

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Elektromagnetno indukovana transparentnost u konfiniranom atomu vodonika

MASTER RAD

Student:
Vladan Pavlović

Mentor:
dr Ljiljana Stevanović

Niš, Oktobar 2012.

All science is either physics or stamp collecting

Ernest Rutherford

Sadržaj

Uvod	3
1 Kvantovanje slobodnog elektromagnetnog polja	5
1.1 Maksimalne jednačine za slobodno elektromagnetno polje u vakuumu	5
1.2 Kvantovanje elektromagnetnog polja u otvorenom prostoru	9
2 Interakcija atoma sa elektromagnetnim poljem	11
2.1 Hamiltonijan interakcije	11
2.2 Interakcija atoma sa klasičnim poljem: Rabi model	13
2.3 Interakcija atoma sa kvantovanim poljem: Jaynes-Cummings model	15
2.4 Hamiltonijani interakcije za atome sa tri i četiri nivoa	17
2.4.1 Λ konfiguracija	17
2.4.2 Y konfiguracija	21
3 Spontana emisija atoma	24
3.1 Weisskopf-Wigner-ova teorija spontane emisije atoma	24
3.2 Vakuumska indukovana koherentnost	27
4 Elektromagnetno indukovana transparentnost	33
4.1 Master jednačine	33

4.2	Master jednačine za Λ konfiguraciju	34
4.3	Master jednačine za Y konfiguraciju	37
5	Mezoscopske poluprovodničke heterostrukture	43
5.1	Provodnici	44
5.2	Kvantne jame	44
5.2.1	Heterospojevi	44
5.2.2	Heterostrukture	45
5.2.3	Šredingerova jednačina za kvantnu jamu	46
5.3	Kvantne žice	47
5.3.1	Šredingerova jednačina za kvantne žice	47
5.3.2	Značajniji oblici kvantnih žica	48
5.4	Kvantne tačke	49
5.4.1	Značajniji oblici kvantnih tačaka	49
6	Elektromagnetno indukovana transparentnost u konfiniranom atomu vodonika	52
6.1	Konfinirani atom vodonika	52
6.2	Rezultati i diskusija	54
	Zaključak	60
	Literatura	61

Uvod

Pojam interferencije u klasičnoj fizici vezuje se za talase i može se intuitivno shvatiti i eksperimentalno demonstrirati. Tako je koncept optičke interferencije ilustrovan u eksperimentima u kojima se snop svetlosti deli u dva snopa, koji se, nakon što prevale velika rastojanja u poređenju sa talasnom dužinom, duž prostorno razdvojenih putanja, ponovo spajaju u detektoru. Ako je razlika puteva ova dva svetlosna snopa mala, na mestu gde se oni ponovo ujedinjuju uočava se interferenciona slika, koja je posledica postojanja vremenske ili prostorne koherencije svetlosnih snopova. Interferencioni eksperimenti su imali ključnu ulogu u ranim diskusijama o dualnoj prirodi svetlosti i poslužili su kao dokaz talasne prirode svetlosti.

Interpretacija interferencionih eksperimenata se menja sa pojavom nove fizičke teorije – kvantne mehanike i novih eksperimenata u kojima je ustanovljena korpuskularna priroda svetlosti, kao i eksperimenata u kojima je demonstrirana interferencija između nezavisnih svetlosnih snopova. Interferenciona slika, koja se dobija u Young-ovom eksperimentu sa fotonom i dva otvora, nastaje kao rezultat superpozicije amplituda verovatnoće da foton prođe jednom od dve moguće putanje. Nakon interakcije fotona sa otvorima, sistem dva otvora+foton postaje jedan kvantni sistem, a detekcija fotona se interpretira kao merenje, koje primorava foton da pređe u superponirano stanje.

Koncept *kvantne interferencije* povezan je sa fenomenom *neseparabilnosti* ili neraspletenosti (na engl. *entanglement*) u pojavama u mikrosvetu (kvantno-mehaničkim pojavama). Od samih početaka kvantne mehanike, ovaj koncept je privlačio posebnu pažnju i bio opisivan kao "kvantna misterija"¹. Sa pojmom kvantne interferencije blisko je povezan pojam *atomske koherencije*, koja može nastati kao rezultat interakcije atoma sa laserskim poljima (ova polja se odlikuju visokom koherentnošću). Kao rezultat koherentne atom-laser interakcije, može se javiti čitav niz efekata usled izmenjenih optičkih osobina sredine, među koje spada i *elektromagnetno indukovana transparentnost* – EIT (na engl. *electromagnetically induced transparency*).

Pojava elektromagnetno indukovane transparentnosti zasniva se na destruktivnoj interferenciji amplituda verovatnoće prelaza između atomskih

¹Tako Feynman za fenomen interferencije kaže: '...it has in the hart of quantum mechanics and it is really the only mystery of quantum mechanics.'

stanja, koja dovodi do toga da sredina, koja bi inače apsorbovala energiju elektromagnetnog radijacionog polja (polje lasera) sa frekvencom bliskom ili jednakom frekvenci atomskog prelaza, postane transparentna za ovo polje. Drugim rečima, kada su ostvareni uslovi za ispoljavanje EIT, sredina nema nikakvog uticaja na prolaz laserskog snopa date frekvence. Eksperimentalno proučavanje EIT obavljano je u početku na parama atoma Rb, Na, Sr, dok se u novije vreme u eksperimentima ovog tipa koriste Bose-Einstein-ovi kondenzati (BEC kondenzati) i poluprovodničke nanostrukture, kao što su kvantne jame, kvantne žice i kvantne tačke.

EIT predstavlja tehniku kojom se može usporiti svetlosni (laserski) puls i pomoću koje se on može sačuvati ("usklađiti") u sredini. Ovom tehnikom, primenjenom u kondenzatu natrijumovih atoma, brzina laserskog snopa (ovde se misli na njegovu grupnu brzinu) smanjena je na 17 m/s, dok njena primena u pari rubidijuma na sobnoj temperaturi smanjuje brzinu čak na 8 m/s. Usporavanje i zaustavljanje svetlosnih pulseva u sredini od značaja je za čuvanje informacija, odnosno za realizaciju kvantne memorije. Osim toga, tehnika zasnovana na EIT daje potencijalnu mogućnost za kontrolisanje i manipulaciju fotonima kao novim formama bitova (1 ili 0) u kvantnim računarima i može biti od značaja za dalji napredak na polju kvantnog računanja.

Značaj i primene EIT predstavljaju motivaciju za nastanak ovog rada, u kome je materijal podeljen u šest glava. U prvoj glavi date su klasična i kvantna teorija elektromagnetnog polja, u drugoj glavi obrađeni su modeli interakcije atoma sa elektromagnetnim poljem, dok je treća glava posvećena teoriji spontane emisije atoma. U četvrtoj glavi izložena je teorija EIT, koja je demonstrirana na primerima atoma sa tri nivoa tipa Λ i atoma sa četiri nivoa tipa Y . U petoj glavi opisane su poluprovodničke heterostrukture, koje se koriste u EIT eksperimentima. Šesta glava uvodi model konfiniranog atoma vodonika i sadrži rezultate izračunavanja.

Glava 1

Kvantovanje slobodnog elektromagnetnog polja

1.1 Maksvelove jednačine za slobodno elektromagnetno polje u vakuumu

Elektromagnetno polje u vakuumu opisuje se jačinom električnog $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i jačinom magnetnog polja $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Ove veličine zavise od prostornih koordinata i vremena i zadovoljavaju sistem Maksvelovih jednačina:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

U jednačinama 1.2 i 1.3, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ i $\sigma(\mathbf{r}, t)$ predstavljaju gustine struje i slobodnih naelektrisanja. Za slobodno elektromagnetno polje u vakuumu (elektromagnetni talas) ove veličine jednake su nuli. Umesto jačina polja za opisivanje elektromagnetnog polja mogu se koristiti skalarni $\phi(\mathbf{r}, t)$ i vektorski $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ potencijal, koji se definišu na sledeći način:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Potencijali nisu jednoznačno određeni već se transformišu u skladu sa relacijama:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (1.6)$$

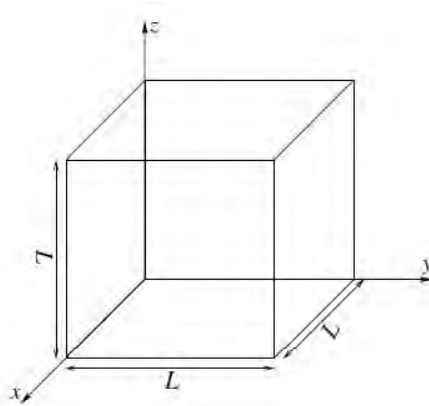
gde je $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ proizvoljna skalarna funkcija. Vraćajući jednačine (1.5) u Maksvelove jednačine (1.1-1.4) dobija se da su jednačine (1.1) i (1.4) identički zadovoljene, jednačina (1.3) daje informaciju o transverzalnosti polja \mathbf{E} dok se jednačina (1.2) uz korišćenje kalibracionog uslova $\phi = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ svodi na talasnu jednačinu za potencijal \mathbf{A} :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Ukupna energija elektromagnetnog polja unutar neke zapremine V data je sa:

$$E = \frac{1}{2} \int_V d^3r (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2). \quad (1.8)$$

Dakle, kako bi se odredila energija elektromagnetnog polja, a i da bi se kasnije izvršilo kvantovanje elektromagnetnog polja potrebno je specificirati granične uslove koje ovo polje mora da zadovoljava. Razmatraćemo polje u kocki sa linearnom dimenzijom L prikazanoj na slici 1.1.



Slika 1.1. Rezonator linearnih dimenzija L

Ukoliko se $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ napiše kao proizvod funkcije, koja zavisi samo od koordinata i funkcije, koja zavisi samo od vremena (uobičajeno razdvajanje

nezavisno promenljivih) dobija se da prostorni deo ima oblik $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, dok je vremenski deo jednak $e^{\mp i\omega t}$. Kako se za slobodno elektromagnetno polje ne mogu definisati granični uslovi (jer je polje slobodno), sledi da spektar slobodnog elektromagnetnog zračenja nije diskretan, odnosno da je kontinualan. Ipak, kako bi se odredila gustina moda kontinualnog elektromagnetnog polja, koristi se već pomenuta kocka koja nameće uslove periodičnosti. Na kraju računa će se uzeti da dimenzije ove kocke teže beskonačnosti što odgovara slučaju slobodnog polja. Iz uslova periodičnosti sledi da vrednosti vektora \mathbf{k} ne mogu da budu proizvoljni, već mogu da uzimaju neku od sledećih vrednosti $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$, $k_y = \frac{2\pi n_y}{L}$ i $k_z = \frac{2\pi n_z}{L}$, gde je $n_{x,y,z} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Sumiranje moda polja $\sum_{\mathbf{k}\lambda}$ se zbog kontinualnosti polja, može zameniti integraljenjem, odnosno:

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k, \quad (1.9)$$

pri čemu je $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ element zapremine u \mathbf{k} prostoru. U sfernim koordinatama ovo se svodi na $d^3k = (\omega_k^2/c^3) d\omega_k \sin\theta d\theta d\phi$. Odakle se može izračunati ukupan broj moda dN unutar zapremine $V = L^3$ u intervalu frekvenci između ω_k i $\omega_k + d\omega_k$:

$$dN = 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega_k^2}{c^3} d\omega_k \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{L^3 \omega_k^2}{\pi^2 c^3} d\omega_k \equiv \rho(\omega_k) d\omega_k, \quad (1.10)$$

faktor 2 u gornjem izrazu se javlja zbog dve moguće polarizacije svake mode. Funkcija $\rho(\omega_k)$ predstavlja gustinu moda, i eksplicitno je data sa:

$$\rho(\omega_k) = \frac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3}. \quad (1.11)$$

Funkcija koja opisuje prostornu zavisnost vektora \mathbf{A} se tako može zapisati kao $\mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = e_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, gde $e_{\mathbf{k}\lambda}$ predstavljaju jedinične vektore, koji se još nazivaju i polarizacioni vektori. Iz kalibracionog uslova sledi da oni moraju da zadovolje sledeće uslove:

$$e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot e_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \mathbf{k} \cdot e_{\mathbf{k}\lambda} = 0. \quad (1.12)$$

Vektorski potencijal se, dakle, može zapisati u obliku:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) + A_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.13)$$

Zamenom jednačine 1.13 u jednačinu 1.7 dobija se:

$$\left(c^2 k^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_{\mathbf{k}\lambda}(t) = 0, \quad (1.14)$$

a njenim rešavanjem, dobija se i eksplicitna vremenska zavisnost:

$$A_{\mathbf{k}\lambda}(t) = A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega_k t}. \quad (1.15)$$

Frekvencija ω_k i talasni vektor \mathbf{k} povezani su disperzionom relacijom $\omega_k = ck$. Kada je poznat eksplicitan oblik vektorskog potencijala $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, mogu se zapisati i eksplicitni izrazi za električno i magnetno polje pomoću jednačine 1.5, tako da se dobija:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega_k \left[A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i\omega_k t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \right] \quad (1.16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega_k \mathbf{k} \times \left[A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i\omega_k t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.17)$$

Zamenom jednačina 1.16 i 1.17 u izraz za energiju elektromagnetnog polja (jednačina 1.8), dobija se:

$$E = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega_k^2 \left(A_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}^* + A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{\mathbf{k}\lambda} \right). \quad (1.18)$$

Jednačina 1.18 može se pojednostaviti uvođenjem smene $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}$, čime izraz za energiju dobija oblik:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_k \left(\alpha_{\mathbf{k}\lambda} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^* \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \right). \quad (1.19)$$

Ukoliko sada definišemo dve nove realne promenljive $q_{\mathbf{k}\lambda}$ i $p_{\mathbf{k}\lambda}$ kao:

$$q_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\alpha_{\mathbf{k}\lambda} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*) \quad (1.20)$$

$$p_{\mathbf{k}\lambda} \equiv -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (\alpha_{\mathbf{k}\lambda} - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*), \quad (1.21)$$

izraz za energiju postaje:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} (p_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\lambda}^2). \quad (1.22)$$

Iz ovog izraza uočava se da se energija elektromagnetnog polja može predstaviti kao suma energija beskonačnog skupa nezavisnih harmonijskih oscilatora, u kojima $q_{\mathbf{k}\lambda}$ i $p_{\mathbf{k}\lambda}$ igraju uloge generalisane koordinate položaja i njoj konjugovanog impulsa, respektivno.

