UNIVERZITET U NIŠU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Milica D. Cvetković

ANALIZA OBLIKA POVRŠI I UOPŠTENJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2013.

U N I V E R Z I T E T U N I Š U
P r i r o d n o - m a t e m a t i č k i f a k u l t e t
Departman za matematiku

Milica D. Cvetković

ANALIZA OBLIKA POVRŠI I UOPŠTENJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor
Prof. dr Ljubica S. Velimirović

Niš, 2013.

U ovom radu data je analiza oblika površi u $\mathcal{R}^3$ preko operatora oblika, odnosno, preko krivina, ali i funkcija krivina, kao što je Vilmorova energija. Takođe su posmatrane promene geometrijskih karakteristika površi usled infinitezimalnih deformacija, i posebno, varijacije krivina i funkcija krivina usled beskonačno malog savijanja površi. Razmatrane su specijalne vrste pravolinijskih površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta i ukazano na njihovu široku primenu. Potom je izvršena generalizacija razmatranjem Finslerovih i generalisanih Finslerovih prostora.

Tokom izrade same disertacije i doktorskih studija u celini, imala sam podršku koju sam dobijala sa više strana. Pre svega želim da se zahvalim mentorki, Prof. dr Ljubici Velimirović, na neprekidnom interesovanju, divnoj saradnji i prijateljstvu, velikoj posvećenosti i neprocenjivoj pomoći kako na stručnom, tako i na privatnom polju.

Veliku zahvalnost dugujem i Prof. dr Svetislavu Minčiću na nizu korisnih sugestija i saveta koji su uticali na kvalitet same disertacije ali i pratećih naučnih radova.

Sa zadovoljstvom se zahvaljujem profesorima i kolegama na izuzetnoj saradnji i stručnoj pomoći sve vreme doktorskih studija: Prof. dr Predragu Stanimiroviću, Prof. dr Mići Stankoviću, Doc. dr Milanu Zlatanoviću, Doc. dr Svetozaru Rančiću, dr Mariji Najdanović, Nikoli Velimiroviću i Nenadu Vesiću.

Najsrdačnije se zahvaljujem mojoj porodici, posebno suprugu Marjanu i ćerkama Mii i Nini, kojima posvećujem ovaj rad, na ogromnom strpljenju, razumevanju i nesebičnoj podršci u teškim trenucima svih ovih godina.

Sadržaj

Predgovor **3**

1 Oblik površi u $\mathcal{R}^3$ u funkciji krivina **7**
1.1 Površi u $\mathcal{R}^3$ 8
1.2 Krivine površi 10
1.2.1 Operator oblika 11
1.2.2 Normalna krivina 14
1.2.3 Glavne krivine 17
1.2.4 Gausova i srednja krivina 18
1.2.5 Vilmorova energija 21
1.3 Specijalne vrste površi 24
1.3.1 Pravolinijske površi 24
1.3.2 Gaudijeve površi 26
1.3.3 Razvojne površi 27
1.4 Primer krivina i funkcija krivina Gaudijeve površi 31

2 Varijacija krivina i funkcija krivina **37**
2.1 Osnovni pojmovi teorije infinitezimalnih deformacija površi 37
2.1.1 Varijacija nekih veličina usled infinitezimalnih deformacija 39
2.1.2 Vilmorova energija usled infinitezimalnih deformacija 41
2.2 Infinitezimalno savijanje površi 43
2.2.1 Gaudijeve površi pri infinitezimalnom savijanju 48
2.3 Varijacija geometrijskih veličina pri infinitezimalnim savijanjima 51
2.3.1 Varijacija operatora oblika pri infinitezimalnim savijanjima 52
2.3.2 Varijacija normalne krivine pri infinitezimalnim savijanjima 54
2.3.3 Varijacija Gausove i srednje krivine pri infinitezimalnim savijanjima . . . 55
2.3.4 Varijacija glavnih krivina pri infinitezimalnim savijanjima 56
2.3.5 Varijacija Vilmorove energije pri infinitezimalnim savijanjima 57
2.4 Varijacija krivina i funkcija krivina Gaudijeve površi 60

3 Pravolinijske površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta 65
3.1 Geometrijske karakteristike pravolinijskih površi 65
3.2 Primena pravolinijskih površi 68
3.2.1 Primenjene Gaudijeve površi 70
3.3 Razvojne površi i njihove primene 73

4 Metrika u generalisanim Finslerovim prostorima $\mathbf{GF_N}$ 77
4.1 Finslerovi prostori $\mathbf{F_N}$ 78
4.1.1 Koneksije u Finslerovim prostorima 80
4.1.2 Osnovne karakteristike Finslerovih prostora 81
4.1.3 Prostori apsolutnog paralelizma sa Finslerovim karakteristikama (**FAP**−prostori) 82
4.2 Generalisani Finslerovi prostori $\mathbf{GF_N}$ 87
4.2.1 Prva i druga vrsta h-kovarijantnog diferenciranja u $\mathbf{GF_N}$ 92
4.2.2 Identiteti Ričijevog tipa za h-diferenciranje u $\mathbf{GF_N}$ 94
4.2.3 Novi Kartanovi tenzori i pseudotenzori u $\mathbf{GF_N}$ 107

Predgovor

Analiza oblika površi predstavlja važan segment u geometriji površi jer ima veliku primenu u mnogim sferama kao što su biometrija, medicina, građevinarstvo, moderna arhitektura, kompjuterska grafika, 3D televizija, moderna umetnost, i mnoge druge.

Oblik, kao jedna od suštinskih karakteristika površi, ima centralnu ulogu u otkrivanju, praćenju, klasifikaciji i prepoznavanju. Na primer, u medicini ima veoma važnu ulogu u analizi slike pri proučavanju bioloških varijacija anatomskih struktura [40]. Veliki je interes neurologa za ovu oblast u analizi mozga, posebno u analizi spiralnog dela cerebralnog korteksa, koji predstavlja ključ ljudske inteligencije [32].

Zatim u biohemiji, u proučavanju biopolimera, opis molekularnog oblika je bitan kod analize interakcija protein-protein i protein-ligand [21]. Takođe, u biofizici, oblik ćelijske membrane usled elastičnog savijanja u službi je ispitivanjima u biologiji [87].

Morfološka analiza oblika kamena i površina stena doprinosi donošenju zaključaka o životnoj istoriji [24].

Analiza oblika površi predstavlja skup alata za upoređivanje, poklapanje, deformacije i modelovanje površi.

Postoji više pristupa analizi oblika površi:

- preko operatora oblika, (odnosno, preko krivina površi),
- preko Vilmorove energije, (odnosno, upoređivanjem sa sferom),
- preko infinitezimalnih deformacija površi,
- preko metrike, (na primer, preko Soboleve metrike [35]),
- preko geometrijskog modelovanja površi,
- upoređivanjem sa drugim površima (kongruentne površi),

i drugi.

U ovom radu se analizi oblika površi u $\mathcal{R}^3$ pristupilo preko operatora oblika, odnosno, preko krivina, ali i funkcija krivina, kao što je Vilmorova energija. Takođe su posmatrane površi usled infinitezimalnih deformacija, a posebno varijacije krivina i funkcija krivina usled beskonačno malog savijanja površi. Razmatrane su specijalne vrste pravolinijskih površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta i ukazano na njihovu široku primenu. Potom je izvršena generalizacija razmatranjem Finslerovih i generalisanih Finslerovih prostora.

Motivacija za proučavanje nekih specijalnih vrsta pravolinijskih površi potiče od njihovih velikih primena u inženjerstvu, proizvodnji, arhitekturi, pa čak i u modernoj umetnosti. Njihove karakteristike čine ih idealnim kako za modelovanje površi, tako i za kompjutersku grafiku i animaciju. Jednostavnost proizvodnje i veoma bogat spektar oblika, glavni su razlog za primenu ovih površi kako u krovnim konstrukcijama, tako i u građevinarstvu uopšte i sve više u modernoj arhitekturi. U modernom projektovanju veoma važan element predstavlja postizanje maksimalno umetničkog i specijalnog efekta uz minimalno ulaganje. Uticaj geometrijskih formi na snagu i funkcionalnost konstrukcije, kao i ekonomski aspekt, opravdava zahtev za analizu oblika i specijalnih vrsta pravolinijskih površi.

Uporedivo mali podskup pravolinijskih površi čine razvojne površi. Obzirom da su razvojne površi pravolinijske sa Gausovom krivinom jednakom nuli, to se one mogu razviti u ravan bez deformisanja, to jest, dužina proizvoljne krive na površi ostaje ista. Upravo je to razlog njihove široke primene u mnogim sferama inženjerstva i proizvodnje. Razvojnim površima u savremenoj arhitekturi bavili su se G. Glezer i F. Gruber [33].

Konoidne površi, kao podvrsta pravolinijskih površi, veoma su česte u građevinskoj tehnici, pogotovo kao smele krovne konstrukcije. Konoidni krov predstavlja površ sa dvostrukom krivinom. Zbog svog vizuelnog efekta, kao i lakoće izrade i mogućnosti korišćenja netradicionalnih materijala, konoidni krov je veoma popularan u modernom dizajnu. Konoidne površi u krovnim konstrukcijama, kao i njihovo modelovanje analizirano je u radovima [76], [78], [79].

Najčešći konoidni oblici koji se koriste su hiperbolički paraboloid, helikoid i Plikerov konoid. Geometrijske karakteristike hiperboličkog paraboloida kao elementa u građevinarstvu i njegove infinitezimalne deformacije analizirani su u radovima [72], [75].

Infinitezimalnim deformacijama, ispitivanjem krutosti, kao i varijacijama geometrijskih veličina usled beskonačno malog savijanja površi, detaljno su se bavile Lj. Velimirović kroz svoju disertaciju [71] i u velikom broju radova [73], [77], [81], [90], kao i M. (Ćirić) Najdanović u disertaciji [17] i u radovima [87], [88], [89].

U vezi sa infinitezimalnim deformacijama proučavana je i Vilmorova energija i njene promene kao specijalan slučaj energije elastičnog savijanja. U radu [87] Lj. Velimirović, M. (Ćirić) Najdanović i M. Cvetković opisuju promenu Vilmorove energije usled beskonačno malog savijanja membrane. Kako je debljina membrane puno manja od njenog poprečnog preseka, to je ona posmatrana kao glatka površ u $\mathcal{R}^3$. U radu je opisana i varijacija Vilmorove energije u tački usled beskonačno malog savijanja površi, kao i uslovi stacionarnosti Vilmorove energije. Neki od primera su i vizuelno prikazani.

U slučaju beskonačno malog savijanja površi date u eksplicitnom obliku, posmatrane su: varijacija operatora oblika, Lj. Velimirović, M. Cvetković, M. (Ćirić) Najdanović i N.Velimirović u radu [93], varijacija normalne krivine, Lj. Velimirović, M. Cvetković, rad [94], varijacija glavnih krivina, M. Cvetković [15], varijacija Vilmorove energije u tački površi, Lj. Velimirović, M. (Ćirić) Najdanović i M. Cvetković, u radu [87].

Kao prirodnu i fundamentalnu generalizaciju Rimanovog prostora, možemo posmatrati i Finslerov prostor. Bitna razlika je u tome sto je u Rimanovom prostoru metrički tenzor funkcija

samo od koordinata tačke u kojem se vrši posmatranje, dok u Finslerovom prostoru metrički tenzor zavisi i od tačke i od pravca. Finslerova geometrija se zasniva na tome da je rastojanje ds između dve susedne tačke sa koordinatame x^i i $x^i + dx^i$ odredjeno funkcijom $F(x^i, dx^i)$.

Prvi je ovakvu metriku izučavao P. Finsler u svojoj doktorskoj disertaciji. Kasnije su mnogi matematičari razvijali ovu oblast, kao što su: K. Jano [8], Šamioke [66], S. Minčić [50], [50], [52], S. Manov [43], C. K. Mišra [53], i mnogi drugi. Komponente metričkog tenzora su bile definisane na sledeći način:

$$g_{ij}(x, dx) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, dx)}{dx^i dx^j}.$$

U Finslerovim prostorima postoje različiti tipovi koneksija, kao što su koneksija Bervalda, Kartanova koneksija, Čern-Rundova koneksija, Hašigučijeva koneksija.

Na Finslerovim prostorima može se posmatrati i geometrija zasnovana na apsolutnom paralelizmu, opisana u radu [97], sa nesimetričnim koneksijama. Ova geometrija ima široke primene u mnogim fizičkim pojavama i interakcijama koje zahtevaju prostore sa više od 4 dimenzije.

Pored Finslerovih, može se posmatrati i generalisani Finslerov prostor. Generalisanim Finslerovim prostorom, kao diferencijabilnom mnogostrukosti sa nesimetričnim bazičnim tenzorom, bavili su se S. M. Minčić, M. S. Stanković i M. Lj. Zlatanović u radovima: [50], [51], [99]. U odnosu na dve vrste $h-$kovarijantnog diferenciranja u Rundovom smislu [65], M. Zlatanović i M. Cvetković u radu [16] dobili su 10 identiteta Ričijevog tipa u kojima se pojavljuju novi tenzori i nove veličine nazvane "pseudotenzori".

Glavni zadatak ove disertacije je produbljivanje znanja o analizi oblika površi preko krivina i funkcija krivina, geometrijskim karakteristikama nekih specijalnih vrsta pravolinijskih površi, njihovim infinitezimalnim deformacijama, varijacijama nekih geometrijskih veličina i njihovo izračunavanje za pojedine vrste površi, Vilmorovoj energiji i vizualizaciji uz pomoć paketa *Mathematica*, kao i njihovoj širokoj primeni. Zatim, upoznavanje i postavka čitavog aparata tenzorskog računa u Finslerovim i generalisanim Finslerovim prostorima, i ukazivanje na njihovu široku primenu. Disertacija se sastoji iz sledećih delova:

1. **Oblik površi u $\mathcal{R}^3$ u funkciji krivina;**

2. **Varijacija krivina i funkcija krivina;**

3. **Pravolinijske površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta;**

4. **Metrika u generalisanim Finslerovim prostorima $\mathbf{GF_N}$.**

Svaka od ove četiri glave je podeljena na nekoliko poglavlja i na kraju je dat spisak literatura po abecedinom redosledu.

1. Prva glava predstavlja uvod i uvodna razmatranja o obliku površi kroz krivine i funkcije krivina i geometrijske karakteristike nekih specijalnih vrsta pravolinijskih površi. Pored osnovnih karakteristika o površima u $\mathcal{R}^3$ i krivinama površi: operatora oblika, normalne krivine, glavnih krivina, Gausove i srednje krivine i Vilmorove energije, kroz primere i vizualizaciju, opisane su i vizuelno prikazane neke specijalne vrste pravolinijskih površi: konoidne, Gaudijeve i razvojne površi. O operatoru oblika površi objavljen je rad [92]. Iz teorije pravolinijskih površi publikovani su radovi [82] i [83], o konoidni površima je objavljen rad [100], Gaudijeve površi su razrađene u radovima [84] i [91] i razvojne površi u radu [80]. Na kraju ove glave, u Poglavlju 1.4, dat je detaljan prikaz Gaudijevih površi, kroz krivine i funkcije krivina, gde se, pored njihovog izračunavanja, neke mogu i vizuelno prikazati koristeći programski paket *Mathematica*.

2. U drugoj glavi su opisani osnovni pojmovi teorije infinitezimalnih deformacija površi, data je varijacija nekih veličina usled infinitezimalnih deformacija i u tom slučaju posmatrana Vilmorova energija. U drugom poglavlju druge glave je razmatrano infinitezimalno savijanje specijalnih vrsta pravolinijskih površi, Gaudijevih površi, što je publikovano u radu [91], a u trećem poglavlju varijacija nekih geometrijskih veličina pri infinitezimalnim savijanjima površi, kao što su varijacija operatora oblika, što je razmatrano u radu [93], normalne krivine, o čemu se govori u radu [94] koji je poslat na recenziju, Gausove i srednje krivine, glavnih krivina, što je objavljeno u radu [15], Vilmorove energije u tački površi i Vilmorove energije površi, u publikovanom radu [87]. U poslednjem poglavlju, Poglavlju 2.4, kroz primer Gaudijeve površi izračunate su varijacije svih krivina u funkcija krivina usled infinitezimalnog savijanja ove površi (rad [95], poslat na recenziju).

3. Treća glava opisuje pravolinijske površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta. Pored geometrijskih karakteristika i primera pravolinijskih površi, date su i neke primene nekih specijalnih vrsta pravolinijskih površi: konoidnih površi u građevini i modernoj arhitekturi, što je objavljeno u radu [100], Gaudijevih površi u krovnim konstrukcijama, o čemu govori publikovan rad [84] i primene razvojnih površi u građevinarstvu, arhitekturi, brodogradnji, avioindustriji i modernoj umetnosti (rad [80]).

4. Četvrta glava prikazuje uopštenje na Finslerove i generalisane Finslerove prostore. Opisane su osnove Finslerove geometrije, definisani različiti tipovi koneksija, koje imaju važnu ulogu u primenama Finslerove geometrije i date osnovne karakteristike i primene Finslerovih prostora. Takođe, posmatrani su prostori apsolutnog paralelizma sa Finslerovim karakteristikama, definisane nesimetrične koneksije i $v-$ i $h-$kovarijantno diferenciranje. U generalisanom Finslerovom prostoru definisana je prva i druga vrsta h-kovarijantnog diferenciranja, izraženo 10 identiteta Ričijevog tipa i novi Kartanovi tenzori i pseudotenzori, o čemu govori rad [16].

U istraživanjima je korišćen paket *Mathematica*, kao i metode i tehnike tenzorskog računa.

Glava 1

Oblik površi u $\mathcal{R}^3$ u funkciji krivina

Mnogi postupci u nauci, inženjerstvu i medicini svode se na analizu geometrijskih oblika. Matematički, oblik može da se modeluje kao neparametrizovani podprostor. Ako prostoru oblika pridružimo Rimanovu metriku (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866, nemački matematičar), otvara se svet Rimanove diferencijalne geometrije sa geodezijskim linijama, gradijentom i krivinama.

Prostori oblika su analizirani još u Rimanovom okruženju a odlike tog pristupa su sledeće:

- Analiza oblika formalizuje intuitivnu predstavu o sličnosti oblika: Oblici koji se razlikuju samo po malim deformacijama su slični među sobom. Da bi uporedili oblike, neophodno je izmeriti deformacije. To je upravo ono što se postiže Rimanovom metrikom. Rimanova metrika meri neprekidne deformacije oblika.

- Rimanova metrika u prostoru oblika se jako dugo uspešno koristi u kompjuterskoj grafici.

- Dok su oblici predstavljeni kao početne brzine geodezijskih linija koje ih povezuju sa određenim referentnim oblikom, geodezijske linije efikasno funkcionišu u tangentnom prostoru referentnog oblika. Krivine imaju osnovnu ulogu u merenju deformacija krivih oblika.

- Nedostatak Rimanovog pristupa bio je u tome što se oblici mogu porediti samo ako postoji neka deformacija među njima.

U ovoj glavi biće definisani osnovni pojmovi koji predstavljaju bazu istraživanja analize oblika površi, kao što su operator oblika, normalna, Gausova i srednja krivina, funkcije zasnovane na krivinama površi, Vilmorova energija, i biće prikazana opšta tvrđenja teorije oblika površi, sledeći ispitivanja A. Greja [30] (Alfred Gray, 1939-1998, američki matematičar), Lj. S. Velimirović [71], [72], [75], [76], [78], [79], [82], [83], [85] (Ljubica S. Velimirović, srpski matematičar) i Dž. Opria [58] (John Oprea, američki matematičar).

1.1 Površi u $\mathcal{R}^3$

Pre svega treba uvesti strogo matematički pojam površi u $\mathcal{R}^3$. Dok je kriva u $\mathcal{R}^3$ funkcija jedne promenljive, logični sled je posmatrati funkcije dve promenljive. Upravo takve objekte nazivamo površima.

Definicija 1.1.1. *Neka je D otvoreni podskup od $\mathcal{R}^2$. Površ u $\mathcal{R}^3$ predstavlja diferencijabilno preslikavanje:*

$$\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3, \tag{1.1.1}$$

sa vektorima kao vrednostima.

Obično se koriste parametri u i v kao uređeni par $(u, v) \in D$, pa se može posmatrati i notacija:

$$(u, v) \to (\mathbf{r}_1(u, v), \mathbf{r}_2(u, v), \mathbf{r}_3(u, v)), \tag{1.1.2}$$

gde su komponente funkcije $\mathbf{r}_i : D \to \mathcal{R}$ koordinate vektora $\mathbf{r}(u, v)$.

Postoje različiti oblici zadavanja površi u $\mathcal{R}^3$:

- **vektorski parametarski oblik:**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2 \ ;$$

- **skalarni parametarski oblik:**

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2 \ ;$$

- **eksplicitni skalarni oblik (neparametarski):**

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathcal{R}^2 \ ,$$

  gde je f funkcija klase C^α, $\alpha \geq 1$.

U ovom radu biće uglavnom korišćen vektorski parametarski oblik zadavanja površi, ukoliko drugačije ne bude naglašeno.

Parametri u i v odvojeno generišu parametarske krive u $\mathcal{R}^3$.

Definicija 1.1.2. *Neka je $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ površ i $(u_0, v_0) \in D$. Tada krive*

$$u \to \mathbf{r}(u, v_0) \ , \ v \to \mathbf{r}(u_0, v) \tag{1.1.3}$$

*nazivamo **u-parametarske**, odnosno, **v-parametarske** krive od $\mathbf{r}$.*

Može se zaključiti da se u $\mathcal{R}^3$ u- i v-parametarske krive seku u tački $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. To što se ove krive seku u $\mathcal{R}^3$ od velikog je značaja za analizu vektorske funkcije $\mathbf{r}$.

Primenom parcijalnih izvoda na koordinatne funkcije $\mathbf{r}_i$ dobijamo tangentne vektore parametarskih krivih u datoj tački:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u = \Big(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial u}\Big), \tag{1.1.4}$$

i

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v = (\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial v}). \tag{1.1.5}$$

Za diferencijabilno preslikavanje može se definisati matrica vrednosti funkcije $J(\mathbf{r})$ poznata kao Jakobijeva matrica (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, nemački matematičar) na sledeći način:

Definicija 1.1.3. ***Jakobijeva matrica*** *površi* $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ *je matrica parcijalnih izvoda* $J(\mathbf{r})$ *funkcije* $\mathbf{r}$*:*

$$J(\mathbf{r})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u(u,v) \\ \mathbf{r}_v(u,v) \end{pmatrix}. \tag{1.1.6}$$

Definicija 1.1.4. ***Rang matrice*** *A jednak je broju m, ako je m najveći ceo broj takav da je $m \times m$ podmatrica matrice A čija je determinanta različita od nule.*

Definicija 1.1.5. ***Regularna površ*** *je površ* $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ *čija je Jakobijeva matrica ranga 2 za svako* $(u,v) \in D$.

Definicija 1.1.6. *Neka je* $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ *površ. Definišimo funkcije* $E, F, G : D \to \mathcal{R}$ *na sledeći način:*

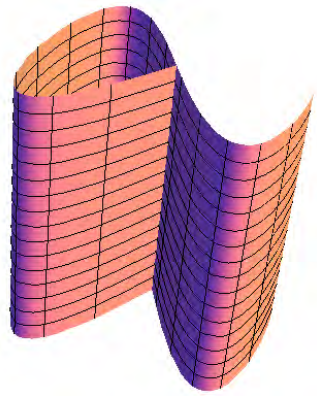
$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \|\mathbf{r}_u\|^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \|\mathbf{r}_v\|^2. \tag{1.1.7}$$

Tada je izraz:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv I \tag{1.1.8}$$

Rimanova metrika *ili* ***prva kvadratna forma*** *od* $\mathbf{r}$*. Funkcije* E, F *i* G *nazivamo* ***koeficijentima prve kvadratne forme*** *od* $\mathbf{r}$*.*

Analogno se može definisati i druga kvadratna forma.



Slika 1.1: Regularna površ u $\mathcal{R}^3$

Definicija 1.1.7. *Neka je* $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ *regularna površ. Tada koeficijente:*

$$\begin{aligned} L &= -D_u \cdot \mathbf{r}_u = D \cdot \mathbf{r}_{uu} \ , \\ M &= -D_v \cdot \mathbf{r}_u = D \cdot \mathbf{r}_{uv} = D \cdot \mathbf{r}_{vu} = -D_u \cdot \mathbf{r}_v \ , \\ N &= -D_v \cdot \mathbf{r}_v = D \cdot \mathbf{r}_{vv} \ , \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

nazivamo ***koeficijentima druge kvadratne forme*** *a izraz:*

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{1.1.10}$$

predstavlja ***drugu kvadratnu formu****.*

1.2 Krivine površi

U ovom poglavlju biće opisan odnos između geometrije površi $S \subset \mathcal{R}^3$ i geometrije samog prostora $\mathcal{R}^3$. Osnovni alat za to je operator oblika. Operator oblika je opisan u radovima [92] i [15]. Biće razmatrana i normalna krivina, kao varijanta operatora oblika, i glavne krivine kao ekstremne vrednosti normalne krivine. Najvažnije krivine površi u $\mathcal{R}^3$ su Gausova i srednja krivina i pored njihovih definicija i osobina biće opisane i tehnike za njihovo izračunavanje.

Na kraju, kao kvantitativna mera odstupanja date površi od sfere, biće opisana i Vilmorova energija, kao funkcija krivina, koja predstavlja deformaciju prilikom transformacije jednog objekta u drugi.

1.2.1 Operator oblika

Dva osnovna načina da se analizira oblik površi S jesu da se posmatra promena normale koja se kreće po površi, ili da se površ S uporedjuje sa sferom.

Dobar način da se izmeri savijanje regularne površi S u $\mathcal{R}^3$ jeste da se proceni kako se površ U normalna na S menja od tačke do tačke. Linearno preslikavanje kojim se izračunava savijanje površi S naziva se operator oblika.

Definicija 1.2.1. *Neka su V i W vektorski prostori. Preslikavanje prostora V na prostor W naziva se* ***operator****.*

Definicija 1.2.2. *Neka je W vektorski prostor nad poljem K. Na skupu svih operatora prostora V na prostor W definisaćemo strukturu vektorskog prostora na sledeći način:*

$$(A + B)x = Ax + Bx, \qquad (\alpha A)x = \alpha Ax, \tag{1.2.11}$$

za svako $A, B : V \to W$, za svako $x \in V$ i svako $\alpha \in K$.

Definicija 1.2.3. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K. Operator $A : V \to W$ naziva se* ***linearni operator*** *ako je*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha, \beta \in K$.

Operator oblika je linearni operator koji, primenjen na tangentni vektor ν_p predstavlja negativni izvod normalne površi U u pravcu vektora ν_p.

Definicija 1.2.4. *Neka je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ i neka je U površ normalna na S definisana u okolini tačke $p \in S$. Za tangentni vektor ν_p površi S u tački p neka je:*

$$\underline{\mathcal{S}}(\nu_p) = -D_\nu U. \tag{1.2.12}$$

Tada se $\underline{\mathcal{S}}$ naziva ***operator oblika****.*

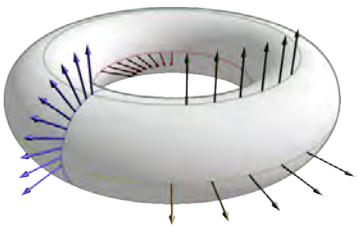
Vizuelni prikaz operatora oblika dat je na Slici 1.2.

Operator oblika ravni je identički jednak nuli u svakoj tački ravni. U ostalim slučajevima, normalna površ U će se pomerati i okretati od tačke do tačke a operator oblika biće različit od nule.

U bilo kojoj tački orijentisane regularne površi postoje dva izbora normalne površi: U i $-U$. Operator oblika u izboru $-U$ je negativan u odnosu na operator oblika koji odgovara U.

Ako površ S nije orijentisana, normalna površ U ne može biti definisana neprekidno po S. Ovo ne predstavlja problem, obzirom da se sva izračunavanja vezana za površ U vrše lokalno.

Operator oblika je simetričan, tj. u [30] je pokazano da važi sledeća lema:



Slika 1.2: [38] Operator oblika torusa

Lema 1.2.1. *Operator oblika regularne površi S je simetričan, tj. važi da je:*

$$\underline{\mathcal{S}}(\nu_p) \cdot \omega_p = \nu_p \cdot \underline{\mathcal{S}}(\omega_p), \tag{1.2.13}$$

za sve tangentne vektore ν_p , ω_p površi S. ■

Sledeća teorema prikazuje način izračunavanja operatora oblika preko koeficijenata E, F, G prve i L, M, N druge kvadratne forme koristeći Veingartenove jednačine (Julius Weingarten, 1836–1910, nemački matematičar). Ideja dokaza nalazi se u [30].

Teorema 1.2.2. *(**Veingartenove jednačine**) Neka je $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ regularna površ. Tada je operator oblika $\underline{\mathcal{S}}$ površi $\mathbf{r}$ u odnosu na bazu $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ jednak:*

$$\begin{cases} -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) = D_u = \dfrac{MF - LG}{EG - F^2}\mathbf{r}_u + \dfrac{LF - ME}{EG - F^2}\mathbf{r}_v \ , \\ -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) = D_v = \dfrac{NF - MG}{EG - F^2}\mathbf{r}_u + \dfrac{MF - NE}{EG - F^2}\mathbf{r}_v \ . \end{cases} \tag{1.2.14}$$

Dokaz. Kako je $\mathbf{r}$ regularna površ i $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ su linearno nezavisni, možemo napisati da je:

$$\begin{aligned} -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) &= D_u = a_{11}\mathbf{r}_u + a_{12}\mathbf{r}_v \ , \\ -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) &= D_v = a_{21}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v \ , \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

za proizvoljne funkcije a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Da bi dokazali izraz (1.2.14), moramo prethodno izračunati koeficijente a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} iz (1.2.15). Ako svaku od jednačina iz (1.2.15) pomnožimo skalarno sa $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ dobija se:

$$\begin{cases} -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_u = a_{11}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u + a_{12}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u \ , \\ -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v = a_{11}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v + a_{12}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \ , \\ -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u = a_{21}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u \ , \\ -\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_v = a_{21}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v + a_{22}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \ . \end{cases} \tag{1.2.16}$$

Kako je iz (1.1.7)

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = E, \qquad \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = F, \qquad \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = G,$$

i iz (1.1.9)

$$\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_u = L, \qquad \underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v = \underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u = M, \qquad \underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_v = N,$$

gde su E, F, G koeficijenti prve a L, M, N koeficijenti druge kvadratne forme, dolazimo do sledećeg:

$$\begin{cases} -L = a_{11}E + a_{12}F, \\ -M = a_{11}F + a_{12}G, \\ -M = a_{21}E + a_{22}F, \\ -N = a_{21}F + a_{22}G. \end{cases} \tag{1.2.17}$$

Jednačine (1.2.17) mogu biti kraće zapisane u matričnom obliku:

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{1.2.18}$$

odnosno,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.2.19}$$

Kako je

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \tag{1.2.20}$$

to je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & -LF + ME \\ MG - NF & -MF + NE \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Tako se dobija da je

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, & a_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \\ a_{21} = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, & a_{22} = \frac{MF - NE}{EG - F^2}. \end{cases} \tag{1.2.22}$$

Iz poslednje jednakosti dobija se (1.2.14), odnosno, operator oblika u matričnom obliku biće jednak:

$$\underline{\mathcal{S}} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & ME - LF \\ MG - NF & NE - MF \end{pmatrix}. \blacksquare \tag{1.2.23}$$

Ako matrice prve i druge kvadratne forme redom označimo na sledeći način:

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \tag{1.2.24}$$

iz Teoreme 1.2.2 dobijamo direktnu posledicu:

Posledica 1.2.3. *Neka je $EG \neq F^2$, to jest, neka je $\mathcal{F}_1$ nesingularna matrica. Odgovarajuća matrica operatora oblika biće jednaka:*

$$\underline{\mathcal{S}} = \mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2. \blacksquare \tag{1.2.25}$$

Treba naglasiti da iako je operator oblika $\underline{\mathcal{S}}$ simetrični linearni operator, njegova matrica u odnosu na $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ ne mora biti simetrična, jer $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ u opštem slučaju nisu ortogonalni.

U slučaju da izaberemo standardnu bazu, koeficijenti prve i druge kvadratne forme koji se definišu preko vektora $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$, koji su u standardnoj bazi jednaki:

$$(\mathbf{r}_u)_s = (1, 0), \qquad (\mathbf{r}_v)_s = (0, 1),$$

imaće drugačiji oblik:

$$\begin{aligned} (E)_s &= (\mathbf{r}_u)_s \cdot (\mathbf{r}_u)_s = (1,0)\cdot(1,0) = 1 \\ (F)_s &= (\mathbf{r}_u)_s \cdot (\mathbf{r}_v)_s = (1,0)\cdot(0,1) = 0 \\ (G)_s &= (\mathbf{r}_v)_s \cdot (\mathbf{r}_v)_s = (0,1)\cdot(0,1) = 1, \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

pa je matrica prve kvadratne forme

$$(\mathcal{F}_1)_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Normalna krivina

Iako operator oblika, kao vektorska funkcija, meri savijanje površi u različitim pravcima, korisno je imati i realnu funkciju sa istom svrhom. Upravo takva je normalna krivina.

Definišimo, najpre, pojam pravaca na površi.

Definicija 1.2.5. ***Pravac*** *l na regularnoj površi S je jednodimenzionalni podprostor (tj. prava) tangentnog prostora površi S.*

Kako svaki nenula vektor v_p tangentnog prostora S_p određuje jedinstveni jednodimenzionalni podprostor l, često se koristi termin "pravac v_p" umesto l.

Definicija 1.2.6. *Neka je u_p tangentni vektor regularne površi $S \subset \mathcal{R}^3$ tako da je $\|u_p\| = 1$. Tada je* ***normalna krivina*** *od S u pravcu u_p jednaka*

$$k_n(u_p) = \underline{\mathcal{S}}(u_p) \cdot u_p \ . \tag{1.2.27}$$

Ili u opštem slučaju, ako je v_p proizvoljni nenula tangentni vektor od S u tački p, tada je

$$k_n(v_p) = \frac{\underline{\mathcal{S}}(v_p) \cdot v_p}{\|v_p\|^2} \ . \tag{1.2.28}$$

Poslednju definiciju možemo dalje razraditi. Neka je $T_p(S)$ skup svih jediničnih tangentnih vektora na S u tački p. Pokazaćemo najpre da skalarni proizvod dva proizvoljna vektora $a, b \in T_p(S)$ uključuje matricu prve kvadratne forme $\mathcal{F}_1$. Posmatraćemo vektore a i b u bazi $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$:

$$a = a_1\mathbf{r}_u + a_2\mathbf{r}_v, \qquad b = b_1\mathbf{r}_u + b_2\mathbf{r}_v,$$

i izračunati njihov skalarni proizvod.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1b_1(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u) + a_1b_2(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v) + a_2b_1(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u) + a_2b_2(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) = \\ &= a_1b_1E + a_1b_2F + a_2b_1F + a_2b_2G = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a^T\mathcal{F}_1 b \ . \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Koristeći jednačine (1.2.25), (1.2.27) i (1.2.29), za normalnu krivinu važi sledeće:

$$k_n(u_p) = \underline{\mathcal{S}}(u_p) \cdot u_p = \mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2(u_p) \cdot u_p = (\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2(u_p))^T\mathcal{F}_1(u_p). \tag{1.2.30}$$

Kako je $(AB)^T = B^TA^T$ za proizvoljne matrice A i B, i kako su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ simetrične matrice, sledi da je:

$$\begin{aligned} k_n(u_p) = \underline{\mathcal{S}}(u_p) \cdot u_p &= (u_p)^T \cdot \mathcal{F}_2^T(\mathcal{F}_1^{-1})^T\mathcal{F}_1(u_p) = (u_p)^T \cdot \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_1(u_p) = \\ &= (u_p)^T \cdot \mathcal{F}_2(u_p) = \mathcal{F}_2(u_p) \cdot u_p \ . \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

U datoj tački $p \in S$ normalna krivina se posmatra u odnosu na određeni pravac koji polazi iz tačke p. Dakle, u datoj tački p treba izabrati neku vrstu "mernog alata" koji bi obuhvatio

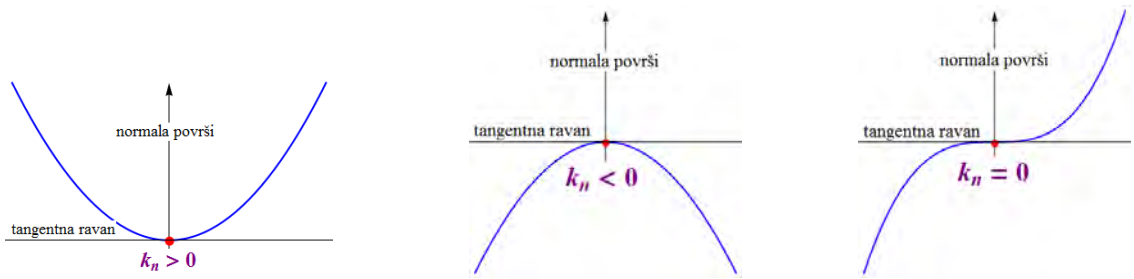
sve pravce u datoj tački p, odnosno, pametno izabrati vektor $(u)_s$ koji će predstaviti sve pravce. Neka je, zato,

$$(u(t))_s = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s , \tag{1.2.32}$$

gde je $t \in [0, 2\pi)$. U ovom slučaju imamo da je $(u(0))_s = (1,0)_s = (\mathbf{r}_u)_s$ i $(u(\pi/2))_s = (0,1)_s = (\mathbf{r}_v)_s$, kao i da je $\|u\| = 1$ za svako t. Sa ovakvim izborom, koristeći (1.2.31) važi:

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s = \\ &= \begin{pmatrix} L\cos t + M\sin t \\ M\cos t + N\sin t \end{pmatrix}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s = \\ &= L\cos^2 t + 2M\sin t\cos t + N\sin^2 t \ . \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Normalna krivina služi da izmeri savijanje regularne površi S u svakoj tački $p \in S$ (Slika 1.3).



Slika 1.3: Normalna krivina pozitivna, negativna i jednaka nuli, redom

Sledeća lema izražava normalnu krivinu preko koeficijenata prve i druge kvadratne forme.

