
UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Poluklasični modeli kvantnih
interferentnih efekata u
interakciji atoma sa
elektromagnetnim poljem

MASTER RAD

Kandidat:
Danilo Delibašić
Br. indeksa: 13

Mentor:
Prof. dr Ljiljana
Stevanović

Niš, decembar 2015.

Ovaj master rad raden je pod rukovodstvom prof. dr Ljiljane Stevanović, vanrednog profesora na Departmanu za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu.

Dragoj profesorki Ljiljani Stevanović neizmerno sam zahvalan na izboru teme, strpljenju i razumevanju, pomoći i smernicama prilikom izrade rada.

Takođe sam zahvalan i profesorima i saradnicima na Departmanu za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, koji su me upućivali u tajne fizike i zahvaljujući čijem trudu uspešno završavam studije.

Sadržaj

1	Uvod	5
2	Atomski sistemi sa tri energijska nivoa	7
2.1	V konfiguracija	7
2.2	Lestvičasta konfiguracija	9
2.3	Λ konfiguracija	9
3	Kvantni interferentni efekti u atomima	11
3.1	Elektromagnetno indukovana transparentnost	11
3.1.1	Mračna stanja	14
3.2	Spontano generisana koherencija	15
4	Kvantnomehaničke osnove	17
4.1	Matrica gustine	18
4.1.1	Nomenklatura i osobine	18
4.1.2	Matrična reprezentacija	19
4.1.3	Fizička interpretacija	20
4.2	Reprezentacije operatora	21
4.2.1	Operator vremenske evolucije	21
4.3	Jednačina kretanja matrice gustine	23
5	Master jednačine	25
5.1	Izvođenje master jednačina	25
5.1.1	Hamiltonijan atomskog sistema	25
5.1.2	Master jednačine	34
5.1.3	Rešavanje master jednačina	37
6	Rezultati	45
6.1	Elektromagnetno indukovana transparentnost	45
6.1.1	Interakcija sa sondirajućim poljem	45
6.1.2	Interakcija sa sondirajućim i kontrolnim poljem	47
6.1.3	Analiza preko obučениh stanja	49

<i>SADRŽAJ</i>	3
6.1.4 Ekstremumi i znaci izvoda	51
6.1.5 Poređenje numeričkih i analitičkih rezultata	56
6.1.6 Uticaj Rabijeve frekvence kontrolnog polja Ω_c na elektromagnetno indukovanu transparentnost	59
6.2 Uticaj spontano generisane koherencije na elektromagnetno indukovanu transparentnost	61
6.2.1 Slučaj $g_p \ll g_c$	62
6.2.2 Slučaj $g_p \sim g_c$	63
7 Zaključak	67

Glava 1

Uvod

Teorijska i eksperimentalna proučavanja efekata kvantne interferencije i kvantne koherencije u atomima sa više energijskih nivoa su dovela do otkrića novih pojava, koje zavređuju pažnju. Laserski indukovana koherencija atomskih stanja dovodi do interferencije između puteva ekscitacije [1], što prouzrokuje modifikaciju optičkih osobina date sredine [2]. Ove modifikacije uključuju sledeće efekte: su elektromagnetno indukovana transparentnost, elektromagnetno indukovana apsorpcija, koherentno populaciono trapovanje, laserski efekat bez inverzije naseljenosti, inverzija naseljenosti bez laserskog efekta, gašenje spontane emisije, superluminalna propagacija svetlosti, „spora svetlost”, optička bistabilnost, kao i druge [2, 3].

Ova otkrića, svakako veoma interesantna i sa samog teorijskog aspekta, dovela su do brojnih napredaka u optici, pospešujući razvoj novih materijala sa optimizovanim optičkim osobinama [4]. Za optimizaciju optičkih osobina ovih materijala zaslužni su upravo efekti nabrojani u prethodnom paragrafu. Pomenuti efekti su predmet intenzivnih istraživanja u zadnjih par decenija [5]. Motivacija za ovo je u prepoznavanju brojnih potencijalnih primena, kao što su laserski efekat bez inverzije naseljenosti (koji je sam po sebi pobuđuje dovoljno pažnje za primenu) [6], pospešivanje efikasnosti nelinearnih procesa korišćenjem kvantno interferentnih i atomsko koherentnih efekata [1], skladištenje laserskih pulseva - što je od izuzetne važnosti, jer se može iskoristiti u kvantnoj informatici [7], optički prekidači, potpuno-optički konvertori talasnih dužina [8], propagacija laserskih mlazeva bez gubitaka u optički gustim sredinama, kao i veoma efikasni selektivni adijabatski procesi transfera naseljenosti [1]. Možda je najznačajnija potencijalna primena efekata kvantne interferencije i koherencije upravo u kvantnoj informatici za proizvodnju memorijskih elemenata, s obzirom na velika očekivanja koja imamo od kvantne informatike.

Od mnoštva pomenutih efekata, u ovom radu ćemo se ograničiti na dva -

efekat elektromagnetno indukovane transparentnosti (EIT) i efekat spontano generisane koherencije (SGK). Ova dva efekta ćemo posmatrati u atomima sa tri (relevantna) energijska nivoa, i to za sledeće konfiguracije energijskih nivoa i laserskih polja: V (*V-type configuration*), lestvičastu (*ladder-type configuration*) i Λ konfiguraciju (*Λ -type configuration*). Izučićemo napre samo EIT efekat u odsustvu SGK za sve ove tri konfiguracije, a zatim ćemo razmatrati EIT uz prisustvo SGK, tj. utvrdićemo kako prisustvo SGK utiče na EIT, u poređenju sa situacijom kada SGK odsustvuje. Rezultate ćemo dobiti korišćenjem i numeričkih i analitičkih (aproksimativnih) metoda. Takođe ćemo izvršiti analizu EIT efekta koje se javlja u atomima sa pomenutim konfiguracijama energijskih nivoa, pomoću određivanja takozvanih „*obučeni*” *svojtvenih stanja* (*dressed-state analysis*).

Rad je organizovan na sledeći način: započinjemo glavom Atomi sistemi sa tri energijska nivoa, posvećenom konfiguracijama atomskih sistema i polja koje ćemo dalje u radu detaljnije izučavati. Svrha ove glave je i efikasnije izlaganje teorijskih osnova rada. Zatim sledi glava Kvantni interferentni efekti u atomima, u kojoj ćemo izložiti osnovne principe i značaj EIT i SGK efekata, koji su od interesa u ovom radu. Nakon toga, podrobnije razmatranje teorije neophodne za konkretna kvantitativna izračunavanja vezana za pomenute efekte izloženo je najpre u glavi Kvantnomehanske osnove, koja ima širi značaj i primenu. Ova glava je praćena glavom Master jednačine, u kojoj teorijsku osnovu dalje razvijamo i primenjujemo na konkretne probleme od interesa. Kompletiranjem ove glave preostaje nam još grafičko izlaganje dobijenih rezultata, kao i njihova analiza i interpretacija, koje su date u glavi Rezultati. Ovim je glavni deo rada završen, te su glavna zapažanja, kao i mogući pravci budućih istraživanja, istaknuti u poslednjoj glavi Zaključak.

Glava 2

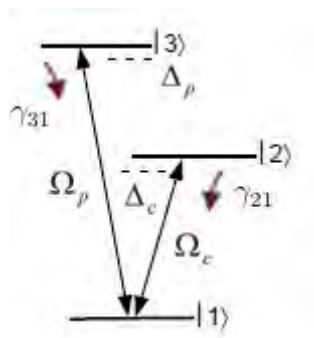
Atomski sistemi sa tri energijska nivoa

S obzirom na to da nam je, za određena razmatranja u okviru teorijske podloge ovog rada, izloženih prevashodno u glavama 3 i 4, neophodno da imamo u vidu o kakvim tačno atomskim sistemima govorimo, u ovoj glavi ćemo ih koncizno predstaviti.

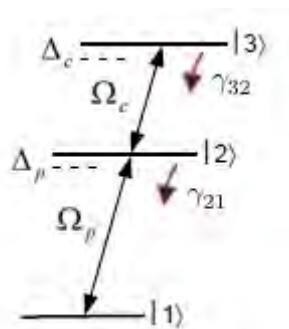
Razmatramo atomske sisteme sa tri energijska nivoa, sa po dva dipolno dozvoljena prelaza, za sledeće konfiguracije energijskih nivoa i laserskih polja: V, lestvičastu i Λ konfiguraciju.

2.1 V konfiguracija

Kod V konfiguracije, dozvoljeni su prelazi između najnižeg nivoa i dva viša. Koeficijenti spontane emisije γ_{ij} različiti od nule su, dakle, γ_{21} i γ_{31} , dok je γ_{32} jednak nuli (eksplicitni oblik koeficijenata spontane emisije γ_{ij} je dat u glavi 5 - zavisi od odgovarajućeg dipolnog elementa prelaza i od frekvence koja odgovara datom prelazu). Na atomski sistem deluju i dva laserska polja - kontrolno (*control*), koje indukuje prelaz između prvog i drugog energijskog nivoa (slika 2.1), i sondirajuće (*probe*), koje indukuje prelaz između prvog i trećeg energijskog nivoa (slika 2.1). Veličine Ω_c , Ω_p , Δ_c i Δ_p su Rabijeve frekvence i detjuninzi kontrolnog i sondirajućeg laserskog polja, respektivno. Ove veličine će biti definisane u narednim glavama ovog rada. Šematski prikaz V konfiguracije je dat na slici 2.1.



Slika 2.1: Šematski prikaz V konfiguracije atomskog sistema sa tri energijska nivoa. Rabijske frekvence kontrolnog i sondirajućeg laserskog polja su označene sa Ω_c i Ω_p , respektivno, detjuninzi laserskih polja sa Δ_c i Δ_p , dok su γ_{21} i γ_{31} koeficijenti spontane emisije odgovarajućih prelaza. Energijski nivoi su označeni u rastućem redosledu po energiji sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$.



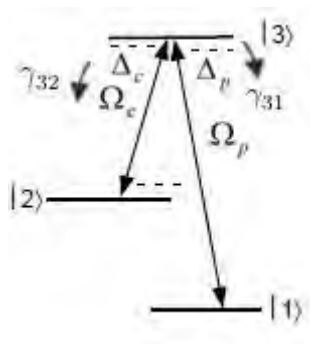
Slika 2.2: Šematski prikaz lestvičaste konfiguracije atomskog sistema sa tri energijska nivoa. Rabijske frekvence kontrolnog i sondirajućeg laserskog polja su označene sa Ω_c i Ω_p , respektivno, detjuninzi laserskih polja sa Δ_c i Δ_p , dok su γ_{21} i γ_{32} koeficijenti spontane emisije odgovarajućih prelaza. Energijski nivoi su označeni u rastućem redosledu po energiji sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$.

2.2 Lestvičasta konfiguracija

Kod lestvičaste konfiguracije, dozvoljeni su prelazi između najnižeg i „srednjeg”, kao i „srednjeg” i najvišeg energijskog nivoa. Dakle, koeficijenti spontane emisije različiti od nule su γ_{21} i γ_{32} , dok je γ_{31} jednak nuli. Ostale veličine su označene kao i u slučaju V konfiguracije. Šematski prikaz lestvičaste konfiguracije dat je na slici 2.2.

2.3 Λ konfiguracija

Kod lestvičaste konfiguracije, dozvoljeni su prelazi između najvišeg i dva niža energijska nivoa. Dakle, koeficijenti spontane emisije različiti od nule su γ_{31} i γ_{32} , dok je γ_{21} jednak nuli. Ostale veličine su označene kao i u slučaju V i lestvičaste konfiguracije. Šematski prikaz Λ konfiguracije je dat na slici 2.3.



Slika 2.3: Šematski prikaz Λ konfiguracije atomskog sistema sa tri energetska nivoa. Rabijeve frekvence vezane za kontrolnog i sondirajućeg laserskog polja su označene sa Ω_c i Ω_p , respektivno, detjuninzi laserskih polja sa Δ_c i Δ_p , dok su γ_{31} i γ_{32} koeficijenti spontane emisije odgovarajućih prelaza. Energetski nivoi su označeni u rastućem redosledu po energiji sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$.

Ovim smo završili pregled sistema atom + laserska polja koji su nam od interesa u ovom radu. Sada se možemo detaljnije pozabaviti efektima EIT i SGK u ovim sistemima, kao i njihovim teorijskim osnovama, čemu je upravo i posvećeno narednih par poglavlja.

Glava 3

Kvantni interferentni efekti u atomima

Kao što je već napomenuto u glavi 1, kvantna koherencija između atomskih stanja, do koje dolazi pri interakciji atoma sa laserskim poljima, dovodi do kvantne interferencije puteva ekscitacije. Prisustvo više laserskih polja dovodi do specifičnih interferencija puteva ekscitacije. Interferencija može dovesti do znatnog uvećanja vrednosti amplitude verovatnoće određenih prelaza, ili čak da ove amplitude verovatnoće svede na nulu. Usled ovoga, optičke osobine datog atoma na frekvencama koje odgovaraju pojedinim prelazima mogu biti jako modifikovane. Javljaju se vrlo interesantni efekti koji su i eksperimentalno zapaženi u zadnjih par decenija [5].

Neki od kvantno interferentnih i koherentnih efekata koji se javljaju u ovakvim fizičkim situacijama su nabrojani u glavi 1, mada nije na odmet da ih ponovo pomenemo na ovom mestu. To su dakle: elektromagnetno indukovana transparentnost, elektromagnetno indukovana apsorpcija, koherentno populaciono trapovanje, laserski efekat bez inverzije naseljenosti, inverzija naseljenosti bez laserskog efekta, gašenje spontane emisije, superluminalna propagacija svetlosti, „spora svetlost”, optička bistabilnost, itd.

Predmet ovog rada su elektromagnetno indukovana transparentnost i spontano generisana koherencija, te ćemo sada malo detaljnije razmotriti upravo ova dva efekta.

3.1 Elektromagnetno indukovana transparentnost

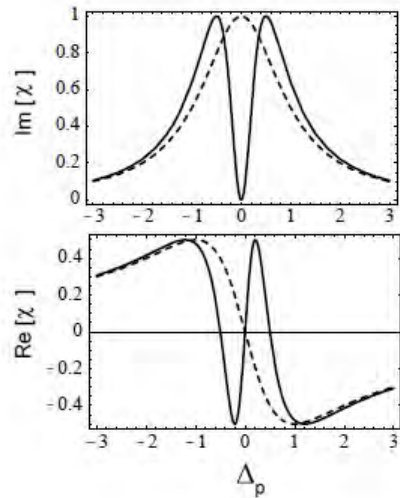
Elektromagnetno indukovana transparentnost predstavlja fenomen usled kojeg data sredina, pod normalnim okolnostima neprozračna za određeni

tip zračenja (lasersko polje date frekvence), postaje transparentna za to zračenje (lasersko polje), kada je prisutno i drugo lasersko polje odgovarajuće amplitude i frekvence. Drugim rečima, dolazi do eliminacije apsorpcije i prelamanja svetlosti na rezonantnoj frekvenci, kao i frekvencama bliskim rezonantnoj frekvenci. EIT je pojava kod optički gustih sredina koja izaziva promenu i u svojstvenim stanjima atoma date sredine, kao i u samim laserskim poljima [5]. Naročit značaj EIT je u tome što ona može naći primenu u pospešivanju nelinearnih procesa, smanjivanju grupne brzine svetlosti, kvantnoj informatičkoj tehnologiji, superprovodnim veštačkim atomima, itd.

Optičke osobine atomskih i molekularnih gasova su fundamentalno povezane sa njihovom unutrašnjom energijskom strukturom. Linearni odziv atoma na rezonantno zračenje se opisuje susceptibilnošću prvog reda $\chi^{(1)}$. Imaginarni deo ove susceptibilnosti $\text{Im}\chi^{(1)}$ određuje disipaciju zračenja, tj. laserskog polja, na atomskom gasu, odnosno određuje apsorpciju. S druge strane, realni deo $\text{Re}\chi^{(1)}$ određuje indeks prelamanja. Oblik zavisnosti $\text{Im}\chi^{(1)}$ od detjuninga (*detuning*) primenjenog polja Δ_p (razlika između frekvence datog atomskog prelaza i laserskog polja) je Lorencov profil (slika 3.1, gornji grafik), dok je oblik indeksa prelamanja standardni disperzioni profil (slika 3.1, donji grafik), tj. disperzija je anomalna (smanjivanje $\text{Re}\chi^{(1)}$ sa porastom frekvence, tj. negativan nagib frekventne zavisnosti) u centralnom delu apsorpcionog profila.

S druge strane, kada na atomski sistem deluju (najmanje) dva laserska polja, za određene vrednosti parametara (jačina polja, koeficijentata spontane emisije, itd.) je moguće postići EIT efekat. Tada dolazi do modifikacije $\text{Im}\chi^{(1)}$ i $\text{Re}\chi^{(1)}$, tako da se sada na nultom detjuningu javlja prozor transparentnosti (rastojanje između maksimuma apsorpcije), odnosno umanjene apsorpcije laserskog zračenja. Takođe, profil indeksa prelamanja se takođe menja i disperzija više nije anomalna - $\text{Re}\chi^{(1)}$ raste sa porastom frekvence. Imaginarni i realni delovi linearne susceptibilnosti $\chi^{(1)}$ kada EIT efekat nije prisutan i kada jeste prikazani su na slici 3.1, na gornjem i donjem grafiku, respektivno.

U slučaju laserske ekscitacije atomskog sistema poljem velikog intenziteta, neophodno je napustiti tretman naseljenosti stanja preko jednačina promena naseljenosti u jedinici vremena, koji je prikladan kada intenzitet primenjenog polja nije veliki - u ovim situacijama je dozvoljeno zanemariti koherenciju stanja. Međutim, u slučaju velikog intenziteta laserskog polja, sistem atom + lasersko polje zahteva tretman preko amplituda stanja ili preko jednačina matrice gustine [9]. U ovom radu ćemo koristiti upravo formalizam matrice gustine. U pomenutom formalizmu, neophodno je sačuvati informaciju o fazama povezanim sa evolucijom atomskih stanja. U ovom



Slika 3.1: Zavisnost linearne susceptibilnosti (imaginarnog i realnog dela, respektivno) od detjuninga Δ_p primenjenog polja u proizvoljnim jedinicama. Posmatra se oblast oko rezonante frekvence (nultog detjuninga). Isprekidanom linijom su prikazane zavisnosti u odsustvu EIT efekta, dok su punom linijom prikazane zavisnosti kada je EIT efekat prisutan.

smislu govorimo o kvantnoj koherenciji, kao uzročniku zanimljivih efekata nabrojanih u glavama 1 i 3. Ovde ćemo često raditi sa tzv. „obučenim” stanjima (*dressed states*), koja predstavljaju svojstvena stanja sistema atom + laserska polja. Naravno, i ovde je moguće raditi sa svojstvenim stanjima izolovanog atoma, tzv. *atomskim stanjima* (*atomic states*), mada je uglavnom pogodnije raditi sa obučenim.

Kod atomskih sistema sa dva energijska nivoa, koherentna evolucija sistema dovodi do oscilatornog transfera naseljenosti, tzv. Rabijevih oscilacija. Kod atomskih sistema sa tri (ili više nivoa) s druge strane, može doći do brojnih drugih efekata, među kojima je i EIT, koji je tema ovog rada. Biće razmatrana i tzv. *mračna stanja*, koja se mogu javiti u sistemima atom + laserska polja, a pomoću kojih se uspešno objašnjava EIT efekat [10]. Ove pojave mogu biti shvaćene ili razmatranjem u bazi atomskih stanja ili u bazi pomenutih obučenih stanja, koja predstavljaju svojstvena stanja čitavog sistema atom + laserska polja. Ova svojstvena stanja nalazimo dijagonalizacijom kompletnog hamiltonijana koji opisuje sistem atom + laserska polja. U ovom radu ćemo koristiti prilaz preko obučenih stanja. Videćemo da interferencija između alternativnih puteva ekscitacije dovodi do modifikovanog optičkog odziva sistema [5].

