

UNIVERZITET U NIŠU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET, NIŠ

MASTER RAD



Potencijal elektromagnetnog polja električnog dipola u kretanju u ograničenoj sredini

Student:

Miloš Jonić

broj indeksa: 16

Mentor:

Prof. dr Ljiljana

Stevanović

Niš, decembar 2015.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr Ljiljani Stevanović na pomoći u izboru teme i izradi master rada.

Takođe, veliku zahvalnost dugujem mom prijatelju dipl. ing. arhitekture Milošu Igrutinoviću za pomoć prilikom izrade ilustracija koje će, nadam se, pomoći u razumevanju sadržaja ovog rada.

Zahvalan sam i mojim najbližima na ljubavi i podršci kao i na velikom strpljenju iskazanom tokom mog školovanja.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Potencijal električnog dipola koji miruje	3
2.1	Razvoj potencijala po multipolima	4
2.2	Potencijal električnog dipola koji miruje u supstancijalnoj sredini	5
2.2.1	Rešavanje Laplasove jednačine	7
2.2.2	Potencijal električnog dipola koji se nalazi u supstancijalnoj sredini konačnih dimenzija	9
2.2.3	Razlike potencijala u karakterističnim tačkama na obodu supstancijalne sredine	11
2.3	Potencijal električnog dipola koji osciluje u supstancijalnoj sredini	13
3	Potencijal električnog dipola koji rotira	16
3.1	Potencijal električnog dipola koji rotira u ravni koja sadrži karakteristične tačke	16
3.1.1	Sistem oscilujućih dipola	18
3.2	Potencijal električnog dipola koji rotira u ravni normalnoj na ravan koja sadrži karakteristične tačke	19
3.3	Potencijal električnog dipola koji rotira na proizvoljan način .	22
4	Osnovni principi elektrokardiografije	27
4.1	Fiziologija mišićnih ćelija	27
4.2	Električne osobine srca	28
4.3	Elektrokardiogram	31
5	Modelovanje elektrokardiograma na osnovu potencijala rotirajućeg dipola	33
5.1	Osnovne napomene	33
5.2	Model srca kao sistema dva rotirajuća dipola	34
6	Zaključak	39
	Literatura	41

1 Uvod

Pojam električnog dipola je odavno poznat u fizici, i njegova primena je veoma raširena. Prilikom objašnjavanja električnih osobina dielektrika govorimo o permanentnim ili indukovanim dipolnim momentima atoma i molekula, a zračenje čestice ili sistema čestica u udaljenoj zoni može se posmatrati kao da potiče od dipola kojim se ovaj sistem zamenjuje. Velika je i primena električnog dipola u biofizici prilikom objašnjenja električnih osobina srca.

Potencijal električnog polja dipola može se odrediti direktnom integracijom jačine električnog polja ali i rešavanjem Poasonove ili Laplasove jednačine (specijalni slučaj Poasonove jednačine kada je ukupno naelektrisanje jednako nuli). Čest je slučaj da naelektrisane čestice koje generišu električno polje zauzimaju neku malu oblast prostora izvan koje je gustina naelektrisanja jednaka nuli. Tada se potencijal tog sistema naelektrisanja, u nekoj tački izvan oblasti koje on zauzima, može napisati u obliku jedne beskonačne sume poznate kao razlaganje po multipolima. Obično je od interesa potencijal u nekoj udaljenoj tački gde je dovoljno zadržati prvih nekoliko članova razvoja. Član u razvoju koji je obrnuto srazmeran prvom stepenu naelektrisanja nazivamo dipolni član razvoja. Ako su svi članovi razvoja posle dipolnog zanemarljivi to znači da sistem naelektrisanja možemo zameniti električnim dipolom čiji je dipolni momenat jednak dipolnom momentu sistema.

U ovom radu ćemo se najpre, u drugom poglavlju baviti određivanjem potencijala električnog dipola koji miruje. Izvršićemo njegov razvoj po multipolima i detaljno izvesti izraze za potencijal električnog dipola koji miruje u ograničenoj supstancijalnoj sredini sfernog oblika. Pokazaćemo i kako se ovi izrazi menjaju ako intenzitet njegovog dipolnog momenta osciluje, da bi u 3. poglavlju prešli na određivanje potencijala električnog dipola koji rotira u supstancijalnoj sredini.

Kada dipol osciluje, rotira ili se kreće na ma kakav drugi način koji uslovljava da se naelektrisane čestice koje ga čine kreću ubrzano, dolazi do formiranja elektromagnetnog polja koje u dovoljno udaljenoj oblasti nazivamo poljem zračenja. Međutim, ono za nas nije od interesa, tako da ga nećemo uzimati u razmatranje. U radu ćemo razmatrati dipol koji se kreće nerelativističkim brzinama tako da efekti retardacije ne dolaze do izražaja.

Inspiracija da se uopšte bavimo ovim problemom došla je od ideje da električne osobine ljudskog srca mogu da se opišu ako mu se pridruži električni dipolni momenat, čiji se intenzitet i pravac menjaju na izvesni način. Zbog toga će u 4. poglavlju biti objašnjene osnovne fizičke pojave do kojih dolazi prilikom jednog srčanog ciklusa, kao i princip nastanka elektrokardiograma. U 5. poglavlju pokušaćemo da, na osnovu jednačina za potencijal električnog

dipola do kojih smo došli u 2. i 3. poglavlju i određenih pretpostavki o promenama električnog dipolnog momenta srca, modelujemo elektrokardiogram koji zapravo predstavlja zapis promena razlika potencijala u određenim tačkama na površini tela sa vremenom.

U najvećem delu literature iz ove oblasti govori se ne o električnom već o strujnom dipolnom momentu srca, koji se definiše kao proizvod jačine struje i rastojanja između izvora i ponora ove struje. Mi smo ipak izabrali da srce posmatramo kao električni dipol i rezultati do kojih smo došli prezentovani su u ovom radu.

Rad se završava dodatkom u kom su prikazane osnovne osobine Ležandrovih polinoma i pregledom korišćene literature.

2 Potencijal električnog dipola koji miruje

Električni dipol predstavlja sistem dva raznoimena tačkasta naelektrisanja istog intenziteta q , na konstantnom međusobnom rastojanju d . Osnovna veličina koja ga karakteriše je električni dipolni moment \mathbf{p} , tj.

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad (1)$$

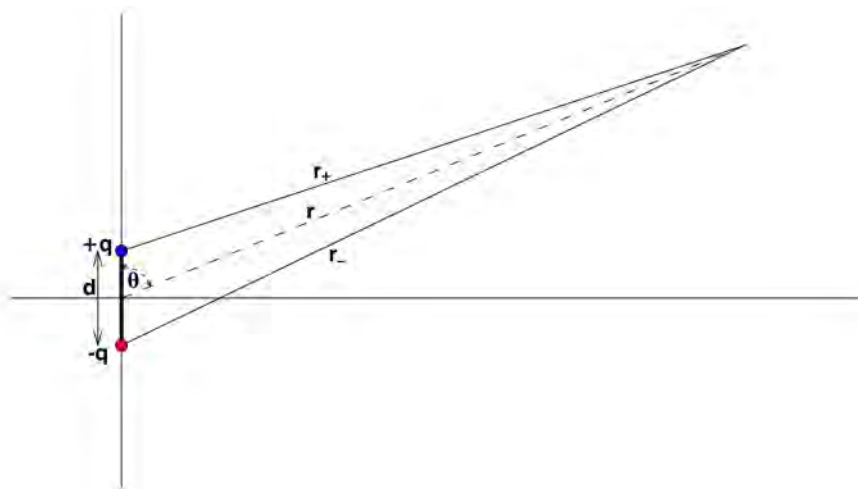
gde \mathbf{d} predstavlja vektor položaja pozitivnog naelektrisanja u odnosu na negativno [1].

Ako znamo da je potencijal tačkastog naelektrisanja dat izrazom

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (2)$$

na osnovu principa superpozicije lako dolazimo do izraza za potencijal električnog dipola:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right). \quad (3)$$



Slika 1: Potencijal električnog dipola

Na osnovu kosinusne teoreme imamo da je (slika 1):

$$r_+^2 = \frac{d^2}{4} + r^2 - dr\cos\theta = r^2 \left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad (4a)$$

$$r_-^2 = \frac{d^2}{4} + r^2 + dr\cos\theta = r^2 \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2} \right). \quad (4b)$$

Kada to vratimo u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d}{r} \cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}} \right]. \quad (5)$$

U slučaju kada je $r \gg d$ možemo primeniti aproksimativnu relaciju

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x \quad (6)$$

na osnovu čega dobijamo:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^2} \cos\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

U brojiocu jednačine (7) prepoznajemo intenzitet električnog dipolnog momenta, pa izraz za potencijal dobija oblik:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}. \quad (8)$$

2.1 Razvoj potencijala po multipolima

Da bismo izvršili razvoj potencijala po multipolima uzećemo za osu dipola da je z-osa (orijentisana od negativnog ka pozitivnom naelektrisanju), a koordinatni početak ćemo smestiti na polovinu rastojanja između naelektrisanja. Ovakav sistem poseduje aksijalnu simetriju tako da potencijal u nekoj tački neće zavistiti od azimutalnog ugla ϕ , već samo od radijalnog rastojanja r i polarnog ugla θ .

Biće zgodno ako jednačinu (5) napišemo u nešto izmenjenom obliku:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{d}{2r}\right) \cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{d}{2r}\right) \cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}} \right]. \quad (9)$$

Korisno je podsetiti se da za Ležandrove polinome postoji tzv. funkcija generatriše¹

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \quad (-1 \leq x \leq 1; |t| < 1). \quad (10)$$

¹Za više informacija o Ležandrovim polinomima pogledati dodatak na kraju rada.

Potražićemo potencijal u tački za koju važi $\frac{d}{2r} < 1$, tako da možemo u jednačini (9) da iskoristimo izraz za funkciju generatriše Ležandrovih polinoma [2]. Na taj način dobijamo :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(-\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^l \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(\cos\theta) - (-1)^l P_l(\cos\theta)] \left(\frac{d}{2r}\right)^l,\end{aligned}\quad (11)$$

gde poslednja jednakost proizilazi iz osobine parnosti Ležandrovih polinoma $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$. U razvijenom obliku prethodni rezultat glasi:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \left[P_1(\cos\theta) \frac{d}{2r} + P_3(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^3 + P_5(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^5 + \dots \right]. \quad (12)$$

Pošto je $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, prvi član gornje beskonačne sume je:

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}, \quad (13)$$

što je izraz identičan izrazu (8) za potencijal tačkastog dipola.

