Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

Neki kontraprimeri o graničnim teoremama teorije verovatnoće

Master rad

Student:
Jelena Palurović

Mentor:
Prof. dr Marija Milošević

Niš, 2020.

Sadržaj:

Uvod

Teorija verovatnoća je matematička disciplina koja izučava zakonitosti pojava čiji su ishodi slučajni. Ove zakonitosti nastaju pri istovremenom uticaju velikog broja slučajnih faktora. Teorija verovatnoća je osnova matematičke statistike, teorije slučajnih procesa, teorije masovnog opsluživanja, teorije pouzadnosti, itd. Primenjuje se u raznim oblastima kao što su statistička fizika, stohastička hidrologija, biologija, medicina, meteorologija, demografija, ekonomija, itd. Prvi radovi matematičara koji su sadržali osnovne ideje teorije verovatnoća pojavili su se u XVI i XVII veku i bili su vezi sa određivanjem šansi dobitka u igrama na sreću. Sledeća etapa u razvoju teorije verovatnoća vezuje se za Jakoba Bernulija. On je u svojoj knjizi "Veština predviđanja" strogo formulisao i dokazao prvu graničnu teoremu. Ova teorema, koja se danas naziva Bernulijev zakon velikih brojeva, predstavlja teorijsku osnovu daljih razmatranih činjenica. Ona tvrdi da je verovatnoća odstupanja relativne učestanosti nekog događaja od njegove verovatnoće mala, ukoliko je broj ponavljanja eksperimenta u kome se događaj realizuje dovoljno veliki. Poseban doprinos je dao i Aleksandar Ljapunov. On je formulisao teoremu koja je dobila naziv "centralna granična teorema".

Tema ovog master rada su neki kontraprimeri o graničim teoremama teorije verovatnoća. Glavni cilj ovog master rada je da kroz različite kontraprimere prikaže snagu, širinu i netrivijalnosti teorije verovatnoća. Ako su određeni potrebni i dovoljni uslovi za neki iskaz ili rezultat, onda svaka promena uslova podrazumeva da rezultat ne mora da važi. Prema tome, iskaz mora biti modifikovan. Ovde je pažnja usmerena na pitanja koja se tiču neophodnosti nekih dovoljnih uslova, dovoljnosti određenih neophodnih uslova, valjanosti iskaza koji je suprotan drugom iskazu. U prvoj glavi ovog rada su dati odgovarajući rezultati iz teorije verovatnoća koji se primenjuju u radu. U drugoj glavi su predstavljeni kontraprimeri koji se tiču konvergencije i divergencije nizova funkcija raspodela. Osim toga, razmatrani su različiti tipovi konvergencija i njihovi međusobni odnosi. Takođe, uveden je i pojam slabe konvergencije, kao i konvergencije u varijaciji. Dokazano je da je kompletna konvergencija stroža od skoro izvesne konvergencije. U trećoj glavi posebna pažnja je usmerena na zakone velikih brojeva. Formulisani su neki osnovni rezultati koji se odnose na strogi i slabi zakon velikih brojeva. Posebno su razmatrani uslov Kolmogorova i uslov Markova i njihova neophodnost i dovoljnost za zakon velikih brojeva. U četvrtoj glavi je definisan pojam slabe konvergencije i data je njena veza sa ostalim vrstama konvergencija. Centralna granična teorema smatra se jednim od kamena temeljaca savremene teorije verovatnoća. Dok zakon velikih brojeva tvrdi da aritmetička sredina slučajnih promenljivih konvergira matematičkom očekivanju, centralna granična teorema daje asimptotsku raspodelu aritmetičke sredine. Ova teorema tvrdi da zakon raspodele sume velikog broja slučajnih promenjivih teži normalnoj raspodeli. O ovome se govori u petoj glavi. Osim toga, u ovoj glavi su formulisani Lindebergov uslov, Fellerov uslov, kao i uslov uniformne asimptotske zanemarljivosti. Razmatrana je njihova međusobna povezanost sa samom teoremom. Takođe, razmatrani su i specijalni oblici centralne granične teoreme kao što su integralna i lokalna centralna granična teorema.

Ovaj master rad je urađen pod mentorstvom profesorke dr Marije Milošević. Ovom prilikom joj zahvaljujem na velikoj i stručnoj pomoći, kao i na nesebičnoj podršci koju mi je pružila u toku izrade master rada prateći ceo tok izrade. Zahvaljujem i profesorkama dr Miljani Jovanović i dr Jasmini Đorđević na sugestijama koje su poboljšale kvalitet rada.

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi će najpre biti predstavljeni osnovni elementi teorije verovatnoća. U tom smislu, biće reči o vrstama konvergencije nizova slučajnih promenjivih, zakonima velikih brojeva i centralnoj graničnoj teoremi, što je ujedno i motivacija za dalje razmatranje primera u okviru narednih poglavlja. Biće navedeni i svi rezultati koji će direktno biti korišćeni u nastavku ovog rada.

Svi događaji, kao podskupovi skupa Ω, pripadaju partitivnom skupu $P(\Omega)$. Međutim, u opštem slučaju verovatnoća se ne zadaje za sve podskupove, već samo za one koji pripadaju familiji koja se naziva σ-algebra.

Definicija 1.1 Klasa $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω predstavlja σ-algebru ako:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.2 Verovatnoća P je preslikavanje $P: \mathcal{F} \to \boldsymbol{R}$ koje ima sledeće osobine:

1) nenegativnost: $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{F}$,
2) normiranost: $P(\Omega) = 1$,
3) σ-aditivnost: za svako $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, tako da je $A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j$, sledi da je $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ predstavlja prostor verovatnoća.

Borel-Kantelijeva lema I: Neka je $\{A_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ niz događaja iz σ-algebre $\mathcal{F}$, pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. Tada se sa verovatnoćom 1 realizuje samo konačno mnogo događaja ovog niza.

Ako je $\Omega = \boldsymbol{R}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{B}_1$, pri čemu je $\mathcal{B}_1$ Borelova σ-algebra generisana poluotvorenim intervalima, verovatnoća $P(A)$ za proizvoljan skup $A \in \mathcal{B}_1$ se definiše na sledeći način pomoću teoreme Kolmogorova.

Teorema 1.1 (***Kolmogorov)*** Neka je $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funkcija sa osobinama:

(F_1) $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) \geq 0, \ \forall x \in \boldsymbol{R}, \ \forall h > 0$, ($F$ neopadajuća funkcija);

(F_2) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, (asimptotska svojstva);

(F_3) $\lim\limits_{x_n \downarrow x, n \to \infty} F(x_n) = F(x), \ \forall x \in \boldsymbol{R}$, (neprekidnost s desna).

Tada je sa $P((a,b]) = F(b) - F(a), -\infty < a < b \leq \infty$ definisana verovatnoća na merljivom prostoru $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}_1)$.

Definicija 1.3 Preslikavanje $X: \Omega \to \boldsymbol{R}$ je slučajna promenjiva ako je:

1) finitno (konačno) preslikavanje, odnosno ako je $P\{\omega \in \Omega: X(\omega) = \pm\infty\} = 0$;
2) $\mathcal{F}$-merljivo preslikavanje, odnosno ako je $(\forall S \in \mathcal{B}_1)\ X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.4 Preslikavanje $X: \Omega \to \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ je n-dimenzionalna slučajna promenjiva ako je $\mathcal{F}$-merljivo preslikavanje, tj. ako $(\forall S \in \mathcal{B}_n)\ X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} \in \mathcal{F}$. Pritom je

$$(\forall \omega \in \Omega)\ X(\omega) = \big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

Definicija 1.5 Funkcija raspodele je funkcija F_X koja, za svaki realan broj x, određuje verovatnoću da je slučajna promenjiva X uzela vrednost ne veću od x, odnosno:

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Definicija 1.6 Slučajna promenjiva X je diskretnog tipa ako je njen skup vrednosti najviše prebrojiv, tj. ako postoji niz $\{x_i\}_{i \in I}$ takav da je $\sum_{i \in I} P\{X = x_i\} = 1$, gde je I najviše prebrojiv indeksni skup.

Definicija 1.7 Slučajna promenjiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi(x), x \in \boldsymbol{R}$ tako da je

$$(\forall S \in \mathcal{B}_1) \int_S \varphi(x)dx = P\{X \in S\}.$$

Funkcija $\varphi(x)$ je gustina raspodele verovatnoća slučajne promenjive X.

Teorema 1.2 Slučajne promenjive $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako je zajednička funkcija raspodele jednaka proizvodu marginalnih funkcija raspodela, odnosno:

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Definicija 1.8 Matematičko očekivanje proizvoljne slučajne promenljive X je Lebegov integral na skupu Ω $\mathcal{F}$- merljive funkcije X u odnosu na meru P, odnosno

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega).$$

Očekivanje postoji pod uslovom da je $E|X| < \infty$, tj. $\int_\Omega |X(\omega)|P(d\omega) < \infty$.

Definicija 1.9 Neka je X slučajna promenjiva definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je $E(X^n)$ moment reda n slučajne promenjive X.

Definicija 1.10 Očekivanje $E|X - EX|^n$ se naziva centralni moment reda n slučajne promenjive X.

Od posebnog značaja je slučaj kada je $n = 2$. Tada je $DX = E|X - EX|^2$ centralni moment reda dva slučajne promenjive X, odnosno njena disperzija. Disperzija slučajne promenjive X

predstavlja srednje-kvadratno odstupanje slučajne promenjive X od njene očekivane vrednosti. Veličina $\sqrt{DX}$ se naziva standardna devijacija slučajne promenjive X.

Definicija 1.11 Moment reda k slučajne promenjive X se, za $k = k_1 + \cdots + k_n$, $k_i \in \{0, \dots, k\}, i = \overline{1, n}$, definiše kao $E(X_1^{k_1} \cdot \dots \cdot X_n^{k_n})$.

Mešoviti moment drugog reda je kovarijansa slučajnih promenjivih X i Y i definiše se kao

$$cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EX \cdot EY.$$

Definicija 1.12 Karakteristična funkcija slučajne promenjive X, u oznaci $f(t), t \in \boldsymbol{R}$, se definiše kao matematičko očekivanje slučajne promenjive e^{itX}, odnosno

$$f(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x).$$

U slučaju kada je slučajna promenjiva X apsolutno-neprekidnog tipa sa gustinom raspodele $\varphi(x), x \in \boldsymbol{R}$, karakteristična funkcija je oblika $f(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \varphi(x) dx, \ \forall\, t \in \boldsymbol{R}$.

Teorema 1.3 (***O jedinstvenosti funkcije raspodele i karakteristične funkcije***) Funkcije raspodele su identički jednake ako i samo ako su odgovarajuće karakteristične funkcije identički jednake.

U teoriji verovatnoća značajno mesto zauzimaju granične teoreme, kao i konvergencije nizova slučajnih promenjivih. U nastavku će biti definisane osnovne vrste konvergencija nizova slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$.

Postoje četiri osnovne vrste konvergencije niza slučajnih promenjivih:

a) konvergencija u verovatnoći,
b) skoro izvesna (skoro sigurna) konvergencija,
c) srednje-kvadratna konvergencija (konvergencija u srednjem reda $p > 0$),
d) konvergencija u raspodeli.

Definicija 1.13 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *konvergira u verovatnoći* ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{v} X, n \to \infty$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)\ | \geq \varepsilon\} \to 0, n \to \infty.$$

Definicija 1.14 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *skoro izvesno* (skoro sigurno, sa verovatnoćom 1) konvergira ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{s.i.} X, n \to \infty$, ako je

$$P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega), n \to \infty\} = 1.$$

Definicija 1.15 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *konvergira u srednjem reda p,* $p > 0$ ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{p} X$, ako je

$$E|X_n|^p < \infty\,,\ E|X_n - X|^p \to 0, n \to \infty.$$

Specijalno, niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *srednje-kvadratno konvergira* ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{s.k.} X, n \to \infty$ ako je

$$\mathrm{E}X_n{}^2 < \infty\,, \quad E|X_n - X|^2 \to 0, n \to \infty.$$

Definicija 1.16 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *konvergira u raspodeli* ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{r} X$, ako i samo ako je

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x), \qquad \forall\, x \in C(F),$$

gde je F_n funkcija raspodele slučajne promenjive X_n, F funkcija raspodele slučajne promenjive X i $C(F)$ skup tačaka neprekidnosti funkcije raspodele F.

Definicija 1.17 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *konvergira kompletno* ka slučanoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow{k} X$, ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_n - X\,| > \varepsilon\}) < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

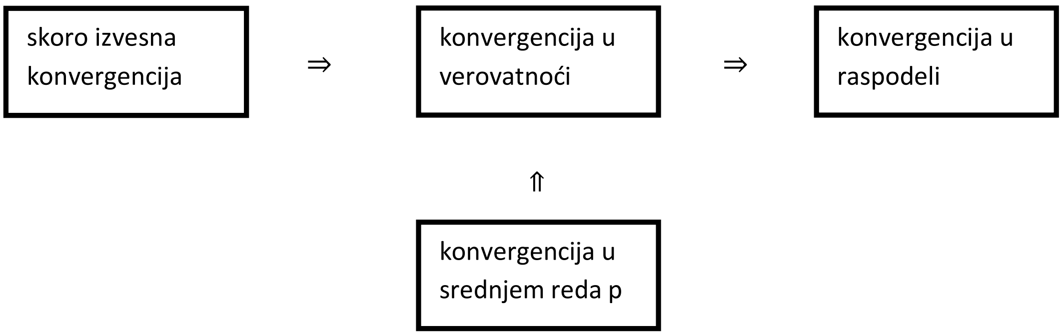
Definicija 1.18 Niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih *uniformno konvergira* ka slučajnoj promenjivoj X, kada $n \to \infty$, u oznaci $X_n \rightrightarrows X, n \to \infty$, ako je

$$sup_{\omega \in \Omega} |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0, n \to \infty.$$

Definicija 1.19 Niz $\{F_n, n \geq 1\}$ funkcija raspodela *slabo konvergira* ka neopadajućoj funkciji F, u oznaci $F_n \xrightarrow{s} F$, ako konvergira u tačkama neprekidnosti funkcije F.

Definicija 1.20 Niz $\{F_n, n \geq 1\}$ funkcija raspodela *kompletno konvergira* ka funkciji F, u oznaci $F_n \xrightarrow{k} F$, ako slabo konvergira i ako je F funkcija raspodele.

Odnos između navedenih vrsta konvergencija se može predstaviti sledećom šemom:



U narednim glavama, predstavljeni su primeri koji ilustruju ovu šemu. Primeri koji će biti razmatrani pokazuju da su inkluzije u šemi iznad zapravo stroge inkluzije. Veza između ove četiri vrste konvergencije i ostalih vrsta konvergencija slučajnih nizova takođe će biti razmatrana.

U teoriji verovatnoća, od velikog značaja su zakoni velikih brojeva i centralna granična teorema.

Zakoni velikih brojeva se odnose na niz slučajnih promenjivih X_1, X_2, ... za koje je $\mathrm{E}X_n < \infty\,, n \in \boldsymbol{N}$. Ukoliko za dati niz važi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) \xrightarrow{v} 0, \qquad n \to \infty,$$

tada se kaže da za njega vazi ***slabi zakon velikih brojeva***. Ako je

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) \xrightarrow{s.i.} 0, \qquad n \to \infty,$$

tada za dati niz važi ***strogi zakon velikih brojeva***.

Teorema 1.4 (*Drugi zakon velikih brojeva Kolmogorova*) Neka su X_k , $k \geq 1$ nezavisne slučajne promenjive sa istom raspodelom i očekivanjem $EX_1 = c$. Tada je

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{s.i.} c.$$

Centralna granična teorema predstavlja jedan od najvažnijih rezultata u teoriji verovatnoća. Ova teorema se odnosi na primenu slabog zakona velikih brojeva u teoriji verovatnoća. Teorema tvrdi da standardizovana suma nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom teži ka slučajnoj promenjivoj sa normalnom normiranom raspodelom, kada $n \to \infty$. To je još jedan od razloga zbog kojih normalna raspodela ima veliki značaj u teoriji verovatnoća i njenim primenama.