Jako su bitne i promene nelinearnog odziva, odnosno nelinearne susceptibilnosti $\chi^{(3)}$. Ove promene su takve da, bez obzira na pojavu transparentnosti na rezonantnoj frekvenci laserskog polja, i dalje može doći do jake disperzije i nelinearnih efekata. S obzirom na to da je, uz prisustvo EIT, disperzija na rezonantnoj frekvenci sada normalna, a ne anomalna (slika 3.1), javiće se efekti kao što su izuzetno mala grupna brzina svetlosti i „skladištenje” svetlosti [4]. Najniža grupna brzina svetlosti eksperimentalno ostvarena je $v_g = 17m/s$ u Boze-Ajnštajnovom kondenzatu natrijumovog atomskog gasa [11], dok je skladištenje svetlosti upravo ono što bi moglo omogućiti realizaciju kvantnih memorijskih elemenata [7]. Promena nelinearne susceptibilnosti izlazi iz okvira ovog rada, te ona ovde neće biti razmatrana.

Napomenimo da smo nekoliko paragrafa iznad spominjali atomske i molekularne gasove u kontekstu EIT i sličnih efekata. Ovo je stoga što kod gasova (približno) ne dolazi do nestanka koherencije tokom evolucije sistema, usled međusobne interakcije atoma i molekula. Kod tečnih i čvrstih tela je pojava nestanka koherencije daleko je izraženija (usled dosta većih, nego kod gasova, koeficijenata koji opisuju relaksacione procese), mada je ostvaren napredak i u realizaciji pomenutih efekata u tečnim i čvrstim sredinama.

Sada ćemo se osvrnuti na objašnjenje EIT efekta preko obučenih stanja i pojave mračnih stanja, kojima se otkriva fizički mehanizam odgovoran za stvaranje EIT.

3.1.1 Mračna stanja

Kao što je već do sad napomenuto, EIT efekat ćemo interpretirati nalaženjem obučenih svojstvenih stanja, koja predstavljaju svojstvena stanja sistema atom + laserska polja. Postojanje mračnih stanja i njihovu vezu sa EIT ćemo ilustrovati na primeru Λ sistema (slika 2.3) prikazanom u glavi 2.

Na ovom mestu nećemo zalaziti u pisanje hamiltonijana sistema atom + laserska polja, već ćemo to ostaviti za glavu 5. Ovde ćemo samo opisati proceduru kojom nalazimo obučena stanja, dok ćemo istu egzaktno i primeniti u pomenutoj glavi 5.

Dakle, nakon što napišemo hamiltonijan celokupnog sistema, pristupamo traženju njegovih svojstvenih stanja. Ovo će praktično biti realizovano dijagonalizacijom hamiltonijana, čime najpre određujemo njegove svojstvene vrednosti, nakon čega možemo naći i sama svojstvena stanja. U slučaju Λ konfiguracije atoma sa tri nivoa, pokazuje se da je jedno obučeno svojstveno stanje oblika $|0\rangle = \alpha|1\rangle - \beta|2\rangle$. Dakle, ovo svojstveno stanje ne sadrži komponentu koja odgovara početnom, atomskom svojstvenom stanju $|3\rangle$, te je stanje $|0\rangle$ efektivno dekuplovano od laserskih polja. Odnosno, laserska polja nemaju nikakvog uticaja na ovo stanje, ne izazivaju prelaze elektrona iz

ovog stanja u neko drugo. Upravo usled ovoga se ono i naziva mračno stanje. Prozor transparentnosti koji se uočava pri EIT odgovara nalaženju naseljenosti elektrona upravo u ovom mračnom stanju. Još jedan način da EIT objasnimo preko mračnog stanja je sledeći: označimo obučena svojstvena stanja sa $|0\rangle$, $|+\rangle$ i $|-\rangle$ (dalje u radu će se videti zašto smo uveli upravo ovakve oznake). Ako potražimo zbir amplituda prelaza između stanja $|0\rangle$ i $|+\rangle$ i između $|0\rangle$ i $|-\rangle$:

$$\langle +|\mathbf{d}|0\rangle + \langle -|\mathbf{d}|0\rangle = 0, \quad (3.1)$$

gde je \mathbf{d} dipolni operator prelaza, dobićemo nulu. Dakle, dolazi do destruktivne interferencije ovih putanja ekscitacije, tako da elektroni koje se nalaze u stanju $|0\rangle$ ne prelaze u stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$, odnosno, stanje $|0\rangle$ predstavlja mračno stanje.

Napomenimo na ovom mestu samo da je pojava koherentnog populacionog trapovanja suštinski takođe prouzrokovana postojanjem mračnih stanja. Bez zalaženja u detalje, reći ćemo samo da postoje načini da svi elektroni datog atoma zarobe u određeno stanje postepenim variranjem amplituda primenjenih polja (adijabatski prelaz) [5].

Ovim smo završili izlaganje EIT efekta, kojim ćemo se dalje u radu detaljnije baviti kod V, lestvičaste i Λ konfiguracije atoma sa tri energijska nivoa. Sada ćemo objasniti SGK efekat, koji je takođe od interesa u ovom radu.

3.2 Spontano generisana koherencija

Spontano generisana koherencija predstavlja fizičku situaciju pri kojoj dolazi do koherencije između dva stanja atomskog sistema sa više energijskih nivoa, a koja je prouzrokovana spontanom emisijom unutar datog atomskog sistema [12]. Da bi SGK bio značajan efekat, neophodno je da frekventna razlika između dva energijska nivoa bude uporediva sa, ili manja od, koeficijentata spontane emisije datog pobuđenog stanja (koje učestvuje u stvaranju SGK), ili da frekventna razlika bude manja od Rabijeve frekvence laserskog polja koje uzrokuje prelaz. Ovo u praksi znači da se SGK efekat može javiti u dve situacije: ukoliko su dva energijska nivoa atomskog sistema degenerisana ili kvazidegenerisana - te je u pitanju prelaz sa dva pobuđena stanja na osnovno (V konfiguracija), ili sa pobuđenog stanja na dva osnovna (Λ sistem); ili, u slučaju lestvičaste konfiguracije, ukoliko su energijski nivoi ekvidistantni. SGK efekat je od interesa proučiti jer se može javiti u sredinama koje su predložene za realizaciju kvantnih memorijskih elemenata

(na bazi EIT, npr.), te je važno utvrditi kako se dinamika sistema atom + laserska polja menja usled prisustva SGK.

Kao što će biti pokazano dalje u radu, SGK ulazi u igru na sledeći način: u master jednačinama (videti glavu 5) figurišu eksponencijalni članovi oblika $e^{i(\omega_{ij}-\omega_{ki})t}$, gde ω_{ij} predstavlja frekvencu zračenja koje potiče od prelaza sa i -tog na j -ti energijski nivo. Ukoliko nema degeneracije ili kvazidegeneracije nivoa (V i Λ konfiguracija), niti su energijski nivoi ekvidistantni (lestvičasta konfiguracija), vremensko usrednjavanje pomenutih eksponencijalnih članova daje nulu (članovi koji brzo osciluju oko nule). Stoga, odgovarajući matrični elementi koji u master jednačinama bivaju množeni ovim eksponencijalnim članovima daju nulti doprinos jednačinama. Ovo je situacija u kojoj SGK odsustvuje. Međutim, uz degeneraciju, kvazidegeneraciju, ili ekvidistantnost energijskih nivoa, vremensko usrednjavanje eksponencijalnih članova daje jedinicu (sporo promenljivi članovi), te se odgovarajući članovi unutar master jednačina ne gube.

Ispostavlja se da zadržavanje pomenutih članova u master jednačina, tj. činjenica da ih vremensko usrednjavanje ne uklanja, može imati duboke posledice na dinamiku sistema. Neke od ovih posledica će biti i pokazane dalje u radu. Na ovom mestu ćemo, za sad bez detalja, navesti da one uključuju modifikaciju naseljenosti unutar atomskog sistema, kao i izmene profila apsorpcije i disperzije na rezonantnim prelazima za dati atomski sistem [12,13].

Naglasimo još jednom da je fizičko objašnjenje ovog efekta interferencija između različitih puteva ekscitacije, do koje dolazi usled jednake (ili gotovo jednake) frekvence koja odgovara različitim prelazima. Intuitivno se ovo može shvatiti na sledeći način: emisija (apsorpcija) fotona kao posledica prelaza elektrona sa jednog nivoa na drugi može biti praćena momentalnom apsorpcijom (emisijom) istog tog fotona između druga dva nivoa. Ovo je moguće upravo usled jednakosti (ili približne jednakosti) frekvence oba pomenuta prelaza. Članovi u master jednačinama o kojima smo govorili u prethodna dva paragrafa opsuju upravo ove procese.

Ovim smo završili uvodna razmatranja vezana za EIT i SGK. U narednim poglavljima ćemo se pozabaviti teorijskom podlogom koja nam omogućuje da opišemo ove efekte, a koju započinjemo poglavljem o kvantnomehaničkim osnovama ove problematike.

Glava 4

Kvantnomehaničke osnove

Otkriće lasera 1958. godine je prouzrokovalo revoluciju u optici, čije su posledice na fiziku, hemiju, elektroniku i biologiju dramatične [9]. Karakteristike lasera su jako superirone u odnosu na stare, nekoherentne izvore svetlosti. Laseri daju veoma intenzivnu, jako kolimisanu, spektralno vrlo usku, fazno koherentnu svetlost. Laseri su vrlo brzo nakon svog otkrića zamenili lampe kao standardan metod optičke ekscitacije. Prouzrokovali su pojavu brojnih novih tipova spektroskopije, nove naučne discipline kao što je kvantna elektronika, proučavanje statističkih osobina u kvantnoj optici, optičko hlađenje i trapovanje čestica, kontrolisanje hemijske reaktivnosti, kao i nove tehnike za mapiranje i mikroskopiju ultra-visoke rezolucije.

Kako je predmet ovog rada interakcija atomskih sistema upravo sa laserskim poljima, neophodno nam je da razvijemo odgovarajući teorijski formalizam. Ovaj formalizam treba da nam omogući proučavanje interakcije atoma sa spektralno uskim (u poređenju sa prirodnom širinom odgovarajućih linija) laserskim poljima, sa dobro definisanom polarizacijom i fazom, čiji je intenzitet dovoljni visok da omogući značajnu depopulaciju osnovnog stanja. Potrebna nam je jednačina koja će opisati vremensku evoluciju atomskog sistema koji jako interaguje sa laserskim poljima, od kojih svako ima jedan mod (drugim rečima, laserska polja su monohromatična). Možda bi nam prva ideja bila da u ovu svrhu iskoristimo Šredingerovu jednačinu, s obzirom na to da ona zaista opisuje vremensku evoluciju datog stanja bilo kog sistema. Kada bi nam jedini interes bili stimulisani procesi, kao što je apsorpcija jednog moda talasa koji nailazi na atom, onda bi Šredingerova jednačina bila dovoljna. Međutim, problem je u tome što želimo da opišemo i spontane procese, tj. relaksaciju (deekscitaciju). Ovo je stoga što, u većinih realnih situacija, dolazi do izjednačavanja brzina ekscitacije i relaksacije. Dakle, spontana emisija (i bilo koji drugi eventualno prisutni disipativni proces) moraju biti uključeni u fizički opis sistema atom + laser-

ska polja. Međutim, sada više nemamo posla sa sistemom ograničenim na interakciju sa monohromatičnim laserskim poljima i atomom sa brojem stanja jednakim broju njegovih energijskih nivoa. Spontana emisija predstavlja statistički proces, te se javlja određena statistička raspodela emitovanih fotona, kao i atomskih stanja (po pitanju impulsa). Ovakva situacija ne može biti opisana jednom talasnom funkcijom, već pomoću više talasnih funkcija za koje postoji određena raspodela verovatnoće. Jedino što tada možemo (principijelno) izračunati je verovatnoća nalaženja sistema u odgovarajućem stanju. Očigledno, Šrednigerova jednačina više ne daje odgovarajući opis, te moramo potražiti opis vremenske evolucije sistema definisanog *matricom gustine*, koja karakteriše statističku mešavinu kvantnih stanja. *Master jednačine* (takode poznate i kao *optičke Blohove jednačine*) opisuju vremensku evoluciju matičnih elemenata matrice gustine, te moramo koristiti njih umesto Šredingerove jednačine. U svrhu dolaženja do master jednačina, sada ćemo se pozabaviti osnovama teorije matrice gustine [9].

4.1 Matrica gustine

4.1.1 Nomenklatura i osobine

Definišemo matricu gustine kao

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (4.1)$$

gde je ψ_i vektor stanja koji pripada kompletnom skupu ortonormiranih kvantnih stanja datog sistema. Prisutna je statistička raspodela ansambla sistema po ovim ortonormiranim stanjima, koja je određena verovatnoćama P_i za nalaženje sistema u $|\psi_i\rangle$ stanju. Sumiranje ide po svim elementima kompletnog skupa ortonormiranih stanja. Za verovatnoću P_i , naravno, važe sledeće relacije:

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad (4.2)$$

i

$$\sum_i P_i = 1. \quad (4.3)$$

Zapazimo da matrica gustine deluje na vektor stanja $|\psi_k\rangle$ tako da daje verovatnoću nalaženja sistema u stanju $|\psi_k\rangle$, odnosno

$$\rho |\psi_k\rangle = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_k\rangle = P_k |\psi_k\rangle. \quad (4.4)$$

Ukoliko se svi članovi ansambla nalaze u istom stanju $|\psi_k\rangle$, onda se matrica gustine svodi na

$$\rho = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad (4.5)$$

i tada se kaže da se sistem nalazi u *čistom stanju* sa $P_k = 1$. Iz jednačine (4.4) nalazimo da dijagonalni matrice elementi matrice gustine daju verovatnoću za nalaženje sistema u stanju $|\psi_k\rangle$:

$$\langle\psi_k|\rho|\psi_k\rangle = P_k. \quad (4.6)$$

Kako su $|\psi_i\rangle$ ortonormirani, nedijagonalni matrice elementi matrice gustine su jednaki nuli. Takođe, iz (4.6) očigledno je da je

$$\sum_i \langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle = 1. \quad (4.7)$$

4.1.2 Matrična reprezentacija

Sledeći korak bi bio pronalaženje odgovarajuće *matrične reprezentacije* matrice gustine tako što vektore stanja $|\psi_i\rangle$ predstavimo u nekom ortonormiranom skupu *bazisnih vektora*

$$|\psi_i\rangle = \sum_n c_{ni}|n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi_i\rangle, \quad (4.8)$$

pri čemu važi relacija zatvorenosti

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \quad (4.9)$$

i

$$\langle n|\psi_i\rangle = c_{ni} \quad (4.10)$$

predstavlja projekciju vektora stanja $|\psi_i\rangle$ na bazisni vektor $|n\rangle$. Sada možemo zapisati matričnu reprezentaciju matrice gustine u bazu $|n\rangle$ korišćenjem definicione relacije za matricu gustine (4.1) i zamenjući u nju vektore stanja izražene preko relacije (4.8):

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i P_i \sum_{n,m} |n\rangle\langle n|\psi_i\rangle\langle\psi_i|m\rangle\langle m| = \\ &= \sum_i P_i \sum_{n,m} c_{ni}c_{mi}^* |n\rangle\langle m|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Matrični elementi ρ u ovoj reprezentaciji su

$$\langle n|\rho|m\rangle = \sum_i P_i c_{ni}c_{mi}^*, \quad (4.12)$$

pri čemu su dijagonalni matrični elementi

$$\langle n|\rho|n\rangle = \sum_i P_i |c_{ni}|^2 \quad (4.13)$$

i

$$\langle m|\rho|n\rangle^* = \sum_i P_i c_{ni}^* c_{mi} = \sum_i P_i \sum_{n,m} \langle m|\psi_i\rangle \langle \psi_i|n\rangle = \langle n|\rho|m\rangle, \quad (4.14)$$

što znači da je ovo ermitski operator. Suma dijagonalnih matričnih elemenata matrice gustine, odnosno njen *trag*, je fundamentalna osobina matrice gustine, jer je invarijantan na bilo koju unitarnu transformaciju reprezentacije - uvek je jednak jedinici. Ovo vidimo iz sledećeg razmatranja, koje sledi iz (4.1) i

$$\text{Tr}\rho = \sum_n \langle n|\rho|n\rangle. \quad (4.15)$$

Dakle

$$\begin{aligned} \text{Tr}\rho &= \sum_{n,i} P_i \langle n|\psi_i\rangle \langle \psi_i|n\rangle = \\ &= \sum_{n,i} P_i \langle \psi_i|n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \langle \psi_i|n\rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i|\psi_i\rangle = 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.1.3 Fizička interpretacija

Napomenimo na ovom mestu fizičku interpretaciju matričnih elemenata matrice gustine, da bi bolje ilustrovali značaj njihovog određivanja. Dijagonalni matrični elementi ρ_{ii} predstavljaju naseljenosti odgovarajućih stanja, dok su nedijagonalni elementi povezani sa susceptibilnošću date sredine:

$$\text{Im}\chi = \frac{2N|d_{ij}|^2}{\varepsilon_0\hbar} \text{Im}\rho_{ij} \quad (4.17)$$

za imaginarni deo i

$$\text{Re}\chi = \frac{2N|\mathbf{d}_{ij}|^2}{\varepsilon_0\hbar} \text{Re}\rho_{ij} \quad (4.18)$$

za realni deo. Veličina \mathbf{d}_{ij} je dipolni element datog prelaza, koja će biti egzaktno definisana u glavi 5, dok je N koncentracija atoma u datoj sredini. Kao što je već ranije napomenuto, imaginarni deo susceptibilnosti opisuje apsorpciju, a realni prelamanje zračenja (polja). Napomenimo još da je u izrazima (4.17) i (4.18) obavezno $i > j$, tj. indeks i se odnosi na stanje veće energije nego stanje označeno indeksom j .

Dalje u radu ćemo predstavljati grafike zavisnosti nedijagonalnih matričnih elemenata od određenih parametara. S obzirom na to da susceptibilnost zavisi linearno od odgovarajućeg matričnog elementa, dovoljno je prikazati pomenute zavisnosti matričnih elemenata da bi dobili informaciju o apsorpciji i prelamanju primenjenog zračenja.

4.2 Rerezentacije operatora

Pre nego što nastavimo sa razvijanjem teorije matrice gustine u smeru neophodnom za dobijanje master jednačina, na kratko ćemo se osvrnuti na različite reprezentacije operatora i kvantnih stanja u kvantnoj mehanici. U glavi 5 ćemo baratati sa hamiltonijanom u različitim reprezentacijama, te nam zato nije na odmet da na ovom mestu izvršimo kratko podsećanje na reprezentacije.

U *Šredingerovoj reprezentaciji* je vremenska evolucija kvantnog sistema opisana Šredingerovom jednačinom

$$H|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad (4.19)$$

u kojoj sva eksplicitna vremenska zavisnost potiče od talasnih funkcija stanja sistema, dok su operatori koji odgovaraju dinamičkim promenljivima (energiji, momentu impulsa, vektoru položaja, itd.) eksplicitno nezavisni od vremena. U *Hajzenbergovoj reprezentaciji* sva eksplicitna nezavisnost od vremena potiče od operatora, dok su talasne funkcije stanja sistema vremenski nezavisne. *Interakciona slika* predstavlja hibrid Šredingerove i Hajzenbergove slike prikladan za hamiltonijane oblika

$$H = H_0 + H'(t), \quad (4.20)$$

gde je H_0 vremenski nezavisan hamiltonijan neperturbovanog sistema, dok je H' vremenski zavisan deo, koji odgovara interakciji sa nekim perturbujućim poljem.