2.2 Potencijal električnog dipola koji miruje u supstancijalnoj sredini

Prema shvatanjima klasične elektrodinamike u vakuumu nema naelektrisanih čestica koje pripadaju njegovoj strukturi². U supstancijalnoj sredini, za razliku od vakuuma, javljaju se kako slobodna tako i vezana naelektrisanja koja potiču od same sredine, pa jednačine za makroskopsko elektromagnetno polje imaju nešto izmenjen oblik u odnosu na Maksvelove jednačine koje važe u vakuumu [3]:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho^{ext} + \rho^{sl}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j}^{ext} + \mathbf{j}^{sl} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\end{aligned}\quad (14)$$

²Ovo stanovište ne važi u kvantnoj elektrodinamici gde govorimo o parovima čestica i antičestica koji se neprestano kreiraju i anihiliraju u vakuumu.

gde su \mathbf{D} i \mathbf{H} električna i magnetna indukcija koje opisuju elektrodinamičku reakciju supstancijalne sredine na elektromagnetno polje (\mathbf{E} i \mathbf{B}) u njoj. One su u vezi sa polarizacijom i magnetizacijom sredine (\mathbf{P} i \mathbf{M} , respektivno električni i magnetni dipolni moment vezanih naelektrisanja po jedinici zapremine) preko jednačina:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}. \quad (15b)$$

Jednačine (14) nazivamo Maksvel-Lorencove jednačine za elektromagnetno polje u supstancijalnoj sredini.

Za razliku Maksvelovih jednačina za elektromagnetno polje u vakuumu, sistem jednačina (14) nije zatvoren (broj nezavisnih jednačina je manji od broja veličina koje treba odrediti), pa ga je potrebno dopuniti tzv. supstancijalnim jednačinama. Pošto ćemo nadalje razmatrati slučaj u kom nas ne interesuje magnetno već samo električno polje, navešćemo ovde samo jednu od supstancijalnih jednačina koja se odnosi na njega:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \hat{K}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (16)$$

gde je $\hat{K}^{(e)}$ tenzor dielektrične permeabilnosti. Kod izotropnih sredina je:

$$\hat{K}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = K^{(e)}(\mathbf{r}, t) \hat{I}, \quad (17)$$

gde je \hat{I} jedinični tenzor. Vidimo da se dielektrična permeabilnost sredine opisuje samo jednom skalarnom funkcijom.

Za mnoge supstancijalne sredine, ako električno polje nije previše jako, polarizacija je proporcionalna električnom polju:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (18)$$

gde je χ_e električna susceptibilnost sredine. Sredine u kojima važi (18) nazivamo linearnim sredinama.

Na osnovu jednačina (16), (17) i (18) nalazimo da je u izotropnoj i linearnoj supstancijalnoj sredini:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (19)$$

gde je $\epsilon_r = \chi_e + 1$ relativna dielektrična konstanta.

U slučaju kada je supstancijalna sredina neograničena potencijal električnog dipola u određenoj tački se jednostavno dobija kada u (8) zamenimo ϵ_0 sa $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{p \cos\theta}{r^2}, \quad (20)$$

2.2.1 Rešavanje Laplasove jednačine

U izotropnoj, linearnoj i homogenoj supstancijalnoj sredini, ukoliko je gustina slobodnih naelektrisanja u sredini jednaka nuli i gustina vezanih naelektrisanja je jednaka nuli pa se takva sredina pokorava Laplasovoj jednačini:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (21)$$

Pretpostavimo da se električni dipol nalazi u supstancijalnoj sredini konačnih dimenzija i da je ta sredina sfernog oblika. Zapreminska gustina vezanih naelektrisanja jednaka je nuli ali se javlja površinska gustina vezanih naelektrisanja na obodu te lopte načinjene od dielektrika.

U sfernim koordinatama prethodna jednačina dobija oblik:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0. \quad (22)$$

Zbog cilindrične simetrije koju poseduje dipol potencijal je nezavisan od azimutalnog ugla ϕ pa imamo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = 0. \quad (23)$$

Pokušaćemo da rešimo ovu jednačinu razdvajanjem promenljivih. Rešenje tražimo u obliku [4]:

$$\varphi(r, \theta) = R(r)G(\theta). \quad (24)$$

Kada prethodni izraz vratimo u (23), posle malo sređivanja dobijamo:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{G(\theta)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial G(\theta)}{\partial\theta} \right) = 0. \quad (25)$$

Pošto prvi član zavisi samo od r a drugi samo od θ , da bi relacija uvek važila svaki od ovih članova mora da bude jednak nekoj konstanti:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l+1), \quad (26a)$$

$$\frac{1}{G(\theta)} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dG(\theta)}{d\theta} \right) = -l(l+1). \quad (26b)$$

Izabrali smo da konstantu napišemo u obliku $l(l+1)$ zbog dalje matematičke pogodnosti. Radijalna jednačina:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l+1)R(r) \quad (27)$$

ima opšte rešenje oblika:

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (28)$$

u kom A i B predstavljaju konstante integracije. Rešenja druge, ugaone jednačine

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dG(\theta)}{d\theta} \right) = -l(l+1)\sin\theta G(\theta) \quad (29)$$

su Ležandrovi polinomi:

$$G(\theta) = P_l(\cos\theta). \quad (30)$$

Treba napomenuti da je (29) jednačina drugog reda, tako da bi trebalo da ima dva nezavisna rešenja za svaku vrednost l . Ta "druga" rešenja ovde nisu fizički prihvatljiva zato što teže beskonačnosti za $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$. Npr. drugo rešenje za $l = 0$ je:

$$G(\theta) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (31)$$

Dakle, u slučaju azimutalne simetrije, najopštije separabilno rešenje Laplasove jednačine koje je fizički prihvatljivo ima oblik:

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta). \quad (32)$$

Razdvajanje promenljivih donosi nam beskonačan broj rešenja, po jedno za svako l . Opšte rešenje predstavlja linearnu kombinaciju separabilnih rešenja:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta). \quad (33)$$

2.2.2 Potencijal električnog dipola koji se nalazi u supstancijalnoj sredini konačnih dimenzija

Posmatramo supstancijalnu sredinu u obliku lopte poluprečnika R izvan koje se nalazi vakuum. U centar sfere postavljamo koordinatni početak i u njega dipol sa električnim dipolnim momentom p . Potencijal u nekoj udaljenoj tački na rastojanju r koja se nalazi izvan ove sfere dat je izrazom:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \quad r \geq R, \quad (34)$$

gde smo uzeli da je $A_l = 0$ da bismo izbegli da potencijal teži beskonačnosti kada $r \rightarrow \infty$.

Ukoliko prilikom razvoja potencijala električnog dipola po multipolima zadržimo prva dva člana u razvoju, izraz za potencijal unutar sfere dobija oblik:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{d^2}{r^4} P_3(\cos\theta) \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad r \leq R, \end{aligned} \quad (35)$$

gde smo uzeli da je $B_l = 0$ da bi izbegli pojavu singularnosti u koordinatnom početku.

Ako primenimo tzv. "uslov zašivanja" tj. izjednačimo izraze za potencijale unutar i izvan sfere na njenom obodu, gde važi da je $r = R$ i pri tome izjednačimo koeficijente uz odgovarajuće Ležandrove polinome dobijamo sledeće izraze za koeficijente B_l :

$$B_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} + A_1 R^3 \quad \text{za } l = 1, \quad (36)$$

$$B_3 = \frac{pd^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} + A_3 R^7 \quad \text{za } l = 3, \quad (37)$$

$$B_l = A_l R^{2l+1} \quad \text{za } l \neq 1, l \neq 3. \quad (38)$$

Prvi izvod potencijala trpi skok na granici između supstancijalne sredine (dielektrika) i vakuuma, tako da imamo:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{R+} - \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{R-} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p, \quad (39)$$

gde je σ_p površinska gustina vezanih naelektrisanja. Leva strana ove jednačine u razvijenom obliku, na osnovu (34) i (35), izgleda na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{R_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{R_-} = & - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{2p}{R^3} P_1(\cos\theta) \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{4pd^2}{R^5} P_3(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \quad (40)$$

Na desnoj strani jednačine (39) možemo izvršiti sledeći niz transformacija:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p = & -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) = \chi_e \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{R_-} \\ = & \chi_e \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{2p}{R^3} P_1(\cos\theta) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{4pd^2}{R^5} P_3(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Kada rezultate (40) i (41) vratimo u (39), a potom izjednačimo koeficijente uz $P_1(\cos\theta)$ sa obe strane znaka jednakosti, dobijamo:

$$-B_1 + \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} - A_1 \frac{R^3}{2} = -\chi_e \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} + \chi_e A_1 \frac{R^3}{2}. \quad (42)$$

U ovu jednačinu zamenjujemo izraz (36) i posle kraćih transformacija dobijamo izraze za konstante A_1 i B_1 :

$$A_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^3}, \quad (43)$$

$$B_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2}. \quad (44)$$

Potpuno analognim postupkom nalazimo i konstante A_3 i B_3 :

$$A_3 = \frac{pd^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{4(\epsilon_r - 1)}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^7}, \quad (45)$$

$$B_3 = \frac{pd^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4}. \quad (46)$$

Za ostale vrednosti l ($l \neq 1, l \neq 3$) važi:

$$-(l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} - l A_l R^{l-1} = \chi_e l A_l R^{l-1}. \quad (47)$$

Kada u ovu jednačinu zamenimo (38) dobijamo izraz

$$-(2l + 1)A_l R^{l-1} = \chi_e l A_l R^{l-1} \quad (48)$$

koji može biti zadovoljen za svako l ($l \neq 1, l \neq 3$) samo ako je $A_l = 0$ a samim tim i $B_l = 0$.

Pošto su samo A_1, A_3, B_1 i B_3 različiti od nule, izrazi (34) i (35) za potencijal električnog dipola unutar i izvan supstancijalne sredine postaju:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{B_1}{r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{B_3}{r^4} P_3(\cos\theta) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{r^4} P_3(\cos\theta), \quad r \geq R, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{d^2}{r^4} P_3(\cos\theta) \\ &\quad + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_3 r^3 P_3(\cos\theta) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \frac{r^3}{R^3} \right) P_1(\cos\theta) \\ &\quad + \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{d^2}{r^4} \left(1 + \frac{4(\epsilon_r - 1)}{3\epsilon_r + 4} \frac{r^7}{R^7} \right) P_3(\cos\theta), \quad r \leq R. \end{aligned} \quad (50)$$

Na obodu supstancijalne sredine ($r = R$), oba ova izraza se svode na:

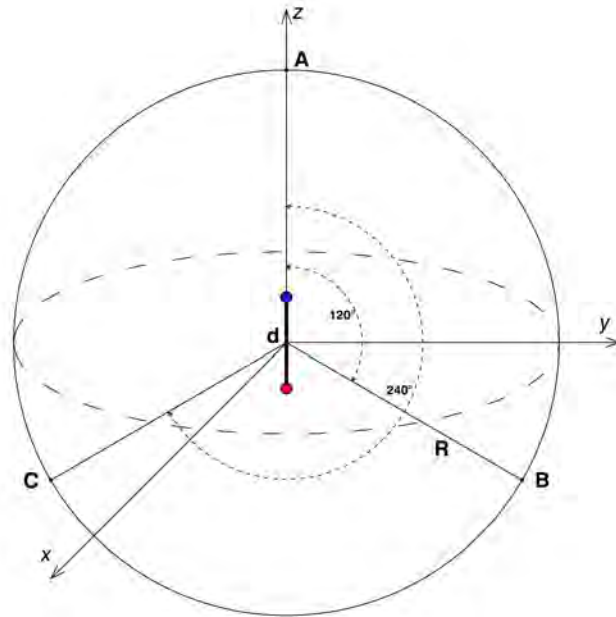
$$\varphi(R, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} P_1(\cos\theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} P_3(\cos\theta). \quad (51)$$

2.2.3 Razlike potencijala u karakterističnim tačkama na obodu supstancijalne sredine

Posmatramo električni dipol koji se nalazi u centru lopte načinjene od supstancijalne sredine relativne dielektrične konstante ϵ_r okružene vakuumom, i usmeren je duž z -ose. Izaberimo tri karakteristične tačke na sferi, koja predstavlja granicu između supstancijalne sredine i okolnog vakuuma. Biramo ih tako da se nalaze na kružnici koju čini presek yOz -ose i date sfere i njihovi vektori položaja zaklapaju sa z osom uglove³: $\theta_A = 0^\circ$, $\theta_B = 120^\circ$ i $\theta_C = 240^\circ$, slika 2.

