,q} = \begin{bmatrix} a^{(2)}_{p_1,q_1} & 0 \\ 0 & b^{(2)}_{p_2,q_2} \end{bmatrix}_u.$$

Доказ: Из Леме 3.2 добијамо да су p и q идемпотенти.

Ако је $a \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ и $b \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$, помоћу Теореме 3.4, имамо да је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$.

Ако је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, онда постоји елемент $y = \begin{bmatrix} a_1 & c \\ d & b_1 \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ такав да је $y = x^{(2)}_{p,q}$. Једнакост $yxy = y$ је еквивалентна са једнакостима:

$$\begin{aligned} a_1aa_1 + cbd &= a_1 \\ a_1ac + cbb_1 &= c \\ daa_1 + b_1bd &= d \\ dac + b_1bb_1 &= b_1. \end{aligned}$$

Такође, $yx = p$ је еквивалентна са:

$$\begin{aligned} a_1a &= p_1 \\ cb &= 0 \\ da &= 0 \\ b_1b &= p_2, \end{aligned}$$

и $1 - xy = q$ је еквивалентна са:

$$\begin{aligned} u - aa_1 &= q_1 \\ ac &= 0 \\ bd &= 0 \\ (1-u) - bb_1 &= q_2. \end{aligned}$$

Једнакости $a_1ac + cbb_1 = c$, $cb = 0$ и $ac = 0$ повлаче $c = 0$. Аналогно, $daa_1 + b_1bd = d$, $da = 0$ и $bd = 0$ повлачи $d = 0$. Сада важе једнакости:

$$\begin{aligned} a_1 a a_1 &= a_1 \\ a_1 a &= p_1 \\ u - a a_1 &= q_1, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_1 b b_1 &= b_1 \\ b_1 b &= p_2 \\ (1-u) - b b_1 &= q_2 \end{aligned}$$

доказујући да је $a_1 = a^{(2)}_{p_1,q_1}$ и $b_1 = b^{(2)}_{p_2,q_2}$.
Даље, ако је $x \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, онда је

$$x^{(2)}_{p,q} = \begin{bmatrix} a^{(2)}_{p_1,q_1} & 0 \\ 0 & b^{(2)}_{p_2,q_2} \end{bmatrix}_u .$$

□

Као последицу, имамо следећи резултат за инвертибилност елемента $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$.

Лема 5.2. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$. Тада је $x \in \mathcal{A}^{-1}$ ако и само ако $a \in (u\mathcal{A}u)^{-1}$ и $b \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{-1}$. Ако је $x \in \mathcal{A}^{-1}$, онда је

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}_u .$$

Одатле за спектар елемента $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ важи следеће

$$\sigma(x) = \sigma(a) \cup \sigma(b).$$

Како је $\mathcal{L}(X)$ Банахова алгебра линеарних ограничених оператора, ова особина важи и за матрични оператор M_0. Тачније $\sigma(M_0) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$, где је $M_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Испитајмо да ли слична особина важи и за псеудо-спектар и условни спектар. Формулишимо и докажимо следеће резултате.

Најпре покажимо особину (p,q)-псеудо-спектара.

Теорема 5.1. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$, $\epsilon > 0$, $p_1, q_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2, q_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$ и нека је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$ и $q = q_1 + q_2 \in \mathcal{A}$. Тада је

$$\Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x) = \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b).$$

Доказ: Нека је $z \in \Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x)$ произвољан. Тада је $x - z \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$ или $||(x-z)^{(2)}_{p,q}|| \geq \epsilon$.

Ако је $x - z = \begin{bmatrix} a - zu & 0 \\ 0 & b - z(1-u) \end{bmatrix}_u \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, из Леме 5.1 добијамо да је $a - zu \notin (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ или $b - z(1-u) \notin ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$. Ово повлачи $z \in \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a)$ или $z \in \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$, па је $z \in \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$.

Ако је $x - z = \begin{bmatrix} a - zu & 0 \\ 0 & b - z(1-u) \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$, имамо да је

$$(x-z)^{(2)}_{p,q} = \begin{bmatrix} (a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1} & 0 \\ 0 & (b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2} \end{bmatrix}_u$$

и

$$||(x-z)^{(2)}_{p,q}|| = \max\{||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}||, ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\} \geq \epsilon.$$

Из Леме 5.1 закључујемо да је

$$a - zu \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1} \text{ и } b - z(1-u) \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}.$$

Претпоставка $\max\{||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}||, ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\} \geq \epsilon$ повлачи да или $||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \geq \epsilon$ или $||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}|| \geq \epsilon$ важи. Следи да је $z \in \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a)$ или $z \in \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$, па је $z \in \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$.
Доказали смо да је $\Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x) \subset \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$.