Teorema 1.5 (***Centralna granična teorema***) Neka je S_n = $\sum_{k=1}^{n} X_k$, pri čemu su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenjive sa istom raspodelom. Ako je DX_k=$\sigma^2 < \infty$ i $EX_k = m$, $k \in 1,2, \ldots$ tada važi

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \;\; n \to \infty, \qquad x \epsilon \boldsymbol{R},$$

odnosno,

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{r} Z: \boldsymbol{\mathcal{N}}(0,1), n \to \infty.$$

Glava 2

Različite vrste konvergencija nizova slučajnih promenljivih

2.1 Konvergencija i divergencija nizova funkcija raspodela

U ovom poglavlju će biti rezimirano nekoliko elementarnih iskaza koji pokazuju da niz funkcija raspodela $\{F_n, n \geq 1\}$ može imati različito ponašanje kada $n \to \infty$. Naime, niz može divergirati ili konvergirati, ali ne obavezno ka funkciji raspodele.

I. Neka je $F(x), x\epsilon\boldsymbol{R}$ funkcija raspodele koja je neprekidna. Razmatraju se dva skupa funkcija raspodela: $\{F_n, n \geq 1\}$ i $\{G_n, n \geq 1\}$ gde je $F_n(x) = F(x+n)$ i $G_n(x) = F(x + (-1)^n n)$. Očigledno, $F_n(x) \to 1,\ n \to \infty,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$. Ali funkcija koja je jednaka jedinici u svim tačkama nije funkcija raspodele. Stoga, $\{F_n, n \geq 1\}$ je konvergentan niz, ali granična vrednost $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ nije funkcija raspodele. Dalje, $G_{2n}(x) \to 1$, dok $G_{2n+1}(x) \to 0, n \to \infty, \forall x \in \boldsymbol{R}$. Očigledno niz $\{G_n, n \geq 1\}$ ne konvergira.

II. Razmatra se familija funkcija raspodela $\{F_n, n \geq 1\}$ gde je

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Tada, $F_n(x) \to F(x)$ ako je $x \neq 0$ i $F_n(0) = 0, \forall n \geq 1$ gde je F funkcija raspodele slučajne promenjive koja je jednaka nuli sa verovatnoćom 1. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ postoji, ali granična vrednost nije funkcija raspodele, zato što nije neprekidna s desna u tački $x = 0$.

III. Sledeći elementarni rezultat se uvek koristi kada se razmatra konvergencija u raspodeli.

$$F_n \xrightarrow{r} F \iff \int_{\boldsymbol{R}} g(x) dF_n(x) \to \int_{\boldsymbol{R}} g(x) dF(x), \tag{2.1}$$

za sve neprekidne i ograničene funkcije $g(x), x\epsilon\boldsymbol{R}$. Uprkos činjenici da (2.1) sadrži potreban i dovoljan uslov, korisno je utvrditi da pretpostavke za funkciju g ne mogu biti oslabljene. Na primer, neka je g ograničena i merljiva ali ne neprekidna funkcija. Specijalno, neka je

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Neka su F i F_n funkcije raspodela slučajnih promenjivih $X \equiv 0$ i $X_n \equiv \frac{1}{n}$, redom. Tada je, očigledno:

$$\int gdF_n = 1, \forall n \geq 1,$$
$$\int gdF = 0.$$

Stoga, (2.1) ne važi, kao što je očekivano. Podsećanja radi, relacija (2.1) se može shvatiti kao definicija slabe konvergencije funkcija raspodela.

IV. Neka je X slučajna promenljiva koja ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0,3)$ i neka je $\{Y_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih takvih da je $Y_n = -\frac{1}{n}\ln(3 - X)$. Tada je

$$F_n(y) = P\{Y_n \leq y\} = P\left\{-\frac{1}{n}\ln(3 - X) \leq y\right\},$$

i kako je $3 - X \in (0,1)$, sledi da je $\ln(3 - X) < 0$, i zbog toga je izraz na levoj strani nejednakosti veći od nule. Razmatra se slučaj kada je $y < 0$ i kada je $y \geq 0$.

$$y < 0: F_n(y) = 0,$$
$$y \geq 0: F_n(y) = P\{\ln(3 - X) \geq -ny\} = P\{3 - X \geq e^{-ny}\} =$$
$$= P\{X \leq 3 - e^{-ny}\} = \int_0^{3-e^{-ny}} \frac{1}{3}dx = 1 - \frac{1}{3}e^{-ny}.$$

Očigledno, $\{F_n, n \geq 1\}$ je konvergentan niz, a granična vrednost je funkcija raspodele slučajne promenljive koja je jednaka nuli skoro izvesno. Dakle, niz $\{F_n, n \geq 1\}$ funkcija raspodela kompletno konvergira ka funkciji F.

2.2 Konvergencija u raspodeli ne implicira konvergenciju u verovatnoći

Ovde će biti predstavljeno nekoliko specifičnih primera koji u opštem slučaju pokazuju da

$$X_n \xrightarrow{r} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{v} X.$$

I. Neka je X Bernulijeva slučajna promenjiva, tj. X je slučajna promenjiva koja uzima vrednosti 1 i 0 sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$, odnosno,

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih takvih da je $X_n = X, \forall n$. Kako je $X_n = X$ u raspodeli, onda $X_n \xrightarrow{r} X, n \to \infty$. Sada, neka je $Y = 1 - X$. Prema tome, $X_n \xrightarrow{r} Y$, jer Y i X imaju istu raspodelu. Međutim, X_n ne može konvergirati ka Y ni na koji način, jer je $|X_n - Y| = 1, \forall\, \omega \in \Omega$. Naime, $P[|X_n - Y| > \varepsilon] \nrightarrow 0$, za proizvoljno $\varepsilon \in (0,1)$ i zbog toga $X_n \nrightarrow Y$ u verovatnoći, kada $n \to \infty$.

II. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}$- σ-algebra svih podskupova od Ω, P- diskretna uniformna mera. Definišu se slučajne promenjive $X_n, n \geq 1$ i X gde je:

$$X_n(\omega_1) = X_n(\omega_2) = 1, X_n(\omega_3) = X_n(\omega_4) = 0, n \geq 1,$$
$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0, X(\omega_3) = X(\omega_4) = 1.$$

Tada je, $|X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$ za svako $\omega \in \Omega$ i $n \geq 1$. Prema tome, kao i u slučaju I, X_n ne može konvergirati u verovatnoći ka X kada $n \to \infty$. Ako su F i $F_n, n \geq 1$ funkcije raspodela slučajnih promenjivih X i X_n , $n \geq 1$ redom, tada:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \qquad F_n(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Prema tome, $F_n(x) = F(x)$ za svako $x \in \boldsymbol{R}$ i trivijalno $F_n(x) \to F(x)$ u svakoj tački neprekidnosti funkcije F. Dakle, $X_n \xrightarrow{r} X$, ali $X_n \nrightarrow X$ u verovatnoći.

2.3 Nizovi slučajnih promenljivih konvergiraju u verovatnoći, ali ne i skoro izvesno

I. Neka je $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i **P** Lebegova mera. Za svaki broj $n \in \boldsymbol{N}$ postoji samo jedan par prirodnih brojeva, m i k, gde je $m \geq 0, 0 \leq k \leq 2^m - 1$, tako da je $n = 2^m + k$. Definiše se niz događaja $A_n = [k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$ i $X_n = X_n(\omega) = 1_{A_n}(\omega)$. Tako se dobija niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$. Očigledno,

$$P[|X_n| \geq \varepsilon] = \begin{cases} 2^{-m}, 0 < \varepsilon < 1, \\ 0, \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

Kako $n \to \infty$ ako i samo ako $m \to \infty$, zaključuje se da

$$X_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty. \tag{2.3.1}$$

Sada ostaje da se proveri da li se konvergencija u verovatnoći u (2.3.1) može zameniti skoro izvesnom konvergencijom.

Lako je pokazati da, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, uvek postoji beskonačno mnogo brojeva n za koje je $X_n(\omega) = 1$ i beskonačno mnogo brojeva n takvih da je $X_n(\omega) = 0$. Zaista, $\omega \in [k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$ za tačno jedno k, gde je $k = 0,1, \ldots, 2^m - 1$, tj. $\omega \in A_{2^{m+1}}$. Očigledno, ako je $k < 2^m - 1$, tada $\omega \in A_{2^m+k+1}$ i ako je $k = 2^m - 1$ i $m \geq 1$, tada takođe $\omega \in A_{2^{m+1}}$. Drugim rečima, $\omega \in A_n$ beskonačno često i takođe $\omega \in \Omega \backslash A_n$ beskonačno često, što znači da je $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 1$ i $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = 0$. Zbog toga, X_n ne konvergira skoro izvesno ka nuli, kada $n \to \infty$.

II. Razmatra se niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ gde je

$$P[X_n = 1] = \frac{1}{n}, P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Očigledno, za bilo koje $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ važi:

$$P[|X_n - 0| > \varepsilon] = P[X_n = 1] = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty.$$

Prema tome, $X_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$.

Sada će biti pokazano da skoro izvesna konvergencija datog niza ne važi. Biće analizirana opštija situacija. Za dati niz slučajnih promenjivih $X, X_n, n \geq 1$ definišu se događaji:

$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\},\ B_m(\varepsilon) = \cup_{n=m}^{\infty} A_n(\varepsilon).$$

Tada,

$$X_n \xrightarrow{s.i} X, n \to \infty \ \Leftrightarrow P\big(B_m(\varepsilon)\big) \to 0, m \to \infty, \text{za svako } \varepsilon > 0. \tag{2.3.2}$$

Zaista, neka je

$$C = \{\omega \in \Omega: X_n(\omega) \to X(\omega), n \to \infty\},\ A(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega: \omega \in A_n(\varepsilon)\ beskonačno\ često\}.$$

Tada je $P(C) = 1$ ako i samo ako je $P(A_n(\varepsilon)) = 0$, za svako $\varepsilon > 0$. Međutim, $\{B_m(\varepsilon)\}$ je opadajući niz događaja, $B_m(\varepsilon) \downarrow A(\varepsilon)$, $m \to \infty$, tako da je $P(A_n(\varepsilon)) = 0$ ako i samo ako $P\big(B_m(\varepsilon)\big) \to 0, m \to \infty$. Ovime je dokazana relacija (2.3.2).

Koristeći iskaz (2.3.2), specijalno za niz $\{X_n\}$, dobija se

$$P\big(B_m(\varepsilon)\big) = 1 - \lim_{M\to\infty} P[X_n = 0, za\ svako\ n :\ m \le n \le M].$$

Zbog nezavisnosti slučajnih promenjivih $X_n, n \ge 1$ važi:

$$P\big(B_m(\varepsilon)\big) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \dots$$

i kako je prizvod $\prod_{k=m}^{\infty}(1 - k^{-1})$ jednak nuli za svako $m \epsilon \boldsymbol{N}$, zaključuje se da je $P\big(B_m(\varepsilon)\big) = 1$ za svako m, tj. $P\big(B_m(\varepsilon)\big)$ ne teži nuli kao što ukazuje relacija (2.3.2). Dakle, niz $\{X_n\}$ ne konvergira skoro izvesno.

2.4 Borel-Kantelijeva lema i skoro izvesna konvergencija

Neka je $\{X_n, n \ge 1\}$ niz slučajnih promenjivih takvih da za svako $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \varepsilon] < \infty. \tag{2.4.1}$$

Prema Borel-Kantelijevoj lemi, ako je $\{A_n, n \ge 1\}$ proizvoljan niz događaja i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, tada P$[A_n\ beskonačno\ često] = 0$. Ova lema i uslov (2.4.1) neposredno impliciraju da $X_n \xrightarrow{s.i} 0, n \to \infty$. Štaviše, isti zaključak, $X_n \xrightarrow{s.i} 0, n \to \infty$, važi ako je za svaki niz brojeva $\{\varepsilon_n\}$, takav da $\varepsilon_n \downarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \varepsilon_n] < \infty.$$

Sada će biti razjašnjeno da li je suprotan iskaz tačan. U tu svrhu, razmatra se prostor verovatnoće (Ω,$\mathcal{F}$, **P**) gde je Ω=[0,1], $\mathcal{F}$ =$\mathcal{B}_{[0,1]}$ i **P** je Lebegova mera. Definiše se niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \ge 1\}$ na sledeći način:

$$X_n = X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega \le 1 - n^{-1}, \\ 1, & 1 - n^{-1} < \omega \le 1. \end{cases}$$

Očigledno, $X_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$. Međutim, za svako $\varepsilon_n > 0$, pri čemu $\varepsilon_n \downarrow 0$, važi

$$P[|X_n| > \varepsilon_n] = P[X_n = 1] = n^{-1},$$

za dovoljno veliko n. Prema tome,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \varepsilon_n] = \infty.$$

Dakle, uslov (2.4.1) je dovoljan, ali ne i neophodan za skoro izvesnu konvergenciju niza $\{X_n, n \geq 1\}$ ka nuli.

2.5 Konvergencija nizova slučajnih promenljivih u L^p smislu za različite vrednosti p

Pretpostavlja se da su X i $X_n, n \geq 1$ slučajne promenjive u prostoru L^p za neko fiksirano $p, p > 0$. Tada $X, X_n \in L^s$, za svako $s, 0 < s < p$. Ovo važi na osnovu nejednakosti Lyapunova:

$$(E[|X|^s])^{1/s} \leq (E[|X|^p])^{1/p}, 0 < s < p,$$

ili na osnovu elementarne nejednakosti $|x|^s \leq 1 + |x|^p, x \in \boldsymbol{R}, 0 < s < p$.
Iz ovoga sledi i sledeća relacija:

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^s} X.$$

Sada će biti ilustrovana činjenica da obratno u opštem slučaju ne važi. Razmatra se niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$, gde je

$$P[X_n = n] = n^{-(s+p)/2} = 1 - P[X_n = 0], n \geq 1, 0 < s < p.$$

Tada je

$$E[X_n^s] = n^{(s-p)/2} \to 0, n \to \infty,$$

što implicira da $X_n \xrightarrow{L^s} 0, n \to \infty$. Međutim,

$$E\left[X_n^p\right] = n^{(p-s)/2} \to \infty, n \to \infty,$$

i stoga $X_n \xrightarrow{L^s} 0 \nRightarrow X_n \xrightarrow{L^p} 0$ za svako $p > s$.

2.6 Nizovi slučajnih promenljivih konvergiraju u verovatnoći, ali ne i u L^p smislu

1) Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih takav da je

$$P[X_n = e^n] = \frac{1}{n}, P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Tada, za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$P[|X_n| < \varepsilon] = P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \to 1, n \to \infty,$$

i otuda $X_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$. Međutim, za svako $p > 0$,

$$E\left[X_n^p\right] = e^{pn}\frac{1}{n} \to \infty, n \to \infty,$$

i stoga $X_n \nrightarrow 0$ u L^p smislu kada $n \to \infty$.

2) Razmatra se niz $\{X_n, n \geq 1\}$ gde X_n ima gustinu

$$f_n(x) = (1/\pi)n/(1 + n^2x^2), \; x \in R, n \geq 1,$$

tj. X_n ima Košijevu raspodelu. Kako je za svako $\varepsilon > 0$,

$$P[|X_n| < \varepsilon] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)dx = \frac{2}{\pi} arctg(n\varepsilon) \to 1, n \to \infty,$$

zaključuje se da $X_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$. Ali, za svako $p \geq 1$, $E[|X_n|^p] = \infty$ i prema tome, niz $\{X_n\}$ ne može konvergirati ka nuli u L^p smislu za $p \geq 1$. Pored toga, kako niz $X_n, n \geq 1$ ne pripada prostoru L^p, nema smisla razmatrati konvergenciju u L^p smislu.