U slučaju kada su dimenzije supstancijalne sredine mnogo veće u odnosu na dimenzije dipola tj. $R \gg d$, možemo da zanemarimo drugi član u (51) pa su potencijali u karakterističnim tačkama dati izrazima:

³Ove tačke čine temena jednakostraničnog trougla upisanog u veliki krug sfere.



Slika 2: Električni dipol koji miruje i karakteristične tačke na granici supstancijalne sredine.

$$\varphi_A = \varphi(R, \theta = 0^\circ) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{2R^2}, \quad (52a)$$

$$\varphi_B = \varphi(R, \theta = 120^\circ) = -\frac{1}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{R^2}, \quad (52b)$$

$$\varphi_C = \varphi(R, \theta = 240^\circ) = -\frac{1}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{R^2}. \quad (52c)$$

Oдавде lako nalazimo da su razlike potencijala u karakterističnim tačkama:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{R^2}, \quad (53a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{R^2}, \quad (53b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = 0. \quad (53c)$$

Ako su dimenzije električnog dipola istog reda veličine kao i dimenzije supstancijalne sredine u kojoj se nalazi tj. $R \sim d$, moramo da uračunamo oba člana iz (51) pa izrazi za potencijal u karakterističnim tačkama postaju:

$$\varphi_A = \varphi(R, \theta = 0^\circ) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (54a)$$

$$\varphi_B = \varphi(R, \theta = 120^\circ) = -\frac{1}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{7}{16} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (54b)$$

$$\varphi_C = \varphi(R, \theta = 240^\circ) = -\frac{1}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{7}{16} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (54c)$$

dok su razlike ovih potencijala:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (55a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (55b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = 0. \quad (55c)$$

2.3 Potencijal električnog dipola koji osciluje u supstancijalnoj sredini

Ako bismo posmatrali dipol čiji električni dipolni moment uvek ostaje isto usmeren (duž z -ose) dok intenzitet ovog vektora ne ostaje konstantan, kao što smo smatrali do sada, već se menja po nekom periodičnom zakonu $p = p_0 \cos(\omega t)$, izraz (51) za potencijal na obodu sfere dobio bi oblik:

$$\varphi(R, \theta, \omega, t) = \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} P_1(\cos\theta) + \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} P_3(\cos\theta). \quad (56)$$

U slučaju kada su dimenzije supstancijalne sredine mnogo veće u odnosu na dimenzije dipola ($R \gg d$) potencijali u karakterističnim tačkama imaju sledeći oblik:

$$\varphi_A = \varphi(R, \theta = 0^\circ, \omega, t) = \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (57a)$$

$$\varphi_B = \varphi(R, \theta = 120^\circ, \omega, t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (57b)$$

$$\varphi_C = \varphi(R, \theta = 240^\circ, \omega, t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (57c)$$

dok su razlike ovih potencijala:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (58a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (58b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = 0. \quad (58c)$$

Ako su dimenzije električnog dipola približno iste kao i dimenzije supstancijalne sredine u kojoj se nalazi ($R \sim d$) izrazi za potencijal u karakterističnim tačkama su:

$$\varphi_A = \varphi(R, \theta = 0^\circ, \omega, t) = \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (59a)$$

$$\varphi_B = \varphi(R, \theta = 120^\circ, \omega, t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{7}{16} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (59b)$$

$$\varphi_C = \varphi(R, \theta = 240^\circ, \omega, t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{7}{16} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}. \quad (59c)$$

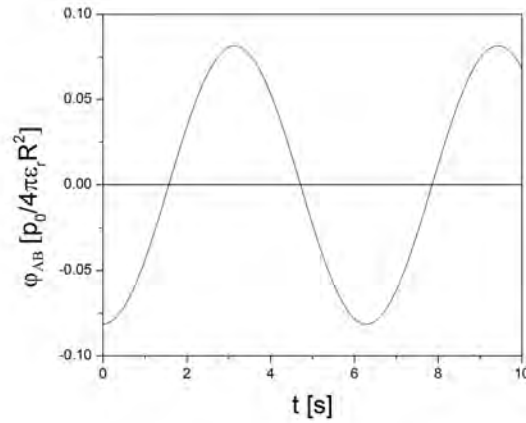
Razlike ovih potencijala su:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (60a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{3}{2} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{p_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4}, \quad (60b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = 0. \quad (60c)$$

Na slici 3 je prikazan grafik zavisnosti razlike potencijala φ_{AB} od vremena. Pošto izraz $p_0/4\pi\epsilon_r R^2$ množi sve članove u izrazima, a nas interesuje samo izgled grafika, potencijal je dat u tim jedinicama. S druge strane bilo je neophodno da uračunamo konkretne vrednosti nekih veličina kao što su: $\epsilon_r = 55$, $d = R/3$, $\omega = 1$. Obrazloženja za odabir baš ovih vrednosti biće pružena u 5 poglavlju. U slučaju dipola koji osciluje nema razlike u izgledu grafika zavisno od toga da li su tačke u kojima merimo potencijal veoma udaljene ili ne, tako da ovde dajemo samo jedan grafik.



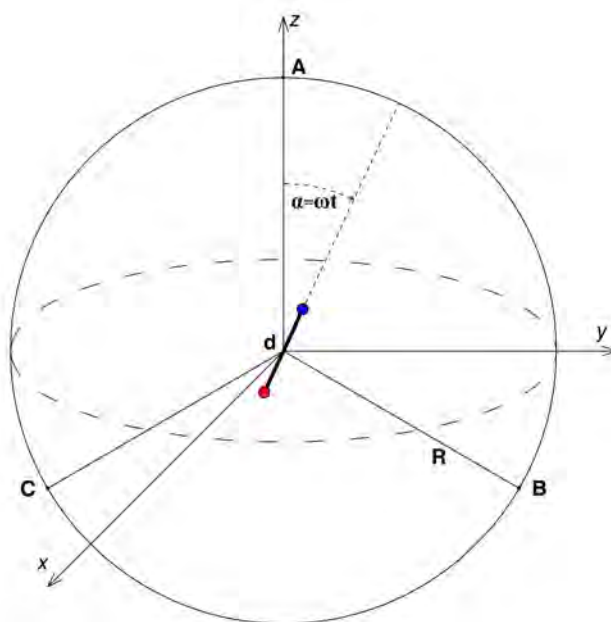
Slika 3: Zavisnost razlike potencijala φ_{AB} od vremena za dipol koji osciluje duž z -ose. Imamo da je $\varphi_{AB} = \varphi_{AC}$ i da je $\varphi_{BC} = 0$, pa oni zbog toga nisu predstavljeni na grafiku. Vrednosti parametara: $\epsilon_r = 55$, $d = R/3$, $\omega = 1$.

3 Potencijal električnog dipola koji rotira

Posmatramo dipol konstantnog intenziteta električnog dipolnog momenta koji se nalazi u centru konačne supstancijalne sredine sfernog oblika, kao u prethodnom poglavlju, s tom razlikom što sada dipol više ne miruje već rotira.

3.1 Potencijal električnog dipola koji rotira u ravni koja sadrži karakteristične tačke

Neka dipol rotira oko x -ose, odnosno u ravni koja sadrži i tri karakteristične tačke kao što je prikazano na slici 4. Dipol rotira konstantnom ugaonom brzinom ω , a ugao koji vektor električnog dipolnog momenta zaklapa sa z -osom u trenutku vremena t obeležićemo sa $\alpha = \omega t$.



Slika 4: *Električni dipol koji rotira u vertikalnoj ravni koja sadrži karakteristične tačke.*

U ovom slučaju, električne potencijale u karakterističnim tačkama naćićemo na osnovu jednačina iz prethodnog poglavlja tako što ćemo u njima izvršiti sledeću smenu:

$$\theta \rightarrow \theta - \alpha, \quad (61)$$

a pošto se ovaj ugao u svim jednačina pojavljuje samo u okviru kosinusne funkcije koristićemo sledeći trigonometrijski identitet:

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha. \quad (62)$$

Potencijale u karakterističnim tačkama, za slučaj kada su dimenzije dipola mnogo manje od dimenzija supstancijalne sredine ($R \gg d$), dobijamo kada izvršimo smenu (61) u jednačinama (52):

$$\varphi_A = \varphi(R, \theta = 0^\circ, \alpha) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \cos\alpha, \quad (63a)$$

$$\varphi_B = \varphi(R, \theta = 120^\circ, \alpha) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right), \quad (63b)$$

$$\varphi_C = \varphi(R, \theta = 240^\circ, \alpha) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right). \quad (63c)$$

Na osnovu ovih izraza lako nalazimo razlike potencijala:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right), \quad (64a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right), \quad (64b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\sqrt{3}\sin\alpha\right). \quad (64c)$$

Za $\alpha = 0$ ($t = 0$, početni trenutak u kome je vektor električnog dipolnog momenta dipola usmeren duž z -ose) ovi izrazi se svode na jednačine (53) dobijene u stacionarnom slučaju.