Lema 1.2.4. *Neka je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ i $p \in S$. Neka je $\mathbf{r}$ regularna površ na S tako da je $p = \mathbf{r}(u_0, v_o)$. Neka je $v_p \in S_p$, to jest,*

$$v_p = a\mathbf{r}_u(u_0, v_o) + b\mathbf{r}_v(u_0, v_o). \tag{1.2.34}$$

Tada je normalna krivina od S u pravcu v_p jednaka:

$$k_n(v_p) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \ . \tag{1.2.35}$$

Dokaz. Kako je

$$\|v_p\|^2 = \|a\ \mathbf{r}_u + b\ \mathbf{r}_v\|^2 = a^2E + 2abF + b^2G, \tag{1.2.36}$$

i

$$\underline{\mathcal{S}}(v_p) \cdot v_p = (a\ \underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) + b\ \underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v)) \cdot (a\ \mathbf{r}_u + b\ \mathbf{r}_v) = a^2L + 2abM + b^2N, \tag{1.2.37}$$

koristeći (1.2.27) dobija se:

$$k_n(v_p) = \frac{\underline{\mathcal{S}}(v_p) \cdot v_p}{\|v_p\|^2} = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}\ . \blacksquare \tag{1.2.38}$$

Vezano za normalnu krivinu, važi i sledeća definicija:

Definicija 1.2.7. *Neka je l pravac tangentnog prostora S_p, gde je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ. Ako je normalna krivina od l jednaka nuli, kažemo da je l* ***asimptotski pravac****. Slično, ako je normalna krivina tangentnog vektora v_p od S jednaka nuli, kažemo da je v_p* ***asimptotski vektor****.*

1.2.3 Glavne krivine

Glavne krivine služe da izmere maksimalno i minimalno savijanje regularne površi S u svakoj tački $p \in S$.

Definicija 1.2.8. *Neka je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ i $p \in S$. Maksimalna i minimalna vrednost normalne krivine k_n od S u tački p nazivaju se* ***glavne krivine*** *od S u tački p i označavaju k_1 i k_2. Jedinični vektori $e_1, e_2 \in S_p$ u kojima se ove ekstremne vrednosti dostižu, nazivaju se* ***glavni vektori****. Odgovarajući pravci u tom slučaju nazivaju se* ***glavni pravci****.*

U [30] je pokazano da su glavne krivine sopstvene vrednosti operatora oblika regularne površi S u tački $p \in S$. O tome govori sledeća Lema:

Lema 1.2.5. *Sopstvene vrednosti operatora oblika $\underline{\mathcal{S}}$ regularne površi $S \subset \mathcal{R}^3$ u tački $p \in S$ su upravo glavne krivine k_1 i k_2 površi S u tački p. Odgovarajući jedinični sopstveni vektori su jedinični glavni vektori i obrnuto. Ako je $k_1 = k_2$, tada je $\underline{\mathcal{S}}$ jednako skalarnom proizvodu k_1 i k_2. U ostalim slučajevima su sopstveni vektori e_1 i e_2 od $\underline{\mathcal{S}}$ ortogonalni i $\underline{\mathcal{S}}$ je dato jednačinom:*

$$\underline{\mathcal{S}}e_1 = k_1e_1, \qquad \underline{\mathcal{S}}e_2 = k_2e_2. \blacksquare$$

1.2.4 Gausova i srednja krivina

Gausova i srednja krivina predstavljaju najvažnije krivine teorije površi. Iako su zasnovane na glavnim krivinama površi S, one su geometrijski dostupnije u odnosu na glavne krivine.

Definicija 1.2.9. *Neka je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ.* ***Gausova krivina****, (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, nemački matematičar) K i* ***srednja krivina*** *H površi S su funkcije $K, H : S \to R$ definisane na sledeći način:*

$$K(p) = det(\underline{\mathcal{S}}(p)) \ , \tag{1.2.39}$$

i

$$H(p) = \frac{1}{2} tr(\underline{\mathcal{S}}(p)) \ . \tag{1.2.40}$$

Treba naglasiti da operator oblika $\underline{\mathcal{S}}$ i srednja krivina H zavise od izbora normale U, dok Gausova krivina K je nezavisna od tog izbora.

Definicija 1.2.10. ***Minimalna površ*** *u $\mathcal{R}^3$ je regularna površ za koju je srednja krivina jednaka nuli. Regularna površ je* ***razvojna (ravna)*** *ako i samo ako je njena Gausova krivina jednaka nuli.*

Sledeća teorema daje važne formule Gausove i srednje krivine koje se u literaturi često koriste i kao definicije ovih krivina.

Teorema 1.2.6. *Neka su k_1 i k_2 glavne krivine regularne površi $S \subset \mathcal{R}^3$. Gausova krivina površi S jednaka je:*

$$K = k_1 k_2 \ . \tag{1.2.41}$$

Srednja krivina *površi S jednaka je:*

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \ . \tag{1.2.42}$$

Dokaz. Ako za operator oblika $\underline{\mathcal{S}}$ površi S_p izaberemo ortonormiranu bazu, matrica te baze biće:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \tag{1.2.43}$$

pa je

$$K = det \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = k_1 k_2 \ , \tag{1.2.44}$$

i

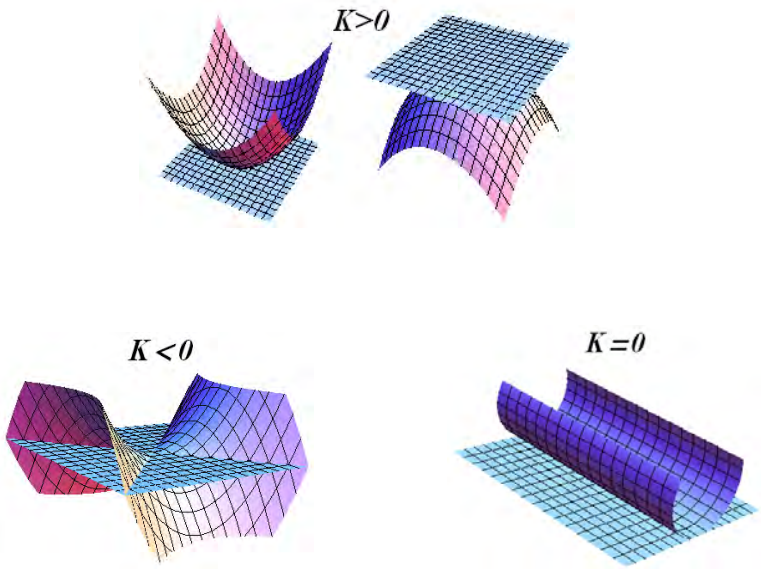
$$H = \frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \blacksquare \tag{1.2.45}$$

Na osnovu Gausove krivine razlikujemo četiri vrste tačaka na površi.

Definicija 1.2.11. *Neka je p tačka regularne površi $S \subset \mathcal{R}^3$. Za tačku p kažemo:*

- *p je **eliptička** ako je $K(p) > 0$ (ekvivalentno da su k_1 i k_2 istog znaka);*
- *p je **hiperbolička** ako je $K(p) < 0$ (ekvivalentno da su k_1 i k_2 suprotnog znaka);*
- *p je **parabolička** ako je $K(p) = 0$ a $\underline{\mathcal{S}}(p) \neq 0$ (ekvivalentno da je tačno jedna od k_1 ili k_2 jednaka nuli);*
- *p je **ravna** ako je $K(p) = 0$ i $\underline{\mathcal{S}}(p) = 0$ (ekvivalentno da je $k_1 = k_2 = 0$).*

Na osnovu ove definicije može se zaključiti da Gausova krivina lokalno odredjuje oblik površi (Slika 1.4).



Slika 1.4: Gausova krivina određuje lokalno oblik površi: konveksni i konkavni paraboloid $K > 0$ (prva), sedlo $K < 0$ (druga) i razvojna površ $K = 0$ (treća)

Naziv "srednja" krivina potiče od njenog samog značaja obzirom da predstavlja aritmetičku sredinu glavnih krivina, odnosno, maksimalne i minimalne vrednosti normalne krivine. Gausova

krivina je naziv dobila u čast nemačkog matematičara Karla Fridriha Gausa koji je dokazao jednu od fundamentalnih teorema diferencijalne geometrije "Theorema Egregium", veličanstvena teorema, u kojoj je pokazao da je Gausova krivina objekat unutrašnje geometrije.

Neka je $S \subset \mathcal{R}^3$ regularna površ. Gausova i srednja krivina su funkcije $K, H : S \to R$ i pišemo $K(p)$ i $H(p)$ za vrednosti ovih funkcija u tački $p \in S$. Takođe, sa $K(u,v), H(u,v)$ označavamo Gausovu i srednju krivinu površi $\mathbf{r}(u,v)$.

Sledeća teorema izražava ove krivine preko koeficijenata prve i druge kvadratne forme.

Teorema 1.2.7. *Neka je $\mathbf{r} : D \to \mathcal{R}^3$ regularna površ. Gausova i srednja krivina površi $\mathbf{r}$ date su formulama:*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\ , \tag{1.2.46}$$

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}\ , \tag{1.2.47}$$

gde su E, F, G koeficijenti prve, a L, M, N koeficijenti druge kvadratne forme u odnosu na $\mathbf{r}$.

Dokaz. Ovog puta izračunaćemo K i H koristeći bazu $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$. Iz Veingartenovih jednačina (Teorema 1.2.2) imamo da je:

$$\begin{aligned} K &= det \begin{pmatrix} -\frac{MF-LG}{EG-F^2} & -\frac{LF-ME}{EG-F^2} \\ -\frac{NF-MG}{EG-F^2} & -\frac{MF-NE}{EG-F^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(MF-LG)(MF-NE)-(LF-ME)(NF-MG)}{(EG-F^2)^2} = \\ &= \frac{LN-M^2}{EG-F^2}\ . \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

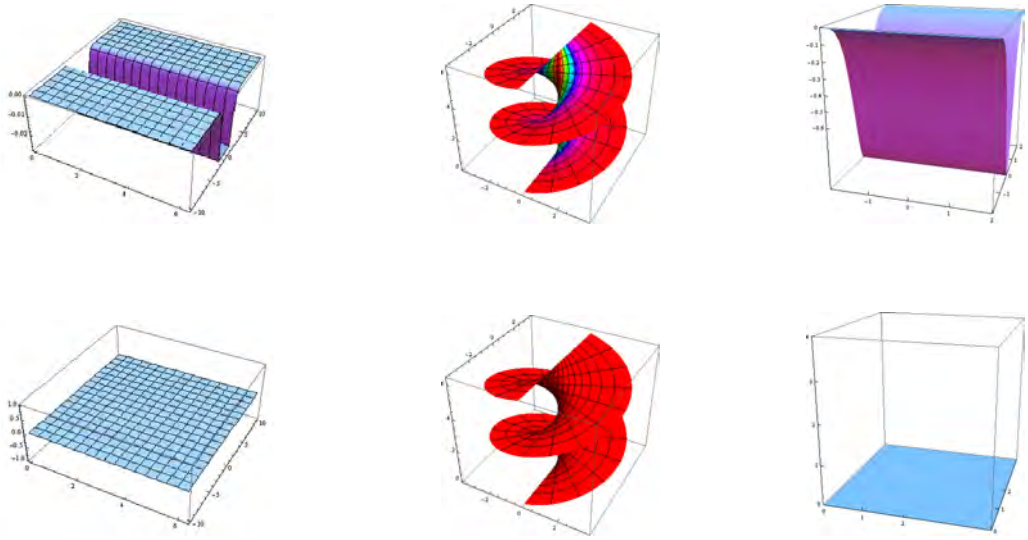
Slično je:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} -\frac{MF-LG}{EG-F^2} & -\frac{LF-ME}{EG-F^2} \\ -\frac{NF-MG}{EG-F^2} & -\frac{MF-NE}{EG-F^2} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{(MF-LG)+(MF-NE)}{2(EG-F^2)} = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}\ . \blacksquare \end{aligned} \tag{1.2.49}$$

Primer 1.2.1. *Za helikoid $\mathbf{r}(u,v) = (\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u)$ možemo izračunati Gausovu i srednju krivinu i vizuelno ih prikazati (Slika 1.5):*

$$K = -\frac{1}{(1+\sinh^2 v)^2}\ , \qquad H = 0.$$

Važnost Teoreme 1.2.6 je teorijska, dok je Teorema 1.2.7 više praktična i koristi za izračunavanje Gausove i srednje krivine. Teorema 1.2.6 se koristi za određivanje glavnih krivina. Tačnije, važi sledeća posledica:



Slika 1.5: Vizualizacija Gausove krivine helikoida, helikoid obojen u funkciji Gausove krivine i Gausova krivina predstavljena funkcijom "Hue", redom (prvi red) i analogno za srednju krivinu (drugi red)

Posledica 1.2.8. *Glavne krivine k_1 i k_2 su rešenja kvadratne jednačine*

$$k^2 - 2Hk + K = 0. \tag{1.2.50}$$

k_1 i k_2 možemo izabrati tako da je:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad i \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}\ . \blacksquare \tag{1.2.51}$$

1.2.5 Vilmorova energija

Pored promena normale po površi, tj. operatora oblika, drugi pristup analizi oblika površi jeste da se površ upoređuje sa sferom. Vilmorova energija (Thomas James Willmore, 1919–2005, engleski geometar), kao funkcija srednje i Gausove krivine, upravo ima taj zadatak da meri odstupanje površi od sfere.

Posmatrajmo površ $S \subset \mathcal{R}^3$ klase C^α, $\alpha \geq 3$, datu vektorskom jednačinom

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathcal{R}^2. \tag{1.2.52}$$

Definicija 1.2.12. *Neka su H i K redom srednja i Gausova krivina površi S.* ***Vilmorova energija u tački*** *$p \in S$ definiše se kao:*

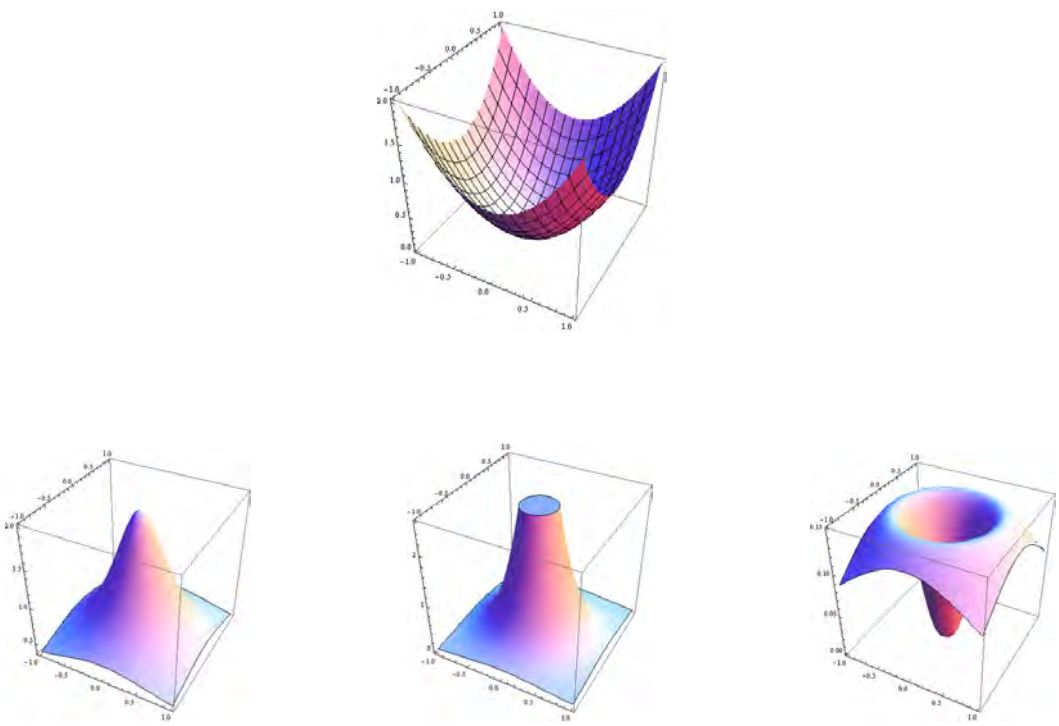
$$W(p) = H(p)^2 - K(p). \tag{1.2.53}$$

U radu [87] su prikazani primeri određivanja i vizualizacije srednje krivine, Gausove krivine i Vilmorove energije uporedo uz pomoć paketa *Mathematica* [30], [73].

Primer 1.2.2. *Za eliptički paraboloid* $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ *srednja krivina, Gausova krivina i Vilmorova energija jednake su:*

$$H(p) = \frac{2+4u^2+4v^2}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}\ , \quad G(p) = \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}\ , \quad W(p) = \frac{(4u^2+4v^2)^2}{(1+4u^2+4v^2)^3}\ ,$$

i prikazane na Slici 1.6.



Slika 1.6: Eliptički paraboloid (prvi red) i vizualizacija srednje krivine, Gausove krivine i Vilmorove energije, redom (drugi red)

Definicija 1.2.13. ***Vilmorova energija površi*** *S je površinski integral:*

$$W = \iint\limits_S f(H,K)\, dA, \tag{1.2.54}$$

gde je $f(H,K) = H^2 - K$, H i K su srednja i Gausova krivina površi, respektivno, a dA je površinski element.

U slučaju zatvorene površi, primenom Gaus-Boneove Teoreme (Pierre Ossian Bonnet, 1819–1892, francuski matematičar) [30], integral Gausove krivine može se izračunati preko Ojlerove karakteristike (Leonhard Euler, 1707–1783, švajcarski matematičar i fizičar) [30], $\chi(S)$ površi, to jest,

$$\iint\limits_S K\, dA = 2\pi\chi(S), \tag{1.2.55}$$

što je topološki invarijantno, pa se Vilmorova energija može izraziti i u obliku:

$$W = \iint\limits_S H^2\, dA - 2\pi\chi(S)\ . \tag{1.2.56}$$

Takođe se Vilmorova energija može ekvivalentno izraziti i preko glavnih krivina površi u obliku:

$$W = \frac{1}{4}\iint\limits_S (k_1 - k_2)^2\, dA\ . \tag{1.2.57}$$

Vilmorova energija je uvek veća ili jednaka nuli. Sfera ima Vilmorovu energiju jednaku nuli.

Osnovni problem je posmatrati njenu varijaciju, nalaženje kritičnih tačaka i minimuma funkcije. U topološkom smislu, ovo je ekvivalentno nalaženju kritičnih tačaka funkcije

$$\iint\limits_S H^2\, dA = \frac{1}{4}\iint\limits_S (k_1 + k_2)^2\, dA\ , \tag{1.2.58}$$

obzirom da je Ojlerova karakteristika konstantna, odnosno, Gausova krivina je topološki invarijantna.

Ova energija zauzima značajno mesto u teoriji membrana, teoriji ljuski, geometrijskom modelovanju, gde ima izuzetnu primenu.

U teoriji ćelijskih membrana, Vilmorova energija predstavlja specijalan slučaj tzv. *energije elastičnog savijanja ("elastic bending energy").* Membrana se može zamisliti kao glatka površ u $\mathcal{R}^3$ jer se njena debljina može zanemariti.

Primena Vilmorove energije u biologiji i ćelijskim membranama razmatrana je u [87]. Primena u teoriji ljuski u radu [88].

Radovi koji se bave energijom elastičnog savijanja i, specijalno, Vilmorovom energijom membrana, kao i teorijom ljuski su: [10], [11], [20], [42], [56], [67], [68], [98].

1.3 Specijalne vrste površi

Motivacija za proučavanje određenih vrsta pravolinijskih površi potiče od njihovih velikih primena u inženjerstvu, proizvodnji, arhitekturi, pa čak i u modernoj umetnosti. Njihove izometrijske karakteristike čine ih idealnim kako za modelovanje površi, tako i za kompjutersku grafiku i animaciju.

Specijalno, konoidne površi, zbog svojih geometrijskih karakteristika i veoma bogatog spektra oblika imaju veliku primenu u krovnim konstrukcijama [82], [83], [100] ali i drugim namenama u građevinarstvu i arhitekturi.

Posebna vrsta konoida jeste i takozvana Gaudijeva površ. Gaudijeva površ je sinusoidni konoid, kod kojeg se za različite vrednosti konstanti dobijaju različite površi [84].

Postoje i ravne pravolinijske površi i to su površi nulte Gausove krivine. Takve površi čine podklasu pravolinijskih površi i poznate su kao razvojne površi. Razvojne površi se mogu razviti u ravni bez ikakvih deformacija, što im pored osnovnih geometrijskih karakteristika, daje široku primenu [80].

1.3.1 Pravolinijske površi

Pravolinijske površi predstavljaju važnu klasu površi koje sadrže prave linije. Ove prave linije istovremeno su asimptotske krive. To su površi koje nastaju pomeranjem prave po nekoj krivoj.

Definicija 1.3.1. ***Pravolinijska površ*** *$S \subset \mathcal{R}^3$ je površ koja sadrži bar jednu jednoparametarsku familiju pravih. Takva pravolinijska površ ima parametrizaciju $\mathbf{r} : D \to S$ u obliku:*

$$\mathbf{r}(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u), \tag{1.3.59}$$

gde su α i γ krive u $\mathcal{R}^3$ i $\alpha' \neq 0$. Tada je **r** ***nosač pravolinijske površi****, krivu α nazivamo* ***generatrisom*** *ili bazičnom krivom, a krivi γ* ***direktrisom****.*

Definicija 1.3.2. *U slučaju kada pravoinijska površ ima dve parametrizacije, za datu površ kažemo da je dvostruko pravolinijska.*

U [30] je pokazano da važe sledeće dve Leme:

Lema 1.3.1. *Generatrise pravolinijske površi $S \subset \mathcal{R}^3$ su asimptotske krive.* ■

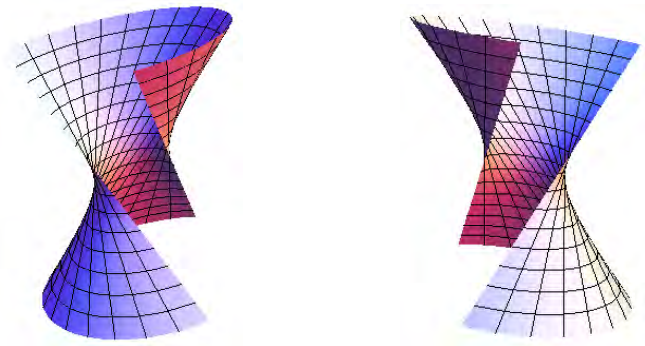
Lema 1.3.2. *Gausova krivina pravolinijske površi $S \subset \mathcal{R}^3$ svuda je nepozitivna.* ■

Primer 1.3.1. *Jednograni eliptički hiperboloid (Slika 1.7) dat je neparametarski jednačinom:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ravni, ortogonalne na Z-osu, seku površ po elipsama, dok ravni paralalelne na Z-osu seku je po hiperbolama. Jednograni hiperbolički paraboloid je dvostruka pravolinijska površ, a bazična kriva je elipsa. Parametarska jednačina ima oblik:

$$\mathbf{r}(u,v)^{\pm}(a,b,c) = (a(\cos u \mp v \sin u), b(\sin u \pm v \cos u), \pm cv).$$



Slika 1.7: Eliptički hiperboloid "minus" i "plus"

Primer 1.3.2. *Plikerov konoid (Julius Plücker, 1801-1868, nemački matematičar i fizičar) je površ definisana neparametarski jednačinom:*

$$z = \frac{2xy}{x^2+y^2}\ .$$

Njena parametrizacija ima oblik:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, \frac{2uv}{u^2+v^2})\ .$$

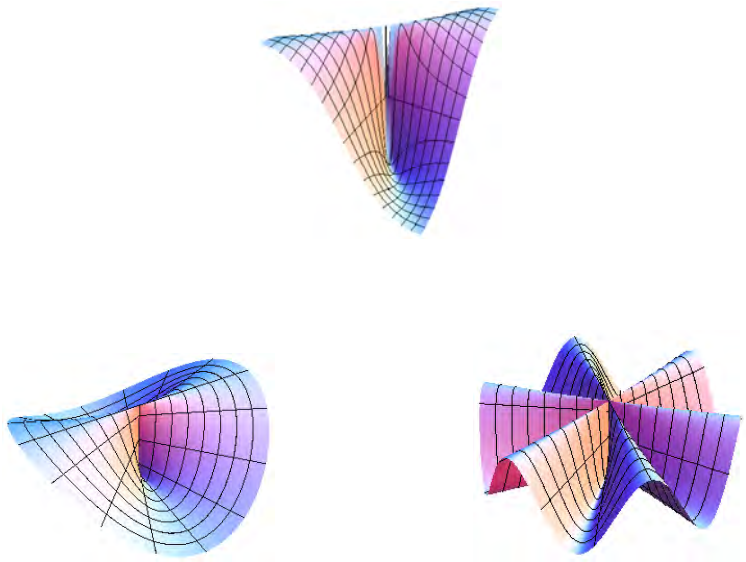
Ovom parametrizacijom paket ***Mathematica*** *ne prikazuje ovu porš kao pravolinijsku (Slika 1.8). To se postiže uvođenjem polarnih koordinata:*

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2\cos\theta\sin\theta) = (0,0,2\cos\theta\sin\theta) + \rho(\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Poslednja jednačina pokazuje da je Z-osa generatrisa a krug $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$ *direktrisa Plikerovog konoida koja prolazi kroz Z-osu.*

Moze se definisati i generalizacija Plikerovog konoida koji će imati $\boldsymbol{n}$ *nabora umesto dva (Slika 1.8):*

$$\mathbf{r}(n)(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sin n\theta).$$



Slika 1.8: Plikerov konoid dat parametarski (prva) i preko polarnih koordinata sa 2 i 6 nabora (druga i treća)

Primer 1.3.3. *Mobijusova traka (August Ferdinand Möbius, 1790-1868, nemački matematičar i astronom) je površ data parametarskom jednačinom:*

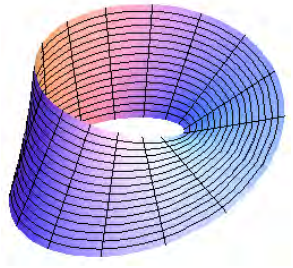
$$\mathbf{r}(a)(u,v) = a(\cos u + v\cos\frac{u}{2}\cos u, \sin u + v\cos\frac{u}{2}\sin u, v\sin\frac{u}{2}),$$

sa generatrisom $u \to (\cos u, \sin u, 0)$ *i direktrisom* $u \to a(\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2})$ *koja predstavlja krivu na sferi poluprečnika* $\boldsymbol{a}$ *(Slika 1.9). Kako Gausova krivina Mobijusove trake nije nikad nula, to pokazuje da ova parametrizacija nije lokalno izometrijska Mobijusovoj traci kada se ona razvije napravljena od papira.*

1.3.2 Gaudijeve površi

Antoni Gaudi (Antoni Placid Guillem Gaudí i Cornet, 1852-1926) bio je brilijantan katalonski arhitekta, matematičar i umetnik. Studirao je arhitekturu sa velikim akcentom na matematiku, posebno na račun i nacrtnu geometriju. Gaudijeva površ je pravolinijska površ i predstavlja sinusoidni konoid.

Definicija 1.3.3. *Gaudijeva površ [25] ili sinusoidni konoid je površ neparametarski definisana*



Slika 1.9: Mobijusova traka, $a = 1$

jednačinom:

$$z = kx \sin \frac{y}{a} \ , \tag{1.3.60}$$

gde su $k, a \in \mathcal{R}$ *proizvoljne konstante.*

Direktrisa ove površi je sinusoid sa YZ-ravni kao ravni paralelnosti i X-osom kao vrhom. Parametarska jednačina Gaudijeve površi je:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, ku \sin \frac{v}{a}) \ . \tag{1.3.61}$$

Za različite vrednosti konstnti a, k dobijaju se različiti oblici Gaudijevih površi (Slika 1.10). Pravci ove pravolinijske površi su asimptotske krive (Slika 1.11).

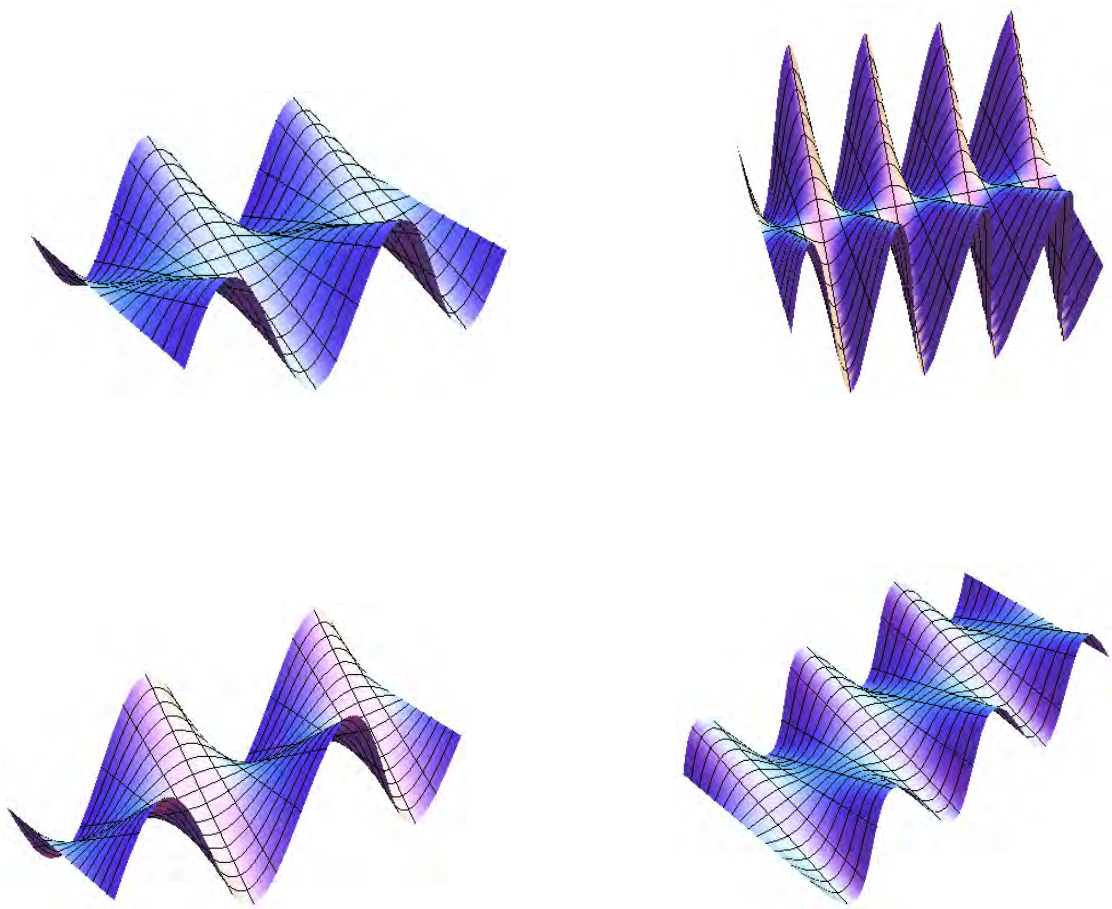
1.3.3 Razvojne površi

Posmatrajući mnoštvo različitih vrsta površi u matematici, razvojne površi čine uporedivo mali podskup. One predstavljaju posebnu klasu pravolinijskih površi. Razvojne površi su pravolinijske površi nulte Gausove krivine, pa se mogu transformisati u ravan a da pri tom dužina proizvoljne krive na površi ostaje ista. Tačnije, ove površi dobijene spajanjem gotovo neelastičnih materijala mogu se razviti u ravan bez istezanja i cepanja. Upravo je to razlog njihove široke primene u mnogim sferama inženjerstva i proizvodnje.

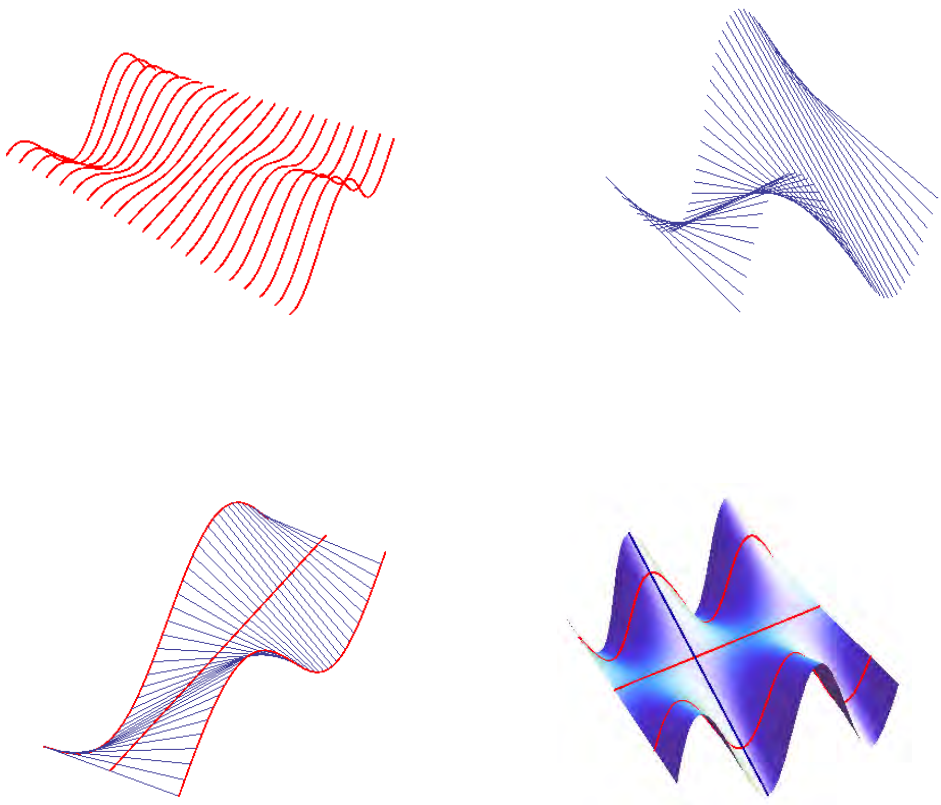
Prirodno se nameću sledeće definicije razvojne površi.

Definicija 1.3.4. *Razvojna površ je površ nulte Gausove krivine.*

Definicija 1.3.5. *Neka je* $S \subset \mathcal{R}^3$ *površ. Tada važi:*



Slika 1.10: Gaudijeva površ za $(k = \frac{1}{2}, a = 2)$, $(k = 1, a = 1)$, $(k = 1, a = 4)$, $(k = \frac{1}{10}, a = 6)$ redom



Slika 1.11: Pravci Gaudijeve površi

1. *S je* ***tangentna površ krive*** *$\alpha : (a, b) \to \mathcal{R}^3$, ako S ima parametrizaciju*

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u) \ ;$$

2. *S je* ***cilindrična površ*** *nad krivom $\alpha : (a, b) \to \mathcal{R}^3$, ako S ima parametrizaciju*

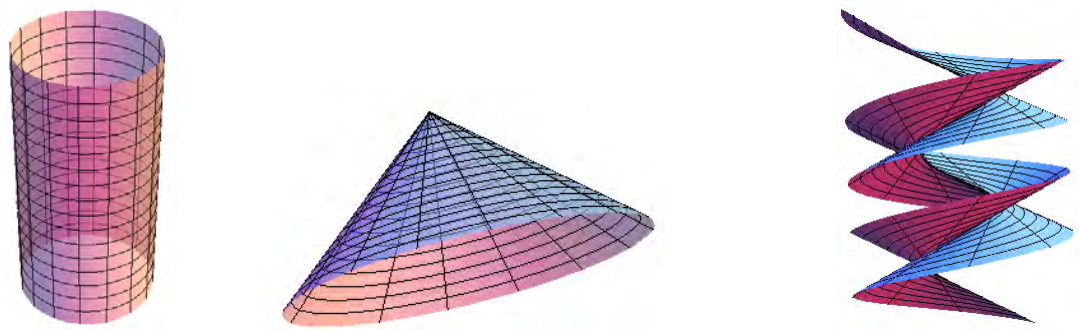
$$y(u, v) = \alpha(u) + vq \ ,$$

gde je $q \in \mathcal{R}^3$ fiksna tačka;

3. *S je* ***konusna površ*** *nad krivom $\alpha : (a, b) \to \mathcal{R}^3$, ako S ima parametrizaciju*

$$z(u, v) = p + v\alpha(u) \ ,$$

gde je $p \in \mathcal{R}^3$ fiksna tačka. Tačka p je vrh konusa.



Slika 1.12: Cilindar, konus i tangentna površ zavojnice, redom

U [84] je pokazana sledeća teorema:

Teorema 1.3.3. *Ako je S tangentna površ krive, generalisani konus ili generalisani cilindar, onda je S razvojna površ.* ■

Dakle, ova teorema govori da se razvojna površ u izvesnom smislu može smatrati unijom tangentnih površi krivih, cilindričnih i konusnih površi.

Kako se razvojna površ može razviti u ravan bez deformisanja unutrašnje metrike same površi, to znači da ona može biti "napravljena" (modelovana) od parčeta papira i obrnuto. Primer za to je Mobijusova traka (Slika 1.9).

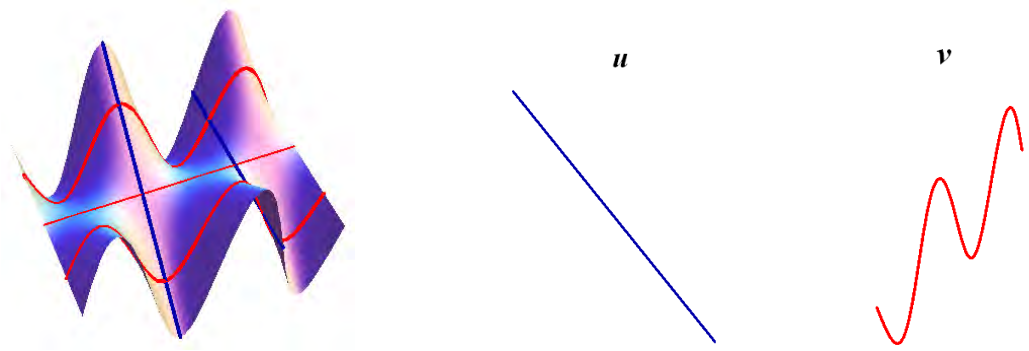
Takođe se razvojna površ može definisati i kao obvojnica oskulatornih ravni prostorne krive. Tangente se u tom slučaju mogu posmatrati kao konekcione linije dve susedne tačke ali i kao preseci dve susedne oskulatorne ravni.

Tangentna površi krive se sastoji od ravni koja se pomera, pa se nameće još jedna definicija razvojne površi kao površi kod koje su tangentne ravni po generatrisi identične.