1.2 Kvantovanje elektromagnetnog polja u otvorenom prostoru

Način na koji se vrši kvantovanje polja je sada očigledan. Umesto veličina $q_{\mathbf{k}\lambda}$ i $p_{\mathbf{k}\lambda}$ uvode se hermitski operatori $Q_{\mathbf{k}\lambda}$ i $P_{\mathbf{k}\lambda}$, za koje važe komutacione relacije:

$$[Q_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [Q_{\mathbf{k}\lambda}, Q_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [P_{\mathbf{k}\lambda}, P_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0. \quad (1.23)$$

Sada se mogu definisati operatori anihilacije i kreacije:

$$a_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k Q_{\mathbf{k}\lambda} + iP_{\mathbf{k}\lambda}), \quad a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k Q_{\mathbf{k}\lambda} - iP_{\mathbf{k}\lambda}), \quad (1.24)$$

za koje važe komutacione relacije za bozonske operatore:

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}] = [a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = 0. \quad (1.25)$$

Operatori anihilacije i kreacije, $a_{\mathbf{k}\lambda}$ i $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$, predstavljaju dinamičke varijable elektromagnetnog polja. Hamiltonijan kvantovanog elektromagnetnog polja može se zapisati preko operatora kreacije i anihilacije na sledeći način:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Može se primetiti da ovaj hamiltonijan sadrži član koji divergira $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_k = \infty$. Ova beskonačnost se javlja zbog činjenice da energija najnižeg stanja kvantnog harmonijskog oscilatora nije jednaka nuli, već energiji polovine kvanta energije. Kako se hamiltonijan elektromagnetnog polja sastoji od beskonačno mnogo oscilatora, beskonačnost koja se javlja u gornjem izrazu predstavlja zbir energija najnižih stanja. Ukoliko želimo da opišemo procese u kojima dolazi do razmene energije između polja i nekog drugog sistema, bitna je samo razlika energije, pa se ovaj član može izostaviti. Izraz za hamiltonijan, koji se može dalje koristiti je stoga:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (1.27)$$

Izrazi za vektorski potencijal, kao i za električno i magnetno polje se takođe mogu predstaviti preko operatora anihilacije i kreacije u eksplicitnom obliku:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (1.28)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (\mathbf{k} \times e_{\mathbf{k}\lambda}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V c^2}} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (1.29)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (1.30)$$

Glava 2

Interakcija atoma sa elektromagnetnim poljem

2.1 Hamiltonijan interakcije

Nerelativistički hamiltonijan elektrona vezanog u atomu u odsustvu spoljašnjih polja je:

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + V(r), \quad (2.1)$$

gde je $V(r)$ potencijalna energija Kulonove interakcije kojom je elektron vezan za jezgro atoma. U koordinatnoj reprezentaciji, u kojoj je zapisan ovaj hamiltonijan operatori impulsa i položaja se eksplicitno mogu zapisati kao $\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla$, $\hat{\mathbf{r}}|r\rangle = \mathbf{r}|r\rangle$. U prisustvu spoljašnjeg polja, hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r). \quad (2.2)$$

U gornjoj jednačini $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ i $\Phi(\mathbf{r}, t)$ predstavljaju vektorski i skalarni potencijal spoljašnjeg elektromagnetnog polja, dok $-e$ predstavlja naelektrisanje elektrona, pri čemu je uzeto da je e pozitivno. Ovaj hamiltonijan se može znatno pojednostaviti, ukoliko se uzme odgovarajuća kalibracija polja i ukoliko se uzme odgovarajući oblik skalarne funkcije $\chi(\mathbf{r}, t)$ koja se, kao što je već rečeno u komentaru jednačine 1.6, može izabrati proizvoljno. Pri razmatranju problema koji sledi pogodno je koristiti kalibraciju $\phi = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ iz prethodne glave jer su na taj način električno i magnetno

polje određeni samo vektorskim potencijalom. Transformacija hamiltonijana vrši se pomoću unitarnog operatora \hat{R} , pri čemu je $\Psi'(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{R}\Psi(\mathbf{r}, t)$. Uvođenjem ovog unitarnog operatora, hamiltonijan se transformiše u skladu sa sledećom relacijom:

$$\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\hat{R}}{\partial t}\hat{R}^\dagger. \quad (2.3)$$

Da bi pojednostavili hamiltonijan sistema, što je i bila početna motivacija za uvođenje unitarnog operatora \hat{R} uzećemo da je on jednak $\hat{R} = e^{-\frac{ie\chi(\mathbf{r}, t)}{\hbar}}$. Pod gore navedenim uslovima hamiltonijan sistema svodi se na:

$$\hat{H}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e(\mathbf{A} + \nabla\chi)]^2 + e\frac{\partial\chi}{\partial t} + v(r). \quad (2.4)$$

Radi daljeg pojednostavljenja hamiltonijana, potrebno je odrediti eksplicitni oblik funkcije $\chi(\mathbf{r}, t)$. Odabraćemo ovu funkciju tako da drugi član u srednjoj zagradi formule 2.4 bude jednak nuli, odnosno $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$. Pri pisanju ove relacije uzeto je u obzir da je $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$, što je prihvatljivo ukoliko se ima u vidu da je \mathbf{A} periodična funkcija ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ - rešenje talasne jednačine 1.7) sa talasnom dužinom mnogo većom od dimenzija atoma. Ovo znači da se vrednost vektorskog potencijala može uzeti za konstantu duž celog atoma u određenom trenutku vremena, odnosno da ne zavisi od prostorne koordinate. U skladu sa tim hamiltonijan se pojednostavljuje i postaje:

$$\hat{H}' = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(r) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.5)$$

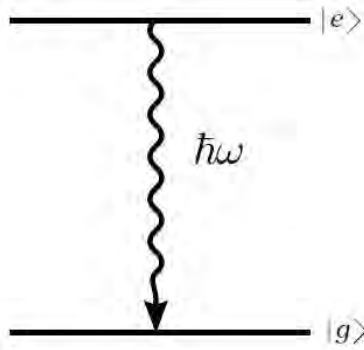
U jednačini 2.5, $-e\mathbf{r}$ je dipolni moment $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$. U opštem slučaju, kada nije specificirano u kojoj reprezentaciji se radi, dipolni moment je operator $\hat{\mathbf{d}}$. Konačni oblik hamiltonijana koji će se nadalje koristiti je dakle:

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.6)$$

Ova jednačina sadrži samo jedan interakcioni član i u skladu sa gore rečenim kaže se da je ova formula napisana u *dipolnoj aproksimaciji*.

2.2 Interakcija atoma sa klasičnim poljem: Rabi model

Rabijev model predstavlja model u kome se razmatra interakcija atoma sa dva nivoa¹ sa elektromagnetnim zračenjem. Pri proučavanju ovog problema nije moguće korišćenje perturbacionog metoda, kod koga verovatnoća prelaza mora da ostane mala, tako da se ovaj problem rešava direktnom integracijom jednačina. Na slici 2.1. predstavljen je opisani problem. Prikazana su dva atomska nivoa od značaja, obeležena sa $|g\rangle$ - osnovno (ground) i $|e\rangle$ - pobuđeno (excited) stanje. Razlika u energiji između ova dva stanja može se opisati pomoću frekvence $\omega_0 = \frac{E_e - E_g}{\hbar}$. Ova frekvencija približno je jednaka frekvenciji laserskog zračenja ω , koje pobuđuje atomski prelaz.



Slika 2.1. Dijagram energijskih nivoa atoma sa dva nivoa

Hamiltonijan ovog sistema je dakle:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_0 \cos(\omega t), \quad (2.7)$$

gde drugi član predstavlja interakcioni deo hamiltonijana $\hat{H}^{(I)}(t) = \hat{V}_0 \cos(\omega t)$ i gde je $V_0 = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0$. Talasna funkcija može se razložiti na bazične vektore $|g\rangle$ i $|e\rangle$ na sledeći način:

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t)e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}}|g\rangle + C_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}}|e\rangle. \quad (2.8)$$

Rešavanjem vremenski zavisne Šredingerove jednačine:

¹Svaki atom zapravo ima beskonačan broj nivoa, ali se radi jednostavnosti mogu posmatrati samo dva određena nivoa datog atoma čija je frekvencija prelaza bliska frekvenciji spoljašnjeg elektromagnetnog zračenja, jer ovo zračenje ne može značajno da utiče na prelaze između ostalih atomskih nivoa.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.9)$$

uz poznavanje početnih uslova sistema, može se odrediti vremenska evolucija sistema. Rešavanjem jednačine 2.9 (uz korišćenje skraćenog zapisa $\nu = \langle e | \hat{V}_0 | g \rangle = -\hat{\mathbf{d}}_{eg} \cdot \mathbf{E}_0$) dobija se sistem dve spregnute diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\dot{C}_g = -\frac{i}{\hbar} \nu \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} C_e \quad (2.10)$$

$$\dot{C}_e = -\frac{i}{\hbar} \nu \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} C_g. \quad (2.11)$$

Ukoliko pretpostavimo da se sistem u početnom trenutku nalazio u stanju $C_g(0) = 1$ i $C_e(0) = 0$ i koristeći *aproksimaciju rotirajućih talasa - RWA*², dobija se diferencijalna jednačina drugog reda:

$$\ddot{C}_e + i(\omega - \omega_0) \dot{C}_e + \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{\hbar^2} C_e = 0, \quad (2.12)$$

odakle se lako nalaze koeficijenti $C_e(t)$ i $C_g(t)$:

$$C_e(t) = i \frac{\nu}{\Omega_R \hbar} e^{\frac{i\Delta t}{2}} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$C_g(t) = e^{\frac{i\Delta t}{2}} \left(\cos\frac{\Omega_R t}{2} - i \frac{\Delta}{\Omega_R} \sin\frac{\Omega_R t}{2} \right). \quad (2.14)$$

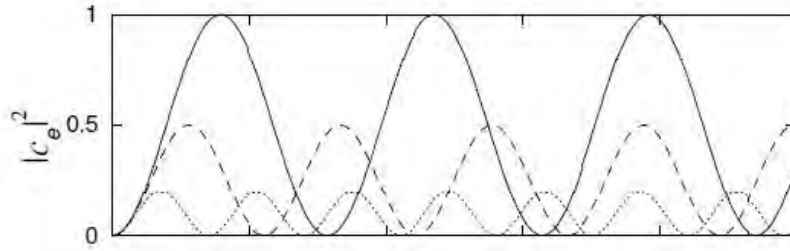
Ovde je $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + \frac{\nu^2}{\hbar^2}}$ *Rabijeva frekvencija* i sa $\Delta = \omega - \omega_0$ je označen *detuning*³. Odavde sledi da je verovatnoća da se atom nađe u stanju $|e\rangle$ data sa:

$$P_e(t) = |C_e|^2 = \frac{\nu^2}{\Omega_R^2 \hbar^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \quad (2.15)$$

i prikazana je na slici 2.2. za različite vrednosti detuninga Δ .

²RWA (Rotating Wave Approximation) se sastoji u zanemarivanju onih članova, koji u eksponentu sadrže $\omega + \omega_0$, odnosno u zanemarivanju brzo oscilujućih članova.

³Detuningom (od engleske reči *detuning*) je označena razlika laserske i atomske frekvence za dati prelaz.



Slika 2.2. Vremenska zavisnost populacije $P_e(t)$ za atom sa dva nivoa u slucaju $\Delta = 0$ - puna linija, $\Delta = 2\Omega$ - isprekidana linija i $\Delta = 4\Omega$ - tačkasta linija.

2.3 Interakcija atoma sa kvantovanim poljem: Jaynes-Cummings model

Jaynes-Cummings-ov model⁴ je model u kome se posmatra interakcija između atoma sa dva nivoa sa elektromagnetnim poljem, pri čemu se sada ovo elektromagnetno polje posmatra kao kvantovano polje⁵, koje sadrži samo jedan mod i koje je dato izrazom:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{e}\mathcal{G}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.16)$$

gde je \mathbf{e} proizvoljno orijentisan polarizacioni vektor i \mathcal{G} konstanta koja karakteriše samo polje. U skladu sa jednačinama 2.6 i 2.16, interakcioni hamiltonijan može se zapisati kao:

$$\hat{H}^{(I)} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hat{d}\mathcal{G}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.17)$$

pri čemu je, radi kraćeg pisanja, uzeta smena $\hat{d} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}$. Interakcioni hamiltonijan može se još eksplicitnije zapisati ukoliko se ima u vidu da su jedino nedijagonalni elementi dipolnog operatora različiti od nule, odnosno da važi $\langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0$, tako da se dipolni operator može napisati u eksplicitnoj formi:

⁴Ovaj model su prvobitno predložili 1963 Edwin Jaynes i Fred Cummings kako bi ispitali vezu između kvantne teorije zračenja i poluklasične teorije pri opisivanju spontane emisije.

⁵Ovaj problem se naziva Jaynes-Cummings model, što je možda i ironično, jer je nakon rada na ovom problemu, Jaynes uporno branio teorije koje za opisivanje interakcije između atoma i polja koriste klasična polja [3].

$$\hat{d} = d|g\rangle\langle e| + d^*|e\rangle\langle g|. \quad (2.18)$$

Da bi se ova jednačina još više pojednostavila, pogodno je uvesti *operatore atomskih prelaza*:

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| \quad (2.19)$$

i *operator inverzije*:

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \quad (2.20)$$

Za ove operatore važi Paulijeva algebra:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_3 \quad (2.21)$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] = 2\hat{\sigma}_\pm. \quad (2.22)$$

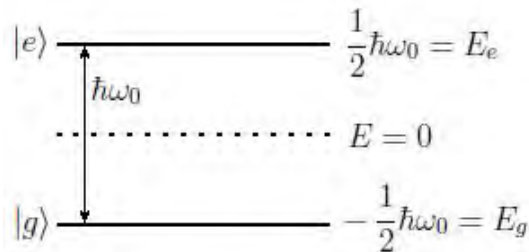
Koristeći ove jednačine, i zamenom $\langle e|\hat{d}|g\rangle = d$ (pri čemu je, bez gubljenja opštosti, uzeto da je d realno), dipolni operator dobija oblik $\hat{d} = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$, a interakcioni hamiltonijan:

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.23)$$

gde je $\lambda = \frac{d\mathcal{G}}{\hbar}$.

Ukoliko se za referentni nivo energije uzme energija, čija je vrednost na sredini između nivoa $|g\rangle$ i $|e\rangle$ (kao na slici 2.3.), hamiltonijan slobodnog atoma dobija oblik:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\sigma_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3. \quad (2.24)$$



Slika 2.3. Dijagram nivoa atomskih energija gde je nivo $E = 0$ uzet da bude na polovini između dva nivoa.

Hamiltonijan, koji opisuje elektromagnetno, odnosno fotonsko polje je, u skladu sa jednačinom 1.27, dat sa:

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.25)$$

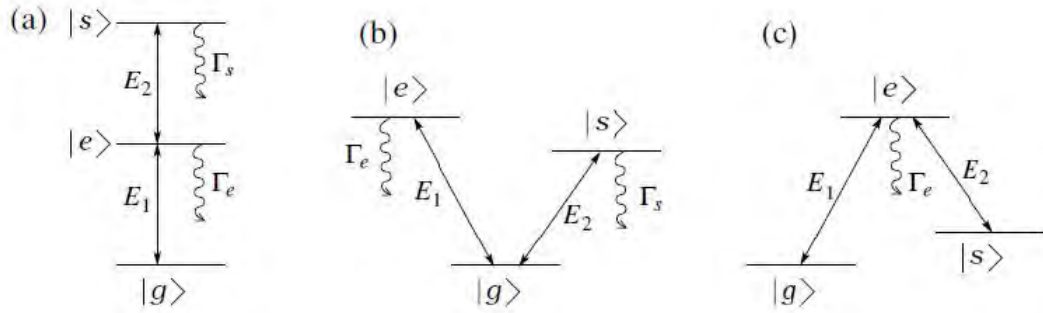
2.4 Hamiltonijani interakcije za atome sa tri i četiri nivoa

Postoji više različitih proširenja prethodno razmatranih modela, od kojih neki uključuju dvo-fotonske prelaze, zračenje koje se sastoji iz više moda, a atom iz više nivoa itd. Ovde će biti navedeni hamiltonijani za atom sa tri nivoa tipa Λ (ili kraće Λ konfiguracija) i za atom sa četiri nivoa tipa Y (skraćeno Y konfiguracija), jer su upravo ove konfiguracije od značaja za nastavak ovog rada.

2.4.1 Λ konfiguracija

Već je rečeno da atom poseduje beskonačan broj diskretnih energijskih nivoa (koji odgovaraju vezanim stanjima elektrona) i kontinuum nivoa (koji odgovaraju sistemu pozitivno naelektrisanog jona i slobodnog elektrona). Ukoliko se posmatra interakcija između atoma sa elektromagnetnim poljem, čija je frekvencija bliska nekoj od frekvenci atomskih prelaza između dva diskretna atomska nivoa, ovaj sistem se može posmatrati kao atom sa dva nivoa. Ovaj slučaj je već opisan u ranijim delovima ovog rada. Ukoliko je neki atom izložen dejstvu elektromagnetnog zračenja, koje se sastoji iz više moda (tj. sadrži elektromagnetne talase više različitih frekvenci) svi nivoi, koji se nalaze blizu rezonantnom prelazu, moraju biti uključeni u razmatranje. Najjednostavnije proširenje gornjeg modela u ovom smislu je ukoliko posmatramo tri energijska nivoa atoma, koji interaguje sa dva elektromagnetna polja tačno određenih frekvenci.

Neka su nivoi od interesa ovakvog atoma označeni sa $|g\rangle$, $|e\rangle$ i $|s\rangle$. Tri moguće konfiguracije atomskih nivoa su Ξ , V i Λ konfiguracije i sve su prikazane na slici 2.4.



Slika 2.4. Tri moguće konfiguracije atoma sa tri nivoa: (a) Ξ , (b) V i (c) Λ konfiguracija.