Ako posmatramo situaciju u kojoj su dimenzije dipola približne dimenzijama sredine ($R \sim d$), potencijali u karakterističnim tačkama i razlike ovih potencijala dobiće se primenom iste smene (61) u jednačinama (54) i (55). Navešćemo ovde samo oblik izraza za razlike potencijala:

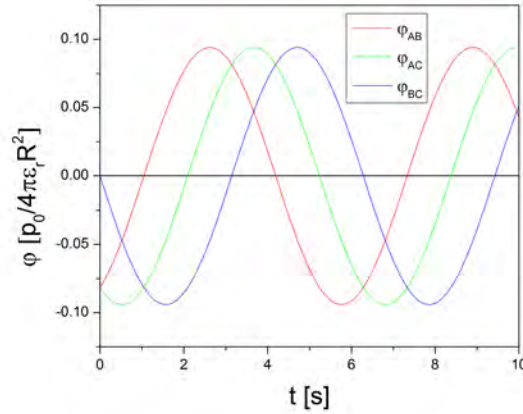
$$\begin{aligned} \varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = & \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) \\ & + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{9}{16}\cos\alpha + \frac{3\sqrt{3}}{16}\sin\alpha\right), \end{aligned} \quad (65a)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = & \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{2R^2} \left(-\frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \right) \\ & + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{9}{16}\cos\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{16}\sin\alpha \right),\end{aligned}\quad (65b)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = & \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r} \frac{1}{2R^2} \left(-\sqrt{3}\sin\alpha \right) \\ & + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\sin\alpha \right).\end{aligned}\quad (65c)$$

Ove jednačine se takođe za $\alpha = 0$ svode na odgovarajuće izraze (55) dobijene za dipol koji miruje. Ako se setimo da je $\alpha = \omega t$, lako uočavamo zavisnost električnog potencijala u ovim tačkama od vremena.

Na slici 5 prikazani su grafici zavisnosti razlika potencijala datih jednačinama (65) od vremena.



Slika 5: Zavisnost razlika potencijala u karakterističnim tačkama od vremena za dipol koji rotira u vertikalnoj ravni koja sadrži karakteristične tačke. Vrednosti parametara: $\epsilon_r = 55$, $d = R/3$ i $\omega = 1$

3.1.1 Sistem oscilujućih dipola

Zanimljivo je primetiti da isti izrazi za potencijal u karakterističnim tačkama mogu da se dobiju i na drugi način. Naime, dipol koji rotira u yOz

ravni možemo posmatrati kao sistem dva ortogonalno postavljena oscilujuća dipola usmerena duž z -ose i y -ose.

U tom slučaju, potencijal dipola usmerenog duž z -ose bio bi dat izrazom (56). S druge strane, intenzitet električnog dipolnog momenta dipola usmerenog duž y -ose menjao bi se po sinusnom zakonu i morali bi da uvedemo smenu $\theta \rightarrow \theta - 90^\circ$, pa bi izraz za potencijal ovog dipola glasio:

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, \omega, t) = & \frac{p_0 \sin(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} P_1 [\cos(\theta - 90^\circ)] \\ & + \frac{p_0 \sin(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} P_3 [\cos(\theta - 90^\circ)]. \end{aligned} \quad (66)$$

Zbir ova dva potencijala daje jednačine za potencijal električnog dipola koji rotira u yOz ravni, na osnovu kojih se lako dobijaju jednačine (65) za razlike potencijala u karakterističnim tačkama.

3.2 Potencijal električnog dipola koji rotira u ravni normalnoj na ravan koja sadrži karakteristične tačke

Posmatrajmo sada električni dipol koji rotira u xOy ravni, odnosno ravni normalnoj na ravan koja sadrži karakteristične tačke (slika 6).

Kao što smo pokazali u prethodnom odeljku, ovaj rotirajući dipol možemo da zamenimo sistemom dva oscilujuća dipola usmerena duž x -ose i duž y -ose. Očigledno je da će u karakterističnim tačkama potencijal koji potiče od dipola koji osciluje duž x -ose biti jednak nuli⁴. Tada se problem svodi na samo jedan oscilujući dipol usmeren duž y -ose čiji potencijal smo već našli i dat je izrazom (66).

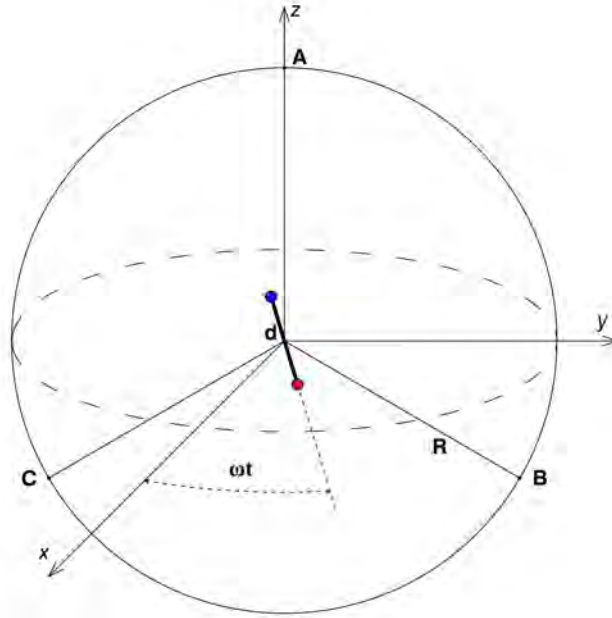
Za slučaj kada su dimenzije supstancijalne sredine mnogo veće od dimenzija dipola potencijali u karakterističnim tačkama su:

$$\varphi_A = 0, \quad (67a)$$

$$\varphi_B = \frac{\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (67b)$$

$$\varphi_C = -\frac{\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (67c)$$

⁴To važi za sve tačke na kružnici koja sadrži i karakteristične tačke. Naime, ove tačke se nalaze na istom rastojanju od oba naelektrisanja koja čine dipol pa su u njima potencijali koji potiču od ovih naelektrisanja istog intenziteta ali suprotnog znaka tako da se poništavaju.



Slika 6: Električni dipol koji rotira u ravni normalnoj na ravan koja sadrži karakteristične tačke.

dok su razlike ovih potencijala:

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (68a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}, \quad (68b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = -\sqrt{3} \frac{p_0 \sin(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2}. \quad (68c)$$

Ako su dimenzije dipola približne dimenzijama supstancijalne sredine moramo da zadržimo oba člana u izrazima za potencijal pa imamo da oni u karakterističnim tačkama imaju oblik:

$$\varphi_A = 0, \quad (69a)$$

$$\varphi_B = \frac{\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{3\sqrt{3} p_0 \sin(\omega t)}{16} \frac{7}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^4}, \quad (69b)$$

$$\varphi_C = -\frac{\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{3\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{16} \frac{7}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^4}, \quad (69c)$$

a njihove razlike:

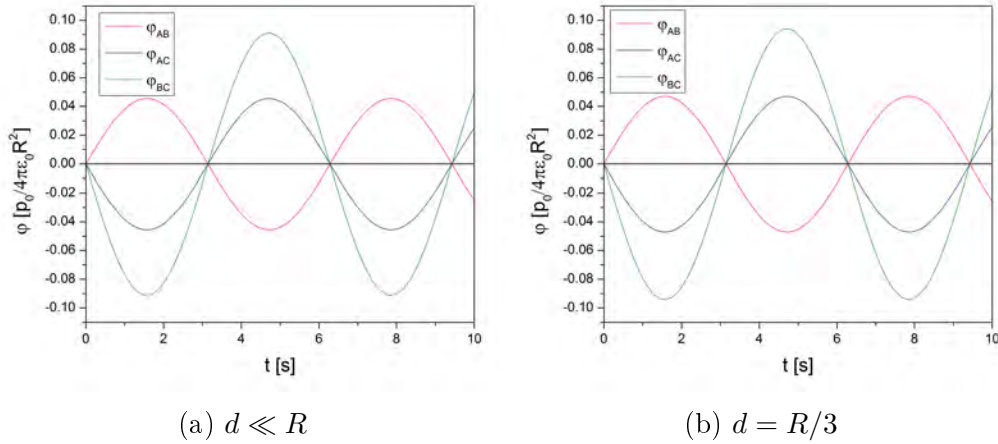
$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} + \frac{3\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{16} \frac{7}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^4}, \quad (70a)$$

$$\varphi_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = -\frac{\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{2} \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{3\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{16} \frac{7}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^4}, \quad (70b)$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_C - \varphi_B = -\sqrt{3} \frac{p_0 \sin(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} - \frac{3\sqrt{3}p_0 \sin(\omega t)}{8} \frac{7}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{3\epsilon_r + 4} \frac{1}{R^4}. \quad (70c)$$

Pošto dipol rotira u xOy ravni, proizvod ωt predstavlja azimutalni ugao ϕ , tj. ugao koji u tom trenutku zaklapa vektor električnog dipolnog momenta sa pozitivnim smerom x -ose.

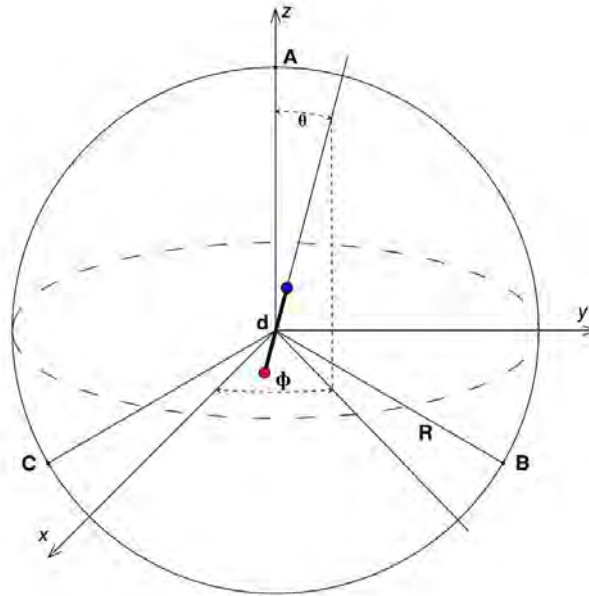
Grafičke zavisnosti funkcija datih jednačinama (68) i (70) od vremena date su na slici 7.



Slika 7: Razlika potencijala u karakterističnim tačkama električnog dipola koji rotira u horizontalnoj ravni za vrednosti $\epsilon_r = 55$, $\omega = 1$

3.3 Potencijal električnog dipola koji rotira na proizvoljan način

Neka dipol električnog dipolnog momenta p_0 rotira na proizvoljan način, ali tako da se njegov centar (polovina rastojanja između naelektrisanja) uvek poklapa sa koordinatnim početkom.



Slika 8: *Električni dipol sa centrom u koordinatnom početku koji se kreće na proizvoljan način.*

Projekcije dipolnog momenta na koordinatne ose su:

$$p_x = p_0 \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (71a)$$

$$p_y = p_0 \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (71b)$$

$$p_z = p_0 \cos(\theta). \quad (71c)$$

Neka se uglovi θ i ϕ menjaju sa vremenom na sledeći način: $\theta = \omega_1 t + \delta_1$, $\phi = \omega_2 t + \delta_2$, gde su ω_1 i ω_2 ugaone frekvence, a δ_1 i δ_2 početne faze rotacija u vertikalnoj i horizontalnoj ravni, respektivno. Kada ovo zamenimo u prethodne jednačine dobijamo projekcije dipolnog momenta na koordinatne ose nekom trenutku vremena t :

$$p_x = p_0 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \cos(\omega_2 t + \delta_2), \quad (72a)$$

$$p_y = p_0 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2), \quad (72b)$$

$$p_z = p_0 \cos(\omega_1 t + \delta_1). \quad (72c)$$

Električni dipol koji rotira u proizvoljnoj ravni možemo, slično onome što smo uradili u prethodnom poglavlju, zameniti sistemom od tri oscilujuća dipola usmerena duž koordinatnih osa, a zakoni njihovih oscilovanja bili bi dati jednačinama (72).