Претпоставимо сада да је $z \in \Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$ произвољан. Следи

$$a - zu \notin (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1} \text{ или } ||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \geq \epsilon$$

или

$$b - z(1-u) \notin ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2} \text{ или } ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}|| \geq \epsilon.$$

Ако је $a - zu \notin (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ или $b - z(1-u) \notin ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$, из Леме 5.1 следи да је $x - z \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$. Дакле, $z \in \Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x)$.
С друге стране, ако је

$$a - zu \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1} \text{ и } b - z(1-u) \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2},$$

важи или $||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \geq \epsilon$ или $||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}|| \geq \epsilon$. Одатле $||(x-z)^{(2)}_{p,q}|| = \max\{||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}||, ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\} \geq \epsilon$. Овим је доказано да је $z \in \Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x)$.
Инклузија $\Lambda_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \Lambda_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b) \subset \Lambda_{(p,q)-\epsilon}(x)$ је доказана. $\square$

У наставку следи особина (p,q)-условног спектра.

Теорема 5.2. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$, $0 < \epsilon < 1$, $p_1, q_1 \in (u\mathcal{A}u)^\bullet$ и $p_2, q_2 \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^\bullet$ и нека је $p = p_1 + p_2 \in \mathcal{A}$ и $q = q_1 + q_2 \in \mathcal{A}$. Тада

$$\sigma_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \sigma_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b) \subset \sigma_{(p,q)-\epsilon}(x).$$

Доказ: Нека је $z \in \sigma_{(p_1,q_1)-\epsilon}(a) \cup \sigma_{(p_2,q_2)-\epsilon}(b)$. Тада имамо да је

$$a - zu \notin (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1} \text{ ор } ||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \cdot ||a-zu|| \geq \frac{1}{\epsilon}$$

или

$$b-z(1-u) \notin ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2} \text{ или } ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\cdot||b-z(1-u)|| \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Ако је $a - zu \notin (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1}$ или $b - z(1-u) \notin ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}$, из Леме 5.1 следи да је $x - z \notin \mathcal{A}^{(2)}_{p,q}$. Тада је $z \in \sigma_{(p,q)-\epsilon}(x)$.
Са друге стране, ако је

$$a - zu \in (u\mathcal{A}u)^{(2)}_{p_1,q_1} \text{ и } b - z(1-u) \in ((1-u)\mathcal{A}(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2},$$

важи или

$$||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}||\cdot||a-zu|| \geq \frac{1}{\epsilon} \text{ или } ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\cdot||b-z(1-u)|| \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Без губљења општости, претпоставимо да важи $||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \cdot ||a-zu|| \geq \frac{1}{\epsilon}$. Одатле је

$$\begin{aligned}
&||(x-z)^{(2)}_{p,q}||||x-z|| = \\
&= \max\{||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}||, ||(b-z(1-u))^{(2)}_{p_2,q_2}||\} \cdot \max\{||a-zu||, ||b-z(1-u)||\} \\
&\geq ||(a-zu)^{(2)}_{p_1,q_1}|| \cdot ||a-zu|| \geq \frac{1}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Овим је доказано да је $z \in \sigma_{(p,q)-\epsilon}(x)$. □

Следећи пример показује да обрнута инклузија у претходној теореми не важи.

Пример 5.1. Нека је $0 < \epsilon < 1$, $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathcal{A}^{\bullet}$ такво да је $||u|| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ и $||1-u|| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Нека је $x = \begin{bmatrix} (\epsilon^2+z)u & 0 \\ 0 & (\epsilon+z)(1-u) \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$. Тада је

$$z \in \sigma_{(1,0)-\epsilon}(x), \text{ али } z \notin (\sigma_{(u,0)-\epsilon}((\epsilon^2+z)u) \cup \sigma_{(1-u,0)-\epsilon}((\epsilon+z)(1-u))).$$

Доказ: За идемпотенте $u \in \mathcal{A}$ и $1-u \in \mathcal{A}$, имамо да је $||u|| \geq 1$ и $||1-u|| \geq 1$. Постоји инверз

$$(x-z)^{(2)}_{1,0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon^2}u & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon}(1-u) \end{bmatrix}_u$$

као и инверзи

$$((\epsilon^2+z)u - zu)^{(2)}_{u,0} = (\epsilon^2 u)^{(2)}_{u,0} = \frac{1}{\epsilon^2}u$$