U Λ konfiguraciji, dozvoljeni dipolni prelazi su $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ i $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$, pri čemu atom ima dva niža stanja $|g\rangle$ i $|s\rangle$, i jedno ekscitirano stanje $|e\rangle$. Ovo stanje $|e\rangle$ može se deekscitirati ("raspasti") na bilo koje od ostala dva stanja, emitujući pri tome foton odgovarajuće frekvence. Hamiltonijan Λ atoma+interakcija može se napisati kao:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{\mathcal{V}}_{AF}(t), \quad (2.26)$$

pri čemu prvi sabirak predstavlja deo hamiltonijana koji opisuje slobodan atom:

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_g\sigma_{gg} + \hbar\omega_e\sigma_{ee} + \hbar\omega_s\sigma_{ss}, \quad (2.27)$$

a drugi sabirak predstavlja interakciju između atoma i elektromagnetnih polja:

$$\mathcal{V}_{AF}(t) = -\mathbf{d} \cdot [\mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t)]. \quad (2.28)$$

Ovde su vektori jačine električnog polja dati sa $\mathbf{E}_j = \hat{\mathbf{e}}_j E_j(t)$ ($j = 1, 2$), dok su same jačine polja date sa $E_j = \varepsilon_j e^{-i\omega_j t} + c.c.$. Kao što je već rečeno, usled izbora odgovarajućih frekvenci elektromagnetnih polja, polje E_1 interaguje sa atomom samo kroz prelaz $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, dok polje E_2 utiče na prelaz elektrona između nivoa $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$. Veličina \mathbf{d} predstavlja sumu svih nenulatih dipolnih matričnih elemenata prelaza za odgovarajuću interakciju. U slučaju Λ konfiguracije atoma i odgovarajućih polja, ova veličina ima eksplicitni oblik:

$$\mathbf{d} = d_{eg}\mathbf{e}_1\sigma_{eg} + d_{eg}\mathbf{e}_1\sigma_{ge} + d_{se}\mathbf{e}_2\sigma_{se} + d_{se}\mathbf{e}_2\sigma_{se}. \quad (2.29)$$

Za veličinu \mathbf{d} se, bez gubljenja opštosti, može uzeti da je realna, tako da je zbog toga $d_{ij} = d_{ji}$. Interakcioni hamiltonijan se, dakle, može zapisati u razvijenom obliku kao:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{AF}(t) = & - d_{eg}\varepsilon_1\sigma_{eg}e^{-i\omega_1t} - d_{eg}\varepsilon_1\sigma_{ge}e^{-i\omega_1t} - \\ & - d_{se}\varepsilon_2\sigma_{se}e^{-i\omega_2t} - d_{se}\varepsilon_2\sigma_{es}e^{-i\omega_2t} + c.c. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Kako su bazisni vektori ovog sistema zapravo stanja atoma $|g\rangle$, $|e\rangle$ i $|s\rangle$, talasna funkcija sistema može se napisati kao linearna kombinacija ovih bazisnih vektora stanja, odnosno:

$$|\Psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)|e\rangle + c_s(t)|s\rangle. \quad (2.31)$$

Zamenom jednačina 2.26, 2.27, 2.31 i 2.31 u vremenski zavisnu Šredinger-ovu jednačinu 2.9, dobija se sistem diferencijalnih jednačina za određivanje koeficijenata c_g , c_e i c_s :

$$\dot{c}_g = -i\omega_g c_g + i\Omega_1 e^{-i\omega_1 t} c_e + i\Omega_1 e^{i\omega_1 t} c_e \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_e = & -i\omega_e c_e + i\Omega_1 e^{-i\omega_1 t} c_g + i\Omega_1 e^{i\omega_1 t} c_g + \\ & + i\Omega_2 e^{-i\omega_2 t} c_s + i\Omega_2 e^{i\omega_2 t} c_s \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\dot{c}_s = -i\omega_s c_s + i\Omega_2 e^{-i\omega_2 t} c_e + i\Omega_2 e^{i\omega_2 t} c_e. \quad (2.34)$$

Veličine $\Omega_1 = \frac{d_{eg}\varepsilon_1}{\hbar}$ i $\Omega_2 = \frac{d_{se}\varepsilon_2}{\hbar}$ su Rabijeve frekvence odgovarajućih prelaza. Kako bi se ove jednačine pojednostavile, biće iskorišćena RWA. Da bi se primenila ova aproksimacija (na očigledniji način) potrebno je preći u interakcionu sliku. Prelaz na interakcionu sliku vrši se sledećim transformacijama:

$$c_\mu(t) = \tilde{c}_\mu(t)e^{-i\omega_\mu t}, \quad (2.35)$$

pri čemu je $\mu = g, e, s$. Nakon ove smene u jednačine 2.32-2.34, uz zanemarivanje članova koji sadrže brzo oscilujuće komponente (tj. $e^{\pm(\omega_1+\omega_{eg})}$ i $e^{\pm(\omega_2+\omega_{se})}$) dobija se sledeći sistem:

$$\dot{\tilde{c}}_g = -i\omega_g \tilde{c}_g + i\Omega_1 \tilde{c}_e e^{i\omega_1 t} \quad (2.36)$$

$$\dot{\tilde{c}}_e = -i\omega_e \tilde{c}_e + i\Omega_1 \tilde{c}_g e^{-i\omega_1 t} + i\Omega_2 \tilde{c}_s e^{-i\omega_2 t} \quad (2.37)$$

$$\dot{\tilde{c}}_s = -i\omega_s \tilde{c}_s + i\Omega_2 \tilde{c}_e e^{-i\omega_2 t}. \quad (2.38)$$

Uvođenjem novih pogodnijih transformacija $c_g(t) = c'_g(t)e^{-i\omega_g t}$, $c_e(t) = c'_e(t)e^{-i(\omega_g+\omega_1)t}$ i $c_s(t) = c'_s(t)e^{-i(\omega_g+\omega_1-\omega_2)t}$, dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial t} c'_g = i\Omega_1 c'_e \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c'_e = i\Delta_1 c'_e + i\Omega_1 c'_g + i\Omega_2 c'_s \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c'_s = i(\Delta_1 - \Delta_2) c'_s + i\Omega_2 c'_e. \quad (2.41)$$

Odavde se lako može očitati hamiltonijan datog sistema, koji će se koristiti u daljem računu:

$$\hat{H}_\Lambda = -\hbar[\Delta_1\sigma_{ee} + (\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{ss}] - \hbar[\Omega_1\sigma_{ge} + \Omega_1\sigma_{eg} + \Omega_2\sigma_{se} + \Omega_2\sigma_{es}], \quad (2.42)$$

odnosno u matricnom obliku:

$$\hat{H}_\Lambda = -\hbar \begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & \Delta_1 & \Omega_2 \\ 0 & \Omega_2 & \Delta_1 - \Delta_2 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Sličnim postupkom nalaze se hamiltonijani i za preostale dve konfiguracije atoma sa tri nivoa:

$$\hat{H}_\Xi = -\hbar[\Delta_1\sigma_{ee} + (\Delta_1 + \Delta_2)\sigma_{ss}] - \hbar[\Omega_1\sigma_{ge} + \Omega_1\sigma_{eg} + \Omega_2\sigma_{se} + \Omega_2\sigma_{es}] \quad (2.44)$$

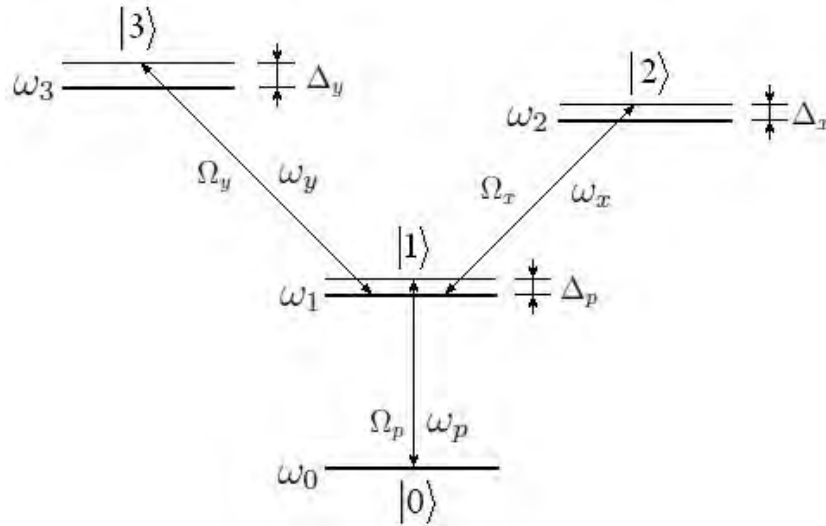
$$\hat{H}_\Xi = -\hbar \begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & \Delta_1 & \Omega_2 \\ 0 & \Omega_2 & \Delta_1 + \Delta_2 \end{vmatrix} \quad (2.45)$$

$$\hat{H}_V = -\hbar[\Delta_1\sigma_{ee} + \Delta_2\sigma_{ss}] - \hbar[\Omega_1\sigma_{ge} + \Omega_1\sigma_{eg} + \Omega_2\sigma_{gs} + \Omega_2\sigma_{sg}] \quad (2.46)$$

$$\hat{H}_V = -\hbar \begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_1 & \Delta_1 & 0 \\ \Omega_2 & 0 & \Delta_2 \end{vmatrix}. \quad (2.47)$$

2.4.2 Y konfiguracija

Sa povećanjem broja nivoa koji ulaze u razmatranje, odnosno na koje utiče elektromagnetno zračenje, raste složenost problema. Za razliku od atoma sa tri nivoa, gde se razmatraju tri konfiguracije - Ξ , Λ i V , u slučaju atoma sa četiri nivoa moguće je razmatrati Y, dijamanant, obrnutu Y, tripod i N konfiguraciju [6], kao i Λ konfiguraciju, gde jedan osnovni nivo zapravo čine dva hiperfina nivoa. Ovde će posebna pažnja biti posvećena Y konfiguraciji, koja je značajna za nastavak rada. Ova konfiguracija atomskih nivoa, sa nešto drugačijim označavanjem, prikazana je na slici 2.5.



Slika 2.5. Atom sa rasporedom nivoa u Y konfiguraciji.

Rešavanje ovog problema, odnosno određivanje hamiltonijana u pogodnoj slici, slično je kao i ranije opisano za atom sa tri nivoa. Polazi se od vremenski zavisne Šredingerove jednačine 2.9, pri čemu se hamiltonijan može predstaviti kao zbir dva člana (jednačina 2.26): člana, koji opisuje energijske nivoe slobodnog atoma i interakcionog člana elektromagnetno polje-atom u dipolnoj aproksimaciji. U ovom slučaju hamiltonijan, koji opisuje atom (odnosno atomske nivoe od interesa), ima oblik:

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0\sigma_{00} + \hbar\omega_1\sigma_{11} + \hbar\omega_2\sigma_{22} + \hbar\omega_3\sigma_{33}. \quad (2.48)$$

Deo hamiltonijana, koji opisuje interakciju takođe se neznatno modifikuje, jer sada postoje tri elektromagnetna polja koja deluju na atom:

$$\mathbf{E}_p = (\varepsilon_p e^{-i\omega_p t} + \varepsilon_p e^{i\omega_p t}) \mathbf{e}_p \quad (2.49)$$

$$\mathbf{E}_x = (\varepsilon_x e^{-i\omega_x t} + \varepsilon_x e^{i\omega_x t}) \mathbf{e}_x \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E}_y = (\varepsilon_y e^{-i\omega_y t} + \varepsilon_y e^{i\omega_y t}) \mathbf{e}_y . \quad (2.51)$$

Interakcioni član ima oblik:

$$\mathcal{V}_{AF} = -\mathbf{d} \cdot [\mathbf{E}_p(t) + \mathbf{E}_x(t) + \mathbf{E}_y(t)] , \quad (2.52)$$

gde \mathbf{d} ponovo predstavlja sumu svih nenultih dipolnih matičnih elemenata prelaza za odgovarajuću interakciju i u ovom konkretnom primeru je oblika:

$$\mathbf{d} = d_{10} \mathbf{e}_p \sigma_{10} + d_{10} \mathbf{e}_p \sigma_{01} + d_{21} \mathbf{e}_x \sigma_{21} + d_{21} \mathbf{e}_x \sigma_{12} + d_{31} \mathbf{e}_y \sigma_{31} + d_{31} \mathbf{e}_y \sigma_{13} . \quad (2.53)$$

Talasna funkcija sistema može se napisati kao linearna kombinacija bazisnih vektora stanja, koji su u ovom slučaju dati sa $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle = A_0|0\rangle + A_1|1\rangle + A_2|2\rangle + A_3|3\rangle . \quad (2.54)$$

Zamenom jednačina 2.48-2.54 u vremenski zavisnu Šredingerovu jednačinu 2.9 dobija se zakonitost vremenske promene koeficijenata u razvoju talasne funkcije:

$$\dot{A}_0 = -i\omega_0 A_0 + i\Omega_p e^{-i\omega_p t} A_1 + i\Omega_p e^{i\omega_p t} A_1 \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & -i\omega_1 A_1 + i\Omega_p e^{-i\omega_p t} A_0 + i\Omega_p e^{i\omega_p t} A_0 + i\Omega_x e^{-i\omega_x t} A_2 + \\ & + i\Omega_x e^{i\omega_x t} A_2 + i\Omega_y e^{-i\omega_y t} A_3 + i\Omega_y e^{i\omega_y t} A_3 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\dot{A}_2 = -i\omega_2 A_2 + i\Omega_x e^{-i\omega_x t} A_1 + i\Omega_x e^{i\omega_x t} A_1 \quad (2.57)$$

$$\dot{A}_3 = -i\omega_3 A_3 + i\Omega_y e^{-i\omega_y t} A_1 + i\Omega_y e^{i\omega_y t} A_1 . \quad (2.58)$$

Nakon uvođenja transformacija $A_\mu(t) = \tilde{A}_\mu(t) e^{-i\omega_\mu t}$ za $\mu = 0, 1, 2, 3$ i koristeći RWA, ovi izrazi se pojednostavljaju i postaju:

$$\dot{\tilde{A}}_0 = -i\omega_0 \tilde{A}_0 + i\Omega_p e^{i\omega_p t} \tilde{A}_1 \quad (2.59)$$

$$\dot{\tilde{A}}_1 = -i\omega_1 \tilde{A}_1 + i\Omega_p e^{-i\omega_p t} \tilde{A}_0 + i\Omega_x e^{i\omega_x t} \tilde{A}_2 + i\Omega_y e^{i\omega_y t} \tilde{A}_3 \quad (2.60)$$

$$\dot{\tilde{A}}_2 = -i\omega_2 \tilde{A}_2 + i\Omega_x e^{-i\omega_x t} \tilde{A}_1 \quad (2.61)$$

$$\dot{\tilde{A}}_3 = -i\omega_3 \tilde{A}_3 + i\Omega_y e^{-i\omega_y t} \tilde{A}_1 . \quad (2.62)$$

Nakon uvođenja novih pogodnijih transformacija $A_0 = A'_0 e^{-i\omega_0 t}$, $A_1 = A'_1 e^{-i(\omega_0 + \omega_p)t}$, $A_2 = A'_2 e^{-i(\omega_0 + \omega_p + \omega_x)t}$ i $A_3 = A'_3 e^{-i(\omega_0 + \omega_p + \omega_y)t}$, dobijaju se jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_0 = i\omega_p A'_1 \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_1 = i\Delta_p A'_1 + i\Omega_p A'_0 + i\Omega_x A'_2 + i\Omega_y A'_3 \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_2 = i(\Delta_p + \Delta_x) A'_2 + i\Omega_x A'_1 \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_3 = i(\Delta_p + \Delta_y) A'_3 + i\Omega_y A'_1, \quad (2.66)$$

odakle se lako očitava hamiltonijan:

$$\begin{aligned} \hat{H}_Y = & - \hbar [\Delta_p \sigma_{11} + (\Delta_p + \Delta_x) \sigma_{22} + (\Delta_p + \Delta_y) \sigma_{33}] - \\ & - \hbar [\Omega_p \sigma_{01} + \Omega_x \sigma_{12} + \Omega_y \sigma_{13} + c.c.], \end{aligned} \quad (2.67)$$

odnosno, u matricnom obliku:

$$\hat{H}_Y = -\hbar \begin{vmatrix} 0 & \Omega_p & 0 & 0 \\ \Omega_p & \Delta_p & \Omega_x & \Omega_y \\ 0 & \Omega_x & \Delta_p + \Delta_x & 0 \\ 0 & \Omega_y & 0 & \Delta_p + \Delta_y \end{vmatrix}. \quad (2.68)$$

Glava 3

Spontana emisija atoma

3.1 Weisskopf-Wigner-ova teorija spontane emisije atoma

Poznato je da se atom, koji se nalazi u pobuđenom stanju deekscituje, odnosno spontano prelazi u neko od nižih stanja, čak i u odsustvu spoljašnjeg elektromagnetnog polja. Ova pojava naziva se spontana emisija. Ona se može objasniti i teorijski odrediti koeficijent spontane emisije samo pomoću modela interakcije atoma sa kvantovanim elektromagnetnim poljem. Ovde će teorija spontane emisije (Weisskopf-Wiegner-ova teorija) biti demonstrirana na primeru atoma sa dva nivoa (osnovno i prvo pobuđeno). Talasna funkcija, koja opisuje sistem atom+elektromagnetno polje, koje se predstavlja kao skup od n fotona određene energije, odnosno frekvence ω može se napisati u obliku:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n [C_{an}(t)|an\rangle e^{-i(\omega_a+n\omega)t} + C_{bn+1}(t)|bn+1\rangle e^{-i(\omega_b+(n+1)\omega)t}], \quad (3.1)$$

gde konstante C označavaju amplitude verovatnoće. Indeks a označava pobuđeno stanje atoma, a n broj fotona, pa je $|an\rangle$ stanje kome odgovara pobuđeni atom i n fotona, dok stanje $|bn+1\rangle$ označava da je atom deekscitiran tj. u osnovnom stanju i zbog toga je sada prisutno $(n+1)$ fotona, jer se pri deekscitaciji atoma emitovao taj jedan dodatni foton. Kako se atom već nalazi u pobuđenom stanju, to je

$$C_{a0}(0) = 1 \quad (3.2)$$

i sve ostale verovatnoće jednake su nuli. Sada se može naći, u prvom redu teorije perturbacije, verovatnoća da atom emituje jedan foton određene frekvence, a zatim prosumirati po svim mogućim stanjima kako bi se dobila ukupna verovatnoća prelaza.