Pogodnim izborom parametara možemo dobiti jednačine za prethodno razmatrane slučajeve. Ako uzmemo da je $\omega_1 = 0$, $\delta_1 = 90^\circ$ i $\delta_2 = 0$, dobijamo rotaciju u xOy ravni, dok za $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ i $\delta_2 = 90^\circ$ imamo rotaciju u yOz ravni⁵.

Zbog načina na koji smo izabrali karakteristične tačke, potencijal koji u njima stvara dipol usmeren duž x -ose jednak je nuli⁶. Dolazimo do zaključka da su potencijali u karakterističnim tačkama, koji potiču od dipola koji rotira na proizvoljan način, jednaki zbiru potencijala koje u tim tačkama stvaraju dipoli koji osciluju duž y -ose i duž z -ose.

Potencijal električnog dipola koji osciluje duž z -ose dat je jednačinom:

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, \omega, t) = & \frac{p_0 \cos(\omega_1 t + \delta_1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} P_1(\cos\theta) \\ & + \frac{p_0 \cos(\omega_1 t + \delta_1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} P_3(\cos\theta), \end{aligned} \quad (73)$$

dok je potencijal električnog dipola koji osciluje duž y -ose:

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, \omega, t) = & \frac{p_0 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} P_1[\cos(\theta - 90^\circ)] \\ & + \frac{p_0 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} P_3[\cos(\theta - 90^\circ)]. \end{aligned} \quad (74)$$

Posle duže i nezanimljive računice dobijaju se sledeći izrazi za razlike potencijala u karakterističnim tačkama, za slučaj kada je $R \gg d$:

⁵Osim ova dva slučaja, dipol rotira u ravni i kada je $\omega_1 = \omega_2$, a ravan u kojoj rotira je određena početnim faznim pomerajima δ_1 i δ_2 .

⁶Pogledati objašnjenje u fusnoti 4.

$$\varphi_{AB} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right), \quad (75a)$$

$$\varphi_{AC} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right), \quad (75b)$$

$$\varphi_{BC} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\sqrt{3} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right), \quad (75c)$$

dok za slučaj $R \sim d$ oni imaju oblik:

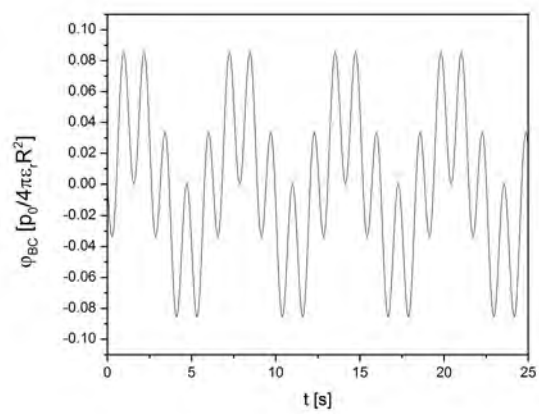
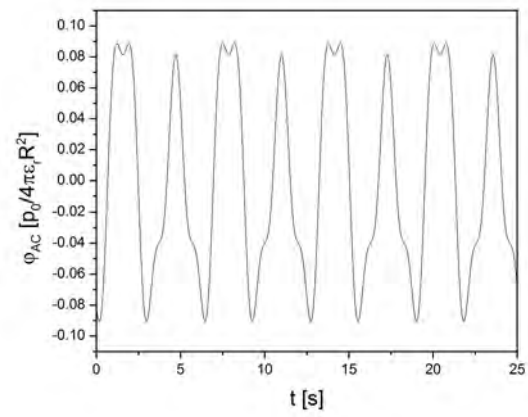
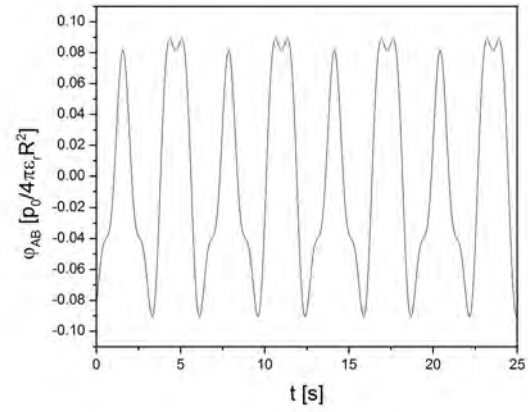
$$\begin{aligned} \varphi_{AB} &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right) \\ &+ \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{9}{16} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{3\sqrt{3}}{16} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right), \end{aligned} \quad (76a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{AC} &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\frac{3}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right) \\ &+ \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{9}{16} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{3\sqrt{3}}{16} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right), \end{aligned} \quad (76b)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BC} &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{\epsilon_r + 2} \frac{1}{R^2} \left(-\sqrt{3} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right) \\ &+ \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{7}{3\epsilon_r + 4} \frac{d^2}{R^4} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \sin(\omega_1 t + \delta_1) \sin(\omega_2 t + \delta_2) \right). \end{aligned} \quad (76c)$$

Pogodnim, gore navedenim, izborom parametara, ove jednačine mogu da se svedu na (65) i (70).

Na sledećim graficima prikazane su zavisnosti razlika potencijala u karakterističnim tačkama od vremena koje su date jednačinama (76) za skup



Slika 9: Zavisnost razlika potencijala u karakterističnim tačkama od vremena za skup parametara $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 3\text{rad/s}$, $\delta_2 = \pi/2$.

parametara: $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 3\text{rad/s}$, $\delta_2 = \pi/2$, dok su $\epsilon_r = 55$ i $d = R/3$ kao i do sada.

U slučaju da intenzitet električnog dipolnog momenta nije konstantan već se menja sa vremenom⁷, razlika potencijala u karakterističnim tačkama se nalazi na osnovu prethodnih jednačina tako što se u njima izvrši smena $p_0 \rightarrow p_0(t)$.

⁷Ograničićemo se na slučaj u kom promena intenziteta dipolnog momenta potiče od promene količine naelektrisanja, dok krak dipola d ostaje konstantan.

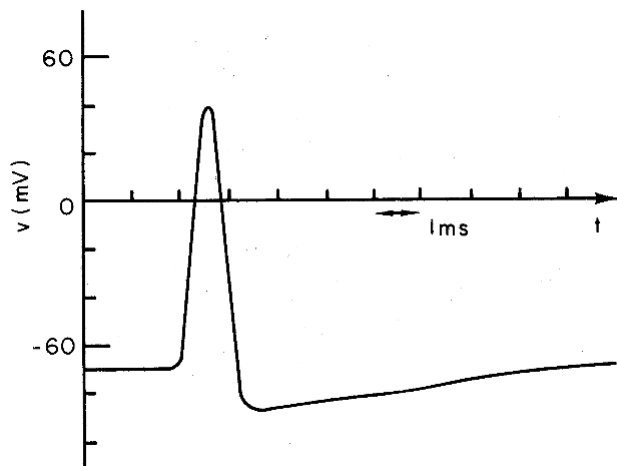
4 Osnovni principi elektrokardiografije

U ovom poglavlju ćemo dati kratak pregled osnovnih fizioloških i fizičkih pojava na osnovu kojih je razvijena metoda elektrokardiografije.

Ukupno naelektrisanje srca tokom jednog otkucaja jednako je nuli, ali tokom tog procesa dolazi do razdvajanja pozitivnih i negativnih naelektrisanja. Zbog tog razdvajanja nastaje električni dipol koji rotira, i čiji se intenzitet prvo povećava a potom smanjuje tokom jednog srčanog ciklusa [5]. Kao posledica toga električni potencijal na površini tela se menja s vremenom tokom svakog ciklusa, i upravo te promene su zabeležene u elektrokardiogramu (EKG).

4.1 Fiziologija mišićnih ćelija

Mišićne ćelije su duge i cilindrične. Kada na ulazni kraj ćelije dođe signal koji prelazi određeni nivo ona se aktivira i električni impuls, odnosno akcioni potencijal, fiksirane veličine i trajanja, putuje duž ćelije. Električni impuls se prostire duž mišićne ćelije da bi inicirao njenu kontrakciju [6].



Slika 10: Tipični nervni impuls tj. akcioni potencijal u zavisnosti od vremena [6].

Kada ćelija miruje, potencijal unutar nje je za oko $70mV$ manji u odnosu na spoljašnjost ćelije⁸. Kada se impuls prostire kroz ćeliju, potencijal za vreme manje od $1ms$ raste do vrednosti od oko $+40mV$, tj. dolazi do depolarizacije. Potencijal kasnije, tokom procesa repolarizacije, pada do oko

⁸Uobičajeno je da se uzme da je potencijal izvan ćelije jednak nuli, tako da će u daljem tekstu ovog poglavlja svi potencijali biti izraženi u odnosu na tu referentnu vrednost.

$-90mV$ da bi se na kraju vratio na prvobitnu vrednost, koju zadržava sve dok je ćelija u fazi mirovanja, od oko $-70mV$ (slika 10).

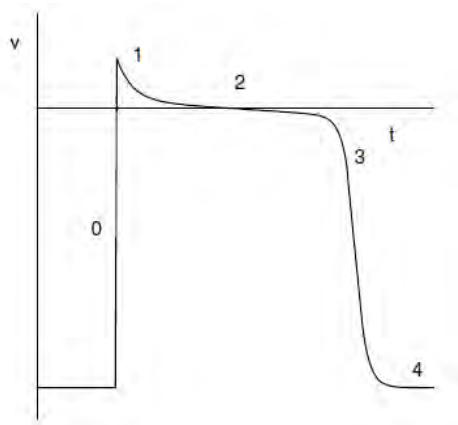
Poređenjem sastava unutarćelijskog fluida i fluida koji okružuje ćeliju primećena je veća koncentracija kalijumovih i smanjena koncentracija natrijumovih i hloridnih jona unutar ćelije. Upravo ova razlika koncentracija dovodi do razlike potencijala sa dve strane ćelijske membrane. Pošto ćelijska membrana nije u potpunosti nepropustljiva za jone, glavnu ulogu u održavanju njihove koncentracije na željenom nivou igra protein ugrađen u membranu poznat kao K-Na pumpa, koji koristi energiju metabolizma za aktivni transport ovih jona. Iznenađne promene membranskog potencijala izazvane su promenom propustljivosti membrane za pomenute jone.