и

$$((\epsilon+z)(1-u) - z(1-u))^{(2)}_{1-u,0} = (\epsilon(1-u))^{(2)}_{1-u,0} = \frac{1}{\epsilon}(1-u).$$

Даље имамо

$$\begin{aligned} &||(x-z)^{(2)}_{1,0}||||x-z|| = \\ &= \max\{||\frac{1}{\epsilon^2}u||, ||\frac{1}{\epsilon}(1-u)||\} \cdot \max\{||\epsilon^2 u||, ||\epsilon(1-u)||\} \\ &= ||\frac{1}{\epsilon^2}u|| \cdot ||\epsilon(1-u)|| \geq \left|\frac{1}{\epsilon^2}\right| \cdot |\epsilon| \geq \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

али такође

$$||(\epsilon^2 u)^{(2)}_{u,0}|| \cdot ||\epsilon^2 u|| = ||\frac{1}{\epsilon^2}u|| \cdot ||\epsilon^2 u|| = ||u||^2 < \frac{1}{\epsilon}\ ,$$

и

$$||(\epsilon(1-u))^{(2)}_{1-u,0}|| \cdot ||\epsilon(1-u)|| = ||\frac{1}{\epsilon}(1-u)|| \cdot ||\epsilon(1-u)|| = ||1-u||^2 < \frac{1}{\epsilon}.$$

Одакле,

$z \in \sigma_{(1,0)-\epsilon}(x)$, али $z \notin (\sigma_{(u,0)-\epsilon}((\epsilon^2+z)u) \cup \sigma_{(1-u,0)-\epsilon}((\epsilon+z)(1-u)))$.

$\square$

Ако је $x \in \mathcal{A}$ инвертибилан, $p = 1$ и $q = 0$, тада је $x^{-1} = x^{(2)}_{p,q}$.

Као последице Теорема 5.1 и 5.2, формулишимо следеће резултате за псеудо-спектар и условни спектар.

Теорема 5.3. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$ и $\epsilon > 0$. Тада важи

$$\Lambda_\epsilon(x) = \Lambda_\epsilon(a) \cup \Lambda_\epsilon(b).$$

Теорема 5.4. Нека је $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}_u \in \mathcal{A}$ у односу на идемпотент $u \in \mathcal{A}$ и $0 < \epsilon < 1$. Тада важи

$$\sigma_\epsilon(a) \cup \sigma_\epsilon(b) \subset \sigma_\epsilon(x).$$

Литература

[1] J.K. Baksalary, G.P.H. Styan, *Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form*, Linear Algebra Appl. 354 (2002) 41-47.

[2] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, 2nd ed., Springer, New York, 2003.

[3] J. Benítez, N. Thome, *The generalized Schur complement in group inverses and* $(k+1)$*-potent matrices*, Linear and Multilinear Algebra 54 (2006) 405-413.

[4] S. L. Campbell, *The Drazin inverse of an infinite matrix*, SIAM J. Appl. Math. 31 (1976) 492-503.

[5] S. L. Campbell, *The Drazin inverse of an operator*, in Recent Applications of Generalized Inverses, Ed. by S.L. Campbell, Pitman Publishing Company, 1982.

[6] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, 1979.

[7] C. G. Cao, *Representations of the group inverse of some* 2×2 *block matrices*, International Mathematical Forum 1 (2006) 1511-1517.

[8] X. Cao, *Browder essential approximate point spectra and hypercyclicity for operator matrices*, Linear Algebra Appl. 426 (2-3) (2007), 317-324.

[9] S. R. Caradus, *Generalized Inverses and Operator Theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 50, Queen's University, Kingston, 1978.

[10] N. Castro-Gonzalez, E. Dopazo, J. Robles,*Formulas for the Drazin inverse of special block matrices*, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 252-270.

[11] N. Castro-González, J.J. Koliha, *New additive results for the g-Drazin inverse*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 134 (2004) 1085-1097.

[12] N. Castro-González, M.F. Martínez-Serrano, *Drazin inverse of partitioned matrices in terms of Banachiewicz-Schur forms*, Linear Algebra and its Applications 432 (2010) 1691-1702.

[13] D.S. Cvetković-Ilić, *A note on the representation for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrices*, Linear Algebra Appl. 429 (1) (2008) 242-248.

[14] D. S. Cvetkovic-Ilić, Y. Wei, *Representations for the Drazin inverse of bounded operators on Banach space*, Electron. J. Linear Algebra 18 (2009) 613-627.

[15] C. Deng, *A note on the Drazin inverses with Banachiewicz-Schur forms*, Appl. Math. Comput. 213 (2009) 230-234.