4.2.1 Operator vremenske evolucije

Kao što je poznato iz elementarne kvantne mehanike, operator vremenske evolucije, $U(t, t_0)$, deluje na elemente ket prostora kvantnih stanja i prevodi ih iz inicijalnog vremenskog trenutka t_0 u kasniji trenutak t

$$U(t, t_0)|\psi(\mathbf{r}, t_0)\rangle = |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle. \quad (4.21)$$

Zapazimo da operacija vremenske inverzije

$$|\psi(\mathbf{r}, t_0)\rangle = U(t_0, t)|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad (4.22)$$

zajedno sa množenjem relacije (4.21) sleva sa $U^{-1}(t, t_0)$ implicira da je

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0). \quad (4.23)$$

Adjungovanje relacije (4.21) daje

$$\langle\psi(\mathbf{r}, t)| = \langle\psi(\mathbf{r}, t_0)|U^\dagger(t, t_0). \quad (4.24)$$

Ukoliko je hamiltonijan vremenski nezavisan, formalnom integracijom jednačine (4.19) dobijamo

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \quad (4.25)$$

i

$$U^\dagger(t, t_0) = e^{iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (4.26)$$

Iz poslednje dve relacije vidimo da važi

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = 1, \quad (4.27)$$

odakle, množenjem zdesna sa $U(t, t_0)^{-1}$ dobijamo

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)^{-1}, \quad (4.28)$$

tj. operator vremenske evolucije je unitaran. Ovo je bitno jer to pokazuje da operator vremenske evolucije možemo koristiti za prelaz sa jedne reprezentacije na drugu.

Podsetićemo sada da se prelaz na Hajzenbergovu sliku (sa Šredingerove) vrši na sledeći način:

$$|\psi(\mathbf{r})\rangle = U^\dagger(t, t_0)|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle \quad (4.29)$$

i

$$O_H = U^\dagger(t, t_0)O_S U(t, t_0), \quad (4.30)$$

čime smo pokazali kako se transformišu stanja sistema $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ i operatori O , pri čemu indeks S označava da se radi o operatoru u Šredingerovoj slici, a H u Hajzenbergovoj. Prelaz na interakcionu sliku se vrši na isti način, s tim što operator vremenske evolucije treba zameniti operatorom

$$U'(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}, \quad (4.31)$$

gde je H_0 neperturbovani hamiltonijan iz relacije (4.20).

4.3 Jednačina kretanja matrice gustine

Iskoristimo definicionu relaciju matrice gustine (4.1) i predstavimo vektore stanja pomoću operatora vremenske evolucije kao u (4.29), te dobijamo

$$\rho(t) = \sum_i P_i U(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)| U^\dagger(t, t_0), \quad (4.32)$$

pa iz

$$\rho(t_0) = \sum_i P_i |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)|, \quad (4.33)$$

vidimo da je

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0), \quad (4.34)$$

pa je za vremenski nezavisan hamiltonijan

$$\rho(t) = e^{-H(t-t_0)/\hbar} \rho(t_0) e^{H(t-t_0)/\hbar}. \quad (4.35)$$

Sada nalazimo parcijalni izvod po vremenu matrice gustine iz prethodne jednačine, imajući u vidu da je (iz definicije operatora vremenske evolucije (4.21) i Šredingerove jednačine (4.19))

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{i\hbar} HU, \quad (4.36)$$

kao i da je, posledično

$$\frac{dU^\dagger}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger H, \quad (4.37)$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je hamiltonijan ermitski operator. Dobijamo da je

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho(t)], \quad (4.38)$$

što je rezultat koji je poznat kao *Liuvilova jednačina*. Ova jednačina predstavlja jednačinu kretanja matrice gustine. Korišćenjem ove jednačine dobićemo u narednoj glavi tražene master jednačine za atomske sisteme koji su nam od interesa u ovom radu. Napomenimo još da Liuvilova jednačina ne razmatra spontanu emisiju. Ona se uključuje dodavanjem člana $\Lambda \rho$ u Liuvilovu jednačinu (4.38), pri čemu je Λ operator koji opisuje efekte spontane emisije. Egzaktan oblik ovog člana će biti dat u narednoj glavi.

Glava 5

Master jednačine

U ovoj glavi ćemo izvesti master jednačine za svaku od konfiguracija energijskih nivoa atoma koje razmatramo, kao i izvršiti njihovo (aproksimativno) rešavanje bez i sa uključivanjem efekta SGK. Najpre ćemo se pozabaviti izvođenjem master jednačina za sve tri konfiguracije.

5.1 Izvođenje master jednačina

Kao što je pokazano u glavi 4, matrica gustine ρ zadovoljava modifikovanu Liuvilovu jednačinu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \Lambda\rho, \quad (5.1)$$

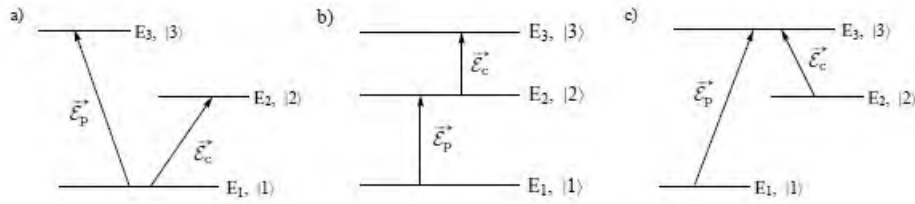
gde je H hamiltonijan atomskog sistema koji uključuje interakciju atoma sa laserskim poljima, dok je Λ operator koji opisuje efekte spontane emisije. Na dalje ćemo raditi u sistemu jedinica u kojem je $\hbar = 1$, te jednačina (5.1), uz neznatno sređivanje, dobija oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + \Lambda\rho. \quad (5.2)$$

Sada ćemo pristupiti izvođenju izraza za članove sa desne strane jednačine (5.2). Najpre ćemo izvesti izraz za član koji sadrži hamiltonijan atomskog sistema, za šta će nam najpre biti neophodan izraz za hamiltonijan, a zatim i član koji odgovara spontanoj emisiji.

5.1.1 Hamiltonijan atomskog sistema

U ovom delu ćemo najpre napisati hamiltonijan u Hajzenbergovoj slici, zatim preći na interakcionu sliku da bi u njoj uveli aproksimaciju rotirajućih



Slika 5.1: Shematski prikaz konfiguracija energijskih nivoa atoma sa tri energijska niva, na koga deluju kontrolno lasersko polje i sondirajuće lasersko polje: a) V konfiguracija, b) lestvičasta konfiguracija i c) Λ konfiguracija.

talasa (*rotating-wave aproksimacija*, RWA). Nakon ovoga se vraćamo na Hajzenbergovu sliku, te prelazimo na koordinatni sistem koji rotira zajedno sa talasima laserskih polja.

Hamiltonijan u Hajzenbergovoj slici

Da bi napisali hamiltonijan u Hajzenbergovoj slici, najpre ćemo energijske nivoe označiti u rastućem redosledu po energijama sa E_1 , E_2 i E_3 ($E_1 < E_2 < E_3$), kao i odgovarajuća svojstvena stanja hamiltonijana sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$. Vektore električnih polja kontrolnog i sondirajućeg lasera označavamo sa ϵ_c i ϵ_p , respektivno. Istaknimo da (u uvedenom sistemu jedinica u kojem je $\hbar = 1$) važi

$$E_i = \omega_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

gde je ω_i frekvencija koja odgovara energiji datog atomskog nivoa. Da bi uveli interakciju između atoma i laserskih polja, definišemo operator prelaza

$$A_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (5.4)$$

pri čemu je

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

s obzirom na to da su svojstvena stanja ortonormirana. Hamiltonijan atomskog sistema H_0 , koji ne uključuje interakciju sa laserskim poljima, sada ima oblik

$$H_0 = \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33}. \quad (5.6)$$

Uticao laserskih polja na sistem se uključuje kroz hamiltonijan interakcije, koji sadrži dva člana: onaj koji odgovara interakciji sa kontrolnim poljem - V_c i onaj koji odgovara interakciji sa sondirajućim poljem - V_p . Oni redom

imaju oblike

$$\begin{aligned} V_c &= -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_c, \\ V_p &= -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p, \end{aligned} \quad (5.7)$$

gde je \mathbf{d} dipolni operator prelaza. Ako zapišemo dipolni operator prelaza u obliku

$$\mathbf{d} = I\mathbf{d}I, \quad (5.8)$$

gde je $I = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ jedinični operator u prostoru svojstvenih stanja atomskog sistema, te imajući u vidu koji su prelazi dozvoljeni a koji ne (slika 5.1), dolazimo do sledećih izraza:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_v &= \mathbf{d}_{12}A_{12} + \mathbf{d}_{21}A_{21} + \mathbf{d}_{13}A_{13} + \mathbf{d}_{31}A_{31}, \\ \mathbf{d}_m &= \mathbf{d}_{12}A_{12} + \mathbf{d}_{21}A_{21} + \mathbf{d}_{23}A_{23} + \mathbf{d}_{32}A_{32}, \\ \mathbf{d}_\lambda &= \mathbf{d}_{13}A_{13} + \mathbf{d}_{31}A_{31} + \mathbf{d}_{23}A_{23} + \mathbf{d}_{32}A_{32}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Indeksi v , m i λ označavaju da se radi o odgovarajućim veličinama vezanim za V, lestvičastu i Λ konfiguraciju, respektivno.

Električna polja lasera koja figurišu u hamiltonijanima interakcije imaju iste izraze za sve tri konfiguracije. Ova polja tretiramo kao ravne monohromatske elektromagnetne talase sa zadatom polarizacijom (poluklasičan pristup). U ovakvom pristupu, izrazi za vektore električnih polja su

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} + \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} + \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

pri čemu \mathbf{E}_i i \mathbf{E}_i^* , $i = c, p$, sadrže informaciju i o amplitudi i o polarizaciji, dok ω_i predstavlja frekvencu (kružnu) laserskog polja. Kako je ukupni hamiltonijan H jednak zbiru atomskog hamiltonijana i hamiltonijana interakcije

$$H = H_0 + V_c + V_p, \quad (5.11)$$

koristeći jednačine (5.6), (5.19), (5.9) i (5.10), dobijamo izraze za hamiltonijane u Hajzenbergovoj slici. Ukupan hamiltonijan za V konfiguraciju ima

oblik

$$\begin{aligned}
H_{Sv} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{12} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{21} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{12} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{21}, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Sm} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{12} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{21} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{23} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{32} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{32} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

i za Λ konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{S\lambda} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{13} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{13} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{31} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{31} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{23} - \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{32} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{32}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Hamiltonijan u interakcionoj slici

Sada ćemo sa Hajzenbergove slike preći na interakcionu sliku, sa ciljem da uvedemo RWA aproksimaciju i time pojednostavimo hamiltonijan. Radi prelaska na interakcionu sliku, uvodimo evolucionni operator U . Ovaj operator je unitaran, tj. važi da je $U^{-1} = U^\dagger$. Operator U se definiše kao

$$U = e^{iH_0 t} = e^{i\omega_1 A_{11} + i\omega_2 A_{22} + i\omega_3 A_{33}} = e^{i\omega_1 A_{11}} e^{i\omega_2 A_{22}} e^{i\omega_3 A_{33}}. \quad (5.15)$$

Hamiltonijan se pri prelazu na interakcionu sliku transformiše na sledeći način

$$H_I = UH_S U^{-1}, \quad (5.16)$$

gde smo sa H_I označili hamiltonijan u interakcionoj slici.

Da bi dobili izraz za hamiltonijan u interakcionoj slici, najpre ćemo utvrditi na koji način se transformišu operatori A_{ij} ponaosob. U ovu svrhu koristimo sledeći izraz koji važi za proizvoljne operatore A i B

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (5.17)$$

gde je $[A, B] = AB - BA$ komutator operatora. Koristeći izraz (5.17), dobijamo sledeća pravila za prelaz operatora A_{ij} sa Hajzenbergove na interakcionu sliku:

$$\begin{aligned} A_{11} &\rightarrow A_{11} \\ A_{22} &\rightarrow A_{22} \\ A_{33} &\rightarrow A_{33} \\ A_{12} &\rightarrow A_{12} e^{-i\omega_{21}t} \\ A_{21} &\rightarrow A_{21} e^{i\omega_{21}t} \\ A_{13} &\rightarrow A_{13} e^{-i\omega_{31}t} \\ A_{31} &\rightarrow A_{31} e^{i\omega_{31}t} \\ A_{23} &\rightarrow A_{23} e^{-i\omega_{32}t} \\ A_{32} &\rightarrow A_{32} e^{i\omega_{32}t}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

pri čemu smo uveli oznaku za frekvence prelaza $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$. Zamenom upravo dobijenih izraza (5.18) u izraze (5.12), (5.13) i (5.14), dolazimo do izraza za hamiltonijane u interakcionoj slici. Za V konfiguraciju on glasi

$$\begin{aligned} H_{Iv} &= \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i(\omega_{21} + \omega_c)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{-i(\omega_{21} - \omega_c)t} A_{12} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{21} - \omega_c)t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i(\omega_{21} + \omega_c)t} A_{21} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i(\omega_{31} + \omega_p)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{12} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i(\omega_{31} + \omega_p)t} A_{21}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Im} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i(\omega_{21} + \omega_p)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{21} - \omega_p)t} A_{12} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{21} - \omega_p)t} A_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i(\omega_{21} + \omega_p)t} A_{21} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i(\omega_{32} + \omega_c)t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{23} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{32} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i(\omega_{32} + \omega_c)t} A_{32} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

i za Λ konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{I\Lambda} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i(\omega_{31} + \omega_p)t} A_{13} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{13} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{31} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i(\omega_{31} + \omega_p)t} A_{31} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i(\omega_{32} + \omega_c)t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{23} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{32} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i(\omega_{32} + \omega_c)t} A_{32}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Aproksimacija rotirajućih talasa

Zapazimo da u izrazima (5.19), (5.20) i (5.21) pojedini članovi sadrže u eksponetnima jedino zbrove ili razlike frekvencija prelaza ω_{ij} i laserskih frekvencija ω_c i ω_p . Ukoliko izvršimo vremensko usrednjavanje hamiltonijana, što je sasvim razumno s obzirom na prirodu mernog procesa, vidimo da eksponenti koji sadrže zbir frekvencija predstavljaju brzo promenljive veličine, koje osciluju oko srednje vrednosti nula. Stoga, članove u izrazima (5.19), (5.20) i (5.21) koji sadrže zbrove frekvencija možemo zanemariti (jer usrednjeni po vremenu daju nulti doprinos). Upravo ova aproksimacija se naziva aproksimacija rotirajućih talasa (RWA). Ovo daje sledeće izraze za hamiltonijane u interakcionoj slici: za V konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Iv} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{-i(\omega_{21} - \omega_c)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{21} - \omega_c)t} A_{21} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{21}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Im} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{21} - \omega_p)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{21} - \omega_p)t} A_{21} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{32} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

i za Λ konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{I\Lambda} = & \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{-i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{13} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{i(\omega_{31} - \omega_p)t} A_{31} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} A_{32}. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Povratak na Hajzenbergovu sliku

Prelaz na interakcionu sliku je poslužio svrsi, jer smo pomoću RWA dobili jednostavniji hamiltonijan. Sada je neophodno vratiti se na Hajzenbergovu sliku. Ovo se ponovo vrši uz pomoć operatora U , definisanog izrazom (6.38), tako da hamiltonijan u Hajzenbergovoj slici sada glasi

$$H_S = U^{-1} H_I U. \quad (5.25)$$

Kao i pri prelazu sa Hajzenbergove na interakcionu sliku, i ovde ćemo, korišćenjem izraza (5.17), najpre utvrditi kako se transformišu operatori A_{ij} . Dolazimo do sledećih pravila:

$$\begin{aligned}
A_{11} & \rightarrow A_{11} \\
A_{22} & \rightarrow A_{22} \\
A_{33} & \rightarrow A_{33} \\
A_{12} & \rightarrow A_{12} e^{i\omega_{21}t} \\
A_{21} & \rightarrow A_{21} e^{-i\omega_{21}t} \\
A_{13} & \rightarrow A_{13} e^{i\omega_{31}t} \\
A_{31} & \rightarrow A_{31} e^{-i\omega_{31}t} \\
A_{23} & \rightarrow A_{23} e^{i\omega_{32}t} \\
A_{32} & \rightarrow A_{32} e^{-i\omega_{32}t}, \quad (5.26)
\end{aligned}$$

te dobijamo konačan izraz za hamiltonijan u Hajzenbergovoj slici za V konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Sv} &= \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{21} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{21}, \quad (5.27)
\end{aligned}$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{Sm} &= \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{21} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i\omega_c t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{32} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

i za Λ konfiguraciju

$$\begin{aligned}
H_{S\lambda} &= \omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{22} + \omega_3 A_{33} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i\omega_p t} A_{13} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} A_{31} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c e^{i\omega_c t} A_{23} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i\omega_c t} A_{32}. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Prelaz na rotirajući koordinatni sistem

Konačno pojednostavljivanje hamiltonijana se vrši prelaskom na rotirajući koordinatni sistem. Hamiltonijan se u ovom slučaju transformiše kao

$$H = i \frac{dU'}{dt} U'^{-1} + U' H_S U'^{-1}, \quad (5.30)$$

gde je U' unitaran operator ($U'^{-1} = U'^{\dagger}$) definisan sa

$$U' = e^{i\alpha t} A_{11} + e^{i\beta t} A_{22} + e^{i\gamma t} A_{33}. \quad (5.31)$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned}
\frac{dU'}{dt} &= i\alpha e^{i\alpha t} A_{11} + i\beta e^{i\beta t} A_{22} + i\gamma e^{i\gamma t} A_{33}, \\
U'^{-1} &= U' = e^{-i\alpha t} A_{11} + e^{-i\beta t} A_{22} + e^{-i\gamma t} A_{33}. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Veličine α , β i γ su za sada neodređene konstante.

Prvi član sa desne strane u izrazu (5.30) sada postaje

$$i \frac{dU'}{dt} U^{-1} = -\alpha A_{11} - \beta A_{22} - \gamma A_{33}. \quad (5.33)$$

Da bi izračunali i drugi član sa desne strane izraza (5.30) najpre ćemo odrediti $U' A_{ij} U'^{-1}$ za svaki operator prelaza ponaosob. Dobijamo sledeće izraze:

$$\begin{aligned} U' A_{11} U'^{-1} &= A_{11} \\ U' A_{22} U'^{-1} &= A_{22} \\ U' A_{33} U'^{-1} &= A_{33} \\ U' A_{12} U'^{-1} &= A_{12} e^{i(\alpha-\beta)t} \\ U' A_{21} U'^{-1} &= A_{21} e^{-i(\alpha-\beta)t} \\ U' A_{13} U'^{-1} &= A_{13} e^{i(\alpha-\gamma)t} \\ U' A_{31} U'^{-1} &= A_{31} e^{-i(\alpha-\gamma)t} \\ U' A_{23} U'^{-1} &= A_{23} e^{i(\beta-\gamma)t} \\ U' A_{32} U'^{-1} &= A_{32} e^{-i(\beta-\gamma)t}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

Koristeći izraze (5.27), (5.30), (5.33) i (5.34), dobijamo sledeći izraz za hamiltonijan za V konfiguraciju:

$$\begin{aligned} H_{Sv} &= (\omega_1 - \alpha) A_{11} + (\omega_2 - \beta) A_{22} + (\omega_3 - \gamma) A_{33} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^* e^{i(\omega_c \alpha - \beta)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c e^{-i(\omega_c + \alpha - \beta)t} A_{21} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_p^* e^{i(\omega_p + \alpha - \gamma)t} A_{12} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p e^{-i(\omega_p + \alpha - \gamma)t} A_{21}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ideja je uvesti konstante α , β i γ tako da se hamiltonijan što korisnije pojednostavi. Zahtevaćemo da svi eksponenti budu jednaki nuli, kao i član uz A_{11} . Odnosno

$$\begin{aligned} \omega_1 - \alpha = 0 &\Rightarrow \alpha = \omega_1, \\ \omega_c + \alpha - \beta = 0 &\Rightarrow \beta = \omega_c + \omega_1, \\ \omega_p + \alpha - \gamma = 0 &\Rightarrow \gamma = \omega_p + \omega_1. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sada hamiltonijan za V konfiguraciju dobija svoj konačan oblik

$$H_v = \Delta_c A_{22} + \Delta_p A_{33} - \Omega_c^* A_{12} - \Omega_c A_{21} - \Omega_p^* A_{12} - \Omega_p A_{21}, \quad (5.37)$$

gde su Δ_c i Δ_p detjuninzi kontrolnog i sondirajućeg polja, respektivno, definisani na sledeći način

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \omega_{21} - \omega_c, \\ \Delta_p &= \omega_{31} - \omega_p, \end{aligned} \quad (5.38)$$

i fizički predstavljaju razliku između rezonantne frekvence datog prelaza i frekvence odgovarajućeg lasera kojim taj prelaz pobuđujemo. Veličine Ω_c i Ω_p predstavljaju takozvane Rabijeve frekvence, definisane na sledeći način:

$$\begin{aligned}\Omega_c &= \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_c & (\Omega_c^* &= \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_c^*), \\ \Omega_p &= \mathbf{d}_{31} \cdot \mathbf{E}_p & (\Omega_p^* &= \mathbf{d}_{13} \cdot \mathbf{E}_c^*),\end{aligned}\quad (5.39)$$

pri čemu treba imati u vidu da se one nekada definišu i tako da predstavljaju polovine ovih vrednosti.