Akcioni potencijal se kroz ćelije prenosi bez promene oblika. Informacija koja se šalje kroz nervnu ćeliju kodirana je brzinom ponavljanja ovih impulsa. Brzina i oblik akcionog potencijala u određenom tipu ćelija zavise od osobina ćelijske membrane i od koncentracija određenih jona unutar i izvan ćelije.

4.2 Električne osobine srca

Mišićne ćelije srca kod sisara duge su oko $100\mu m$, dok im je prečnik oko $10\mu m$. Unutrašnjosti susednih ćelija su direktno povezane tako da struja i joni mogu direktno da prelaze iz jedne ćelije u drugu.

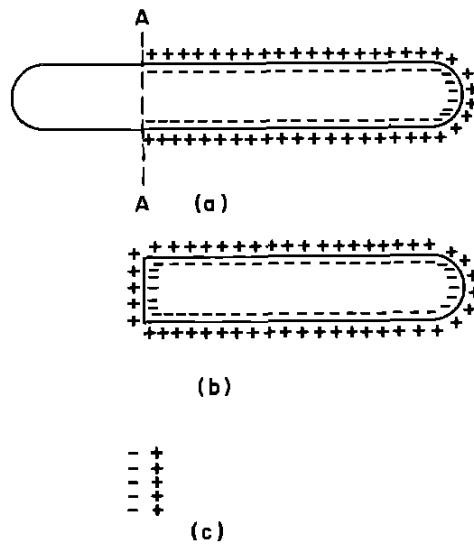
Kada srce miruje, potencijal unutar ćelija pretkomora je oko $-70mV$ dok je potencijal unutar ćelija komora oko $-90mV$. Kada se ćelija depolarizuje, akcioni potencijal traje $100 - 300ms$, zavisno od vrste. Tipičan akcioni potencijal za ćelije srca prikazan je na slici 11. Oblik potencijala može da bude drugačiji u različitim delovima srca ili kod različitih vrsta sisara.



Slika 11: *Akcioni potencijal za ćelije srca [6]. Depolarizacija se događa za oko $1ms$ i traje $200 - 300ms$. Potencijal mirovanja je oko $-90mV$.*

Početna brza depolarizacija ćelija srca (faza 0 na grafiku) izazvana je strujom jona natrijuma kroz ćelijsku membranu i traje oko $1ms$. Pad potencijala u fazi 1 izazvan je strujom kalijumovih jona koja se tada javlja i koja je izraženija kod ćelija koje se nalaze u unutrašnjosti nego kod ćelija koje se nalaze u spoljnim delovima srca. Ona se ubrzo uravnotežava strujom Ca^{2+} jona i tako nastaje plato na grafiku (faza 2). Kada se konačno otvore spori kalijumovi kanali dolazi do repolarizacije (faza 3) i uspostavlja se početna vrednost potencijala i koncentracija jona unutar ćelije (faza 4).

Posmatrajmo ćeliju koja je depolarizovana delom svoje dužine, kao što je prikazano na slici 12(a).



Slika 12: (a) Delimično depolarizovana mišićna ćelija. Raspodelu naelektrisanja na ćeliji i potencijal koji od nje potiče možemo posmatrati kao superpoziciju raspodela naelektrisanja (b) i (c) i njihovih potencijala [7].

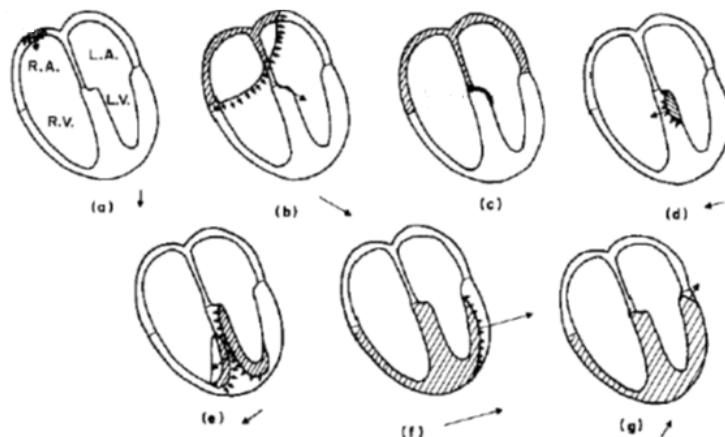
Želimo da nađemo potencijal u nekoj spoljašnjoj tački, a koji potiče od raspodele naelektrisanja desno od ravni AA. Raspodelu naelektrisanja na slici 12(a) možemo posmatrati kao superpoziciju raspodela naelektrisanja na slikama 12(b) – (c). Potencijal raspodele naelektrisanja na slici 12(b) je nula⁹, pa je traženi potencijal jednak potencijalu dvostrukog sloja naelektrisanja sa slike 12(c) (koji očigledno predstavlja jedan mali električni dipol) [7].

U početnom trenutku, ćelije srca su potpuno polarizovane i ne poseduju nikakav dipolni momenat. U jednom delu srca ćelije počnu da se depolarizuju i taj proces se širi kroz srce. Za svaku ćeliju možemo da zamislimo

⁹Uvek kada imamo uniformni dvostruki sloj naelektrisanja na zatvorenoj površini, potencijal u nekoj spoljašnjoj tački, koji potiče od tih naelektrisanja, jednak je nuli.

dvostruki poprečni sloj naelektrisanja, kao na slici 12(c), sa dipolnim momentom usmerenim ka delu ćelije koji je i dalje polarizovan. Ovi slojevi, za sve ćelije, stvaraju nastupajući talasni front depolarizacije. Ako pretpostavimo da se nalazimo daleko od srca i zanemarimo činjenicu da se različiti dipoli nalaze na različitim rastojanjima od tačke posmatranja, možemo govoriti o trenutnom ukupnom dipolnom momentu srca kao o vektorskoj sumi dipolnih momenata za svaku ćeliju.

Srce može da kuca i kada je izolovano od ostatka organizma. Ako se se stavi u odgovarajući rastvor ono nastavlja spontano da kuca. Prilikom svakog otkucaja talas depolarizacije se širi kroz srce i ono se kontrahuje. Ovaj talas inicira grupa specijalizovanih ćelija koja se nalazi u desnoj pretkomori i koja se naziva sinoatrijalni čvor (SA čvor). Kod čoveka, SA čvor se aktivira 60 do 100 puta u minutu.



Slika 13: *Kretanje talasa depolarizacije kroz srce: (a) početak procesa depolarizacije u SA čvoru; (b) pretkomore su skoro u potpunosti depolarizovane; (c) AV čvor provodi signal; (d) početak depolarizacije leve komore; (e, f) dalja depolarizacija komora; (g) depolarizacija komora je gotovo kompletna. Strelice na slikama predstavljaju trenutni ukupni dipolni moment srca [7].*

Na slici 13 prikazano je prostiranje talasa depolarizacije kroz srce. Kada se SA čvor aktivira, depolarizacija se prostire kroz obe pretkomore sve dok one ne postanu potpuno depolarizovane. Pretkomore srca su od komora odvojene tkivom koje ne provodi akcioni potencijal. Jedina veza između pretkomora i komora je mali deo provodnog tkiva nazvan atrioventrikularni čvor¹⁰ (AV čvor). Kada prođe kroz AV čvor depolarizacija se dalje širi kroz obe komore

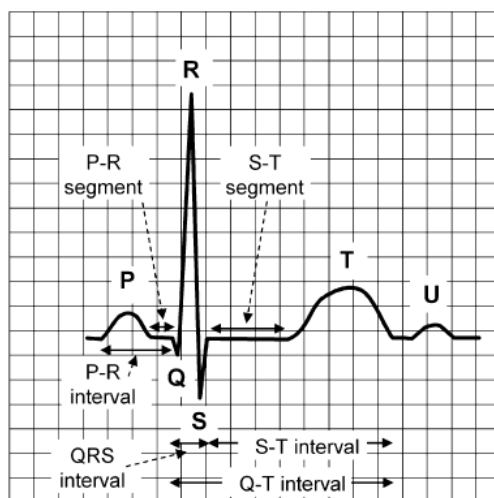
¹⁰Poznat takođe i kao Ašoft-Tavarinov, odnosno pretkomorno-komorni čvor, dok se SA čvor takođe naziva i Kejt-Flakov ili sinusni čvor [8].

dok ne zahvati celo srce. AV čvor bi se spontano depolarizovao oko 50 puta u minutu, ali do toga najčešće ne dolazi pošto je već aktiviran od strane SA čvora.

Postoji bitna razlika između procesa depolarizacije i repolarizacije koja se sastoji u tome da se depolarizacija prostire kroz srce kao talas (depolarizacija jedne ćelije inicira depolarizaciju susednih ćelija) dok je repolarizacija lokalni fenomen (repolarizacija jedne ćelije ne samo da ne izaziva isti proces u susednim ćelijama već ga usporava). Ova razlika je posledica zavisnosti propustljivosti membrane za određene jone od potencijala unutar ćelije.

4.3 Elektrokardiogram

Usled promena ukupnog trenutnog dipolnog momenta srca električni potencijal na koži se menja sa vremenom tokom svakog srčanog ciklusa i to je zabeleženo na elektrokardiogramu (EKG). Uobičajeno je da se meri 12 potencijalnih razlika uz pomoć 9 elektroda postavljenih na određena mesta na koži. One daju mnoštvo informacija o evoluciji srčanog dipola na osnovu kojih možemo doći do zaključaka o potencijalnim poremećajima u radu srca. Tipični EKG je prikazan na slici 14.

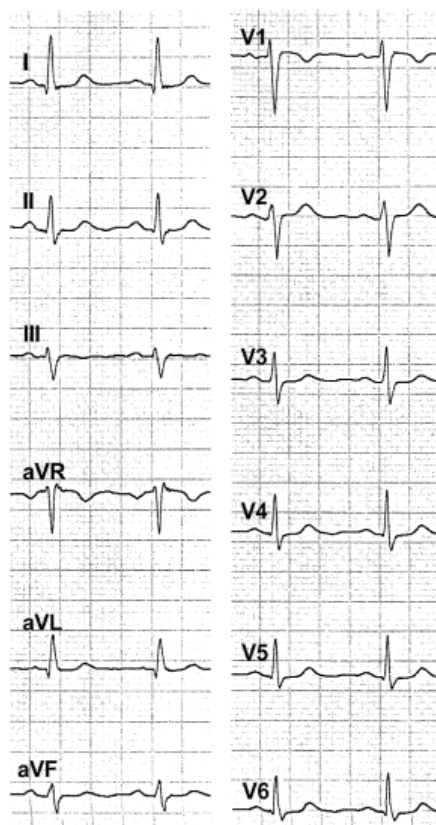


Slika 14: Normalni elektrokardiogram jednog srčanog ciklusa na kome možemo uočiti: P talas (depolarizacija pretkomora), QRS kompleks (depolarizacija komora) i T talas (repolarizacija komora) [5].