1.4 Primer krivina i funkcija krivina Gaudijeve površi

Već je bilo pomenuto da operator oblika opisuje kako se normala površi menja krećući se po samoj površi. U principu, sve što bi mogli da saznamo o krivinama površi je zaključano u operatoru oblika. Da bi sve to otkrili, krenućemo od parametrizacije Gaudijeve površi (1.3.61) u slučaju $k = a = 1$:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u \sin v) \ . \tag{1.4.62}$$



Slika 1.13: Gaudijeva površ za $k = a = 1$, funkcije od u i funkcije od v na Gaudijevoj površi, redom

1. ***Operator oblika Gaudijeve površi*** *(*$k = a = 1$*)*

   Iz jednačine (1.4.62) mogu se izračunati vektori $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ kao i koeficijenti prve i druge kvadratne forme:

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, \sin v), \qquad \mathbf{r}_v = (0, 1, u \cos v), \tag{1.4.63}$$

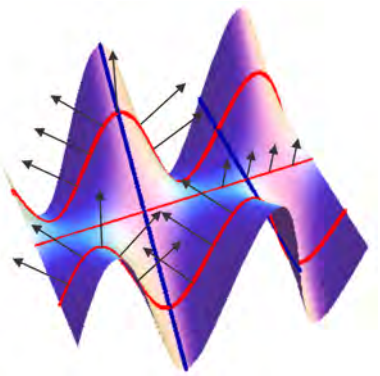
$$E = 1 + \sin^2 v, \qquad F = u \sin v \cos v, \qquad G = 1 + u^2 \cos^2 v, \tag{1.4.64}$$

$$L = 0, \qquad M = \frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v}}, \qquad N = -\frac{u \sin v}{\sqrt{1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v}}. \tag{1.4.65}$$

Tada je prema (1.2.23) operator oblika date Gaudjieve površi u matričnom obliku jednak:

$$\underline{\mathcal{S}} = \frac{1}{(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -u \cos^2 v \sin v & \cos v(1 + \sin^2 v) \\ (1 + u^2) \cos v & -2u \sin v \end{pmatrix}, \tag{1.4.66}$$

i vizuelno prikazan na Slici 1.14.



Slika 1.14: Operator oblika Gaudijeve površi za $k = a = 1$

2. ***Normalna krivina Gaudijeve površi*** *($k = a = 1$)*

Koristeći operator oblika u tački $p = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ Gaudijeve površi (1.4.62) u pravcu vektora (1.2.32), možemo izračunati normalnu krivinu k_n po definiciji (jednačina (1.2.27))):

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \underline{\mathcal{S}}_p(v(t)) \cdot v(t) = \\ &= \frac{1}{(g_0)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -u_0 \cos^2 v_0 \sin v_0 & \cos v_0(1 + \sin^2 v_0) \\ (1 + u_0^2) \cos v_0 & -2u_0 \sin v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s = \\ &= \frac{1}{(g_0)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -u_0 \cos^2 v_0 \sin v_0 \cos t + \cos v_0(1 + \sin^2 v_0) \sin t \\ (1 + u_0^2) \cos v_0 \cos t - 2u_0 \sin v_0 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s = \\ &= \frac{1}{(g_0)^{\frac{3}{2}}} \Big(- u_0 \cos^2 v_0 \sin v_0 \cos^2 t + \cos v_0(2 + \sin^2 v_0 + u_0^2) \sin t \cos t - 2u_0 \sin v_0 \sin^2 t \Big), \end{aligned} \tag{1.4.67}$$

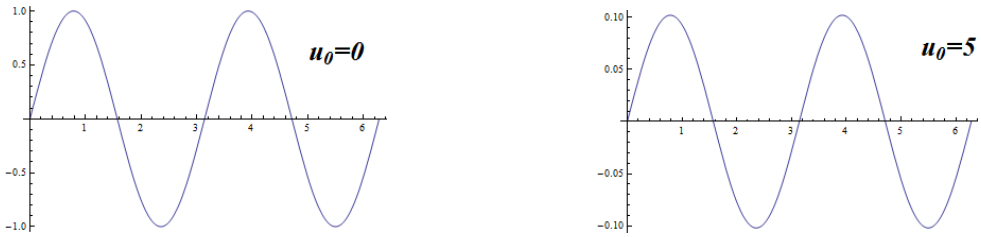
gde je

$$g_0 = 1 + u_0^2 \cos^2 v_0 + \sin^2 v_0 \ .$$

U tačkama gde je $v_0 = 0$, normalna krivina Gaudijeve površi (1.4.62) biće jednaka:

$$k_n(t) = \frac{2 + u_0^2}{(1 + u_0^2)^{\frac{3}{2}}} \sin t \cos t \ ,$$

i imaće oblik kao na Slici 1.15, gde se za različite vrednosti u_0 menja samo amplituda funkcije.



Slika 1.15: Normalna krivina Gaudijeve površi za $k = a = 1$, u tačkama gde je $v_0 = 0$

3. ***Glavne krivine Gaudijeve površi*** *(*$k = a = 1$*)*

Kako glavne krivine možemo izračunati preko Gausove i srednje krivine (1.2.51), odnosno,

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \ , \tag{1.4.68}$$

zamenom vrednosti i sređivanjem izraza možemo dobiti glavne krivine Gaudijeve površi (1.4.62). Najpre važi da je:

$$H^2 - K = \frac{4u^2 + \cos^2 v\big(4 + \sin^2 v(4 + u^2 \cos^2 v)\big)}{4(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^3} \ , \tag{1.4.69}$$

pa je vrednost kvadratnog korena:

$$\sqrt{H^2 - K} = \frac{\sqrt{4u^2 + \cos^2 v\big(4 + \sin^2 v(4 + u^2 \cos^2 v)\big)}}{2(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{1.4.70}$$

Glavne krivine Gaudijeve površi ($k = a = 1$) biće jednake:

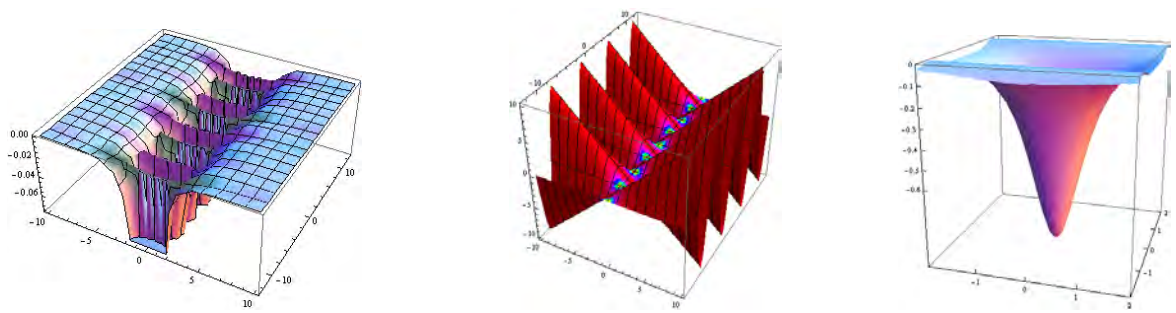
$$k_{1,2} = \frac{u \sin v(2 + \cos^2 v) \pm \sqrt{4u^2 + \cos^2 v\big(4 + \sin^2 v(4 + u^2 \cos^2 v)\big)}}{2(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{1.4.71}$$

4. ***Gausova i srednja krivina Gaudijeve površi*** ***($k = a = 1$)***

Gausova krivina predstavlja determinantu matrice operatora oblika i za Gaudijevu površ (1.4.62) je svuda nepozitivna.

$$K(p) = det(\underline{\mathcal{S}}(p)) = -\frac{\cos^2 v}{(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^2} \ . \tag{1.4.72}$$

Gausovu krivinu možemo vizuelno prikazati, zatim obojiti površ u funkciji Gausove krivine i prikazati Gausovu krivinu koristeći periodičnu funkciju *Hue* iz programskog paketa *Mathematica*, (Slika 1.16).

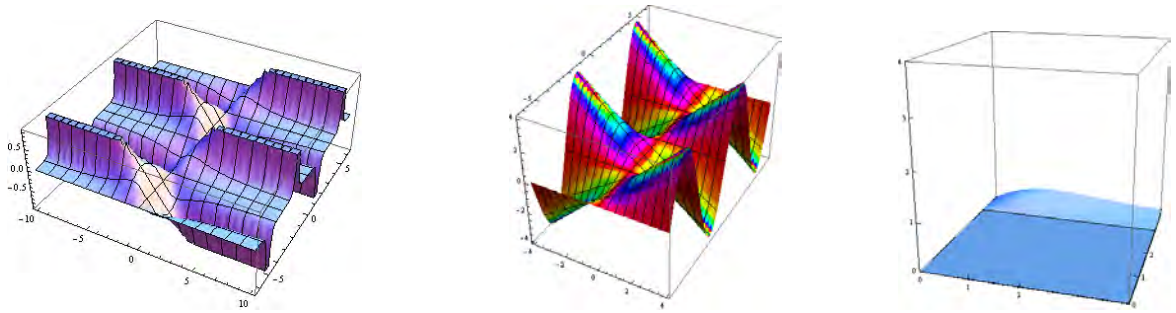


Slika 1.16: Gausova krivina Gaudijeve površi za $k = a = 1$

Srednja krivina predstavlja polovinu traga matrice operatora oblika. Za Gaudijevu površ (1.4.62) srednja krivina je jednaka:

$$H(p) = \frac{1}{2} tr(\underline{\mathcal{S}}(p)) = -\frac{u \sin v(2 + \cos^2 v)}{2(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{1.4.73}$$

Srednju krivinu takođe možemo vizuelno prikazati, zatim obojiti površ u funkciji srednje krivine i prikazati srednju krivinu koristeći periodičnu funkciju *Hue* iz programskog paketa *Mathematica*, (Slika 1.17).



Slika 1.17: Srednja krivina Gaudijeve površi za $k = a = 1$

5. ***Vilmorova energija Gaudijeve površi ($k = a = 1$) u tački površi***

Vilmorova energija u tački površi definisana je jednačinom (1.2.53) i kako za Gaudijevu površ (1.4.62) važi da je $H^2(p) > 0$ i $-K(p) > 0$, to je Vilmorova energija Gaudijeve površi (1.4.62) pozitivna u svakoj tački te površi:

$$W(p) = \frac{4u^2 + \cos^2 v((u^2 \sin^2 v - 4)\cos^2 v + 8)}{4(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^3} \,. \tag{1.4.74}$$

Vilmorovu energiju Gaudijeve površi (1.4.62) možemo vizuelno prikazati u funkciji koordinata tačke površi i prikazati Vilmorovu energiju preko periodične funkcije *Hue* (Slika 1.18):

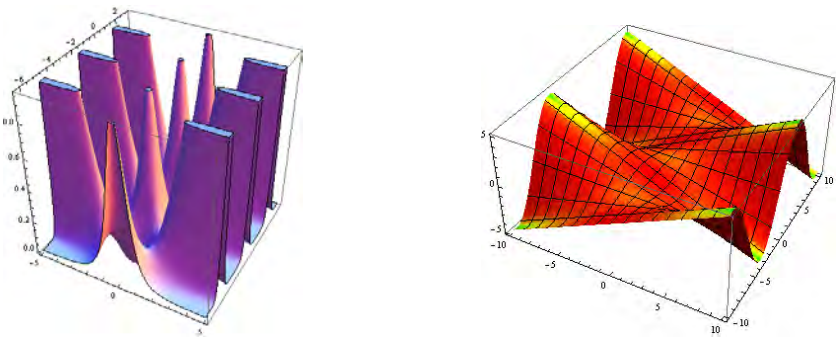
Vilmorovu energiju možemo posmatrati i u opštem slučaju Gaudijeve površi. U slučaju proizvoljnih vrednosti konstanti a i k, Gausova krivina je takođe nepozitivna:

$$K(p) = -\frac{a^2 k^2 \cos^2 \frac{v}{a}}{\left(a^2 + a^2 k^2 \sin^2 \frac{v}{a} + k^2 u^2 \cos^2 \frac{v}{a}\right)^2} \,. \tag{1.4.75}$$

Srednja krivina jednaka je:

$$H(p) = -\frac{ku \sin \frac{v}{a}\left(1 + k^2(1 + \cos^2 \frac{v}{a})\right)}{2a\left(a^2 + a^2 k^2 \sin^2 \frac{v}{a} + k^2 u^2 \cos^2 \frac{v}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{1.4.76}$$

Koristeći ove izraze možemo izračunati Vilmorovu energiju u tački proizvoljne Gaudijeve



Slika 1.18: Vilmorova energija u tački Gaudijeve površi za $k = a = 1$

površi:

$$W(p) = \frac{k^2}{4a^2\left(a^2 + a^2k^2\sin^2\frac{v}{a} + k^2u^2\cos^2\frac{v}{a}\right)^3} \cdot$$
$$\cdot \left(u^2\sin^2\frac{v}{a}\left(1 + k^2(1+\cos^2\frac{v}{a})\right)^2 + 4a^4k^2\cos^2\frac{v}{a}\left(a^2 + a^2k^2\sin^2\frac{v}{a} + k^2u^2\cos^2\frac{v}{a}\right)\right. . \tag{1.4.77}$$

Posmatrajući poslednji izraz, može se zaključiti da će Vilmorova energija u tački proizvoljne Gaudijeve površi biti minimalna kada parametar k teži nuli, tj. kada je:

$$k = \frac{1}{n},\ n \to \infty.$$

Tada će Gaudijeva površ biti glatka i vizuelno "prijatna".

Glava 2

Varijacija krivina i funkcija krivina

Koristeći tenzorski račun, u ovoj glavi najpre ćemo definisati osnovne pojmove i tvrđenja teorije infinitezimalnih deformacija i specijalno, infinitezimalnih savijanja, sledeći ispitivanja N. V. Jefimova [23] (Nikolai Vladimirovich Efimov, 1910-1982, ruski matematičar), I. Vekua [69] (Ilia Vekua, 1907-1977, gruzijski matematičar), S. Kon-Fosena [14] (Stephan Cohn-Vossen, 1902-1936, nemački matematičar), Lj. S. Velimirović [70], [71], [81] i M. (Ćirić) Najdanović [17] (Marija Najdanović, srpski matematičar). Potom ćemo analizirati Vilmorovu energiju usled infinitezimalnih deformacija, zatim odrediti polje infinitezimalnih savijanja Gaudijeve površi. Posmatraćemo i varijaciju nekih geometrijskih veličina usled infinitezimalnih savijanja površi kao što su varijacija operatora oblika, normalne krivine, glavnih krivina, Gausove i srednje krivine i Vilmorove energije. Na primeru Gaudijeve površi izračunaćemo varijaciju operatora oblika usled infinitezimalnog savijanja te površi i svih navedenih krivina i funkcija krivina. Osnovni pojmovi tenzorskog računa u radu, kao i korišćena notacija zasnovani su na knjigama L. P. Ajzenharta [22] (Luther Pfahler Eisenhart, 1876-1965, američki matematičar), S. M. Minčića i Lj. S. Velimirović [48], [49].

2.1 Osnovni pojmovi teorije infinitezimalnih deformacija površi

U ovom poglavlju daćemo osnovne karakteristike teorije infinitezimalnih deformacija površi prema [17], [23], [71] i [81].

U cilju definisanja infinitezimalnih deformacija, posmatrajmo površ $S \subset \mathcal{R}^3$ klase C^α, $\alpha \geq 3$, datu vektorskom jednačinom

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D \subset \mathcal{R}^2, \tag{2.1.1}$$

gde ćemo umesto standardnih oznaka parametara u i v, radi kraćeg zapisa koristiti oznake u^1 i u^2.

Definicija 2.1.1. *Neprekidna jednoparametarska familija površi S_ϵ,*

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon) = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2), \quad \epsilon \in (-1, 1),$$

$$\tilde{\mathbf{r}} : D \times (-1, 1) \to \mathcal{R}^3,$$

naziva se ***deformacija površi*** *S, ako se površ S dobija za $\epsilon = 0$.*

Definicija 2.1.2. *Neka je S_ϵ deformacija površi S date jednačinom (2.1.1). Ako je:*

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \epsilon \overset{(1)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) + \epsilon^2 \overset{(2)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) + \ldots + \epsilon^m \overset{(m)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2), m \geq 1, \quad (2.1.2)$$

gde su $\overset{(j)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2) \in C^\alpha(\alpha \geq 3)$, $j = 1, \ldots, m$ data dovoljno glatka polja, familija površi S_ϵ predstavlja ***infinitezimalnu deformaciju reda m površi S****. Polje $\overset{(i)}{\mathbf{z}}$ naziva se* ***polje infinitezimalne deformacije reda i****, $i = 1, ..., m$.*

Teorija u kojoj se objekti vezani sa familijom S_ϵ izučavaju sa tačnošću do beskonačno malih veličina reda m u odnosu na ϵ ($\epsilon \to 0$), naziva se **teorija infinitezimalnih (beskonačno malih) deformacija površi *S* reda *m***. Zadajući različite specijalne uslove, dobijamo različite vrste infinitezimalnih deformacija.

Posmatrajmo infinitezimalnu deformaciju prvog reda površi S, (2.1.1).

Polje infinitezimalnih deformacija definisano je u tačkama površi S, pa se može predstaviti u obliku:

$$\mathbf{z} = z^j \mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}, \quad (2.1.3)$$

pri čemu je $z^j \mathbf{r}_j$ tangentna, a $z\boldsymbol{\nu}$ normalna komponenta, z^j i z su funkcije od u^1, u^2. Dakle, jednačina infinitezimalne deformacije prvog reda biće

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \epsilon \mathbf{z} = \mathbf{r} + \epsilon \delta \mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon(z^j \mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}). \quad (2.1.4)$$

Takođe, možemo izvodni vektor polja $\mathbf{z}$ predstaviti preko vektora pokretnog triedra. Naime, ako jednačinu (2.1.3) diferenciramo po u^i, $i = 1, 2$, i označimo $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial i} = \mathbf{z}_i$, $\frac{\partial z^j}{\partial u^i} = z^j{}_{,i}$, $\frac{\partial z}{\partial u^i} = z_{,i}$, imaćemo:

$$\mathbf{z}_i = z^j{}_{,i} \mathbf{r}_j + z^j \mathbf{r}_{j,i} + z_{,i}\boldsymbol{\nu} + z\boldsymbol{\nu}_i = z^j{}_{,i} \mathbf{r}_j + z^j(\Gamma^p_{ij} \mathbf{r}_p + b_{ij}\boldsymbol{\nu}) + z_{,i}\boldsymbol{\nu} + z(-b^p_i \mathbf{r}_p),$$

posle primene derivacionih formula prve i druge vrste. Vršeći potrebne izmene nemih indeksa dobijamo:

$$\mathbf{z}_i = (z^p{}_{,i} + z^j \Gamma^p_{ij} - z b^p_i)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu} \ ,$$

što se, koristeći pojam kovarijantnog izvoda ;, može napisati u obliku:

$$\mathbf{z}_i = (z^p{}_{;i} - z b^p_i)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu} \ . \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Varijacija nekih veličina usled infinitezimalnih deformacija

Prilikom infinitezimalnih deformacija geometrijske veličine površi se menjaju, a datu promenu meri *varijacija geometrijskih veličina.*

Definicija 2.1.3. [69] *Neka je $A = A(u^1, u^2)$ veličina koja karakteriše geometrijsko svojstvo na površi S i $\tilde{A} = A(u^1, u^2, \epsilon)$ odgovarajuća veličina na površi S_ϵ koja predstavlja infinitezimalnu deformaciju prvog reda površi S i neka je:*

$$\Delta A = \tilde{A} - A = \epsilon\, \delta A + \epsilon^2\, \delta^2 A + \ldots \epsilon^n\, \delta^n A + \ldots \tag{2.1.6}$$

Tada koeficijenti $\delta A, \delta^2 A, \ldots, \delta^n A, \ldots$ predstavljaju ***prvu, drugu, ..., n-tu varijaciju*** *geometrijske veličine A, respektivno, pri infinitezimalnoj deformaciji S_ϵ površi S.*

U ovom radu razmatraćemo prvu varijaciju pri infinitezimalnim deformacijama prvog reda. U tom cilju, možemo predstaviti veličinu $\tilde{A}$ na sledeći način:

$$\tilde{A} = A + \epsilon\, \delta A,$$

zanemarujući članove koji stoje uz ϵ^n, $n \geq 2$.

Za prvu varijaciju važi formula:

$$\delta A = \frac{d}{d\epsilon} \tilde{A}(u^1, u^2, \epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\,, \tag{2.1.7}$$

odnosno,

$$\delta A = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Delta A}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\tilde{A}(u^1, u^2, \epsilon) - A(u^1, u^2)}{\epsilon}\,. \tag{2.1.8}$$

U [71] je pokazano da važi:

$$\textbf{a)}\quad \delta(AB) = A\delta B + B\delta A\,, \qquad \textbf{b)}\quad \delta\Big(\frac{\partial A}{\partial u^i}\Big) = \frac{\partial(\delta A)}{\partial u^i}\,. \tag{2.1.9}$$

Posmatrajmo površ S zadatu jednačinom (2.1.1),

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D \subset \mathcal{R}^2 \tag{2.1.10}$$

i infinitezimalnu deformaciju date površi (2.1.4),

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \epsilon \mathbf{z} = \mathbf{r} + \epsilon \delta \mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon(z^j \mathbf{r}_j + z\boldsymbol{\nu}). \tag{2.1.11}$$

Posmatraćemo deformisane površi familije S_ϵ.

Prema (2.1.5), kovarijantni bazni vektori deformisane površi biće:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \epsilon\delta\mathbf{r}_i = (\mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r})_{,i} = (\mathbf{r} + \epsilon\mathbf{z})_{,i} = \mathbf{r}_i + \epsilon[(z^p{}_{;i} - zb^p_i)\mathbf{r}_p + (z^p b_{ip} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}] \ . \tag{2.1.12}$$

U radu [17] je pokazano da za determinantu prve kvadratne forme površi $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, posle deformisanja površi važi:

$$\tilde{g} = g + \epsilon\delta g = (g_{11} + \epsilon\delta g_{11})(g_{22} + \epsilon\delta g_{22}) - (g_{12} + \epsilon\delta g_{12})^2 \ ,$$

odnosno,

$$\tilde{g} = g + \epsilon\delta g = g + 2g\epsilon(z^i{}_{;i} - zb^i_i) \ . \tag{2.1.13}$$

Za koeficijente druge kvadratne forme u radu [17] je pokazano:

$$\tilde{b}^j_i = b^j_i + \epsilon\delta b^j_i = b^j_i + \epsilon(z^p{}_{;i}b^j_p + z^p b^j_{p;i} + g^{pj}z_{;pi} - z^j{}_{;p}b^p_i + zb^j_p b^p_i) \ . \tag{2.1.14}$$

Za srednju krivinu:

$$H = \frac{1}{2}b^i_i \ , \tag{2.1.15}$$

posle deformisanja važi:

$$\tilde{H} = H + \epsilon\delta H = \frac{1}{2}(b^i_i + \epsilon\delta b^i_i) \ , \tag{2.1.16}$$

to jest,

$$\tilde{H} = H + \epsilon\delta H = H + \frac{1}{2}\epsilon(z^p b^i_{i;p} + g^{pi}z_{;pi} + zb^i_p b^p_i) \ . \tag{2.1.17}$$

Gausova krivina:

$$K = \frac{1}{2}(b^i_i b^j_j - b^i_j b^j_i) \ , \tag{2.1.18}$$

deformisane površi biće:

$$\tilde{K} = K + \epsilon\delta K = \frac{1}{2}[(b^i_i + \epsilon\delta b^i_i)(b^j_j + \epsilon\delta b^j_j) - (b^i_j + \epsilon\delta b^i_j)(b^j_i + \epsilon\delta b^j_i)] \ ,$$

a primenom (2.1.14) i zamenom nemih indeksa:

$$\tilde{K} = K + \epsilon\delta K = K + \epsilon[z^p(b^i_i b^j_{j;p} - b^i_j b^j_{i;p}) + z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - b^{ij}) + z(b^j_j b^i_p b^p_i - b^j_p b^p_i b^i_j)] \ . \tag{2.1.19}$$

2.1.2 Vilmorova energija usled infinitezimalnih deformacija

Infinitezimalne deformacije možemo posmatrati kao specijalne deformacije membrana. U radu [17] je ispitano šta se dešava sa Vilmorovom energijom površi (2.1.1) prilikom infinitezimalne deformacije (2.1.4).

Pretpostavimo da je parametrizacija površi (2.1.1), $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, određena u kompaktnoj oblasti D. Neka su vrednosti za u^i i u^j duž granice površi $\mathbf{r}_\epsilon$ iste kao kod površi $\mathbf{r}$. Površinski element od $\mathbf{r}$ je $g^{1/2}du^1du^2$, pa je Vilmorova energija jednaka:

$$W = \iint\limits_D f(H, K)\, g^{1/2} du^1 du^2 \ , \tag{2.1.20}$$

a Vilmorova energija deformisane površi:

$$\tilde{W} = W + \epsilon\delta W = \iint\limits_D f(H + \epsilon\delta H, K + \epsilon\delta K)\, (g + \epsilon\delta g)^{1/2} du^1 du^2 \ , \tag{2.1.21}$$

gde je D oblast integracije.

U radu [17] izračunato je δW:

$$\begin{aligned}
\tilde{W} &= \iint\limits_D [(H + \epsilon\delta H)^2 - (K + \epsilon\delta K)](g + \epsilon\delta g)^{1/2}\, du^1 du^2 = \\
&= \iint\limits_D [f(H, K) + \epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H + \frac{\partial f}{\partial K}\delta K)] g^{1/2}(1 + \frac{\epsilon\delta g}{g})^{1/2} = \\
&= \iint\limits_D [f(H, K) + \epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H + \frac{\partial f}{\partial K}\delta K)] g^{1/2}(1 + \frac{\epsilon\delta g}{2g}) = \\
&= \iint\limits_D [f(H, K) + \epsilon(\frac{\partial f}{\partial H}\delta H + \frac{\partial f}{\partial K}\delta K + f(H, K)\frac{\delta g}{2g})] g^{1/2} du^1 du^2 \ ,
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

posle razvoja $(1 + \frac{\epsilon\delta g}{g})^{1/2}$ u Maklorenov red (Colin Maclaurin, 1698–1746, škotski matematičar) do prvog stepena (ostale članove zanemarujemo). Dakle,

$$\delta W = \iint\limits_D [\frac{\partial f}{\partial H}\delta H + \frac{\partial f}{\partial K}\delta K + f(H, K)\frac{\delta g}{2g}] g^{1/2} du^1 du^2 \ . \tag{2.1.23}$$

Primenom (2.1.13), (2.1.15), (2.1.17), (2.1.18) i (2.1.19), dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta W =& \iint\limits_D [2H\delta H - \delta K + (H^2 - K)\frac{\delta g}{2g}]g^{1/2}du^1du^2 = \\
=& \iint\limits_D \{\frac{1}{2}b^i_i(z^i b^j_{j;i} + g^{ij}z_{;ij} + zb^j_j b^j_i) - z^p(b^i_i b^j_{j;p} - b^i_j b^j_{i;p}) - z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p) - \\
& - z(b^i_i b^j_p b^p_j - b^i_j b^j_p b^p_i) + [\frac{1}{4}b^i_i b^j_j - \frac{1}{2}(b^i_i b^j_j - b^j_i b^i_j)](z^i_{;i} - zb^i_i)\}g^{1/2}du^1du^2 = \\
=& \iint\limits_D \{\frac{1}{4}(b^j_j b^p_p z^i)_{;i} + \frac{1}{2}b^i_i g^{jp}z_{;jp} + \frac{1}{2}zb^i_i(b^j_p b^p_j - \frac{1}{2}b^j_j b^p_p) - \frac{1}{2}[z^i(b^j_j b^p_p - b^j_p b^p_j)]_{;i} - \\
& - z_{;ij}(g^{ij}b^p_p - g^{ip}b^j_p) - \frac{z}{2}(3b^i_i b^j_p b^p_j - 2b^i_j b^j_p b^p_i - b^i_i b^j_j b^p_p)\}g^{1/2}du^1du^2 \ ,
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

odnosno, nakon sređivanja u radu [17] je pokazano da je:

$$\begin{aligned}
\delta W =& \iint\limits_D \frac{z}{2}[b^p_{p;ij}g^{ij} + b^p_p(b^i_j b^j_i - \frac{1}{2}b^i_i b^j_j)]g^{1/2}du^1du^2 + \\
& + \int_C \frac{c_{ij}}{2}[\frac{1}{2}z^i b^p_p b^q_q + b^p_p g^{iq}z_{;q} - b^p_{p;q}g^{iq}z - z^i(b^p_p b^q_q - b^p_q b^q_p) - \\
& - 2z_{;q}(g^{ip}b^q_q - g^{iq}b^p_p)](\frac{du^j}{ds})\, ds \ .
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Dakle, dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.1.1. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi* (2.1.1) *pri infinitezimalnim deformacijama* (2.1.4) *data je u* (2.1.25). ■

Iz poslednje teoreme dobijena je sledeća posledica:

Posledica 2.1.2. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi bez kraja* (2.1.1) *pri infinitezimalnim deformacijama* (2.1.4) *jednaka je:*

$$\delta W \ = \iint\limits_D \tfrac{z}{2}[b^p_{p;ij}g^{ij} + b^p_p(b^i_j b^j_i - \tfrac{1}{2}b^i_i b^j_j)]g^{1/2}du^1du^2 \ . \quad ■ \tag{2.1.26}$$

Takođe, u [17] je pokazano da će površinski integral (2.1.26) biti jednak nuli za svako z ako važi:

$$b^p_{p;ij}g^{ij} + b^p_p(b^i_j b^j_i - \frac{1}{2}b^i_i b^j_j) = 0 \ . \tag{2.1.27}$$

Ovo je jednačina površi koje imaju stacionarnu vrednost Vilmorove energije pri infinitezimalnim deformacijama i predstavlja diferencijalnu jednačinu četvrtog reda. Može se izraziti preko srednje i Gausove krivine na sledeći način:

$$H_{;ij}g^{ij} + 2H(H^2 - K) = 0 \ . \tag{2.1.28}$$

Zamenom kovarijantnog diferenciranja parcijalnim diferenciranjem dobija se jednačina (2.1.28) u sledećem obliku:

$$\frac{1}{g^{1/2}}(g^{1/2}g^{ij}H_{,i})_{,j} + 2H(H^2 - K) = 0 \ . \tag{2.1.29}$$

Dokazana je, dakle, sledeća teorema:

Teorema 2.1.3. *Varijacija Vilmorove energije glatke orijentisane površi bez kraja čije glavna i Gausova krivina, H i K, zadovoljavaju jednačinu* (2.1.29)*, jednaka je nuli pri infinitezimalnim deformacijama.* ■

2.2 Infinitezimalno savijanje površi

Infinitezimalno savijanje predstavlja specijalan slučaj infinitezimalnih deformacija. Ovo temom bavili su se mnogi poznati matematičari, na primer, A. Koši (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, francuski matematičar), D. Hilbert (David Hilbert, 1862-1943, nemački matematičar), V. Blaške (Wilhelm Johann Eugen Blaschke, 1885-1962, austrougarski matematičar) i drugi, a kasnije i A. D. Aleksandrov [2] (Aleksandr Danilovich Aleksandrov, 1912–1999, ruski matematičar, fizičar i filozof), I. Vekua [69], N. V. Jefimov [23], A. V. Pogorelov [61] (Aleksei Vasil'evich Pogorelov, 1919-2002, sovjetski i ukrajinski matematičar), S. Kon-Fosen [14], V. T. Fomenko [29] (Valentin Trofimovich Fomenko, ruski matematičar), I. H. Sabitov i I. I. Karatopraklijeva [37] (Sabitov Idzhad Khakovich, ruski matematičar, Ivanka Ivanova-Karatopraklieva, bugarski matematičar), Lj. S. Velimirović [70], [71], [73], [74], [77], [81], [87], [89], [90], [91], V. Aleksandrov [3], [4], [5] (Victor Alexandrov, ruski matematičar) i drugi.

Osnove teorije infinitezimalnih savijanja površi uvešćemo prema [23], [69], [70], [71].

Definicija 2.2.1. [*23*] ***Infinitezimalno savijanje reda m*** *regularne površi S,* (2.1.1)*, klase $C^\alpha, (\alpha \geq 3)$, je infinitezimalna deformacija reda m* (2.1.2) *ako je:*

$$d\tilde{s}^2 - ds^2 = o(\epsilon^m) \ , \tag{2.2.30}$$

tj. ako je razlika kvadrata linijskih elemenata beskonačno mala (infinitezimalna) veličina reda višeg od m u odnosu na ϵ. Vektorsko polje $\overset{(i)}{\mathbf{z}}(u^1, u^2)$ u (2.1.2) *je* ***polje brzina*** *ili* ***polje infinitezimalnog savijanja*** *reda i, $i = 1, ..., m$.*

Datu definiciju možemo iskazati i na sledeći način:

Teorema 2.2.1. [*71*] *Pri infinitezimalnom savijanju reda m dužina svake glatke linije ostaje nepromenjena s uzetom tačnošću, tj. promena dužine glatke linije na S je beskonačno mala veličina reda višeg od m u odnosu na $\epsilon(\epsilon \to 0)$.* ■

U ovom radu posmatrana su infinitezimalna savijanja prvog reda.
Posmatrajmo infinitezimalno savijanje površi S,

$$S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon) = \mathbf{r}_\epsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \epsilon\mathbf{z}(u^1, u^2) \ . \tag{2.2.31}$$

Definicija infinitezimalnog savijanja ekvivalentna je sledećoj teoremi:

Teorema 2.2.2. [*23*] *Potreban i dovoljan uslov da površi S_ϵ* (2.2.31) *predstavljaju infinitezimalno savijanje površi S* (2.1.1) *glasi:*

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{z} = 0 \ , \tag{2.2.32}$$

gde je $\mathbf{z}$ polje brzina u početnom momentu deformacije. ■

Ova jednačina ekvivalentna je sledećim parcijalnim jednačinama:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = 0 \ , \qquad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = 0 \ , \qquad \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = 0 \ . \tag{2.2.33}$$

Iz jednačine (2.2.31) sledi:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2, \epsilon)}{\partial \epsilon} = \mathbf{z}(u^1, u^2) \ ,$$

što izražava činjenicu da je $\mathbf{z}$ polje brzine pri kretanju tačke površi prilikom deformacije (uzevši da je ϵ vreme).

Teorema 2.2.3. [*69*], [*70*] *Neka je $s = s(\epsilon)$ dužina luka krive C_ϵ na površi S_ϵ. Potreban i dovoljan uslov za infinitezimalno savijanje površi $S = S_0$ je:*

$$\left.\frac{\partial s_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \ , \tag{2.2.34}$$

to jest, da je brzina promene dužine luka u početnom momentu deformacije jednaka nuli. ■

Definicija 2.2.2. *Polje savijanja je **trivijalno**, to jest, predstavlja polje kretanja površi kao krutog tela bez unutrašnjih deformacija, ako se može predstaviti u obliku:*

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} \ , \tag{2.2.35}$$

*gde su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori. Odgovarajuće infinitezimalno savijanje naziva se **trivijalno infinitezimalno savijanje** ili **infinitezimalno kretanje** površi S.*

Definicija 2.2.3. *Površ je* ***kruta*** *ako ne dopušta netrivijalna polja savijanja, u suprotnom površ je* ***nekruta*** *ili* ***fleksibilna****.*

Važi sledeća teorema:

Teorema 2.2.4. [23] *Neka je* $\mathbf{z}$ *polje infinitezimalnog savijanja površi* $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$*. Tada postoji jedinstveno vektorsko polje* $\mathbf{y}$ *tako da važi:*

$$d\mathbf{z} = \mathbf{y} \times d\mathbf{r} \ , \tag{2.2.36}$$

odnosno,

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{y} \times \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{y} \times \mathbf{r}_2 \ . \quad \blacksquare \tag{2.2.37}$$

Definicija 2.2.4. *Vektorsko polje* $\mathbf{y}$ *za koje važi jednačina* (2.2.36)*, odnosno,* (2.2.37)*, zove se* ***polje rotacija*** *površi pri infinitezimalnom savijanju određenom poljem* $\mathbf{z}$*.*

Možemo dati geometrijsku interpretaciju polja rotacija: $\mathbf{y}(u_0, v_0)$ je vektor rotacije krutog tela pridruženog površi S u tački $\mathbf{r}(u_0, v_o)$ prilikom savijanja. Kao rezultat infinitezimalnog savijanja površi, svi njeni elementi trpe rotaciju sa vektorom rotacije $\mathbf{y}$.

Takođe je moguće posmatrati parametarsku površ Y određenu krajevima vektora rotacije $\mathbf{y}(u^1, u^2)$, ako se svi vektori $\mathbf{y}$ uzmu sa početkom u koordinatnom početku. U tom slučaju Y se naziva *nepostojana površ ("instability surface")* infinitezimalnog savijanja, odnosno, **indikatrisa rotacije** površi S.

Za polje rotacija važi sledeća teorema:

Teorema 2.2.5. [23] *Za površ* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ *izvodni vektori* $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_{,1}$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_{,2}$ *dati su jednačinama:*

$$\mathbf{y}_1 = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \gamma \mathbf{r}_1 - \alpha \mathbf{r}_2 \ , \tag{2.2.38}$$

gde skalarne funkcije α*,* β*,* γ *zadovoljavaju sistem jednačina:*

$$\begin{aligned} b_{11}\gamma - 2b_{12}\alpha - b_{22}\beta &= 0 \ , \\ \alpha_{,2} - \gamma_{,1} &= \Gamma^1_{11}\gamma - 2\Gamma^1_{12}\alpha - \Gamma^1_{22}\beta \ , \\ \alpha_{,1} + \beta_{,2} &= \Gamma^2_{11}\gamma - 2\Gamma^2_{12}\alpha - \Gamma^2_{22}\beta \ , \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

gde su b_{ij}*,* $i, j = 1, 2$ *koeficijenti druge kvadratne forme,* Γ^i_{jk}*,* $i, j, k = 1, 2$ *Kristofelovi simboli površi* S*.* $\blacksquare$

Rešavanjem sistema jednačina (2.2.39) nalazimo α, β, γ, pomoću kojih integracijom dobijamo polje rotacija $\mathbf{y}$, a zatim još jednom integracijom dobijamo i polje savijanja $\mathbf{z}$. Jasno je da površ S dopušta samo trivijalna savijanja ako i samo ako $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jeste jedino rešenje sistema (2.2.39).

Definicija 2.2.5. *Polje* $\mathbf{s}(u^1, u^2)$ *određeno jednačinom:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{z} - \mathbf{y} \times \mathbf{r} \ , \tag{2.2.40}$$

naziva sa ***polje translacija*** *pri infinitezimalnom savijanju određenom poljem* $\mathbf{z}$.

Polje infinitezimalnog savijanja prvog reda površi S (2.1.1), prema ispitivanjima I. Vekua [69] i Lj. S. Velimirović [70] može se odrediti na sledeći način.