U matricnoj reprezentaciji, sa bazisnim vektorima $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$, konačan hamiltonijan za V konfiguraciju može biti zapisan na sledeći način:

$$H_v = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_c^* & -\Omega_p^* \\ -\Omega_c & \Delta_c & 0 \\ -\Omega_p & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Analognom procedurom dobijamo i konačne hamiltonijane za lestvičastu konfiguraciju

$$H_m = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c^* \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

i za Λ konfiguraciju

$$H_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Omega_p^* \\ 0 & \Delta_p - \Delta_c & -\Omega_c^* \\ -\Omega_p & -\Omega_c & \Delta_p \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

5.1.2 Master jednačine

Sada ćemo napisati master jednačine za sve tri konfiguracije. Master jednačine daju izraze za parcijalne vremenske izvode matičnih elemenata matrice gustine ρ za dati sistem. Na osnovu jednačine (5.2), matični element ρ_{ij} matrice gustine dobijamo na sledeći način:

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle = -i\langle i|[H, \rho]|j\rangle + \langle i|\Lambda\rho|j\rangle = -i[H, \rho]_{ij} + (\Lambda\rho)_{ij}, \quad (5.43)$$

gde je H odgovarajući konačni hamiltonijan ((5.40), (5.41) ili (5.42)) koji smo izveli. Radi eksplicitnosti, prikazaćemo matricu gustine u matičnom obliku, sa bazisnim vektorima $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Imajući u vidu relaciju (4.16), odnosno da za matricu gustine (njene matrične elemente) važi da je

$$\text{Tr}\rho = 1, \quad (5.45)$$

odnosno

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1, \quad (5.46)$$

kao i da je matrica gustine hermitski operator

$$\rho_{ij} = \rho_{ji}^*, \quad (5.47)$$

vidimo da se problem nalaženja master jednačina pojednostavljuje, tj. nije nam neophodno 9 jednačina, već samo 5, da bi u konačnom poznavali sve matrične elemente matrice gustine. Odabraćemo stoga matrične elemente ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{12} , ρ_{13} i ρ_{23} da za njih napišemo master jednačine.

Prve članove sa desne strane jednačine (5.43) nalazimo zamenjujući odgovarajući izraz za hamiltonijan za datu konfiguraciju, te jednostavnim sprovođenjem računa. Daćemo primer ovog računa za matrični element ρ_{11} za V konfiguraciju:

$$\begin{aligned} [H_v, \rho]_{11} &= (H_v \rho)_{11} - (\rho H_v)_{11} = \\ &= H_{v11} \rho_{11} + H_{v12} \rho_{21} + H_{v13} \rho_{31} - \rho_{11} H_{v11} - \rho_{12} H_{v21} - \rho_{13} H_{v31}, \\ &= -\Omega_c^* \rho_{21} - \Omega_p^* \rho_{31} + \Omega_c \rho_{12} + \Omega_p \rho_{13}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

te je

$$-i[H_v, \rho]_{11} = i\Omega_c^* \rho_{21} + i\Omega_p^* \rho_{31} - i\Omega_c \rho_{12} - i\Omega_p \rho_{13}. \quad (5.49)$$

Ostali članovi koji odgovaraju interakciji datog atomskog sistema sa laser-skim poljima, oblika $-i[H, \rho]_{ij}$ se nalaze analogno, te neće biti ponaosob predstavljeno izračunavanje za svaki.

Spontana emisija

Član u jednačini (5.43) koji odgovara spontanoj emisiji $\Lambda\rho$ je dat sledećim izrazom:

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \sum_{m,n>m} \sum_{p,q>p} \gamma_{nm,qp} (\rho A_{nm} A_{pq} + A_{nm} A_{pq} \rho - 2A_{pq} \rho A_{nm}) e^{i(\omega_{nm} - \omega_{pq})t}, \quad (5.50)$$

gde je γ_{ij} koeficijent spontane emisije između stanja $|j\rangle$ i stanja $|i\rangle$, dat sa

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \omega_{ji} |\mathbf{d}_{ij}|^2, \quad (5.51)$$

dok su $\gamma_{nm,qp}$ dati izrazom

$$\gamma_{nm,qp} = \sqrt{\gamma_{nm}}\sqrt{\gamma_{qp}} \cos(\theta_{nm,qp}). \quad (5.52)$$

Ugao $\theta_{nm,qp}$ predstavlja ugao između dipolnih momenata prelaza \mathbf{d}_{nm} i \mathbf{d}_{qp} . Odavde sledi da je

$$\gamma_{ij,ij} = \gamma_{ij}. \quad (5.53)$$

Koristeći izraz (5.50), kao i izraze (5.52), (5.51) i (5.53), možemo izračunati članove u master jednačinama koji potiču od spontane emisije $(\Lambda\rho)_{ij}$. Daćemo primer izračunavanja za jedan član, ostali se dobijaju analogno.

Ukoliko posmatramo V konfiguraciju, doprinos jednačini (5.2) koji potiče od spontane emisije je dat sa

$$\begin{aligned} \Lambda\rho &= -\frac{1}{2}(\gamma_{21}[\rho A_{22} + A_{22}\rho - 2\rho_{22}A_{11}] + \\ &+ \gamma_{31}[\rho A_{33} + A_{33}\rho - 2\rho_{33}A_{11}] + \\ &+ \gamma_{21,31}[\rho A_{23} + A_{23}\rho - 2\rho_{32}A_{11}]e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t} + \\ &+ \gamma_{21,31}[\rho A_{32} + A_{32}\rho - 2\rho_{23}A_{11}]e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Sada bismo članove $(\Lambda\rho)_{ij}$ jednostavno odredili iz izraza (5.54), na isti način kao što smo računali i članove koji odgovaraju interakciji atoma sa laserskim poljima $-i[H, \rho]_{ij}$. Za član $(\Lambda\rho)_{11}$ se dobija

$$(\Lambda\rho)_{11} = \gamma_{21}\rho_{22} + \gamma_{31}\rho_{33} + \gamma_{21,31}(\rho_{32}e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t} + \rho_{23}e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}). \quad (5.55)$$

Ostale članove dobijamo analogno, te u konačnom dolazimo do master jednačina za sve tri konfiguracije.

Master jednačine

Za V konfiguraciju master jednačine su sledeće:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} &= i\Omega_c^*\rho_{21} + i\Omega_p^*\rho_{31} - i\Omega_c\rho_{12} - i\Omega_p\rho_{13} + \gamma_{21}\rho_{22} + \gamma_{31}\rho_{33} + \\ &+ \gamma_{21,31}(\rho_{32}e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t} + \rho_{23}e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}), \\ \frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} &= i\Omega_c\rho_{21} - i\Omega_c^*\rho_{21} - \gamma_{21}\rho_{22} - \frac{1}{2}\gamma_{21,31}(\rho_{32}e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t} + \rho_{23}e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}), \\ \frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} &= i\Omega_c^*(\rho_{22} - \rho_{11}) + i\Omega_p^*\rho_{32} + (i\Delta_c - \frac{1}{2}\gamma_{21})\rho_{12} - \frac{1}{2}\gamma_{21,31}\rho_{13}e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}, \\ \frac{\partial\rho_{13}}{\partial t} &= i\Omega_p^*(\rho_{33} - \rho_{11}) + i\Omega_c^*\rho_{23} + (i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{31})\rho_{13} - \frac{1}{2}\gamma_{21,31}\rho_{12}e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t}, \\ \frac{\partial\rho_{23}}{\partial t} &= i\Omega_c\rho_{13} + i\Omega_p^*\rho_{21} + [i(\Delta_p - \Delta_c) - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{31})]\rho_{23} \\ &- \frac{1}{2}\gamma_{21,31}(\rho_{22} + \rho_{33})e^{i(\omega_{31}-\omega_{21})t}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

za lestvičastu konfiguraciju:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= i\Omega_p^* \rho_{21} - i\Omega_p \rho_{12} + \gamma_{21} \rho_{22}, \\
\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= i\Omega_p \rho_{12} + i\Omega_c^* \rho_{32} - i\Omega_p^* \rho_{21} - i\Omega_c \rho_{23} + \gamma_{32} \rho_{33} - \gamma_{21} \rho_{22}, \\
\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} &= i\Omega_p^* (\rho_{22} - \rho_{11}) - i\Omega_c \rho_{13} + (i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{21}) \rho_{12} + \gamma_{21,32} \rho_{23} e^{i(\omega_{32} - \omega_{21})t}, \\
\frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} &= i\Omega_p^* \rho_{23} - i\Omega_c^* \rho_{12} + [i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}\gamma_{32}] \rho_{13}, \\
\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} &= i\Omega_c (\rho_{33} - \rho_{22}) + i\Omega_p \rho_{13} + [i\Delta_c - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{32})] \rho_{23}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

i za Λ konfiguraciju:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= i\Omega_p^* \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{13} + \gamma_{31} \rho_{33}, \\
\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= i\Omega_c^* \rho_{32} - i\Omega_c \rho_{23} + \gamma_{32} \rho_{33}, \\
\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} &= i\Omega_p^* \rho_{32} - i\Omega_c \rho_{13} + i(\Delta_p - \Delta_c) \rho_{12} + \gamma_{31,32} \rho_{33} e^{i(\omega_{32} - \omega_{31})t}, \\
\frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} &= i\Omega_p^* (\rho_{33} - \rho_{11}) - i\Omega_c^* \rho_{12} + [i\Delta_p - \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32})] \rho_{13}, \\
\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} &= i\Omega_c^* (\rho_{33} - \rho_{22}) - i\Omega_p^* \rho_{21} + [i\Delta_c - \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32})] \rho_{23}.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

5.1.3 Rešavanje master jednačina

Sledeći korak je rešavanje master jednačina, sa ciljem da dobijemo matrične elemente matrice gustine koji su nam od interesa. To su oni elementi koji odgovaraju prelazu koji izaziva sondirajuće lasersko polje. Odnosno, to su elementi ρ_{13} , ρ_{12} i ρ_{13} za V, lestvičastu i Λ konfiguraciju, respektivno. Da bi rešili master jednačine, iskoristićemo dve prikladne aproksimacije.

Najpre, pretpostavićemo da se sistem nalazi u stacionarnom stanju. Stoga, svi vremenski izvodi matričnih elemenata će biti jednaki nuli, odnosno

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{5.59}$$

Zatim, pretpostavićemo da je intezitet kontrolnog lasera mnogo veći od intenziteta sondirajućeg lasera, što, s obzirom na jednačine (5.39), ima posledicu da će ovaj odnos važiti i za odgovarajuće Rabijeve frekvence, tj.

$$\Omega_p \ll \Omega_c. \tag{5.60}$$

Usled ovoga, sondirajuće lasersko polje možemo tretirati kao perturbaciju, te matrične elemente ρ_{ij} dobiti u obliku reda koristeći

$$\Omega_p \rightarrow \lambda \Omega_p, \quad (5.61)$$

na sledeći način:

$$\rho_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{ij}^{(n)}, \quad (5.62)$$

gde $\rho_{ij}^{(n)}$ predstavlja n -ti član u razvoju ρ_{ij} u red po λ . Zapazimo da u ovom slučaju nulti članovi razvoja ρ_{ij} predstavljaju početne uslove sistema, pre nego što on stupi u interakciju sa laserskim poljima. Smatraćemo da su za sve tri konfiguracije u početnom trenutku svi elektroni u stanju $|1\rangle$, odnosno

$$\rho_{11}^{(0)} = 1, \quad \rho_{12}^{(0)} = \rho_{13}^{(0)} = \rho_{23}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = \rho_{33}^{(0)} = 0. \quad (5.63)$$

Rešenja uz odsustvo SGK efekta

S obzirom na to da najpre posmatramo sistem u odsustvu efekta SGK, članove u master jednačinama (5.56), (5.57) i (5.58) koji odgovaraju ovom efektu ćemo smatrati jednakim nuli (usred usrednjavanja po vremenu). Eksplicitno, za V konfiguraciju, ovaj uslov se zapisuje kao

$$\overline{e^{i(\omega_{21}-\omega_{31})t}} = 0, \quad (5.64)$$

s obzirom na to da ovaj član brzo fluktuiru oko nule. Dalja procedura podrazumeva razvoj matričnih elemenata u master jednačinama u red, zatim razdvajanje svake od dobijenih jednačina na sistem od n jednačina za svaki stepen λ ponaosob, te njihovo rešavanje do zahtevanog reda. U ovom radu ćemo se ograničiti na dobijanje matričnih elemenata ρ_{ij} do prvog reda po λ .

Prikažaćemo postupak razvijanja u red za prvu master jednačinu iz sistema (5.56) za V konfiguraciju. Ostale jednačine se razvijaju analogno. Dakle razvoj prve master jednačine (odnosno matričnih elemenata u njoj) za V konfiguraciju daje

$$\begin{aligned} 0 &= i\Omega_c^* \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{21}^{(n)} + i\Omega_p^* \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{31}^{(n)} - i\Omega_c \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{12}^{(n)} - i\Omega_p \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{13}^{(n)} \\ &+ \gamma_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{22}^{(n)} + \gamma_{31} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{33}^{(n)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(i\Omega_c^* \rho_{21}^{(n)} - i\Omega_c \rho_{12}^{(n)} + \gamma_{21} \rho_{22}^{(n)} + \gamma_{31} \rho_{33}^{(n)} \right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \left(i\Omega_p^* \rho_{31}^{(n)} - i\Omega_p \rho_{13}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Odavde za n -ti red po λ mora važiti

$$i\Omega_c^* \rho_{21}^{(n+1)} - i\Omega_c \rho_{12}^{(n+1)} + \gamma_{21} \rho_{22}^{(n+1)} + \gamma_{31} \rho_{33}^{(n+1)} + i\Omega_p^* \rho_{31}^{(n)} - i\Omega_p \rho_{13}^{(n)} = 0, \quad (5.66)$$

što za $n = 0$ daje

$$i\Omega_c^* \rho_{21}^{(1)} - i\Omega_c \rho_{12}^{(1)} + \gamma_{21} \rho_{22}^{(1)} + \gamma_{31} \rho_{33}^{(1)} + i\Omega_p^* \rho_{31}^{(0)} - i\Omega_p \rho_{13}^{(0)} = 0. \quad (5.67)$$

Imajući u vidu početne uslove (5.63), dobijamo sledeću jednačinu

$$i\Omega_c^* \rho_{21}^{(1)} - i\Omega_c \rho_{12}^{(1)} + \gamma_{21} \rho_{22}^{(1)} + \gamma_{31} \rho_{33}^{(1)} = 0. \quad (5.68)$$

Na analogan način se razvijaju u red i preostale master jednačine (5.56). Sistem koji ovim dobijamo je sledeći:

$$\begin{aligned} i\Omega_c^* \rho_{21}^{(1)} - i\Omega_c \rho_{12}^{(1)} + \gamma_{21} \rho_{22}^{(1)} + \gamma_{31} \rho_{33}^{(1)} &= 0, \\ i\Omega_c \rho_{12}^{(1)} - i\Omega_c^* \rho_{21}^{(1)} - \gamma_{21} \rho_{22}^{(1)} &= 0, \\ i\Omega_c^* (\rho_{22}^{(1)} - \rho_{11}^{(1)}) + A \rho_{12}^{(1)} &= 0, \\ i\Omega_c^* \rho_{23}^{(1)} + B \rho_{13}^{(1)} &= i\Omega_p^*, \\ i\Omega_c \rho_{13}^{(1)} + C \rho_{23}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.69)$$

pri čemu smo uveli oznake

$$\begin{aligned} A &= i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{21}, \\ B &= i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{31}, \\ C &= i(\Delta_p - \Delta_c) - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{31}). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Dobijeni sistem jednačina (5.69) lako rešavamo, te za traženi matricni element $\lambda_{(13)}^{(1)}$ u prvom redu dobijamo sledeći izraz:

$$\rho_{13}^{(1)} = \frac{i\Omega_p^*}{\frac{|\Omega_c|^2}{C} + B} = \frac{i\Omega_p^*}{\frac{|\Omega_c|^2}{i(\Delta_p - \Delta_c) - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{31})} + i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{31}}. \quad (5.71)$$

Analognom procedurom dobijamo i matricni element ρ_{12} u prvom redu po λ za lestvičastu konfiguraciju

$$\rho_{12}^{(1)} = \frac{i\Omega_p^*}{\frac{|\Omega_c|^2}{i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}\gamma_{32}} + i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{21}}, \quad (5.72)$$

kao i ρ_{13} u prvom redu po λ za Λ konfiguraciju

$$\rho_{13}^{(1)} = \frac{i\Omega_p^*}{\frac{|\Omega_c|^2}{i(\Delta_p - \Delta_c)} + i\Delta_p - \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32})}. \quad (5.73)$$

Na dalje ćemo pretpostaviti da su Rabijeve frekvence Ω_c i Ω_p realne veličine (u okviru razmatranja bez SGK efekta), te traženi matrice elementi (5.71), (5.72) i (5.73) dobijaju sledeći oblik za V konfiguraciju:

$$\rho_{13}^{(1)} = \frac{i\Omega_p}{\frac{\Omega_c^2}{i(\Delta_p - \Delta_c) - \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{31})} + i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{31}}, \quad (5.74)$$

za lestvičastu konfiguraciju:

$$\rho_{12}^{(1)} = \frac{i\Omega_p}{\frac{\Omega_c^2}{i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}\gamma_{32}} + i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{21}} \quad (5.75)$$

i za Λ konfiguraciju:

$$\rho_{13}^{(1)} = \frac{i\Omega_p}{\frac{\Omega_c^2}{i(\Delta_p - \Delta_c)} + i\Delta_p - \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32})}. \quad (5.76)$$

Rešenja uz prisustvo SGK efekta

Potražimo sada relevantne matrice elemente u slučaju kada je prisutna ekvidistantnost energijskih nivoa ili degeneracija (kvazidegeneracija). Tada eksponencijalni faktori u master jednačinama (5.56), (5.57) i (5.58) usrednjeni po vremenu daju jedinicu. U konkretnom slučaju za V konfiguraciju, što smo zapisali i kada smo razmatrali rešenja u odsustvu SGK efekta, je

$$\overline{e^{i(\omega_{21} - \omega_{31})t}} = 1. \quad (5.77)$$

Analogno i odgovarajući eksponencijalni članovi za lestvičastu i Λ konfiguraciju usrednjeni po vremenu daju jedinicu. Ovo je stoga što su sada odgovarajuće frekvence prelaza identične ili gotovo identične, te se eksponencijalni članovi vrlo sporo menjaju sa vremenom, nasuprot brzom fluktuiranju u slučaju različitih frekvenci odgovarajućih prelaza.