3) Neka su nizovi $\{Y_n, n \geq 1\}$ i $\{Z_n, n \geq 1\}$ definisani na sledeći način:

$$P[Y_n = 1] = \frac{1}{\log n} = 1 - P[Y_n = 0],$$

$$P[Z_n = 0] = 1 - n^{-\alpha}, P[Z_n = \pm n] = \frac{1}{2n^{\alpha}}, 0 < \alpha \leq 2.$$

Tada $Y_n \xrightarrow{v} 0$, ali $Y_n \nrightarrow 0$ u L^psmislu za $p > 0$; $Z_n \xrightarrow{v} 0$, ali $Z_n \nrightarrow 0$ u L^2 smislu.

2.7 Konvergencija u L^p smislu ne implicira skoro izvesnu konvergenciju

1) Razmatra se niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih definisanih kao $X_n = X_n(\omega) = 1_{A_n}(\omega)$ za $n = 2^m + k$, i niz događaja $A_n = [k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$.

Kako je $\omega \in \Omega = [0,1]$, i **P** Lebegova mera, tada:

$$E[|X_n|] = E[X_n] = 2^{-m} \to 0, n \to \infty.$$

Prema tome, $X_n \xrightarrow{L^1} 0, n \to \infty$. Uprkos tome, u nekom od ranijih primera je pokazano da ovako definisan niz ne konvergira u skoro izvesnom smislu.

2) Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih definisanih na sledeći način:

$$P\left[X_n = n^{1/(2p)}\right] = \frac{1}{n}, \qquad P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1,$$

gde je $p > 0$ proizvoljno. Lako je uvideti da je

$$E[|X_n|^p] = E\left[X_n^p\right] = (n^{1/(2p)})^p n^{-1} = n^{-1/2} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dakle, za svako $p > 0$, $X_n \xrightarrow{L^p} 0, n \to \infty$.

Neka je $M < N$, gde su M i N prirodni brojevi. Uzimajući u obzir da su X_n nezavisne slučajne promenjive, važi:

$$P[X_n = 0 \; za \; M \leq n \leq N] = \prod_{n=M}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Na osnovu osobine neprekidnosti verovatnoće, važi:

$$P\left[\bigcap_{n=M}^{\infty}(\omega: X_n(\omega) \le \varepsilon)\right] = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=M}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i prirodan broj M. Može se proveriti da je $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$ i $\prod_{n=M}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$ za proizvoljno M. Prema tome

$$P\left[\bigcap_{n=M}^{\infty}(\omega: X_n(\omega) \le \varepsilon)\right] = 0.$$

Kako su slučajne promenjive X_n nenegativne, poslednja relacija znači da niz $\{X_n\}$ ne može konvergirati skoro izvesno.

3) Neka je dat niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{Y_n, n \ge 1\}$ definisanih na sledeći način:

$$P[Y_n = 0] = 1 - 1/n^{1/4}, P[Y_n = \pm 1] = 1/(2n^{1/4}), n \ge 1.$$

Može se pokazati da $Y_n \xrightarrow{L^2} 0$ ali da $Y_n \nrightarrow 0$ u skoro izvesnom smislu.

4) Neka je $\{S_n, n \ge 1\}$ simetrično Bernulijevo kretanje, tj. $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ gde su ξ_j nezavisne slučajne promenjive sa istom raspodelom, takve da svaka od njih uzima vrednosti $(+1)$ i (-1) sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Definiše se niz slučajnih promenjivih na sledeći način:

$$X_n = X_n(\omega) = 1_{[S_n=0]}(\omega), n \ge 1.$$

Tada za svako $p > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[X_n^p\right] = 0.$$

Prema tome, $X_n \xrightarrow{L^p} 0, n \to \infty$ za svako $p > 0$. Međutim, simetrično slučajno kretanje $\{S_n\}$ se ponavlja u smislu da S_n prelazi nivo nule za beskonačno mnogo vrednosti n. Ovo znači da je $X_n = 1$ beskonačno često i stoga X_n ne može konvergirati u skoro izvesnom smislu.

2.8 Skoro izvesna konvergencija ne implicira nužno konvergenciju u L^p smislu

a) Neka je $\{X_n, n \ge 1\}$ niz slučajnih promenjivih definisanih na sledeći način:

$$P[X_n = 0] = 1 - 1/n^{\alpha}, P[X_n = n] = P[X_n = -n] = 1/(2n^{\alpha}).$$

Kako je $E\left[|X_n|^{1/2}\right] = 1/\, n^{\alpha-1/2}$, važiće $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|X_n|^{1/2}\right] < \infty$ za svako $\alpha > \frac{3}{2}$. Na osnovu nejednakosti Markova važi: $P[|X_n| > \varepsilon] \le \varepsilon^{-1/2} E\left[|X_n|^{1/2}\right]$ i stoga je $\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \varepsilon] < \infty$ za svako $\varepsilon > 0$. Koristeći Borel-Kantelijevu lemu, zaključuje se da $X_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$.

Osim toga, $E[|X_n|^2] = 1/n^{\alpha-2}$ što implicira da za svako $\alpha \le 2$, $X_n \nrightarrow 0$ u L^2 smislu kada $n \to \infty$.

Dakle, ako je $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, tada X_n konvergira u skoro izvesnom smislu, ali ne konvergira u L^2 smislu kada $n \to \infty$.

b) Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih zadat na sledeći način:

$$X_n\colon \begin{pmatrix} 0 & e^n \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}.$$

Kako je, za svako $\varepsilon > 0$,

$$P[|X_n| > \varepsilon] = P[X_n > \varepsilon] = P[X_n = e^n] = \frac{1}{n^2}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

zaključuje se uz pomoć Borel-Kantelijeve leme da $X_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$. Međutim,

$$E[|X_n|^p] = E\left[X_n^p\right] = \frac{e^{np}}{n^2} \to \infty, n \to \infty, \forall p > 0,$$

tako da $X_n \nrightarrow 0$ u L^p smislu kada $n \to \infty$, za svako $p > 0$.

2.9 Slaba konvergencija funkcija raspodela ne implicira konvergenciju odgovarajućih gustina

Neka su $F, F_n, n \geq 1$ funkcije raspodela sa osobinom da njima odgovarajuće gustine $f, f_n, n \geq 1$ postoje. Prema teoremi Šefea, ako $f_n(x) \to f(x), n \to \infty$ za skoro svako $x \in \boldsymbol{R}$, tada $F_n \xrightarrow{r} F, n \to \infty$. Prirodno se nameće pitanje da li važi i obratno. Primer koji sledi pokazuje da je odgovor na dato pitanje u opštem slučaju negativan.

Razmatra se funkcija

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x\left(1 - \dfrac{\sin 2n\pi x}{2n\pi x}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Tada je F_n apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2n\pi x, & x \in [0,1], \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Takođe, uvode se i funkcije:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0, 1], \\ 0, \quad inače. \end{cases}$$

Očigledno je da su F i f funkcija raspodele i gustina koje odgovaraju uniformnoj raspodeli na intervalu $(0, 1]$.

Lako je uočiti da važi:

$$F_n(x) \to F(x), \qquad n \to \infty, \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

Međutim,

$$f_n(x) \nrightarrow f(x), \qquad n \to \infty.$$

Dakle, utvrđeno je da u opštem slučaju $F_n \xrightarrow{r} F \nRightarrow f_n \to f$.

2.10 Konvergencije $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{r} Y$ ne impliciraju uvek $X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + Y$

Neka su $X, X_n, n \geq 1$ i $Y, Y_n, n \geq 1$ slučajne promenjive definisane na istom prostoru verovatnoće. Pretpostavlja se da $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{r} Y, n \to \infty$. Postavlja se pitanje da li iz toga sledi da i $X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + Y, n \to \infty$. Postoje slučajevi kada je odgovor na ovo pitanje potvrdan, na primer ako su X_n i Y_n, $n \geq 1$ nezavisne slučajne promenjive, ili ako zajednička raspodela slučajnih promenjivih X_n i Y_n konvergira ka zajedničkoj raspodeli slučajnih promenjivih X i Y. Primeri koji slede imaju za cilj da pokažu da ova implikacija ne važi kada se izostavi uslov nezavisnosti.

a) Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom zadatih kao

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i $Y_n = 1 - X_n$. Tada $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{r} Y, n \to \infty$, gde X i Y uzimaju vrednosti 0 i 1 sa jednakim verovatnoćama. Dalje, kako je $X_n + Y_n = 1$, očigledno je da $X_n + Y_n$ ne teži u raspodeli ka sumi $X + Y$ jer je ona slučajna promenjiva koja uzima vrednosti 0,1,2, sa verovatnoćama $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ respektivno.

b) Neka su $\{X_n, n \geq 1\}, \{Y_n, n \geq 1\}$ nizovi slučajnih promenjivih takvi da $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{r} Y$, gde $X \sim \mathcal{N}(0,1), Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ako su za svako n, X_n i Y_n nezavisne slučajne promenjive, onda $X_n + Y_n \xrightarrow{r} Z$, gde je $Z \sim \mathcal{N}(0,2)$. Osim toga, u ovom slučaju raspodela slučajne promenjive (X_n, Y_n) konvergira ka standardnoj dvodimenzionalnoj normalnoj raspodeli sa matematičkim očekivanjem 0, i kovarijacionom matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada će biti izostavljen uslov nezavisnosti slučajnih promenjivih X_n i Y_n. Neka je ponovo $\{X_n, n \geq 1\}$ niz takav da $X_n \xrightarrow{r} X$, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i neka je sada $Y_n = X_n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Tada $Y_n \xrightarrow{r} Y$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Međutim, $X_n + Y_n = 2X_n$, i ova suma konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenjivoj $\tilde{Z}$, gde je $\tilde{Z} \sim \mathcal{N}(0,4)$. Ova slučajna promenjiva nema $\mathcal{N}(0,2)$ raspodelu, kao što je bilo očekivano.

2.11 Primer funkcija g kada konvergencija u verovatnoći $X_n \xrightarrow{v} X$ ne povlači konvergenciju u verovatnoći $g(X_n) \xrightarrow{v} g(X)$

Ako su $X, X_n, n \geq 1$ slučajne promenjive takve da $X_n \xrightarrow{v} X, n \to \infty$ i ako je $g(x), x \in \boldsymbol{R}$ neprekidna funkcija, tada $g(X_n) \xrightarrow{v} g(X), n \to \infty$.

Specifičnim primerom biće pokazano da je neprekidnost funkcije g suštinski uslov u tom smislu da on ne može biti zamenjen uslovom merljivosti. Da bi ovo bilo pokazano, razmatra se funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ može biti proizvoljan, ali takav da ima sledeća svojstva: $X_n > 0, \forall n \in \boldsymbol{N}$ i $X_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$. Na primer, neka je niz zadat na sledeći način:

$$X_n \colon \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Tada, očigledno $X_n \xrightarrow{v} X$, gde je $X = 0\ s.i.$ Povrh toga, za svako n važi $g(X_n) = 1$. Međutim, $g(X)$=0 i otuda $g(X_n)$ nikako ne može konvergirati ka $g(X)$. Naročito, $g(X_n) \nrightarrow g(X)$ u verovatnoći, uprkos činjenici da $X_n \xrightarrow{v} X, n \to \infty$.

Do istog zaključka se dolazi razmatrajući prethodno definisanu funkciju g i niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$, gde $X_n \sim \mathcal{N}\,(0, \sigma^2 / n\,), \sigma^2 > 0$. Očigledno, $X_n \xrightarrow{v} X, n \to \infty$, gde je $X = 0\ s.i.$ Kako je slučajna promenjiva X_n simetrična, za svako n važiće:

$$g(X_n) = \begin{cases} 0, & sa\ verovatnoćom\ \frac{1}{2}, \\ 1, & sa\ verovatnoćom\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Međutim, $g(X) = 0\ s.i.$, pa prema tome $g(X_n)$ ne može konvergirati u verovatnoći ka $g(X)$ kada $n \to \infty$.

2.12 Konvergencija u varijaciji implicira konvergenciju u raspodeli, ali obrat ne važi u opštem slučaju

Neka su X i Y diskretne slučajne promenjive takve da je

$$P[X = a_k] = p_k, \quad P[Y = a_k] = q_k,$$

gde je:

$$a_k \in \boldsymbol{R}, p_k \geq 0, q_k \geq 0, k = 1,2, \dots, \sum_k p_k = 1, \quad \sum_k q_k = 1.$$

Ako su F i G funkcije raspodela slučajnih promenjivih X i Y, respektivno, onda je rastojanje u varijaciji, $\vartheta(F, G)$ definisano sa

$$\vartheta(F, G) = \sum_k |p_k - q_k|.$$

Ako su X i Y apsolutno neprekidne slučajne promenjive čije su funkcije raspodela F i G, a gustine f i g, onda je $\vartheta(F, G)$ definisano sa

$$\vartheta(F,G) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx.$$

Pretpostavlja se da su F i $F_n, n \geq 1$ funkcije raspodela slučajnih promenjivih X i $X_n, n \geq 1$, respektivno. Ako $\vartheta(F_n, F) \to 0, n \to \infty$, piše se $F_n \xrightarrow{V} F$ i takođe ako $X_n \xrightarrow{V} X$, kaže se da niz $\{X_n\}$ konvergira u varijaciji ka X kada $n \to \infty$. Lako se uočava da konvergencija u varijaciji implicira konvergenciju u raspodeli, tj. $F_n \xrightarrow{V} F \;\Rightarrow\; F_n \xrightarrow{r} F$. Međutim, obratno u opštem slučaju neće važiti.

Neka je F_n funkcija raspodele slučajne promenjive X_n koncentrisana oko tačke $1/n$. Tada, $F_n \xrightarrow{r} F_0, n \to \infty$ gde je F_0 funkcija raspodele slučajne promenjive $X_0 \equiv 0$, dok veličina $\vartheta(F_n, F_0)$ ne teži nuli kada $n \to \infty$.

Dalje, podsećanja radi slučajna promenjiva se naziva nesvojstvenom ako sa pozitivnom verovatnoćom uzima vrednosti $(-\infty)$ i $(+\infty)$. Neka je sada F_n funkcija raspodele slučajne promenjive $X_n \sim \mathcal{N}(n, 1), n \geq 1$ i neka je X_* nesvojstvena slučajna promenjiva koncentrisana oko $(+\infty)$, tj. $P[X_* = +\infty] = 1$. Tada su funkcija raspodele $F_*(x)$ i gustina $f_*(x)$ slučajne promenjive X_* jednake nuli za svako $x \in \boldsymbol{R}$. Trivijalno, $F_n \xrightarrow{r} F_*$, $n \to \infty$, ali veličina $\vartheta(F_n, F_*)$ ne teži nuli kada $n \to \infty$.

2.13 Ne postoji metrika koja odgovara skoro izvesnoj konvergenciji

Dobro je poznato da za svaku od sledećih vrsta konvergencija: konvergencija u raspodeli, konvergencija u verovatnoći i konvergencija u L^p smislu postoji odgovarajuća metrika. Stoga je prirodno pitati se da li za skoro izvesnu konvergenciju postoji odgovarajuća metrika. Sledećim razmatranjem biće pokazano da je odgovor na ovo pitanje negativan.

Neka je sa $\Re$ označen skup slučajnih promenjivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i neka je d: $\Re \times \Re \to \boldsymbol{R}$ metrika na skupu $\Re$, tj. d je nenegativna, simetrična funkcija koja zadovoljava nejednakost trougla. Sada će biti proverena ispravnost sledećeg iskaza:

$$za\ X, X_1, X_2, \ldots \in \Re,\ d(X_n, X) \to 0\ ako\ i\ samo\ ako\ X_n \xrightarrow{s.i.} X.$$

Pretpostavlja se da takva funkcija d postoji. Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih koji konvergira ka nekoj slučajnoj promenjivoj X u verovatnoći, ali ne i skoro izvesno. Tada je, za neko $\delta > 0$ nejednakost $d(X_n, X) \geq \delta$ zadovoljena za beskonačno mnogo n. Neka je sa Λ označen skup takvih n. Međutim, kako je $X_n \xrightarrow{v} X$, postoji podniz $\{X_{n_k}, n_k \in \Lambda\}$ niza $\{X_n, n \in \Lambda\}$ koji konvergira ka X skoro isvesno. Ali, ovo bi značilo da $(X_{n_k}, X) \to 0, n_k \to \infty$, što je nemoguće jer je $d(X_{n_k}, X) \geq \delta$ za svako $n_k \in \Lambda$.