Posmatrajmo osnovnu jednačinu polja savijanja (2.2.32). Budući da je $d\mathbf{z} = \mathbf{z}_i du^i$, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_j du^j$, primenom (2.1.5) dobijamo

$$\mathbf{r}_j du^j \cdot [(z^p{}_{;i} - b^p_i z)\mathbf{r}_p + (z^p b_{pi} + z_{,i})\boldsymbol{\nu}]du^i = 0 \ .$$

Takođe je $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_p = g_{jp}$ i $\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, pa prethodna jednačina postaje:

$$(z^p{}_{;i} - b^p_i z) g_{jp}\, du^i du^j = 0 \ . \tag{2.2.41}$$

Ova jednačina važi za svako du^i, du^j, pa dobijamo:

$$z^p{}_{;i} g_{jp} - b_{ij} z = 0 \ . \tag{2.2.42}$$

odakle sledi:

$$z_{j;i} - b_{ij} z = 0 \ , \tag{2.2.43}$$

gde su z_j kovarijantne koordinate tangentne komponente vektora $\mathbf{z}$. Promenom mesta indeksa j i i dobija se:

$$z_{i;j} - b_{ij} z = 0 \ , \tag{2.2.44}$$

s obzirom na simetričnost koeficijenata druge kvadratne forme. Sabiranjem prethodne dve jednačine dobijamo:

$$z_{i;j} + z_{j;i} - 2b_{ij} z = 0 \ , \quad (i, j = 1, 2). \tag{2.2.45}$$

Dakle, važi:

Teorema 2.2.6. [*69*], [*70*] *Potreban i dovoljan uslov da polje* (2.1.3) *bude polje infinitezimalnog savijanja površi* S (2.1.1)*, jeste da za koordinate* z_i*,* z *važe jednačine* (2.2.45). ■

Sistem jednačina (2.2.45), koji očigledno predstavlja koordinatno zapisanu jednačinu (2.2.32), naziva se *kinematički sistem jednačina* ili sistem jednačina polja infinitezimalnog savijanja. To je sistem od tri jednačine za nepoznate funkcije z_1, z_2, z od argumenata u^1, u^2.

Iz ovog sistema z se lako eliminiše. Ako pomnožimo jednačinu (2.2.42) sa g^{jk}, dobijamo ${z^k}_{;i} - b^k_i z = 0$, a zatim izvršimo kontrakciju po k, i:

$$ {z^i}_{;i} - b^i_i z = 0 \ . \tag{2.2.46} $$

Pošto je srednja krivina površi data jednačinom $H = \frac{1}{2} b^i_i$, upoređivanjem sa (2.2.46) dobijamo:

$$ z = \frac{1}{2H} {z^i}_{;i} \ . \tag{2.2.47} $$

Kako je ${z^i}_{;i} = {z^i}_{,i} + \Gamma^i_{pi} z^p = {z^p}_{,p} + \Gamma^i_{pi} z^p$, jednačina (2.2.47) postaje:

$$ z = \frac{1}{2H} \Big[\frac{\partial z^p}{\partial u^p} + \frac{\partial (\ln \sqrt{g})}{\partial u^p} z^p \Big] \ . \tag{2.2.48} $$

Zamenom (2.2.47) u (2.2.44), dobijamo $z_{i;j} - b_{ij} \frac{1}{2H} {z^p}_{;p} = 0$, ili

$$ b_{ij} {z^p}_{;p} - 2H z_{i;j} = 0 \ , \tag{2.2.49} $$

što možemo zapisati u sledećoj formi:

$$ b_{ij} {z^p}_{;p} - 2H g_{pi} {z^p}_{;j} = 0 \ , \quad (i, j = 1, 2). \tag{2.2.50} $$

Odavde možemo naći z^1 i z^2, a iz (2.2.48) i z. Na taj način se u potpunosti određuje polje infinitezimalnog savijanja $\mathbf{z}$ površi.

Neka je polje rotacija $\mathbf{y}$ dato jednačinom:

$$ \mathbf{y} = y^i \mathbf{r}_i + y \boldsymbol{\nu} \ , \tag{2.2.51} $$

gde je $\mathbf{z}$ dato u (2.1.3). Korišćenjem $d\mathbf{z} = \mathbf{z}_j du^j$ i (2.1.5) u (2.2.36) dobijamo:

$$ \begin{aligned} ({z^p}_{;j} - b^p_j z) du^j \, \mathbf{r}_p + (z^p b_{pj} + z_{,j}) du^j \, \boldsymbol{\nu} &= (y^i \mathbf{r}_i + y \boldsymbol{\nu}) \times \mathbf{r}_j du^j = \\ &= y^i du^j (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) + y du^j (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j). \end{aligned} \tag{2.2.52} $$

Možemo pisati:

$$ \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = c_{ij} \boldsymbol{\nu} \ , \tag{2.2.53} $$

pri čemu je c_{ij} antisimetrični tenzor. Važiće da je:

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}} \times \mathbf{r}_j = -\frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{r}_j \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} [(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_2] = -\frac{1}{\sqrt{g}} (g_{j2} \mathbf{r}_1 - g_{j1} \mathbf{r}_2) = \\ &= \sqrt{g} (g^{p2} \mathbf{r}_p - g^{p1} \mathbf{r}_p) = c_{12} g^{p2} \mathbf{r}_p + c_{21} g^{p1} \mathbf{r}_p \ . \end{aligned} \tag{2.2.54} $$

Dakle,

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_j = c_{jq} g^{pq} \mathbf{r}_p \ . \tag{2.2.55}$$

Sada jednačina (2.2.52) dobija oblik:

$$(z^p{}_{;j} - b^p_j z) du^j \, \mathbf{r}_p + (z^p b_{pj} + z_{,j}) du^j \, \boldsymbol{\nu} = y^i du^j c_{ij} \, \boldsymbol{\nu} + y du^j c_{jq} g^{pq} \, \mathbf{r}_p \ ,$$

odakle je:

$$z^p{}_{;j} - b^p_j z = y c_{jq} g^{pq} \ , \tag{2.2.56}$$

$$z^p b_{pj} + z_{,j} = c_{ij} y^i \ . \tag{2.2.57}$$

Ove dve jednačine određuju u potpunosti y^1, y^2, y, to jest, polje rotacija $\mathbf{y}$.

2.2.1 Gaudijeve površi pri infinitezimalnom savijanju

Teorija infinitezimalnih savijanja površi ima osnovni zadatak da određuje netrivijalna polja savijanja, uz uslov (2.2.32). Ovde ćemo ispitati krutost Gaudijevih površi, tj. pronaći odgovarajuće polje savijanja, kao u radu [91], gde ćemo sada koristiti oznake $u = u^1$, $v = u^2$.

Vektorska jednačina Gaudijeve površi je:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, ku \sin \frac{v}{c}), \qquad (u = x, v = y), \tag{2.2.58}$$

odnosno,

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + ku \sin \frac{v}{c} \mathbf{k},$$

gde su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortovi u pravcu Dekartovih osa.

Kristofelovi simboli ove površi su:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0 \ , \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{g} \frac{k^2}{c} \sin \frac{v}{c} \cos \frac{v}{c} \ , \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{g} \frac{k^2}{c^2} u \sin^2 \frac{v}{c} \ ,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{g} \frac{k^2}{c^2} u \cos^2 \frac{v}{c} \ , \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{g} \frac{k^2}{c^3} u^2 \sin \frac{v}{c} \cos \frac{v}{c} \ ,$$

gde je $g = 1 + k^2 \sin^2 \frac{v}{c} + \frac{k^2}{c^2} u^2 \cos^2 \frac{v}{c}$ determinanta koeficijenata prve kvadratne forme date površi. Koeficijenti druge kvardatne forme su:

$$b_{11} = 0 \ , \qquad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{k}{c} \cos \frac{v}{c} \ , \qquad b_{22} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{k}{c^2} u \sin \frac{v}{c} \ .$$

Jednačine (2.2.39) postaju:

$$-2\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c}\cos\frac{v}{c}\alpha+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{k}{c^2}u\sin\frac{v}{c}\beta=0\ , \tag{2.2.59}$$

$$\alpha_v-\gamma_u=-2\frac{1}{g}\frac{k^2}{c}\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c}\alpha+\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\sin^2\frac{v}{c}\beta\ , \tag{2.2.60}$$

$$\alpha_u+\beta_v=-2\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^2}u\cos^2\frac{v}{c}\alpha+\frac{1}{g}\frac{k^2}{c^3}u^2\sin\frac{v}{c}\cos\frac{v}{c}\beta\ . \tag{2.2.61}$$

Iz (2.2.59) imamo da je:

$$\alpha=\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta\ ,\qquad v\neq\frac{c\pi}{2}+ck\pi\ . \tag{2.2.62}$$

Zamenom (2.2.62) u (2.2.61), dobijamo kvazi linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu nepoznate funkcije β:

$$\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_u+\beta_v=-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta\ . \tag{2.2.63}$$

Sistem karakteristika ove jednačine je:

$$\frac{du}{\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}}=\frac{dv}{1}=\frac{d\beta}{-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta}\ . \tag{2.2.64}$$

Iz jednačina:

$$\frac{du}{\frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}}=\frac{dv}{1}\ ,\qquad \frac{dv}{1}=\frac{d\beta}{-\frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta}\ , \tag{2.2.65}$$

dobijamo redom dva integrala:

$$\psi_1\equiv u^2\cos\frac{v}{c}=c_1\ ,\qquad \psi_2\equiv\frac{\beta^2}{\cos\frac{v}{c}}=c_2\ , \tag{2.2.66}$$

gde su c_1 i c_2 konstante. Kako za jakobijan važi da je:

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(v,\beta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial v} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}\end{vmatrix}\neq 0\ , \tag{2.2.67}$$

to su integrali ψ_1 i ψ_2 nezavisni, pa je opšte rešenje parcijalne diferencijalne jednačine (2.2.63) oblika:

$$V\Big(u^2\cos\frac{v}{c},\frac{\beta^2}{\cos\frac{v}{c}}\Big)=0\ , \tag{2.2.68}$$

gde je V proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Nepoznatu funkciju $\gamma(u,v)$ dobijamo iz (2.2.60) i (2.2.62), i predstavlja rešenje jednačine:

$$\gamma_u = \frac{u}{2c^2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{c}}\beta + \frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_v \ ,$$

odnosno,

$$\gamma = \int \Big(\frac{u}{2c^2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{c}}\beta + \frac{u}{2c}\tan\frac{v}{c}\beta_v\Big)\,du + \varphi(v) \ , \tag{2.2.69}$$

gde je $\varphi(v)$ proizvoljna funkcija a β je dato u (2.2.68).

Ako, na primer, uzmemo da je $V(x,y) = xy - 1$ i $\varphi(v) = 0$, dobićemo:

$$\beta = \frac{1}{u}, \qquad u \neq 0 \ ,$$

$$\alpha = \frac{1}{2c}\tan\frac{v}{c} \ ,$$

$$\gamma = \frac{u}{2c^2\cos^2\frac{v}{c}} \ .$$

Iz jednačine (2.2.38) i

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y}_u du + \mathbf{y}_v dv = (dY_1, dY_2, dY_3) \ ,$$

integracijom se dobija:

$$\mathbf{y} = (Y_1, Y_2, Y_3) = \Big(\frac{u}{c}\tan\frac{v}{c}, \frac{1}{2}\ln(u^2|\cos\frac{v}{c}|), \frac{ku}{2c\cos\frac{v}{c}}(\sin^2\frac{v}{c}+1) + \frac{3ku}{2c}\cos\frac{v}{c}\Big),$$

uzevši da su odgovarajuće konstante koje se javljaju prilikom integracije jednake nuli.

Primenom (2.2.36), odredićemo polje infinitezimalnog savijanja. Kako važi (2.2.58), za Gaudijeve površi biće:

$$d\mathbf{r} = (du, dv, k\sin\frac{v}{c}du + \frac{ku}{c}\cos\frac{v}{c}dv) \ ,$$

pa je:

$$d\mathbf{z} = \mathbf{y}\times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{u}{c}\tan\frac{v}{c} & \frac{1}{2}\ln(u^2|\cos\frac{v}{c}|) & \frac{ku}{2c\cos\frac{v}{c}}(\sin^2\frac{v}{c}+1) + \frac{3ku}{2c}\cos\frac{v}{c} \\ du & dv & k\sin\frac{v}{c}du + \frac{ku}{c}\cos\frac{v}{c}dv \end{vmatrix} \ .$$

Polje infinitezimalnog savijanja Gaudijevih površi dobija se integracijom ove jednačine. Tako, za $u > 0$ i $v \in (0, c\pi/2)$, dobija se:

$$\mathbf{z} = \Big(ku\sin\frac{v}{c}\ln(u^2\cos\frac{v}{c}) - \frac{ku}{4}\ln\frac{1+\sin\frac{v}{c}}{1-\sin\frac{v}{c}} - \frac{5ku}{2}\sin\frac{v}{c} + c_1,$$

$$\frac{2ku^2}{c}\cos\frac{v}{c} + c_2, u\big(1 - \frac{1}{2}\ln(u^2\cos^3\frac{v}{c})\big) + c_3\Big),$$

gde su c_1, c_2, c_3 konstante.

2.3 Varijacija geometrijskih veličina pri infinitezimalnim savijanjima

Može se zaključiti da je varijacija koeficijenata prve kvadratne forme površi, kao i varijacija determinante prve kvadratne forme jednaka nuli pri infinitezimalnom savijanju površi (upoređivanjem jednačine (2.3.93) sa (2.2.45) i (2.2.46)). Zbog toga je varijacija geometrijskih veličina koje zavise od koeficijenata prve kvadratne forme površi, to jest, objekata unutrašnje geometrije površi, jednaka nuli pri infinitezimalnom savijanju. Na primer, Kristofelovi simboli, prva kvadratna forma, determinanata prve i druge kvadratne forme, dužina luka krive, uglovi između krivih na površi, površina oblasti na površi, Gausova i geodezijska krivina, ostaju stacionarni pri infinitezimalnom savijanju površi ([69], [71]).

Varijacijom geometrijskih veličina bavili su se mnogi matematičari, a mnogi je još uvek istražuju. Ova tema razmatrana je u radovima: [3], [4], [5], [6], [17], [69], [71], [74], [87], [88], [89], [91].

U ovom poglavlju izrazićemo varijaciju operatora oblika, normalne krivine, glavnih krivina, Gausove i srednje krivine i Vilmorove energije, usled infinitezimalnog savijanja površi. Na primeru Gaudijeve površi izračunaćemo varijaciju svih navedenih veličina usled infinitezimalnog savijanja te površi.

Neka je S regularna površ data parametrizacijom:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \ , \tag{2.3.70}$$

i polje infinitezimalnog savijanja:

$$\mathbf{z}(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v)). \tag{2.3.71}$$

Tada će jednačine (2.2.33) imati oblik:

$$\xi_u = -f_u\zeta_u \ , \qquad \xi_v + \eta_u = -f_v\zeta_u - f_u\zeta_v \ , \qquad \eta_v = -f_v\zeta_v \ ,$$

odakle dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$f_{uu}\zeta_{vv} - 2f_{uv}\zeta_{uv} + f_{vv}\zeta_{uu} = 0 \ . \tag{2.3.72}$$

Koristeći standardni račun diferencijalne geometrije [39], možemo dobiti koeficijente prve i druge kvadratne forme (kao u [17]) površi S_ϵ:

$$\begin{aligned} S_\epsilon : \tilde{\mathbf{r}}(u,v,\epsilon) &= \mathbf{r}(u,v) + \epsilon\mathbf{z}(u,v) = \\ &= (u + \epsilon\xi(u,v), v + \epsilon\eta(u,v), f(u,v) + \epsilon\zeta(u,v)) \ . \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

Dobija se da je:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{\mathbf{r}}_u \cdot \tilde{\mathbf{r}}_u = 1 + f_u^2 + \epsilon^2(\xi_u^2 + \eta_u^2 + \zeta_u^2) \ , \\ \tilde{F} &= \tilde{\mathbf{r}}_u \cdot \tilde{\mathbf{r}}_v = f_u f_v + \epsilon^2(\xi_u\xi_v + \eta_u\eta_v + \zeta_u\zeta_v) \ , \\ \tilde{G} &= \tilde{\mathbf{r}}_v \cdot \tilde{\mathbf{r}}_v = 1 + f_v^2 + \epsilon^2(\xi_v^2 + \eta_v^2 + \zeta_v^2) \ , \end{aligned} \tag{2.3.74}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{uu}, \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[f_{uu} + \epsilon\zeta_{uu}(1 + f_u^2 + f_v^2) + \epsilon^2 A_1 + \epsilon^3 A_2] \ , \\
\tilde{M} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{uv}, \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[f_{uv} + \epsilon\zeta_{uv}(1 + f_u^2 + f_v^2) + \epsilon^2 B_1 + \epsilon^3 B_2] \ , \\
\tilde{N} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[\tilde{\mathbf{r}}_{vv}, \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v] = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}[f_{vv} + \epsilon\zeta_{vv}(1 + f_u^2 + f_v^2) + \epsilon^2 C_1 + \epsilon^3 C_2] \ .
\end{aligned} \tag{2.3.75}$$

Funkcije A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2$, dobijamo u razvoju odgovarajućih determinanti a

$$\tilde{g} = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2 + \epsilon^2 \ldots + \epsilon^4 \ldots .$$

Iz jednakosti (2.3.73) dobija se:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{r}}_u &= (1 + \epsilon\xi_u, \epsilon\eta_u, f_u + \epsilon\zeta_u) \ , \\
\tilde{\mathbf{r}}_v &= (\epsilon\xi_v, 1 + \epsilon\eta_v, f_v + \epsilon\zeta_v) \ .
\end{aligned} \tag{2.3.76}$$

Varijacija ovih vektora biće u obliku:

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{r}_u &= (\xi_u, \eta_u, \zeta_u) = \mathbf{z}_u \ , \\
\delta\mathbf{r}_v &= (\xi_v, \eta_v, \zeta_v) = \mathbf{z}_v \ .
\end{aligned} \tag{2.3.77}$$

2.3.1 Varijacija operatora oblika pri infinitezimalnim savijanjima

Kako je operator oblika funkcija koeficijenata prve i druge kvadratne forme, (vidi (1.2.17), odnosno, (1.2.23)), koristeći (2.3.74) i (2.3.75), možemo izraziti njegovu varijaciju usled infinitezimalnog savijanja površi. Izrazićemo, najpre, koeficijenate $\tilde{a}_{ij}$ površi S_ϵ.

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= \frac{\tilde{M}\tilde{F} - \tilde{L}\tilde{G}}{\tilde{g}} \ , \\
\tilde{a}_{12} &= \frac{\tilde{L}\tilde{F} - \tilde{M}\tilde{E}}{\tilde{g}} \ , \\
\tilde{a}_{21} &= \frac{\tilde{N}\tilde{F} - \tilde{M}\tilde{G}}{\tilde{g}} \ , \\
\tilde{a}_{22} &= \frac{\tilde{M}\tilde{F} - \tilde{N}\tilde{E}}{\tilde{g}} \ .
\end{aligned} \tag{2.3.78}$$

Varijacija koeficijenata a_{ij}, koristeći:

$$\delta a_{ij} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\epsilon} \ , \tag{2.3.79}$$

biće u obliku:

$$\begin{aligned}
\delta a_{11} &= \frac{\zeta_{uv} f_u f_v - \zeta_{uu}(1+f_v^2)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ ,\\
\delta a_{12} &= \frac{\zeta_{uu} f_u f_v - \zeta_{uv}(1+f_u^2)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ ,\\
\delta a_{21} &= \frac{\zeta_{vv} f_u f_v - \zeta_{uv}(1+f_v^2)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ ,\\
\delta a_{22} &= \frac{\zeta_{uv} f_u f_v - \zeta_{vv}(1+f_u^2)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\ .
\end{aligned} \tag{2.3.80}$$

Primenjujući pravilo varijacije proizvoda (2.1.9) pod a), dobijamo varijaciju operatora oblika:

$$\begin{aligned}
\delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) =& \frac{1}{\sqrt{g}}\Big((\zeta_{uu}(1+f_v^2) - \zeta_{uv} f_u f_v)\mathbf{r}_u + (\zeta_{uv}(1+f_u^2) - \zeta_{uu} f_u f_v)\mathbf{r}_v\Big) +\\
&+ \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\Big((f_{uu}(1+f_v^2) - f_{uv} f_u f_v)\mathbf{z}_u + (f_{uv}(1+f_u^2) - f_{uu} f_u f_v)\mathbf{z}_v\Big),\\
\delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) =& \frac{1}{\sqrt{g}}\Big((\zeta_{uv}(1+f_v^2) - \zeta_{vv} f_u f_v)\mathbf{r}_u + (\zeta_{vv}(1+f_u^2) - \zeta_{uv} f_u f_v)\mathbf{r}_v\Big) +\\
&+ \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\Big((f_{uv}(1+f_v^2) - f_{vv} f_u f_v)\mathbf{z}_u + (f_{vv}(1+f_u^2) - f_{uv} f_u f_v)\mathbf{z}_v\Big),
\end{aligned} \tag{2.3.81}$$

gde je $g = 1 + f_u^2 + f_v^2$.

Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.1. *Varijacija operatora oblika površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom* (2.3.81). ■

Iz jednačine (2.3.81) direktno sledi posledica Teoreme 2.3.1:

Posledica 2.3.2. *Varijacija operatora oblika površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *biće jednaka nuli ako su drugi parcijalni izvodi funkcije f iz jednačine površi i treće koordinatne funkcije ζ njenog polja savijanja z jednaki nuli, odnosno, ako su ove funkcije linearne.*■

Primer 2.3.1. *Za hiperbolički paraboloid ova posledica ne važi u potpunosti. Funkcija ζ jeste linearna, ali funkcija f nije. Varijacija operatora oblika pri infinitezimalnim savijanjima hiperboličkog paraboloida nije jednaka nuli, ali ima jednostavan oblik. Za hiperbolički paraboloid:*

$$S : \mathbf{r}(u,v) = (u, v, uv),$$

u radu [72] je određeno polje infinitezimalnog savijanja ove površi:

$$\mathbf{z}(u,v) = (-uv, -uv, u+v).$$

Ako izračunamo parcijalne izvode prve i druge vrste funkcije f i polja savijanja $\mathbf{z}$, odnosno, njegove treće kooordinate ζ:

$$f_u = v, \qquad f_v = u,$$
$$f_{uu} = 0, \qquad f_{uv} = 1, \qquad f_{vv} = 0,$$
$$\zeta_u = 1, \qquad \zeta_v = 1,$$
$$\zeta_{uu} = 0, \qquad \zeta_{uv} = 0, \qquad \zeta_{vv} = 0,$$

tada će varijacija operatora oblika hiperboličkog paraboloida biti jednaka:

$$\begin{aligned} \delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) &= \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\Big(- uv\mathbf{z}_u + (1+v^2)\mathbf{z}_v\Big) , \\ \delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) &= \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\Big((1+u^2)\mathbf{z}_u - uv\mathbf{z}_v\Big) , \end{aligned} \tag{2.3.82}$$

gde je $g = 1 + u^2 + v^2$.

2.3.2 Varijacija normalne krivine pri infinitezimalnim savijanjima

Ako posmatramo normalnu krivinu u proizvoljnoj tački $p \in S$ u pravcu vektora (1.2.32):

$$(u(t))_s = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_s , \qquad t \in [0, 2\pi),$$

njena jednačina imaće oblik:

$$k_n(t) = L\cos^2 t + 2M \sin t \cos t + N \sin^2 t \ ,$$

(vidi (1.2.33)).

Kako bi odredili varijaciju normalne krivine pri infinitezimalnim savijanjima, najpre ćemo odrediti varijaciju koeficijenata druge kvadratne forme.

Lema 2.3.3. *Varijacija koeficijenata druge kvadratne forme data je sledećim izrazom:*

$$\delta L = \zeta_{uu}\sqrt{g}, \qquad \delta M = \zeta_{uv}\sqrt{g}, \qquad \delta N = \zeta_{vv}\sqrt{g}. \tag{2.3.83}$$

Dokaz. Koristeći da su koeficijenti druge kvadratne forme površi (2.3.73) dati izrazom (2.3.75), i da se varijacija veličina određuje po formuli (2.1.8), dolazi se do izraza (2.3.83). ■

Otuda je varijacija normalne krivine jednaka:

$$\delta k_n(t) = \sqrt{g}(\zeta_{uu}\cos^2 t + 2\zeta_{uv}\sin t\cos t + \zeta_{vv}\sin^2 t), \tag{2.3.84}$$

gde je $g = 1 + f_u^2 + f_v^2$.

Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.4. *Varijacija normalne krivine površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom* (2.3.84). ■

Iz jednačine (2.3.84), dobijamo direktnu posledicu Teoreme 2.3.4:

Posledica 2.3.5. *Varijacija normalne krivine površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *biće jednaka nuli ako je treća koordinata njenog polja savijanja* $\boldsymbol{z}$ *linearna funkcija.* ■

Primer 2.3.2. *Za hiperbolički paraboloid:*

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv),$$

izračunaćemo varijaciju normalne krivine. Kako ova površ ima polje infinitezimalnog savijanja ([72])*:*

$$\mathbf{z}(u, v) = (-uv, -uv, u + v),$$

parcijalni izvodi prve i druge vrste treće koordinate ζ *polja savijanja* $\mathbf{z}$ *biće jednaki:*

$$\zeta_u = 1, \qquad \zeta_v = 1,$$

$$\zeta_{uu} = 0, \qquad \zeta_{uv} = 0, \qquad \zeta_{vv} = 0.$$

Kako su parcijalni izvodi drugog reda treće koordinate ζ *polja savijanja* $\mathbf{z}(u, v)$ *jednaki nuli, to je varijacija normalne krivine hiperboličkog paraboloida jednaka nuli:*

$$\delta k_n(t) = 0.$$

2.3.3 Varijacija Gausove i srednje krivine pri infinitezimalnim savijanjima

Poznato je da je Gausova krivina stacionarna pri infinitezimalnom savijanju površi [69], [71]. Zato ćemo posmatrati varijaciju srednje krivine. Srednja krivina površi (2.3.73) biće u obliku:

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{E}\tilde{N} - 2\tilde{F}\tilde{M} + \tilde{G}\tilde{L}}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \ ,$$

pa je varijacija srednje krivine, data u radu [17], jednaka:

$$\delta H = \frac{(1 + f_u^2)\zeta_{vv} - 2f_u f_v \zeta_{uv} + (1 + f_v^2)\zeta_{uu}}{2\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \ . \tag{2.3.85}$$

Teorema 2.3.6. *Varijacija srednje krivine površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom* (2.3.85). ■

2.3.4 Varijacija glavnih krivina pri infinitezimalnim savijanjima

Koristeći da se glavne krivine mogu izraziti preko Gausove i srednje krivine, (jednačina (1.2.51)),

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \ ,$$

to se varijacija glavnih krivina može odrediti primenom sledeće leme, što je pokazano u radu [15]:

Lema 2.3.7. *Varijacija glavnih krivina usled infinitezimalnog savijanja površi, izražena preko Gausove i srednje krivine jednaka je:*

$$\delta k_{1,2} = \delta H \frac{\sqrt{H^2 - K} \pm H}{\sqrt{H^2 - K}} \ . \tag{2.3.86}$$

Dokaz. Kako je varijacija Gausove krivine jednaka nuli, koristeći (2.1.7) i pravila diferenciranja kvadratnog korena funkcije, dolazi se do izraza:

$$\delta k_{1,2} = \delta H \pm \frac{H \delta H}{\sqrt{H^2 - K}} \ .$$

Sređivanjem poslednjeg izraza dolazi se do oblika (2.3.86). ■

Ukoliko Gausovu i srednju krivinu izrazimo preko koeficijenata prve i druge kvadratne forme i primenimo varijaciju srednje krivine, dolazimo do varijacije glavnih krivina, to jest, važi sledeća teorema:

Teorema 2.3.8. *Varijacija glavnih krivina površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom:*

$$\delta k_{1,2} = \delta H \frac{\sqrt{\mathcal{A}} \pm \mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}}} \ , \tag{2.3.87}$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \Big(f_{uu}(1+f_v^2) - f_{vv}(1+f_u^2)\Big)^2 + 4\Big(f_{uv}(1+f_v^2) - f_{vv}f_uf_v\Big)\Big(f_{uv}(1+f_u^2) - f_{uu}f_uf_v\Big) \ , \\ \mathcal{B} &= f_{uu}(1+f_v^2) - 2f_{uv}f_uf_v + f_{vv}(1+f_u^2) \ , \end{aligned} \tag{2.3.88}$$

a δH je dato jednačinom (2.3.85).

Dokaz. Ako u jednačini (2.3.86) izrazimo Gausovu i srednju krivinu preko koeficijenata prve i druge kvadratne forme površi, dobija se da je:

$$\begin{aligned}\sqrt{H^2-K} &= \sqrt{\frac{(LG-NE)^2+4(MG-FN)(ME-FL)}{4(EG-F^2)^2}} = \\ &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\sqrt{(LG-NE)^2+4(MG-FN)(ME-FL)} \ .\end{aligned} \tag{2.3.89}$$

Ako zamenimo da je:

$$H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} \ ,$$

onda je, nakon sređivanja:

$$\frac{\sqrt{H^2-K}\pm H}{\sqrt{H^2-K}} = \frac{\sqrt{(LG-NE)^2+4(MG-FN)(ME-FL)}\pm(LG-2MF+NE)}{\sqrt{(LG-NE)^2+4(MG-FN)(ME-FL)}} \ . \tag{2.3.90}$$

Izražavajući koeficijente prve i druge kvadratne forme površi (2.3.70) i njenu varijaciju srednje krivine (2.3.85), dobija se izraz (2.3.87). ■

Iz izraza (2.3.87), dobijamo direktnu posledicu Teoreme 2.3.8:

Posledica 2.3.9. *Varijacija glavnih krivina površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73)*, biće jednaka nuli ako je varijacija srednje krivine površi jednaka nuli.* ■

2.3.5 Varijacija Vilmorove energije pri infinitezimalnim savijanjima

U radu [87] smo razmatrali varijaciju Vilmorove energije u tački površi i varijaciju Vilmorove energije površi usled infinitezimalnog savijanja površi.

Vilmorova energija u tački površi $p \in S$ definisana je jednačinom (1.2.53):

$$W(p) = H(p)^2 - K(p) \ ,$$

pa će varijacija Vilmorove energije u tački biti u obliku:

$$\delta W(p) = 2H(p)\delta H(p) \ , \tag{2.3.91}$$

odnosno, važi sledeća lema:

Lema 2.3.10. *Varijacija Vilmorove energije u tački površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom* (2.3.91)*, gde je* $H(p)$ *srednja krivina a* $\delta H(p)$ *njena varijacija.*

Dokaz. Na osnovu jednačine (1.2.53), obzirom da je varijacija Gausove krivine jednaka nuli, sledi da je:

$$\delta W(p) = \delta(H(p)^2 - K(p)) = \delta(H(p)^2) - \delta(K(p)) = 2H(p)\delta H(p) \ . \ \blacksquare$$

Izražavajući H i δH, dobija se da je varijacija Vilmorove energije u tački $p(u,v) \in S$:

$$\delta W(u,v) = \frac{\big((1+f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1+f_v^2)f_{uu}\big)\big((1+f_u^2)\zeta_{vv} - 2f_u f_v \zeta_{uv} + (1+f_v^2)\zeta_{uu}\big)}{2(1+f_u^2+f_v^2)} \ . \tag{2.3.92}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(u,v) = (1+f_u^2, -\sqrt{2}f_u f_v, 1+f_v^2), \tag{2.3.93}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(u,v) = (f_{vv}, \sqrt{2}f_{uv}, f_{uu}), \tag{2.3.94}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(u,v) = (\zeta_{vv}, \sqrt{2}\zeta_{uv}, \zeta_{uu}), \tag{2.3.95}$$

koristeći parcijalnu diferencijalnu jednačinu (2.3.72), dobijamo da je:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (f_{uu} + f_{vv})(\zeta_{uu} + \zeta_{vv}), \tag{2.3.96}$$

gde je $\cdot$ standardni skalarni proizvod u $\mathcal{R}^3$, $\|\mathbf{a}\| := (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{\frac{1}{2}}$. Takođe, lako se pokazuje da je:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1+g^2} \ , \tag{2.3.97}$$

gde je $g = 1 + f_u^2 + f_v^2$ determinanta prve kvadratne forme površi (2.3.70).

U tom slučaju važiće sledeće teoreme:

Teorema 2.3.11. *Varijacija Vilmorove energije u tački površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *data je jednačinom:*

$$\delta W(u,v) = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})}{2(\|\mathbf{a}\|^2 - 1)} \ , \tag{2.3.98}$$

gde su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{c}$ *definisani jednačinama (2.3.93), (2.3.94) i (2.3.95).* $\blacksquare$

Teorema 2.3.12. *Varijacija Vilmorove energije u tački površi* (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *biće jednaka nuli ako i samo ako važi da je:*

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(\mathbf{a},\mathbf{c}) \ , \tag{2.3.99}$$

gde su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{c}$ *definisani jednačinama* (2.3.93), (2.3.94) *i* (2.3.95).

Dokaz.

$$\begin{aligned}\delta W = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{c}\|\cos(\mathbf{a},\mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|(\cos(\mathbf{b},\mathbf{c}) - \sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(\mathbf{a},\mathbf{c})) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} - \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(\mathbf{a},\mathbf{c})) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(\mathbf{a},\mathbf{c}) \ ,\end{aligned} \tag{2.3.100}$$

jer je prema (2.3.97) $\|\mathbf{a}\|^2 \geq 2$. ■

Usled infinitezimalnog savijanja površi možemo posmatrati i vektore **a** i **b**, pa smo, takođe u radu [87] pokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.3.13. *Usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73) *površi* (2.3.70)*, za vektore* **a** *i* **b** *važi:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \delta(\|\mathbf{a}\|) = 0 \ , \\ &b) \quad \delta(\|\mathbf{b}\|^2) = 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \ , \\ &c) \quad \delta(\|\mathbf{b}\|) = \|\mathbf{c}\|\cos(\mathbf{b},\mathbf{c}) \ , \end{aligned} \tag{2.3.101}$$

gde su **a**, **b** *i* **c** *definisani jednačinama* (2.3.93), (2.3.94) *i* (2.3.95). ■

Napomena 2.3.1. *Norma vektora* **b** *određuje, takozvanu energiju deformacije tanke elastične ploče, i data je u obliku:*

$$\varepsilon = \|\mathbf{b}\|^2 = f_{uu}^2 + 2f_{uv}^2 + f_{vv}^2 \ .$$

Očigledno, prema (2.3.96) *i* (2.3.101)*, važi da je:*

$$\delta\varepsilon = 2(f_{uu} + f_{vv})(\zeta_{uu} + \zeta_{vv}) \ ,$$

površi (2.3.70) *usled infinitezimalnog savijanja* (2.3.73).

Ako posmatramo Vilmorovu energiju površi, definisanu jednačinom (1.2.54), varijacija Vilmorove energije površi (2.3.70) usled infinitezimalnog savijanja (2.3.73) data je u istom radu [87], odnosno, dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.3.14. *Za svaku kompaktnu, orijentisanu, put-povezanu, glatku površ S u $\mathcal{R}^3$ i njeno polje infinitezimalnog savijanja z, varijacija Vilmorove energije površi S je jednaka:*

$$\delta W(S) = H(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_{\partial S} \mathbf{m}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \ , \tag{2.3.102}$$

gde je $H(\boldsymbol{\xi})$ srednja krivina u proizvoljnoj tački $\boldsymbol{\xi} \in S$, $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ vektor definisan izrazom:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}'(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) \ , \tag{2.3.103}$$

a $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ jedinični vektor normale površi S. ■

Napomena 2.3.2. *Vilmorova energija orijentisane minimalne površi S usled infinitezimalnog savijanja je stacionarna.*

Iz Teoreme 2.3.14 direktno sledi:

Posledica 2.3.15. *Za svaku kompaktnu, orijentisanu, put-povezanu, bez granica, glatku površ S u $\mathcal{R}^3$ i njeno polje infinitezimalnog savijanja z, varijacija Vilmorove energije površi S jednaka je nuli.* ■

Posledica 2.3.16. *Svaka elastična, kompaktna, orijentisana, put-povezana, bez granica, glatka površ S u $\mathcal{R}^3$ čuva svoju Vilmorovu energiju usled savijanja.* ■

2.4 Varijacija krivina i funkcija krivina Gaudijeve površi

U ovom poglavlju posmatraćemo varijacije operatora oblika i gore navedenih krivina i funkcija krivina Gaudijeve površi, date jednačinom (1.4.62), u slučaju kada su konstante $a = k = 1$.

1. ***Varijacija operatora oblika pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$)***

   U radu [93] za Gaudijevu površ datu jednačinom (1.4.62) izračunata je varijacija operatora oblika usled infinitezimalnog savijanja ove površi. Dakle, za površ datu jednačinom:

$$Gaudi(u, v) = (u, v, u \sin v) \ ,$$

   može se pokazati sledeća lema:

   Lema 2.4.1. *Varijacija operatora oblika pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$) data je izrazom:*

$$\begin{aligned}
\delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_u) =& \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\ln 10}\Big((-\frac{1}{u} - \frac{u}{2}(2+\sin^2 v))\mathbf{r}_u + \frac{\tan v}{2}(6-\cos^2 v)\mathbf{r}_v\Big) + \\
&+ \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\cos v\Big(- u \sin v \cos v \ \mathbf{z}_u + (1+\sin^2 v) \ \mathbf{z}_v\Big) \ , \\
\delta\underline{\mathcal{S}}(\mathbf{r}_v) =& \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{3}{2\ln 10}\Big(\tan v(1-u^2\sin^2 v)\mathbf{r}_u + \frac{u}{\cos^2 v}(1+\sin^4 v)\mathbf{r}_v\Big) + \\
&+ \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\Big(\cos v(1+u^2) \ \mathbf{z}_u - 2u\sin v \ \mathbf{z}_v\Big) \ ,
\end{aligned} \tag{2.4.104}$$

   gde je $g = 1 + \sin^2 v + u^2 \cos^2 v$.

Dokaz. Za Gaudijevu površ (1.4.62) važi da je:

$$f_u = \sin v, \qquad f_v = u\cos v,$$

$$f_{uu} = 0, \qquad f_{uv} = \cos v, \qquad f_{vv} = -u\sin v.$$

U radu [91] za Gaudijevu površ odredili smo polje infinitezimalnog savijanja,

$$\mathbf{z} = \Big(ku\sin\frac{v}{a}\log(u^2\cos\frac{v}{a}) - \frac{ku}{4}\log\frac{1+\sin\frac{v}{a}}{1-\sin\frac{v}{a}} - \frac{5ku}{2}\sin\frac{v}{a} + c_1,$$

$$\frac{2ku^2}{a}\cos\frac{v}{a} + c_2, u\big(1 - \frac{1}{2}\log(u^2\cos^3\frac{v}{a})\big) + c_3\Big),$$

gde je $u > 0$ i $v \in (0, a\pi/2)$, a c_1, c_2, c_3 su konstante.