Hamiltonijan za ovde razmatrani slučaj sličan je hamiltonijanu datom u jednačinama 2.23-2.25, s tim što se sada u obzir uzimaju sve moguće frekvence emitovanog fotona:

$$\hat{H} = \hbar \sum_s \omega_s a_s^\dagger a_s + \hbar \omega_a \sigma_a + \hbar \omega_b \sigma_b + \hbar \sum_s (\mathcal{G}_s a_s \sigma_+ + \mathcal{G}_s a_s^\dagger \sigma_-). \quad (3.3)$$

Ovaj hamiltonijan može da poveže samo stanje ukupnog sistema atom+elektromagnetno polje $|a0\rangle$ sa stanjem $|b1_s\rangle$, koje opisuje atom u nižem stanju sa fotonom u s -toj modi (frekvence ω_s) i bez fotona u bilo kojoj drugoj modi. Ovim se opšta talasna funkcija 3.1 redukuje na:

$$|\Psi(t)\rangle = C_{a0}(t)e^{-i\omega_a t}|a\{0\}\rangle + \sum_s C_{b\{1_s\}}(t)e^{-(\omega_b+\omega_s)t}|b\{1_s\}\rangle. \quad (3.4)$$

Zamenom ove jednačine u vremenski zavisnu Šredingerovu jednačinu 2.9, gde je hamiltonijan dat jednačinom 3.3, uz korišćenje RWA radi pojednostavljenja rezultata, mogu se dobiti diferencijalne jednačine, koje opisuju vremensku promenu amplituda verovatnoće:

$$\dot{C}_{a0}(t) = -i \sum_s \mathcal{G}_s e^{-(\omega_s-\omega_0)t} C_{b\{1_s\}}(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{C}_{b\{1_s\}}(t) = -i \mathcal{G}_s^* e^{i(\omega_s-\omega_0)t} C_{a0}(t). \quad (3.6)$$

Vraćanjem vrednosti za $C_{b\{1_s\}}$ iz 3.6 u 3.5 dobija se diferencijalna jednačina po promenljivoj C_{a0} , odnosno:

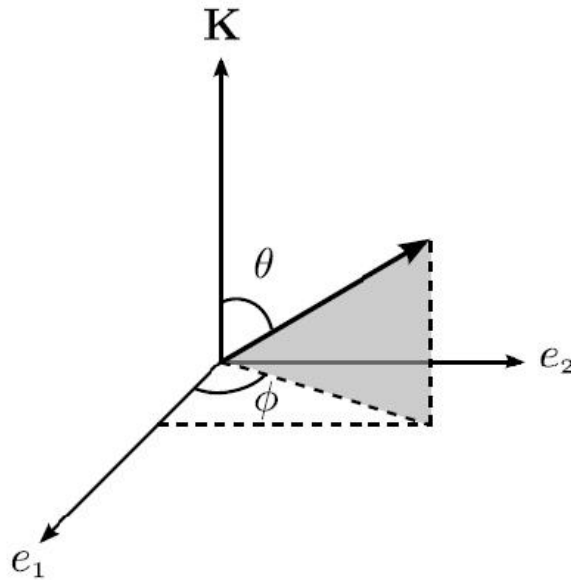
$$\dot{C}_{a0}(t) = - \sum_s |\mathcal{G}_s|^2 \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega_s-\omega_0)(t-t')} C_{a0}(t'). \quad (3.7)$$

Kako je potrebno naći koeficijent spontane emisije slobodnog atoma, suma koja se javlja u izrazu 3.7 zapravo se može zameniti integralom, jer je spektar mogućih frekvenci emitovanog fotona neprekidan:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{a0}(t) = & -\frac{V}{(2\pi c)^3} \int d\omega_s \omega_s^2 \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi |\mathcal{G}(\omega_s, \theta)|^2 \times \\ & \times \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} C_{a0}(t'). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da bi se rešio ovaj integral, mora se naći eksplicitan oblik interakcione konstante \mathcal{G} . Na osnovu slike 3.1 vidi se da se eksplicitni oblik ovog člana može zapisati na sledeći način:

$$|\mathcal{G}(\omega_s, \theta)|^2 = \hbar^{-2} \sum_{\sigma=1}^2 |\langle \alpha | \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\mathbf{r} | b \rangle \varepsilon_{\omega_s} U_{\omega_s}|^2 = \left| \frac{\varepsilon_{\omega_s} \sin \theta}{\hbar} \right|^2. \quad (3.9)$$



Slika 3.1. Dijagram koordinatnog sistema za propagirajući talas sa talasnim vektorom \mathbf{k} i dve transverzalne polarizacije duž pravaca \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 .

Za progresivne elektromagnetne talase veličina "električno polje po jednom fotonu" ε_ω može se zapisati kao:

$$\varepsilon_{\omega_s}^2 = \frac{\hbar \omega_s}{2\epsilon_0 V}. \quad (3.10)$$

Zamenom 3.9 u 3.8 nalazi se:

$$\dot{C}_{a0}(t) = -\frac{1}{6\epsilon_0\pi^2\hbar c^3} \int d\omega_s \omega_s^3 |\varphi|^2 \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega_s - \omega_0)(t-t')} C_{a0}(t'). \quad (3.11)$$

Drugi integral u gornjoj jednačini može se zapisati na sledeći način (rezultat se ovde navodi bez dokaza):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega_s - \omega_0)(t-t')} = \pi \delta(\omega_s - \omega_0) - \mathcal{P} \left[\frac{i}{\omega_s - \omega_0} \right], \quad (3.12)$$

pa se vrednost podintegralne funkcije $\omega_s^3 |\varphi|^2$ može odrediti za vrednost $\omega_s = \omega_0 \equiv \omega_a - \omega_b$. Dodatni član, koji se javlja pri rešavanju integrala 3.12 dovodi do pomaka u frekvenci koji je u vezi sa Lambovim pomakom i ovde se neće posebno razmatrati. Sa druge strane, iz prvog člana pomenutog integrala proizilazi sledeći oblik za promenu koeficijenta C_{a0} sa vremenom:

$$\dot{C}_{a0}(t) = -\frac{\Gamma}{2} C_{a0}(t), \quad (3.13)$$

gde je Γ konstanta koja se naziva Weisskopf-Wigner-ov koeficijent raspada spontanom emisijom i ima eksplicitan oblik:

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega_0^3 |\varphi|^2}{3\hbar c^3}. \quad (3.14)$$

Weisskopf-Wigner-ova teorija predviđa ireverzibilni eksponencijalni raspad populacije ekscitovanih nivoa, bez mogućnosti spontanog pobuđivanja. Sličnim rezonovanjem, moglo bi se zaključiti da će usled interakcija atoma u osnovnom stanju sa kontinuumom moda atom preći iz osnovnog u pobuđeno stanje. Međutim nakon sumiranja doprinosa kontinuuma više različitih moda dobija se da amplitude verovatnoća interferiraju destruktivno, pa ne dolazi do spontanog pobuđivanja.

3.2 Vakuumski indukovana koherentnost

Vakuumski indukovana koherentnost – VIC (na engl. *vacuum induced coherence*) je interferencioni efekat, koji nastaje usled interakcije atoma sa više nivoa sa vakuumskim poljem. Drugim rečima, ovo je kvantni interferencioni efekat, koji je indukovano spontanom emisijom i može značajno da je promeni.

Da bi se on ispoljio u nekom atomu, potrebno je da postoje bar dva nivoa koja su bliskih energija i koji se spontanom emisijom raspadaju na isti niži nivo. Ovde će VIC biti demonstrirana na najjednostavnijem primeru atoma u kome je moguće dobiti ovaj efekat, a to je atom sa tri nivoa u V konfiguraciji, pri čemu je važno da su dva pobuđena nivoa veoma bliska. Kako bi se u potpunosti demonstrirao ovaj efekat razmatraćemo atom bez prisustva spoljašnjih pobuđujućih polja. Hamiltonijan, koji opisuje ovaj sistem sastoji se iz dva dela: prvi član hamiltonijana opisuje slobodan atom sa tri nivoa (jednačina 2.27), dok drugi član opisuje interakciju atoma sa kontinuumom moda koji izazivaju spontanu emisiju. Ovaj drugi član se u dipolnoj aproksimaciji može zapisati u obliku:

$$\mathcal{V}_{AF} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.15)$$

gde je \mathbf{d} dato sa:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{10}|1\rangle\langle 0| + \mathbf{d}_{01}|0\rangle\langle 1| + \mathbf{d}_{20}|2\rangle\langle 0| + \mathbf{d}_{02}|0\rangle\langle 2|, \quad (3.16)$$

dok je elektromagnetno polje u ovom slučaju dato jednačinom 1.30. Prebacivanjem u interakcionu sliku, hamiltonijan dobija oblik:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} e^{i(\omega_{10}-\omega_k)t} a_{\mathbf{k}}|1\rangle\langle 0| + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(2)} e^{i(\omega_{20}-\omega_k)t} a_{\mathbf{k}}|2\rangle\langle 0| + H.c., \quad (3.17)$$

pri čemu su veličine $g_{\mathbf{k}}^{(1)}$ i $g_{\mathbf{k}}^{(2)}$, koje se javljaju u jednačini 3.17, uzete radi kraćeg zapisa, a njihov eksplicitan oblik je:

$$g_{\mathbf{k}}^{(1)} = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \frac{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}}{\hbar} \quad (3.18)$$

$$g_{\mathbf{k}}^{(2)} = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \frac{\mathbf{d}_{20} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}}{\hbar}. \quad (3.19)$$

Talasna funkcija za ovaj sistem data je sa:

$$|\Psi(t)\rangle = A_1(t)|1\rangle|\{0\}\rangle + A_2(t)|2\rangle|\{0\}\rangle + \sum_{\mathbf{k}} A_{0k}|0\rangle|1k\rangle, \quad (3.20)$$

odnosno stanje kada je atom pobuđen odgovara stanju bez fotona $|\{0\}\rangle$, a kada atom pređe u osnovno stanje, on će emitovati jedan foton određene frekvence (talasnog broja k) $|1k\rangle$. Nakon zamene jednačina 3.17 i 3.20 u Šredingerovu jednačinu 2.9, dobijaju se sledeće zavisnosti promene amplituda verovatnoće:

$$i\dot{A}_1 = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} e^{i(\omega_{10}-\omega_k)t} A_{0k} \quad (3.21)$$

$$i\dot{A}_2 = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(2)} e^{i(\omega_{20}-\omega_k)t} A_{0k} \quad (3.22)$$

$$i\dot{A}_{0k} = -g_{\mathbf{k}}^{(1)} e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)t} A_1 - g_{\mathbf{k}}^{(2)} e^{-i(\omega_{20}-\omega_k)t} A_2. \quad (3.23)$$

Formalnom integracijom jednačine 3.23:

$$A_{0k}(t) = ig_{\mathbf{k}}^{(1)} \int_0^t dt' A_1(t') e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)t'} + ig_{\mathbf{k}}^{(2)} \int_0^t dt' A_2(t') e^{-i(\omega_{20}-\omega_k)t'} \quad (3.24)$$

i njenom zamenom u 3.21 i 3.22 mogu se dobiti dve diferencijalne jednačine po dvema promenljivama, odnosno naći zakon raspada u ovom slučaju. Ovde će biti dato izvođenje za jednačinu 3.21, dok je procedura za 3.22 potpuno analogna:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(1)} \int_0^t dt' A_1(t') e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)(t'-t)} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(2)} \int_0^t dt' A_2(t') e^{-i(\omega_{20}-\omega_k)(t'-t)} e^{i\omega_{12}t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Prvi korak ka rešenju ove jednačine je nalaženje sume $\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}$. Kako \mathbf{k} predstavlja talasni vektor emitovanog fotona, a spektar mogućih emitovanih fotona je neprekidan, sumiranje po talasnim vektorima zamenjuje se integracijom po \mathbf{k} i sumiranjem po dvema mogućim polarizacijama:

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(1)} = \sum_{s=1}^2 \int \frac{V}{(2\pi)^3} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(1)} d^3\mathbf{k}. \quad (3.26)$$

Da bi se sprovela određena sumiranja i prointegralilo po sfernim koordinatama, potrebno je specificirati odnose između pravaca vektora dipolnih

momenata kao i pravca emitovanog fotona i pravca polarizacije. Kako foton može biti emitovan u bilo kom pravcu, relevantan odnos u razmatranju čini ugao koji zaklapaju dipolni momenti, pa se radi jednostavnijeg računa, a bez gubljenja opštosti, može uzeti da je dipolni moment \mathbf{d}_{10} duž z -ose, a da se \mathbf{d}_{20} nalazi u xOz ravni i da zaklapa ugao α sa z -osom. Kao što je već rečeno, pravac emitovanog fotona je proizvoljan, odnosno ovi vektori su dati sa:

$$\mathbf{d}_{10} = d_{10}\mathbf{e}_z \quad (3.27)$$

$$\mathbf{d}_{20} = d_{20}(\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z). \quad (3.29)$$

Polarizacioni vektori međusobno su ortogonalni, kao što su ortogonalni i u odnosu na pravac prostiranja elektromagnetnog talasa (odnosno fotona). U opštem slučaju, to mogu da budu bilo koji vektori koji zadovoljavaju ovaj uslov, ali se ponovo radi jednostavnijeg računa i bez gubljenja opštosti može uzeti da su ovi vektori dati na sledeći način:

$$\mathbf{e}_{k1} = \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{e}_{k2} = \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z)}{|\mathbf{k}| |\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|}, \quad (3.31)$$

odnosno u konkretnom slučaju (Slika 3.1.):

$$\mathbf{e}_1 = \sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (3.32)$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z. \quad (3.33)$$

Pomoću ovih jednačina, suma u 3.26 svodi se na:

$$\sum_{s=1}^2 (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s})^2 = (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}1})^2 + (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2})^2 = d_{10}^2 \sin^2 \theta. \quad (3.34)$$

Korišćenjem Weisskopf-Wigner-ove aproksimacije i jednačine 3.12, prvi sabirak u jednačini 3.25 postaje

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(1)} \int_0^t dt' A_1(t') e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)(t'-t)} = -\frac{1}{6\pi^2 c^3 \epsilon_0 \hbar} d_{10}^2 \omega_{10}^3 A_1(t), \quad (3.35)$$

odakle se, nakon primene jednačine 3.14 za koeficijent spontane emisije, dobija:

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(1)} \int_0^t dt' A_1(t') e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)(t'-t)} = -\frac{\gamma_1 A_1(t)}{2}. \quad (3.36)$$

Istim postupkom izračunava se i drugi sabirak iz 3.25:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s}) (\mathbf{d}_{20} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s}) = & - \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi d_{10} d_{20} + \\ & + \sin^2 \theta \cos \alpha d_{10} d_{20}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

što se nakon integraljenja svodi na:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{(1)} g_{\mathbf{k}}^{(2)} \int_0^t dt' A_2(t') e^{-i(\omega_{10}-\omega_k)(t'-t)} a^{i(\omega_{12}t)} = & \\ = -\frac{1}{6\pi^2 c^3 \epsilon_0 \hbar} \mu_{10} \mu_{20} \cos \alpha \omega_{20}^3 A_2(t) e^{i\omega_{12}t}. & \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ukoliko se uzme da su dva gornja nivoa veoma bliska, što je i bila početna pretpostavka $\omega_{10} \approx \omega_{20}$, tada se izraz 3.38 može uprostiti jer koeficijenti spontane emisije:

$$\gamma_1 = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} d_{10}^2 \omega_{10}^3 \quad (3.39)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} d_{20}^2 \omega_{20}^3 \quad (3.40)$$

daju vezu:

$$\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{d_{10} d_{20}}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \omega_{10}. \quad (3.41)$$

Ako se kosinus ugla između dipolnih momenata zameni parametrom p :

$$p = \cos \alpha = \frac{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{d}_{20}}{d_{10}d_{20}} \quad (3.42)$$

jednačina 3.38 postaje:

$$-p \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} A_2(t) e^{i\omega_{12}t}, \quad (3.43)$$

tako da se jednačina 3.25 konačno svodi na:

$$\dot{A}_1(t) = -\frac{\gamma_1}{2} A_1(t) - p \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} A_2(t) e^{i\omega_{12}t}. \quad (3.44)$$

Sličnim postupkom iz 3.22 dobija se:

$$\dot{A}_2(t) = -p \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} A_1(t) e^{-i\omega_{12}t} - \frac{\gamma_2}{2} A_2(t). \quad (3.45)$$

Glava 4

Elektromagnetno indukovana transparentnost

4.1 Master jednačine

Master jednačine (ili optičke Blochove jednačine) koriste se pri rešavanju opšte grupe problema, koji uključuju interakcije između malih i velikih sistema. U ovom slučaju mali sistem je atom, a veliki sistem predstavlja kontinuum moda elektromagnetnog polja. Tako se, na primer, pri proračunavanju brzine atomskih raspada, ne vrše izračunavanja dinamike polja (velikog sistema), već samo njegov uticaj na dinamiku atomskog sistema (malog sistema). Veliki sistem se obično naziva *rezervoar*, a mali sistem samo *sistem*.