Sada rešavamo master jednačine uz prisustvo SGK efekta. U ovom slučaju nećemo pretpostavljati da su Rabijeve frekvence kontrolnog i sondirajućeg polja realne veličine, već ćemo ih smatrati kompleksnim. Predstavićemo ih na sledeći način:

$$\Omega_c = g_c e^{-i\phi_c} \quad (5.78)$$

i

$$\Omega_p = g_p e^{-i\phi_p}, \quad (5.79)$$

gde su g_c , g_p , ϕ_c i ϕ_p realne veličine. Usled ovoga, uvešćemo "nove" matrične elemente, σ_{ij} , tj. sledeće smene za V konfiguraciju:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \rho_{ii}, \\ \sigma_{12} &= \rho_{12} e^{-i\phi_c}, \\ \sigma_{13} &= \rho_{13} e^{-i\phi_p}, \\ \sigma_{23} &= \rho_{23} e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

za lestvičastu konfiguraciju:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \rho_{ii}, \\ \sigma_{12} &= \rho_{12} e^{-i\phi_p}, \\ \sigma_{13} &= \rho_{13} e^{-i(\phi_p + \phi_c)}, \\ \sigma_{23} &= \rho_{23} e^{-i\phi_c} \end{aligned} \quad (5.81)$$

i za Λ konfiguraciju:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \rho_{ii}, \\ \sigma_{12} &= \rho_{12} e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \\ \sigma_{13} &= \rho_{13} e^{-i\phi_p}, \\ \sigma_{23} &= \rho_{23} e^{-i\phi_c}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

pri čemu posledično važe relacije

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^* \quad (5.83)$$

i

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 1. \quad (5.84)$$

Sada primenjujemo "pravila transformacije" matričnih elemenata (5.80), (5.81) i (5.82) na master jednačine (5.56), (5.57) i (5.58), respektivno, te dolazimo

do master jednačina za nove matricele elemente za V konfiguraciju

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= ig_c \sigma_{21} + ig_p \sigma_{31} - ig_c \sigma_{12} - ig_p \sigma_{13} + \gamma_{21} \sigma_{22} + \gamma_{31} \sigma_{33} + \\
&+ \gamma_{21,31} (\sigma_{32} e^{-i(\phi_p - \phi_c)} + \sigma_{23} e^{i(\phi_p - \phi_c)}), \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= ig_c \sigma_{21} - \sigma_{21} - \gamma_{21} \sigma_{22} - \frac{1}{2} \gamma_{21,31} (\sigma_{32} e^{-i(\phi_p - \phi_c)} + \sigma_{23} e^{i(\phi_p - \phi_c)}), \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= ig_c (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + ig_p \sigma_{32} + (i\Delta_c - \frac{1}{2} \gamma_{21}) \sigma_{12} - \frac{1}{2} \gamma_{21,31} \sigma_{13} e^{i(\phi_p - \phi_c)}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= ig_p (\sigma_{33} - \sigma_{11}) + ig_c \sigma_{23} + (i\Delta_p - \frac{1}{2} \gamma_{31}) \sigma_{13} - \frac{1}{2} \gamma_{21,31} \sigma_{12} e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \\
\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= ig_c \sigma_{13} + ig_p \sigma_{21} + [i(\Delta_p - \Delta_c) - \frac{1}{2} (\gamma_{21} + \gamma_{31})] \sigma_{23} \\
&- \frac{1}{2} \gamma_{21,31} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \tag{5.85}
\end{aligned}$$

za lestvičastu konfiguraciju:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= ig_p \sigma_{21} - ig_p \sigma_{12} + \gamma_{21} \sigma_{22}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= ig_p \sigma_{12} + ig_c \sigma_{32} - ig_p \sigma_{21} - ig_c \sigma_{23} + \gamma_{32} \sigma_{33} - \gamma_{21} \sigma_{22}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= ig_p (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - ig_c \sigma_{13} + (i\Delta_p - \frac{1}{2} \gamma_{21}) \sigma_{12} + \gamma_{21,32} \sigma_{23} e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= ig_p \sigma_{23} - ig_c \sigma_{12} + [i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2} \gamma_{32}] \sigma_{13}, \\
\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= ig_c (\sigma_{33} - \sigma_{22}) + ig_p \sigma_{13} + [i\Delta_c - \frac{1}{2} (\gamma_{21} + \gamma_{32})] \sigma_{23} \tag{5.86}
\end{aligned}$$

i za Λ konfiguraciju:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= ig_p \sigma_{31} - ig_p \sigma_{13} + \gamma_{31} \sigma_{33}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= ig_c \sigma_{32} - ig_c \sigma_{23} + \gamma_{32} \sigma_{33}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= ig_p \sigma_{32} - ig_c \sigma_{13} + i(\Delta_p - \Delta_c) \sigma_{12} + \gamma_{31,32} \sigma_{33} e^{-i(\phi_p - \phi_c)}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= ig_p (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - ig_c \sigma_{12} + [i\Delta_p - \frac{1}{2} (\gamma_{31} + \gamma_{32})] \sigma_{13}, \\
\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= ig_c (\sigma_{33} - \sigma_{22}) - ig_p \sigma_{21} + [i\Delta_c - \frac{1}{2} (\gamma_{31} + \gamma_{32})] \sigma_{23}, \tag{5.87}
\end{aligned}$$

pri čemu smo uzeli u obzir da usrednjeni eksponencijalni faktori daju jedinicu.

Istaknimo da je razlog za to što smo kod razmatranja u odsustvu SGK Rabijeve frekvence smatrali realnim veličinama, a kod razmatranja uz prisustvo SGK smatrali kompleksnim i uvodili nove matrične elemente, to što će rešenja master jednačina uz prisustvo SGK, u opštem slučaju, uvek sadržati i faze Rabijevih frekvenci (ϕ_c i ϕ_p), koje nikako ne možemo potpuno izgubiti uvođenjem nekakvih smena. Jedino se mogu master jednačine i njihova rešenja pojednostaviti u određenoj meri, tako da se ove faze javljaju isključivo zajedno u obliku razlike ili zbira, kao i u samim jednačinama (5.85), (5.86) i (5.87). Kod master jednačina (5.56), (5.57) i (5.58) i njihovih rešenja, uvođenjem smena (5.80), (5.81) i (5.82) se faze Rabijevih frekvenci potpuno gube, ostaju samo njihove "amplitude", g_c i g_p . Ovo je upravo ekvivalentno pretpostavci da su Rabijeve frekvence realne veličine.

Sada ćemo pristupiti rešavanju master jednačina (5.85), (5.86) i (5.87) u stacionarnom stanju, za $g_p \ll g_c$, u prvom redu po g_p , potpuno analogno slučaju u odsustvu SGK efekta. Takođe ćemo smatrati da vaze početni uslovi (5.63) (rešenja u nultom redu po g_p), što uz pravila transformacije (5.80), (5.81) i (5.82), daje početne uslove za nove matrične elemente

$$\sigma_{11}^{(0)} = 1, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0, \quad (5.88)$$

koji važe za sve tri konfiguracije. Od interesa su nam, dakle, matrični elementi vezani za prelaz indukovani sondirajućim poljem, odnosno σ_{13} za V konfiguraciju, σ_{12} za lestvičastu konfiguraciju i σ_{13} za Λ konfiguraciju. Rešavanje master jednačina (5.85), (5.86) i (5.87) je zahtevniji posao zbog dodatnih SGK članova u odnosu na (5.56), (5.57) i (5.58), ali je procedura potpuno analogna onoj za slučaj odsustva SGK efekta, te ćemo ovde samo navesti dobijena rešenja relevantnih matričnih elemenata (u prvom redu po g_p). Dobija se

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{ig_p}{\frac{g_c^2}{i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}\gamma_{32}} + i\Delta_p - \frac{1}{2}\gamma_{21}} \quad (5.89)$$

za lestvičastu konfiguraciju i

$$\sigma_{13}^{(1)} = \frac{ig_p}{\frac{g_c^2}{i(\Delta_p - \Delta_c)} + i\Delta_p - \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32})} \quad (5.90)$$

za Λ konfiguraciju. Za V konfiguraciju nije dato analitičko rešenje u ovom slučaju, jer bi dobijeni rezultat bio izuzetno nepregledan, te stoga ne bi ni bio naročito svrsishodan za predstavljanje.

Primetimo da su rešenja uz prisustvo SGK (5.89) i (5.90) za lestvičastu i Λ konfiguraciju, respektivno, potpuno identična onom u odsustvu SGK (5.89) i (5.76) (svode se na potpuno ista rešenja uz uvođenje smena (5.81) i (5.82), ili uz pretpostavku o realnim Rabijevim frekvencama Ω_c i Ω_p). Dakle, prisustvo SGK u prvom redu uopšte ne utiče na odgovarajuće matrice elemente kod lestvičaste i Λ konfiguracije, te SGK uopšte ne modifikuje apsorpcioni i disperzioni profil, samim tim nema nikakvog efekta na EIT kod lestvičastog i Λ sistema. Napomenimo da ovo važi za razmatrani slučaj početnih uslova (5.88). U najopštijem izrazu za $\sigma_{12}^{(1)}$ kod lestvičaste i $\sigma_{13}^{(1)}$ kod Λ konfiguracije (za proizvoljne početne uslove) se zapravo pojavljuju SGK članovi [6, 12]. Međutim, za konkretne početne uslove po kojima je u početnom vremenskom trenutku celokupna populacija elektrona u osnovnom stanju $|1\rangle$, SGK članovi se gube i ovaj efekat se ne manifestuje. Manifestovanje SGK na EIT se može postići dodatnim nekoherentnim pumpanjem ili drugačijom inicijalnom preparacijom datog atoma [6, 12]. Istaknimo još jednom da se ovaj pasus odnosi isključivo na slučaj Rabijeve frekvence kontrolnog polja mnogo veće od Rabijeve frekvence sondirajućeg polja (odnosno, $g_c \gg g_p$). Kada su ove dve frekvence uporedive, uticaj SGK na EIT je uočljiv za određene vrednosti parametara, što će i biti demonstrirano u glavi 6. Pomenuti rezultati (u slučaju $g_p \sim g_c$) su dobijeni numerički.

Glava 6

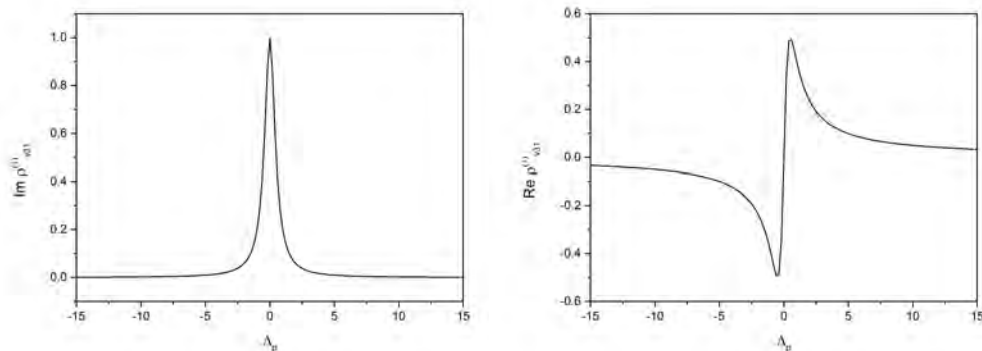
Rezultati

6.1 Elektromagnetno indukovana transparentnost

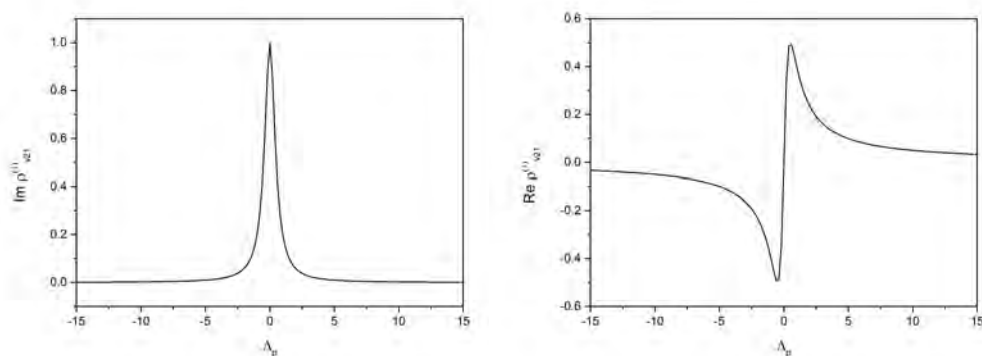
6.1.1 Interakcija sa sondirajućim poljem

Najpre ćemo predstaviti rezultate, tj. realne i imaginarne delove relevantnih matričnih elemenata (5.74), (5.75) i (5.76) u odsustvu SGK efekta, kada je kontrolno polje isključeno, tj. $\Omega_c = 0$ (podsećamo da smo u ovom slučaju pretpostavili realne Rabijeve frekvence). Ovde očekujemo da će imaginarni delovi matričnih elemenata imati Lorencov profil sa centrom na nultom detjuningu Δ_p , dok za realne delove očekujemo pozitivan nagib na rezonantnoj frekvenci (nultom detjuningu), koji postepeno menja znak. Odnosno, zavisnosti moraju biti takve kao da jednostavno razmatramo prelaz između dva energijska nivoa, koji skeniramo jednim laserskim poljem. Pik apsorpcije je tada na rezonantnoj frekvenci.

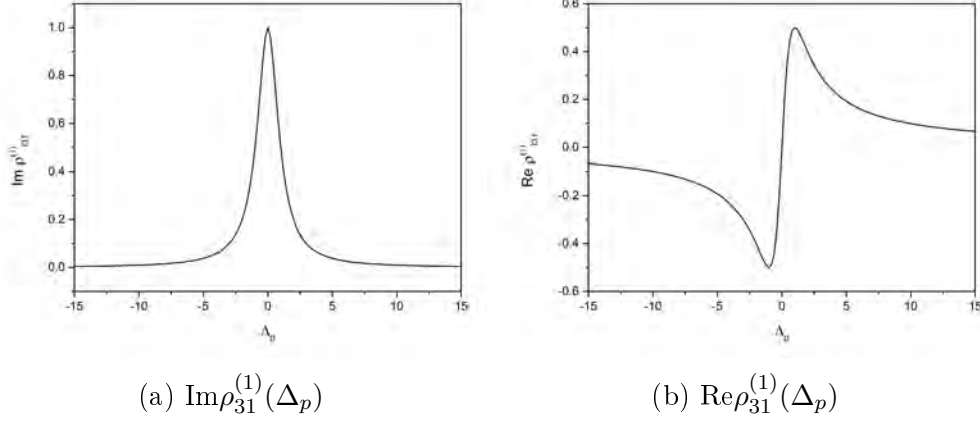
Napominjemo da su rezultati dati ne za matrične elemente (5.74), (5.75) i (5.76), već za njihove konjugovane, tj. $\rho_{31}^{(1)}$, $\rho_{21}^{(1)}$ i $\rho_{31}^{(1)}$, respektivno. Ovo je stoga što realni i imaginarni delovi linearne susceptibilnosti $\chi^{(1)}$ zavise upravo od ovih matričnih elemenata. Dobijeni rezultati su prikazani na graficima na slikama 6.1a, 6.1b, 6.2a, 6.2b, 6.3a i 6.3b i slažu se sa očekivanim.

(a) $\text{Im} \rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$ (b) $\text{Re} \rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$

Slika 6.1: Zavisnost $\text{Im} \rho_{31}^{(1)}$ i $\text{Re} \rho_{31}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju, pri isključenom kontrolnom polju ($\Omega_c = 0$). Zavisnost je data u proizvoljnim jedinicama.

(a) $\text{Im} \rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$ (b) $\text{Re} \rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$

Slika 6.2: Zavisnost $\text{Im} \rho_{21}^{(1)}$ i $\text{Re} \rho_{21}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za le-stvičastu konfiguraciju, pri isključenom kontrolnom polju ($\Omega_c = 0$). Zavisnost je data u proizvoljnim jedinicama.

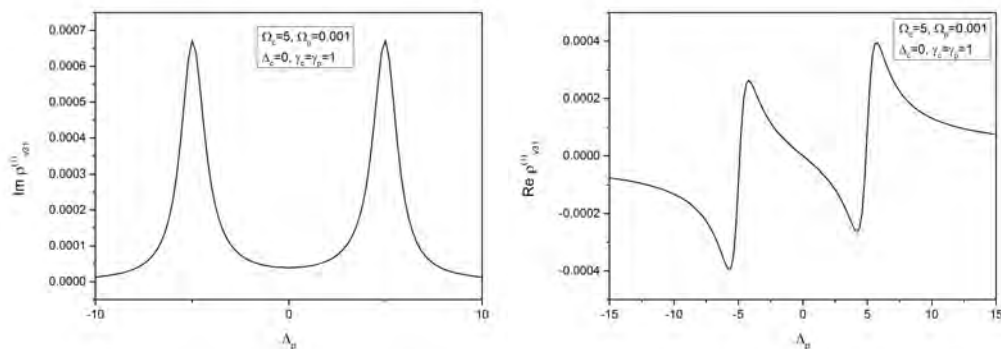


Slika 6.3: Zavisnost $\text{Im}\rho_{31}^{(1)}$ i $\text{Re}\rho_{31}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za Λ konfiguraciju, pri isključenom kontrolnom polju ($\Omega_c = 0$). Zavisnost je data u proizvoljnim jedinicama.

6.1.2 Interakcija sa sondirajućim i kontrolnim poljem

Sada želimo da ispitamo kako uključivanje kontrolnog polja ($\Omega_c \neq 0$) utiče na zavisnosti apsorpcije i prelamanja sondirajućeg polja. Zavisnosti odgovarajućih matičnih elemenata od vrednosti detjuninga kontrolnog polja su prikazane na graficima na slikama 6.4a, 6.4b, 6.5a, 6.5b, 6.6a i 6.6b. Odabrane vrednosti parametara su prikazane na samim graficima na slikama. Bitno je napomenuti da su ovi grafici dobijeni za slučaj nultog detjuninga kontrolnog polja ($\Delta_c = 0$). Takođe, uveli smo oznake γ_c i γ_p za koeficijente spontane emisije koji odgovaraju prelazima indukovanim kontrolnim i sondirajućim poljem, respektivno. Ovo je radi univerzalnog označavanja koeficijenata spontane emisije za sve tri konfiguracije na graficima.

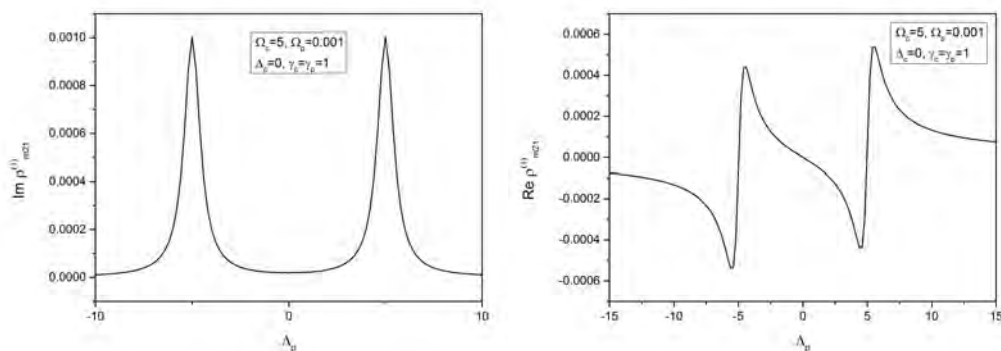
Zapažamo da uključivanje kontrolnog polja dovodi do cepanja centralnog apsorpcionog pika (imaginarni delovi matičnih elemenata) na dva ekvidistantna pika, a da se za nulti detjuning sondirajućeg polja sada javlja minimum apsorpcije. Ovo je upravo EIT efekat o kome smo govorili. Pomenuto zapažanje važi za sve tri konfiguracije, V, lestvičastu i Λ . Dakle, u atomu sa tri energijska nivoa i dva dipolno dozvoljena prelaza, kontrolnim laserskim poljem je moguće kontrolisati apsorpciju sondirajućeg laserskog polja i postići efekat EIT.