Razlika potencijala u izabranim tačkama se menja prikazujući na grafiku depolarizaciju desne i leve pretkomore (P talas), depolarizaciju desne i leve komore (QRS kompleks) i repolarizaciju srčanih komora (T talas). Proces

repolarizacije pretkomora se ne može videti na elektrokardiogramu pošto se događa paralelno sa depolarizacijom komora koja je mnogo dominantniji proces i njome je zamaskiran.

Uobičajeni položaji za postavljanje elektroda kojima se meri potencijal na površini tela su: *A*-desno rame, *B*-levo rame i *C*-leva noga, dok se preostalih 6 elektroda postavljaju na grudnom košu u visini srca. Razlike potencijala *I*, *II* i *III* se dobijaju kao razlike potencijala *A*, *B* i *C*; *aVR*, *aVL* i *aVF* se dobijaju iz *I*, *II* i *III* na osnovu jednostavnih algebarskih izraza; *V1*-*V6* se dobijaju kao razlike potencijala svake od elektroda postavljene na grudima i srednjeg potencijala elektroda *A*, *B* i *C*. Ovih 12 standardnih elektrokardiograma prikazani su na slici 15.



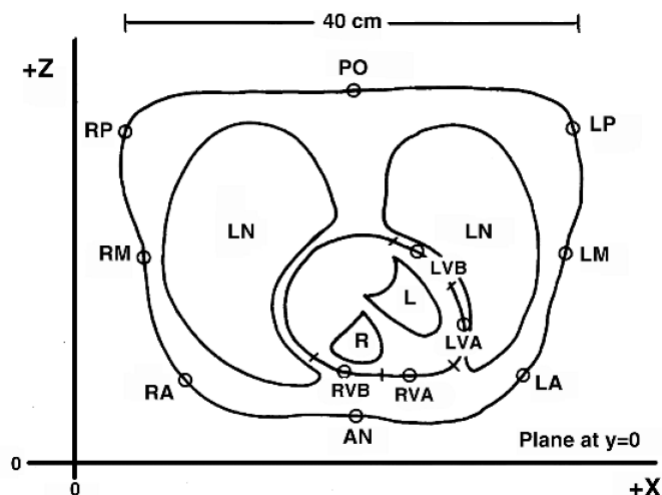
Slika 15: Dvanaest normalnih elektrokardiograma dobijenih pomoću 9 elektroda [5].

5 Modelovanje elektrokardiograma na osnovu potencijala rotirajućeg dipola

Pokušaćemo da, posmatrajući srce kao električni dipol a torzo čoveka kao supstancijalnu sredinu sfernog oblika, na osnovu jednačina za potencijal dipola u karakterističnim tačkama koje smo izveli u 2. i 3. poglavlju, dobijemo bar približan oblik elektrokardiograma, i tako opravdamo naš pokušaj da se električne osobine srca modeluju na ovaj način.

5.1 Osnovne napomene

Ako pogledamo poprečni presek ljudskog tela u visini srca (slika 16), uočavamo da je srce veliki organ čije dimenzije su malo veće od rastojanja između površine srca i površine tela [9]. Prosečna dužina srca je oko 12cm , a širina torza obeležena na slici je 40cm . Na osnovu ovoga čini se opravdanim da u našem modelu uzmemo da je $d = \frac{1}{3}R$.



Slika 16: Poprečni presek torza čoveka u visini srca. Bitne oznake na slici: LN - pluća, R - desna strana srca, L - leva strana srca, AN - prednja strana torza, PO - zadnja strana torza. Slika je preuzeta iz [9].

Ljudsko telo se sastoji od različitih tkiva, od kojih neka imaju veoma različite električne osobine. Pošto u našem modelu telo posmatramo kao homogenu supstancijalnu sredinu potrebno je da odredimo usrednjenu vrednost relativne dielektrične konstante koja će važiti za torzo kao celinu. Prva ideja od koje smo pošli u ovom razmatranju je činjenica da oko $2/3$ ljudskog

organizma čini voda. Relativna dielektrična konstanta vode na temperaturi od 20°C je $\epsilon_r \approx 80$, a sa porastom temperature ova vrednost blago opada. U literaturi [10] se mogu naći i vrednosti relativne dielektrične konstante za neka tkiva i organe koje bi nam mogle biti od interesa: krv $\epsilon_r \approx 57$, lipidni sloj $\epsilon_r \approx 5$, mišići $\epsilon_r \approx 60$, srce $\epsilon_r \approx 60$, bubreg $\epsilon_r \approx 57$, jetra $\epsilon_r \approx 50$, pluća $\epsilon_r \approx 20 - 50$ (zavisno od toga u kojoj meri su ispunjena vazduhom), stomak $\epsilon_r \approx 75$. Na osnovu svega navedenog naša procena relativne dielektrične konstante za ceo organizam, koju ćemo i koristiti u modelu, je $\epsilon_r = 55$.

Treba istaći dve važne napomene u vezi sa prethodnim veličinama (d i ϵ_r) čije vrednosti smo morali da procenimo da bismo mogli da primenimo naš model. Kao prvo, ljudi se međusobno veoma razlikuju, pa pomenuti parametri mogu dosta da variraju od jedinke do jedinke i njihove vrednosti zavise od većeg broja faktora kao što su: godine starosti, pol, zdravstveno stanje, atletska razvijenost, itd. Druga napomena se tiče toga da male varijacije u vrednostima ovih veličina ne utiču značajno na oblik funkcija koje ćemo dobiti. Pošto ćemo se baviti uglavnom kvalitativnom analizom rezultata veća preciznost njihovog određivanja nam u ovom slučaju nije neophodna.

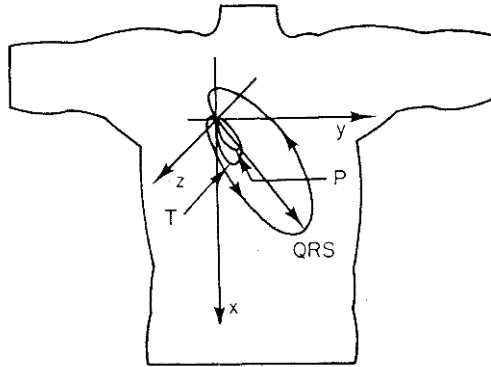
Izraz $p_0/4\pi\epsilon_0 R^2$ množi sve članove u jednačinama sa kojima ćemo raditi, tako da za njega nećemo uzimati konkretnu vrednost jer ne menja oblik funkcije. Kao i do sada taj izraz će predstavljati jedinicu u kojoj su izraženi potencijali.

5.2 Model srca kao sistema dva rotirajuća dipola

Kao što smo videli na graficima u 3.3, razlike potencijala u karakterističnim tačkama za dipol koji rotira na proizvoljan način pokazuju očiglednu periodičnost, međutim, uprkos velikom broju pokušaja, variranjem parametara nismo uspeli da dobijemo oblik funkcije sličan elektrokardiogramu. To nas nije obeshrabilo, a novu inspiraciju da srce posmatramo kao sistem dva dipola koji rotiraju na proizvoljan način dobili smo u radu [11] koji isti problem tretira iz suprotnog ugla. Naime, autori ovog rada izvršili su veoma precizna merenja potencijala na površini tela koristeći čak 64 elektrode, a onda pomoću kompjuterske simulacije pokušali da odrede intenzitet dipolnog momenta srca i način njegovog kretanja. Došli su do zaključka da se dobijeni eksperimentalni rezultati nedovoljno dobro objašnjavaju ako se srce predstavi kao jedan rotirajući dipol. S druge strane, ako se srce posmatra kao sistem dva rotirajuća dipola dobija se veoma dobro podudaranje rezultata.

Sledeći korak u razvoju modela u našem radu bio je da odredimo način na koji se menja intenzitet dipolnog momenta srca. Najveću pomoć pri tome nam je pružio grafik prikazan na slici 17. Na njemu vidimo neku vrstu

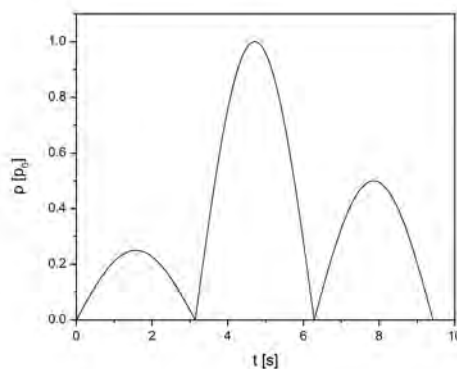
trostruke "petlje". Radi se o liniji koju opisuje vrh vektora dipolnog momenta srca tokom jednog srčanog ciklusa .



Slika 17: Linija koju opisuje vrh vektora električnog dipolnog momenta srca tokom jednog srčanog ciklusa. Sastoji se iz tri dela koji predstavljaju: P - depolarizaciju pretkomora , QRS - depolarizaciju komora (repolarizacija pretkomora se ne vidi na grafiku jer je ekranirana ovim efektom) i T - repolarizaciju komora [6].

U našem modelu uzeli smo da se intenzitet dipolnog momenta srca menja na sledeći način (slika 18):

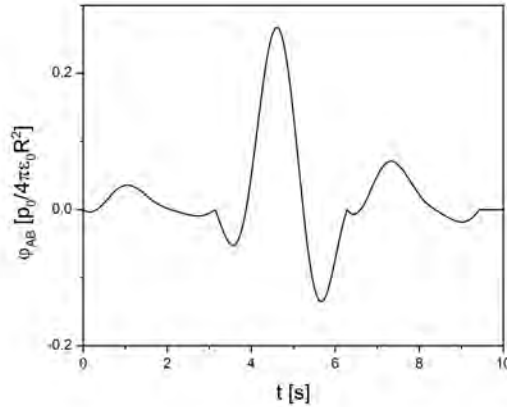
$$p(t) = p_0 \begin{cases} 0.25\sin(\omega t), & 0 \leq \omega t \leq \pi, \\ -\sin(\omega t), & \pi \leq \omega t \leq 2\pi, \\ 0.5\sin(\omega t), & 2\pi \leq \omega t \leq 3\pi. \end{cases} \quad (77)$$



Slika 18: Zavisnost intenziteta dipolnog momenta srca od vremena.

Dakle posmatraćemo sistem dva dipola koji se kreću nezavisno i na proizvoljan način tako da su razlike potencijala koje svaki od njih pojedinačno stvara u karakterističnim tačkama date jednačinama (76), i čiji se intenzitet dipolnog momenta menja prema (77). Prvi dipol biće opisan skupom parametara $(\omega_1, \delta_1, \omega_2, \delta_2)$, a drugi $(\omega_3, \delta_3, \omega_4, \delta_4)$, dok će za oba važiti $\epsilon_r = 55$ i $d = R/3$ kao što smo ranije obrazložili.

Ako izaberemo sledeće parametre: $\omega_1 = 2rad/s$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 3rad/s$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 1rad/s$, dobijamo grafik $\varphi_{AB}(t)$ prikazan na slici 19.