Za poznavanje evolucije sistema, naravno, potrebno je znati ukupan hamiltonijan, koji se može predstaviti kao suma hamiltonijana malog sistema, velikog sistema - rezervoara i interakcionog člana:

$$H = H_s + H_r + \mathcal{V}. \quad (4.1)$$

Ovaj hamiltonijan zajedno sa početnim uslovima u potpunosti određuje problem. Ukoliko je mali sistem u početnom trenutku t_0 opisan matricom gustine $\rho_s(t_0)$, pri čemu s označava da se radi o matrici gustine sistema, a rezervoar opisan matricom gustine $\rho_r(H_r)$ i ukoliko sistem i rezervoar stupaju u interakciju u trenutku $t = t_0$, u početnom trenutku nema korelisanosti među njima, tako da je matrica gustine ukupnog sistema u tom trenutku proizvod matrica gustine sistema i rezervoara:

$$\rho_{sr}(t_0) = \rho_s(t_0) \rho_r(H_r). \quad (4.2)$$

Za matrice gustine inače važi da je:

$$\text{tr}_s \{ \rho_s(t_0) \} = 1, \quad (4.3)$$

pri čemu tr_s označava da se trag traži po promenljivima sistema, odnosno da se vrši integracija po koordinatama koje se odnose na sistem. Za rezervoar takođe važi da je:

$$\text{tr}_r \rho_r(H_r) = 1, \quad (4.4)$$

pri čemu, kao i ranije, tr_r označava trag po promenljivima rezervoara.

Master jednačine, koje opisuju sistem u Šredingerovoj slici, dobijaju se iz kvantne Liouville jednačine (ili von Neumann jednačine), koja predstavlja jednačinu kretanja za matricu gustine sistema

$$\dot{\rho}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{sr}]. \quad (4.5)$$

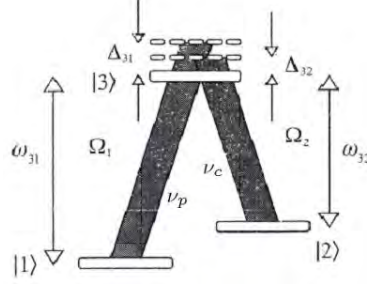
Da bi se u obzir uzele i nekoherentne interakcije, kakva je spontana emisija, u prethodnu jednačinu dodaje se još jedan sabirak, tako da ona postaje

$$\dot{\rho}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{sr}] + \mathcal{L}\rho. \quad (4.6)$$

Oblik operatora \mathcal{L} određuje se za konkretni problem.

4.2 Master jednačine za Λ konfiguraciju

Tehnika EIT prvi put je eksperimentalno potvrđena 1990. godine u parama Stroncijuma (Sr). U ovom eksperimentu, interakcija atoma Sr sa dva laserska snopa ostvaruje se kao interakcija atoma sa tri nivoa tipa Λ (Λ konfiguracija) sa *sondirajućim poljem* (na engl. *probe field*) frekvence ν_p , koje indukuje dipolni prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ i *kuplujućim poljem* (engl. *coupling field*) frekvence ν_c , koje indukuje dipolni prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Šematski prikaz ovog atoma sa interagujućim poljima prikazan je na slici 4.1.


 Slika 4.1. Šematski prikaz atoma sa tri nivoa u Λ konfiguraciji.

Za postizanje EIT važno je da prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ bude dipolno zabranjeni prelaz. Pobuđenje atoma u najviše energijsko stanje $|3\rangle$, odnosno naseljenost ovog nivoa može se ostvariti direktnim prelazom $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ ili pomoću sledećeg niza prelaza $|1\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle$. Ako amplitude verovatnoće za ova dva različita puta pobude interferiraju destruktivno, i ako stanje $|2\rangle$ ima dovoljno dugo vreme života, može se unutar apsorpcione linije, koja potiče od prelaza između stanja $|1\rangle$ i $|3\rangle$ pojaviti transparentni *prozor*, koji označava da ne dolazi do apsorpcije probnog polja.

Hamiltonijan interakcije atoma tipa Λ sa navedenim laserskim poljima je zbir hamiltonijana atoma i hamiltonijana interakcije:

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2} \left(\Omega_1 e^{i\nu_p t} |3\rangle\langle 1| + \Omega_2 e^{i\nu_c t} |2\rangle\langle 3| + c.c. \right) \quad (4.7)$$

$$H_a = \hbar\omega_{31} |3\rangle\langle 3| + \hbar\omega_{32} |2\rangle\langle 2|, \quad (4.8)$$

gde su Ω_1 i Ω_2 u opštem slučaju kompleksne Rabijeve frekvence koje odgovaraju prelazima $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ i $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, respektivno.

Master jednačine za ovaj problem dobijaju se iz 4.6. Pogodno je preći u koordinatni sistem koji rotira sa laserskom frekvencom, uvodeći transformacije:

$$\rho_{11} \rightarrow \rho_{11}, \quad \rho_{22} \rightarrow \rho_{22}, \quad \rho_{33} \rightarrow \rho_{33}, \quad (4.9)$$

$$\rho_{12} \rightarrow \rho_{12} e^{-i(\nu_p - \nu_c)t}, \quad \rho_{13} \rightarrow \rho_{13} e^{-i\nu_p t}, \quad (4.10)$$

tako da su master jednačine oblika:

$$\dot{\rho}_{31} = -(\gamma_{31} - i\Delta_{31}) \rho_{31} + \frac{i\Omega_2}{2} (\rho_{33} - \rho_{11}) + \frac{i\Omega_1}{2} \rho_{21} \quad (4.11)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -(\gamma_{21} - i(\Delta_{23} + \Delta_{32}))\rho_{21} - \frac{i\Omega_2}{2}\rho_{31} + \frac{i\Omega_1}{2}\rho_{23} \quad (4.12)$$

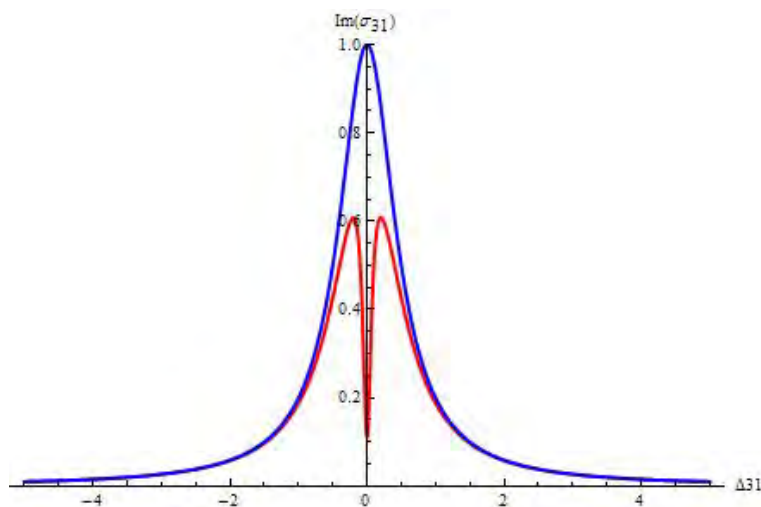
$$\dot{\rho}_{23} = -(\gamma_{23} - i\Delta_{23})\rho_{23} + \frac{i\Omega_2}{2}(\rho_{22} - \rho_{33}) - \frac{i\Omega_1}{2}\rho_{21}. \quad (4.13)$$

Ovde je $\Delta_{31} = \nu_p - \omega_{31}$ i $\Delta_{23} = \nu_c - \omega_{23}$. Susceptibilnost sredine data je na sledeći način:

$$\chi = \frac{2N|\vec{\mu}_{31}|^2\rho_{31}}{\hbar\varepsilon_0\Omega_1}, \quad (4.14)$$

gde je N koncentracija atoma sredine, i predstavlja kompleksnu veličinu. Apsorpcija sondirajućeg polja određena je imaginarnim delom χ , odnosno imaginarnim delom matričnog elementa (koherencije) ρ_{31} .

Ukoliko se razmatra stacionarno stanje, tj. izvodi po vremenu u jednačinama 4.11-4.13 izjednače sa nulom, moguće je analitički odrediti ρ_{31} i nacrtati grafik zavisnosti koeficijenta apsorpcije (imaginarni deo matričnog elementa ρ_{31}) u zavisnosti od detuninga Δ_{31} . Ovaj grafik prikazan je na slici 4.2.



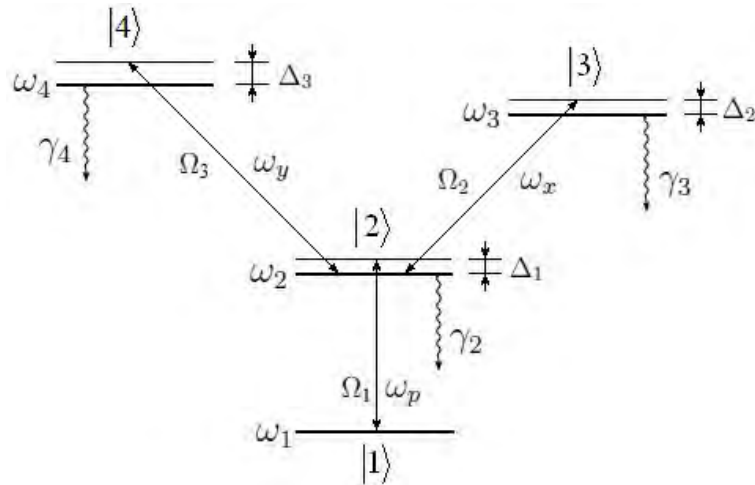
Slika 4.2. Apsorpcija sondirajućeg polja kao funkcija detuninga Δ_{31} (a) kada nema kuplajućeg polja - plava linija, (b) u prisustvu kuplajućeg polja - crvena linija.

Dobijanje elektromagnetno indukovane transparentnosti (kao na slici 4.2) nije moguće pri proizvoljnim vrednostima jačina polja, odnosno pri proizvoljnim vrednostima Rabijevih frekvenci i koeficijenata raspada. Za dobijanje gornjeg

grafika korišćene su sledeće numeričke vrednosti: plava linija na grafiku - nema indukovane transparentnosti - $\gamma_{21} = 0.01^1$, $\gamma_{31} = 0.5$, $\Omega_1 = 1$ i $\Omega_2 = 0$; crvena linija - ima indukovane transparentnosti - stvaranje "prozora" u sredini linije - $\gamma_{21} = 0.01$, $\gamma_{31} = 0.5$, $\Omega_1 = 1$ i $\Omega_2 = 0.4$. Kao što je već rečeno, posmatra se slučaj kada je prelaz $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ rezonantan, odnosno kada je $\Delta_{32} = 0$.

4.3 Master jednačine za Y konfiguraciju

Na slici 4.3. prikazan je atom sa rasporedom nivoa u Y konfiguraciji.



Slika 4.2. Atom sa rasporedom nivoa u Y konfiguraciji.

Na istoj slici prikazane su i sve relevantne veličine, koje su bitne za razmatranje koje sledi, ali sa nešto promenjenim oznakama u odnosu na glavu 3. Sada ω_1 , ω_2 , ω_3 i ω_4 predstavljaju frekvence atomskih nivoa $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ i $|4\rangle$ (energije nivoa u atomskom sistemu jedinica u kome je $\hbar = 1$), Ω_1 , Ω_2 i Ω_3 su Rabijske frekvence, koje odgovaraju prelazima $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ i $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, dok su ω_p , ω_x i ω_y frekvence odgovarajućih polja koja indukuju pomenute prelaze. Konstante γ_1 , γ_2 i γ_3 predstavljaju konstante spontanog raspada sa nivoa $|2\rangle$, $|3\rangle$ i $|4\rangle$ na nivoe $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$, respektivno. Veličine Δ_1 , Δ_2 i Δ_3 predstavljaju detuninge, odnosno meru za koliko se frekvence polja, koja indukuju date prelaze, razlikuju od atomskih frekvenci (razlike

¹Kako je prelaz $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ zabranjeni dipolni prelaz, koeficijent γ_{21} je značajno manji od koeficijenta raspada γ_{31} i postoji zahvaljujući neradijativnim prelazima.

frekvenci nivoa čiji se prelaz indukuje). Eksplicitno zapisano, one su jednake: $\Delta_1 = \omega_p - (\omega_2 - \omega_1)$, $\Delta_2 = \omega_x - (\omega_3 - \omega_2)$ i $\Delta_3 = \omega_y - (\omega_4 - \omega_2)$.