(a) $\text{Im}\rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$

(b) $\text{Re}\rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$

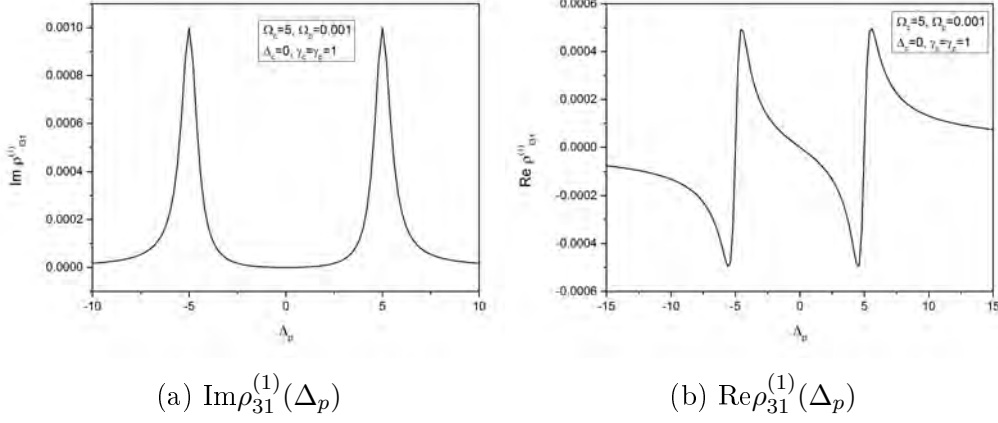
Slika 6.4: Zavisnost $\text{Im}\rho_{31}^{(1)}$ i $\text{Re}\rho_{31}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



(a) $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$

(b) $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$

Slika 6.5: Zavisnost $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}$ i $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za le-stvičastu konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



Slika 6.6: Zavisnost $\text{Im}\rho_{31}^{(1)}$ i $\text{Re}\rho_{31}^{(1)}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za Λ konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

6.1.3 Analiza preko obučenih stanja

U ovom delu ćemo pokazati kako se analizom obučenih stanja zaključuje da postoji jedno mračno stanje, preko koga se realizuje pojava EIT, kao što je već diskutovano u glavi 3. Ovo ćemo demonstrirati za rezultate prikazane na graficima na slikama 6.1a, 6.1b, 6.2a, 6.2b, 6.3a i 6.3b, što će reći da ćemo uzeti da su detjuninzi kontrolnog i sondirajućeg polja jednaki nuli: $\Delta_c = \Delta_p = 0$ (jer su pomenuti grafici dobijeni za nulti detjuning kontrolnog polja, a minimum apsorpcije se javlja na nultom detjuningu sondirajućeg polja). Uz pretpostavku da su Rabijeve frekvence kontrolnog i sondirajućeg polja realne veličine, uz koju smo i dobili rezultate prikazane na pomenutim slikama, hamiltonijani sistema atom + laserska polja za tri konfiguracije (5.40), (5.41) i (5.42) postaju

$$H_v = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_c & -\Omega_p \\ -\Omega_c & 0 & 0 \\ -\Omega_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

za V konfiguraciju,

$$H_m = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p & 0 \\ -\Omega_p & 0 & -\Omega_c \\ 0 & -\Omega_c & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

za lestvičastu konfiguraciju i

$$H_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Omega_p \\ 0 & 0 & -\Omega_c \\ -\Omega_p & -\Omega_c & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

za Λ konfiguraciju. Rešavanjem svojstvenih problema hamiltonijana datih sa (6.1), (6.2) i (6.3) dobijamo svojstvene vrednosti λ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_p^2} = \pm \Omega, \quad (6.4)$$

za sve tri konfiguracije, gde smo uveli oznaku $\Omega = \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_p^2}$. Normirana svojstvena stanja su (sada je jasno zašto uvodimo oznake $|0\rangle$, $|+\rangle$ i $|-\rangle$ za svojstvena stanja)

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{\Omega_c}{\Omega}|1\rangle - \frac{\Omega_p}{\Omega}|3\rangle \\ |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|3\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|3\rangle \end{aligned} \quad (6.5)$$

za V konfiguraciju,

$$\begin{aligned} |0\rangle &= -\frac{\Omega_p}{\Omega}|2\rangle + \frac{\Omega_c}{\Omega}|3\rangle \\ |+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|3\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|3\rangle \end{aligned} \quad (6.6)$$

za lestvičastu konfiguraciju i

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{\Omega_c}{\Omega}|1\rangle - \frac{\Omega_p}{\Omega}|2\rangle \\ |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_p}{\Omega}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega_c}{\Omega}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle \end{aligned} \quad (6.7)$$

za Λ konfiguraciju.

Ukoliko izračunamo zbir amplituda prelaza iz stanja $|0\rangle$ u $|+\rangle$ i iz $|0\rangle$ u $|-\rangle$, za sve tri konfiguracije, dobićemo nulu:

$$\langle +|\mathbf{d}|0\rangle + \langle -|\mathbf{d}|0\rangle = 0. \quad (6.8)$$

Dakle, za sve tri konfiguracije se, za slučaj nultog detjuninga kontrolnog polja, na nultom detjuningu sondirajućeg polja, javlja mračno stanje označeno

sa $|0\rangle$, koje je dekuplovano od preostalih svojstvenih stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$. EIT se realizuje upravo kroz postojanje ovog mračnog stanja.

Napišimo još na šta se svode obučena svojstvena stanja za slučaj $\Omega_p \ll \Omega_c$, koji smo i rešavali analitički, čime ćemo i zaključiti ovo razmatranje. Izrazi (6.5), (6.6) i (6.7) se tada svode na:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{\Omega_c}{\Omega} |1\rangle \\ |+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |3\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |3\rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

za V konfiguraciju,

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{\Omega_c}{\Omega} |3\rangle \\ |+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |2\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |2\rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

za lestvičastu konfiguraciju i

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{\Omega_c}{\Omega} |1\rangle \\ |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_c}{\Omega} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

za Λ konfiguraciju.

6.1.4 Ekstremumi i znaci izvoda

Razmatranja iz prethodnih paragrafa možemo dopuniti i potvrditi i analitičkim razmatranjima vezanim za traženje ekstremuma imaginarnog dela relevantnih matrice elemenata kao i znaka prvog izvoda realnog dela na nultom detjuningu. Započnimo ovo razmatranje slučajem isključenog kontrolnog polja ($\Omega_c = 0$). Prisetimo da sva tri matrice elementa (5.74), (5.75) i (5.76), za $\Omega_c = 0$, možemo zapisati u obliku

$$h = \frac{i\Omega_p}{i\Delta_p + R}, \quad (6.12)$$

pri čemu je realan parametar R za V konfiguraciju jednak

$$R = -\frac{1}{2}\gamma_c, \quad (6.13)$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$R = -\frac{1}{2}\gamma_p \quad (6.14)$$

i za Λ konfiguraciju

$$R = -\frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_p). \quad (6.15)$$

Potražimo sada imaginarni deo h . On je jednak

$$\text{Im}h = \frac{\Omega_p R}{\Delta_c^2 + R^2}, \quad (6.16)$$

dok je realni deo jednak

$$\text{Re}h = \frac{\Omega_p \Delta_p}{\Delta_c^2 + R^2}. \quad (6.17)$$

Prvi izvodi realnog i imaginarnog dela h su odavde jednaki

$$(\text{Im}h)' = \frac{-2\Omega_p R \Delta_p}{(\Delta_c^2 + R^2)^2}, \quad (6.18)$$

i

$$(\text{Re}h)' = \frac{\Omega_p (R^2 - \Delta_p^2)}{(\Delta_c^2 + R^2)^2}. \quad (6.19)$$

Iz (6.18) je očigledno da imaginarni deo h ima samo jedan ekstremum, i to je upravo maksimum uočen na graficima zavisnosti imaginarnih delova matricnih elemenata od detjuninga za slučaj isključenog kontrolnog polja (slike 6.1a, 6.2a i 6.3a). Drugi izvod realnog dela h u nuli je jednak

$$(\text{Re}h)'|_{\Delta_p=0} = \frac{\Omega_p}{R^2}, \quad (6.20)$$

i očigledno je veći od nule, tj. dokazali smo da je disperzija uvek anomalna oko nultog detjuninga za slučaj kada je kontrolno polje isključeno (automatski, tada nema EIT). Ovi zaključci očigledno važe za relevantne matricne elemente za sve tri konfiguracije.

Sada ćemo preći na slučaj uključenog kontrolnog polja, ali njegovog nultog detjuninga. Primitimo da sva tri matricna elementa (5.74), (5.75) i (5.76), za $\Delta_c = 0$, možemo zapisati u obliku

$$f = \frac{i\Omega_p}{\frac{\Omega_c^2}{i\Delta_p + R_1} + i\Delta_p + R_2}, \quad (6.21)$$

pri čemu su realni parametri R_1 i R_2 za V konfiguraciju jednaki

$$R_1 = -\frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_p), \quad R_2 = -\frac{1}{2}\gamma_c, \quad (6.22)$$

za lestvičastu konfiguraciju

$$R_1 = -\frac{1}{2}\gamma_c, \quad R_2 = -\frac{1}{2}\gamma_p \quad (6.23)$$

i za Λ konfiguraciju

$$R_1 = 0, \quad R_2 = -\frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_p). \quad (6.24)$$

Potražimo sada imaginarni deo f . Ispostavlja se da se on može napisati u sledećem obliku:

$$\text{Im}f = \frac{A\Delta_p^2 + B}{\Delta_p^4 + C\Delta_p^2 + D}, \quad (6.25)$$

gde su realni brojevi A , B , C i D dati sa

$$\begin{aligned} A &= \Omega_p(2R_1 + R_2), & B &= \Omega_p R_1(\Omega_c^2 + R_1 R_2), \\ C &= R_1^2 + R_2^2 - 2\Omega_c^2, & D &= (\Omega_c^2 + R_1 R_2)^2. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ukoliko sada potražimo prvi izvod izraza (6.25) po detjuningu sondirajućeg polja dobićemo sledeći izraz:

$$(\text{Im}f)' = \frac{2A\Delta_p(\Delta_p^4 + C\Delta_p^2 + D) - (A\Delta_p^2 + B)(4\Delta_p^3 + 2C\Delta_p)}{(\Delta_p^4 + C\Delta_p^2 + D)^2}, \quad (6.27)$$

što, uz zahtev da prvi izvod (6.25) bude jednak nuli, vodi do sledeće jednačine:

$$\Delta_p(2A\Delta_p^4 + 4B\Delta_p^2 - 2BC) = 0, \quad (6.28)$$

odnosno, uz uvođe nje $E = \frac{2B}{A}$ i $F = -\frac{BC}{A}$, do sledeće jednačine:

$$\Delta_p(\Delta_p^4 + E\Delta_p^2 + F) = 0. \quad (6.29)$$

Dakle, jedan ekstremum (minimum na graficima na slikama 6.4a, 6.5a i 6.6a) se dobija za $\Delta_{p1} = 0$, što smo sada pokazali i analitički. Na prvi pogled, deluje da postoje još 4 ekstremuma, i to za

$$\Delta_{p2,3,4,5} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-E \pm \sqrt{E^2 - 4F})}, \quad (6.30)$$

dok grafici sugerišu da postoje još dva. Međutim, nismo uzeli u obzir znake veličina E i F , odnosno da li su one veće ili manje od nule. Ukoliko proanaliziramo veličine E i F preko ranije uvedenih A , B , C , D , R_1 i R_2 , zaključujemo da važi $E \geq 0$ za sve tri konfiguracije, dok F može biti i manje i veće (i jednako) nuli. Međutim, kako detjuning Δ_p mora biti realna veličina, činjenica da je $E \geq 0$ nameće uslov na F : mora važiti da je $F > 0$ da bi postojali dodatni ekstremumi (sem $\Delta_{p1} = 0$). U protivnom, oni ne postoje (a tada se za $\Delta_p = 0$ dobija maksimum apsorpcije, a ne minimum). Ovo nije jedini uslov, već se i mora odabrati znak „-“ u potkorenom delu izraza (6.30) da bi detjuning bio realna veličina. Ovim smo dobili da, uz uslov da je $F < 0$, odakle se mogu dobiti eksplicitni izrazi koje moraju zadovoljavati parametri Ω_c , Ω_p , γ_c i γ_p da bi se javio prozor transparentnosti, odnosno EIT, postoje dva maksimuma određena izrazom

$$\Delta_{p2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-E + \sqrt{E^2 - 4F})}. \quad (6.31)$$

Sada ćemo dokazati i da je disperzija u slučaju EIT normalna, za razliku od situacije bez EIT, kada je ona anomalna. Iz izraza (6.21) dobijamo da se realni deo f može zapisati na sledeći način:

$$\text{Ref} = -\frac{\Omega_p \Delta_p (\Delta_p^2 + G)}{\Delta_p^4 + C \Delta_p^2 + D}, \quad (6.32)$$

gde je uvedena nova oznaka $G = -(R_1^2 - \Omega_c^2)$. Prvi izvod relacije (6.32) po Δ_p daje

$$(\text{Ref})' = \frac{-\Omega_p (3\Delta_p^2 + G)(\Delta_p^4 + C\Delta_p^2 + D) + \Omega_p \Delta_p^2 (\Delta_p + G)(4\Delta_p^2 + 2C)}{(\Delta_p^4 + C\Delta_p^2 + D)^2}. \quad (6.33)$$

Zanima nas znak prvog izvoda Ref u nuli, te za ovaj prvi izvod dobijamo

$$(\text{Ref})'|_{\Delta_p=0} = -\Omega_p \frac{G}{D}. \quad (6.34)$$

Analiziranjem izraza za veličine G i D dolazimo do zaključka da je znak prethodnog izraza negativan (normalna disperzija) kada je $G > 0$, što se svodi na zahtev da je

$$R_1^2 - \Omega_c^2 < 0. \quad (6.35)$$

Dakle, treba proveriti da li je nejednakost (6.35) ispunjena u slučaju postojanja EIT, za koje smo utvrdili uslove za pojavljivanje u prethodnom

razmatranju za $\text{Im}f$. Zahtev za pojavljivanje EIT je bio da je $F > 0$, što se može pokazati da se svodi na

$$R_1^2 + R_2^2 - \Omega_c^2 < 0, \quad (6.36)$$

odnosno

$$R_1^2 - \Omega_c^2 < -R_2^2. \quad (6.37)$$

Kako je očigledno da je (6.35) ispunjen uvek kada je ispunjen i (6.37), zaključujemo da je EIT neminovno praćena normalnom disperzijom, a nikada anomalnom.

Napomenimo samo da je slučaj Λ konfiguracije dosta jednostavniji za razmatranje, jer je ovde $R_1 = 0$, pa je i $F = 0$ (zato se ovaj slučaj mora razmatrati posebno). Međutim, ovo je velika olakšica, a ne poteškoća - analogni zaključci o uslovima za pojavljivanje EIT i normalne disperzije se ovde trivijalno izvode.

Na kraju, daćemo eksplicitan zapis imaginarnih i realnih delova relevantnih matrice elemenata za slučaj uključenog sondirajućeg polja, pri njegovom detjuningu različitom od nule. U ovom slučaju tri matrice elementa (5.74), (5.75) i (5.76) možemo zapisati na sledeći način

$$u = \frac{i\Omega_p}{\frac{\Omega_c^2}{i(\Delta_p \pm \Delta_c) + R_1} + i\Delta_p + R_2}, \quad (6.38)$$

pri čemu znak „-“ u izrazu (6.38) treba uzeti za V i Λ konfiguraciju, a „+“ za lestvičastu. Realni parametri R_1 i R_2 za sve tri konfiguracije su već definisani pri razmatranju uključenog kontrolnog polja sa nultim detjuningom, nekoliko paragrafa iznad (jednačine (6.22), (6.23) i (6.24)). Pokazuje se da se imaginarni delovi matrice elemenata mogu zapisati u sledećem obliku:

$\text{Im}u =$

$$\frac{\Omega_p[R_1((R_1 + R_2)\Delta_p \pm R_2\Delta_c) - (\Delta_p \pm \Delta_c)(\Omega_c^2 + R_1R_2 - \Delta_p(\Delta_p \pm \Delta_c))]}{[\Omega_c^2 + R_1R_2 - \Delta_p(\Delta_p \pm \Delta_c)]^2 + [(R_1 + R_2)\Delta_p \pm R_2\Delta_c]^2}, \quad (6.39)$$

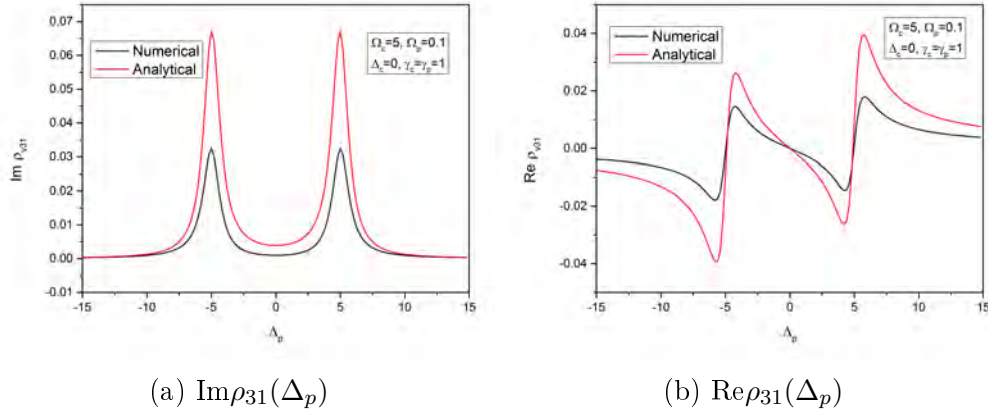
a realni u

$\text{Re}u =$

$$\frac{\Omega_p[R_1(\Omega_c^2 + R_1R_2 - \Delta_p(\Delta_p \pm \Delta_c)) + (\Delta_p \pm \Delta_c)R_1((R_1 + R_2)\Delta_p \pm R_2\Delta_c)]}{[\Omega_c^2 + R_1R_2 - \Delta_p(\Delta_p \pm \Delta_c)]^2 + [(R_1 + R_2)\Delta_p \pm R_2\Delta_c]^2}, \quad (6.40)$$

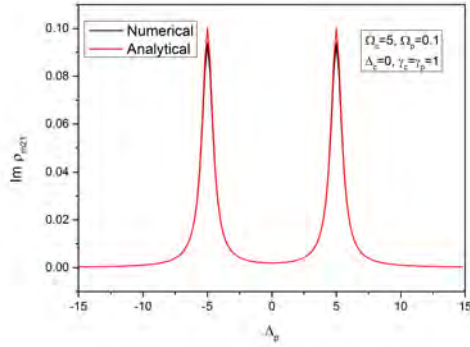
6.1.5 Poređenje numeričkih i analitičkih rezultata

U ovom delu ćemo uporediti numerička i analitička rešenja master jednačina (bez SGK) u prvom redu po Ω_p , da bi prikazali kada ima smisla koristiti aproksimativne izraze za matrične elemente (5.74), (5.75) i (5.76). Numerički rezultati su dobijeni primenom standardnih funkcija koje su već prisutne u samom programskom paketu koji smo koristili, te neće biti posebno diskutovan upotrebljeni kod. Prikazaćemo grafike zavisnosti imaginarnih i realnih delova odgovarajućih matričnih elemenata, za različite odnose Rabijevih frekvenci sondirajućeg i kontrolnog polja. Rezultati su prikazani na graficima na slikama 6.7a, 6.7b, 6.8a, 6.8b, 6.9a, 6.9b, 6.10a, 6.10b, 6.11a, 6.11b, 6.12a i 6.12b.