[16] C. Y. Deng, *Generalized Drazin inverses of anti-triangular block matrices* J. Math. Anal. Appl. 368 (2010) 1-8.

[17] C. Deng, *A comment on some recent results concerning the Drazin inverse of an anti-triangular block matrix*, Filomat 26:2 (2012) 135-145.

[18] C. Deng, D. S. Cvetkovic-Ilić, Y. Wei, *Some results on the generalized Drazin inverse of operator matrices*, Linear and Multilinear Algebra 58 (2010) 503-521.

[19] C. Deng, Y.Wei, *A note on the Drazin inverse of an anti-triangular matrix*, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1910-1922.

[20] C. Deng, Y. Wei, *Representations for the Drazin inverse of* 2×2 *block-operator matrix with singular Schur complement* Linear Algebra and its Applications 435 (2011) 2766-2783.

[21] D. S. Djordjević, *Perturbations of spectra of operator matrices*, J. Operator Theory 48 (2002), 467-486.

[22] D. S. Djordjević and M. Z. Kolundžija, *Generalized invertibility of operator matrices*, Arkiv for matematik 50 (2) (2012), 259-267.

[23] D.S. Djordjević and M.Z. Kolundžija, *Right and left Fredholm operator matrices*, B. Korean Math. Soc. 50 (3) (2013), 1021-1027

[24] D. S. Djordjevic and V. Rakocevic, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, 2008.

[25] D.S. Djordjević and P. S.Stanimirović, *Splittings of operators and generalized inverses*, Publ. Math Debrecen 59 (1-2) (2001), 147-159.

[26] D.S. Djordjević, P.S. Stanimirović, *On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent*, Czechoslovak Math. J. 51 (2001) 617-634.

[27] D.S. Djordjević, Y. Wei, *Additive results for the generalized Drazin inverse*, J. Austral. Math. Soc. 73 (2002) 115-125.

[28] D. S. Djordjević and Y. Wei, *Outer generalized inverses in rings*, Comm. Algebra 33 (2005), 3051-3060.

[29] H. Du and J. Pan, *Perturbation of spectrums of* 2×2 *operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 121, 3 (1994), 761-766.

[30] B. P. Duggal, *Upper triangular operator matrices, SVEP and Browder, Weyl theorems*, Integral Equations Oper. Theory 63, 1 (2009), 17-28.

[31] E.I. Fredholm, *Sur une classe d'equations fonctionnelles*, Acta Mathematica, 27 (1903), 365-390.

[32] G. Hai and A. Chen, *Perturbations of right and left spectra for operator matrices*, J. Operator Theory, 67, 1 (2012), 207-214.

[33] G. Hai, and A. Chen, *Invertibility of Operator Matrices on a Banach Space*, Complex Analysis and Operator Theory (2012), 1-12.

[34] Y. M. Han and S. V. Djordjević, *a-Weyl's theorem for operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2001), 715-722.

[35] J. K. Han, H. Y. Lee and W. Y. Lee, *Invertible completions of* 2×2 *upper triangular operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 128, 1 (2000), 119-123.

[36] R.E. Harte, *Fredholm theory relative to a Banach algebra homomorphism*, Mathematische Zeitschrift 179 (3) (1982), 431-436.

[37] R.E. Harte, *Spectral projections*, Irish Math. Soc. Newsletter 11 (1984) 10-15.

[38] R. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[39] R.E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, Panamer. Math. J. 1 (1991) 10-16.

[40] R.E. Hartwig, X. Li, Y. Wei, *Representations for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2006) 757-771.

[41] J.J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. 38 (1996) 367-381.

[42] J.J. Koliha, *Isolated spectral points*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 3417-3424.

[43] M. Kolundžija, *Right invertibility of operator matrices*, Funct. Anal. Approx. Comput. 2 (1) (2010), 1-5.

[44] M. Z. Kolundžija, (p,q)*-outer generalized inverse of block matrices in Banach algebras*, Banach J. Math. Anal. 8 (1) (2014) (to appear)

[45] M.Z. Kolundžija, D. Mosić, D. S. Djordjević, *Further results on the generalized Drazin inverse of block matrices in Banach algebras*, Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. (to appear)

[46] M.Z. Kolundžija, D. Mosić, D. S. Djordjević, *Generalized Drazin inverse of certain block matrices in Banach algebras*, (submitted)

[47] S. H. Kulkarni and D. Sukumar, *The condition spectrum*, Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), no. 3-4, 625-641.

[48] W. Y. Lee, *Weyl spectra of operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 129, 1 (2001,), 131-138.