Ukoliko se u jednačinu 4.6 unese izraz za hamiltonijan za Y konfiguraciju i ukoliko se u razmatranje uzmu i spontani raspadi dati formulom 3.36, kao i efekat VIC (jer nivoi $|3\rangle$ i $|4\rangle$ mogu imati vrlo bliske vrednosti energija, odnosno $\omega_3 \approx \omega_4$), dobija se sledeći sistem master jednačina:

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{2}\Omega_1\rho_{21} - \frac{i}{2}\Omega_1^*\rho_{12} + \gamma_{12,12}\rho_{22} \quad (4.15)$$

$$\dot{\rho}_{33} = \frac{i}{2}\Omega_2^*\rho_{23} - \frac{i}{2}\Omega_2\rho_{32} - \gamma_{23,23}\rho_{33} \quad (4.16)$$

$$\dot{\rho}_{44} = \frac{i}{2}\Omega_3^*\rho_{24} - \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{42} - \gamma_{24,24}\rho_{44} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} = & \frac{i}{2}\Omega_1\rho_{22} - \frac{i}{2}\Omega_1\rho_{11} + i\Delta_1\rho_{12} - \frac{i}{2}\Omega_2^*\rho_{13} - \frac{i}{2}\Omega_3^*\rho_{14} - \\ & - \frac{1}{2}\gamma_{12,12}\rho_{12} + \gamma_{12,23}\rho_{23} + \gamma_{12,24}\rho_{24} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{13} = & -\frac{i}{2}\Omega_2\rho_{12} + \frac{i}{2}\Omega_1\rho_{23} - i(\Delta_1 + \Delta_2)\rho_{13} - \\ & - \frac{1}{2}\gamma_{23,23}\rho_{13} - \frac{1}{2}\gamma_{23,24}\rho_{14} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{14} = & i\Delta_1\rho_{14} + i\Delta_3\rho_{14} - \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{12} + \frac{i}{2}\omega_1\rho_{14} + \frac{i}{2}\Omega_1\rho_{24} - \\ & - \frac{1}{2}\gamma_{24,24}\rho_{14} - \frac{1}{2}\gamma_{23,24}\rho_{13} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{23} = & \frac{i}{2}\Omega_1^*\rho_{13} + i\Delta_2\rho_{23} - \frac{i}{2}\Omega_2\rho_{22} + \frac{i}{2}\Omega_2\rho_{33} + \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{43} - \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_{12,12} + \gamma_{23,23})\rho_{23} - \frac{1}{2}\gamma_{23,24}\rho_{24} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{24} = & \frac{i}{2}\Omega_1^*\rho_{14} + i\Delta_3\rho_{24} - \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{22} + \frac{i}{2}\Omega_2\rho_{34} + \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{44} - \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_{12,12} + \gamma_{24,24})\rho_{24} - \frac{1}{2}\gamma_{23,24}\rho_{23} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{34} = & \frac{i}{2}\Omega_2^*\rho_{24} - i\Delta_2\rho_{34} + i\Delta_3\rho_{34} - \frac{i}{2}\Omega_3\rho_{32} - \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_{23,23} + \gamma_{24,24})\rho_{34} - \frac{1}{2}\gamma_{23,24}(\rho_{33} + \rho_{44}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

uz šest jednačina koje se dobijaju konjugovanjem jednačina 4.18-4.23 i uslov da je sistem zatvoren:

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1. \quad (4.24)$$

Konstante $\gamma_{ij,ik}$, čije prisustvo u gornjim jednačinama odražava postojanje VIC efekta, dobijaju se kao kombinacije odgovarajućih koeficijenata spontane emisije:

$$\gamma_{ij,ik} = \sqrt{\gamma_{ij,ij} \cdot \gamma_{ik,ik}} \cdot \cos \theta. \quad (4.25)$$

Koeficijenti spontane emisije $\gamma_{ij,ij}$ u gornjoj jednačini zavise od unutrašnje strukture atoma i dati su jednačinom 3.39. Ugao θ predstavlja ugao između vektora dipolnih momenata (jednačina 3.42). Iz jednačine 4.25 može se videti da je konstanta $\gamma_{ij,ik}$ jednaka nuli ukoliko se prvi indeksi ne poklapaju - npr. $\gamma_{12,23} = 0$ ili $\gamma_{12,24} = 0$, dok je npr. $\gamma_{23,24} = \sqrt{\gamma_3 \gamma_4}$. Radi pojednostavljenog pisanja, nadalje će se umesto označavanja koeficijenata γ sa dva para indeksa koristiti samo jedan indeks: kako se posmatra spontana emisija samo između nivoa $4 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$ i $2 \rightarrow 1$, ovi koeficijenti spontane emisije biće označeni sa γ_4 , γ_3 i γ_2 , respektivno.

Rabijeve frekvence Ω_1 , Ω_2 i Ω_3 u opštem slučaju su kompleksne veličine, tako da se u prethodnim jednačinama mogu izvršiti smene $\Omega_i \rightarrow \Omega_i e^{i\phi_i}$. Nakon ovoga su Ω_i ($i = 1, 2, 3$) postale realne veličine, dok je informacija o odnosu kompleksnog i realnog dela sadržana u novim promenljivima ϕ_i . U cilju pojednostavljenog zapisa samih master jednačina, uvode se sledeće smene za elemente matrice gustine ρ_{ij} :

$$\rho_{12} = \sigma_{12} e^{i\phi_1} \quad (4.26)$$

$$\rho_{23} = \sigma_{23} e^{i\phi_2} \quad (4.27)$$

$$\rho_{24} = \sigma_{24} e^{i\phi_3}, \quad (4.28)$$

a u skladu sa njima i:

$$\rho_{13} = \sigma_{13} e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (4.29)$$

$$\rho_{14} = \sigma_{14} e^{i(\phi_1 + \phi_3)} \quad (4.30)$$

$$\rho_{34} = \sigma_{13} e^{i(\phi_3 - \phi_2)}. \quad (4.31)$$

Dijagonalni matrični elementi ne trpe nikakvu promenu ovim transformacijama, dok se preostalih šest dobija konjugacijom izraza 4.26-4.31.

Korišćenjem svih do sada pomenutih smena (uz novu oznaku $\Phi = \phi_3 - \phi_2$) i korišćenjem odgovarajućih skraćenih zapisa, jednačine 4.15-4.23 svode se na:

$$\dot{\sigma}_{11} = -\frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{12} + \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{21} + \gamma_2\sigma_{22} \quad (4.32)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{23} - \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{32} - \gamma_3\sigma_{33} \quad (4.33)$$

$$\dot{\sigma}_{44} = \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{24} - \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{42} - \gamma_4\sigma_{44} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{12} = & -\frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{11} + (i\Delta_1 - \frac{1}{2}\gamma_2)\sigma_{12} - \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{13} - \\ & -\frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{14} + \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{22} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{13} = & -\frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{12} - [i(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{2}\gamma_3]\sigma_{13} - \\ & -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta e^{i\Phi}\sigma_{14} + \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{23} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{14} = & -\frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{12} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta\sigma_{13} + \\ & + (i\Delta_1 + i\Delta_3 + \frac{i}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\gamma_4)\sigma_{14} + \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{24} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{23} = & \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{13} - \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{22} + (i\Delta_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3)\sigma_{23} - \\ & -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta\sigma_{24}e^{i\Phi} + \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{33} + \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{43} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{24} = & \frac{i}{2}\Omega_1\sigma_{14} - \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta\sigma_{23}e^{-i\Phi} + \\ & + (i\Delta_3 - \frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_4)\sigma_{24} + \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{34} + \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{44} \end{aligned} \quad (4.39)$$

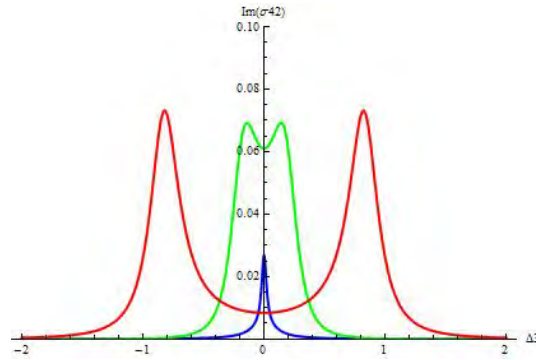
$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{34} = & \frac{i}{2}\Omega_2\sigma_{24} - \frac{i}{2}\Omega_3\sigma_{32} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta\sigma_{33}e^{-i\Phi} + \\ & + (i\Delta_3 - i\Delta_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_4)\sigma_{34} - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_3\gamma_4}\cos\theta\sigma_{44}e^{-i\Phi}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

uz već pomenutu jednačinu 4.24.

Ukoliko se razmatra stacionarno stanje, tj. ako se izvodi po vremenu u jednačinama 4.32-4.40 izjednače sa nulama, umesto sistema diferencijalnih jednačina, dobija se sistem od 16 linearnih algebarskih jednačina (9 jednačina (4.32)-(4.40) + 6 jednačina dobijenih konjugovanjem jednačina (4.35)-(4.40) + 1 jednačina zatvorenosti sistema (4.24)). Kako ima i 16 promenljivih, ovaj sistem je jednoznačan i u principu rešiv analitički. Međutim, zbog

složenosti izraza koji se dobija, ovaj izraz se neće eksplicitno navoditi, već se na osnovu njega iscrtavaju grafici sa unapred zadatim vrednostima konstanti spontane emisije, Rabijevih frekvenci za različite prelaze i detuninga za navedene prelaze.

Kao i u prethodnom odeljku, gde je razmatrana EIT u Λ konfiguraciji, i u Y konfiguraciji je moguće postići ovaj efekat. U skladu sa oznakama na slici 4.2., EIT (odnosno smanjenje koeficijenta apsorpcije na vrednost blisku nuli) za prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, može se postići delovanjem polja koje indukuje prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Na slici 4.5. predstavljeni su grafici koeficijenata apsorpcije za elektromagnetno polje, čija je frekvencija bliska frekvenci rezonantnog prelaza između nivoa $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, u zavisnosti od Δ_3 , pri čemu veličina Δ_3 odgovara upravo pomenutoj razlici frekvenci, a u skladu sa slikom 4.2.



Slika 4.5. Koeficijent apsorpcije za polje koje indukuje prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ u zavisnosti od detuninga tog polja za različite vrednosti Rabijeve frekvence Ω_1 .

Za dobijanje gornjeg grafika korišćene su sledeće numeričke vrednosti: veličine $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \Omega_2, \Omega_3, \Phi$ i θ su sve vreme držane konstantnim, i to: $\gamma_2 = 0.3, \gamma_3 = 0.1, \gamma_4 = 0.1, \Omega_2 = 0.1, \Omega_3 = 0.1, \Phi = 0$ i $\theta = 0$. Posmatran je slučaj u kome su prelazi $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ i $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ rezonantni, odnosno $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Različiti grafici generisani su za različite vrednosti Rabijeve frekvence Ω_1 i to 0.1, 0.4 i 5/3 za plavu, zelenu i crvenu liniju na grafiku, respektivno.

Sa grafika se može videti da za vrednost Rabijeve frekvence $\Omega_1 = 0.1$ postoji jaki apsorpcioni pik blizu vrednosti $\Delta_3 = 0$, dok je u ostalim oblastima apsorpcija bliska nuli. Sa povećanjem Rabijeve frekvence od 0.1 do 0.4 može se primetiti da nastaju dva simetrična apsorpciona pika. Ovi pikovi uz to i rastu, što odgovara povećanju apsorpcije. U ostalim oblastima apsorpcija i dalje ostaje bliska nuli. Sa daljim povećanjem Rabijeve frekvence npr. $\Omega_1 = 5/3$, rastojanje između dva pika postaje veliko, a visine pikova i dalje

rastu. Između pikova, međutim, postoji minimum, odnosno u oblastima gde je $\Delta_3 = 0$ apsorpcija postaje bliska nuli, što znači da se za ove vrednosti detuninga ostvaruje EIT efekat.

Glava 5

Mezoscopske poluprovodničke heterostrukture

U Mezoscopske poluprovodničke heterostrukture spadaju dvodimenzionalna kvantna jama, jednodimenzionalna kvantna žica i kvantna tačka nulte dimenzionalnosti. Pod dimenzionalnošću određenog prostorno konfiniranog sistema podrazumeva se broj dimenzija prostora duž kojih je moguće slobodno (nekvantovano) kretanje elektrona (ili neke druge kvantne čestice). Zapravo, kretanje elektrona u kvantnoj jami ograničeno je duž samo jednog pravca, u kvantnoj žici duž dva pravca, dok je u kvantnoj tački ograničeno duž sva tri prostorna pravca, imajući tako nula stepeni slobode. Ukoliko se broj stepeni slobode označi sa D_f (f - degree of Freedom), a broj pravaca u kojima je kretanje elektrona ograničeno sa D_c (c - directions of Confinement), važiće jednačina 5.1:

$$D_f + D_c = 3 \tag{5.1}$$

za sve moguće kvantne sisteme u fizici čvrstog stanja - tabela 3.1.

Sistem	D_c	D_f
Provodnik	0	3
Kvantna jama	1	2
Kvantna žica	2	3
Kvantna tačka	3	0

Tabela 5.1: Broj stepeni slobode D_f i stepen konfiniranja D_c za četiri osnovna sistema

U nastavku ove glave ukratko će biti reči o svakom od gore navedenih tipova.

5.1 Provodnici

Većina provodnika ima kristalnu strukturu. Naime, oni se sastoje od pravilno raspoređenih jona, oko kojih se valentni elektroni praktično slobodno kreću. Najjednostavniji tip kristalne rešetke je kubična rešetka, kod koje se joni nalaze u temenima kocke. Ovi joni stvaraju sferno simetrični potencijal oko svojih centara, pri čemu je potencijal njihovih jezgara ekraniran potencijalom elektrona u omotaču, a kasnije i elektronima koji formiraju kovalentne veze.

Potencijal koji se stvara u kristalu je veoma složen. Međutim, koristeći princip jednostavnosti ¹, ovaj potencijal može se smatrati konstantnim! Zbog toga je Šredingerova jednačina za elektron koji se nalazi u ovom potencijalu slična sa Šredingerovom jednačinom za slobodni elektron u vakuumu. Jedina razlika (koja dovoljno precizno opisuje elektron u kristalu) je ta što umesto mase elektrona u vakuumu treba koristiti efektivnu masu koja je karakteristična za dati materijal i određuje se empirijski:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi = E\psi. \quad (5.2)$$

Svojtvene vrednosti hamiltonijana iz prethodne jednačine, odnosno energije elektrona date su izrazom:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (5.3)$$

Eksperimentalna merenja pokazuju da je efektivna masa anizotropna veličina, odnosno da se njena vrednost menja u zavisnosti od pravca kretanja elektrona. Za *GaAs*, materijal, koji se često koristi za izradu poluprovodnika, efektivna masa iznosi približno $0.067m_0$, gde m_0 predstavlja masu mirovanja elektrona u vakuumu.

5.2 Kvantne jame

5.2.1 Heterospojevi

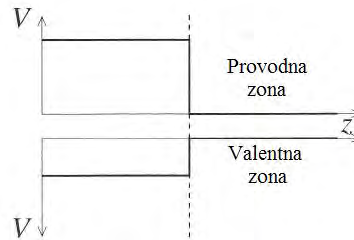
Ukoliko se dva poluprovodnika, sastavljena od dva različita materijala, postave jedan do drugog, odnosno formiraju *heterospoj*, jednačina 5.2 važi za svaki

¹Pokušati sa najjednostavnijom pretpostavkom, ukoliko radi - koristiti je i dalje, ukoliko ne - pokušati sa sledećom najjednostavnijom pretpostavkom.

poluprovodnik ponaosob, s tim što efektivna masa zavisi od materijala u kome se posmatrani elektron nalazi. Ukoliko se širine zabranjene zone dva materijala medjusobno razlikuju, onda se u Šredingerovoj jednačini mora dodati i član koji opisuje potencijalnu razliku između data dva nivoa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) + V(z)\psi(z) = E\psi(z), \quad (5.4)$$

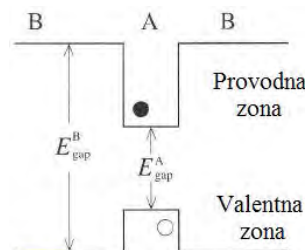
gde jednodimenzionalni potencijal $V(z)$ predstavlja razliku između energija provodnih zona (slika 5.1).



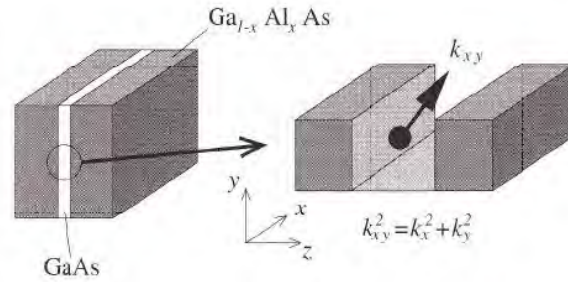
Slika 5.1. Jednodimenzionalni potencijal $V(z)$ u provodnoj i valentnoj zoni u heterospojevima.

5.2.2 Heterostrukture

Heterostrukture se formiraju stvaranjem više heterospojeva. Ukoliko se jedan sloj jednog poluprovodničkog materijala (A) nađe "usendvičen" između dva sloja drugog poluprovodnika (B) dobija se kvantna jama (Slika 5.2). Visina kvantne jame može da se podešava pogodnim odabirom poluprovodničkih materijala, odnosno dopiranjem u određenom procentu jedne iste vrste poluprovodnika. Tako se najčešće galijum-arsenidu $GaAs$ dodaje aluminijum $Ga_{1-x}Al_xAs$ (Slika 5.3). Pri tome, količina aluminijuma u materijalu određuje dubinu jame.



Slika 5.2. Jednodimenzionalni potencijal $V(z)$ u provodnoj i valentnoj zoni formira kvantnu jamu.



Slika 5.3. Realizacija heterostrukture pomoću slojeva poluprovodnika $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$.