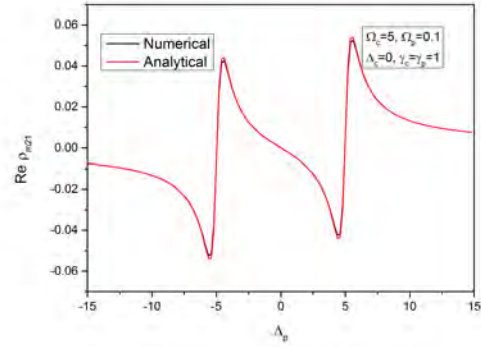


Slika 6.7: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{31}$ i $\text{Re}\rho_{31}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

Prikazali smo rezultate za slučaj kada je Rabijeva frekvenca sondirajućeg polja za red veličine manja od Rabijeve frekvence kontrolnog polja ($\Omega_p = 0.1$, $\Omega_c = 5$) - grafici na slikama 6.7a, 6.7b, 6.8a, 6.8b, 6.9a i 6.9b - i za slučaj kada su ove frekvence istog reda veličine ($\Omega_p = 1$, $\Omega_c = 5$) - grafici na slikama 6.10a, 6.10b, 6.11a, 6.11b, 6.12a i 6.12b. Vidimo da se u prvom slučaju rezultati za lestvičastu i Λ konfiguraciju prilično dobro poklapaju (za Ω_p više redova veličine manje od Ω_c razlika se ne može uočiti), dok se za V konfiguraciju rezultati značajno razlikuju. Ovakva razlika za V konfiguraciju dobija se za proizvoljan red veličine Ω_p u odnosu na Ω_c , te je zaključak da numeričko i analitičko rešenje jednostavno ne daju iste rezultate u ovom slučaju. Ono što je bitno, međutim, je da daju istu širinu prozora transparentnosti. Dakle, dobijena analitička rešenja su solidna aproksimacija sve do red

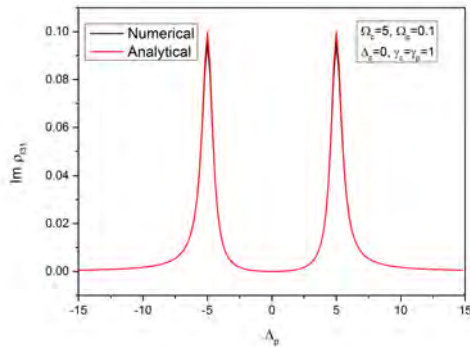


(a) $\text{Im}\rho_{21}(\Delta_p)$

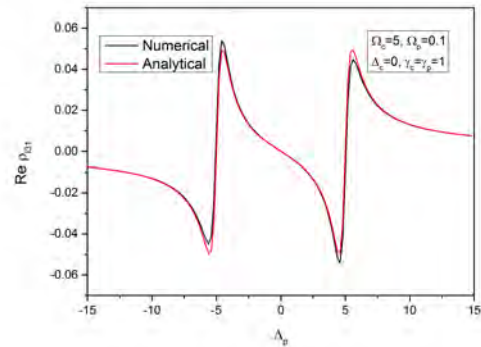


(b) $\text{Re}\rho_{21}(\Delta_p)$

Slika 6.8: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{21}$ i $\text{Re}\rho_{21}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za lestvičastu konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

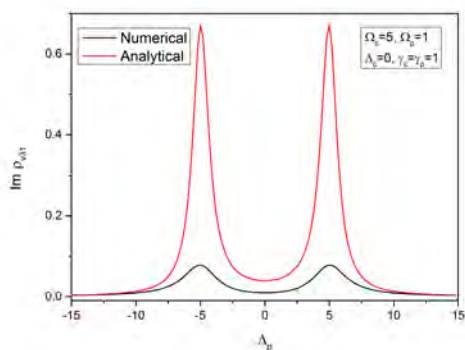


(a) $\text{Im}\rho_{31}(\Delta_p)$

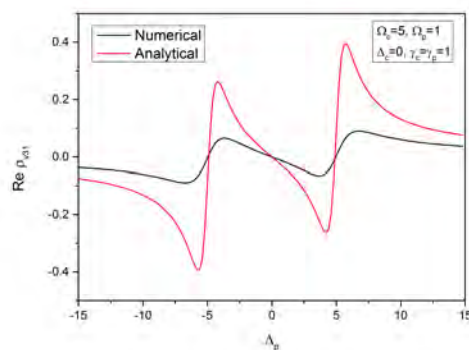


(b) $\text{Re}\rho_{31}(\Delta_p)$

Slika 6.9: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{31}$ i $\text{Re}\rho_{31}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za Λ konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

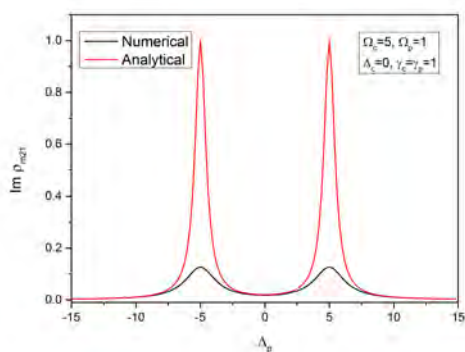


(a) $\text{Im}\rho_{31}(\Delta_p)$

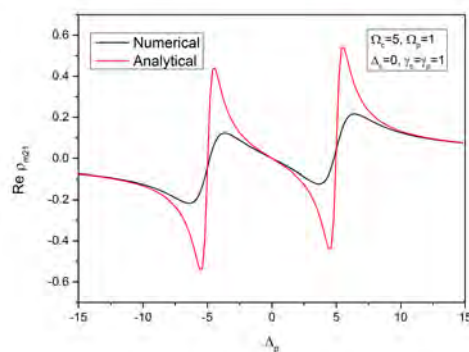


(b) $\text{Re}\rho_{31}(\Delta_p)$

Slika 6.10: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{31}$ i $\text{Re}\rho_{31}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

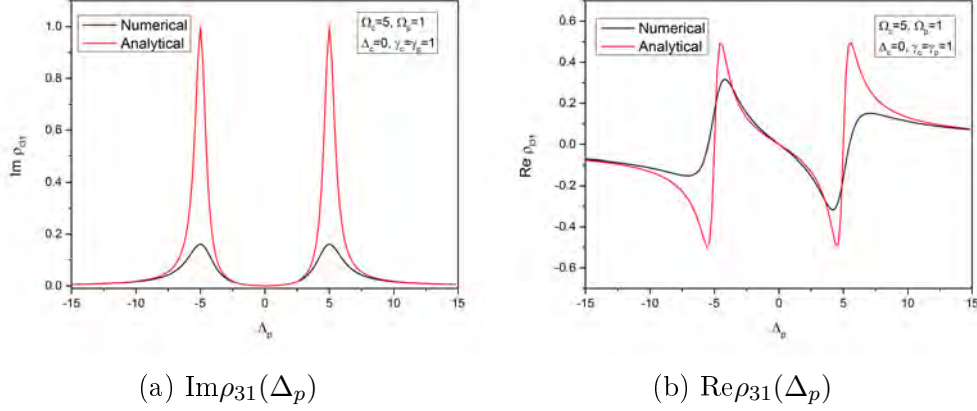


(a) $\text{Im}\rho_{21}(\Delta_p)$



(b) $\text{Re}\rho_{21}(\Delta_p)$

Slika 6.11: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{21}$ i $\text{Re}\rho_{21}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za lestvičastu konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



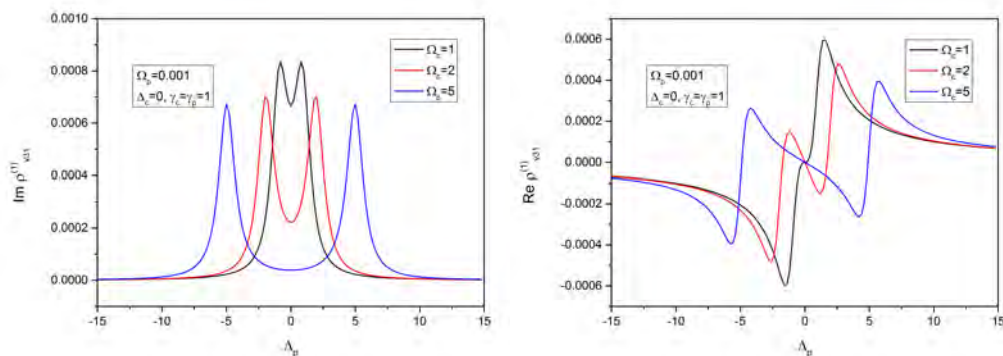
Slika 6.12: Poređenje numeričkog i analitičkog rezultata za zavisnost $\text{Im}\rho_{31}$ i $\text{Re}\rho_{31}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za Λ konfiguraciju. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

veliĉine manje Rabijeve frekvence sondirajućeg polja od Rabijeve frekvence kontrolnog polja, za lestviĉastu i Λ konfiguraciju, dok se za V konfiguraciju numerički i analitiĉki rezultati ne poklapaju. Kada je red veliĉine Rabijevih frekvenci isti, numerički i analitiĉki rezultati se dramatiĉno razlikuju, te su izrazi (5.74), (5.75) i (5.76) neprimenjivi.

6.1.6 Uticaj Rabijeve frekvence kontrolnog polja Ω_c na elektromagnetno indukovanu transparentnost

Sada ĉemo prikazati grafike zavisnosti relevantnih matriĉnih elemenata u funkciji detjuninga sondirajućeg polja, ali za razliĉite vrednosti Rabijeve frekvence kontrolnog polja. Rezultati su prikazani na graficima na slikama 6.13a, 6.13b, 6.14a, 6.14b, 6.15a i 6.15b.

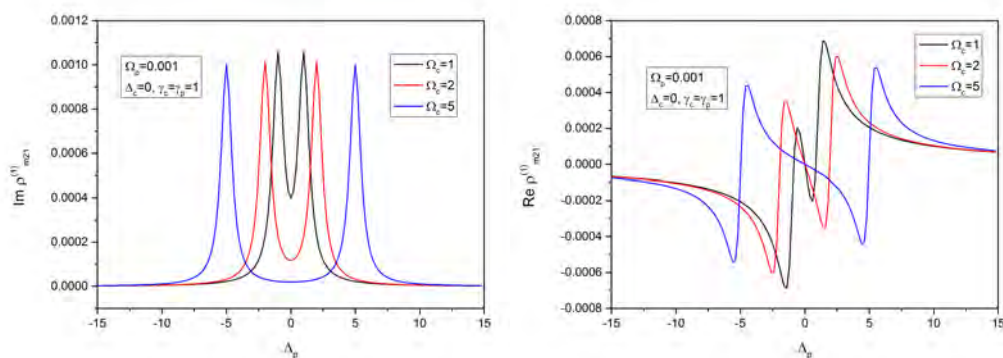
Na graficima zavisnosti imaginarnih delova matriĉnih elemenata od detjuninga sondirajućeg polja, slike 6.13a, 6.14a i 6.15a, najvaŹniji efekat koji se uoĉava je proširivanje prozora transparentnosti sa povećanjem Rabijeve frekvence kontrolnog polja. Zavisnosti relevantnih matriĉnih elemenata za V i lestviĉastu konfiguraciju pokazuje i varijacije poloŹaja ekstremuma - maksimumi apsorpcije rastu, minimumi opadaju, dok se kod Λ konfiguracije ovo ne uoĉava. Ŗto se tiĉe realnih delova matriĉnih elemenata, ĉije su zavisnosti od detjuninga sondirajućeg polja prikazane na graficima na slikama 6.13b, 6.14b i 6.15b, zapaŹamo da dolazi do proširenja oblasti oko rezonantne frekvence u kojoj je disperzija normalna. Na grafiku 6.13b se zapaŹa kako postepeno dolazi do prelaska anomalne u normalnu disperziju. I na ovim



(a) $\text{Im}\rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$

(b) $\text{Re}\rho_{31}^{(1)}(\Delta_p)$

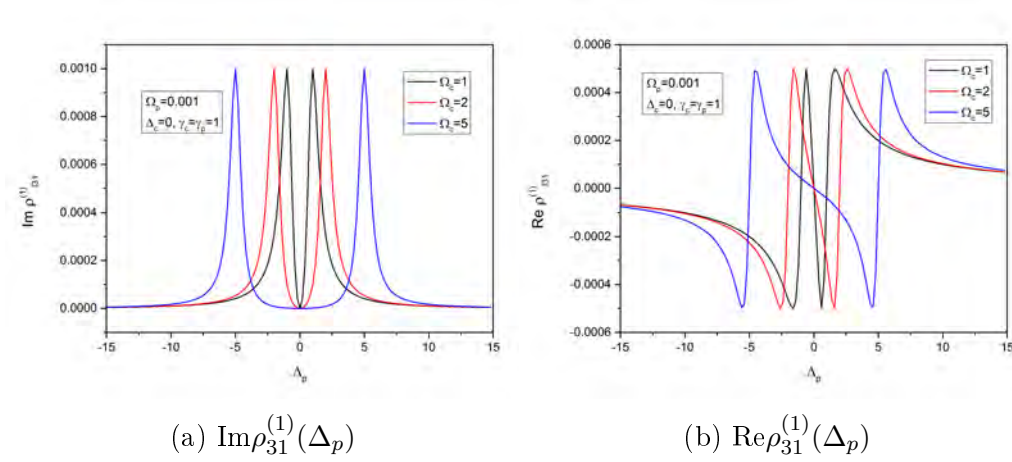
Slika 6.13: Zavisnost $\text{Im}(\rho_{31}^{(1)})$ i $\text{Re}(\rho_{31}^{(1)})$ od detjunga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju, za različite vrednosti Rabijeve frekvence kontrolnog polja Ω_c . Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



(a) $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$

(b) $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$

Slika 6.14: Zavisnost $\text{Im}(\rho_{21}^{(1)})$ i $\text{Re}(\rho_{21}^{(1)})$ od detjunga sondirajućeg polja Δ_p za lestvičastu konfiguraciju, za različite vrednosti Rabijeve frekvence kontrolnog polja Ω_c . Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



Slika 6.15: Zavisnost $\text{Im}(\rho_{31}^{(1)})$ i $\text{Re}(\rho_{31}^{(1)})$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za Λ konfiguraciju, za različite vrednosti Rabijeve frekvence kontrolnog polja Ω_c . Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

graficima se uočava porast maksimuma i opadanje minimuma, za V i le-stvičastu konfiguraciju, dok kod Λ konfiguracije nema promene vrednosti ekstremuma.

6.2 Uticaj spontano generisane koherencije na elektromagnetno indukovanu transparentnost

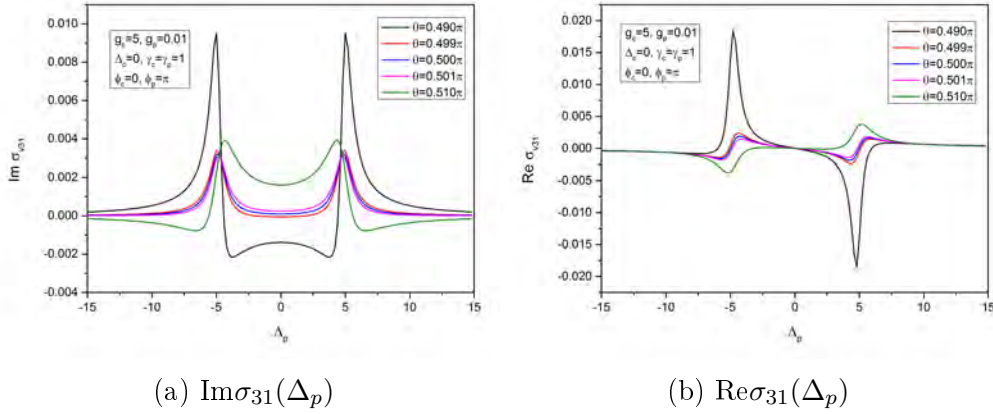
Sada ćemo predstaviti rezultate koji pokazuju kako prisustvo SGK efekta utiče na EIT. Prisustvo SGK se ogleda u postojanju dodatnih članova u master jednačinama, koji sadrže faktor

$$\gamma_{cp} = \sqrt{\gamma_c \gamma_p} \cos(\theta), \quad (6.41)$$

gde smo ponovo uveli oznake γ_c i γ_p za koeficijente spontane emisije koji odgovaraju prelazima indukovanim kontrolnim i sondirajućim poljem, respektivno. Ponovimo da je θ ugao između dipolnih momenata prelaza, sada označenih sa \mathbf{d}_c i \mathbf{d}_p . Upravo promenom ovog ugla se kontroliše SGK efekat. Očigledno, kada je $\theta = \frac{\pi}{2}$, članovi koji potiču od SGK se gube, te se SGK ne uočava. Za sličaj $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, za određene vrednosti ostalih parametara, uticaj SGK na EIT je evidentan, što je prikazano na graficima u ovom potpoglavlju.

6.2.1 Slučaj $g_p \ll g_c$

Najpre ćemo ispitati uticaj SGK na EIT u slučaju Rabijeve frekvence sondirajućeg polja mnogo manje od Rabijeve frekvence kontrolnog polja ($g_p \ll g_c$). Rezultati koje ćemo ovde predstaviti dobijeni su numeričkim rešavanjem master jednačina.



Slika 6.16: Zavisnost $\text{Im}\sigma_{31}$ i $\text{Re}\sigma_{31}$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p za V konfiguraciju, za različite vrednosti ugla θ između dipolnih momenata prelaza indukovanih kontrolnim i sondirajućim poljem, \mathbf{d}_c i \mathbf{d}_p , respektivno. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

Lestvičasta i Λ konfiguracija

Zavisnosti imaginarnih i realnih delova relevantnih matričnih elemenata od detjuninga sondirajućeg polja za lestvičastu i Λ konfiguraciju demonstriraju da, u slučaju male Rabijeve frekvence sondirajućeg polja ($g_p \ll g_c$), SGK efekat uopšte ne utiče na EIT. Poklapanje ovih funkcija za različite vrednosti ugla θ je toliko izraženo da je vrlo mala prisutna razlika potpuno neuočljiva na graficima. Zbog ovoga zavisnosti imaginarnih i realnih delova relevantnih matričnih elemenata za lestvičastu i Λ konfiguraciju nisu prikazani. One su u skladu sa analitičkim rezultatima u prvom redu po g_p dobijenim u prethodnoj glavi (5.89 i 5.90).

V konfiguracija

Za isti slučaj kod V konfiguracije se već efekat SGK na EIT očigledno manifestuje, što se vidi na graficima prikazanim na slikama 6.16a i 6.16b. Vidimo da se već za mala odstupanja ugla između dipolnih momenata prelaza

od vrednosti $\theta = \frac{\pi}{2}$ (koja odgovara situaciji kada SGK odsustvuje) uočavaju značajne razlike u funkcijama imaginarnog i realnog dela relevantnog matričnog elementa od detjuninga sondirajućeg polja u odnosu na slučaj bez SGK.