Dakle, prethodno definisan iskaz nije tačan, pa se može zaključiti da za skoro izvesnu konvergenciju ne postoji odgovarajuća metrika.

2.14 Kompletna konvergencija niza slučajnih promenljivih je stroža od skoro izvesne konvergencije

Za niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ se kaže da kompletno konvergira ka 0, ako za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P[|X_m| > \varepsilon] = 0. \tag{2.14.1}$$

U ovom slučaju, koristi se notacija $X_n \overset{k}{\to} 0, n \to \infty$.

Podsećanja radi, $X_n \overset{s.i.}{\to} 0, n \to \infty$ ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m| > \varepsilon\}\right] = 0.$$

Na osnovu leme o pokrivanju dobija se

$$P\left[\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m| > \varepsilon\}\right] \leq \sum_{m=n}^{\infty} P[|X_m| > \varepsilon],$$

što odmah podrazumeva da $X_n \overset{k}{\to} 0 \Rightarrow X_n \overset{s.i.}{\to} 0$. Međutim, obratno ne važi uvek. Da bi se ovo pokazalo, razmatra se prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gde je $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i $\mathbf{P}$ je Lebegova mera. Neka je niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ zadat na sledeći način

$$X_n = X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < \omega \leq 1. \end{cases}$$

Jasno je da ovaj niz konvergira ka nuli skoro izvesno, ali ne konvergira kompletno ka nuli. Potrebno je naglasiti da su ove dve vrste konvergencije ekvivalentne ako su slučajne promenjive $X_n, n \geq 1$ nezavisne.

2.15 Skoro izvesna uniformna konvergencija slučajnog niza implicira njegovu kompletnu konvergenciju, ali obrat u opštem slučaju ne važi

Za niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ se kaže da konvergira skoro izvesno uniformno ka slučajnoj promenjivoj X ako postoji skup $A \in \mathcal{F}$ sa osobinom $P(A) = 0$ takav da $X_n = X_n(\omega)$ konvergira uniformno ka X na komplementu A^c. Na taj način se dolazi do pitanja valjanosti obratnog iskaza. Da bi se došlo do odgovora na ovo pitanje biće razmatran naredni primer.

Neka je dat prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gde je $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i $\mathbf{P}$ je Lebegova mera. Razmatra se niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ zadat na sledeći način:

$$X_n = X_n(\omega) = \begin{cases} 1 - 2n^2\omega, & 0 \le \omega \le 1/(2n^2), \\ 0, & 1/(2n^2) \le \omega \le 1 - 1/(2n^2), \\ 1 - 2n^2 + 2n^2\omega, & 1 - 1/(2n^2) \le \omega \le 1. \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je $0 \le X_n < \varepsilon$ ako i samo ako je $\omega \epsilon \left(\frac{1-\varepsilon}{2n^2}, 1 - \frac{1-\varepsilon}{2n^2}\right)$. Stoga,

$$P[|X_n| \ge \varepsilon] = P[X_n \ge \varepsilon] = (1-\varepsilon)/n^2,$$

tako da

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \ge \varepsilon] = (1-\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) < \infty.$$

Ovo znači da niz $\{X_n\}$ kompletno konvergira ka nuli.
Sada, neka su dati skupovi $B_n = [1, \frac{1}{4}n^2) \cup (1 - \frac{1}{4}n^2, 1]$, $n \ge 1$. Očigledno, $P(B_n) = 1/(2n^2)$. Pretpostavlja se da za neki skup A, takav da je $P(A) = 0$, X_n konvergira ka nuli skoro izvesno uniformno na skupu A^c. Onda postoji broj $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$, nezavisan od ω, takav da važi $|X_n| \le \varepsilon < \frac{1}{2}$ na skupu A^c pod uslovom da je $n \ge n_\varepsilon$. Međutim, $B_n \cap A^c = \emptyset$ i $B_{n_\varepsilon} \subset A$. Dakle,

$$P(A) \ge P(B_{n_\varepsilon}) = \frac{1}{2} n_\varepsilon^{-2}.$$

Ova kontradikcija pokazuje da ovako definisan niz $\{X_n\}$ ne konvergira skoro izvesno uniformno ka nuli.

2.16 Konvergencija nizova slučajnih promenljivih takvih da niz očekivanja ne konvergira

Ako niz slučajnih promenjivih $\{X_n\}$ konvergira u verovatnoći ili skoro izvesno ka nekoj slučajnoj promenjivoj X, onda se pod dodatnim pretpostavkama može dokazati da će niz očekivanja $\{EX_n\}$ težiti ka EX. Međutim, u opštem slučaju ovakav iskaz ne važi bez nekih pretpostavki.

1) Neka je niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \ge 1\}$ definisan na sledeći način:

$$P[X_n = -n-4] = \frac{1}{n+4}, P[X_n = -1] = 1 - \frac{4}{n+4},$$

$$P[X_n = n+4] = \frac{3}{n+4}.$$

Očigledno, za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$P[|X_n - (-1)| > \varepsilon] = \frac{4}{n+4}.$$

Odavde sledi da $X_n \overset{v}{\rightarrow} -1,\ n \to \infty$. Sa druge strane,

$$EX_n = 1 + 4/(n+1) \wedge \lim_{n\to\infty} EX_n = 1.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = 1 \ne -1 = E\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right].$$

Zaključuje se da konvergencija u verovatnoći niza X_n ka X nije dovoljna da osigura da $EX_n \to EX$. Ovo može biti objašnjeno i pozivanjem na standardni rezultat: ako su $X_n, n \geq 1$ i X slučajne promenjive u L^p prostoru i $X_n \xrightarrow{L^p} X$, tada $E[|X_n|^k] \to E[|X|^k]$, za svako $0 < k \leq p$.

2) Razmatra se niz slučajnih promenjivih $\{Y_n, n \geq 1\}$ gde je:

$$Y_n = \begin{cases} n^2, 0 \leq \omega \leq n^{-1}, \\ 0\,, n^{-1} < \omega \leq 1. \end{cases}$$

Neka je dalje slučajna promenjiva Y jednaka nuli u svakoj tački jediničnog intervala. Tada, za svako $\omega \in [0,1]$ važi $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$, $n \to \infty$. Međutim, $EY_n = n$ i očigledno $EY_n \nrightarrow EY = 0, n \to \infty$.

Potrebno je napomenuti da je u ovom primeru EY_n neograničeno, dok je u primeru pod 1) EX_n ograničeno. Prema poznatom rezultatu: ako je $\{Z_n\}$ uniformno ograničen niz i $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ na skupu verovatnoće 1, tada je $EZ = \lim_{n\to\infty} EZ_n$. Oba navedena primera pokazuju da je pretpostavka o unifomnoj ograničenosti od suštinskog značaja.

2.17 Slaba L^1-konvergencija slučajnih promenljivih je slabija i od slabe konvergencije i od konvergencije u L^1 smislu

Podsećanja radi, za niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ dat na prostoru L^1 se kaže da slabo konvergira u L^1 smislu ka slučajnoj promenjivoj X ako i samo ako za svaku ograničenu slučajnu promenjivu Y važi:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n Y] = E[XY]. \tag{2.17.1}$$

U ovom slučaju koristi se oznaka $X_n \xrightarrow{s,L^1} X, n \to \infty$.

Očigledno, granična vrednost X pripada prostoru L^1 i jedinstvena je do stohastičke ekvivalencije.

Od interesa je pojasniti vezu između ove vrste konvergencije i svih ostalih vrsta konvergencija koje su već razmatrane. Naročito ako je $X_n \xrightarrow{s,L^1} X$, pitanje je da li iz toga proizilazi da je $X_n \xrightarrow{s} X$ ili $X_n \xrightarrow{L^1} X$. Potrebno je napomenuti da se notacija $\xrightarrow{s}$ koristi za označavanje takozvane slabe konvergencije, koja je u ovom slučaju ekvivalentna konvergenciji u raspodeli. U opštijem slučaju, pojam slabe konvergencije će biti detaljnije naknadno razmatran.

Da bi se odgovorilo na prethodno pitanje, razmatra se prostor verovatnoće ($\Omega, \mathcal{F}$, **P**), gde je $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i **P** je Lebegova mera. Neka je dat niz slučajnih promenjivih $X_n(\omega) = \sin 2\pi n\omega, n \geq 1$. Ovaj niz ne konvergira ni slabo (ekvivalentno u raspodeli), a ni u L^1 smislu. Uprkos tome, biće pokazano da $X_n \xrightarrow{s,L^1} X, n \to \infty$ prema relaciji (2.17.1).

Neka je Y prizvoljna ograničena slučajna promenjiva, tj. $Y = Y(\omega), \omega \in [0,1]$ je $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Tada postoji niz stepenastih funkcija $\{Y^{(m)}(\omega), m \geq 1\}$ takav da $Y^{(m)} \xrightarrow{s.i.} Y, m \to \infty$. Na osnovu Egorove teoreme, za svako $\varepsilon > 0$ može se naći otvoren skup $\Lambda_\varepsilon \subset [0,1]$ takav da je konvergencija $Y^{(m)} \to Y, m \to \infty$ uniformna za $\omega \in \Lambda_\varepsilon^c = [0,1] \backslash \Lambda_\varepsilon$. Ovde se mogla iskoristiti i Lusinova teorema o postojanju neprekidne funkcije Y^* podudarne sa Y na komplementu skupova ε-mere. U oba slučaja, za stepenastu i neprekidnu funkciju Y važi:

$$E[X_nY^*] = \int_0^1 Y^*(\omega)\sin 2\pi n\omega d\omega \to 0, n \to \infty.$$

Kako su Y i Y^* ograničene funkcije, i Y^* je blizu Y, razlika $|E[X_nY^*] - E[X_nY]|$ može biti proizvoljno mala. Stoga, $E[X_nY] \to 0, n \to \infty$ za svaku ograničenu slučajnu promenjivu Y. Dakle, $X_n \xrightarrow{s,L^p} X, n \to \infty$. Međutim, kao što je već navedeno, nijedna od relacija $X_n \xrightarrow{s} X$, $X_n \xrightarrow{L^1} X$ nije tačna.

2.18 Konvergentan niz slučajnih promenljivih čija Cesàrova sredina ne konvergira

Neka je $\{a_n, n \geq 1\}$ proizvoljan niz i neka je sa $s_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ označena k-ta parcijalna suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se naziva Cesàrov sa Cesàrovom sumom $A \in \boldsymbol{R}$ ako aritmetička sredina prvih n parcijalnih suma $s_1, \dots, s_n$ teži ka A, kada $n \to \infty$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = A.$$

Drugim rečima, Cesàrova suma beskonačnog reda je granična vrednost aritmetičke sredine, odnosno prosek prvih n parcijalnih suma reda, kada $n \to \infty$.

Potrebno je napomenuti da i divergentan red može biti Cesàrov jer aritmetička sredina njegovih parcijalnih suma može biti konvergentna.

Sledećim primerom biće pokazano da postoje nizovi koji konvergiraju u verovatnoći, ali da u opštem slučaju ne znači da i njihove Cesàrove sredine konvergiraju u verovatnoći.

Neka je dat niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$. Tada važi sledeća implikacija:

$$X_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty \ \Rightarrow \ \frac{1}{n}(X_1 + \ \dots \ + X_n) \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty. \qquad (2.18.1)$$

Ovo sledi na osnovu standardne teoreme iz analize o Cesàrovim sredinama.

Cilj je da se pokaže da skoro izvesna konvergencija u $(2.18.1)$ ne može biti zamenjena konvergencijom u verovatnoći.

Neka je $\{\xi_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takvih da ξ_n ima funkciju raspodele F_n datu sa

$$F_n = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{1}{x+n}, & x > 0. \end{cases}$$

Tada, za svako fiksirano $\varepsilon > 0$ važi

$$P[|\xi_n| > \varepsilon] = 1 - F_n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + n},$$

što znači da $\xi_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$. Biće pokazano da za Cesàrove sredine važi

$$\eta_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \ \dots + \xi_n) \nrightarrow 0, n \to \infty \ u \ verovatnoći.$$

Neka je $M_n = max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ i uzimajući u obzir nezavisnost slučajnih promenjivih ξ_j, lako se pokazuje da za svako $x > 0$ važi

$$P[M_n \leq x] = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{x+n}\right) < \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)^n.$$

Stoga,

$$P\left[\frac{M_n}{n} \leq \varepsilon\right] < \left(1 - \frac{1}{\varepsilon n + n}\right)^n. \qquad (2.18.2)$$

Kako je $\left[{M_n}/{n} > \varepsilon\right] \subset [\eta_n > \varepsilon]$, sledi da je

$$P\left[\frac{M_n}{n} > \varepsilon\right] \leq P[\eta_n > \varepsilon], ili\ P\left[\frac{M_n}{n} \leq \varepsilon\right] \geq P[\eta_n \leq \varepsilon].$$

Kombinovanjem poslednje relacije sa relacijom (2.18.2) dobija se

$$P[\eta_n \leq \varepsilon] < \left(1 - \frac{1}{(\varepsilon+1)n}\right)^n.$$

Otuda,

$$\lim_{n\to\infty} P[\eta_n \leq \varepsilon] \leq \exp(-(\varepsilon+1)^{-1})$$

i

$$\lim_{n\to\infty} P[\eta_n > \varepsilon] \geq 1 - \exp(-(\varepsilon+1)^{-1}) > 0.$$

Ovo znači da η_n ne konvergira ka nuli u verovatnoći. Stoga, u opštem slučaju važi

$$\xi_n \xrightarrow{v} 0 \ \not\Rightarrow\ \frac{1}{n}(\xi_1 + \ \dots + \xi_n) \xrightarrow{v} 0, n \to \infty.$$

Glava 3

Zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih definisanih na prostoru verovatnoće (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbf{P}$). Definiše se $S_n = X_1 + \ldots + X_n, a_k = EX_k$, $A_n = ES_n = a_1 + \ldots + a_n$. Kaže se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava ***slabi zakon velikih brojeva*** ako $\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{n}A_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty$, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{n}A_n\right| \geq \varepsilon\right] = 0.$$

Dalje, ako $\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{n}A_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$, tj. ako važi:

$$P\left[\omega\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}S_n(\omega) - \frac{1}{n}A_n\right) = 0\right] = 1,$$

kaže se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava ***strogi zakon velikih brojeva***.

Sada će biti formulisani neki osnovni rezlutati koji se odnose na strogi i slabi zakon velikih brojeva.

Teorema 3.1. ***(Khintchine)*** Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom takvih da je $E[|X_1|] < \infty$. Tada ovaj niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva i $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{v} a, n \to \infty$, gde je $a = EX_1$.

Teorema 3.2. ***(Kolmogorov)*** Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom. Postojanje očekivanja $E[|X_1|]$ je potreban i dovoljan uslov da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva i $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{s.i.} a, n \to \infty$, gde je $a = EX_1$.

Teorema 3.3. ***(Markov)*** Neka je$\{X_n, n \geq 1\}$ proizvoljan niz slučajnih promenjivih takav da zadovoljava sledeći uslov:

$$\left({}^{1}\!/_{n^2}\right) D[X_1 + \ldots + X_n] \to 0, n \to \infty \; (uslov\ Markova).$$

Tada niz $\{X_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Teorema 3.4. ***(Kolomogorov)*** Neka je$\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takvih da je $\sigma_n^2 = DX_n < \infty, n \geq 1$. Neka je zadovoljen sledeći uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \quad (uslov\ Kolmogorova).$$

Tada dati niz zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

3.1 Uslov Markova je dovoljan, ali ne i neophodan za slabi zakon velikih brojeva

1. Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takav da X_n ima χ_n^2 raspodelu sa n stepeni slobode, tj. X_n ima gustinu

$$f_n(x) = \begin{cases} [2\Gamma(n/2)]^{-1}(x/2)^{(n-2)/2}\exp(-x/2), & x > 0, \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Tada je $EX_n = n, DX_n = 2n$ i očigledno je da uslov Markova nije ispunjen. Zbog toga se ne može primeniti teorema Markova da se utvrdi da li dati niz $\{X_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Biće korišćen sledeći rezultat.