5.2.3 Šredingerova jednačina za kvantnu jamu

Razmatra se potencijal koji nastaje kao rezultat spajanja različitih poluprovodnika kao na slici 5.3, pri čemu se stvara potencijal dat na slici 5.2. Šredingerova jednačina za ovaj slučaj ima sledeći oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + V(z)\psi = E\psi. \quad (5.5)$$

Kako se potencijal može zapisati kao suma potencijala po komponentama $V = V(x) + V(y) + V(z)$, pri čemu je u ovom slučaju $V(x) = V(y) = 0$, svojstvena funkcija se može predstaviti kao proizvod talasnih funkcija koje zavise od po samo jedne prostorne koordinate:

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z). \quad (5.6)$$

Koristeći ovu talasnu funkciju u jednačini 5.5 dobija se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \psi_y \psi_z + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \psi_x \psi_z + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} \psi_x \psi_y \right) + V(z)\psi_x \psi_y \psi_z = E\psi_x \psi_y \psi_z. \quad (5.7)$$

Iz prethodne jednačine mogu se identifikovati tri različita člana koji doprinose ukupnoj energiji E , po jedan od svakog od tri međusobno normalna pravca, tj. $E = E_x + E_y + E_z$. Tada se jednačina 5.7 raspada na tri nezavisne jednačine za tri nezavisna prostorna pravca:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = E_x \psi_x \quad (5.8)$$

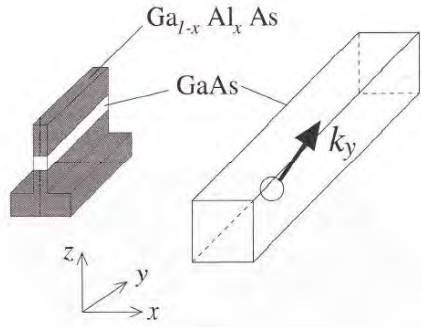
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = E_y \psi_y \quad (5.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} + V(z) \psi_z = E_z \psi_z. \quad (5.10)$$

Jednačine 5.8 i 5.9 predstavljaju jednodimenzionalne jednačine za slobodnu česticu, dok jednačina 5.10 predstavlja jednačinu za kretanje čestice u jednodimenzionalnoj potencijalnoj jami.

5.3 Kvantne žice

Jedan od mogućih načina realizacije kvantne žice prikazan je na slici 5.4. Sa slike je očigledno da se elektron može slobodno kretati duž jednog pravca (u ovom slučaju duž y-ose). Ovakve strukture mogu se proizvoditi na isti način kao i kvantne jame (npr. metodom narastanja kristala), s tim što se pri postupku izrade ostavlja jedan stub, tako da postoji konfiniranje u još jednom pravcu.



Slika 5.4. Kvantna žica i šematski prikaz jednog stepena slobode momenta elektrona.

5.3.1 Šredingerova jednačina za kvantne žice

Šredingerova jednačina koja opisuje elektron, koji se nalazi u potencijalu koji formira struktura kao na slici 5.4, takođe se može zapisati kao jednačina 5.5 sa tom razlikom što se sada potencijal u opštem slučaju ne razlaže kao ranije, već se može zapisati u obliku:

$$V(x, y, z) = V(x) + V(y, z), \quad (5.11)$$

tako da se jednačina 5.5 uz smenu 5.11 svodi na dve jednačine

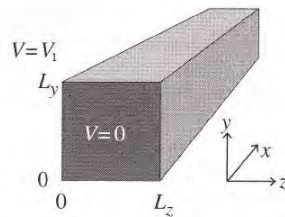
$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E_x \psi(x) \quad (5.12)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} \right) + V(y, z) \psi(y, z) = E_{y,z} \psi(y, z) \quad (5.13)$$

čije dalje rešavanje zavisi od konkretnih oblika potencijala.

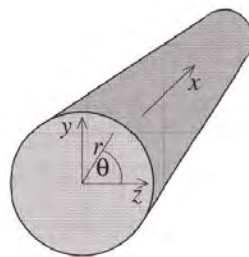
5.3.2 Značajniji oblici kvantnih žica

Jedna od najjednostavnijih geometrija kvantnih žica predstavljena je na slici 5.5.



Slika 5.5. Kvantna žica sa kvadratnim poprečnim presekom.

Ovakva kvantna žica može se smatrati dvodimenzionalnom analogijom jednodimenzionalnog konfinirajućeg potencijala konačne dubine. Još jedna zanimljiva geometrijska konfiguracija kvantne žice prikazana je na slici 5.6.

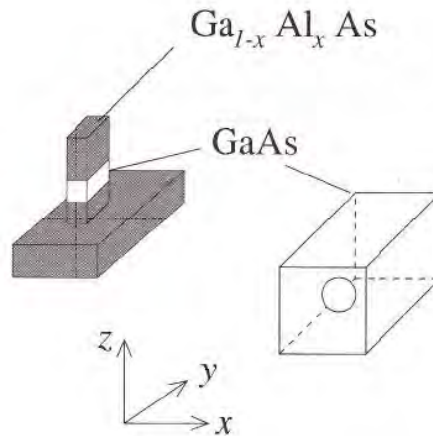


Slika 5.6. Kvantna žica sa kružnim poprečnim presekom.

Pri određivanju energijskih nivoa elektrona u kvantnoj žici sa kružnim poprečnim presekom pogodno je preći na cilindrične koordinate.

5.4 Kvantne tačke

I kvantne tačke, kao i ostali konfinirani kvantni sistemi mogu se realizovati pomoću metoda narastanja kristala (Slika 5.7), pri čemu je kvantni sistem sada konfiniran u sva tri prostorna pravca.

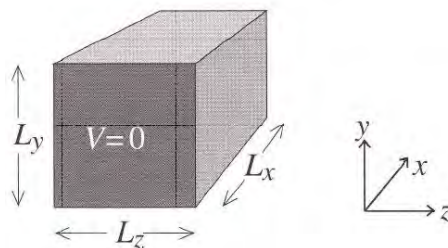


Slika 5.7. Kvantna tačka i šematski prikaz elektrona sa uklonjenim svim stepenima slobode njegovog kretanja.

5.4.1 Značajniji oblici kvantnih tačaka

Kvantne tačke oblika paralelopipeda

Kvantna tačka koja se dobija generalizacijom kvantne jame u jednodimenzionalnom slučaju je kvantna tačka oblika paralelopipeda (slika 5.8).



Slika 5.8. Šematska ilustracija kvantne tačke oblika paralelopipeda sa stranicama dužina L_x , L_y i L_z .

Ukoliko se razmatra kvantna tačka oblika kocke, pri čemu je visina potencijalne barijere beskonačna, Šredingerova jednačina je oblika:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E_{x,y,z} \psi(x, y, z), \quad (5.14)$$

gde se, kao i u ranijim slučajevima, ukupna energija $E_{x,y,z}$ može zapisati kao suma tri člana E_x , E_y i E_z , pa će se jednačina 5.14 razložiti na tri jednodimenzionalne jednačine:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E_x \psi(x) \quad (5.15)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) = E_y \psi(y) \quad (5.16)$$

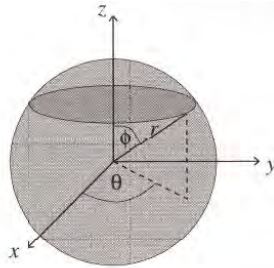
$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) = E_z \psi(z). \quad (5.17)$$

Dakle, u slučaju beskonačno duboke jame, ukupna energija jednaka je sumi energija za jednodimenzionalne kvantne jame širina L_x , L_y i L_z , odnosno data je jednačinom:

$$E_{x,y,z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^*} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right). \quad (5.18)$$

Sferne kvantne tačke

Kvantne tačke sferne simetrije su možda čak i pogodnije za proučavanje. Oblik potencijala sferne kvantne tačke je dat na slici 5.9.



Slika 5.9. Šematska ilustracija sferne kvantne tačke.

Za rešavanje Šredingerove jednačine u ovom slučaju, pogodno je preći na sferne koordinate, tako da Šredingerova jednačina dobija oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \psi(r) + V(r)\psi(r) = E_r\psi(r). \quad (5.19)$$

Glava 6

Elektromagnetno indukovana transparentnost u konfiniranom atomu vodonika

6.1 Konfinirani atom vodonika

Pod prostorno konfiniranim kvantnim sistemima podrazumevaju se kvantni sistemi na koje deluju spoljašnji potencijali, tako da se kretanje sistema odvija unutar oblasti čije su linearne dimenzije uporedive sa prostornim dimenzijama sistema. Drugim rečima, atomi ili molekuli se zatvaraju u kutije ili šupljine čiji zidovi mogu biti neprobojni ili probojni. U prvom slučaju kretanje elektrona je ograničeno na kretanje samo unutar ovih šupljina, a u drugom, elektroni mogu napustiti ovu oblast. Atom konfiniran unutar šupline sa neprobojnim zidovima predstavlja idealizaciju. Medjutim, ovaj model se pokazuje kao vrlo koristan, jer daje okvire unutar kojih se mogu diskutovati osobine prostorno lokalizovanih kvantnih sistema.

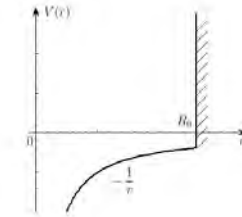
Model prostorno konfiniranih sistema uveden je u fiziku 30-ih godina prošlog veka u cilju razmatranja uticaja pritiska na polarizabilnost vodonika i ubrzo nalazi primenu i u astrofizici za interpretaciju spektra atoma vodonika pod visokim pritiskom. Poslednjih decenija prostorno konfinirani kvantni sistemi pokazali su se kao korisni modeli realnih fizičkih sistema, koji su predmet proučavanja u raznim oblastima fizike. Na ovaj način modeluje se ponašanje atoma u šupljinama i kanalima zeolita, u karbonskim nanotubama, u šupljinama i nanoporama, atoma trapovanih u molekulu fulerena (endohedralni atomi), atoma ugrađenih u neutralne medije - neutralna plazma ili

tečni helijum, atoma i molekula ugrađenih u helijumove kapljice i u nanobalane (koji se formiraju oko stranih objekata u okruženju tečnog helijuma).

Posebnu potvrdu prostorno konfinirani kvantni sistemi dobijaju nakon uspešne primene u fizici poluprovodnika, gde se koriste za proučavanje strukture poluprovodničkih nanostrukture, koje su opisane u prethodnoj glavi, i procesa u kojima one učestvuju. Konfinirani atom vodonika, o kome je ovde reč, koristi se kao model za proučavanje strukture vodonične nečistoće u kvantnim tačkama i uticaja ove nečistoće na promene osobina samih kvantnih tačaka, koje mogu biti od značaja za njihovu primenu.

U ovom radu koristi se model atoma vodonika, koji je centralno konfiniran neprobojnom sferom radijusa R_0 . Ovo označava da se jezgro atoma nalazi u centru sfere, a da se elektron kreće u potencijalu:

$$U(r) = \begin{cases} -\frac{1}{r}, & r < R_0 \\ \infty, & r \geq R_0 \end{cases} \quad (6.1)$$



Slika 6.1. Konfinirajući potencijal.

Talasna funkcija konfiniranog atoma vodonika, s obzirom da konfinirajući potencijal zadržava sfernu simetriju Kulonovog potencijala, data je kao proizvod radijalnog dela i sfernog harmonika:

$$\Psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (6.2)$$

Radialna talasna funkcija, koja se javlja u gornjoj formuli, predstavlja rešenje radijalne Šredingerove jednačine:

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \left[2E_{nl} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + U(r) \right] R_{nl} = 0, \quad (6.3)$$

uz nametnuti Dirišleov granični uslov $R_{nl}(R_0) = 0$. Rešenje radijalne Šredingerove jednačine može se zapisati u obliku:

$$R_{nl} = C_{nl} r^l e^{-r\sqrt{-2E_{nl}}} F\left(-\frac{1}{\sqrt{-2E_{nl}}} + l + 1, 2l + 2, 2r\sqrt{-2E_{nl}}\right), \quad (6.4)$$

gde je C_{nl} normalizaciona konstanta, a F konfluentna hipergeometrijska (Kumerova) funkcija. Vrednosti energija E_{nl} predstavljaju rešenja jednačine koja se dobija iz graničnog uslova na granici $r = R_0$:

$$F\left(-\frac{1}{\sqrt{-2E_{nl}}} + l + 1, 2l + 2, 2r_c\sqrt{-2E_{nl}}\right) = 0. \quad (6.5)$$

6.2 Rezultati i diskusija

U sledećoj tabeli date su vrednosti dipolnih matričnih elemenata za konfinirani atom vodonika za prva četiri nivoa od interesa, kao i energijske razlike između relevantnih nivoa između kojih je moguć rezonantni prelaz.

R_0	d_{12}	d_{23}	d_{24}	ω_{21}	ω_{32}	ω_{42}
1.0	0.502	0.601	0.331	5.84915	6.74433	8.34712
2.0	0.935	1.184	0.724	1.70102	1.75149	1.75149
3.0	1.271	1.187	1.743	0.90522	0.81155	0.63043

Tabela 6.1: Dipolni matrični elementi i frekvence rezonantnih prelaza za atom vodonika konfiniranog u sfernoj kvantnoj jami.

Za račun koji sledi biće potrebne vrednosti koeficijenata spontane emisije za određene nivoe, kao i Rabijeve frekvence. One su date sledećim izrazima:

$$\gamma_i = \frac{1}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} d_{ij}^2 \omega_{ij}^3, \quad (6.6)$$

$$\Omega_i = \frac{d_{ij}\epsilon_i}{\hbar}. \quad (6.7)$$

Konstante raspada i Rabijeve frekvence, koje se koriste za dalja izračunavanja biće date u atomskom sistemu jedinica. Vrednosti konstanti raspada se najpre skaliraju, tako da konstanta γ_2 bude jednaka jedinici, pa se dobijaju vrednosti koje su date u tabeli 6.2.

Kao što se vidi iz tabele, a i iz formule 6.7, Rabijeve frekvence nisu određene samo strukturom atoma vodonika u kvantnoj tački, već se mogu podešavati

R_0	γ_2	γ_3	γ_4	$\Omega_1[\cdot\varepsilon_1]$	$\Omega_2[\cdot\varepsilon_2]$	$\Omega_3[\cdot\varepsilon_3]$
1.0	1.000	2.200	1.260	0.502	0.601	0.331
2.0	1.000	1.750	0.655	0.935	1.184	0.724
3.0	1.000	0.295	1.355	1.199	1.624	0.353

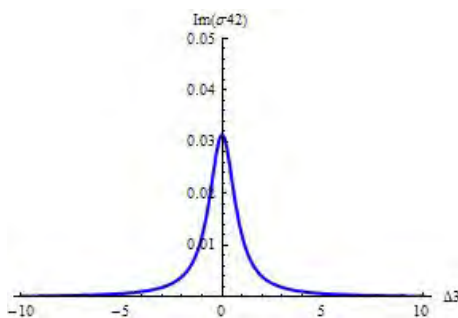
Tabela 6.2: Koeficijenti spontane emisije i Rabijeve frekvence za relevantne prelaze u Y konfiguraciji konfiniranog atoma vodonika

spolja, menjanjem vrednosti ε_1 , ε_2 i ε_3 . Menjanjem vrednosti ovih promenljivih, odnosno promenom Rabijevih frekvenci, može se postići elektromagnetno indukovana transparentnost.

Ukoliko je vodonikov atom konfiniran u sfernoj kvantnoj tački dimenzija $R_0 = 1.0$, prva četiri energijska nivoa od interesa koji grade Y konfiguraciju će biti raspoređeni na sledeći način: $1s - 2p - 3d - 2s$, odnosno dolazi do zamene mesta nivoa $2s$ i $3d$ u odnosu na slobodan atom vodonika. Ova dva nivoa, međutim, pri ovim uslovima nisu međusobno bliska, pa se efekat kvantne interferencije (VIC) ne ispoljava.

Apsorpcija sondirajućeg polja određena je imaginarnim delom matričnog elementa σ_{42} . Ovo polje treba uvek da bude nižeg intenziteta u odnosu na ostala laserska polja, kako ne bi značajnije uticalo na sistem, već samo kako bi se ispitala apsorpcija tog zračenja. Zato se za jačinu sondirajućeg polja ε_3 uzima vrednost jedan, dok se jačina ostala dva polja menja po potrebi.

Ukoliko su sva laserska polja istog intenziteta, za apsorpciju sondirajućeg polja dobija se:

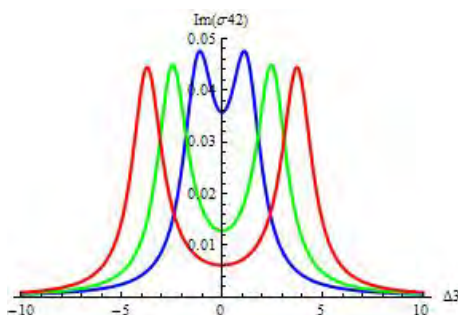


Slika 6.2. Apsorpcija sondirajućeg laserskog polja za $R_0 = 1.0$ u zavisnosti od detuninga tog polja za jednake intenzitete sva tri laserska polja.