Zapažamo da povećavanje ugla θ iznad $\frac{\pi}{2}$ vodi do porasta vrednosti $\text{Im}\sigma_{31}$, toliko da apsorpcija može postati vrlo značajna na vrednostima detjuninga gde je prethodno bila niska, tj. može se potpuno izgubiti EIT. S druge strane, smanjivanje θ ispod $\frac{\pi}{2}$ najpre pospešuje EIT dodatnim smanjivanjem $\text{Im}\sigma_{31}$, tako da je još bliže nuli, dok dalje smanjivanje dovodi do postizanja vrlo velikih negativnih vrednosti $\text{Im}\sigma_{31}$ - odnosno, koeficijent apsorpcije postaje negativan i dolazi do pojačanja svetlosti.

Takođe, povećanje θ iznad $\frac{\pi}{2}$ povećava nagib zavisnosti $\text{Re}\sigma_{31}$ (prvi izvod $\text{Re}\sigma_{31}$ po Δ_p), te postepeno vodi u anomalnu disperziju, kakva je prisutna kada odsustvuje i EIT efekat. Međutim, smanjivanje θ ispod $\frac{\pi}{2}$ dodatno smanjuje ovaj nagib (čini mu vrednost još negativnijom), usled čega se efekat usporavanja svetlosti i njenog eventualnog „skladištenja” dodatno pojačava.

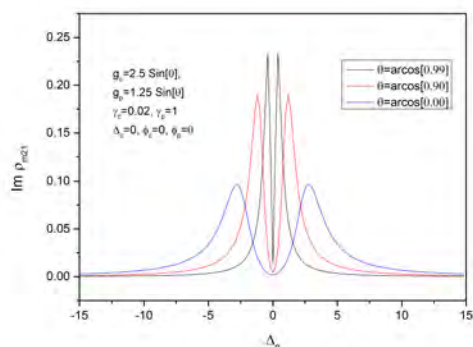
6.2.2 Slučaj $g_p \sim g_c$

U ovom delu ćemo prikazati rezultate dobijene za slučaj uporedivih Rabijevih frekvenci kontrolnog i sondirajućeg polja ($g_p \sim g_c$), za lestvičastu i Λ konfiguraciju, gde se, za pogodno odabrane vrednosti parametara, može posmatrati uticaj SGK na EIT.

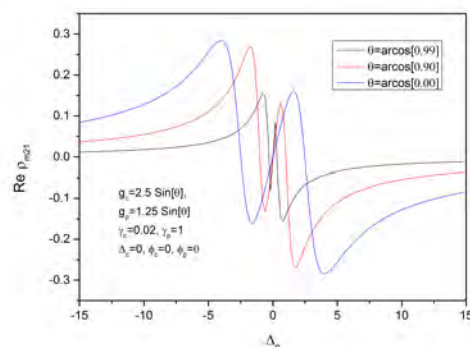
Lestvičasta konfiguracija

Rezultati prikazani u radu [14] pokazuju da SGK može značajno uticati na optički odziv lestvičastog atomskog sistema uz odgovarajuće vrednosti parametara. Vrednosti parametara su odabrane kao u ovom radu i reprodukovani grafici su potpuno identični onima u radu (vrednosti Rabijevih frekvenci su naizgled duplo manje - međutim, to je posledica različitog načina definisanja Rabijevih frekvenci u pomenutom radu i u našem radu). Imaginarni i realni delovi odgovarajućeg matričnog elementa za jedan set parametara, pri čemu smo varirali ugao između dipolnih elemenata θ , prikazani su na graficima na slikama 6.17a i 6.17b. Ovde je uzeto da je koeficijent spontane emisije γ_c značajno niži od koeficijenta spontane emisije γ_p .

Vidimo da sa smanjivanjem vrednosti ugla između dipolnih momenata prelaza od $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ekvivalentno odsustvu SGK) dolazi do znatnog sužavanja prozora transparentnosti (izraženijeg za θ bliže vrednosti $\frac{\pi}{2}$), kao i da

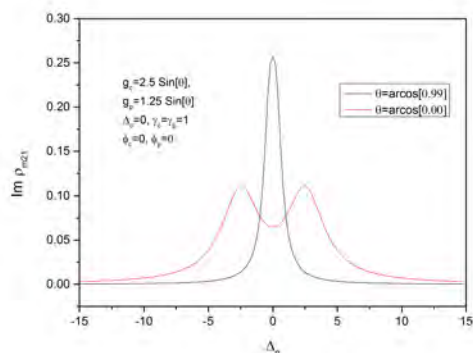


(a) $\text{Im}\sigma_{21}(\Delta_p)$

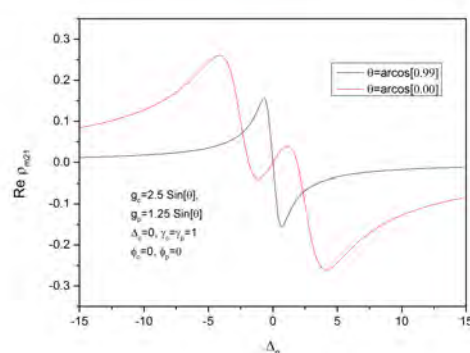


(b) $\text{Re}\sigma_{21}(\Delta_p)$

Slika 6.17: Poređenje zavisnosti $\text{Im}(\sigma_{21})$ i $\text{Re}(\sigma_{21})$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p , za lestvičastu konfiguraciju, za slučaj sa odsutnim i sa prisutnim SGK efektom, za pogodno odabrane vrednosti parametara. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



(a) $\text{Im}\sigma_{21}(\Delta_p)$



(b) $\text{Re}\sigma_{21}(\Delta_p)$

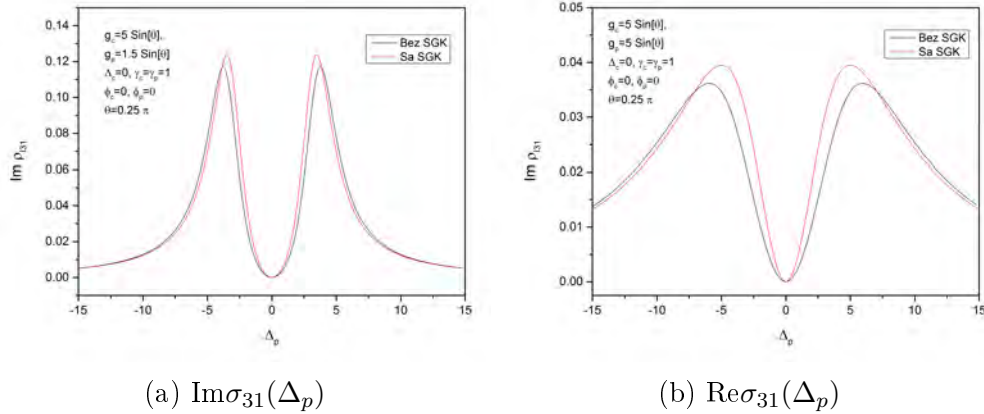
Slika 6.18: Poređenje zavisnosti $\text{Im}(\sigma_{21})$ i $\text{Re}(\sigma_{21})$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p , za lestvičastu konfiguraciju, za slučaj sa odsutnim i sa prisutnim SGK efektom, za pogodno odabrane vrednosti parametara. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

se maksimumi apsorpcije uvećavaju (i postižu za niže apsolutne vrednosti detjuninga sondirajućeg polja Δ_p). Ekstremumi realnih delova relevantnih matričnih elemenata se takođe postižu za niže vrednosti detjuninga sondirajućeg polja, ali se oni po apsolutnoj vrednosti smanjuju.

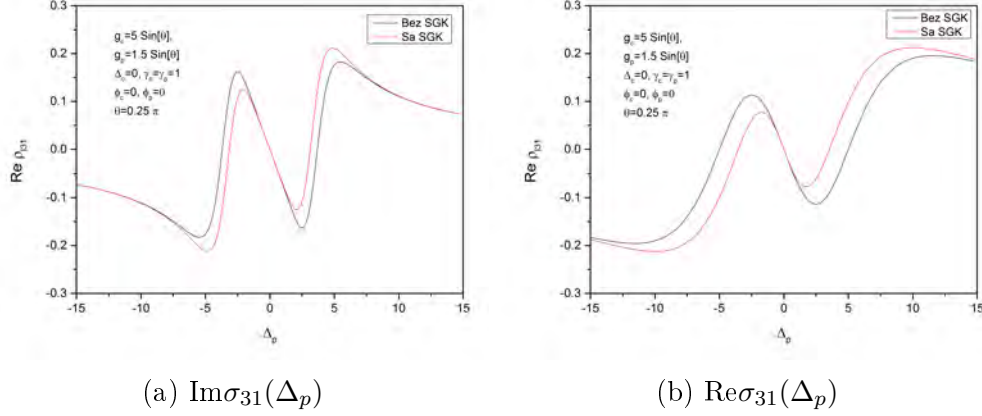
Na graficima prikazanim na slikama 6.18a i 6.18b uzeto je da su koeficijenti spontane emisije γ_c i γ_p jednaki, te je izvršeno upoređivanje rezultata za slučaj kada nema efekta SGK i za slučaj kada je ovaj efekat prisutan, za pogodno odabrane vrednosti ostalih parametara (takođe kao u radu [14]). Zapažamo da u ovom slučaju prisustvo SGK potpuno uništava prozor transparentnosti (slika za imaginarni deo matričnog elementa 6.18a), te se na nultom detjuningu javlja maksimum apsorpcije. Širina ove linije u apsorpcionom spektru je manja od prirodne širine za slobodan atom [14]. Takođe, na grafiku zavisnosti realnog dela relevantnog matričnog elementa od detjuninga sondirajućeg polja (slika 6.18b) se uočava da prelamanje oko nultog detjuninga ponovo postaje anomalno. Ovakvo ponašanje sistema se zove elektromagnetno indukovana apsorpcija (EIA).

Λ konfiguracija

Pokazuje se da SGK može uticati na optički odziv i Λ sistema, ukoliko su Rabijeve frekvence kontrolnog i sondirajućeg polja uporedivih vrednosti [15]. Vrednosti parametara su odabrane kao u radu [15] (i ovde su naizgled, kao i u slučaju lestvičaste konfiguracije, vrednosti Rabijevih frekvenci duplo manje - iz istog razloga). Naši rezultati se slažu sa rezultatima datim u ovom radu.



Slika 6.19: Poređenje zavisnosti $\text{Im}(\sigma_{31})$ i $\text{Re}(\sigma_{31})$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p , za Λ konfiguraciju, za slučaj sa odsutnim i sa prisutnim SGK efektom, za pogodno odabrane vrednosti parametara. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.



Slika 6.20: Poređenje zavisnosti $\text{Im}(\sigma_{31})$ i $\text{Re}(\sigma_{31})$ od detjuninga sondirajućeg polja Δ_p , za Λ konfiguraciju, za slučaj sa odsutnim i sa prisutnim SGK efektom, za pogodno odabrane vrednosti parametara. Vrednosti parametara su prikazane na grafiku.

Zapažamo da SGK dovodi do blagog sužavanja prozora transparentnosti, kao i do porasta vrednosti maksimuma apsorpcije (slike za imaginarne delove matricnog elementa 6.19a i 6.20a). Apsolutne vrednosti ekstremuma realnog dela (slike 6.19b i 6.20b) se takođe povećavaju. Zapažamo i da su ove promene izraženije za slučaj jednakih Rabijevih frekvenci kontrolnog i sondirajućeg polja, u odnosu na slučaj kada su ove veličine uporedive.

Istaknimo još i da, za razliku od V i lestvičaste konfiguracije, kod kojih je pokazano da SGK može vrlo značajno uticati na oblast transparentnosti oko nultog detjuninga kod EIT, kod Λ sistema nisu zapaženi tako značajni efekti. Primećeno je sužavanje prozora transparentnosti i uvećavanje ekstrema po apsolutnoj vrednosti, ali ovo sužavanje i uvećavanje nije preterano izraženo, čak ni za slučaj $g_p = g_c$. Kod V i lestvičaste konfiguracije ove promene su mnogo dramatičnije. Može čak doći i do potpunog gubljenja EIT za lestvičastu konfiguraciju, kao što je i prikazano na slici 6.18a, do dramatičnog umanjenja EIT efekta ili do pojačanja intenziteta svetlosti za V konfiguraciju, što se može uočiti na slici 6.16a.

Glava 7

Zaključak

U ovom radu detaljno smo prikazali put do izvođenja master jednačina za V, lestvičastu i Λ konfiguraciju atomskih sistema, sa tri energijska nivoa, koji interaguju sa dva laserska polja, kontrolnim i sondirajućim. One predstavljaju polaznu tačku za bilo kakva, kvalitativna i kvantitativna, razmatranja pomenutih sistema. Master jednačine za sve tri konfiguracije u odsustvu SGK su analitički rešene do prvog reda po Rabijevoj frekvenci sondirajućeg polja, dok su u prisustvu SGK rešene analitički za lestvičastu i Λ konfiguraciju (takođe do prvog reda po Rabijevoj frekvenci sondirajućeg polja). Rešavanje za slučaj kada je prisutna SGK je izostavljeno jer dobijeni izraz ne bi imao pregledan oblik, te ne bi ni bio naročito koristan. Na osnovu dobijenih analitičkih i numeričkih (master jednačine su rešavane i numerički, bez ikakve pretpostavke o redu Rabijeve frekvence sondirajućeg polja u odnosu na Rabijevu frekvencu kontrolnog polja) rezultata izučili smo EIT efekat u odsustvu i u prisustvu SGK. Ponovimo da smo master jednačine rešavali u stacionarnom režimu.

Utvrđeno je da je, u odsustvu SGK, za određene vrednosti parametara, moguće postići EIT za sve tri razmatrane konfiguracije sistema atom + laserska polja, pri čemu je razmatran slučaj nultog detjuninga kontrolnog polja. Izvršena je analiza ovog efekta preko obučenih stanja. Izvučene su bitne informacije iz prvih izvoda realnih i imaginarnih delova odgovarajućih matričnih elemenata po detjuningu sondirajućeg polja. Takođe, ispitivali smo kako se menjaju zavisnosti realnih i imaginarnih matričnih elemenata od detjuninga sondirajućeg polja pri variranju Rabijeve frekvence kontrolnog polja i zaključili kako ono utiče na EIT. Dali smo i poređenje analitički i numerički dobijenih zavisnosti, te utvrdili do kada ima smisla primenjivati dobijene aproksimativne analitičke izraze za odgovarajuće matrične elemente.

Razmatrali smo zatim kako prisustvo SGK utiče na EIT. Utvrdili smo da, u slučaju malih vrednosti Rabijeve frekvence sondirajućeg polja (u odnosu

na Rabijevu frekvencu kontrolnog polja), SGK ne utiče na zavisnosti odgovarajućih matričnih elemenata od detjuninga probnog polja kod lestvičaste i Λ konfiguracije (samim tim ni na EIT), dok kod V konfiguracije SGK izaziva značajne modifikacije ove zavisnosti - moguće je i pojačati i uništiti EIT pomoću SGK, pa čak i postići efekat pojačanja svetlosti za nulti detjuning sondirajućeg polja, kao i povećati indeks prelamanja date sredine. Posebno smo izučili lestvičastu i Λ konfiguraciju za slučaj uporedivih Rabijevih frekvenci kontrolnog i sondirajućeg polja, te zaključili da, za određene vrednosti parametara, SGK menja zavisnosti odgovarajućih matričnih elemenata od detjuninga sondirajućeg polja. Kod lestvičaste konfiguracije su efekti izraženiji, s obzirom na jake promene širine i oblika prozora transparentnosti, kao i na to da je moguće postići i kvalitativne promene zavisnosti, konkretno EIA. Kod Λ sistema su ove promene daleko manje i svode se na ne naročito značajne kvantitativne varijacije širine i oblika prozora transparentnosti.

Sve u svemu, prikazali smo optičke karakteristike tri konfiguracije uz EIT i SGK i utvrdili pojedine razlike među njima u odnosu na optičke eskcitacije. Na kraju smo i reprodukovali grafike dobijene u pojedinim naučnim radovima.

Pravci daljih potencijalnih istraživanja su brojni i uključuju sledeće: traženje analitičkih izraza za relevantne matrične elemente do viših redova po Rabijevoj fekvenci sondirajućeg polja; ispitivanje i drugih efekata kvantne interferencije i koherencije, nabrojanih u glavi 1, u razmatranim sistemima atom + laserska polja; uzimanje u obzir Doplerovog širenja linija; detaljnija razmatranja ovih efekata sa ciljem primene sistema koji ispoljavaju ovakvo ponašanje u kvantnoj informatici i drugim mogućim tehničkim oblastima; izučavanje atomskih sistema sa više energijskih nivoa (od tri) na koje deluje više laserskih polja (od dva), te ispitivanje efekata kvantne interferencije i koherencije u ovakvim sistemima [16, 17], itd.

Literatura

- [1] J.P. Marangos, T. Halfmann, *Electromagnetically Induced Transparency*, Handbook of Optics, Volume IV: Optical Properties of Materials, Nonlinear Optics, Quantum Optics, Mc Graw Hill, New York, 2010.
- [2] L. Safari, D. Iablonskyi, F. Fratini, *Double-electromagnetically induced transparency in a Y-type atomic system*, The European Physical Journal D, 68, 27, 2014.
- [3] S. M. Mousavi, L. Safari, M. Mahmoudi, M. Sahrai, *Effect of quantum interference on the optical properties of a three-level V-type atomic system beyond the two-photon resonance condition*, arXiv:1204.6275, 2012.
- [4] K. Kowalski, V. C. Lung, K. D. Xuan, M. Glódz, B. N. Huy, J. Szonert, *Electromagnetically Induced Transparency Computational Methods in Science and Technology*, Special Issue 2, 2010.
- [5] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, J. P. Marangos, *Electromagnetically Induced Transparency: Optics in Coherent Media*, Reviews of Modern Physics 77, 633, 2005.
- [6] J.-H. Wu, J.-Y. Gao, *Phase control of light amplification without inversion in a Λ system with spontaneously generated coherence*, Physical Review A, 65, 063807, 2002.
- [7] G. Heinze, C. Hubrich, T. Halfmann, *Stopped Light and Image Storage by Electromagnetically Induced Transparency up to the Regime of One Minute*, Physical Review Letters, 111, 033601, 2013.
- [8] A. J. Olson, S. K. Mayer, *Electromagnetically induced transparency in rubidium*, American Journal of Physics, 77, 2, 2009.
- [9] J. Weiner, P.-T. Ho, *Light-Matter Interaction*, Volume 1: Fundamentals and Applications, John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.

- [10] R. N. Shakhmurov, J. Odeurs, R. Coussement, A. Szabo, *Dark and Bright States of the Coherently Excited Three-Level Atom*, Laser Physics, 14, 1, 2004.
- [11] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, C. H. Behroozi, *Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas*, Nature, 397, 594, 1999.
- [12] P. R. Berman, *Spontaneously generated coherence and dark states*, Physical Review A, 72, 035801, 2005.
- [13] E. Paspalakis, S.-Q. Gong, P. L. Knight, *Spontaneous emission-induced coherent effects in absorption and dispersion of a V-type three-level atom*, Optics Communications, 152, 1998.
- [14] M. Hong-Mei, S. Zhen-Rong, L. Ru-Xin, X. Zhi-Zhan, *Effects of spontaneously induced coherence on absorption of a ladder-type atom*, Chinese Physics, 15, 11, 2006.
- [15] S. Menon, G. S. Agarwal, *Effects of spontaneously generated coherence on the pump-probe response of a Λ system*, Physical Review A, 57, 5, 1998.
- [16] V. Pavlović, *Elektromagnetno indukovana transparentnost u konfiniranom atomu vodonika*, Master rad, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2012.
- [17] V. Pavlović, D. Delibašić, Lj. Stevanović, *Double-double electromagnetically induced transparency in the four-level Y-type atom with spontaneously generated coherence*, Photonica 2015, Belgrade, Book of Abstracts, 2015.
- [18] Z. Ficek, S. Swain: *Quantum Interference and Coherence. Theory and Experiments*, Springer, New York, 2005.
- [19] V. Vedral: *Modern Foundations of Quantum Optics*, Imperial College Press, London, 2005.