U slučaju $a = k = 1$ polje savijanja imaće oblik:

$$\mathbf{z} = \Big(u\sin v\log(u^2\cos v) - \frac{u}{4}\log\frac{1+\sin v}{1-\sin v} - \frac{5u}{2}\sin v + c_1,$$

$$2u^2\cos v + c_2,\ u\big(1 - \frac{1}{2}\log(u^2\cos^3 v)\big) + c_3\Big).$$

Tada je:

$$\zeta_u = 1 - \frac{1}{2}\log(u^2\cos^3 v) - \frac{1}{\ln 10}\ , \qquad \zeta_v = \frac{3}{2\ln 10}u\tan v\ ,$$

$$\zeta_{uu} = -\frac{1}{u\ln 10}\ , \qquad \zeta_{uv} = \frac{3}{2\ln 10}\tan v\ , \qquad \zeta_{vv} = \frac{3}{2\ln 10}\frac{u}{\cos^2 v}\ .$$

Koristeći poslednju jednakost i (2.3.81) dobijamo varijaciju operatora oblika Gaudijeve površi (1.4.62) usled infinitezimalnog savijanja ove površi (2.4.104). ■

2. *Varijacija normalne krivine pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$)*

U radu [95] izračunali smo varijaciju normalne krivine Gaudijeve površi (1.4.62). Pokazano je da važi:

Lema 2.4.2. *Varijacija normalne krivine pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$) data je izrazom:*

$$\delta k_n(t) = \frac{\sqrt{g}}{\ln 10}(-\frac{1}{u}\cos^2 t + 3\tan v\sin t\cos t + \frac{3}{2}\frac{u}{\cos^2 v}\sin^2 t)\ , \tag{2.4.105}$$

gde je $g = 1 + \sin^2 v + u^2\cos^2 v$.

Dokaz. Zamenom vrednosti:

$$\zeta_{uu} = -\frac{1}{u\ln 10}\,, \qquad \zeta_{uv} = \frac{3}{2\ln 10}\tan v\,, \qquad \zeta_{vv} = \frac{3}{2\ln 10}\frac{u}{\cos^2 v}\,,$$

u izraz (2.3.84), dobija se varijacija normalne krivine Gaudijeve površi ($a = k = 1$), date jednačinom (2.4.105). ■

3. ***Varijacija Gausove i srednje krivine pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi*** *($a = k = 1$)*

Kako je varijacija Gausove krivine jednaka nuli, izračunaćemo varijaciju srednje krivine Gaudijeve površi (1.4.62). Koristeći jednačinu (2.3.85) varijacije srednje krivine:

$$\delta H = \frac{(1+f_u^2)\zeta_{vv} - 2f_u f_v \zeta_{uv} + (1+f_v^2)\zeta_{uu}}{2\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\,,$$

zamenom vrednosti parcijalnih izvoda dokazuje se sledeća lema:

Lema 2.4.3. *Varijacija srednje krivine pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$) je oblika:*

$$\delta H = \frac{3u(u+\sin^2 v) + 2\cos^2 v\Big(u^2(2\cos^2 v - 3) - 1\Big)}{4\ln 10\; u\cos^2 v\sqrt{1+\sin^2 v + u^2\cos^2 v}}\,. \;■ \tag{2.4.106}$$

4. ***Varijacija glavnih krivina pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi*** *($a = k = 1$)*

Koristeći Teoremu 2.3.8, kao u radu [95], pokazaćemo da važi sledeća lema:

Lema 2.4.4. *Varijacija glavnih krivina pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi ($a = k = 1$) data je jednačinom:*

$$\delta k_{1,2} = \delta H\frac{\sqrt{(2-\cos^2 v)\Big(2u^2+\cos^2 v(2u^2+u^2\cos^2 v+4)\Big)} \mp u\sin v(\cos^2 v+2)}{\sqrt{(2-\cos^2 v)\Big(2u^2+\cos^2 v(2u^2+u^2\cos^2 v+4)\Big)}}\,, \tag{2.4.107}$$

gde je δH varijacija srednje krivine Gaudijeve površi data jednačinom (2.4.106).

Dokaz. Zamenom vrednosti:

$$f_u = \sin v \ , \qquad f_v = u \cos v \ ,$$

$$f_{uu} = 0 \ , \qquad f_{uv} = \cos v \ , \qquad f_{vv} = -u \sin v \ ,$$

i

$$\zeta_{uu} = -\frac{1}{u \ln 10} \ , \qquad \zeta_{uv} = \frac{3}{2 \ln 10} \tan v \ , \qquad \zeta_{vv} = \frac{3}{2 \ln 10} \frac{u}{\cos^2 v} \ ,$$

u jednačinu (2.3.87), dobija se izraz (2.4.107). ■

5. ***Varijacija Vilmorove energije u tački površi pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi*** *(*$a = k = 1$*)*

Koristeći jednačinu (2.3.91) varijacije Vilmorove energije u tački površi:

$$\delta W(p) = 2H(p)\delta H(p) \ ,$$

zamenom srednje krivine Gaudijeve površi:

$$H(p) = -\frac{u \sin v (2 + \cos^2 v)}{2(1 + u^2 \cos^2 v + \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

i varijacije srednje krivine Gaudijeve površi date jednačinom (2.4.106), dokazuje se sledeća lema:

Lema 2.4.5. *Varijacija Vilmorove energije u tački pri infinitezimalnim savijanjima Gaudijeve površi (*$a = k = 1$*) data je jednačinom:*

$$\delta W = \frac{-u \sin v (2 + \cos^2 v)\Big(3u(u + \sin^2 v) + 2\cos^2 v\Big(u^2(2\cos^2 v - 3) - 1\Big)\Big)}{4 \ln 10 \ u \cos^2 v \Big(1 + \sin^2 v + u^2 \cos^2 v\Big)^2} \ . \ ■ \qquad (2.4.108)$$

Glava 3

Pravolinijske površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta

Pravolinijske površi predstavljaju važnu klasu površi koje sadrže prave linije. Ove prave linije istovremeno su asimptotske krive. Pravolinijska površ je površ koja nastaje pomeranjem prave po nekoj krivoj. Ova vrsta površi, a posebno konoidne površi, se jako često koriste u građevinarstvu i arhitekturi. Jednostavna proizvodnja i veoma bogat spektar oblika, glavni su razlog primena ovih vrsta površi u krovnim i drugim konstrukcijama.

U ovom poglavlju analiziraćemo pravolinijske površi sa geometrijskog i konstruktivnog aspekta, istaći njihove prednosti i primene u tehnici i dati njihovu vizuelizaciju koristeći paket *Mathematica*. Posebno ćemo posmatrati konoidne površi, i to Gaudijevu površ koja se koristi kao važni element u arhitekturi i krovnim konstrukcijama. Uključujući estetiku, statiku, obim i samu tehnologiju proizvodnje, istaćićemo i neke karakteristike Gaudijevih površi uz pomoć matematičke analize.

Kao podklasu pravolinijski površi, posmatraćemo i ravne pravolinijske površi. To su površi nulte Gausove krivine, poznate kao razvojne površi. Razvojne površi se mogu razviti u ravan bez ikakvih deformacija, pa zbog toga imaju veliku primenu u inženjerstvu, proizvodnji, arhitekturi, pa čak i u modernoj umetnosti.

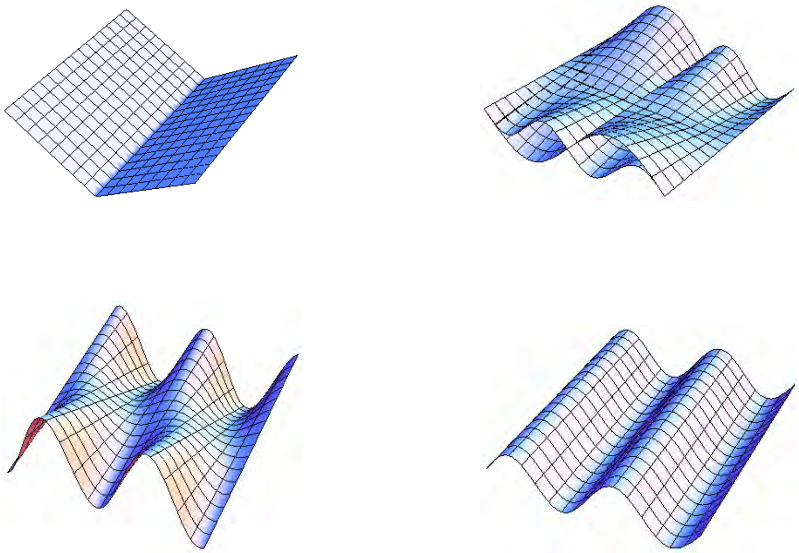
3.1 Geometrijske karakteristike pravolinijskih površi

Definicija i osnovne karakteristike pravonijskih površi dati su Poglavlju 1.3.1. Ove površi i konoidi bili su predmet istraživanja velikog broja radova i to sa različitih tačaka gledišta [30], [72], [75], [76], [80], [84].

Koristeći definiciju pravolinijskih površi (1.3.59):

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

uz pomoć paketa *Mathematica* možemo za različito zadate krive $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ dobiti različite pravolinijske površi (Slika 3.1).



Slika 3.1: Pravolinijske površi za $\alpha(u) = Abs[u]$, $\gamma(u) = const.$ i $\alpha(u) = eight[u]$, $\gamma(u) = eight[u]$ (prvi red), $\alpha(u) = \sin u$, $\gamma(u) = \cos u$, i $\alpha(u) = \sin u$, $\gamma(u) = const.$ (drugi red)

Takođe možemo izračunati parcijalne izvode prvog i drugog reda, potrebne za izračunavanje koeficijenata prve i druge kvadratne forme. Najpre važi:

$$r_u = \alpha'(u) + v\gamma'(u), \qquad r_v = \gamma(u),$$

$$r_{uu} = \alpha''(u) + v\gamma''(u), \qquad r_{uv} = \gamma'(u), \qquad r_{vv} = 0.$$

U zavisnosti od različito zadatih prostornih krivih,

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)),$$

$$\gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \gamma_3(u)),$$

dobijaju se različite vrednosti koeficijenata prve i druge kvadratne forme.

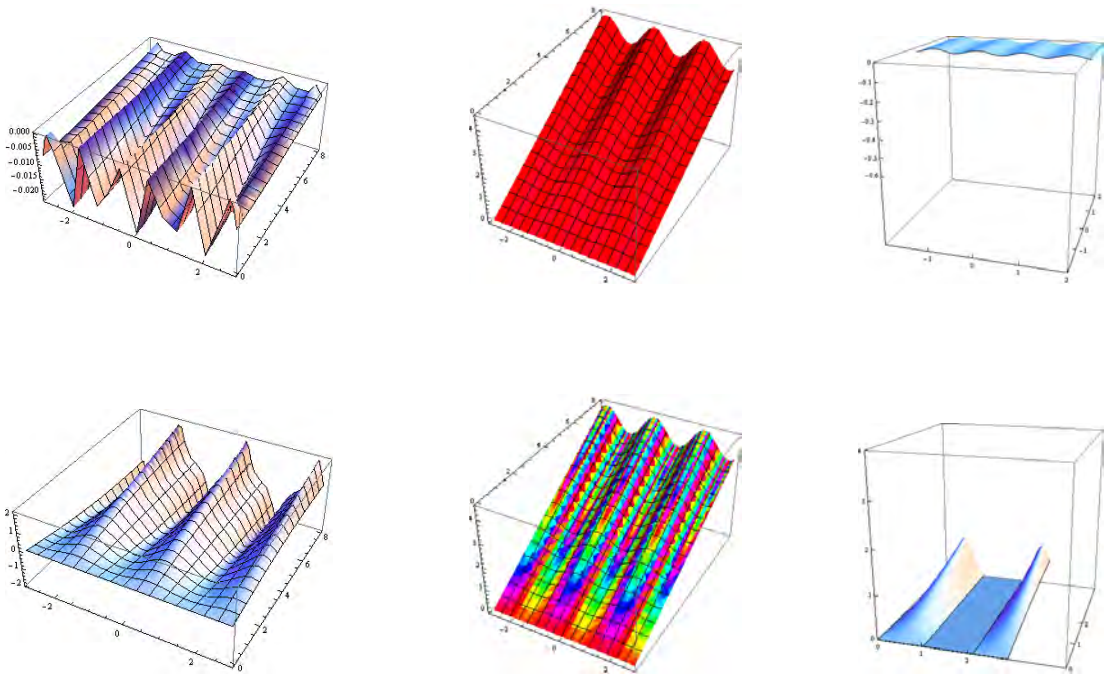
Definicija 3.1.1. *Pravolinijska površ naziva se* ***konoid*** *ako se može generisati pomerajući pravu liniju paralelno nekoj ravni, koja pri tom pomeranju seče neku fiksiranu pravu - osu konoida, i fiksiranu baznu krivu $\alpha(u)$.*

Neki primeri konoidnih površi pomenuti su u Poglavlju 1.3.1, a neke ćemo i ovde pomenuti.

Primer 3.1.1. *Konoidna površ sa sinusoidom kao bazičnom krivom ima jednačinu:*

$$\mathbf{r}(u,v) = v(\overrightarrow{i}\cos u + \overrightarrow{j}\sin u) + f(u)\overrightarrow{q}\ ,$$

gde je $\overrightarrow{q}$ *vektor ose konoida. U paketu Mathematica je vizuelno prikazana ova površ preko Gausove i srednje krivine (Slika 3.2).*



Slika 3.2: Vizualizacija Gausove krivine (prvi red) i srednje krivine (drugi red), konoida sa sinusoidom kao bazičnom krivom

Primer 3.1.2. *Desni konoid (Slika 3.3) je konoid čija je osa upravna na ravan paralelnosti i samim tim na pravce ove pravolinijske površi. Ako uzmemo* XY*-ravan kao ravan paralelnosti, a* Z*-osu kao osu konoida, tada je parametarska jednačina desnog konoida:*

$$\mathbf{r}(u,v) = v(\overrightarrow{i}\cos u + \overrightarrow{j}\sin u) + f(u)\overrightarrow{k}\ .$$

U radu [82] razmatrali smo neke geometrijske karakteristike desnog konoida. Krive $v =$ *const. predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje imaju jednako rastojanje* v *u odnosu na*

$Z-$osu, a u slučaju $u = const.$ dobijamo prave linije. Koeficijenti prve kvadratne forme desnog konoida jednaki su:

$$E = v^2 + (f')^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$

a koeficijenti druge kvadratne forme:

$$L = \frac{-vf''}{\sqrt{v^2 + (f')^2}}\ , \qquad M = \frac{f'}{\sqrt{v^2 + (f')^2}}\ , \qquad N = 0\ .$$

Prva kvadratna forma ima oblik:

$$ds^2 = (v^2 + (f')^2)du^2 + dv^2\ .$$

Gausova krivina je svuda nepozitivna:

$$K = -\frac{(f')^2}{(v^2 + (f')^2)^2}\ ,$$

a srednja krivina jednaka je:

$$H = -\frac{vf''}{2(v^2 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

i vizuelno su prikazane (Slika 3.3).

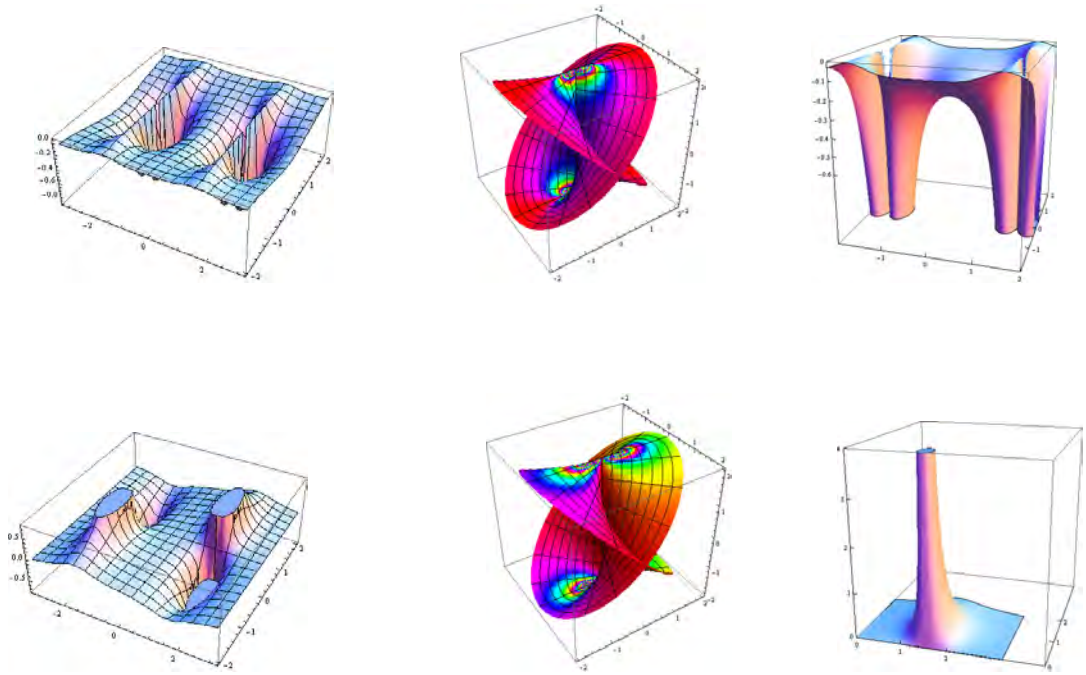
Sve prave linije na konoidnim površima su asimptotske linije. Asimptotske krive na površi su krive čiji je tangentni vektor uvek u pravcu u kojem je normalna krivina jednaka nuli.

3.2 Primena pravolinijskih površi

Pravolinijske površi imaju veliku ulogu u prostornoj geometriji, a u građevinarstvu široku primenu. O njihovoj primeni govorilo se u radovima: [72], [75], [76], [80], [82], [83], [84], [91], [100]. Vezano za građevinarstvo, pominju se u radovima [13] i [63].

Konoidne površi, kao podvrsta pravolinijskih površi, veoma su česte u gradjevinskoj tehnici, pogotovo kao smele krovne konstrukcije. Konoidni krov predstavlja površ sa dvostrukom krivinom. Zbog svog vizuelnog efekta, kao i lakoće izrade i mogućnosti korišćenja netradicionalnih materijala, konoidni krov je veoma popularan u modernom dizajnu.

Konoidne ljuske su se prvi put pojavile u Francuskoj, naročito rotacione i cilindrične školjke. Uglavnom su se primenjivali tzv. "*sawtooth roofs*" ili naborani krovovi, za pokrivanje industrijskih hala. Ovi krovovi se formiraju povezivanjem istih elemenata na različite načine (Slika 3.4). Ovaj tip krovova pruža veliku količinu dnevne svetlosti koja prolazi kroz vertikalne površine stakala. U dizajnu ovih krovova koriste se cele konoidne površi ili samo delovi ovih površi.



Slika 3.3: Vizualizacija Gausove krivine (prvi red) i srednje krivine (drugi red), desnog konoida

Slika 3.4: Naborani ("Sawtooth") krovovi

U statičkom smislu, ovi krovovi imaju prednost, ali su nedostaci neravnomerno osvetljenje radnih površina.

Pored toga što predstavljaju elemente krovnih konstrukcija, konoidne površi su i sastavni deo moderne arhitekture. Iz estetskih razloga, često se koriste kao fasade. "Bureau Pei Cobb Freed Partners" su koristili ove površi u projektovanju *Mayerson Symphony* centra u Dalasu (1989.), [27], i zgrade Sudnice *Courthouse* u Bostonu (1998.), [44], a jedan od primera je dizajn fasade zgrade Opštine *Shiki Community Hall* u Kumamotu u Japanu (2002.), [9].

Ipak, najčešće primene konoidnih površi u građevinarstvu odnose se na potporne zidove, visoke zidove, rezervoare za vodu i skladišta goriva. Konoidne ljuske su pogodne kod zidova koji moraju da preuzmu pritisak pojedinih materijala. Njihova prednost se ogleda u tome što se krutost ljuske povećava sa pritiskom materijala. Zbog svog oblika, konoidna ljuska deluje kao membrana i samim tim omogućava proizvodnju montažnih ljuski debljine samo 0,03m.

U poslednje vreme, projektovanje ljuski se vrši metodom konačnih elemenata, što omogućava proračun tankozidnih prostornih struktura bilo kog oblika. Realizacija konoidnih ljuski je relativo jednostavna, obzirom da svi elementi mogu biti postavljeni u pravcu pravih linija. Tako, primena kompozitnih materijala dovodi do smanjenja težine i poboljšanja performansi.

Zbog svog vizuelnog efekta, lakoće izrade i mogućnosti korišćenja nekonvecionalnih materijala, konoidne površi predstavljaju moderan dizajn i sve se više koriste u savremenoj arhitekturi. Deo vizuelnog efekta sledi iz veoma tankog profila u odnosu na veličinu.

3.2.1 Primenjene Gaudijeve površi

Sinusoidni konoid, u literaturi poznat kao Gaudijeva površ [25], data je jednačinom (1.3.61), i analizirana u Poglavlju 1.3.2. Ova površ je izuzetan element krovnih konstrukcija i kao takva je korišćena, najpre od strane Gaudija (otuda i naziv Gaudijeva površ), kao krov škole "Escoles de Gaudi" koju je on dizajnirao.

Gaudi je inspiraciju nalazio u mnogim izvorima; najpre u prirodi, a zatim u filozofiji, umetnosti, književnosti, i naravno, u matematici. Njegovi prirodom inspirisani modeli prožimaju se kroz čitav njegov rad i jednako su i funkcionalni i dekorativni ([1], [45]).

Krov "Escoles de Gaudi" je tanak (Slika 3.5), ali njegov specijalni oblik mu daje stabilnost i predstavlja skoro razvojnu površ. Princip konstrukcije ovog krova bio je: *Izabrati srednju liniju i rotirati prave koje je pri tom seku pod pravim uglom.* Obzirom da je površ sastavljena od pravih linija, moguće je bilo izgraditi je od cigli. Takođe, ovaj krov ne zahteva potporne zidove, pa su se dva pregradna zida mogla pomerati i menjati dimenzije učionica.

Postoji mnogo razloga što Gaudijev rad treba posmatrati nezavisno od doba modernizma kome je on pripadao, obzirom da je njegova genijalnost daleko iznad stilskih ukrasa i trendova. Jedan od razloga zbog čega se Gaudi izdvaja je svakako sinteza forme i funkcije, njegova težnja da projektuje oblike koji ne predstavljaju samo stilski hir koji prati aktuelne trendove, već da budu u funkciji zbog koje su i zamišljeni. Poštovao je najbitnije pravilo u arhitekturi, da je najbitnija mehanička ili strukturna funkcija, odnosno, da je osnovni princip da objekat treba

da stoji a ne da pada.

"Escoles de Gaudi" su škole sagrađene na zemljištu hrama "La Sagrada Familia" u Barseloni u Španiji, za decu radnika hrama. Trebalo je da budu privremena građevina, ne previše skupa, obzirom da nije imao dovoljno sredstava ni za sam hram. O nedovoljno sredstava govore i resursi koji su mu za izgradnju škola bili na raspolaganju: ravne cigle, keramičke pločice i drvene grede, a na završnici nedovršeno cementiranje, krečenje svih zidova, keramika na fasadi i nadstrešnica. Uprkos svemu, proizilazi fascinantna građevina sa oscilujućom fasadom i talasastim krovom. Najbitnije u svemu tome je što Gaudijev cilj nije bio da ostavi lični pečat, već se njegov genijalan pristup ogleda u želji da izgradi stabilnu strukturu sa minimalnim materijalom.

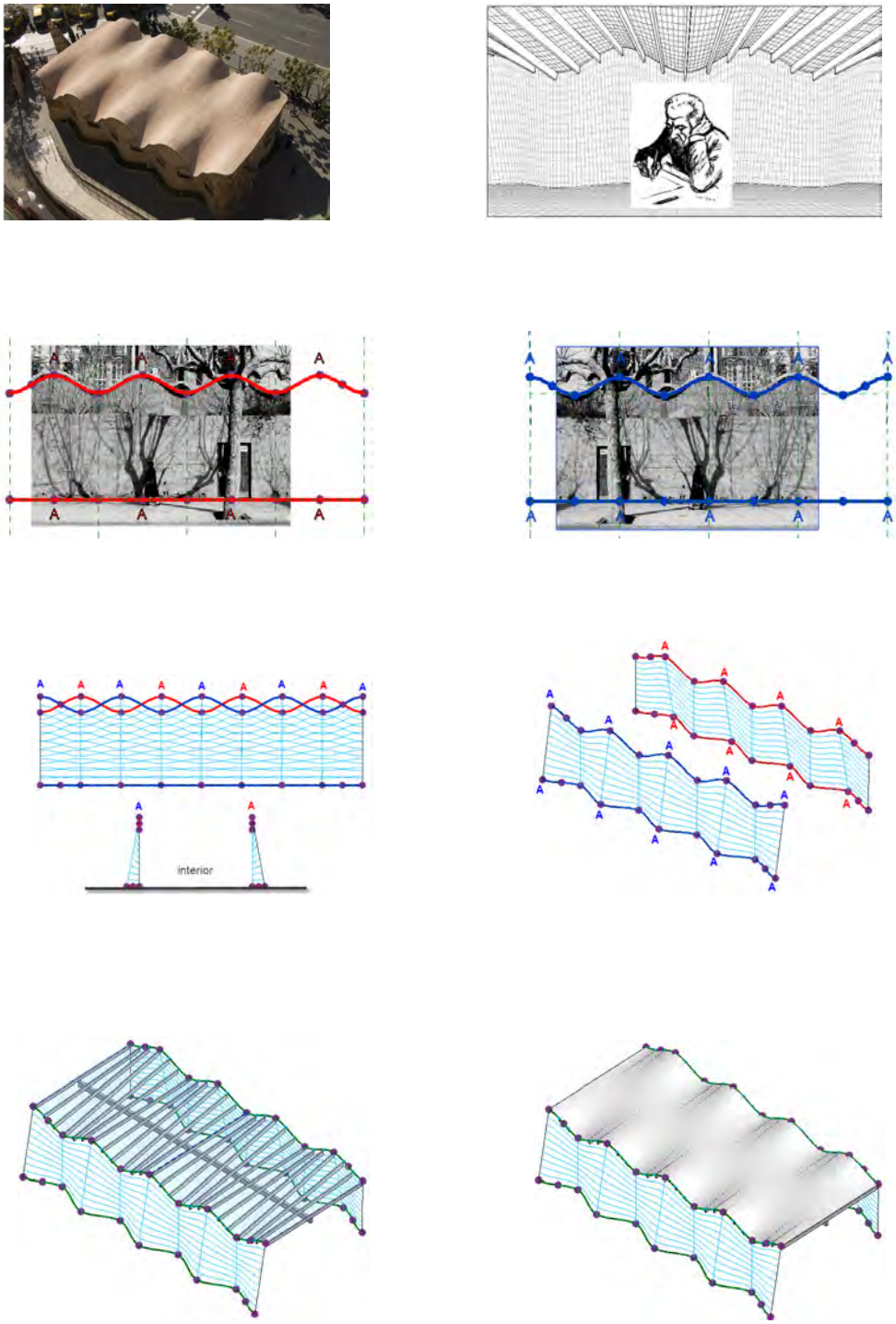
Zidovi "Escoles de Gaudi" su samo 4cm debljine, a dostižu visinu do 5,6 m. Obzirom na dimenzije bila bi jako nestabilna da nema talasaste strukture koja joj daje snagu protiv vetra. Nestabilnost se može proveriti sa tankim komadom kartona; ako bi hteli da on stoji uspravno na stolu, morali bi da ga savijemo ili mu damo neki oblik. Gaudi je upravo to uradio sa talasastom strukturom.

Izgradnja talasaste strukture trebala bi biti veoma komplikovana, ali nam Gaudi i ovde daje lekciju, ovog puta iz geometrije. Površi od kojih je sastavljena fasada su konoidne površi, dakle, sastoje se od niza pravih linija (generatrisa) koje su paralelne nekoj utvrđenoj ravni, a istovremeno seku dve linije (direktrise), od kojih je jedna kriva a druga prava. U ovom slučaju kriva je sinusoida, a kako bi Gaudi imao vođicu, koristio je kabl ili metalnu šipku da premeri rastojanje između najviše i najniže tačke krova.

Vrhunac lekcije iz geometrije odnosi se na krov "Escoles de Gaudi", gde je ponovo korišćena konoidna površ kako bi se izbegli slojeviti krovovi koji su mnogo skuplji. Kako bi se smanjila fasada u gornjim tačkama (u sinusoidnom obliku), drvene grede su postavljene da povezuju najvišu sa najnižom tačkom, kao da se odmaraju na vrhu zidova, i svaka sledeća ima drugačiji nagib. Na kraju, pokrivanjem keramičkim pločicama dobija se talasasta konoidna površ. Kako su drvene grede predugačke, obzirom da spajaju suprotne strane, Gaudi je postavio centralnu gredu kao potporu. Ova horizontalna glavna greda služi kao prava direktrisa iskrivljene površi. Zahvaljujući genijalnosti u geometriji i mehanici, Gaudi je mogao da izabere keramičke cigle, najjeftinije i najdostupnije, da ih postavi oko ivica, da učini zidove tanjim i samim tim smanji upotrebu cigli. Tako je ovo primer gde geometrija omogućava optimalnu efikasnost strukture.

Gaudijev osnovni princip je bio da u primeni površi u arhitekturi, geometrija ne komplikuje, već pojednostavljuje konstrukciju. On je, verovatno, bio prvi koji je uveo pravolinijske površi u svoja projektantska ostvarenja. Pored ovog, "geometrijskog principa", vodio se i principom prirode, obzirom da je priroda uvek u potrazi za funkcionalnim rešenjima nad neumoljivim zakonom gravitacije. Znajući da prirodne strukture milionima godina obavljaju perfektne zadatke, težio je da ih ugradi u svoje konstrukcije. Tako je, na primer, konoidan oblik, čest oblik lišća na drveću, koristio, ali ne da bi kopirao prirodu, već je uključio i razumeo njenu geometriju i principe.

Primenu Gaudijevih površi možemo videti i na drugim objektima. Jedan od primera izuzetne građevine je i privatna rezidencija arhitekte Džulsa Gregorija, (Jules Gregory, američki



Slika 3.5: [46] Gaudijeva površ na "Escoles de Gaudi"

arhitekta), koja je sagrađena 1960. godine u blizini Njujorka i od strane "Architectural Record Magazine" proglašena je jednom od najlepših deset kuća u Americi, [47]. Najistaknutija karakteristika ove kuće je talasasti konodni krov (isti kao kod "Escoles de Gaudi"), koji kao da lebdi u sred šume. Staklene ploče su iskorišćene da premoste preostalu razdaljinu do krova, ali imaju i funkciju zidova, a samim tim i prozora.

Takođe, primenu Gaudijeve površi, odnosno, Gaudijevog krova, možemo videti i na vinariji Santijaga Kalatrave (Santiago Calatrava, rođ. 1951. godine, španski arhitekta, skulptor i građevinski inženjer), "La Rioja, Bodegas Ysios", sagrađenoj 2001. godine u Lagardiji u Španiji ([7]).

Zgrada je zamišljena kao element kompletno uklopljen u okolinu, ali u isto vreme predstavlja specifičnu građevinu. Vlasnici "The Bodegas and Bebidas group" želeli su zgradu koja će biti ikona prestižnog novog vina "la Rioja Alavesa", a da u isto vreme zadovoljava rigorozne uslove za skladištenje i prodaju vina. Sinusoidalni oblik je Kalatravi poslužio da projektuje zgradu koja postiže efekat "statičkog pokreta" i čije se granice prožimaju kroz okolne vinograde.

Zbog izuzetnih performansi i prelepog izgleda, konoidni krovovi bili su predmet eksperimentisanja mnogih inženjera i arhitekata kroz vekove. Može se videti i na privatnim kućama i na brojnim javnim zgradama.

3.3 Razvojne površi i njihove primene

Specijalna vrsta površi koje se mogu razviti u ravan bez deformisanja, poznate su kao razvojne površi. Razvojne površi su pravolinijske površi nulte Gausove krivine, pa se mogu transformisati u ravan a da pri tom dužina proizvoljne krive na površi ostaje ista. Tačnije, ove površi dobijene spajanjem gotovo neelastičnih materijala mogu se razviti u ravan bez istezanja i cepanja. Upravo je to razlog njihove široke primene u mnogim sferama inženjerstva i proizvodnje. O ovim površima je bilo reči u Poglavlju 1.3.3, i radovima [33] i [80].

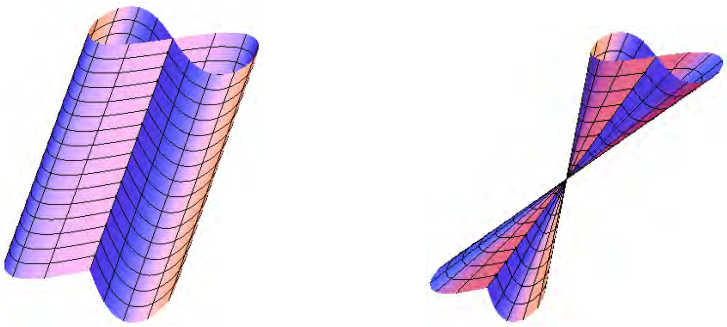
Koristeći paket *Mathematica* mogu se crtati cilindar i konus nad raznim krivama u $\mathcal{R}^3$. Među tim krivama mogu se posmatrati i ravne krive, ali je potrebno koristiti funkciju "*inscurve*", koja ravnu krivu prevodi u prostornu krivu (Slika 3.6).

$$inscurve[n_{_}, a_{_}, \alpha_{_}][t_{_}] := Insert[\alpha[t], a, n] \ ,$$

$$cylinder[\{q_{1_}, q_{2_}, q_{3_}\}, \beta_{_}][u_{_}, v_{_}] := \beta[u] + v\{q_1, q_2, q_3\} \ ,$$

$$cone[\{p_{1_}, p_{2_}, p_{3_}\}, \gamma_{_}][u_{_}, v_{_}] := \{p_1, p_2, p_3\} + v\gamma[u] \ .$$

Kako su razvojne površi posebnog izgleda i mogu biti lake izrade, to se one sve više koriste u arhitekturi. Mogu biti izgrađene od ravnih materijala a da ipak predstavljaju perfektne iskrivljene oblike. Zahvaljujući njihovim osobinama, refleksija na razvojnim površima izgleda glatko i prirodno", na primer, [34].



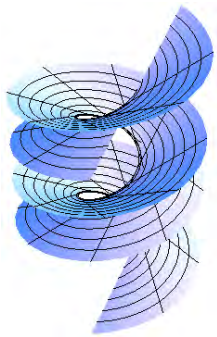
Slika 3.6: Cilindar i konus nad krivom "osmicom"

Tangentne developable se mogu definisati kao tangentne površi prostorne krive. Kriva se tada naziva ivica regresije tangentne developable. U [30] je pokazana sledeća Lema:

Lema 3.3.1. *Neka je $\beta : (c, d) \to \mathcal{R}^3$ kriva sa jediničnim tangentnim vektorom. Tada koeficijenti prve kvadratne forme tangentne površi zavise samo od krivine krive β:*

$$E = 1 + v^2 k^2[\beta], \qquad F = 1, \qquad G = 1.$$

Kako cilindarska zavojnica i krug istog poluprečnika imaju istu konstantnu krivinu, iz Leme 3.3.1 sledi da se tangentna površ cilindarske zavojnice može konstruisati od parčeta papira isecanjem diska i njegovim uvijanjem oko cilindra (Slika 3.7).



Slika 3.7: Tangentna površ zavojnice

Kod konstrukcije puteva i nasipa najbolje površi su tangentne površi sa konstantnim nagibom. Pesak i slični materijali u prirodi teže da formiraju stabilne oblike koji upravo podsećaju na pomenute površi. Oskulatorne ravni, kao i tangentne ravni njihovih tangentnih površi takođe imaju konstantne nagibe.

Tangentne površi, kao i cilindrične i konusne površi se razlikuju od ostalih pravolinijskih površi po konturi koju određuju. Njihove siluete se sastoje od pravih linija i samim tim služe kao indikator razvojnih površi.

Razvojne površi se mogu definisati i kao omotači oskulatornih ravni prostorne krive. Tangente se tada mogu posmatrati kao prave koje povezuju dve susedne tačke, ali i kao preseci dve susedne oskulatorne ravni.

Izvanredna osobina razvojnih površi je u vezi sa refleksijom gde svi reflektujući zraci ponovo obuhvataju razvojnu površ, ali i sa refrakcijom. I refleksija i refrakcija iscrtavaju veoma interesantne fokalne krive u ravnima.

Krive na Frank O. Gerijevoj zgradi u Bilbau, (Frank Owen Gehry, rođ. 1929., američki arhitekta), dizajnirane su tako kao da se slučajno pojavljuju. Čuveni arhitekta je rekao da je ta slučajnost pojavljivanja krivih dizajnirana tako kako bi "uhvatila" svetlost. Zgrada je napravljena od stakla, titanijuma i krečnjaka ([57]). Takođe, primer razvojne površi u arhitekturi je i Gehry-eva zgrada u Dizeldorfu, [41].

Gerijeva zgrada u Hanoveru, [62], poznata je zbog svoje uvijene fasade što inače predstavlja optimalno iskorišćenje malog dela zemljišta na kome se nalazi, a na koncertnoj hali u Los Anđelosu nekoliko površi imaju ulogu paraboličkih ogledala, koji koncentrišu sunčeve zrake i toplotu na malu površinu pločnika, [96].

Veliku primenu razvojne površi imaju i u brodogradnji, [19], i avioindustriji, [28]. Za konstukciju velikih objekata, kao što su avioni i brodovi, koristi se nerastegljiv lim, iz razloga što je njega moguće lako modelovati i zbog njegove dobre stabilnosti i vibracionih karakteristika. Takođe, lim ima dobre performanse i u kretanju kroz fluid.

Kako i avion i brod predstavljaju superstrukture, najbolje ih je dizajnirati od razvojnih površi za šta i postoji veliko interesovanje.