Slika 19: Zavisnost razlike potencijala φ_{AB} od vremena za izbor parametara: $\omega_1 = 2rad/s$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 3rad/s$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 1rad/s$.

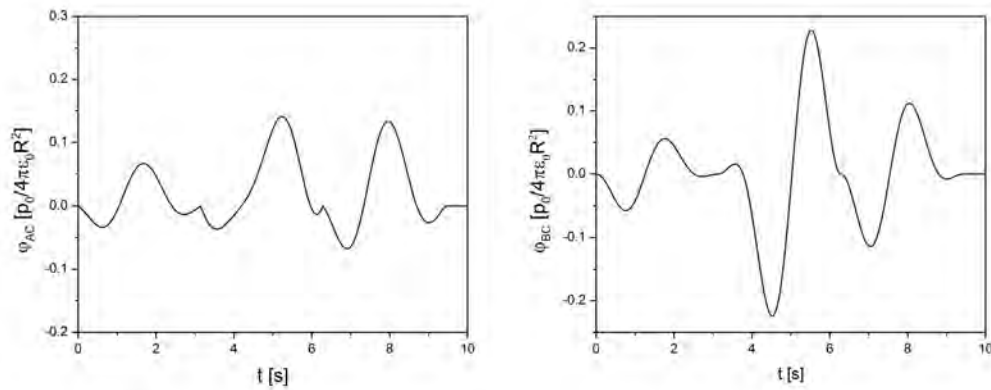
Na njemu se jasno uočavaju P, QRS i T talas, i svojim oblikom prati elektrokardiogram zdravog srca tokom jednog srčanog ciklusa. Grafici zavisnosti φ_{AC} i φ_{BC} od vremena, za isti set parametara, dati su na slici 20.

Zanimljivo je primetiti da se ovakvim izborom parametara naš sistem svodi na jednostavan sistem dva dipola od kojih jedan rotira u vertikalnoj ravni koja sadrži karakteristične tačke, a drugi u horizontalnoj ravni normalnoj na nju.

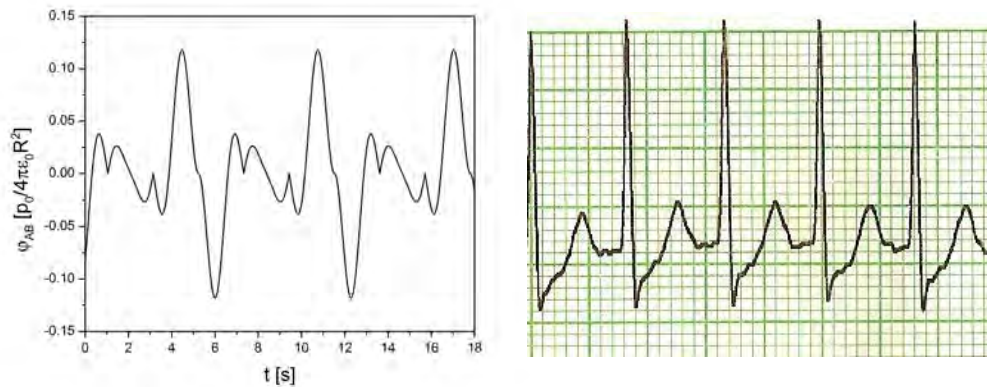
Ako sada pretpostavimo da se intenzitet dipolnog momenta menja na sledeći način:

$$p(t) = p_0 |\cos(\omega t)|, \quad (78)$$

i izaberemo sledeće vrednosti parametara: $\omega_1 = 2rad/s$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 3rad/s$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 1.5rad/s$, dobijamo grafik $\varphi_{AB}(t)$ prikazan na slici 21.

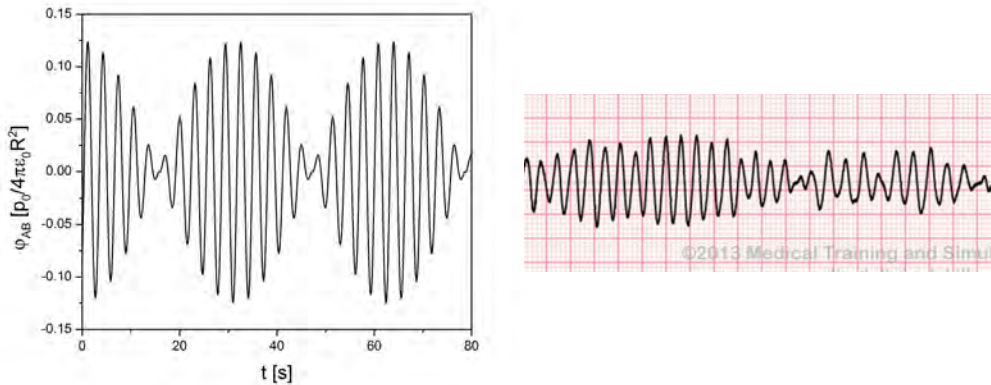


Slika 20: Zavisnost razlika potencijala φ_{AC} i φ_{BC} od vremena za izbor parametara: $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 3\text{rad/s}$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 1\text{rad/s}$.



Slika 21: *Levo:* Zavisnost razlike potencijala φ_{AB} od vremena za izbor parametara: $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 3\text{rad/s}$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 1.5\text{rad/s}$. *Desno:* Realni elektrokardiogram čoveka koji boluje od supraventrikularne tahikardije tj. ubrzanog rada srca koje u ovom slučaju kuca 150-250 puta u minuti. Preuzeto iz [12].

Na slici 22 dat je grafik $\varphi_{AB}(t)$ za sledeći set parametara: $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 2\text{rad/s}$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 0.1\text{rad/s}$.



Slika 22: *Levo: Zavisnost razlike potencijala φ_{AB} od vremena za izbor parametara: $\omega_1 = 2\text{rad/s}$, $\delta_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\delta_2 = \pi/2$, $\omega_3 = 0$, $\delta_3 = \pi/2$, $\omega_4 = 2\text{rad/s}$, $\delta_4 = 0$ i $\omega = 0.1\text{rad/s}$. Desno: Realni elektrokardiogram čoveka koji boluje od specifične TdP tahikardije tj. ubrzanog rada srca koje u ovom slučaju kuca 200-250 puta u minutu. Preuzeto iz [13].*

Tokom normalne srčane aktivnosti, između svake dve kontrakcije postoji određeni kratak period u kome srce miruje i ne reaguje na signale koje šalje SA čvor. Međutim, kod nekih fizioloških stanja taj period mirovanja izostaje, tako da se srce neprestano kontrahuje, dolazi do ponovne depolarizacije pretkomora srca i pre nego što je završena repolarizacija komora, pa se T talas prethodnog otkucaja i P talas narednog otkucaja na elektrokardiogramu preklapaju. Upravo zbog toga (78) predstavlja relativno dobru aproksimaciju promene intenziteta električnog dipolnog momenta srca za slučaj tahikardije odnosno ubrzanog rada srca.

6 Zaključak

U ovom master radu pokušali smo da pomoću prilično jednostavnog sistema modelujemo veoma složeni biološki proces. Da bismo mogli da primenimo naš model izvršili smo veliki broj pojednostavljanja, ljudski torzo smo posmatrali kao homogenu sferu dok smo srce predstavili kao sistem dva rotirajuća dipola. Najbolje rezultate dobili smo za slučaj kada ti dipoli rotiraju u međusobno normalnim ravnima. Tačke u kojima određujemo potencijale smo izabrali tako da geometrijski pojednostavimo problem iako se njihovi položaji razlikuju od onih koji se koriste u praksi. Najveći uspeh našeg modela predstavlja to što smo uspeli da, barem kvalitativno, dobijemo grafike zavisnosti razlika potencijala u karakterističnim tačkama od vremena čiji oblik se u velikoj meri poklapa sa oblikom realnih elektrokardiograma, i to kako za zdravo srce tako i za srce koje radi ubrzano.

Perspektive daljeg usavršavanja ovog modela pokazuju u pravcu izmeštanja sistema dipola iz centra sfere i konstrukcije sistema sa većim brojem dipola čije kretanje može biti i kompleksnije od onog koje smo mi razmatrali.

Ležandrovi polinomi

Ležandrovi polinomi su ortogonalni polinomi za koje važi izraz:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \quad (-1 \leq x \leq 1; |t| < 1), \quad (79)$$

gde je

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{(l-k)!(l-k)!} \binom{l-k}{k} x^{l-2k}. \quad (80)$$

Formula (80) određuje Ležandrov polinom, a funkcija $G = (1-2xt+t^2)^{1/2}$ se naziva generatrisa Ležandrovih polinoma [2].

Iz (80) sledi osobina parnosti Ležandrovih polinoma:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x). \quad (81)$$

Nekoliko prvih Ležandrovih polinoma su:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{2^3}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{2^3}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (82)$$

Primećujemo da je P_l polinom l -tog reda po x i da ako je l parno sadrži samo parne članove a ako je l neparno sadrži samo neparne članove.

Polinomu P_l možemo dati sažeti oblik:

$$P_l(x) = \frac{1}{n!2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (83)$$

koji se zove Rodriguesova formula¹¹.

Za Ležandrove polinome važi relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}. \quad (84)$$

¹¹Ovu formulu dokazao je O.Rodrigues 1814. godine.

Literatura

- [1] Predrag M.I. Dimitrijević, *Fizika - Elektromagnetizam*, Fakultet zaštite na radu, Univerzitet u Nišu, Niš, 2003.
- [2] Dragoslav S. Mitrović, Radovan R. Janić, *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
- [3] Božidar S. Milić, *Mekselova elektrodinamika*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1996.
- [4] David J. Griffiths, Reed College, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999. (3rd edition)
- [5] Irving P. Herman, *Physics of human body*, Springer, New York, 2007.
- [6] Russell K. Hobbie, Bradley J. Roth, *Intermediate physics for medicine and biology*, Springer, New York, 2007. (4th edition)
- [7] Russell K. Hobbie, *The electrocardiogram as an example of electrostatics*, Am. J. Phys. **41**, 824 (1973)
- [8] Dejan Raković, *Osnovi biofizike*, IASC & IEFPG, Beograd, 2008.
- [9] Robert Plonsey, Roger C. Barr, *Bioelectricity: a quantitative approach*, Springer, New York, 2007. (3rd edition)
- [10] Cynthia Furse, Douglas A. Christensen, Carl I. Durney, *Basic introduction to bioelectromagnetics*, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, 2009. (2nd edition)
- [11] Yoshiwo Okamoto, Yasuaki Teramachi, Toshimitsu Musha, Hiroshi Tsunakawa, Ken-ichi Harumi, *Moving multiple dipole model for cardiac activity*, Jpn. Heart J. **23**, 293 (1982)
- [12] www.en.wikipedia.org/wiki/Supraventricular_tachycardia
- [13] www.practicalclinicalskills.com