Ako je $\{\xi_n, n \geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih sa karakterističnom funkcijom ϕ_n, tada

$$\xi_n \xrightarrow{v} 0, n \to \infty \iff \phi_n(t) \to 1, n \to \infty, \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Karakteristična funkcija slučajne promenjive X_n je $\psi_n(t) = (1-2it)^{-n/2}$. Zatim, računanjem karakteristične funkcije $\widetilde{\psi_n}$ za $(S_n - n)/n$ dolazi se do rezultata $\widetilde{\psi_n}(t) \to 1, n \to \infty, \forall t \in \boldsymbol{R}$. S obzirom na prethodni rezultat, zaključuje se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Treba napomenuti da se analognim zaključivanjem dolazi do istog tvrđenja za niz nezavisnih diskretnih slučajnih promenjivih $\{Y_n, n \geq 1\}$, gde je

$$P[Y_n = \pm 1] = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}), \ \ P[Y_n = \pm 2^n] = 2^{-(n+1)}.$$

Dakle, uslov Markova nije neophodan za slabi zakon velikih brojeva.

2. Neka je $\{Y_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih, gde Y_n ima gustinu

$$f_n(x) = (\sqrt{2}\sigma_n)^{-1}\exp\left(-\sqrt{2}|x|/\sigma_n\right), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Lako je pokazati da je $EY_n = 0$ i $DY_n = {\sigma_n}^2$. Neka je ${\sigma_n}^2$ izabrano na specijalan način: ${\sigma_n}^2 = n^{1+\delta}, 0 \leq \delta < 1$. U tom slučaju uslov Markova nije ispunjen. Ipak, biće pokazano da niz $\{Y_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Da bi ovaj iskaz bio dokazan, potreban je sledeći rezultat.

Neka su $\{\eta_n\}$ nezavisne slučajne promenjive i

$$P\left[\frac{1}{n}|\eta_k| > \varepsilon\right] < \delta, \tag{3.1.1}$$

za bilo koje pozitivno $\varepsilon, \delta, k = 1,2,\ldots,n$, gde je n dovoljno veliko. Sa $\{\widetilde{\eta_n}\}$ se označava sečeni niz sa konstantom $c > 0$ takav da je $\widetilde{\eta_k} = \eta_k$ ako je $|\eta_k| \leq c$ i $\widetilde{\eta_k} = c$ ako je $|\eta_k| > c$. Tada $\{\eta_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva ako i samo ako važe naredna dva uslova za svako $\varepsilon > 0, c > 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P\left[\frac{1}{n}|\widetilde{\eta_k}| > \varepsilon\right] = 0 \tag{3.1.2}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} D\,\widetilde{\eta_k} = 0. \qquad (3.1.3)$$

Sada, za svako fiksirano $\varepsilon > 0$, lako može biti pokazano da

$$P\left[\frac{1}{n}|Y_k| > \varepsilon\right] = \exp\left[-\sqrt{2}\varepsilon n/k^{(1+\delta)/2}\right], \qquad k = 1,2,\dots,n$$

i za dovoljno veliko n, izraz na desnoj strani može biti proizvoljno mali. Prema tome, uslov (3.1.2) važi.

Za dato $\varepsilon > 0$ i konstantu $c > 0$, neka je N prirodan broj koji zadovoljava relacije: $\varepsilon N \leq c$ i $\varepsilon(N+1) > c$. Bira se n takvo da je $n > N$. Tada,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P\left[\left|\widetilde{Y_k}\right| > \varepsilon n\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \exp\left[-\sqrt{2}\varepsilon n/k^{(1+\delta)/2}\right]. \qquad (3.1.4)$$

Kako suma na desnoj strani relacije (3.1.4) sadrži konačan broj članova, i svaki član teži nuli kada $n \to \infty$, iz relacije (3.1.4) sledi relacija (3.1.2). Ostaje još da se proveri uslov (3.1.3). Direktnim računanjem se dobija

$$D\widetilde{Y_k} = k^{1+\delta}\left[1 - \exp\left(-c\sqrt{2}/k^{(1+\delta)/2}\right)\right] - \sqrt{2}/k^{(1+\delta)/2}\exp\left(-c\sqrt{2}/k^{(1+\delta)/2}\right).$$

Korišćenjem Tejlorovog razvoja nalazi se

$$D\widetilde{Y_k} = c^2 + (c^3/k^{(1+\delta)/2})t_k,$$

gde t_k sadrži članove višeg reda čiji tačni izrazi nisu relevantni. Iz ove relacije se sada lako izvodi relacija (3.1.3).

Dakle, na osnovu Fellerove teoreme, niz $\{Y_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Ponovo, kao i u prethodnom primeru, uslov Markova nije bio ispunjen.

3.2 Uslov Kolmogorova je dovoljan, ali ne i neophodan za strogi zakon velikih brojeva

Razmatra se niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ definisanih na sledeći način:

$$P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}), P[X_n = 2^{-n}] = P[X_n = -2^{-n}] = 2^{-(n+1)}.$$

Očigledno, $EX_n = 0, \sigma_n^2 = DX_n = 1 - 2^{-n} + 2^n$, tako da red $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2/n^2$ divergira. Prema tome, uslov Kolmogorova $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2/n^2 < \infty$ nije zadovoljen. Uprkos tome, biće pokazano da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

Pre svega, potrebno je podsetiti se da se za dva niza slučajnih promenjivih $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ kaže da su ekvivalentni u Khintchinovom smislu ako je $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \neq Y_n] < \infty$. Po Révészu (1967) dva takva niza istovremeno zadovoljavaju ili ne zadovoljavaju strogi zakon velikih brojeva.

Uvodi se niz $\{Y_n, n \geq 1\}$ gde je

$$P[Y_n = 1] = P[Y_n = -1] = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}), \qquad P[Y_n = 0] = 2^{-n}.$$

Očigledno, $EX_n = EY_n$ i $P[X_n \neq Y_n] = 2^{-n}, n \in \boldsymbol{N}$. Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \neq Y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ konvergentan, nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ su ekvivalentni u smislu Khintchina. Osim toga, $DY_n = 1 - 2^{-n}$, tako da je $\sum_{n=1}^{\infty} DY_n/n^2 < \infty$. Prema tome, uslov Kolmogorova je zadovoljen za niz $\{Y_n\}$, odakle sledi da dati niz zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Kako su nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$

ekvivalentni u smislu Khintchina, dobija se da i niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

Ovime je dokazano da uslov Kolmogorova nije neophodan za važenje strogog zakona velikih brojeva.

3.3 Niz nezavisnih diskretnih proizvoljnih slučajnih promenljivih zadovoljava slabi zakon velikih brojeva, ali ne i strogi zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n, n \geq 2\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takav da je

$$P[X_n = n] = P[X_n = -n] = 1/(2n \log n)\ , P[X_n = 0] = 1 - 1/(n \log n), n = 2,3, \dots .$$

Razmatraju se događaji $A_n = \{|X_n| \geq n\}, n \geq 2$. Tada je

$$P(A_n) = 1/(n \log n) \text{ i } \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Divergencija reda $\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n)$, uzajamna nezavisnost slučajnih promenjivih X_n i Borel-Cantellijeva lema dovode do zaključka da dogadjaj "A_n se realizuje beskonačno često" ima verovatnoću 1. Drugim rečima,

$$P[|X_n| \geq n\ beskonačno\ često] = 1 \Rightarrow P\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n \neq 0\right] = 1.$$

Dakle, niz $\{X_n, n \geq 2\}$ ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.
Sada će biti pokazano da dati niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Očigledno, $DX_k = k/\log k$. Kako funkcija $x/\log x$ ima lokalni minimum u tački $x = e$ i $\sum_{k=3}^{n} k/\log k$ je donja Rimanova suma integrala $\int_3^{n+1}(x/\log x)\, dx$, lako se dobija relacija

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n} DX_k \leq \frac{1}{n^2}\left[\frac{2}{\log 2} + \int_3^{n+1}\left(\frac{x}{\log x}\right) dx\right]$$
$$\leq \frac{2}{n^2 \log n} + \frac{(n-2)(n+1)}{n^2 \log n} \to 0, n \to \infty.$$

Prema tome, uslov Markova za niz $\{X_n\}$ je ispunjen, i stoga dati niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Na kraju će biti predstavljen još jedan niz čije su osobine slične nizu $\{X_n\}$ koji je već razmatran. Neka je $\{Y_n, n \geq 2\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom, takav da je

$$P[Y_2 = \pm n] = C/(n^2 \log n), \qquad n = 2,3, \dots\ gde\ je\ C = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n^2 \log n)^{-1}\right)^{-1}.$$

Može se pokazati da ovaj niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva, ali da ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Najlakši način da se ovo dokaže je korišćenjem karakterističnih funkcija, tj. treba pokazati da $\psi_n(t) \to 1, n \to \infty$ gde je ψ_n karakteristična funkcija slučajne promenjive $\frac{1}{n}(Y_2 + \cdots Y_{n+1})$.

3.4 Niz nezavisnih slučajnih promenljivih apsolutno-neprekidnog tipa zadovoljava slabi zakon, ali ne i strogi zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih i neka X_n ima gustinu

$$f_n(x) = \left(\sqrt{2}\sigma_n\right)^{-1} \exp(-\sqrt{2}|x|/\sigma_n), x \in \boldsymbol{R}.$$

Lako je pokazati da je $DX_n = \sigma_n{}^2$. Neka je $\sigma_n{}^2$ specijalno izabrano tako da je $\sigma_n{}^2 = 2n^2/(\log n)^2\, , n \geq 2$.

Prvo će biti ustanovljeno da $\{X_n\}$ ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Zapravo, ako je $A_n = \{|X_n| \geq n\}$, onda

$$P(A_n) = 2(\sqrt{2}\sigma_n)^{-1} \int_n^\infty \exp(-\sqrt{2}x/\,\sigma_n)dx = \exp\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(\log n)^2\,/n\right].$$

Kako $(\log n)^2\,/n \to 0, n \to \infty$, onda $\sum_{n=2}^{\infty} P(\,A_n) = \infty$. Sličnim zaključivanjem kao u ranijim primerima, može se zaključiti da niz $\{X_n\}$ ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Cilj je pokazati da ovaj niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Međutim, može se proveriti da uslov Markova za niz $\{X_n\}$ nije ispunjen. U tom slučaju može se ponovo koristiti Fellerova teorema kao u ranijim slučajevima. Zaista, lako se može pokazati da je

$$P\left[\frac{1}{n}|X_k| > \varepsilon\right] = \exp(-n\varepsilon \log k/k), k = 2,3, \dots n \tag{3.4.1}$$

i očigledno, ova verovatnoća može biti proizvoljno mala za dovoljno veliko n.

Za svaki nivo $c > 0$ i $\varepsilon > 0$ mogu se uvesti slučajne promenjive $\widetilde{X_k}$ gde je $\widetilde{X_k} = X_k$ ako je $|X_k| \leq c$ i $\widetilde{X_k} = c$ ako je $|X_k| > c$. Koristeći relaciju (3.4.1) dobija se

$$\sum_{k=2}^{n} P\left[\frac{1}{n}|\widetilde{X_k}| > \varepsilon\right] \to 0, n \to \infty.$$

Uslov

$$(1/n^2) \sum_{k=2}^{n} D\,\widetilde{X_k} \to 0, n \to \infty$$

može biti proveren i dokazan na isti način kao u prethodnim primerima.

Prema tome, na osnovu Fellerove teoreme, niz $\{X_n\}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

3.5 Uslov Kolmogorova je najbolji mogući uslov za strogi zakon velikih brojeva

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa konačnim disperzijama σ_n^2 i neka je $\{b_n, n \geq 1\}$ neopadajući niz konstanata takav da $b_n \to \infty$. Kaže se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva u odnosu na niz $\{b_n\}$ako $b_n^{-1}S_n - b_n^{-1}ES_n \overset{s.i.}{\to} 0, n \to \infty$, gde je $S_n = X_1 + \cdots X_n$.

Prema teoremi Kolmogorova, uslov $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2/b_n^2 < \infty$ implicira da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva u odnosu na niz $\{b_n\}$. Potrebno je napomenuti da u klasičnoj teoremi Kolmogorova važi $b_n = n, n \geq 1$. Uopšteno je dati uslov bitan za strogi zakon velikih brojeva, ali sada će biti pokazano da je dati uslov upravo najbolji mogući uslov. Jednostavnosti radi, razmatra se slučaj kada je $b_n = n, n \geq 1$. Neka je sada $\{\sigma_n^2\}$ niz pozitivnih brojeva takav da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty. \tag{3.5.1}$$

Konstruiše se niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{Y_n, n \geq 1\}$ sa osobinom $DY_n = \sigma_n^2$ i takav da ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Sada će biti opisan niz $\{Y_n\}$. Ako je $\sigma_n^2/n^2 \leq 1$, onda je

$$Y_n: \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \sigma_n^2/(2n^2) & 1-\sigma_n^2/n^2 & \sigma_n^2/(2n^2) \end{pmatrix}.$$

Ako je $\sigma_n^2/n^2 > 1$, tada je

$$Y_n: \begin{pmatrix} -\sigma_n & \sigma_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Očigledno, $EY_n = 0, DY_n = \sigma_n^2$. Za svako $\varepsilon > 0$, važi:

$$P[|Y_n|/n > \varepsilon] = P[Y_n \neq 0] = \begin{cases} \sigma_n^2/n^2, & \sigma_n^2/n^2 \leq 1, \\ 1, & \sigma_n^2/n^2 > 1. \end{cases}$$

Neka važi pretpostavka da niz $\{Y_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Tada, nužno $Y_n/n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$. Iz relacije (3.5.1) lako je izvesti da $\sum_{n=1}^{\infty} P[|Y_n| > \varepsilon n] = \infty$. Prema Borel-Cantellijevoj lemi, događaji $[|Y_n| > \varepsilon n]$ se dešavaju beskonačno često, tako da je konvergencija $Y_n/n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$ nemoguća. Stoga, niz $\{Y_n\}$ ne zadovoljava strogi zakon brojeva.

3.6 Nešto više o strogom zakonu velikih brojeva bez uslova Kolmogorova

Razmatra se niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 2\}$, gde je

$$P\left[X_n = \pm(n/\log n)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Lako je proveriti da uslov Kolmogorova $\sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2/n^2 < \infty$ nije zadovoljen. Međutim, kao što je ranije ustanovljeno, strogi zakon velikih brojeva može važiti i bez ovog uslova. U ovom konkretnom primeru, najpogodniji rezultat koji se može primeniti je sledeća teorema (Révész, 1967).

Neka je $\{\xi_n\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa osobinom $E\xi_n = 0$, pri čemu za neko $r \geq 1$ važi

$$E[|\xi_n|^{2r}] < \infty \ i \ \sum_{n=1}^{\infty} E[|\xi_n|^{2r}]/n^{r+1} < \infty.$$

Tada niz $\{\xi_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

Očigledno, za niz $\{X_n\}$ je dovoljno uzeti $r = 2$ i direktnom proverom se može zaključiti da su zadovoljeni uslovi Révészove teoreme. Prema tome, dolazi se do zaključka da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

3.7 Dva bliska niza slučajnih promenljivih takvih da za jedan niz važi strogi zakon velikih brojeva, a za drugi ne važi

Razmatraju se dva niza slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 2\}$ i $\{Y_n, n \geq 2\}$ gde je:

$$P[X_n = n/\log n] = P[X_n = -n/\log n] = \log n/(2n), \qquad P[X_n = 0] = 1 - \log n/n,$$

$$P[Y_n = \beta n] = P[Y_n = -\beta n] = 1/(2\beta^2 n \log n), \qquad P[Y_n = 0] = 1 - 1/(\beta^2 n \log n),$$

za $0 < \beta < 1$.