[49] W. Y. Lee, *Weyl's theorem for operator matrices*, Integral Equations Operator Theory 32 (1998), 319-331.

[50] X. Li, Y. Wei, *A note on the representations for the Drazin inverse of 2×2 block matrix*, Linear Algebra Appl. 423 (2007) 332-338.

[51] Y. Liao, J. Chen, J. Cui, *Cline's formula for the generalized Drazin inverse*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), (accepted).

[52] M.F. Martínez-Serrano, N. Castro-González, *On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement*, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 2733-2740.

[53] J. Miao, *Results of the Drazin inverse of block matrices*, J. Shanghai Normal Univ. 18 (1989) 25-31.

[54] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bulletin of the American Mathematical Society 26 (9) (1920), 394-395.

[55] D. Mosić, D. S. Djordjević, *EP elements in Banach algebras*, Banach J. Math. Anal. 5 (2) (2011) 25-32.

[56] V. Müler, *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2007.

[57] B. Načevska and D. S. Djordjević, *Inner generalized inverses with prescribed idempotents*, Comm. Algebra 39 (2011), 1-14.

[58] B. Načevska and D. S. Djordjević, *Outer generalized inverses in rings and related idempotents*, Publ. Math. Debrecen 73 (3-4) (2008).

[59] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, 1994.

[60] V. Rakočević, *Semi-Fredholm operators with finite ascent or descent and perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 12, 3823-3825.

[61] V. Rakočević, *Semi-Browder operators and perturbations*, Studia Math. 122 (1997), no. 2, 131-137.

[62] T.J. Ransford, *Generalised spectra and analytic multivalued functions*, J. London Math. Soc. (2) 29 (1984), no. 2, 306-322.

[63] C.E. Rickart, General Theory of Banach algebras, Van Nostrand, 1960.

[64] D. Sukumar, *Comparative results on eigenvalues, pseudospectra and conditionspectra*, arXiv preprint arXiv:1109.2731 (2011).

[65] K. Takahashi, *Invertible completions of operator matrices*, Integral Equations and Operator Theory 21 (3) (1995), 355-361.

[66] Y. Tian and Y. Takane, *Schur Complements and Banachiewicz-Schur Forms*, Electronic. J. Linear Algebra 13 (2005), 405-418.

[67] Y. Tian, Y. Takane, *More on generalized inverses of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms*, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1641-1655.

[68] L. N. Trefethen and M. Embree, *Spectra and pseudospectra*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[69] C. Tretter, *Spectral theory of block operator matrices and applications*, Imperial College Press, London, 2008.

[70] Y. Wei, *Expressions for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrix*, Linear and Multilinear Algebra 45 (1998) 131-146.

[71] F. Zhang (Ed.), *The Schur Complement and its Applications*, Springer, 2005.

[72] S. Zhang, Z. Wu, H. Zhong, *Continuous spectrum, point spectrum and residual spectrum of operator matrices*, Linear Algebra Appl. 433 (3) (2010), 653-661.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Милица З. Колунџија
Ментор, **МН**:	Драган С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	Фредхолмова својства и уопштени инверзи матрица оператора
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2013.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 поглавља / iii+ 107 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.983 : 512.643
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији изложени су оригинални резултати у вези са матрицама оператора. Испитивана су Фредхолмова својства, инвертибилност и уопштена инвертибилност ових оператора. У оквиру испитивања инвертибилности посматрана је посебно лева, односно десна, инвертибилност. Испитивани су уопштени инверзи матрица оператора и блок матрица у Банаховој алгебри, посебно спољашњи и Дразинов инверз. Фредхолмова својства су изучавана кроз налажење еквивалентних услова да матрице оператора буду леви, односно десни, Фредхолмови оператори.
Датум прихватања теме, **ДП**:	30.01.2012.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Milica Z. Kolundžija
Mentor, **MN**:	Dragan S. Djordjević
Title, **TI**:	Fredholm properties and generalized inverses of operator matrices
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2013
Publisher, **PB**:	author’s reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5 chapters / iii + 107 p.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	mathematical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	functional analysis
UC	517.983 : 512.643
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this dissertation, there are original results related to the operator matrices. Fredholm properties, invertibility and generalized invertibility of operator matrices are investigated. In this study of the invertibility it considers left and right invertibility. It investigated the generalized inverses of operator matrices and block matrices in Banach algebra. Especially, outer and Drazin inverses of block matrices. Fredholm properties were studied by finding equivalent conditions to the operator matrices to be left or right Fredholm operators.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	30.01.2012.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	