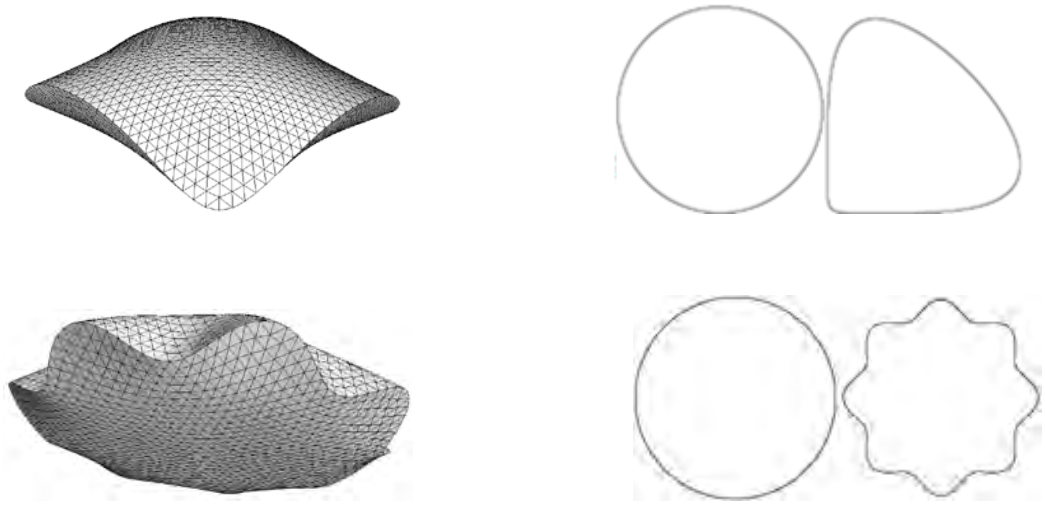
Na primer, zavarivanjem aluminijuma mogu se konstruisati brodovi sa veoma atraktivnim trupom i spoljašnim izgledom, i što je bitnije, jeftinije izrade.

U avioindustriji, razvojne površi se koriste u konstrukciji krila aviona. Kako za aerodinamički zadovoljavajuće profile relativna debljina materijala jako malo varira, to je on uslovljen na ravne oblike.

Razvojne površi su naročite interesantne u modernoj umetnosti. U dizajniranju skulptura ove površi omogućavaju pronalaženje novih oblika koji se iz njih konstruišu.

Londonski dizajner skulptura, Toni Vils, (Tony Wills, engleski dizajner), izumeo je "D-oblike" koji nastaju sastavljanjem ivica dva dvodimenzionalna oblika istog obima od neelastičnog materijala, na primer, od papira, (Slika 3.8). U zavisnosti gde se izabere početak spajanja dve površi, dobija se nova trodimenzionalna površ. Ove površi nisu ograničene samo na konveksne oblike, ali za konkavne oblike je često potrebno seći površi i samim tim ih je teško

fizički napraviti.



Slika 3.8: [59] D-oblici, Toni Vils

Antuan Pesne, (Antoine Pevsner, 1886-1962, ruski skulptor), je svoje skulpture od razvojnih površi, [54], [55], [60], bazirao na matematičkim modelima.

Jedan od inovativnih skulptora 20. veka, Ilan Koman, (Ilhan Koman, 1921–1986, tursko-švedski skulptor), doprineo je svojim radom ([18]) zajednici umetnosti i matematike.

Razvojne površi čine jako malu klasu površi, ali veoma važnu u istraživanju njihovih primena kao osnove za različito modelovanje. Pored dve jako bitne karakteristike u modelovanju: visoke estetike i lake fizičke konstrukcije, sledi još bitnije - jeftinija izrada.

Kako predstavljaju pravolinijske površi nulte Gausove krivine, mogu se razviti u ravan bez istezanja i deformisanja, i to je upravo razlog njihove široke primene u mnogim sferama inženjerstva i proizvodnje, u brodogradnji i avioindustriji, ali i u konstrukciji prelepih građevina i skulptura. Razvojne površi se jako često koriste u savremenoj arhitekturi, dozvoljavajući nove forme. Ali dizajn i konstrukcija megastruktura od razvojnih površi zahteva i veliku stručnost arhitekata i građevinskih inženjera. Izometrijske transformacije čine ih idealnim za modelovanje razliitih površi u tehnici, ali i pogodnim za kompjutersku grafiku i animaciju.

Glava 4

Metrika u generalisanim Finslerovim prostorima $\mathbf{GF_N}$

Finslerova geometrija je geometrija prostora i kretanja. U našem univerzumu važi pravilo da nema pozicije bez kretanja. Finslerov prostor može se posmatrati kao mnogostrukost pozicija (koordinatni sistem x^i) i tangentnih vektora dx^i (brzina) duž krivih (linija kretanja čestica).

U Finslerovim prostorima postoje različiti tipovi koneksija, kao što su koneksija Bervalda, (Ludwig Berwald, 1883–1942, austrijski matematičar češkog porekla), Kartanova koneksija, (Elie Joseph Cartan, 1869–1951, francuski matematičar), Čern-Rundova koneksija, (Shiing-Shen Chern, 1911–2004, američki matematičar kineskog porekla i Hanno Rund, 1925-1993, južno-afrički matematičar), Hašigučijeva koneksija, (Masao Hashiguchi, rodjen 1931. godine, japanski matematičar). Ove koneksije imaju važnu ulogu u Finslerovoj geometriji i njenim primenama. Svaki tip koneksije obezbeđuje kovarijantno diferenciranje, kao i tenzore i krivine.

Kao prirodnu i fundamentalnu generalizaciju Rimanovog prostora, možemo posmatrati Finslerov prostor, (Paul Finsler, 1894–1970, nemački i švajcarski matematičar). Bitna razlika je u tome sto je u Rimanovom prostoru metrički tenzor funkcija samo od koordinata tačke u kojoj se vrši posmatranje, dok u Finslerovom prostoru metrički tenzor zavisi i od tačke i od pravca. U ovom poglavlju, pored definicije i osnovnih karakteristika Finslerovog prostora, definisaćemo generalisani Finslerov prostor.

Generalisanim Finslerovim prostorom kao diferencijabilne mnogostrukosti sa nesimetričnim bazičnim tenzorom, bavili su se S. Minčić, M. Stanković (Mića Stanković, srpski matematičar) i M. Zlatanović (Milan Zlatanović, srpski matematičar) u radovima: [50], [51], [99]. U odnosu na dve vrste δ-kovarijantnog diferenciranja u Rundovom smislu [65], dobili su 10 identiteta Ričijevog tipa u kojima se pojavljuju novi tenzori i nove veličine nazvane "pseudotenzori".

Mi ćemo u ovom radu definisati novu koneksiju u generalisanom Finslerovom prostoru, kao u radu (M. Zlatanović i M. Cvetković) *"New Cartan's tensors and pseudotensors in a Generalized Finsler Space"* [16]. Koristeći nesimetrični osnovni tenzor i h-diferenciranje u generalisanom Finslerovom prostoru, definisaćemo dve vrste kovarijantnog izvoda tenzora u Rundovom smislu.

Na taj način dobija se deset identiteta Ričijevog tipa, dva nova tenzora krivine i petnaest veličina koje se mogu nazvati pseudotenzori. Identiteti i nove veličine mogu se dobiti i za treću i četvrtu vrstu kovarijantnog izvoda.

4.1 Finslerovi prostori $\mathbf{F_N}$

Finslerova geometrija predstavlja uopštenje Rimanove geometrije. Prvi je predložio sam Riman još 1854. godine [64], a sistematski je proučavao Finsler od 1918. godine u svojoj disertaciji [26], gde je pokušao da geometrizuje račun varijacije. Naziv *Finslerova geometrija* prvi je dao Tejlor 1927. godine (James Henry Taylor, 1893–1972, američki matematičar). Nesimetrična koneksija bila je predmet istraživanja mnogih autora, kao što su: K. Jano [8], (Kentaro Yano, 1912–1993, japanski matematičar), Šamioke [66], (A.C. Shamihoke, pakistanski matematičar), S. Minčić [50], [50], [52], S. Manov [43], (Sawa Slavtschev Manoff, 1943–2005, bugarski matematičar), C. K. Mišra [53], (C.K. Mishra, indijski matematičar) i mnogi drugi.

Riman je 1854. godine uveo takozvanu Rimanovu metriku:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \ .$$

Pre uvođenja ove metrike, on je proučavao koncept generalisane metrike:

$$ds = F(x^1, x^2, ..., x^n, dx^1, dx^2, ..., dx^n) \ ,$$

što predstavlja rastojanje između dve tačke x i $x + dx$. On je razmatrao uslove koje treba da zadovolji funkcija $F(x, dx)$:

$$\begin{aligned} &(F1) \qquad F(x,y) > 0 \ , \ \text{za svako } y = dx \ , \\ &(F2) \qquad F(x,py) = pF(x,y) \ , \ \text{za svako } p > 0 \ , \\ &(F3) \qquad F(x,-y) = F(x,y) \ . \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Uslov $(F1)$ izražava da rastojanje između dve tačke treba da bude pozitivno. Homogenost funkcije $(F2)$ je prirodna: ako koordinate y^i pomnožimo sa p, tada će i vrednost metričke funkcije $F(x, y)$ (rastojanja) biti uvećana p puta. Uslov $(F3)$ predstavlja simetriju u rastojanju između dve tačke.

Dužina luka krive $C : x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, u posmatranoj mnogostrukosti definisana je izrazom:

$$s = \int_a^b F(x(t), y(t))dt, \qquad y(t) = \frac{dx}{dt} \ . \tag{4.1.2}$$

Ako C izrazimo preko drugog parametra $\tau = \tau(t),\ c \leq \tau \leq d$, dužina luka krive C jednaka je:

$$s = \int_c^d F\Big(x, \frac{dx}{d\tau}\Big) d\tau \ . \tag{4.1.3}$$

Integral dužine ne zavisi od parametra ako i samo ako je uslov $(F2)$ zadovoljen:

$$F(x, py) = pF(x, y) \ , \quad p = \frac{d\tau}{dt} > 0 \ .$$

Napomena 4.1.1. *Ako uslov $(F2)$ nije zadovoljen, nova klasa metričkih prostora može biti indukovana, na primer, Lagranžeovi prostori.*

Primenom Ojlerove teoreme o homogenosti funkcije na funkciju $F(x, y)$, dobijamo sledeće relacije:

$$F(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y^i} y^i \ , \qquad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} = 0 \ , \tag{4.1.4}$$

odakle se dobija:

$$F^2(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \ y^i y^j \ . \tag{4.1.5}$$

Definicija 4.1.1. *Finslerovi prostori [26] $\mathbf{F_N}$ predstavljaju diferencijabilnu mnogostrukost gde je beskonačno malo rastojanje između dve susedne tačke x^i i $x^i + dx^i$ izraženo preko:*

$$ds = F(x^i, dx^i), \qquad i = 1, ..., N, \tag{4.1.6}$$

a funkcija F zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned} &1) \quad F(x^i, dx^i) > 0 \ , \\ &2) \quad F(x^i, \lambda dx^i) = \lambda F(x^i, dx^i) \ , \ \textit{za svako } \lambda > 0 \ , \\ &3) \quad \textit{Kvadratna forma } \frac{\partial^2 F^2(x^i, dx^i)}{\partial dx^i \partial dx^j} \ \xi^i \xi^j > 0 \ , \ \textit{za svaki vektor } \xi^i \textit{ i svako } (x^i, dx^i) \ . \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Tada je metrički tenzor, definisan izrazom (4.1.6), oblika:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x^i, \dot{x}^i)}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \ , \tag{4.1.8}$$

gde su $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ tangentni vektori krive $C:\ x^i = x^i(t)$ u prostoru mnogostrukosti, ili element tangentnog prostora $T_n(x^i)$ u tački x^i. Koristeći drugi uslov u (4.1.7), g_{ij} su homogeni stepena nula u drugom skupu promenljivih, i važi:

$$ds^2 = g_{ij}(x^k, dx^k) dx^i dx^j \ . \tag{4.1.9}$$

4.1.1 Koneksije u Finslerovim prostorima

U Finslerovim prostorima definisani su različiti tipovi koneksija. Ove koneksije imaju važnu ulogu u primenama Finslerove geometrije.

Jedna od fundamentalnih oznaka u Finslerovoj geometriji je i Kartanov tenzor, (koji je uveo Kartan),

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \ . \tag{4.1.10}$$

U slučaju da je:

$$C_{ijk} = 0 \ \Rightarrow \text{Rimanova geometrija.}$$

Važi da je:

$$C^i_{jk} = g^{is} C_{sjk} \ , \tag{4.1.11}$$

i

$$C_{ijkl} = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} \ . \tag{4.1.12}$$

Bervald je prvi uveo koncept koneksije u Finslerovim prostorima (1926). Definisao je funkcije:

$$2G^i(x, \dot{x}) = \gamma^i_{jk}(x, \dot{x}) \ \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k \ , \tag{4.1.13}$$

koje su dvaput diferencijabilne:

$$G^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j} \ , \qquad G^i_{jk} = \frac{\partial G^i_j}{\partial \dot{x}^k} \ . \tag{4.1.14}$$

Diferenciranjem G^i_{jk}, dobija se ***tenzor krivine***:

$$\frac{\partial G^i_{jk}}{\partial \dot{x}^l} = G^i_{jkl} \ . \tag{4.1.15}$$

Definicija 4.1.2. ***Nelinearna koneksija*** *na mnogostrukosti M je skup lokalno definisanih funkcija stepena homogenosti 1, N^i_j, na tangentnom prostoru $TM \setminus \{0\}$ koje zadovoljavaju zakon transformacije:*

$$\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i} \widetilde{N}^h_j = \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j} N^j_i - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j} \ \dot{x}^j \ .$$

Uvođenjem funkcija $F^i_{jk} : TM \setminus \{0\} \to \mathcal{R}$, koje su lokalno definisane, stepena homogenosti 0, i koje zadovoljavaju zakon transformacije:

$$\frac{\partial \widetilde{x}^l}{\partial x^i} F^i_{jk} = \frac{\partial^2 \widetilde{x}^l}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \widetilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \widetilde{x}^s}{\partial x^k} \widetilde{F}^l_{rs} \ ,$$

definiše se Finslerova koneksija.

Definicija 4.1.3. ***Finslerova koneksija*** *određena je uređenom trojkom* $\left(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$, *gde je* N^i_j *nelinearna koneksija a* C^i_{jk} *Kartanov tenzor.*

Uvođenjem koeficijenata:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\Big) \ , \tag{4.1.16}$$

i

$$\Gamma^i_{jk} = g^{ir}\Gamma_{rjk} \ , \tag{4.1.17}$$

dobija se Čern-Rundova koneksija.

Definicija 4.1.4. ***Čern-Rundova koneksija*** *predstavlja uređenu trojku* $\left(N^i_j, \Gamma^i_{jk}, 0\right)$.

Definicija 4.1.5. ***Bervaldova koneksija*** *definisana je koeficijentima* $G^i_{jk}(x, \dot{x})$, *kod kojih važi simetrija po donjim indeksima i predstavlja uređenu trojku* $\left(N^i_j, G^i_{jk}, 0\right)$.

Definicija 4.1.6. ***Hašigučijeva koneksija*** *predstavlja uređenu trojku* $\left(N^i_j, G^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$.

Definicija 4.1.7. ***Kartanova koneksija*** *predstavlja uređenu trojku* $\left(N^i_j, \Gamma^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$.

4.1.2 Osnovne karakteristike Finslerovih prostora

Svaka koneksija u Finslerovim prostorima obezbeđuje kovarijantno diferenciranje, tenzore i krivine, koji imaju odgovarajuće primene. Ono što karakteriše Finslerove prostore u globalu je sledeće:

- Finslerova geometrija odgovara geometriji prostora i kretanja.
- Najvažniji tenzori u Finslerovoj geometriji su oni koji se redukuju na nulu u Rimanovom slučaju (na primer, C_{ijk} tenzor), ili oni koji imaju analogije u Rimanovoj geometriji.
- Bitno je posmatrati ne-Rimanove Finslerove prostore, i ono što predstavlja ekstenziju Rimanovih do Finslerovih prostora.
- U anizotropnim prostorno-vremenskim pojavama okvir Rimanove geometrije nije dovoljan. Najpogodnija za to je Finslerova geometrija.
- Elektromagnetno polje je sadržano u Finslerovoj geometriji i putanje naelektrisanih čestica predstavljaju geodezijske linije prostora.

- Deformacije geodezijskih linija u Finslerovom prostorno-vremenskom okviru predstavljaju prirodnu ekstenziju deformacija geodezijskih linija u Rimanovom prostorno-vremenskom okviru i ukazuju na fizičko značenje Finslerovih prostora. Takođe, deformacije geodezijskih linija su povezane sa proučavanjem gravitacionih talasa.

4.1.3 Prostori apsolutnog paralelizma sa Finslerovim karakteristikama (FAP−prostori)

Kako 4-dimenziomalna Rimanova geometrija nije uvek dovoljna da opiše većinu fizičkih veličina i interakcija, neki autori koriste ekstra dimenzije (na primer, teorije Kaluza-Kleinovog tipa), dok drugi koriste različite geometrije (na primer, Riman-Kartanova geometrija, Veil-Kartanova geometrija, Apsolutni paralelizam-geometrija). Geometrija zasnovana na apsolutnom paralelizmu, odnosno, **AP**−geometrija je puno šira od Rimanove geometrije u smislu da pored 4 dimenzije ima još šest stepena slobode. Pored Rimanovog prostora, **AP**-geometrija može biti pridružena i Finslerovim prostorima.

U radu [97] su definisani i razmatrani **AP**-prostori.

Definicija 4.1.8. **AP**-*prostor* (M, λ) *je* $n-$*dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost* (M)*, koja sadrži* n *linearno nezavisnih vektora* $\underset{i}{\lambda}_{\mu}$*, gde indeks "*$i$*" označava broj vektora a indeks "*μ*" koordinatu komponente i oba indeksa idu od* 1 *do* n*.*

Kako su ovi vektori linearno nezavisni, determinanta matrice $(\underset{i}{\lambda}_{\mu})$ je različita od nule. U istom radu definisane su kontravarijantne komponente vektora $\underset{i}{\lambda}_{\mu}$:

$$\underset{i}{\lambda}_{\alpha}\, \underset{i}{\lambda}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}\ , \tag{4.1.18}$$

$$\underset{i}{\lambda}_{\alpha}\, \underset{j}{\lambda}^{\alpha} = \delta_{ij}\ . \tag{4.1.19}$$

Linearna koneksija definisana je izrazom:

$$\Gamma^{\alpha}_{.\,\mu\nu} = \underset{i}{\lambda}^{\alpha}\, \underset{i}{\lambda}_{\mu,\,\nu}\ , \tag{4.1.20}$$

gde je sa $(,)$ označeno uobičajno diferenciranje u odnosu na x^{ν}. Kako je koneksija (4.1.20) nesimetrična, može se definisati tenzor torzije:

$$\Lambda^{\alpha}_{.\,\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{.\,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{.\,\nu\mu}\ , \tag{4.1.21}$$

koji je tipa $(1, 2)$ i koso simetričan po donja dva indeksa.

Koristeći vektore $\underset{i}{\lambda}$ definišu se sledeći simetrični tenzori drugog reda:

$$g_{\mu\nu} = \underset{i}{\lambda}_{\mu} \, \underset{i}{\lambda}_{\nu} \, , \tag{4.1.22}$$

$$g^{\alpha\beta} = \underset{i}{\lambda}^{\alpha} \, \underset{i}{\lambda}^{\beta} \, . \tag{4.1.23}$$

Koristeći (4.1.18) i (4.1.19), lako se pokazuje da važi relacija:

$$g_{\mu\nu} \, g^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \, . \tag{4.1.24}$$

Obzirom na navedene osobine, tenzor (4.1.22) $g_{\mu\nu}$ se može koristiti kao metrički tenzor Rimanovog prostora pridruženog proizvoljnoj **AP**-strukturi. Takođe, tenzori (4.1.22) i (4.1.23) se mogu koristiti za spuštanje i podizanje indeksa, a preko njih se definišu uobičajna linearna simetrična koneksija, Kristofelovi simboli druge vrste:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\,\nu} + g_{\beta\nu,\,\mu} - g_{\mu\nu,\,\beta}) \, . \tag{4.1.25}$$

Uz pomoć koneksija (4.1.20) i (4.1.25) možemo izraziti kovarijantno diferenciranje na sledeći način:

$$A_{\underset{+|\nu}{\mu}} = A_{\mu,\,\nu} - A_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} \, , \tag{4.1.26}$$

$$A_{\mu;\,\nu} = A_{\mu,\,\nu} - A_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} , \tag{4.1.27}$$

gde je A_{μ} proizvoljni kovarijantni vektor.

Primenom kovarijantnog diferenciranja (4.1.26) i (4.1.27) na vektore $\underset{i}{\lambda}$ i tenzor (4.1.22), dobijaju se sledeći rezultati:

$$\underset{i}{\lambda}_{\underset{+|\nu}{\mu}} = 0 \, , \tag{4.1.28}$$

$$g_{\mu\nu|\underset{+}{\sigma}} = 0 \, , \tag{4.1.29}$$

$$g_{\mu\nu;\,\sigma} = 0 \, . \tag{4.1.30}$$

Jednačine (4.1.28) označavaju apsolutni paralelizam, dok jednačine (4.1.29) i (4.1.30) su metrički uslovi.

Tenzor trećeg reda, ***tenzor kontorzije***, definiše se kao:

$$\gamma^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} = \underset{i}{\lambda}^{\alpha} \, \underset{i}{\lambda}_{\mu;\,\nu} \, , \tag{4.1.31}$$

koji je nesimetričan u odnosu na donja dva indeksa. Može se pokazati da je:

$$\Lambda^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} = \gamma^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} - \gamma^{\alpha}_{\cdot\,\nu\mu} \, , \tag{4.1.32}$$

$$C_\mu = \Lambda^{\alpha}_{\cdot\,\mu\alpha} = \gamma^{\alpha}_{\cdot\,\mu\alpha}\ , \tag{4.1.33}$$

gde je C_μ kovarijantni vektor, ***bazični vektor***. Tenzor krivine koji odgovara koneksiji (4.1.20), prema (4.1.28) je identički jednak nuli, ali tenzori krivine koji odgovaraju dualnim koneksijama $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}(=\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})$ i koji odgovaraju njihovim simetričnim delovima $\Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)}$ nisu jednaki nuli.

Posmatrajmo sada **AP**-prostore sa Finslerovim karakteristikama.

Definicija 4.1.9. *Prostori apsolutnog paralelizma sa Finslerovim karakteristikama (M, L_i), odnosno,* **FAP**$-$*prostor, je $n-$dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost M na kojoj je definisan skup od $n-$Lagranžeovih funkcija $L_i = L_i(x, y)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

1. *$L_i(x, y)$ je klase C^∞ na $TM\backslash\{0\}$;*
2. *$L_i(x, y) > 0, \quad y \in TM, \quad y = \dot{x}$;*
3. *$L_i(x, y)$ je pozitivno homogena stepena 1;*
4. *Vektori definisani sa:*
$$\underset{i}{\lambda}_\mu(x, y) = \frac{\partial L_i}{\partial y^\mu}\ , \tag{4.1.34}$$
su po pretpostavci linearno nezavisni.

Skup Lagranžeovih funkcija L_i, $(i = \overline{1, n})$, naziva se fundamentalni skup. Skup funkcija $\underset{i}{\lambda}_\mu(x, y)$, koje su pozitivno homogene stepena 0, predstavlja osnovu **FAP**$-$prostora.

Koristeći Ojlerovu teoremu i definiciju (4.1.34), lako se pokazuje:

$$L_i = \underset{i}{\lambda}_\mu\, y^\mu\ . \tag{4.1.35}$$

Definišimo sada funkcije:

$$\underset{i}{C}_{\mu\alpha} = \frac{\partial \underset{i}{\lambda}_\mu}{\partial y^\alpha} = L_{i:\,\mu\alpha}\ . \tag{4.1.36}$$

Ponovnim korišćenjem Ojlerove teoreme dobija se:

$$\underset{i}{C}_{\mu\alpha}\, y^\mu = \underset{i}{C}_{\mu\alpha}\, y^\alpha = 0\ . \tag{4.1.37}$$

Funkcije $\underset{i}{C}_{\mu\alpha}$ $(= \underset{i}{\lambda}_{\mu:\,\alpha})$ imaju sledeće osobine:

1. $\underset{i}{C}_{\mu\alpha}$ je tenzor tipa $(0, 2)$;
2. $\underset{i}{C}_{\mu\alpha}$ je pozitivno homogena stepena -1;

3. $\underset{i}{C}_{\mu\alpha}$ su simetrični tenzori po donjim indeksima, što sledi iz (4.1.36).

U radu [97] je dokazana teorema:

Teorema 4.1.1. *Potreban i dovoljan uslov da prostor* **FAP** *bude* **AP**$-$*prostor je da je* $\underset{i}{C}_{\alpha\beta}$ *identički jednako nuli.* ■

Mogu se definisati funkcije $\underset{i}{\lambda}^{\mu}$ tako da je:

$$\underset{i}{\lambda}^{\mu}\underset{i}{\lambda}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \ , \tag{4.1.38}$$

i

$$\underset{i}{\lambda}^{\mu}\underset{j}{\lambda}_{\mu} = \delta_{ij} \ . \tag{4.1.39}$$

Neka je:

$$\underset{i}{C}^{\mu}{}_{.\,\nu} = \frac{\partial \underset{i}{\lambda}^{\mu}}{\partial y^{\nu}} = \underset{i}{\lambda}^{\mu}{}_{:\,\nu} \ , \tag{4.1.40}$$

$$\hat{C}^{\mu}_{.\,\beta\gamma} = \underset{i}{\lambda}^{\mu}\underset{i}{C}_{\beta\gamma} \ , \tag{4.1.41}$$

gde je tenzor $\underset{i}{C}_{\beta\gamma}$ definisan sa (4.1.36). Tada važi jednakost:

$$\underset{j}{\lambda}_{\mu}\hat{C}^{\mu}_{.\,\beta\gamma} = \underset{j}{C}_{\beta\gamma} \ . \tag{4.1.42}$$

Na prostoru **FAP** definisaćemo koneksije kao u radu [97].

Definicija 4.1.10. ***Nelinearna koneksija*** *u* **FAP**$-$*prostoru definisana je izrazom:*

$$N^{\nu}_{.\,\alpha} = y^{\mu}\underset{i}{\lambda}^{\nu}\underset{i}{\lambda}_{\mu,\,\alpha} \ . \tag{4.1.43}$$

Definicija 4.1.11. ***Bervaldova koneksija*** *u* **FAP**$-$*prostoru definisana je izrazom:*

$$B^{\nu}_{.\,\alpha\sigma} = N^{\nu}_{\alpha:\sigma} = \frac{\partial}{\partial y^{\sigma}}(y^{\mu}\underset{i}{\lambda}^{\nu}\underset{i}{\lambda}_{\mu,\,\alpha}) \ , \tag{4.1.44}$$

Bervaldova koneksija u **FAP**$-$prostoru je nesimetrična po donjim indeksima pa postoji torzija.

Koristeći nelinearnu koneksiju u **FAP**$-$prostoru, definisaćemo operator δ:

$$\delta_{\mu} = \partial_{\mu} - N^{\alpha}_{.\,\mu}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \ . \tag{4.1.45}$$

Tako, za proizvoljni vektor A_{α} možemo definisati izvod:

$$\delta_{\beta}A_{\alpha} = A_{\alpha\,,\hat{}\ \beta} = A_{\alpha\,,\,\beta} - N^{\gamma}_{.\,\beta}A_{\alpha\,:\,\gamma} \ . \tag{4.1.46}$$

Definicija 4.1.12. ***Kartanova koneksija*** *u* **FAP**$-$*prostoru definisana je izrazom:*

$$\Gamma^{\mu}_{\cdot\,\alpha\beta} = \underset{i}{\lambda}^{\mu} \underset{i}{\lambda}_{\alpha,\hat{}\,\beta} \ . \tag{4.1.47}$$

I ova koneksija je nesimetrična po donjim indeksima pa postoji torzija.

U **FAP**$-$prostoru, definisaćemo **v**$-$ i **h**$-$ kovarijantno diferenciranje.

Definicija 4.1.13. *Vertikalno* **v**$-$*kovarijantno diferenciranje, u* **FAP**$-$*prostoru, definiše se izrazom:*

$$A_{\mu|\nu} = A_{\mu\,:\,\nu} + A_{\alpha}\hat{C}^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} \ , \tag{4.1.48}$$

gde je

$$A_{\mu\,:\,\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial y^{\nu}} \ , \tag{4.1.49}$$

i

$$\hat{C}^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu} = \underset{i}{\lambda}^{\alpha} \frac{\partial^2 L_i}{\partial y^{\mu} \partial y^{\nu}} \ . \tag{4.1.50}$$

Za osnovne funkcije u **FAP**$-$prostoru, $\underset{i}{\lambda}_{\alpha}$ važi da je:

$$\underset{i}{\lambda}_{\alpha|\beta} \equiv 0 \ . \tag{4.1.51}$$

To znači da su $\underset{i}{\lambda}_{\alpha}$ paralelno pomerene po putanji određenoj sa $\hat{C}^{\gamma}_{\cdot\,\alpha\beta}$ (apsolutni paralelizam).

Definicija 4.1.14. **h**$-$*kovarijantno diferenciranje, u* **FAP**$-$*prostoru, definiše se izrazom:*

$$A_{\alpha||\beta} = A_{\alpha\,,\hat{}\,\beta} - A_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\cdot\,\alpha\beta} \ , \tag{4.1.52}$$

gde je $A_{\alpha\,,\hat{}\,\beta}$ *definisano izrazom* (4.1.46)*, a* $\Gamma^{\mu}_{\cdot\,\alpha\beta}$ *Kartanova koneksija definisana izrazom* (4.1.47)*.*

Za **h**$-$kovarijantno diferenciranje važe sledeće relacije:

$$\underset{i}{\lambda}_{\alpha||\beta} \equiv 0 \ , \tag{4.1.53}$$

i

$$\underset{i}{\lambda}^{\beta}{}_{||\gamma} \equiv 0 \ . \tag{4.1.54}$$

Relacija (4.1.53) opisuje da je $\underset{i}{\lambda}_{\alpha}$ paralelno pomerena po putanji određenoj Kartanovom koneksijom.

4.2 Generalisani Finslerovi prostori $\mathbf{GF_N}$

Pored Finslerovih prostora, može se posmatrati i generalisani Finslerov prostor $\mathbf{GF_N}$. Generalisani Finslerov prostor je diferencijabilna mnogostrukost sa nesimetričnim bazičnim tenzorom. U odnosu na dve vrste $h-$kovarijantnog diferenciranja u Rundovom smislu [65], dobili smo 10 identiteta Ričijevog tipa u kojima se pojavljuju novi tenzori i nove veličine, koje smo nazvali "pseudotenzori".

Definicija 4.2.1. *Generalisani Finslerov prostor* ($\mathbf{GF_N}$) *predstavlja diferencijabilnu mnogostrukost sa nesimetričnim baznim tenzorom* $g_{ij}(x,\dot{x})$, *gde je:*

$$g_{ij}(x,\dot{x}) \neq g_{ji}(x,\dot{x}), \quad (g = det(g_{ij}) \neq 0) \ . \tag{4.2.55}$$

Na osnovu (4.2.55)*, može se definisati simetrični, odnosno, nesimetrični deo od* g_{ij}*:*

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \ , \qquad g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) \ , \tag{4.2.56}$$

gde, na osnovu [66], važi

$$a)\ g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \ , \qquad b)\ \frac{\partial g_{\underset{\vee}{ij}}}{\partial \dot{x}^k} = 0 \ , \tag{4.2.57}$$

gde je F *metrička funkcija u* $\mathbf{GF_N}$*, koja ima osobine poznate iz teorije Finslerovog prostora* (4.1.7).

U radovima [50], [51], [52], [99] je analiziran generalisan Finslerov prostor.

Spuštanje i podizanje indeksa vrši se pomoću tenzora $g_{\underline{ij}}$ i h^{ij} redom, i važi:

$$g_{\underline{ij}}\, h^{jk} = \delta_i^k \ , \qquad (\underline{g} = det(g_{\underline{ij}}) \neq 0) \ . \tag{4.2.58}$$

Generalisani Kristofelovi simboli prve i druge vrste definisani su na sledeći način:

$$\gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}) \neq \gamma_{i.kj} \ , \tag{4.2.59}$$

$$\gamma^i_{jk} = h^{ip}\gamma_{p.jk} = \frac{1}{2}h^{ip}(g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}) \neq \gamma^i_{kj} \ , \tag{4.2.60}$$

gde je $g_{ji,\,k} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}$.

Tada važi:

$$\gamma^p_{jk} g_{\underline{ip}} = \gamma_{s.jk} h^{ps} g_{\underline{ip}} = \gamma_{s.jk}\delta^s_i = \gamma_{i.jk} \ . \tag{4.2.61}$$

U radu [51] je pokazana sledeća teorema:

Teorema 4.2.1. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$ *važe sledeće relacije:*

$$\gamma_{i.jk} + \gamma_{j.ik} = g_{\underline{ij},k} \ , \quad \gamma_{i.jk} + \gamma_{k.ji} = g_{\underline{ik},j} \ , \tag{4.2.62}$$

$$\gamma_{i.jk}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}g_{\underline{ij},k}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{4}F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^jx^k}\dot{x}^i\dot{x}^j \ , \tag{4.2.63}$$

$$\gamma_{i.jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{1}{2}g_{\underline{ik},j}\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{1}{2}g_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{1}{4}F^2_{\dot{x}^ix^j\dot{x}^k}\dot{x}^i\dot{x}^k \ , \tag{4.2.64}$$

$$\gamma_{i.jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = (g_{\underline{ij},k} - \frac{1}{2}g_{\underline{jk},i})\dot{x}^j\dot{x}^k \ , \tag{4.2.65}$$

gde je $F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^jx^k} = \frac{\partial^3 F^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j\partial x^k}$. ■

Uvođenjem Kartanovog tenzora C_{ijk}, slično kao u $\mathbb{F}_\mathbb{N}$, dobijamo:

$$C_{ijk}(x,\dot{x}) \overset{def}{=} \frac{1}{2}g_{ij,\dot{x}^k} \underset{(4.2.57b)}{=} \frac{1}{2}g_{\underline{ij},\dot{x}^k} = \frac{1}{4}F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k} \ , \tag{4.2.66}$$

gde " $\underset{(4.2.57b)}{=}$ " označava "jednakost na osnovu (4.2.57b)". Može se zaključiti da je C_{ijk} simetričan u odnosu na svaki par indeksa. Takođe, važi:

$$C^i_{jk} \overset{def}{=} h^{ip}C_{pjk} \underset{(4.2.66)}{=} h^{ip}C_{jpk} = h^{ip}C_{jkp} = C^i_{kj} \ . \tag{4.2.67}$$

U generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ važe sledeće relacije:

$$C_{ijk}\dot{x}^i = C_{ijk}\dot{x}^j = C_{ijk}\dot{x}^k = 0 \ . \tag{4.2.68}$$

Prema Kartanu [12], generalisani Finslerov prostor $\mathbf{GF_N}$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) Metrički tenzor sa nesimetričnim komponentama $g_{ij}(x,\dot{x})$ dat je tako da je kvadrat rastojanja između x^i i $x^i + dx^i$ dva susedna elementa $(x,\dot{x})$ i $(x+dx,\dot{x}+d\dot{x})$ dat izrazom:

$$ds^2 = g_{ij}(x,\dot{x})dx^idx^j = g_{\underline{ij}}(x,\dot{x})dx^idx^j \ . \tag{4.2.69}$$

(ii) Analitički izraz varijacije vektora X^i, kada se njegovi elementi $(x,\dot{x})$ menjaju u $(x+dx,\dot{x}+d\dot{x})$, naziva se geometrijska varijacija, i dat je preko apsolutnog diferencijala:

$$DX^i = dX^i + C^i_{hk}X^hd\dot{x}^k + \Gamma^i_{hk}X^hdx^k \ . \tag{4.2.70}$$

Norma vektora X^i definisana je sa: $\sqrt{g_{ij}(x,\dot{x})X^iX^j} = \sqrt{g_{\underline{ij}}(x,\dot{x})X^iX^j}$. Kvadratna forma $g_{ij}(x,\dot{x})X^iX^j$ je pozitivno definitna za svako X^i i za proizvoljni element $(x,\dot{x})$. Metrička funkcija $g_{ij}(x,\dot{x})$ je po pretpostavci pozitivno homogena stepena nula u $\dot{x}^i$. Funkcije $C^i_{hk}(x,\dot{x})$ i $\Gamma^i_{hk}(x,\dot{x})$ pomenute u (4.2.70) nisu potpuno proizvoljne.

(iii)

(a) Ako se pravac vektora X^i poklapa sa pravcem elementa, tada je njegova norma jednaka $F(x, \dot{x})$.

(b) Norma vektora X^i u odnosu na beskonačno malo paralelno pomeranje (odnosno, kada je njegova geometrijska varijacija jednaka nuli) je konstantna.

(c) Neka su $\overrightarrow{X}$ i $\overrightarrow{Y}$ dva vektora istog elementa $(x, \dot{x})$, i $D\overrightarrow{X}$ i $D\overrightarrow{Y}$ njihovi apsolutni diferencijali sa fiksiranim koordinatama X^i i Y^i. Tada je $\overrightarrow{X} \cdot D\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} \cdot D\overrightarrow{X}$.

(d) Apsolutni diferencijal vektora sa fiksiranim koordinatama X^i, čiji se pravac posmatra u odnosu na pravac njegovih elemenata, u slučaju infinitezimalne rotacije njegovih elemenata oko centra, jednak je nuli.