Očigledno, X_n i Y_n su simetrične slučajne promenjive takve da je

$$EX_n = EY_n = 0, \qquad DX_n = DY_n = n/\log n\,,$$

i obe zadovoljavaju nejednakosti

$$|X_n| < n\, s.i., |Y_n| < n\, s.i., n = 3,4, \dots\ .$$

Od značaja je videti da li ova dva niza zadovoljavaju strogi zakon velikih brojeva. Biće dokazano da nizn $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva, a da niz $\{Y_n\}$ ne zadovoljava.

U tu svrhu, uvodi se veličina H_r, gde je

$$H_r = 2^{-2r} \sum_{n=2^r+1}^{2^{r+1}} DX_n.$$

Za bilo koje $\varepsilon > 0$ važi $\exp(-\varepsilon/H_r) < \exp(-\varepsilon r \log 2/2)$ što implicira da je

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon/H_r) < \infty.$$

Međutim, ovaj uslov je dovoljan da se zaključi da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva (Prohorov 1950).

Pretpostavlja se sada da niz $\{Y_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Tada nužno važi

$$P\left[\frac{Y_n}{n} \to 0\right] = 1.$$

Iz definicije samog niza $\{Y_n\}$ lako se vidi da

$$\sum_{n=2}^{\infty} P\left[\frac{|Y_n|}{n} = \beta\right] = \infty.$$

Tada, na osnovu Borel-Cantellijeve leme, događaji $[|Y_n| = n\beta]$ se dešavaju beskonačno često. Ovo je, međutim, u kontradikciji sa prethodnom relacijom, tj. sa tim da $Y_n/n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$.

Dakle, niz $\{Y_n\}$ ne zadovoljava strogi zakon velikih brojeva.

3.8 Zakon velikih brojeva ne važi ako se skoro izvesna konvergencija zameni kompletnom konvergencijom

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom, $F(x), x \in \boldsymbol{R}$ njihova funkcija raspodele i $EX_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0$. Pretpostavlja se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Tada

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty. \tag{3.8.1}$$

Prirodno je pitati se pod kojim uslovima u relaciji (3.8.1) skoro izvesna konvergencija može biti zamenjena strožom vrstom konvergencije, konkretno kompletnom konvergencijom. Pod uslovima

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \ \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty, \tag{3.8.2}$$

Hsu i Robbins su 1947. dokazali konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} P[|Y_n| > \varepsilon]$ za svako $\varepsilon > 0$. Stoga, ako je uslov (3.8.2) zadovoljen, niz $\{Y_n\}$ kompletno konvergira. Na taj način umesto (3.8.1) važi $Y_n \xrightarrow{k.} 0$.

Pretpostavimo da je uslov (3.8.2) promenjen na sledeći način:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} dF(x) < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \infty, \tag{3.8.3}$$

gde je $\alpha = const,\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq \alpha < 2$. Tada niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikih brojeva. Međutim, red $\sum_{n=1}^{\infty} P[|Y_n| > \varepsilon]$ divergira za svako $\varepsilon > 0$ i stoga relacija $Y_n \xrightarrow{k} 0$ ne važi. Dakle, postoje nizovi nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom takvi da njihova odgovarajuća aritmetička sredina $\{Y_n\}$ konvergira skoro izvesno, ali ne i kompletno.

Najzad, ostaje da se navede neki određeni slučaj kada su uslovi (3.8.3) zadovoljeni. Na primer, neka je X_1 slučajna promenjiva apsolutno-neprekidnog tipa sa gustinom $f(x) = |x|^{-3}$ za $|x| \geq 1$ i $f(x) = 0$ inače.

3.9 Uniformna ograničenost prvih momenata tesnog niza slučajnih promenljivih nije dovoljan uslov za strogi zakon velikih brojeva

Prvo treba napomenuti da se za niz $\{X_n, n \geq 1\}$ slučajnih promenjivih sa realnim vrednostima kaže da je tesan ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan interval $K_\varepsilon \subset \boldsymbol{R}$ takav da je $P[X_n \in K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon$ za svako n.

Neka je sada $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih. Na osnovu rezltata Taylora i Weia (1979), ako je $\{X_n\}$ tesan niz i ako su momenti reda $p, p > 1$ uniformno ograničeni, tj. $E[|X_n|^r] \leq M = const. < \infty$, tada niz $\{X_n\}$ zadovoljava strogi zakon velikiih brojeva.

Postavlja se pitanje da li je moguće oslabiti pretpostavku za $p, p > 1$, tj. zameniti je pretpostavkom $p = 1$.

Specifičnim primerom biće dokazano da je odgovor na ovo pitanje negativan. Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takav da je

$$P[X_n = n] = P[X_n = -n] = \frac{1}{2}[n \log(n+2)]^{-1}, P[X_n = 0] = 1 - [n \log(n+2)]^{-1}.$$

Tada je $EX_n = 0, E[|X_n|] = 1/\log(n+2)$. Dakle, $E[|X_n|]$ je uniformno ograničeno i zaista, $E[|X_n|] \to 0$. Uzimajući u obzir i relaciju $P[|X_n| \geq n]$=1/($n\log(n+2)$) zaključuje se da je niz $\{X_n\}$ tesan.

Dalje, $\sum_{n=1}^{\infty} P\,[|X_n| \geq n] = \infty$ i Borel-Cantellijeva lema implicira da se događaj $[|X_n| \geq n]$ realizuje sa verovatnoćom 1. Međutim, ovo znači da strogi zakon velikih brojeva ne važi za niz $\{X_n\}$.

3.10 Ponderisani proseci nizova slučajnih promenljivih mogu konvergirati čak iako zakon velikih brojeva ne važi

Neka je $\{X_k, k \geq 1\}$ niz nedegenerisanih nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom, $\{c_k, k \geq 1\}$ niz pozitivnih brojeva i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k$ i $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\,, n \geq 1$. Količnici $S_n/C_n, n \geq 1$ se nazivaju ponderisanim prosecima generisanim sa $\{X_k, c_k, k \geq 1\}$. Kaže se da strogi (slabi) zakon velikih brojeva važi za ponderisane proseke $\{X_k, c_k, k \geq 1\}$ ako i samo ako S_n/C_n konvergira u verovatnoći (skoro izvesno) ka nekoj konstanti kada $n \to \infty$.

Bez gubljenja opštosti, može se pretpostaviti da je $EX_k = 0, \forall k \geq 1$. Postavlja se pitanje da li $\frac{S_n}{C_n}$ konvergira ka nuli kada $n \to \infty$.

Očigledno, ako je $c_k \equiv 1, \forall k$, tada je $S_n = X_1 + \cdots X_n, C_n = n$ što je u okviru klasičnog zakona velikih brojeva.

Cilj je pokazati da postoji niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom $\{X_k\}$ i niz pondera $\{c_n\}$ takvih da

$$S_n/C_n \xrightarrow{s.i.} 0 \; dok \; \frac{1}{n}(\, X_1 + \cdots X_n) \nrightarrow 0 \; u \; skoro \; izvesnom \; smislu \; kada \; n \to \infty.$$

Drugim rečima, strogi zakon velikih brojeva važi za ponderisane proseke, ali klasični strogi zakon velikih brojeva ne važi. Može se izvesti analogni zaključak za slabi zakon velikih brojeva za ponderisane proseke i klasičan slabi zakon velikih brojeva.

Prvo će biti razmatran strogi zakon. Po pretpostavci, slučajne promenjive X_n imaju istu raspodelu, tako da u ovom slučaju strogi zakon velikih brojeva ne važi ako i samo ako je $E[|X_1|] = \infty$. Nadalje će biti potreban sledeći rezultat (Wright, Platt, Robertson 1977).

Neka je $g(x), x \in R^+$ nenegativna merljiva funkcija takva da $g(x) \to \infty, x \to \infty$. Tada postoji niz $\{X_k, c_k, k \geq 1\}$ čiji ponderisani proseci $S_n/C_n, n \geq 1$ zadovoljavaju strogi zakon velikih brojeva i $E[g({X_1}^+)] = E[g({X_1}^-)] = \infty$.

Zapravo, ovaj rezultat sadrži sve što je potrebno, tj. niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom $\{X_k, k \geq 1\}$ i osobinom $EX_k = 0, \forall k \geq 1$, niz pondera $\{c_k, k \geq 1\}$ takvih da $S_n/C_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$, iako niz $\{X_k\}$ ne zadovoljava klasičan strogi zakon velikih brojeva.

Sličan zaključak se može izvesti ako se primeni rezultat Chowa i Teichera (1971) koji tvrdi da postoji slučajna promenjiva X sa osobinom da je $E|X| = \infty$ takva da niz $\{X_k\}$ nezavisnih kopija od X zajedno sa odgovarajućim nizom pondera $\{c_k\}$ generiše ponderisane proseke S_n/C_n koji konvergiraju skoro izvesno ka nuli kada $n \to \infty$. Očigledno, nemoguće je u ovom slučaju uzeti $c_k \equiv 1$ s obzirom na to da uslov $E|X| = \infty$ garantuje da klasični strogi zakon velikih za niz $\{X_k\}$ ne važi. Sa tim u vezi, Chow i Teicher su dali dva specifična primera. Prvi se odnosi na Sankt Peterzburšku igru ($X_k = 2^k$ sa verovatnoćom 2^{-k} i 0 inače), dok u drugom slučaju X ima Košijevu raspodelu.

Od interesa je uporediti neke posledice rezultata Chowa i Teichera (1971) i Wrighta, Platta i Robertsona (1977). Razmatra se vrednost $E[|X|^r]$ za različite vrednosti r. I jedan i drugi primer Chowa i Teichera su takvi da

$$\lim_{x\to\infty} x^r P[|X| \geq x] = 0, \qquad \forall\, 0 < r < 1,$$

što implicira da je $E[|X|^r] < \infty, \forall\, 0 < r < 1$. U rezultatu Wrighta, Platta i Robertsona može se uzeti funkcija $g(x) = (\log x)^+$ i izabrati niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom $\{X_k\}$ takav da je $E[|X|^r] = \infty,\ \forall\, r > 0$ i uprkos tome, postoji niz pondera $\{c_k\}$ takav da $S_n/C_n \xrightarrow{s.i.} const$. Očigledno strogi zakon velikih brojeva ne važi.

Sada će biti razmatran slabi zakon velikih brojeva. Lako je videti da ako slabi zakon velikih brojeva važi za ponderisane proseke $\{X_k, c_k\}$ onda $\{c_k\}$ mora zadovoljiti sledeći uslov

$$C_n \to \infty, \frac{c_n}{C_n} \to 0, n \to \infty. \tag{3.10.1}$$

Prema Jamisonu, Oreyu i Pruittu (1965), slabi zakon velikih brojeva važi za bilo koji niz pondera $\{c_k\}$ koji zadovoljava uslov (3.10.1) ako i samo ako $\int_{|x|\leq T} x dF(x) \to a = const., T \to \infty$ i

$$\lim_{T\to\infty} TP[|X| \geq T] = 0, \tag{3.10.2}$$

gde je F funkcija raspodele slučajne promenjive X. Ovaj rezultat i iskaz Loèvea (1978) dozvoljvaju da se zaključi da, ako slučajna promenjiva X ima fiksiranu raspodelu (uzimaju se u obzir samo nezavisne slučajne promenjive sa istom raspodelom), tada slabi zakon velikih brojeva važi za $\{X_k, c_k\}$, za bilo koji niz $\{c_k\}$ ako i samo ako $\{X_k\}$ zadovoljava klasični slabi zakon velikih brojeva (slučaj kada je $c_k \equiv 1, \forall k$).

Međutim, koristeći rezultat Wrighta, Platta i Robertsona za funkciju $g(x) = x^r,\ 0 < r < 1$ može se dobiti niz $\{X_k, c_k\}$ za koji slabi zakon važi, ali uslov (3.10.2) nije ispunjen. U ovom slučaju, slabi zakon neće važiti za niz $\{X_k, 1\}$. Očigledno, ovo znači da niz $\{X_k\}$ ne zadovoljava klasični slabi zakon velikih brojeva, uprkos činjenici da za neke nizove pondera $\{c_k\}$, ponderisani proseci S_n/C_n konvergiraju u verovatnoći.

3.11 Zakon velikih brojeva sa specijalnim izborom normirajućih konstanata

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom i $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Ako za neke nizove brojeva $\{a_n, n \geq 1\}$ i $\{b_n, n \geq 1\}$, $b_n > 0, \forall n \in \boldsymbol{N}$ važi naredna relacija:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to 0, n \to \infty, \tag{3.11.1}$$

onda se kaže da niz $\{X_n\}$ zadovoljava ***uopšteni zakon velikih brojeva.*** Ovaj zakon je strog ili slab u zavisnosti od tipa konvergencije u relaciji (3.11.1). Ako je $a_n = ES_n$ i $b_n = n$ dobija se oblik klasičnog zakona velikih brojeva. Međutim, postoje nizovi slučajnih promenjivih za koje ovaj zakon ne važi, ali za neke posebne izbore nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ uopšteni zakon velikih brojeva će važiti. U ovu svrhu, razmatra se sledeći primer.

U dobro poznatoj Sankt Peterzburškoj igri, igrač dobija 2^k rubalja ako se glava prvi put pojavi u k-tom bacanju simetričnog novčića, $k = 1,2 \dots$ .Tako se dobija niz nezavisnih slučajnih promenjivih $\{X_k, k \geq 1\}$ gde je

$$P[X_k = 2^k] = 2^{-k} = 1 - P[X_k = 0].$$

Lako je videti da dati niz ne zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Ostaje da se proveri da li relacija (3.11.1) važi.

Koristeći terminologiju igre, pretpostavimo da igrač plaća promenjive iznose uloga, sa kumulativnom naknadom u iznosu od $b_n = n \log n$ za prvih n igara. Tada, igra postaje fer, u smislu da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = 1 \ u\ verovatnoći. \qquad (3.11.2)$$

Prirodno je pitati se da li je data igra fer i u strogom smislu, tj. da li relacija (3.11.2) važi sa verovatnoćom 1. Zapravo, biće pokazano da je ova igra sa $b_n = n \log n$ fer u slabom smislu, ali ne i u strogom. Drugim rečima, biće pokazano da niz $\{X_k\}$ zadovoljava slabi uopšteni zakon velikih brojeva, ali ne i strogi sa $a_n = b_n = n \log n, n \geq 2$. Lako je uočiti da je $P[X_n > c] \geq 1/c$, za svako c$> 1, n \geq 2$. Stoga, za $c = const. > 1, n \geq 2$ važi:

$$P[X_n > cb_n] \geq 1/(cn \log n), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} P[X_n > cb_n] = \infty.$$

Ovo zajedno sa Borel-Cantellijevom lemom implicira

$$P[X_n/b_n > c\ beskonačno\ često] = 1.$$

Prema tome,

$$P[\lim sup\, X_n / b_n = \infty] = 1, \qquad P[\lim sup\, S_n / b_n = \infty] = 1.$$

Dakle,

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = 1\right] = 0,$$

što pokazuje da je relacija (3.11.2) zadovoljena u slučaju konvergencije u verovatnoći, ali ne i u slučaju skoro izvesne konvergencije.

Glava 4

Slaba konvergencija verovatnosnih mera i raspodela

U prethodnim odeljcima je uveden pojam konvergencije u raspodeli i ilustrovan primerima. Naročito, pomenuto je da je ova vrsta konvergencije usko povezana sa takozvanom konvergencijom koja se naziva slabom. U ovom odeljku će biti definisana slaba konvergencija i biće razjašnjena njena veza sa ostalim vrstama konvergencija.