Ukoliko se u potpunosti isključi polje ε_2 (Ω_2), dobila bi se nešto veća apsorpcija blizu vrednosti $\Delta_3 = 0$, dok apsorpcija u ostalim delovima grafika

ostaje praktično ista. Ovakav oblik apsorpcione krive je očekivan, tj. apsorpcija je najveća kada je frekvencija laserskog zračenja tačno jednaka atomskoj frekvenci datog prelaza.

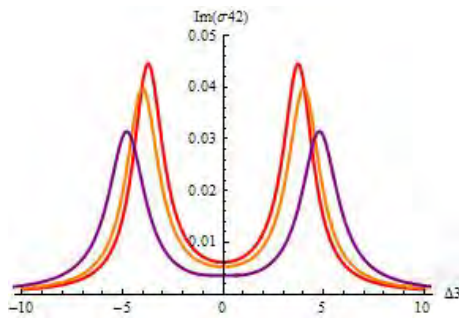
Ukoliko se polje ε_1 postepeno povećava, apsorpciona linija se deli na dva simetrična pika. Ovi simetrični pikovi se polako udaljavaju sa povećanjem vrednosti ovog polja, stvarajući "prozor", odnosno oblast niske vrednosti apsorpcije oko vrednosti $\Delta_3 = 0$ - gde bi bez prisustva drugih polja inače trebala da je najveća vrednost apsorpcije. Maksimalne vrednosti pikova ostaju približno konstantne, dok se vrednost apsorpcije oko vrednosti $\Delta_3 = 0$ sve više smanjuje - slika 6.3.



Slika 6.3. Apsorpcija sondirajućeg laserskog polja za $R_0 = 1.0$ u zavisnosti od detuninga tog polja za $\varepsilon_1 = 5, 10, 15$ - plava, zelena i crvena linija, respektivno.

Pri generisanju slike 6.3. korišćeni su podaci iz tabele 6.2 za $R_0 = 1.0$, dok su za vrednosti polja uzete vrednosti $\varepsilon_1 = 5, 10, 15$, za plavu, zelenu i crvenu liniju na grafiku, respektivno.

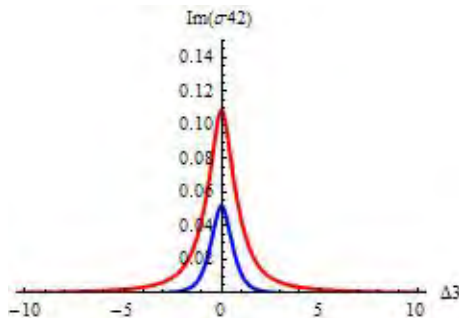
Ukoliko se međutim vrednost pumpajućeg polja ε_1 održava konstantnim, a povećava jačina kuplajućeg polja ε_2 , dobija se grafik kao na slici 6.4. Na slikama 6.3. i 6.4. crvenom bojom je označen grafik za identične parametre. Može se stoga zaključiti da će sa povećanjem polja ε_2 apsorpcija oko vrednosti $\Delta_3 = 0$ nastaviti da opada. Međutim, sa porastom intenziteta ovog polja, i vrednosti pikova će veoma brzo opadati, pa će iako se oblik grafika zadržava, veoma brzo apsorpcija pasti na vrednosti bliske nuli za sve vrednosti detuninga.



Slika 6.4. Apsorpcija sondirajućeg laserskog polja u zavisnosti od detuninga tog polja za $\varepsilon_1 = 15$ i $\varepsilon_2 = 1, 5, 10$, za crveni, narandžasti i ljubičasti grafik, respektivno, za $R_0 = 1.0$.

U slučaju kada je atom vodonika konfiniran neprobojnom sferom radijusa $R_0 = 2.0$, nivoi $2s$ i $3d$ imaju istu energiju, a sa daljim povećanjem radijusa sfere, redosled prva četiri nivoa vodonika postaje $1s - 2p - 2s - 3d$. Pošto su nivoi $2s$ i $3d$ u ovom slučaju degenerisani, pri izračunavanju koeficijenta apsorpcije moraju se uzeti u obzir efekti kvantne interferencije indukovane spontanom emisijom - VIC efekat, odnosno svi članovi oblika 3.43 koji se nalaze u formulama 4.32-4.40 se moraju uzeti u obzir.

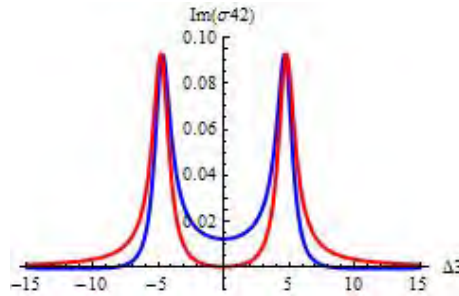
Ukoliko su sva tri polja istog intenziteta, dobijaju se sledeće apsorpcione linije:



Slika 6.5. Apsorpcija probnog laserskog polja u zavisnosti od detuninga tog polja za jednake intenzitete sva tri laserska polja, u slučaju dva degenerisana nivoa konfiniranog atoma vodonika ($R_0 = 2.0$).

Sa slike 6.5. se vidi da koeficijent apsorpcije zavisi od ugla koji međusobno zaklapaju vektori dipolnih momenata dva najviša nivoa u Y konfiguraciji. Crvenoj liniji odgovara ugao između dipolnih momenata jednak 180 stepeni (i tada je apsorpcija veća), dok plavoj liniji odgovara slučaj kada su dipolni momenti dva najviša nivoa u Y konfiguraciji međusobno paralelni.

Kao i u slučaju za konfinirani atom vodonika kada je $R_0 = 1.0$, i kada nije bio prisutan VIC efekat, grafik koeficijenta apsorpcije približno odgovara graficima 6.3 i 6.4. Razlika između ovih grafika je u tome što se u zavisnosti od ugla između vektora dipolnih momenata efekat EIT javlja ranije ili kasnije sa povećanjem intenziteta pumpajućeg polja ε_1 . Ovaj efekat se može videti na slici 6.6.



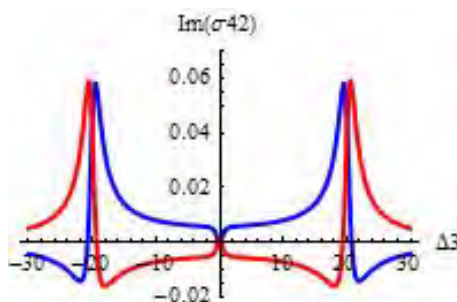
Slika 6.6. Apsorpcija sondirajućeg laserskog polja u zavisnosti od detuninga tog polja za $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 1$ i $R_0 = 2.0$.

Kao i ranije, crvenoj liniji odgovara ugao od 180 stepeni između vektora dipolnih momenata dva najviša razmatrana nivoa, a plavoj liniji njihova međusobno paralelna orijentacija.

Ukoliko se polje pumpanja ε_1 održava konstantnim, a povećava intenzitet kuplujućeg polja ε_2 , apsorpcioni pikovi se međusobno udaljavaju, a istovremeno i veoma brzo smanjuju, pa koeficijent apsorpcije pada skoro na nulu za sve vrednosti detuninga (ponašanje slično onom, prikazanom na slici 6.4).

Zanimljive posledice VIC efekta najbolje se mogu videti pri sledećem izboru jačina laserskih polja: $\varepsilon_1 = 20$, $\varepsilon_2 = 30$ i $\varepsilon_3 = 1$. Za ove vrednosti intenziteta laserskih polja dobija se zavisnost koeficijenta apsorpcije prikazana na slici 6.7.

Sa slike 6.7 može se videti nekoliko zanimljivih fenomena. Ukoliko se najpre posmatra plava linija (paralelni vektori dipolnih momentata odgovarajućih dipolnih prelaza), može se uočiti da za vrednost $\Delta_3 = 0$, koeficijent apsorpcije naglo pada na nulu, tj. dolazi do elektromagnetno indukovane transparentnosti. Za vrednosti detnuninga veće po apsolutnoj vrednosti od 20, dolazi zapravo do pojačanja laserskog zračenja (koeficijent apsorpcije je negativan). U slučaju antiparalelne orijentacije vektora dipolnih momenata odgovarajućih dipolnih prelaza, za vrednost $\Delta_3 = 0$ takođe dolazi do elektromagnetno indukovane transparentnosti. Međutim, za vrednosti Δ_3 po apsolutnoj vrednosti, manje od 20 uglavnom dolazi do pojačanja laserskog zračenja, dok se apsorpcija može primetiti tek za veće vrednosti ove promenljive.

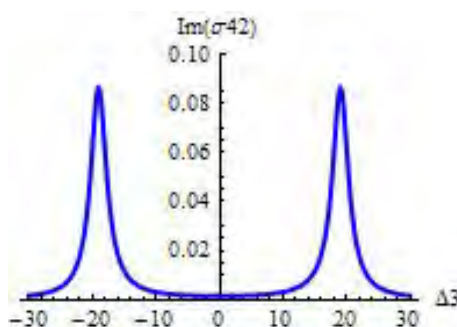


Slika 6.7. Apsorpcija sondirajućeg laserskog polja u zavisnosti od detuninga tog polja za $\varepsilon_1 = 20$, $\varepsilon_2 = 30$, $\varepsilon_3 = 1$ i $R_0 = 2.0$.

Sa povećanjem radijusa konfiniranja, dolazi do zamene mesta energijskih nivoa, tj. dolazi do sledećeg rasporeda nivoa $1s-2p-2s-3d$. Kada se atomski nivoi $2s$ i $3d$ dovoljno energijski udalje, tako da se ne ispoljava VIC-efekat, elektromagnetno indukovana transparentnost može se postići na sličan način kao i za slučaj kada je $R_0 = 2.0$.

Iz svih ovih razmatranja mogu se izvući dva generalna pravila koja dovode do pojave elektromagnetno indukovane transparentnosti:

Pri pojačanju pobuđujućeg polja ε_1 dolazi do stvaranja "prozora", odnosno apsorpciona linija se cepa na dve koje se sa povećanjem ovog polja sve više udaljavaju, održavajući visinu svojih pikova. Pri dovoljno jakom polju, apsorpcija pri $\Delta_3 = 0$ će pasti na nulu - slika 6.8.



Slika 6.8. Stvaranje "prozora" u sredini apsorpcione linije.

Pri pojačanju laserskog polja ε_2 dolazi do stvaranja "prozora", ali i do brzog smanjivanja koeficijenta apsorpcije na svim frekvencama, odnosno pikovi sa slike 6.8 postaju zanemarljive visine.

Zaključak

Rezultati rada, izloženi u šestoj glavi, potvrđuju da je moguće realizovati fenomen EIT na centralno konfiniranom atomu vodonika. Ovo dalje implicira da bi EIT bilo moguće ostvariti i na realnom fizičkom sistemu – sfernoj kvantnoj tački sa vodoničnom nečistoćom. U uvodu rada je već naglašeno da je korišćenje poluprovodničkih nanostrukture jedna od savremenijih tendencija u realizaciji pojave EIT. Razlog ovome je činjenica da se za razliku od atoma (Rb, Na, Ca, Sr), ove strukture mogu, u tehnološkom procesu njihovog dobijanja dizajnirati tako da imaju unapred određena svojstva i to ona koja bi u ovom slučaju omogućila lakše ostvarivanje uslova za ovu optičku pojavu. Pored navedenog modela konfiniranja neprobojnom sferom, postoje i drugi načini konfiniranja kada se atom vodonika nađe u drugačijem potencijalu, odnosno kada je konfiniran propustljivom sferom ili potencijalom koji opisuje šupljinu unutar molekula fulerena C_{60} . Proučavanje EIT u sistemima sa ovakvim tipom konfiniranja predstavlja dalji korak u nastavku ovog rada, koji obećava isto ovako uzbudljive rezultate.

Literatura

- [1] C. C. Gerry, P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2005)
- [2] P. Lambropoulos, D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information* (Springer, 2007)
- [3] P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics, Fourth Edition* (Springer, 2007)
- [4] R. Wan, J. Kou, L. Jiang, Y. Jiang, J. Gao, *Two-dimensional atom localization via quantum interference in a coherently driven inverted-Y system* (Optics Communications 284 (2011) 985990)
- [5] V. Ivanov, Y. Rozhdestvensky, *Two-dimensional atom localization in a four-level tripod system in laser fields* (PHYSICAL REVIEW A **81**, 033809 (2010))
- [6] C. Ding, J. Li, X. Yang, Z. Zhan, J. Liu, *Two-dimensional atom localization via a coherence-controlled absorption spectrum in an N-tripod-type five-level atomic system* (J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **44** (2011) 145501 (9pp))
- [7] Z. Wang, *Atom localization in a four-level atomic system with an assisting radio-frequency driven field* (Optics Communications **284** (2011) 262268)
- [8] H. Lee, P. Polynkin, M. Scully, S.-Y. Zhu, *Quenching of spontaneous emission via quantum interference* (PHYSICAL REVIEW A, VOLUME **55**, NUMBER 6, (1997))
- [9] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots - Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures* (Wiley, 2006)

- [10] J. L. Zhu, X. Chen, *Spectrum and binding of an off-center donor in a spherical quantum dot*, Physical Review B **50** (1994)
- [11] J. L. Zhu, J. J. Xiong, B. L. Gu, *Confined electron and hydrogenic donor states in a spherical quantum dot of GaAs – Ga_{1-x}Al_xAs*, Physical Review B **41** (1990)
- [12] J.-H. Yuan, W.-F. Xie, L.-L. He, *Shallow Donor Impurity Ground State in a GaAs/AlAs Spherical Quantum Dot within an Electrical Field* Commun. Theor. Phys. **52**, 710-714 (2009)
- [13] Z. Ficek, S. Swain, *Quantum Interference and Coherence Theory and Experiments*, (Springer, New York, 2005)
- [14] M. Fleishauer, A. Imamoglu, J. P. Marangos, *Electromagnetically induced transparency*, (Rev. Mod. Phys. **77**, 633, 2005)
- [15] L. Zhang, Z. Liu, J. Chen, *The electromagnetically induced transparency in the Y-type four-level atom system at low light levels*, (Science in China: Physics, Mechanics & Astronomy, **48**, 593-599, 2005)
- [16] M. G. Bason, *Coherent-atom-light interaction in multi-level systems*, (Doctorial thesis, Department of Physics, Durham University, 2009)
- [17] Lj. Stevanović, V. Pavlović, *Modeling the EIT in spherical QD with H impurity*, (Book of Abstracts, 3rd ICOM, August 2012, Belgrade, Serbia)
- [18] Lj. Stevanović, *Oscillator strengths of the transitions in a spherically confined H atom*, (J. Phys. B. **43**, (2010) 165002)

Biografija

Vladan Pavlović rođen je 06.11.1988. godine u Nišu, Republika Srbija. Osnovnu školu "Ivan Goran Kovačić" u Niškoj Banji završio je kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Gimnaziju "9. maj" u Nišu, smer za učenike sa posebnim sklonostima ka fizici i prirodnim naukama, završio je, takođe, kao nosilac Vukove diplome.

Učestvovao je na takmičenjima iz matematike, fizike, kao i na sportskim takmičenjima. Na takmičenjima iz fizike i matematike osvojio je tri prve, dve druge i tri treće nagrade na republičkim i saveznim takmičenjima. Osvajač je prve nagrade na prvoj Srpskoj fizičkoj olimpijadi, kao i pohvale na svetskoj olimpijadi iz fizike održanoj u Isfahanu, Iran.

Od 2003. do 2007. godine bio je polaznik Istraživačke Stanice Petnica na seminarima fizike i elektronike. Od 2008. do 2010. godine bio je asistent u Istraživačkoj Stanici Petnica, a od 2011. stručni saradnik.

Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Odsek za fiziku upisao je 2007/2008. godine. Osnovne akademske studije završio je u oktobru 2010. godine sa prosečnom ocenom 10,00. Iste godine upisuje diplomatske akademske studije na smeru Opšta fizika. Prosečna ocena na diplomskim akademskim studijama je 10,00.

Deo studija proveo je na Univerzitetu Ludwig-Maximilian u Minhenu, Nemačka, na elitnim master studijama teorijske fizike. U toku master studija bio je na stručnoj praksi na Univerzitetu u Leeds-u, Engleska, u grupi za kvantnu informatiku.