(e) Komponente Γ^i_{jk}, pomenute u izrazu apsolutnog diferencijala vektora, kada se njegov element paralelno pomera u samog sebe, zadovoljavaju jednačinu:

$$\Gamma^*_{i.jk} - \Gamma^*_{i.kj} = \gamma_{i.jk} - \gamma_{i.kj} = g_{\underset{\vee}{ji},k} - g_{\underset{\vee}{jk},i} + g_{\underset{\vee}{ik},j} = 2g_{\underline{is}}\,\Gamma^{*s}_{\underset{\vee}{jk}}\,, \tag{4.2.71}$$

gde je

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{jp}\Gamma^p_{sk}\dot{x}^s \neq \Gamma^{*i}_{kj}\ , \quad \Gamma^*_{i.jk} = \Gamma_{i.jk} - C_{ijp}\Gamma^p_{sk}\dot{x}^s \neq \Gamma^*_{i.kj}\ . \tag{4.2.72}$$

Iz relacija od a) do d), sledi:

$$\Gamma_{j.ik} + \Gamma_{i.jk} = g_{\underline{ij},k}\ , \quad \Gamma_{j.ki} + \Gamma_{i.kj} = g_{\underline{ij},k}\ . \tag{4.2.73}$$

Definisaćemo novu nesimetričnu koneksiju:

$$\widetilde{\Gamma}^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{kp}\Gamma^p_{js}\dot{x}^s \neq \widetilde{\Gamma}^{*i}_{kj}\ , \quad \widetilde{\Gamma}^*_{i.jk} = \Gamma_{i.jk} - C_{ikp}\Gamma^p_{js}\dot{x}^s \neq \widetilde{\Gamma}^*_{i.kj}\ . \tag{4.2.74}$$

Dobija se:

$$M^{*i}_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{kj} = \big(C^i_{jp}\Gamma^p_{ks} - C^i_{jp}\Gamma^p_{sk}\big)\dot{x}^s = 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jk}} + 2C^i_{jp}\Gamma^p_{\underset{\vee}{sk}}\dot{x}^s\ , \quad M^{*i}_{jk} \neq -M^{*i}_{kj}\ . \tag{4.2.75}$$

Razmatrajući jednačine (4.2.72) i (4.2.74), može se videti da je:

$$\Gamma^{*i}_{jk}\dot{x}^j = \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j, \quad \widetilde{\Gamma}^{*i}_{jk}\dot{x}^k = \Gamma^i_{jk}\dot{x}^k\ , \quad \widetilde{\Gamma}^*_{i.jk}\dot{x}^i = \Gamma^*_{i.jk}\dot{x}^i = \Gamma_{i.jk}\dot{x}^i\ . \tag{4.2.76}$$

Jednačine (4.2.72) i (4.2.74) daju:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} + C^i_{jp}\Gamma^{*p}_{sk}\dot{x}^s\ , \quad \Gamma^i_{jk} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{jk} + C^i_{kp}\widetilde{\Gamma}^{*p}_{js}\dot{x}^s\ . \tag{4.2.77}$$

Iz (4.2.73) i (4.2.77) sledi:

$$g_{\underline{ij},k} = \Gamma^*_{j.ik} + \Gamma^*_{i.jk} + 2C_{ijp}\Gamma^p_{sk}\dot{x}^s, \quad g_{\underline{ij},k} = \widetilde{\Gamma}^*_{i.kj} + \widetilde{\Gamma}^*_{j.ki} + 2C_{ijp}\Gamma^p_{ks}\dot{x}^s \ . \tag{4.2.78}$$

Može se naći eksplicitni izraz za Γ_{ijk} :

$$\Gamma^*_{i.jk} - \Gamma^*_{i.kj} = \gamma_{i.jk} - \gamma_{i.kj} = \Gamma_{i.jk} - C_{ijp}\Gamma^p_{sk}\dot{x}^s - \Gamma_{i.kj} + C_{ikp}\Gamma^p_{sj}\dot{x}^s \ . \tag{4.2.79}$$

Poslednja jednačina jednaka je:

$$\Gamma_{h.jk} - \Gamma_{h.kj} = \gamma_{h.jk} - \gamma_{h.kj} + \big(C_{hjp}\Gamma^p_{sk} - C_{hkp}\Gamma^p_{sj}\big)\dot{x}^s \ . \tag{4.2.80}$$

I dobija se:

$$\Gamma_{j.hk} + \Gamma_{h.jk} = \Gamma_{j.kh} + \Gamma_{h.kj} = \gamma_{h.jk} + \gamma_{j.hk} = \gamma_{h.jk} + \gamma_{k.jh} \ . \tag{4.2.81}$$

Koeficijenti nesimetrične afine koneksije u Kartanovom smislu [12], jednaki su:

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \gamma^i_{jk} - h^{il}(C_{jlp}\Gamma^p_{ks} + C_{klp}\Gamma^p_{js} - C_{jkp}\Gamma^p_{ls})\dot{x}^s \neq \Gamma^{*i}_{kj} \ , \tag{4.2.82}$$

$$\Gamma^*_{i.jk} = \Gamma^{*r}_{jk}g_{\underline{ir}} = \gamma_{i.jk} - (C_{ijp}\Gamma^p_{ks} + C_{ikp}\Gamma^p_{js} - C_{jkp}\Gamma^p_{is})\dot{x}^s \neq \Gamma^*_{i.kj} \ . \tag{4.2.83}$$

Definisaćemo koeficijente:

$$\widetilde{\Gamma}^{*i}_{jk} = \gamma^i_{jk} - h^{il}(C_{klp}\Gamma^p_{sj} + C_{jlp}\Gamma^p_{sk} - C_{kjp}\Gamma^p_{sl})\dot{x}^s \neq \Gamma^{*i}_{kj} \ , \tag{4.2.84}$$

$$\widetilde{\Gamma}^*_{i.jk} = \widetilde{\Gamma}^{*r}_{jk}g_{\underline{ir}} = \gamma_{i.jk} - (C_{ikp}\Gamma^p_{sj} + C_{ijp}\Gamma^p_{sk} - C_{kjp}\Gamma^p_{si})\dot{x}^s \neq \widetilde{\Gamma}^*_{i.kj} \ . \tag{4.2.85}$$

Tada je razlika:

$$\begin{aligned}\Gamma^*_{i.jk} - \widetilde{\Gamma}^*_{i.jk} &= \big(C_{ijp}\Gamma^p_{ks} + C_{ikp}\Gamma^p_{js} - C_{jkp}\Gamma^p_{is} - C_{ikp}\Gamma^p_{sj} - C_{ijp}\Gamma^p_{sk} + C_{kjp}\Gamma^p_{si}\big)\dot{x}^s = \\ &= 2\big(C_{ikp}\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}} + C_{ijp}\Gamma^p_{\underset{\vee}{ks}} - C_{kjp}\Gamma^p_{\underset{\vee}{is}}\big)\dot{x}^s \ .\end{aligned} \tag{4.2.86}$$

Označimo sa:

$$T^{*i}_{jk}(x,\dot{x}) = \Gamma^{*i}_{jk} - \Gamma^{*i}_{kj} \ , \quad \widetilde{T}^{*i}_{jk}(x,\dot{x}) = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{jk} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{kj} \ ,$$

tenzor torzije koneksije Γ^*, odnosno, $\widetilde{\Gamma}^*$, redom.

Definicija 4.2.2. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$ *ugao između dva vektora definisan je izrazom:*

$$\cos(X,Y) = \frac{g_{\underline{ij}}\,(x,\dot{x})X^iY^j}{\sqrt{g_{\underline{hk}}X^hX^k}\sqrt{g_{\underline{pq}}Y^pY^q}} \ . \tag{4.2.87}$$

Može se zaključiti da ako su l^i i l_i jedinični vektori duž nekog elementa, tada je:

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{F(x,\dot{x})}\ , \quad l_i = \frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\ . \tag{4.2.88}$$

Koristeći izraz (4.2.70) možemo defisati dve vrste apsolutnog diferencijala:

$$\begin{aligned} \underset{1}{D}X^i &= dX^i + C^i_{hk}X^h d\dot{x}^k + \Gamma^i_{hk}X^h dx^k, \\ \underset{2}{D}X^i &= dX^i + C^i_{hk}X^h d\dot{x}^k + \Gamma^i_{kh}X^h dx^k\ . \end{aligned} \tag{4.2.89}$$

Onda, iz jednačina (4.2.76) i (4.2.89) sledi:

$$\underset{1}{D}l^i = \frac{1}{F}d\dot{x} - \frac{dF}{F^2}\dot{x}^i + \frac{1}{F}\Gamma^i_{hk}\dot{x}^h dx^k, \quad \underset{2}{D}l^i = \frac{1}{F}d\dot{x} - \frac{dF}{F^2}\dot{x}^i + \frac{1}{F}\Gamma^i_{kh}\dot{x}^h dx^k\ , \tag{4.2.90}$$

što daje prvu i drugu vrstu paralelnog pomeranja:

$$d\dot{x}^i = F\underset{1}{D}l^i + \frac{dF}{F}\dot{x}^i - \Gamma^i_{hk}\dot{x}^h dx^k, \quad d\dot{x}^i = F\underset{2}{D}l^i + \frac{dF}{F}\dot{x}^i - \Gamma^i_{kh}\dot{x}^h dx^k\ . \tag{4.2.91}$$

Koristeći (4.2.89) dobija se:

$$\begin{aligned} \underset{1}{D}T^i_j &= dT^i_j + \big(C^i_{pm}d\dot{x}^m + \Gamma^i_{pm}dx^m\big)T^p_j - \big(C^p_{jm}d\dot{x}^m + \Gamma^p_{jm}dx^m\big)T^i_p\ , \\ \underset{2}{D}T^i_j &= dT^i_j + \big(C^i_{pm}d\dot{x}^m + \Gamma^i_{mp}dx^m\big)T^p_j - \big(C^p_{jm}d\dot{x}^m + \Gamma^p_{mj}dx^m\big)T^i_p\ . \end{aligned} \tag{4.2.92}$$

Iz relacija (4.2.91) za prvu i drugu vrstu paralelnog pomeranja, važi:

$$\begin{aligned} \underset{1}{D}T^i_j &= dT^i_j + \big(C^i_{pm}(F\underset{1}{D}l^m + \frac{dF}{F}\dot{x}^m - \Gamma^m_{hk}\dot{x}^h dx^k) + \Gamma^i_{pm}dx^m\big)T^p_j - \\ &\quad - \big(C^p_{jm}(F\underset{1}{D}l^m + \frac{dF}{F}\dot{x}^m - \Gamma^m_{hk}\dot{x}^h dx^k) + \Gamma^p_{jm}dx^m\big)T^i_p\ , \\ \underset{2}{D}T^i_j &= dT^i_j + \big(C^i_{pm}(F\underset{2}{D}l^m + \frac{dF}{F}\dot{x}^m - \Gamma^m_{kh}\dot{x}^h dx^k) + \Gamma^i_{mp}dx^m\big)T^p_j - \\ &\quad - \big(C^p_{jm}(F\underset{2}{D}l^m + \frac{dF}{F}\dot{x}^m - \Gamma^m_{kh}\dot{x}^h dx^k) + \Gamma^p_{mj}dx^m\big)T^i_p\ , \end{aligned} \tag{4.2.93}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \underset{1}{D}T^i_j &= dT^i_j + \underset{1}{D}l^m\big(FC^i_{pm}T^p_j - FC^p_{jm}T^i_p\big) - T^p_jC^i_{pm}\Gamma^m_{hk}\dot{x}^h dx^k + \\ &\quad + T^p_j\Gamma^i_{pm}dx^m + T^i_pC^p_{jm}\Gamma^m_{hk}\dot{x}^h dx^k - T^i_p\Gamma^p_{jm}dx^m\ , \\ \underset{2}{D}T^i_j &= dT^i_j + \underset{2}{D}l^m\big(FC^i_{pm}T^p_j - FC^p_{jm}T^i_p\big) - T^p_jC^i_{pm}\Gamma^m_{kh}\dot{x}^h dx^k + \\ &\quad + T^p_j\Gamma^i_{mp}dx^m + T^i_pC^p_{jm}\Gamma^m_{kh}\dot{x}^h dx^k - T^i_p\Gamma^p_{mj}dx^m\ . \end{aligned} \tag{4.2.94}$$

Nakon sređivanja izraza, konačno se dobija:

$$\begin{aligned}\underset{1}{D}T^i_j =&\big(FT^i_{j,\dot{m}} + A^i_{pm}T^p_j - A^p_{jm}T^i_p\big)\underset{1}{D}l^m+\\ &+\big(T^i_{j,m} + T^p_j\Gamma^{*i}_{pm} - T^i_p\Gamma^{*p}_{jm} - T^i_{j,\dot{s}}\Gamma^s_{rm}\dot{x}^r\big)dx^m\ .\end{aligned} \tag{4.2.95}$$

Za drugu vrstu paralelnog pomeranja važi:

$$\begin{aligned}\underset{2}{D}T^i_j =&dT^i_j + \underset{2}{D}l^m\big(A^i_{pm}T^p_j - A^p_{jm}T^i_p\big) + \big[T^i_pC^p_{jk}(\Gamma^{*k}_{mh} + C^k_{ms}\Gamma^{*s}_{rh}\dot{x}^r)\dot{x}^h+\\ &+T^p_j(\Gamma^{*i}_{mp} + C^i_{ms}\Gamma^{*s}_{rp}\dot{x}^r) - T^p_jC^i_{pk}(\Gamma^{*k}_{mh} + C^k_{ms}\Gamma^{*s}_{rh}\dot{x}^r)\dot{x}^h-\\ &-T^i_p(\Gamma^{*p}_{mj} + C^p_{ms}\Gamma^{*s}_{rj}\dot{x}^r)\big]dx^m =\\ =&dT^i_j + \underset{1}{D}l^m\big(A^i_{pm}T^p_j - A^p_{jm}T^i_p\big) + \big(T^i_pC^p_{jk}\Gamma^{*k}_{hm}\dot{x}^h + T^p_j\Gamma^{*i}_{pm}+\\ &+T^p_jC^i_{ps}\Gamma^{*s}_{rm}\dot{x}^r - T^p_jC^i_{pk}\Gamma^{*k}_{hm}\dot{x}^h - T^i_p\Gamma^{*p}_{jm} - T^i_pC^p_{js}\Gamma^{*s}_{rm}\dot{x}^r\big)dx^m =\\ =&dT^i_j + \underset{1}{D}l^m\big(A^i_{pm}T^p_j - A^p_{jm}T^i_p\big) + \big(T^p_j\Gamma^{*i}_{pm} - T^i_p\Gamma^{*p}_{jm}\big)dx^m\ .\end{aligned} \tag{4.2.96}$$

I takođe:

$$\begin{aligned}\underset{2}{D}T^i_j =&\big(FT^i_{j,\dot{m}} + A^i_{pm}T^p_j - A^p_{jm}T^i_p\big)\underset{2}{D}l^m+\\ &+\big(T^i_{j,m} + T^p_j\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp} - T^i_p\widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj} - T^i_{j,\dot{s}}\Gamma^s_{mr}\dot{x}^r\big)dx^m\ .\end{aligned} \tag{4.2.97}$$

4.2.1 Prva i druga vrsta h-kovarijantnog diferenciranja u $\mathbf{GF_N}$

Na osnovu nesimetrije koeficijenata koneksije, mogu se definisati dve vrste h-kovarijantnog diferenciranja.

Definicija 4.2.3. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$ *prva i druga vrsta h-kovarijantnog diferenciranja definišu se na sledeći način:*

$$\begin{aligned}T^i_{j\underset{1}{|}m} &= T^i_{j,m} + T^p_j\Gamma^{*i}_{pm} - T^i_p\Gamma^{*p}_{jm} - T^i_{j,\dot{s}}\Gamma^s_{rm}\dot{x}^r\ ,\\ T^i_{j\underset{2}{|}m} &= T^i_{j,m} + T^p_j\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp} - T^i_p\widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj} - T^i_{j,\dot{s}}\Gamma^s_{mr}\dot{x}^r\ .\end{aligned} \tag{4.2.98}$$

Slično kao u Finslerovim prostorima, može se pokazati da je kovarijantni izvod tenzora (4.2.98), takođe tenzor.

Može se pokazati sledeća teorema:

Teorema 4.2.2. *Za tenzor $g_{\underline{ij}}(x,\dot{x})$ u odnosu na prvu i drugu vrstu $h-$kovarijantnog diferenciranja* (4.2.98) *u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$, važi sledeće:*

$$g_{\underline{ij}\underset{\theta}{|m}}(x,\dot{x}) = 0, \quad \theta = 1,2. \tag{4.2.99}$$

Dokaz. Koristeći jednačinu (4.2.98), dobija se:

$$\begin{aligned} g_{\underline{ij}\underset{1}{|m}}(x,\dot{x}) =& g_{\underline{ij},m} - g_{\underline{ij},\dot{p}}\Gamma^p_{rm}\dot{x}^r - \Gamma^{*p}_{im}g_{\underline{pj}} - \Gamma^{*p}_{jm}g_{\underline{ip}} \underset{(4.2.66,\ 4.2.83)}{=} \\ =& g_{\underline{ij},m} - 2C_{ijp}\Gamma^p_{rm}\dot{x}^r - (\Gamma^*_{i.jm} + \Gamma^*_{j.im}) = 0\ . \end{aligned} \tag{4.2.100}$$

Isti rezultat može se dobiti i za $g_{ij\underset{2}{|m}}$.

$$\begin{aligned} g_{\underline{ij}\underset{2}{|m}}(x,\dot{x}) =& g_{\underline{ij},m} - g_{\underline{ij},\dot{p}}\Gamma^p_{mr}\dot{x}^r - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mi}g_{\underline{pj}} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}g_{\underline{ip}} \underset{(4.2.66,\ 4.2.83)}{=} \\ =& g_{\underline{ij},m} - 2C_{ijp}\Gamma^p_{mr}\dot{x}^r - (\widetilde{\Gamma}^*_{j.mi} + \widetilde{\Gamma}^*_{i.mj}) = 0\ , \end{aligned} \tag{4.2.101}$$

i time je dokazana jednakost (4.2.99). ■

Sledeća teorema izražava prvu i drugu vrstu $h-$kovarijantnog diferenciranja Kronekerovog simbola:

Teorema 4.2.3. *Za Kronekerov simbol u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ u odnosu na prvu i drugu vrstu $h-$kovarijantnog diferenciranja važi jednakost:*

$$\delta^i_{j\underset{1}{|m}} = 0\ , \qquad \delta^i_{j\underset{2}{|m}} = 0\ . \ ■ \tag{4.2.102}$$

Dokaz Teoreme 4.2.3 sledi iz same definicije δ simbola i kovarijantnog diferenciranja (4.2.98).

Teorema 4.2.4. *Za tenzor h^{ij} u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ u odnosu na prvu i drugu vrstu $h-$kovarijantnog diferenciranja važi relacija:*

$$h^{ij}_{\underset{\theta}{|m}} = 0\ , \quad \theta = 1,2. \tag{4.2.103}$$

Dokaz. Iz jednakosti $h^{ip}g_{\underline{pq}} = \delta^i_q$ dobija se:

$$h^{ip}_{\underset{\theta}{|m}}g_{\underline{pq}} + h^{ip}g_{\underline{pq}\underset{\theta}{|m}} = 0\ .$$

Množeći sa h^{iq}, sledi dokaz teoreme:

$$h^{ip}_{\underset{\theta}{|m}}\delta^j_p + h^{ip}h^{jq}g_{\underline{pq}\underset{\theta}{|m}} = 0\ , \quad \theta = 1,2. \ ■$$

Teorema 4.2.5. *Za jedinični vektor l^i u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ u odnosu na prvu i drugu vrstu $h-$kovarijantnog diferenciranja važi jednakost:*

$$l^i_{\underset{\theta}{|m}} = 0\ , \quad \theta = 1,2. \ ■ \tag{4.2.104}$$

4.2.2 Identiteti Ričijevog tipa za h-diferenciranje u $\mathbf{GF_N}$

Poznato je da u Finslerovom prostoru postoji samo jedan identitet Ričijevog tipa, (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925, italijanski matematičar), za h-diferenciranje, u odnosu na izvod drugog reda.

U slučaju nesimetrične afine koneksije postoji deset mogućnosti za formiranje razlike:

$$a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\lambda}{|}m\underset{\mu}{|}n} - a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\underset{\nu}{|}m\underset{\omega}{|}n} \quad (\lambda,\mu,\nu,\omega = 1,2), \tag{4.2.105}$$

gde su sa $\underset{1}{|}$ i $\underset{2}{|}$ označene dve vrste kovarijantnog izvoda, i ove razlike daju deset identiteta Ričijevog tipa i dva tenzora krivine.

Ovi identiteti u $\mathbf{GF_N}$ dokazuju se metodom totalne indukcije. Pomenute mogućnosti formiranja razlika dobijaju se iz sledećih kombinacija:

$$\begin{aligned}(\lambda,\mu;\nu,\omega) \in \{&(1,1;1,1),(2,2;2,2),(1,2;1,2),(2,1;2,1),(1,1;2,2),\\ &(1,1;1,2),(1,1;2,1),(2,2;1,2),(2,2;2,1),(1,2;2,1)\}.\end{aligned} \tag{4.2.106}$$

Pre nego što ćemo generalizovati slučajeve, posmatrćemo tenzor $a^i(x,\xi)$.

Treba naglasiti da je vektorsko polje ξ^l stacionarno u odnosu na prvu vrstu kovarijantnog diferenciranja, odnosno, važi sledeće:

$$\xi^l_{\underset{1}{|}h}(x,\xi) = 0, \quad \xi^l_{\underset{2}{|}h}(x,\xi) \neq 0\ . \tag{4.2.107}$$

Takođe važi:

$$\xi^l_{,\,h} = \frac{\partial \xi^l}{\partial x^h} = -\Gamma^{*l}_{rh}\xi^r = -\frac{\partial G^l(x,\xi)}{\partial \dot{x}^h} = G^l_{,\,\dot{h}}\ . \tag{4.2.108}$$

Zatim, dobija se, na primer,

$$\begin{aligned}a^i_{j\underset{1}{|}mn} =&(a^i_{j\underset{1}{|}m})_{,\,n} + (a^i_{j\underset{1}{|}m})_{,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j\underset{1}{|}m} - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p\underset{1}{|}m} - \Gamma^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p} =\\ =&a^i_{j,mn} + a^i_{j,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + \Gamma^{*i}_{pm,\,n}a^p_j + \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,n} - \Gamma^{*p}_{jm,\,n}a^i_p -\\ &- \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,\,n} + a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,m}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,n} +\\ &+ \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \Gamma^{*p}_{jm,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,n} - \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,m} +\\ &+ \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \Gamma^{*i}_{pn}\Gamma^{*p}_{sm}a^s_j - \Gamma^{*i}_{pn}\Gamma^{*s}_{jm}a^p_s - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,m} -\\ &- \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \Gamma^{*p}_{jn}\Gamma^{*i}_{sm}a^s_p + \Gamma^{*p}_{jn}\Gamma^{*s}_{pm}a^i_s - \Gamma^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p}\ .\end{aligned} \tag{4.2.109}$$

I slično:

$$
\begin{aligned}
a^i_{\underset{1}{j}|\underset{1}{m}|\underset{2}{n}} =& (a^i_{\underset{1}{j}|\underset{1}{m}})_{,\,n} + (a^i_{\underset{1}{j}|\underset{1}{m}})_{,\,\dot{s}}\xi^s_{,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{\underset{1}{j}|\underset{1}{m}} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{\underset{1}{p}|\underset{1}{m}} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm}a^i_{\underset{1}{j}|p} = \\
=& a^i_{j,mn} + a^i_{j,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + \Gamma^{*i}_{pm,\,n}a^p_j + \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,n} - \Gamma^{*p}_{jm,\,n}a^i_p - \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,n} + \\
&+ a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,m}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \\
&- \Gamma^{*p}_{jm,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,n} - \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\Gamma^{*p}_{sm}a^s_j - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\Gamma^{*s}_{jm}a^p_s - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\Gamma^{*i}_{sm}a^s_p + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\Gamma^{*s}_{pm}a^i_s - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm}a^i_{\underset{1}{j}|p}\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.110}
$$

$$
\begin{aligned}
a^i_{\underset{2}{j}|\underset{1}{m}|n} =& (a^i_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}})_{,\,n} + (a^i_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}})_{,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}} - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{\underset{2}{p}|\underset{2}{m}} - \Gamma^{*p}_{mn}a^i_{\underset{2}{j}|p} = \\
=& a^i_{j,mn} + a^i_{j,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,n}a^p_j + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,n}a^i_p - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,n} + \\
&+ a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,m}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,\,m} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \Gamma^{*i}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*p}_{ms}a^s_j - \\
&- \Gamma^{*i}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mj}a^p_s - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,\,m} - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \Gamma^{*p}_{jn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms}a^s_p + \Gamma^{*p}_{jn}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}a^i_s - \Gamma^{*p}_{mn}a^i_{\underset{2}{j}|p}\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.111}
$$

$$
\begin{aligned}
a^i_{\underset{2}{j}|mn} =& (a^i_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}})_{,n} + (a^i_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}})_{,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{\underset{2}{j}|\underset{2}{m}} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{\underset{2}{p}|m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm}a^i_{\underset{2}{j}|p} = \\
=& a^i_{j,mn} + a^i_{j,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,n}a^p_j + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,n}a^i_p - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,n} + \\
&+ a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,m}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*p}_{ms}a^s_j - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mj}a^p_s - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms}a^s_p + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}a^i_s - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm}a^i_{\underset{2}{j}|p}\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.112}
$$

Takođe važi:

$$
\begin{aligned}
a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} &= -a^i_{j,\,\dot{s}}\frac{\partial}{\partial x^n}\Big(\frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^m}\Big) + a^i_{j,\,l}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^s}\Big(\frac{\partial G^l}{\partial \dot{x}^m}\Big)\frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^n} = \\
&= -a^i_{j,\,\dot{s}}\Big(\frac{\partial \Gamma^{*s}_{rm}}{\partial x^n}\,\dot{x}^r - \big(\Gamma^{*s}_{lm} + \frac{\partial \Gamma^{*s}_{rm}}{\partial \dot{x}^l}\dot{x}^r\big)G^l_{,\,\dot{n}}\Big) = \\
&= -a^i_{j,\,\dot{s}}\big(\Gamma^{*s}_{rm,\,n} - \Gamma^{*s}_{lm}\Gamma^{*l}_{rn} - \Gamma^{*l}_{rm,\,l}G^l_{,\,\dot{n}}\big)\dot{x}^r\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.113}
$$

1. Identitet Ričijevog tipa

Posmatrajmo razliku:

$$\begin{aligned}
a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{1}{|}nm} =& a^i_{j,mn} + a^i_{j,n\dot{s}}\xi^s_{,m} + a^i_{j,\dot{s}}\xi^s_{,mn} + \Gamma^{*i}_{pm,n}a^p_j + \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,n} - \\
& - \Gamma^{*p}_{jm,n}a^i_p - \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,n} + a^i_{j,m\dot{s}}\xi^s_{,n} + a^i_{j,l\dot{s}}\xi^l_{,m}\xi^s_{,n} + a^i_{j,l}\xi^l_{,m\dot{s}}\xi^s_{,n} + \\
& + \Gamma^{*i}_{pm,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,n} + \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,\dot{s}}\xi^s_{,n} - \Gamma^{*p}_{jm,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,n} - \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,\dot{s}}\xi^s_{,n} + \\
& + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,m} + \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,\dot{s}}\xi^s_{,m} + \Gamma^{*i}_{pn}\Gamma^{*p}_{sm}a^s_j - \Gamma^{*i}_{pn}\Gamma^{*s}_{jm}a^p_s - \\
& - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,m} - \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,\dot{s}}\xi^s_{,m} - \Gamma^{*p}_{jn}\Gamma^{*i}_{sm}a^s_p + \Gamma^{*p}_{jn}\Gamma^{*s}_{pm}a^i_s - \Gamma^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p} - \\
& - a^i_{j,nm} - a^i_{j,m\dot{s}}\xi^s_{,n} - a^i_{j,\dot{s}}\xi^s_{,nm} - \Gamma^{*i}_{pn,m}a^p_j - \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,m} + \\
& + \Gamma^{*p}_{jn,m}a^i_p + \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,m} - a^i_{j,n\dot{s}}\xi^s_{,m} - a^i_{j,l\dot{s}}\xi^l_{,n}\xi^s_{,m} - a^i_{j,l}\xi^l_{,n\dot{s}}\xi^s_{,m} - \\
& - \Gamma^{*i}_{pn,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,m} - \Gamma^{*i}_{pn}a^p_{j,\dot{s}}\xi^s_{,m} + \Gamma^{*p}_{jn,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,m} + \Gamma^{*p}_{jn}a^i_{p,\dot{s}}\xi^s_{,m} - \\
& - \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,n} - \Gamma^{*i}_{pm}a^p_{j,\dot{s}}\xi^s_{,n} - \Gamma^{*i}_{pm}\Gamma^{*p}_{sn}a^s_j + \Gamma^{*i}_{pm}\Gamma^{*s}_{jn}a^p_s + \\
& + \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,n} + \Gamma^{*p}_{jm}a^i_{p,\dot{s}}\xi^s_{,n} + \Gamma^{*p}_{jm}\Gamma^{*i}_{sn}a^s_p - \Gamma^{*p}_{jm}\Gamma^{*s}_{pn}a^i_s + \Gamma^{*p}_{nm}a^i_{j\underset{1}{|}p} = \\
=& \underset{1}{K}{}^i_{pmn}a^p_j - \underset{1}{K}{}^p_{jmn}a^i_p - a^i_{j,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^s_{rmn}\dot{x}^r - T^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p} \,,
\end{aligned} \tag{4.2.114}$$

gde je

$$\underset{1}{K}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\dot{s}}G^s_{,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\dot{s}}G^s_{,\dot{m}} \,. \tag{4.2.115}$$

Dakle, u opštem slučaju važi sledeća teorema:

Teorema 4.2.6. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu* $h-$*kovarijantnog diferenciranja, prvi identitet Ričijevog tipa ima oblik:*

$$\begin{aligned}
a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}nm} =& \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{1}{K}{}^{r_\alpha}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v}\underset{1}{K}{}^{p}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} - \\
& - a^{\cdots}_{\cdots,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^s_{rmn}\dot{x}^r - T^{*p}_{mn}a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} \,,
\end{aligned} \tag{4.2.116}$$

gde je $\underset{1}{K}$ *dato relacijom* (4.2.115) *i*

$$\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\cdots} = a^{r_1\ldots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v}, \quad \binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\cdots} = a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_{\beta-1}pr_{\beta+1}\ldots t_v} \,. \blacksquare \tag{4.2.117}$$

Može se pokazati:

$$\begin{aligned} \underset{1}{K}{}^{i}{}_{pmn}\dot{x}^r &= \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^n \partial \dot{x}^m} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^m \partial \dot{x}^n} + G^i_{sm}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^n} - G^i_{sn}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^m} = \\ &= G^i_{,\,n\dot{m}} - G^i_{,\,\dot{n}m} + G^i_{sm}G^s_{,\,\dot{n}} - G^i_{sn}G^s_{,\,\dot{m}}\ , \end{aligned} \tag{4.2.118}$$

gde je

$$G^i_{mn} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^n \partial \dot{x}^m} = G^i_{nm}\ .$$

Ako se izraz (4.2.114) dalje razradi, dobija se:

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{1}{|}nm} =& \underset{1}{K}{}^{i}{}_{pmn}a^p_j - \underset{1}{K}{}^{p}{}_{jmn}a^i_p - a^i_{j,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}\dot{x}^r - T^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p} = \\ =& (\underset{1}{K}{}^{i}{}_{pmn} + A^i_{ps}\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}l^r)a^p_j - (\underset{1}{K}{}^{p}{}_{jmn} + A^p_{js}\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}l^r)a^i_p - \\ &- a^i_j|_s\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}l^r - T^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p}\ , \end{aligned} \tag{4.2.119}$$

i konačno dobija:

$$a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{1}{|}nm} = \underset{1}{R}{}^{i}{}_{pmn}a^p_j - \underset{1}{R}{}^{p}{}_{jmn}a^p_j - a^i_j|_s\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}l^r - T^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{1}{|}p}\ , \tag{4.2.120}$$

gde smo treći Kartanov tenzor, naš prvi "novi" tenzor krivine označili sa:

$$\begin{aligned} \underset{1}{R}{}^{i}{}_{pmn} =& \underset{1}{K}{}^{i}{}_{pmn} + C^i_{ps}\underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}\dot{x}^r = \\ =& \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^s_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^s_{,\,\dot{m}} + \\ &+ C^i_{ps}\big(G^s_{,\,n\dot{m}} - G^s_{,\,\dot{n}m} + G^i_{qm}G^q_{,\,\dot{n}} - G^s_{qn}G^q_{,\,\dot{m}}\big)\ , \end{aligned} \tag{4.2.121}$$

i za koji važi:

$$\underset{1}{R}{}^{i}{}_{pmn}\ \dot{x}^p = \underset{1}{K}{}^{i}{}_{pmn}\ \dot{x}^p\ . \tag{4.2.122}$$

2. Identitet Ričijevog tipa

Posmatrajući sledeću razliku, dobija se:

$$
\begin{aligned}
a^i_{j\underset{2}{|}mn} - a^i_{j\underset{2}{|}nm} =& a^i_{j,mn} + a^i_{j,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,mn} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,n}a^p_j + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,n}a^i_p - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,n} + \\
&+ a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,m}\xi^s_{,\,n} + a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*p}_{ms}a^s_j - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mj}a^p_s - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{sm}a^s_p + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}a^i_s - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm}a^i_{j\underset{2}{|}p} - a^i_{j,\,nm} - a^i_{j,\,m\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - a^i_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,nm} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,m}a^p_j - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,m} + \\
&+ \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj,\,m}a^i_p + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,m} - a^i_{j,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - a^i_{j,\,l\dot{s}}\xi^l_{,\,n}\xi^s_{,\,m} - a^i_{j,\,l}\xi^l_{,\,n\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}a^p_j\xi^s_{,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj,\,\dot{s}}a^i_p\xi^s_{,\,m} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,m} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,n} - \\
&- \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}a^p_{j,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*p}_{ns}a^s_j + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{nj}a^p_s + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,n} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}a^i_{p,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n} + \\
&+ \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{sn}a^s_p - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}a^i_s + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{2}{|}p} = \\
=& \underset{2}{K}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{2}{K}{}^p{}_{jmn}a^i_p + a^i_{j,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{2}{|}p} = \\
=& (\underset{2}{K}{}^i{}_{pmn} + A^i_{ps}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}l^r)a^p_j - (\underset{2}{K}{}^p{}_{jmn} + A^p_{js}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}l^r)a^i_p - \\
&- a^i_j|_s\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}l^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{2}{|}p} = \\
=& \underset{2}{R}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{2}{R}{}^p{}_{jmn}a^p_j - a^i_j|_s\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}l^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn}a^i_{j\underset{2}{|}p}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.2.123}
$$

gde je

$$
\underset{2}{K}{}^i{}_{jmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mj,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{nj,m} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{np} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\dot{s}}G^s_{,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj,\dot{s}}G^s_{,\dot{m}}\ , \tag{4.2.124}
$$

pa je drugi tenzor krivine dat izrazom:

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{R}{}^i{}_{pmn} =& \underset{2}{K}{}^i{}_{pmn} + C^i_{ps}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r = \\
=& \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mj,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{nj,m} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{np} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\dot{s}}G^s_{,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj,\dot{s}}G^s_{,\dot{m}} + \\
&+ C^i_{ps}\big(G^s_{,n\dot{m}} - G^s_{,\dot{n}m} + G^i_{qm}G^q_{,\dot{n}} - G^s_{qn}G^q_{,\dot{m}}\big)\ .
\end{aligned}
\tag{4.2.125}
$$

Lako se pokazuje da je

$$
\underset{2}{R}{}^i{}_{pmn}\dot{x}^p = \underset{2}{K}{}^i{}_{pmn}\dot{x}^p\ . \tag{4.2.126}
$$

Drugi identitet Ričijevog tipa izražen je teoremom:

Teorema 4.2.7. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu* $h-$*kovarijantnog diferenciranja, drugi identitet Ričijevog tipa dat je izrazom:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{2}{K}{}^{r_\alpha}{}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{K}{}^{p}{}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - \\ &- a^{\cdots}_{\cdots,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^{s}{}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.127}$$

gde je $\underset{2}{K}$ *dato jednačinom* (4.2.124). ■

3. Identitet Ričijevog tipa

Posmatrajmo sada razliku:

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} =& \underset{1}{A}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{2}{A}{}^p_{jmn} a^i_p + 2a^i_{j\underset{\vee}{<mn>}} + 2a^i_{j\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} - a^i_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{1}{|}p} = \\ =&(\underset{1}{A}{}^i_{pmn} + A^i_{ps}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn} l^r) a^p_j - (\underset{2}{A}{}^p_{jmn} + A^p_{js}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn} l^r) a^i_p - \\ &- a^i_j|_s \underset{1}{K}{}^s{}_{rmn} l^r + 2a^i_{j\underset{\vee}{<mn>}} + 2a^i_{j\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} - a^i_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{1}{|}p} = \\ =&\underset{1}{B}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{2}{B}{}^p_{jmn} a^p_j - a^i_j|_s \underset{1}{K}{}^s{}_{rmn} l^r + 2a^i_{j\underset{\vee}{<mn>}} + 2a^i_{j\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} - \\ &- a^i_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{T}^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{1}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.128}$$

gde je

$$\underset{1}{A}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ , \tag{4.2.129}$$

$$\underset{2}{A}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ , \tag{4.2.130}$$

$$\underset{1}{B}{}^i_{pmn} = \underset{1}{A}{}^i_{pmn} + C^i_{ps}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r, \qquad \underset{2}{B}{}^i_{pmn} = \underset{2}{A}{}^i_{pmn} + C^i_{ps}\underset{1}{K}{}^s{}_{rmn}\dot{x}^r \ , \tag{4.2.131}$$

$$a^i_{j<mn>} = M^{*i}_{pm}(a^p_{j,n} + a^p_{j,\dot{s}}\xi^s_{,n}) - M^{*p}_{jm}(a^i_{p,n} + a^i_{p,\dot{s}}\xi^s_{,n}) \ , \tag{4.2.132}$$

$$a^i_{j\leqslant mn\geqslant} = (\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp}\Gamma^{*s}_{jn} - \Gamma^{*i}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*s}_{nj}) a^p_s \ . \tag{4.2.133}$$

Može se pokazati da važi:

$$\underset{1}{B}{}^{i}_{pmn}\dot{x}^p = \underset{1}{A}{}^{i}_{pmn}\dot{x}^p, \quad \underset{2}{B}{}^{i}_{pmn}\dot{x}^p = \underset{2}{A}{}^{i}_{pmn}\dot{x}^p \ , \tag{4.2.134}$$

i sledeća teorema:

Teorema 4.2.8. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu* $h-$*kovarijantnog diferenciranja, treći identitet Ričijevog tipa dat je izrazom:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{1}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{2}{A}{}^{p}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - a^{\cdots}_{\cdots,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r + \\ &+ 2a^{\cdots}_{\cdots\underset{\vee}{<mn>}} + 2a^{\cdots}_{\cdots\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} + \widetilde{T}^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.135}$$

gde su $\underset{1}{A}$ *i* $\underset{2}{A}$ *dati jednačinama* (4.2.129) *i* (4.2.130) *redom, i*

$$a^{\cdots}_{\cdots<mn>} = \sum_{\alpha=1}^{u} M^{*r_\alpha}_{pm}\binom{p}{r_\alpha}(a^{\cdots}_{\cdots,\,n} + a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}}\xi^{s}_{,\,n}) - \sum_{\beta=1}^{u} M^{*p}_{t_\beta m}\binom{t_\beta}{p}(a^{\cdots}_{\cdots,\,n} + a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}}\xi^{s}_{,\,n}) \ , \tag{4.2.136}$$

$$\begin{aligned} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\leqslant mn\geqslant} = &\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u} \Gamma^{*r_\alpha}_{\underset{\smile}{[pm}}\Gamma^{*r_\beta}_{\underset{\smile}{ns]}}\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\Gamma^{*r_\alpha}_{\underset{\smile}{[pm}}\Gamma^{*s}_{\underset{\smile}{nt_\beta]}}\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots} + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=1}^{v}\Gamma^{*p}_{\underset{\smile}{[t_\alpha m}}\Gamma^{*s}_{\underset{\smile}{nt_\beta]}}\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots} \ , \end{aligned} \tag{4.2.137}$$

gde je

$$\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\cdots} = a^{r_1\ldots r_{\alpha-1}pr_{\alpha+1}\ldots r_u}_{t_1\ldots t_{\beta-1}sr_{\beta+1}\ldots t_v} \ . \qquad \blacksquare$$