Neka su $F_n, n \geq 1$ i F funkcije raspodela na realnoj pravoj $\boldsymbol{R}$. Označimo sa P_n i P verovatnosne mere na ($\mathbf{R}$, $\mathcal{B}$) generisane sa F_n i F, respektivno. Podsećanja radi, P_n i P su jedinstveno određene relacijama $P_n(-\infty, x] = F_n(x)$ i $P(-\infty, x] = F(x), x \in \boldsymbol{R}$. Kako je funkcija F neprekidna u tački x ako i samo ako je $P(\{x\}) = 0$, onda konvergencija u raspodeli $F_n \overset{r}{\rightarrow} F$ znači da $P_n(-\infty, x] \rightarrow P(-\infty, x]$ za svako x za koje je $P(\{x\}) = 0$. Razmotrimo sada opštiju situaciju.

Za svaki Borelov skup $A \subset \boldsymbol{R}$ $(tj. A \in \mathcal{B})$, neka je ∂A rub skupa A. Pretpostavlja se da su P_n i $P, n \geq 1$ verovatnosne mere na ($\mathbf{R}$, $\mathcal{B}$). Kaže se da niz $\{P_n\}$ slabo konvergira ka P, u zapisu $P_n \overset{s}{\rightarrow} P$, ako za svaki skup $A \in \mathcal{B}$, takav da je $P(\partial A) = 0$, važi:

$$P_n(A) \rightarrow P(A), n \rightarrow \infty.$$

Sada će biti naveden osnovni rezultat koji pokazuje da su različiti koncepti slabe konvergencije ekvivalentni.

Teorema 4.1. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

a) $P_n \overset{s}{\rightarrow} P$;

b) $\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n(A) \leq P(A)$ za svaki zatvoren skup $A \in \mathcal{B}$;

c) $\underline{\lim_{n\to\infty}} P_n(A) \geq P(A)$ za svaki otvoren skup $A \in \mathcal{B}$;

d) Za svaku neprekidnu i ograničenu funkciju g na skupu $\mathbf{R}$ važi:

$$\int_{\boldsymbol{R}} g(x)\, P_n(dx) \rightarrow \int_{\boldsymbol{R}} g(x)\, P(dx), n \rightarrow \infty.$$

Potrebno je naglasiti da je ovo restrikcija na slučaj kada su verovatnosne mere definisane na skupu $\boldsymbol{R}$. Zapravo slaba konvergencija se izučava u mnogim opštijim situacijama. Međutim, konvergencija u raspodeli koja je već definisana u prethodnim odeljcima je ekvivalentna slaboj konvergenciji koja je ranije pomenuta. Ako se radi sa verovatnosnim merama, izraz slaba konvergencija je adekvatniji, dok se za funkcije raspodela koriste oba termina, kao i obe notacije, $F_n \overset{s}{\rightarrow} F$ i $F_n \overset{r}{\rightarrow} F$.

Sledeća teorema je još jedan fundamentalan rezultat koji povezuje slabu konvergenciju funkcija raspodela sa tačkastom konvergencijom odgovarajućih karakterističnih funkcija.

Teorema 4.2. (***Teorema o neprekidnosti***) Neka je $\{F_n, n \geq 1\}$ niz funkcija raspodela na skupu $\boldsymbol{R}$ i neka je $\{\phi_n, n \geq 1\}$ niz odgovarajućih karakterističnih funkcija.
a) Ako $F_n \xrightarrow{s} F$, gde je F funkcija raspodele, tada $\phi_n(t) \to \phi(t), t \in \boldsymbol{R}$ gde je ϕ karakteristična funkcija koja odgovara funkciji raspodele F.
b) Ako $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ postoji za svako $t \in \boldsymbol{R}$ i $\phi(t) := \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ je neprekidna u tački $t = 0$, tada je ϕ karakteristična funkcija koja odgovara funkciji raspodele F i $F_n \xrightarrow{s} F, n \to \infty$.

4.1 Definišuće klase i klase koje definišu konvergencije

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor i neka su P, Q verovatnoće na ovom prostoru. Pretpostavlja se da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ klasa događaja takvih da

$$P = Q \; na \; skupu \; \mathcal{A} \Rightarrow P = Q \; na \; skupu \; \mathcal{F}.$$

Za takvu klasu $\mathcal{A}$ se kaže da je definišuća klasa.

Kaže se da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ klasa koja definiše konvergenciju ako

$$P_n(A) \to P(A) \; za \; sve \; skupove \; A \in \mathcal{A}, \mathrm{P}(\partial A) = 0,$$

tj. $P_n \xrightarrow{s} P, n \to \infty$.

Sada će biti ilustrovana veza između ova dva zapisa.

I. Očigledno, svaka klasa koja definiše konvergenciju je definišuća klasa. Međutim, obrnuto ne važi uvek.

Neka je $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1)}$ i $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ polje svih konačnih unija podintervala tipa $[a, b)$, $0 < a < b < 1$. Tada je $\mathcal{A}$ definišuća klasa, ali nije i klasa koja definiše konvergenciju. Da bi se ovo uočilo, dovoljno je razmatrati verovatnoće P_n i P koncentrisane oko tačaka $1 - 1/n$ i 0, redom.

II. Neka su $\{P_n, n \geq 1\}$, P i Q redom verovatnoće na $(\Omega, \mathcal{F})$ gde je $\Omega = \boldsymbol{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ i neka je $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ definišuća klasa. Pretpostavlja se da su naredna dva uslova zadovoljena:

$$P_n(A) \to Q(A), \qquad n \to \infty, \qquad \forall A \in \mathcal{A} \tag{4.1.1}$$

i

$$P_n \xrightarrow{s} P, n \to \infty. \tag{4.1.2}$$

Kako je $\mathcal{A}$ definišuća klasa, iz relacija (4.1.1) i (4.1.2) može se očekivati da je $P = Q$. Međutim, primer koji sledi će pokazati da je ova pretpostavka pogrešna.

Definišu se P_n, P i Q na sledeći način:

$$P_n\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{2}, \qquad P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}, \qquad Q(\{0\}) = 1.$$

Lako je videti da $P_n \xrightarrow{s} P, n \to \infty$. Neka se skup B sastoji od tačaka $0, 1, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, n \geq 1$. Sa $\mathcal{A}$ će biti označeno polje koje sadrži sve skupove $A \in \mathcal{F}$, takve da je AB konačan i $0 \notin A$, ili $A^c B$ je konačan i $0 \notin A^c$. Tada je A definišuća klasa i $P_n(A) \to Q(A),\ n \to \infty, \forall A \in \mathcal{A}$.

Dakle, uslovi (4.1.1) i (4.1.2) su zadovoljeni, ali $P \neq Q$.

III. Neka je $\boldsymbol{C}[0,1]$ prostor svih neprekidnih funkcija na segmentu $[0,1]$ i ζ Borelovo σ-polje. Za $k \in \boldsymbol{N}$ i $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ neka

$$\pi_{t_1 \ldots t_k} : \boldsymbol{C}[0,1] \to \boldsymbol{R}^k$$

preslikava tačku $x \in \boldsymbol{C}[0,1]$ u tačku $(x(t_1), \ldots, x(t_k)) \in \boldsymbol{R}^k$. Konačno-dimenzionalni skupovi (cilindri) na $\boldsymbol{C}[0,1]$ su definisani kao skupovi oblika $\pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} H, H \in \boldsymbol{R}^k$. Sa $\mathcal{A}$ će biti označena klasa svih takvih skupova. Kako je σ-polje generisano klasom $\mathcal{A}$, to znači da je $\mathcal{A}$ definišuća klasa. Ovo zapažanje dovodi do pitanja da li $\mathcal{A}$ formira klasu koja definiše konvergenciju.

Treba napomenuti da je odgovor na ovo pitanje potvrdan ako se razmatra prostor $(\boldsymbol{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ i klasa $\mathcal{A}$ koja se sastoji od konačno-dimenzionalnih skupova na $\boldsymbol{R}^\infty$.

Međutim, biće pokazano da na prostoru $\boldsymbol{C}[0,1]$ nije potrebno da $\mathcal{A}$ bude klasa koja definiše konvergenciju. Da bi se ovo dokazalo, razmatraju se verovatnosne mere P i P_n gde je P koncentrisana oko funkcije $x \equiv 0$ $(x(t) = 0, t \in [0,1])$ i P_n je koncentrisana oko funkcije x_n definisane kao

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n}, \\ 2 - nt, & \dfrac{1}{n} < t \leq \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \dfrac{2}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Kako x_n ne konvergira uniformno ka 0 na prostoru $\boldsymbol{C}[0,1]$, mere P_n ne mogu konvergirati slabo ka P kada $n \to \infty$. Na primer, ako je $A = S(0, \frac{1}{2})$ sfera na prostoru $\boldsymbol{C}[0,1]$, sa centrom u nuli i poluprečnikom $\frac{1}{2}$, tada je $\mathrm{P}(\partial A) = 0$, ali $P_n(A) = 0 \nrightarrow P(A) = 1$.

Potrebno je napomenuti i da relacija $P_n(A) \to P(A)$ važi za bilo koji konačno-dimenzionalni skup A na prostoru $\boldsymbol{C}[0,1]$, sa osobinom $\mathrm{P}(\partial A) = 0$. Ovo sledi na osnovu jednakosti $P_n(A) = P(A)$ koja je zadovoljena za svaki skup A koji je oblika $\pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} H, H \in \boldsymbol{\mathcal{B}}^k$ i $n \geq n_0$ gde je $n_0 = [2/t_{min}] + 1, t_{min} = \min\{t_j, t_j \neq 0\}$.

Ovaj primer pokazuje da slaba konvergencija u prostoru $\boldsymbol{C}[0,1]$ ne može biti okarakterisana kao konvergencija za sve konačno-dimenzionalne skupove (kao na $\boldsymbol{R}^\infty$).

4.2 Slučajne promenljive koje konvergiraju skoro izvesno mogu imati odgovarajuće verovatnosne mere koje nisu konvergentne za sve Borelove skupove

Neka su $X_n, n \geq 1$ slučajne promenjive definisane na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ i neka je $\mu_n, n \geq 1$ odgovarajuća verovatnosna mera na skupu $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B})$. Pretpostavlja se da $X_n \xrightarrow{s.i.} X, n \to \infty$ za neku slučajnu promenjivu X. Verovatnosna mera na $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B})$ koja se odnosi na slučajnu promenjivu X biće označena sa μ. Na ovaj način se dolazi do pitanja kakvo je ponašanje

$\mu_n(A), A \in \mathcal{B}$ kada $n \to \infty$. Sledeći primer će pokazati da $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ne mora uvek da postoji, ili ako postoji, tada relacija $\mu_n(A) \to \mu(A)$ ne mora biti ispunjena za svaki skup $A \in \mathcal{B}$.

1. Neka je $X_n = c_n = const. \to 0, n \to \infty$. Očigledno, $X_n \to 0$ sa verovatnoćom 1, tj. $X_n \xrightarrow{s.i.} X$, gde je $X = 0$. Neka su μ_n i μ jedinične mere koncentrisane oko tačaka c_n i 0, respektivno. Neka je I proizvoljan interval na skupu $\boldsymbol{R}$, sa $\bar{I}$ i I^0 će biti označeni zatvorenje i unutrašnjost skupa I, redom. Očigledno,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(I) = 0 = \mu(I), \ \ 0 \notin \bar{I},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(I) = 0 = \mu(I), \ \ 0 \in I^0.$$

Interval I se bira na sledeći način: ili $I = (a, 0)$, ili $I = (0, b)$, gde je $a < 0 < b$. Takođe, pretpostavlja se da niz $\{c_n\}$ oscilira između strogo pozitivnih i strogo negativnih vrednosti, na primer, neka je $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Tada, $\mu_n(I)$ oscilira između 0 i 1, dok je $\mu(I) = 0$. Sa druge strane, ako je $I = (a, 0]$ ili $I = [0, b)$, tada $\mu_n(I)$ oscilira između 0 i 1 ali $\mu(I) = 1$.

Dakle, skoro izvesna konvergencija niza $\{X_n\}$ ne garantuje da će verovatnosne mere kovergirati na svim Borelovim skupovima. Razlog ovome je taj što granična mera μ ima atom u tački $\{0\}$.

Treba napomenuti da sličan zaključak važi i u slučaju kada slučajne promenjive X_n imaju uniformnu raspodelu na intervalima (c_n', c_n'') gde je $c_n' < 0 < c_n''$, pri čemu $c_n' \to 0, c_n'' \to 0$. Ponovo važi da $X_n \xrightarrow{s.i.} 0, n \to \infty$, ali $\mu_n(a, 0)$, $\mu_n(a, 0]$, $\mu_n(0, b)$, $\mu_n[0, b)$ mogu da ne konvergiraju, ili mogu konvergirati ka bilo kom broju iz intervala $(0,1)$.

2. Neka je $X_n = c_n, c_n \to \infty, n \to \infty$. Tada i $X_n \to \infty$ deterministički. Međutim, ∞ ne pripada skupu vrednosti nijedne uobičajne slučajne promenjive. Prema tome, za svaki konačan interval (a, b) važi $\lim_{n\to\infty} \mu_n(a, b) = 0$. Dakle, bilo koja granična mera mora biti identički jednaka nuli. Ali takva mera nije verovatnosna mera.

Razmatra se još jedan primer. Neka je niz $\{X_n\}$ definisan na sledeći način: $X_n = a_n$, $X_n = 0$, ili $X_n = b_n$, sa verovatnoćama $\alpha, 1 - \alpha - \beta, \beta$, respektivno. Važi da je $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$. Pretpostavlja se da $a_n \to -\infty, b_n \to \infty, n \to \infty$. Tada se može zapisati $X_n \to X$, gde je $X = -\infty, 0, \infty$, sa verovatnoćama $\alpha, 1 - \alpha - \beta, \beta$, respektivno. Ako je (a, b) konačan interval koji sadrži nulu, tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(a, b) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\{0\}) = 1 - \alpha - \beta.$$

U ovoj situaciji se kaže da su mase količina α i β "odlutale ka $-\infty$ i ∞", respektivno.

Očigledno, X je nesvojstvena slučajna promenjiva, tako da je za razumno objašnjenje ovog primera potrebno razmatrati meru μ na proširenoj realnoj pravi $\boldsymbol{R} = [-\infty, \infty]$ sa mogućim atomima u beskonačnim $\{-\infty\}$ i $\{\infty\}$.

4.3 Konvergencija u raspodeli ne implicira da odgovarajuća verovatnosna mera konvergira za sve Borelove skupove

Neka su $F_0(x), F_n(x), x \in \boldsymbol{R}, n \geq 1$ funkcije raspodela i $\mu_0, \mu_n, n \geq 1$ njihove verovatnosne mere na prostoru $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B})$. Pretpostavlja se da $F_n \xrightarrow{r} F_0, n \to \infty$. Sledi da

$$\mu_n((-\infty, x]) \to \mu_0((-\infty, x]), \tag{4.3.1}$$

za svaku tačku $x \in \boldsymbol{R}$ koja je tačka neprekidnosti funkcije F_0. Treba napomenuti da relacija (4.3.1) predstavlja konvergenciju mere μ_n ka meri μ_0, ali za specijalne vrste skupova, tj. za beskonačne intervale koji pripadaju skupu $\mathcal{B}$. Tako se dolazi do pitanja da li konvergencija $F_n \xrightarrow{r} F_0$ implicira da

$$\mu_n(B) \to \mu_0(B), \qquad \forall B \in \mathcal{B}. \tag{4.3.2}$$

Ispostaviće se da je odgovor na ovo pitanje negativan.

Prvo, biće izabran i fiksiran proizvoljan broj $\varepsilon \in (0,1)$ i neka je $\delta_n := \varepsilon/(n2^n)$. Razmatra se niz slučajnih promenjivih apsolutno-neprekidnog tipa $\{X_n, n \geq 1\}$, gde X_n ima gustinu

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{2^n}{\varepsilon}, & k/n - \delta_n < x \leq k/n, k = 1,2,\dots,n, \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Tada, funkcija raspodele F_n slučajne promenjive X_n ima sledeći eksplicitni oblik:

$$F_n = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ (k-1)/n, & (k-1)/n < x \leq k/n - \delta_n, \\ (k-1)/n + \varepsilon^{-1}2^n(x - k/n + \delta_n), & k/n - \delta_n < x \leq k/n, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Lako se može uočiti da za $x \in [0,1]$ važi $0 \leq x - F_n(x) \leq 1/n, n \geq 1$. Stoga,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Drugim rečima, $F_n \xrightarrow{r} F_0$, odnosno $X_n \xrightarrow{r} X_0$, gde je X_0 slučajna promenjiva sa uniformnom raspodelom na segmentu $[0,1]$.