4. Identitet Ričijevog tipa

Takođe smo posmatrali razliku:

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^i_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =& \underset{3}{A}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{4}{A}{}^p_{jmn} a^i_p - 2a^i_{j\underset{\vee}{<mn>}} - 2a^i_{j\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} + \\ &+ a^i_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r - T^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{2}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.138}$$

gde je

$$\underset{3}{A}{}^i_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ , \tag{4.2.139}$$

$$\underset{4}{A}{}^i_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ . \tag{4.2.140}$$

Teorema 4.2.9. *Primenjujući prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja u redosledu* $(2,1)$*, dobija se četvrti identitet Ričijevog tipa u generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}m\underset{1}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =& \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{3}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{4}{A}{}^p_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - a^{\cdots}_{\cdots,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r - \\ &- 2a^{\cdots}_{\cdots\underset{\vee}{<mn>}} - 2a^{\cdots}_{\cdots\underset{\vee}{\leqslant mn\geqslant}} - T^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.141}$$

gde su $\underset{3}{A}$ *i* $\underset{4}{A}$ *definisani izrazima* (4.2.139) *i* (4.2.140) *redom.* ■

5. Identitet Ričijevog tipa

Posmatrali smo i razliku:

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{2}{|}nm} =& \underset{5}{A}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{6}{A}{}^p_{jmn} a^i_p + 2a^i_{j<\underline{mn}>} + 2a^i_{j\leqslant\underline{mn}\geqslant} - a^i_{,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r - \\ &- \Gamma^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{1}{|}p} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mn} a^i_{j\underset{2}{|}p} \ , \end{aligned} \tag{4.2.142}$$

gde je

$$\underset{5}{A}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ , \tag{4.2.143}$$

$$\underset{6}{A}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \ . \tag{4.2.144}$$

Dakle, važi teorema:

Teorema 4.2.10. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, važi peti identitet Ričijevog tipa:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}nm} =& \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{5}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{6}{A}{}^{p}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^{s}_{rmn} \dot{x}^r + \\ &+ 2a^{\cdots}_{\cdots<\underline{mn}>} + 2a^{\cdots}_{\cdots\leqslant\underline{mn}\geqslant} - \Gamma^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} \,, \end{aligned} \tag{4.2.145}$$

gde su $\underset{5}{A}$ *i* $\underset{6}{A}$ *dati izrazima* (4.2.143) *i* (4.2.144) *redom, i*

$$\begin{aligned} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\leqslant mn\geqslant} =& \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1} \sum_{\beta=2}^{u} \Gamma^{*r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} \Gamma^{*r_\beta}_{\underset{\smile}{sn}]} \binom{p}{r_\alpha} \binom{s}{t_\beta} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\alpha=1}^{u} \sum_{\beta=1}^{v} \Gamma^{*r_\alpha}_{[\underset{\smile}{pm}} \Gamma^{*s}_{\underset{\smile}{t_\beta n}]} \binom{p}{r_\alpha} \binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1} \sum_{\beta=2}^{v} \Gamma^{*p}_{[\underset{\smile}{t_\alpha m}} \Gamma^{*s}_{\underset{\smile}{t_\beta n}]} \binom{t_\alpha}{p} \binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} \,. \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{4.2.146}$$

6. Identitet Ričijevog tipa

U sledećoj razlici se dobija:

$$\begin{aligned} a^{i}_{j\underset{1}{|}mn} - a^{i}_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} =& \underset{7}{A}{}^{i}_{pmn} a^{p}_{j} - \underset{8}{A}{}^{p}_{jmn} a^{i}_{p} + 2a^{i}_{j<mn>} - 2a^{i}_{j\leqslant\underline{mn}\geqslant} + \\ &+ a^{i}_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^{s}_{rmn} \dot{x}^r - M^{*p}_{mn} a^{i}_{j\underset{1}{|}p} \,, \end{aligned} \tag{4.2.147}$$

gde je

$$\underset{7}{A}{}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}} \,, \tag{4.2.148}$$

$$\underset{8}{A}{}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}} \,. \tag{4.2.149}$$

U opštem slučaju važi teorema:

Teorema 4.2.11. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, šesti identitet Ričijevog tipa ima oblik:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} =& \sum_{\alpha=1}^{u} \underset{7}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{8}{A}{}^{p}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - 2a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r + \\ &+ 2a^{\cdots}_{\cdots<mn>} + 2a^{\cdots}_{\cdots\leqslant mn\geqslant} \,, \end{aligned} \tag{4.2.150}$$

gde su $\underset{7}{A}$ *i* $\underset{8}{A}$ *dati jednačinama* (4.2.148) *i* (4.2.149) *redom, i*

$$\begin{aligned} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\leqslant mn\geqslant} =& \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u} (\Gamma^{*r_\alpha}_{[pm]}\Gamma^{*r_\beta}_{sn} + \Gamma^{*r_\alpha}_{pn}\Gamma^{*r_\beta}_{[sm]}) \binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta} a^{\cdots}_{\cdots} - \\ &- \sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v} (\Gamma^{*r_\alpha}_{[pm]}\Gamma^{*s}_{t_\beta n} + \Gamma^{*r_\alpha}_{pn}\Gamma^{*s}_{[t_\beta n]}) \binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=2}^{v} (\Gamma^{*p}_{[t_\alpha m]}\Gamma^{*s}_{t_\beta n} + \Gamma^{*p}_{t_\alpha n}\Gamma^{*s}_{[t_\beta n]}) \binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s} a^{\cdots}_{\cdots} \,. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

7. Identitet Ričijevog tipa

Potom smo posmatrali razliku:

$$\begin{aligned} a^{i}_{j\underset{1}{|}mn} - a^{i}_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =& \underset{9}{A}{}^{i}_{pmn} a^{p}_{j} - \underset{10}{A}{}^{p}_{jmn} a^{i}_{p} + 2a^{i}_{j<nm>} - 2a^{i}_{j\leqslant \underline{nm}\geqslant} + \\ &+ a^{i}_{,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r - \Gamma^{*p}_{mn} a^{i}_{j\underset{1}{|}p} + \Gamma^{*p}_{nm} a^{i}_{j\underset{2}{|}p} \,, \end{aligned} \tag{4.2.151}$$

gde je

$$\underset{9}{A}{}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}} \,, \tag{4.2.152}$$

$$\underset{10}{A}{}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}} \,. \tag{4.2.153}$$

Teorema 4.2.12. *Sedmi identitet Ričijevog tipa u generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, ima oblik:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{9}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{10}{A}{}^{p}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r + \\ &+ 2a^{\cdots}_{\cdots<nm>} + 2a^{\cdots}_{\cdots\leqslant nm\geqslant} - \left(\Gamma^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - \Gamma^{*p}_{nm} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}\right), \end{aligned} \tag{4.2.154}$$

gde su $\underset{9}{A}$ *i* $\underset{10}{A}$ *dati jednačinama* (4.2.152) *i* (4.2.153) *redom.* ■

8. Identitet Ričijevog tipa

Ako posmatramo razliku:

$$\begin{aligned} a^{i}_{j\underset{2}{|}mn} - a^{i}_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = &\underset{11}{A}{}^{i}_{pmn} a^{p}_{j} - \underset{12}{A}{}^{p}_{jmn} a^{i}_{p} - 2a^{i}_{j<nm>} + 2a^{i}_{j\leqslant \underline{nm}\geqslant} + \\ &+ a^{i}_{,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mn} a^{i}_{j\underset{1}{|}p} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm} a^{i}_{j\underset{2}{|}p}, \end{aligned} \tag{4.2.155}$$

gde je

$$\underset{11}{A}{}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}}, \tag{4.2.156}$$

$$\underset{12}{A}{}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}} G^{s}_{,\,\dot{m}}. \tag{4.2.157}$$

Osmi identitet Ričijevog tipa u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ izražen je sledećom teoremom:

Teorema 4.2.13. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, osmi identitet Ričijevog tipa dat je izrazom:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}mn} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{11}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{12}{A}{}^{p}_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}}\underset{1}{K}{}^{s}_{rmn}\dot{x}^r - \\ &- 2a^{\cdots}_{\cdots<nm>} + 2a^{\cdots}_{\cdots\leqslant mn\geqslant} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mn} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p}, \end{aligned} \tag{4.2.158}$$

gde su $\underset{11}{A}$ *i* $\underset{12}{A}$ *dati izrazima* (4.2.156) *i* (4.2.157) *redom, i*

$$\begin{aligned} a^{r_1\dots r_u}_{t_1\dots t_v\leqslant mn\geqslant} =& \sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{u-1}\sum_{\beta=2}^{u}(\Gamma^{*r_\alpha}_{mp}\Gamma^{*r_\beta}_{[ns]}+\Gamma^{*r_\alpha}_{[np]}\Gamma^{*r_\beta}_{ms})\binom{p}{r_\alpha}\binom{s}{r_\beta}a^{\cdots}_{\dots}-\\ &-\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}(\Gamma^{*r_\alpha}_{mp}\Gamma^{*s}_{[nt_\beta]}+\Gamma^{*r_\alpha}_{[np]}\Gamma^{*s}_{mt_\beta})\binom{p}{r_\alpha}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\dots}+\\ &+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha<\beta)}}^{v-1}\sum_{\beta=1}^{v}(\Gamma^{*p}_{mt_\alpha}\Gamma^{*s}_{[nt_\beta]}+\Gamma^{*p}_{[nt_\alpha]}\Gamma^{*s}_{mt_\beta})\binom{t_\alpha}{p}\binom{t_\beta}{s}a^{\cdots}_{\dots}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9. Identitet Ričijevog tipa

U sledećoj razlici se dobija:

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{2}{|}mn}-a^i_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =& \underset{13}{A}{}^i_{pmn}a^p_j-\underset{14}{A}{}^p_{jmn}a^i_p-2a^i_{j<mn>}+2a^i_{j\leqslant\underline{nm}\geqslant}+\\ &+a^i_{,\dot s}\underset{1}{K}{}^s_{rmn}\dot x^r+M^{*p}_{nm}a^i_{j\underset{2}{|}p}\,, \end{aligned} \tag{4.2.159}$$

gde je

$$\underset{13}{A}{}^i_{pmn} = \widetilde\Gamma^{*i}_{mp,n}-\widetilde\Gamma^{*i}_{np,m}+\widetilde\Gamma^{*s}_{mp}\widetilde\Gamma^{*i}_{ns}-\widetilde\Gamma^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm}-\widetilde\Gamma^{*i}_{mp,\,\dot s}G^s_{,\,\dot n}+\widetilde\Gamma^{*i}_{np,\,\dot s}G^s_{,\,\dot m}\,, \tag{4.2.160}$$

$$\underset{14}{A}{}^i_{pmn} = \widetilde\Gamma^{*i}_{mp,n}-\widetilde\Gamma^{*i}_{np,m}+\Gamma^{*s}_{pm}\widetilde\Gamma^{*i}_{ns}-\widetilde\Gamma^{*s}_{np}\widetilde\Gamma^{*i}_{ms}-\widetilde\Gamma^{*i}_{mp,\,\dot s}G^s_{,\,\dot n}+\widetilde\Gamma^{*i}_{np,\,\dot s}G^s_{,\,\dot m}\,. \tag{4.2.161}$$

U opštem slučaju važi:

Teorema 4.2.14. *Deveti identitet Ričijevog tipa u generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, oblika je:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\dots\underset{2}{|}mn}-a^{\cdots}_{\dots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} =& \sum_{\alpha=1}^{u}\underset{13}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn}\binom{p}{r_\alpha}a^{\cdots}_{\dots}-\sum_{\beta=1}^{v}\underset{14}{A}{}^p_{t_\beta mn}\binom{t_\beta}{p}a^{\cdots}_{\dots}-a^{\cdots}_{\dots,\dot s}\underset{1}{K}{}^s_{rmn}\dot x^r-\\ &-2a^{\cdots}_{\dots<mn>}+2a^{\cdots}_{\dots\leqslant nm\geqslant}+M^{*p}_{nm}a^i_{j\underset{2}{|}p}\,, \end{aligned} \tag{4.2.162}$$

gde su $\underset{13}{A}$ *i* $\underset{14}{A}$ *dati jednačinama* (4.2.160) *i* (4.2.161) *redom.* ■

10. Identitet Ričijevog tipa

Na kraju, posmatrali smo razliku:

$$a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} = \underset{15}{A}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{15}{A}{}^p_{jmn} a^i_p + a^i_{,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r + \Gamma^{*p}_{nm} a^i_{j\underset{2}{|}p} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm} a^i_{j\underset{1}{|}p} \,, \tag{4.2.163}$$

gde je

$$\underset{15}{A}{}^i_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}} G^s_{,\,\dot{m}} \,. \tag{4.2.164}$$

Deseti identitet Ričijevog tipa izražen je teoremom:

Teorema 4.2.15. *U generalisanom Finslerovom prostoru* $\mathbf{GF_N}$*, u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja, deseti identitet Ričijevog tipa ima oblik:*

$$\begin{aligned} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{15}{A}{}^{r_\alpha}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{15}{A}{}^{p}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - \\ &- a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nm} a^{\cdots}_{\cdots\underset{1}{|}p} - \Gamma^{*p}_{nm} a^{\cdots}_{\cdots\underset{2}{|}p} \,, \end{aligned} \tag{4.2.165}$$

gde je $\underset{15}{A}$ *dato jednačinom* (4.2.164). ■

Jednakost (4.2.165) može biti napisana i u sledećom obliku:

$$\begin{aligned} a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^{r_1\ldots r_u}_{t_1\ldots t_v\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} = &\sum_{\alpha=1}^{u} \underset{3}{K}{}^{r_\alpha}_{pmn} \binom{p}{r_\alpha} a^{\cdots}_{\cdots} - \sum_{\beta=1}^{v} \underset{3}{K}{}^{p}_{t_\beta mn} \binom{t_\beta}{p} a^{\cdots}_{\cdots} - \\ &- a^{\cdots}_{\cdots,\,\dot{s}} \underset{1}{K}{}^s_{rmn} \dot{x}^r \,, \end{aligned} \tag{4.2.166}$$

gde je

$$\begin{aligned} \underset{3}{K}{}^i_{jmn} = &\underset{15}{A}{}^i_{jmn} + \Gamma^{*p}_{nm} T^{*i}_{pj} = \\ = &\Gamma^{*i}_{jm,n} - \Gamma^{*i}_{nj,m} + \Gamma^{*p}_{jm}\Gamma^{*i}_{np} - \Gamma^{*p}_{nj}\Gamma^{*i}_{pm} + \Gamma^{*p}_{nm}(\Gamma^{*i}_{pj} - \Gamma^{*i}_{jp}) + \\ &+ P^{*p}_{jm,\,\dot{s}} \xi^s_{,\,n} - \Gamma^{*p}_{nj,\,\dot{s}} \xi^s_{,\,m} \,. \end{aligned} \tag{4.2.167}$$

4.2.3 Novi Kartanovi tenzori i pseudotenzori u $\mathbf{GF_N}$

Veličine koje smo naveli u prethodnom odeljku $\underset{\theta}{R},\ \theta = 1,2$:

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}^{i}{}_{pmn} =& \underset{1}{K}^{i}{}_{pmn} + C^{i}_{ps}\underset{1}{K}^{s}{}_{rmn}\dot{x}^{r} = \\ =& \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}} + \\ &+ C^{i}_{ps}\left(G^{s}_{,\,n\dot{m}} - G^{s}_{,\,\dot{n}m} + G^{i}_{qm}G^{q}_{,\,\dot{n}} - G^{s}_{qn}G^{q}_{,\,\dot{m}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{R}^{i}{}_{pmn} =& \underset{2}{K}^{i}{}_{pmn} + C^{i}_{ps}\underset{1}{K}^{s}{}_{rmn}\dot{x}^{r} = \\ =& \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mj,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{nj,m} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{np} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{mj,\dot{s}}G^{s}_{,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*p}_{nj,\dot{s}}G^{s}_{,\dot{m}} + \\ &+ C^{i}_{ps}\left(G^{s}_{,n\dot{m}} - G^{s}_{,\dot{n}m} + G^{i}_{qm}G^{q}_{,\dot{n}} - G^{s}_{qn}G^{q}_{,\dot{m}}\right),\end{aligned}$$

su tenzori a veličine $\underset{t}{A},\ t = \overline{1,15}$:

$$\underset{1}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{2}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{3}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{4}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{5}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{6}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{7}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{8}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{9}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{10}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{11}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \Gamma^{*s}_{pn}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{12}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \Gamma^{*i}_{pn,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\Gamma^{*i}_{sn} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \Gamma^{*i}_{pn,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{13}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \widetilde{\Gamma}^{*s}_{mp}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{14}{A}^{i}_{pmn} = \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ms} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{mp,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

$$\underset{15}{A}^{i}_{pmn} = \Gamma^{*i}_{pm,n} - \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,m} + \Gamma^{*s}_{pm}\widetilde{\Gamma}^{*i}_{ns} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{np}\Gamma^{*i}_{sm} - \Gamma^{*i}_{pm,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{n}} + \widetilde{\Gamma}^{*i}_{np,\,\dot{s}}G^{s}_{,\,\dot{m}},$$

imaju oblik i ulogu tenzora krivine, ali nisu tenzori. Na primer, iz jednakosti (4.2.147) se dobija:

$$a^i_{\underset{1}{|}mn} - a^i_{\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = \underset{7}{A}{}^i_{pmn} a^p + T^{*i}_{pm}(a^p_{,\,n} + a^p_{,\,\dot{s}}\xi^s_{,\,n}),$$

pa se može videti da $\underset{7}{A}$ nije tenzor, zato što izraz u zagradi nije tenzor. Ovi veličine $\underset{t}{A},\ t = \overline{1,15}$ smo nazvali **pseudotenzori krivine** od prve do petnaeste vrste u generalisanom Finslerovom prostoru $\mathbf{GF_N}$ u odnosu na prvu i drugu vrstu h-kovarijantnog diferenciranja.

U slučaju kada je:

- $g_{ij}(x, \dot{x}) = g_{ji}(x, \dot{x})$, generalisani Finslerov prostor $\mathbf{GF_N}$ se redukuje na uobičajan Finslerov prostor $\mathbf{F_N}$;
- $g_{ij}(x) \neq g_{ji}(x)$, generalisani Finslerov prostor $\mathbf{GF_N}$ se redukuje na generalisan Rimanov prostor $\mathbf{GR_N}$;
- $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$, generalisani Finslerov prostor $\mathbf{GF_N}$ se redukuje na Rimanov prostor $\mathbf{R_N}$.

Literatura

[1] The Accidental Mathematician, *La Sagrada Familia and the hyperbolic paraboloid,* http://ilaba.wordpress.com/2009/06/14/la-sagrada-familia-and-the-hyperbolic-paraboloid/, (2009), datum pristupa: 04.06.2013.

[2] Aleksandrov A. D., *O beskonechno malyh izgibaniyah neregulyarnyh poverhnostei,* Matem. sbornik, 1 (43), 3 (1936), 307–321.

[3] Alexandrov V. A., *Remarks on Sabitov's conjecture that volume is stationary under an infinitesimal bending of a surface ,* Sibirsk. Math. Zh., 5, (1989), 16–24.

[4] Alexandrov V. A., *On the total mean curvature of non-rigid surfaces,* Sibirsk. Math. Zh., 50:5, (2009), 963–996.

[5] Alexandrov V. A., *New manifestions of the Darboux-s rotation and translation fields of a surface,* arXiv:0910.5164v1 [math.DG], (2009).

[6] Algren F.J., Rivin I., *The mean curvature integral is invariant under bending,* Geometry and Topology Monographs, 1, (1998), 1–21.

[7] arcspace.com, *La Rioja, Bodegas Ysios, Santiago Calatrava,* http://www.arcspace.com/features/santiago-calatrava/la-rioja-bodegas-ysios/, (2000), datum pristupa: 08.05.2013.

[8] Bocher S., Yano K., *Tensor-fields in non-symmetric connections,* Annals of mathematics, Vol. 56, No 3, 504–519.

[9] Bustler, *Atelier Hitoshi Abe: Shiki Community Hall, Kumamoto, Japan, 2002,* http://www.bustler.net/index.php/article/sia_getz_architecture_prize_for_emergent_architecture_for_hitoshi_abe/, (2008), datum pristupa: 25.04.2013.

[10] Calladine C.R., *Theory of shell structures,* Cambrige University Press, (1983).

[11] Capovilla R., Guven J., *Geometry of deformations of relativistic memebranes,* Phys. Rev. D, 51, (1995), 6736–6743.

[12] Cartan E., *Les Espaces de Finsler,* Paris, (1934).

[13] Chakravorty D., Bandyopadhyayt J. N., Sinhat P. K., *Finite element free vibration analysis of conoidal shells,* Computers Strucrures Vol. Xi. No 6, (1995), 915–918.

[14] Cohn-Vossen S.E., *Nekotorye voprosy differ. geometrii c celom ,* J. Fizmatgiz, Moskva, (1959).

[15] **Cvetković M.**, *Curvature based functions variations,* FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ), Ser. Math.Inform. 28, No 1, (2013), 51–63.

[16] **Cvetković M.**, Zlatanović M., *New Cartan's tensors and pseudotensors in a Generalized Finsler Space,* Filomat 28:1 (2014).

[17] Ćirić M., *Infinitesimalne deformacije krivih, površi i mnogostrukosti - doktorska disertacija,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, (2012).

[18] Ilhan Koman, *Ilhan Koman's Works,* http://www.koman.org/work/work_1980-83pi.html, (2008), datum pristupa: 16.05.2013.

[19] Developable Surface Boat Designs, *Tuesday, July 27, 2010,* http://developable-surface-boat-designs.blogspot.com/2010_07_01_archive.html, (2010), datum pristupa: 15.05.2013.

[20] Du Q., Liu C., Wang X., *Simulating the deformation of vesicle membranes under elastic bending energy in three dimensions,* Journal of computational physics, 212, (2006), 757–777.

[21] Duncan B.S., Olson A.J, *Shape analysis of molecular surfaces,* Biopolymers, Vol. 33, No 2, (1993), 231–238.

[22] Eisenhart L.P., *An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus,* Princeton University Press, (1947).

[23] Efimov N., *Kachestvennye voprosy teorii deformacii poverhnostei,* UMN 3.2 , (1948), 47–158.

[24] Ehlmann B.L., Viles H.A., Bourke M.C., *Quantitative morphologic analysis of boulder shape and surface texture to infer environmental history: A case study of rock breakdown at the Ephrata Fan,* Journal of Geophysical Research F, Vol. 133, No F02012, (2012), 148–227.

[25] ENCYCLOPDIE DES FORMES MATHMATIQUES REMARQUABLES, *Surface de Gaudi,* http://www.mathcurve.com/surfaces/gaudi/gaudi.shtml, (2006), datum pristupa: 04.06.2013.

[26] Finsler P., *Uber Kurven und Flachen in Allgemeinen Raumen,* Dissertation, Gottingen, (1918).

[27] Flickriver viewer software, *Morton H. Meyerson Symphony Center,* http://www.flickriver.com/photos/maconahey/4020648405/, (2009), datum pristupa: 25.04.2013.

[28] FlySportUSA, *Van's Aircraft RV-12 Light Sport Kit Airplane,* http://www.flysportusa.com/homebuilt_lsa.php, (2013), datum pristupa: 09.05.2013.

[29] Fomenko V. T., *Nekotorye rezultaty teorii beskonechno malyh izgibanii poverhnostei,* Mat. Sb., T. 72(114):3, (1967), UDK 513.736.4, 388–411.

[30] Gray A., *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica,* 2nd ed. CRC Press, (1998).

[31] Green A.E, Zerna W., *Theoretical elasticity,* 2nd ed. Oxford University Press, (1968).

[32] Griffin L.D, *The intrinsic geometry of the cerebral cortex,* Journal of Theoretical Biology, Vol. 166, No 3, (1994), 261–273.

[33] Glaeser G., Gruber F., *Developable surfaces in contemporary architecture,* Journal of Mathematics and Arts, Vol. 01, No 01, (2007), 1–15.

[34] Hans Hollein, *Um-und Zubau Haas Haus,* http://www.hollein.com/ger/Architektur/Nach-Typus/Shops-und-Interiors/Um-und-Zubau-Haas-Haus, (2004), datum pristupa 08.05.2013.

[35] Harms P., *Sobolev metrics on shape space of surfaces - Dissertation,* Universitat Wien, (2010).

[36] Helfrich W., *Elastic properties of lipid bilayers-theory and possible experiments,* Z. Naturforsch, C, 28, (1973), 693–703.

[37] Ivanova-Karatopraklieva I., Sabitov I., *Bending of surfaces II,* J. Math. Sci., New York 74 No 3, (1995), 997–1043.

[38] Jensen T., *Shape Operators of Surfaces in R^3,* Department of Mathematics, KNU, (2010).

[39] Klingenberg W., *A course in differential geometry,* SRC Springer-Verlag, New York, MR0474045, ZbI 0366,53001, (1978).

[40] Kurtek S., Klassen E., Ding Z., Jacobson S.W., Jacobson J.L., Avison M.J., Srivastava A., *Parameterization-invariant shape comparisons of anatomical surfaces,* IEEE Medical Imaging, (2010), 849–858.

[41] Le dfouloir de krn, *Franck Gehry,* http://krn-defouloir.blogspot.com/2008/07/franck-gehry.html, (2008), datum pristupa 09.05.2013.

[42] Lipowsky R., *The conformation of membranes,* Nature, 349, (1991), 475–481.

[43] Manoff S., *Deviation operator and deviation equations over spaces with affine connections and metrics,* Journal of Geometry and Physics, Vol. 39, No 4, (2001), 337-350.

[44] Massachusetts Institute of Technology, *Outside Court House,* http://classof2014.mit.edu/ring/delivery.html, (2013), datum pristupa: 25.04.2013.

[45] Matt's Photo Blog, *Gaud designed schoolhouse with cantilevered style roof,* http:// internetonastick.net/gallery/v/eurotrip2009/IMG_1345.JPG.html, (2009), datum pristupa: 04.06.2013.

[46] Medina A., *Antoni Gaudi's ingenious curves made a temporary building last more than 100 years,* http://planta1.com/forum/blog.php?do=listpage=4, (2013), datum pristupa: 24.04.2013.

[47] MID-CENTURIA: Art, Design and Decor from the Mid-century and beyond, *Architect Jules Gregory House,* http://www.midcenturia.com/2011/01/architect-jules-gregory-house_08.html, (2011), datum pristupa: 08.05.2013.

[48] Minčić S.M., Velimirović Lj.S., *Diferencijalna geometrija krivih i površi ,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, (2007).

[49] Minčić S.M., Velimirović Lj.S., *Tenzorski račun ,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, (2009).

[50] Miničić S., Zlatanović M., *New commutation formulas for δ-differentation in a generalized Finsler space,* Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. 12, (2010), 145–157.

[51] Miničić S., Zlatanović M., *Commutation formulas for δ-differentation in a generalized Finsler space,* Kragujevac Journal of Mathematics, Vol. 35, No 2, (2011), 277–289.

[52] Miničić S., Zlatanović M., *Derived curvature tensors in generalized Finsler space,* Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. 13, (2011), 179–190.

[53] Mishra C. K., *On C^h-Recurrent and C^v-Recurrent Finsler Spaces of Second Order,* Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, No 17, (2008), 801–810.

[54] The Modern Art Encyclopedia, *Constructivism,* http://www.gd.drake.edu/spring2011/amendez/modartencyclopedia/constructivism.html, (2011), datum pristupa: 15.05.2013.

[55] MoMA, *Antoine Pevsner (French, 1886-1962), Developable Column,* http://www.moma.org /collection/object.php?object_id=80820, (2013), datum pristupa: 15.05.2013.

[56] Mutz M., Helfrich W., *Bending rigidities of some biological membranes as obtained from Fourier analysis of contour sections,* J. Phys. France, 51, (1990), 991–1002.

[57] OpenBuildings, *Guggenheim Museum, Bilbao,* http://openbuildings.com/buildings/guggenheim-museum-bilbao-profile-6485, (2013), datum pristupa: 09.05.2013.

[58] Oprea J., *Differential Geometry and Its Applications,* The Mathematical Association of America Edition, (2007), (in English).

[59] Paul Bourke, *dForms, Concept by Tony Wills,* http://paulbourke.net/geometry/dform/, (2013), datum pristupa: 15.05.2013.

[60] Peggy Guggenheim Collection, *Antoine Pevsner,* http://www.guggenheim-venice.it/inglese /collections/artisti/dettagli/pop_up_opera2.php?id_opera=270page=, (2008), datum pristupa: 15.05.2013.

[61] Pogorelov A. V., *Vneshnaya geometriya vypuklyh pov.,* Moskva, (1969).

[62] PSS-ARCHI.EU, *Gehry Tower a Hanovre (Allemagne),* http://www.pss-archi.eu/forum/ viewtopic.php?pid=96713, (2001), datum pristupa: 09.05.2013.

[63] Rile H., *Prostorne krovne konstrukcije,* Građevinska knjiga Beograd, (1977).

[64] Riemann B., *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (1854),* Ges. Math. Werke, Leipzig, (1892), reproduced by Dover Publications (1953), 272–287.

[65] Rund H., *The Differential Geometry of Finsler Space,* Moskow, (1981), (in Russian).

[66] Shamihoke A.C., *A Note on a Curvature Tensor in a Generalized Finsler Space,* Tensor, N.S., 15, (1964), 20–22.

[67] Tu Z.C., Ou-Yang Z.C., *A geometric theory on the elasticity of bio-membranes,* J. Phys. A: Math. Gen., 37, (2004), 11407–11429.

[68] Tu Z.C., *Elastic theory of membranes,* AAPPS Bulletin 16, No 3, (2006), 30–33.

[69] Vekua I., *Obobschennye analiticheskie funkcii,* Moskva, (1959).

[70] Velimirović Lj., *Beskonačno male deformacije toroidnih rotacionih površi - magistarska teza,* Filozofski fakultet, Niš, (1991).

[71] Velimirović Lj., *Beskonačno mala savijanja površi - doktorska disertacija,* Matematički institut, Beograd, (1998).

[72] Velimirović Lj., Radivojević G., Kostić D., *Analysis of Hyperbolic Paraboloids at Small Deformations,* Facta Universitatis, Series Arhitecture and Civil Engineering, Vol. 1, No 5, (1998), 627–637.

[73] Velimirović Lj., *Analysis of bending of surfaces using program package Mathematica,* Facta Universitatis-Series Arhitecture and Civil Engineering, Vol. 2, No 1, (1999), 15–21.

[74] Velimirović Lj., *On variation of the volume under infinitesimal bending of a closed rotational surface,* Novi Sad J. Math. 29(3), (1999), 377–386.

[75] Velimirović Lj., Radivojević G., Kostić D., *Geometric Analysis of Hyperbolic Paraboloids as Building Technique Element,* Buletins for Applied Mathematics (BAM) Hungary, (2000), PC-129.

[76] Velimirović Lj., Radivojević G., *On Conoid Surfaces in Function of Space Roof Construction,* Annuaire de l'Universite d'Architecture, de Genie Civil et de Geodesie-Sofia, (2000-2001), 43–52.

[77] Velimirović Lj., *Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending,* Facta Universitates, Vol. 3, No 11, (2001), 135–148.

[78] Velimirović Lj., Stanković M., Radivojević G., *Modeling Conoid Surfaces,* Facta Universitatis - Series Architecture and Civil Engineering Vol. 2, No 4, (2002), 261–266.

[79] Velimirović Lj., Stanković M., *O konoidnim povrsima pomocu Mathematica-e,* Zbornik radova XXI jugoslovenskog savetovanja za nacrtnu geometriju i inzenjersku grafiku, MonGeometrija, (2002), 77–82.

[80] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, *Developable Surfaces and Applications,* Proceedings of 24th National and 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008, (2008), 394–402.

[81] Velimirović Lj., *Infinitesimal bending,* Faculty of Science and Mathematics, Niš, (2009), ISBN 86-83481-42-5.

[82] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, Ćirić M., Velimirović N., *Ruled Surfaces in Architecture,* Int J. on IT and Security, No 4, (2009), 21–30.

[83] Velimirović Lj., Velimirović M., **Cvetković M.**, *Ruled Surfaces and Applications,* Proceedings of 23th International Conference on Systems for Automation Engineering and Research, (SAER-2009), 207–212.

[84] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, Ćirić M., Velimirović N., *Gaudi Surfaces,* Proceedings of 25th International Scientific Conference for Geometry and Engineering Graphics "moNGeometrija2010", (2010).

[85] Velimirović Lj., Stanimirović P., Zlatanović M., *Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,* Prirodno-matematički fakultet, Niš, monografija, (2010).

[86] Velimirović Lj., Ćirić M.S., *Visualization of the Willmore energy of the surfaces,* Proccedings of the 25th international scientific conference MoNGeometrija, Beograd, (2010), 650–656.

[87] Velimirović Lj., Ćirić M.S., **Cvetković M.**, *Change of the Willmore energy under infinitesimal bending of membranes,* Computers and Mathematics with Applications, Vol. 59, No 12, (2010), 3679–3686.

[88] Velimirović Lj., Ćirić M.S., Velimirović N.M., *On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations,* Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61, (2011), 3181–3190.

[89] Velimirović Lj., Ćirić M.S., *On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending,* Applied Mathematics Letters, 24, (2011), 1515–1519.

[90] Velimirović Lj., Rančić S., Zlatanović M., *Visualization of infinitesimal bending of curves,* Approximation and Computation, A volume dedicated to Professor Gradimir V. Milovanovic on the occasion of his 60th birthday, Springer Optimization and Its Applications, Vol. 42, (2011), 469–480.

[91] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, Ćirić M., Velimirović N., *Analysis of Gaudi Surfaces at Small Deformations,* Applied Mathematics and Computation, Vol. 218, No 13, (2012), 6999–7004.

[92] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, Ćirić M., *The shape of the bendable surface,* Proceedings of 3rd International Scientific Conference MoNGeometrija 2012, Novi Sad, (2012), 585–594.

[93] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, Ćirić M., Velimirović N., *Variation of shape operator under infinitesimal bending of surface,* Applied Mathematics and Computation, Vol. 225, (2013), 480–486.

[94] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, *Variation of normal curvature expressed by coefficients of the second fundamental form,* (preprint).

[95] Velimirović Lj., **Cvetković M.**, *Gaudi surface and curvature based functionals variations,* Applied Mathematics and Computation, DOI:10.1016/j.amc.2013.11.104.

[96] WildNatureImages, *Walt Disney Concert Hall Photos,* http://www.wildnatureimages.com/Walt_Disney_Concert_Hall_Photos.htm, (2012), datum pristupa: 09.05.2013.

[97] Wanas M.I., *An AP-structure with Finslerian flavor,* Mod. Phys. Lett. A 24, (2009), 1749–1762.

[98] Williams C.K.J., *Use of structural analogy in generation of smooth surfaces for engineering purposes,* Computer-aided design, Vol. 19, No 6, (1987), 310–322.

[99] Zlatanović M., Miničić S., *Identities for curvature tensors in generalized Finsler space,* Filomat Vol. 23, No 2, (2009), 34–42.

[100] Zlatanović M., **Cvetković M.**, Velimirović N., *Analysis of Kinds of Conoid at Small Deformations,* Pollack Periodica - An International Journal for Engineering and Information Sciences, Pollack Mihály Faculty of Engineering and Information Technology, University of Pécs, Hungary, Vol. 7, No Suppl, (2012), 163–171.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Милица Д. Цветковић
Ментор, **МН**:	Љубица С. Велимировић
Наслов рада, **НР**:	АНАЛИЗА ОБЛИКА ПОВРШИ И УОПШТЕЊА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2013.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	114 стр., граф. прикази
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Диференцијална геометрија кривих и површи, оператор облика, нормална кривина, главне кривине, Гаусова кривина, средња кривина, Вилморова енергија, праволинијске површи, Гаудијеве површи, развојне површи, инфинитезималне деформације, инфинитезимално савијање, варијације, Финслерови простори, конексија, апсолутни паралелизам, генералисани Финслерови простори, *h*-коваријантно диференцирање, идентитети Ричијевог типа, тензори кривине, псеудотензори кривине.
УДК	514.763.2 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овом раду дата је анализа облика површи у R^3 преко оператора облика, односно, преко кривина, али и функција кривина као што је Вилморова енергија. Такође су посматране промене геометријских карактеристика површи услед инфинитезималних деформација, и посебно, варијације кривина и функција кривина услед бесконачно малог савијања површи. Разматране су специјалне врсте праволинијских површи са геометријског и конструктивног аспекта и указано на њихову широку примену. Потом је извршена генерализација разматрањем Финслерових и генералисаних Финслерових простора.
Датум прихватања теме, **ДП**:	05.03.2012.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац **Q4.09.13** - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Milica D. Cvetković
Mentor, **MN**:	Ljubica S. Velimirović
Title, **TI**:	SHAPE OF SURFACES ANALYSIS AND GENERALIZATION
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2013.
Publisher, **PB**:	author’s reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	114 p. ; graphic representations
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	differential geometry
Subject/Key words, **S/KW**:	Differential geometry of curves and surfaces, shape operator, normal curvature, principal curvatures, Gaussian curvature, mean curvature, Willmore energy, ruled surfaces, Gaudi surfaces, developable surfaces, infinitesimal deformations, infinitesimal bending, variations, Finsler's spaces, conection, absolute parallelism, generalized Finsler's spaces, *h*-covariant differentiation, Ricci type identities, curvature tensors, curvature pseudotensors.
UC	514.763.2 (043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		This work provides the surface shape analysis in R^3 using the shape operator, i.e. using the curvatures as well as curvature's functionals such as the Willmore energy. Then, there were considered changes of surfaces' geometric characteristics under infinitesimal deformations, and specialy, curvature based functionals variations under infinitesimal bending of surface. Special kinds of ruled surfaces were analysed from geometrical and constructional point of view, and pointed to their wide use. At last, there is a generalization by considering the Finsler and the generalized Finsler spaces.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		05.03.2012.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац **Q4.09.13** - Издање 1