Prema tome, pokazano je da važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(u)du = \int_{-\infty}^{x} f_o(x)du \tag{4.3.3}$$

gde je f_o gustina uniformne raspodele na segmentu $[0,1]$.

Pored toga, konvergencija u relaciji (4.3.3) je uniformna po tački x. Pitanje koje se odnosilo na relaciju (4.3.2) može biti formulisano i na sledeći način: da li relacija

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(u)du = \int_B f_o(u)du \tag{4.3.4}$$

važi za svaki skup $B \in \mathcal{B}$?

Uvode se oznake $B_n = \{x \in [0,1]: f_n(x) > 0\}$ i $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Tada,

$$\mu_n(B_n) = \int_{B_n} f_n(u)du = 1, \qquad \mu_0(B_n) = \int_{B_n} f_o(u)du = \varepsilon/2^n.$$

Sledi da je

$$\mu_0(B) = \int_B f_o(u)du \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f_o(u)du = \varepsilon \tag{4.3.5}$$

i

$$\mu_n(B) = \int_B f_n(u)du = \int_{B_n} f_n(u)du = 1. \tag{4.3.6}$$

Kako je $0 < \varepsilon < 1$, relacije (4.3.5) i (4.3.6) jasno pokazuju da relacija (4.3.4) ne važi. Stoga, u opštem slučaju ne važi da $\mu_n(B) \to \mu_0(B)$ za svaki Borelov skup B, uprkos činjenici da $F_n \xrightarrow{r} F_0$. Osim toga, u ovom specijalnom primeru, granična funkcija raspodele F_0 je svuda neprekidna.

Treba napomenuti još jednu bitnu karakteristiku primera koji je razmatran. Može se pokazati da je skup $[0,1]\backslash B$ savršen i nigde gust skup na segmentu $[0,1]$ i da je $\mu_0([0,1]\backslash B) \geq 1 - \varepsilon$. Ovo je razlog zašto relacija (4.3.2), a samim tim i relacija (4.3.4) ne važi.

4.4 Slaba konvergencija verovatnosnih mera ne mora biti uniformna

Neka su $F_0(x), F_n(x), x \in \boldsymbol{R}, n \geq 1$ funkcije raspodela i $\mu_0, \mu_n, n \geq 1$ njihove verovatnosne mere na skupu $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B})$. Pretpostavlja se da je

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu_0(B), \qquad \forall B \in \mathcal{B}. \tag{4.4.1}$$

Prirodno je pitati se da li relacija (4.4.1) važi uniformno na skupu B. Primer koji sledi će pokazati da je u opštem slučaju odgovor na ovo pitanje negativan, čak i kada se pretpostavi da su funkcije raspodela $F_0(x), F_n(x), n \geq 1$ aspolutno neprekidne.

Neka funkcije raspodela$F_0(x), F_n(x), n \geq 1$ imaju gustine $f_0, f_n, n \geq 1$, respektivno. Tada se relacija (4.4.1) može zapisati i u obliku:

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)dx = \int_B f_o(x)dx, \quad B \in \mathcal{B}. \tag{4.4.2}$$

Razmatraju se funkcije:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \sin(2\pi n x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases} f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Lako je uočiti da su f_0 i f_n funkcije gustina za svako $n \geq 1$. Očigledno, f_0 je gustina slučajne promenjive sa unifomnom raspodelom na segmentu $[0,1]$. Ako su $F_0(x), F_n(x), n \geq 1$ funkcije raspodela koje odgovaraju funkcijama gustina $f_0, f_n, n \geq 1$, tada $F_n \xrightarrow{r} F_0, n \to \infty$. Osim toga, primenjujući Reimann-Lebegovu teoremu, može se zaključiti da je relacija (4.4.1), a samim tim i relacija (4.4.2), zadovoljena za ovako dat izbor funkcija $f_0, f_n, n \geq 1$ i svaki skup $B \in \mathcal{B}$.

Sada će biti razmatrani skupovi $B_n = \{x \in [0,1]: f_n(x) \geq 1\}, n \geq 1$. Tada,

$$\int_{B_n} f_o(x)dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_{B_n} f_n(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}, \qquad n = 1,2,\dots.$$

Ove relacije pokazuju da u opštem slučaju konvergencija u relacijama (4.4.1) i (4.4.2) ne mora biti uniformna.

4.5 Niz verovatnosnih funkcija gustina može konvergirati u srednjem reda 1, ali može nigde konvergirati

Neka su $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, x \in \boldsymbol{R}$ funkcije gustina. Ovde će biti razmatrane dve vrste konvergencija funkcija f_n ka f_0: konvergencija skoro svuda i konvergencija u srednjem reda 1. One su izražene na sledeći način, respektivno:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \ \ skoro\ svuda, \tag{4.5.1}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_0(x)|\, dx = 0. \tag{4.5.2}$$

Cilj je uporediti relacije (4.5.1) i (4.5.2). Na osnovu rezultata Robbinsa (1948), $(4.5.1) \Rightarrow (4.5.2)$. Međutim, obratno ne važi uvek. Zaista, neka su

$$f_n(x) = \begin{cases} n/(n-1), & (k-1)/n < x < k/n - 1/n^2, k = 1,2,\dots,n, \\ 0, & inače. \end{cases}$$

i f_0 uniformna funkcija gustine na intervalu $(0,1)$. Lako je uočiti da je za svako n, funkcija f_n gustina, i ako je $B_n = \{x \in (0,1): f_n(x) > 0\}$, tada

$$|f_n(x) - f_0(x)| = \begin{cases} 1/(n-1), & x \in B_n, \\ 1, & x \in B_n^c \cap (0,1). \end{cases}$$

Kako su skupovi B_n i $B_n^c \cap (0,1)$ Lebegovih mera $(n-1)/n$ i $1/n$, respektivno, dobija se relacija:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)| dx = \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)| dx = 0,$$

tj. f_n konvergira ka f_0 u srednjem reda 1. Ostaje da se pokaže da $f_n(x) \nrightarrow f_0(x) \equiv 1, x \in (0,1)$. Treba napomenuti da za svaki fiksiran iracionalan broj z, postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva m/k takvih da $m/k - 1/k^2 < z < m/k$ (Niven, 1963). Ova činjenica i definicija funkcije f_n impliciraju da je $f_n(x) = 0$ za beskonačno mnogo n i za svaki fiksirani iracionalni broj $x \in (0,1)$. Dalje, ako je x racionalan broj iz intervala $(0,1)$, tada je $x = m/k$ za neke pozitivne prirodne brojeve m i k takve da je $m < k$ i $f_n(x) = 0$ za $n = lk, l = 1,2,\dots$.
Prema tome, za svako $x \in (0,1)$ gustine $f_n(x)$ ne mogu konvergirati ka $f_0(x) \equiv 1$.

4.6 Dva slučaja kada teorema o neprekidnosti ne važi

Neka su $F_0, F_n, n \geq 1$ funkcije raspodela i $\phi_0, \phi_n, n \geq 1$ njihove odgovarajuće karakteristične funkcije, respektivno. Teorema o neprekidnosti tvrdi da

$$F_n \xrightarrow{r} F_0 \Leftrightarrow \phi_n(t) \to \phi_0(t),$$

gde je karakteristična funkcija ϕ_0 neprekidna u nuli.

Pomoću dva jednostavna primera biće pokazano da je zahtev da karakteristična funkcija ϕ_0 bude neprekidna u nuli od suštinskog značaja.

1) Razmatra se niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ gde $X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$. Tada je karakteristična funkcija ϕ_n za slučajne promenjive X_n data sa $\phi_n(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}nt^2\right), t \in \boldsymbol{R}$. Očigledno, $\phi_n(t) \to \tilde{\phi}(t), n \to \infty$, gde je

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Dakle, granična funkcija $\tilde{\phi}$ nije neprekidna u nuli, tako da teorema o neprekidnosti ne može da važi. Sa druge strane, važi:

$$F_n(x) = P[X_n \leq x] = P\left[n^{-1/2}X_n \leq n^{-1/2}x\right] = \phi\left(n^{-1/2}x\right) \to \frac{1}{2}, \ \ n \to \infty.$$

Očigledno, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \tilde{F}(x)$ ne postoji za svako $x \in \boldsymbol{R}$ i $\tilde{F}(x) \equiv \frac{1}{2}$ nije funkcija raspodele.

2) Razmatra se familija funkcija $\{F_n, n \geq 1\}$ gde je

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -n, \\ \dfrac{n+x}{2n}, & -n \leq x \leq n, \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

Tada je, za svako n, F_n funkcija raspodele i, očigledno, za svako $x \in \boldsymbol{R}$ važi $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2}$. Prema tome, niz $\{F_n\}$ je konvergentan, ali njegova granica, konstanta $\frac{1}{2}$, nije funkcija raspodele. Jednostavno objašnjenje za ovu činjenicu može biti dato ako se razmatra karakteristična funkcija ϕ_n za datu funkciju raspodele F_n. Kako je $\phi_n(t) = (\sin nt)/(nt)$, tada

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \tilde{\phi}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Ponovo, kao i u primeru 1), granična funkcija $\tilde{\phi}$ nije neprekidna u nuli, tako da teorema o neprekidnosti ne može biti primenjena.

4.7 Verzija teoreme o neprekidnosti za funkcije raspodela koja ne važi za funkcije gustina

Neka je X_n slučajna promenjiva sa funkcijom raspodele F_n, gustinom f_n i karakterističnom funkcijom $\phi_n, n \geq 1$. Teorema o neprekidnosti daje potrebne i dovoljne uslove za slabu konvergenciju niza $\{F_n\}$ u odnosu na niz $\{\phi_n\}$. Sada je cilj naći uslove koji se odnose na niz karakterističnih funkcija $\{\phi_n\}$ i niz gustina $\{f_n\}$.

Za neku slučajnu promenjivu X_0 sa funkcijom raspodele F_0, gustinom f_0, i karakterističnom funkcijom ϕ_0 uvode se sledeća tri uslova:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x), \qquad za\ skoro\ svako\ x \in \boldsymbol{R}, \tag{4.7.1}$$

$$F_n \xrightarrow{s} F, \qquad n \to \infty, \tag{4.7.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi_0(t) \ \ i\ \phi_0\ je\ neprekidna\ u\ nuli. \tag{4.7.3}$$

Na osnovu teoreme o neprekidnosti važi (4.7.2) $\Leftrightarrow$ (4.7.3). Na osnovu teoreme Schefféa važi (4.7.1) $\Rightarrow$ (4.7.2), ali u opštem slučaju (4.7.2) $\nRightarrow$ (4.7.1). Zaključuje se i da (4.7.1) $\Rightarrow$ (4.7.3), ali u opštem slučaju (4.7.3) $\nRightarrow$ (4.7.1). Primerom će biti ilustrovana poslednja relacija, odnosno da (4.7.3) $\nRightarrow$ (4.7.1).

Razmatra se gustina slučajne promenjive sa standardnom normalnom raspodelom, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ i odgovarajuća karakteristična funkcija $\phi_0(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$. Definišu se funkcije

$$f_\lambda(x) = \varphi(x)\big(1 - \cos\lambda x\big)/\big((1 - \phi_0(\lambda)\big), \qquad x \in \boldsymbol{R}, \tag{4.7.4}$$

$$\psi_\lambda(t) = [2\phi_0(t) - \phi_0(t+\lambda) - \phi_0(t-\lambda)]/\big[2\big(1 - \phi_0(\lambda)\big)\big], \qquad t \in \boldsymbol{R}, \tag{4.7.5}$$

gde je λ bilo koji realan broj (specijalno se uzima $\lambda = n$).

Nije teško proveriti da je za svako λ, $f_\lambda(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ funkcija gustine, $\psi_\lambda(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$ je karakteristična funkcija, i ψ_λ je karakteristična funkcija koja odgovara gustini f_λ. Dalje se dobija

$$\lim_{\lambda\to\infty} \psi_\lambda(t) = \phi_0(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2), \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}, \tag{4.7.6}$$

gde je granična funkcija ϕ_0 neprekidna u nuli, tako da je uslov (4.7.3) zadovoljen.

Međutim,

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda(x) \neq \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}x^2), \tag{4.7.7}$$

odakle sledi da uslov (4.7.1) ne važi.

Upoređivanjem relacija (4.7.6) i (4.7.7) zaključuje se da u opštem slučaju, tačkasta konvergencija karakterističnih funkcija ϕ_n, koja je data relacijom (4.7.3), nije dovoljna da osigura konvergenciju gustina f_n, datu relacijom (4.7.1).

U ovom slučaju, sledeći rezultat može biti od koristi (Feller 1971).

Neka su ϕ_n i ϕ apsolutno-integrabilne karakteristične funkcije takve da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt = 0. \tag{4.7.8}$$

Tada odgovarajuće funkcije raspodela F_n i F imaju ograničene i neprekidne funkcije gustina f_n i f, respektivno, i relacija (4.7.8) implicira

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ uniformno\ po\ x, \qquad x \in \boldsymbol{R}. \tag{4.7.9}$$

Očigledno, u ovom prethodno datom specifičnom primeru, iz relacije (4.7.7) sledi da uslov (4.7.9) nije zadovoljen. Lako je videti i da tačkasta konvergencija data relacijom (4.7.6) ne implicira integralnu konvergenciju datu relacijom (4.7.1).

4.8 Slaba konvergencija funkcija raspodela ne implicira konvergenciju momenata

Neka su $F, F_n, n \geq 1$ funkcije raspodela. Sa α_k i $\alpha_k^{(n)}$ će biti označeni njihovi k-ti momenti, $k = 1,2,\dots$,

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \qquad \alpha_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(x).$$

Pod određenim uslovima, konkretno $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k, n \to \infty$, može se dokazati da

$$F_n \xrightarrow{s} F, n \to \infty. \tag{4.8.1}$$

Postavlja se pitanje da li važi obratno, odnosno, da li slaba konvergencija data relacijom (4.8.1) implicira konvergenciju momentata $\alpha_k^{(n)}$ ka momentu α_k. Pomoću naredna dva primera biće pokazano da relacija (4.8.1) važi kada $\alpha_k^{(n)} \nrightarrow \alpha_k, n \to \infty, \forall k$.

I. Razmatra se familija funkcija raspodela $\{F_n, n \geq 1\}$ gde je

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} du + \frac{1}{2n}\left(1 + \operatorname{sign}(x-n)\right), x \in \boldsymbol{R}.$$

Lako je uočiti da je $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \forall x \in \boldsymbol{R}$, gde je Φ funkcija raspodele slučajne promenjive sa standardnom normalnom raspodelom.

Međutim, momenti $\alpha_k^{(n)}$ bilo kog reda k funkcije raspodele F_n teže ka beskonačnosti kada $n \to \infty$ i stoga $\alpha_k^{(n)}$ ne može konvergirati ka momentu α_k slučajne promenjive sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Podsećanja radi, $\alpha_{2k-1} = 0, \alpha_{2k} = (2k-1)!!, k = 1,2, \dots$.

II. Neka je F_n funkcija raspodele slučajne promenjive X_n koja ima uniformnu raspodelu na segmentu $[0,1]$ i neka je F_0 funkcija raspodele slučajne promenjive $X_0 = 0$. Definiše se $G_n(x), x \in \boldsymbol{R}$ na sledeći način:

$$G_n(x) = \frac{1}{n} F_n(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) F_0(x), \qquad n \geq 1.$$

Tada je $\{G_n, n \geq 1\}$ niz funkcija raspodela. Granično ponašanje niza $\{G_n\}$ lako se može ispitati ako se razmatra niz odgovarajućih karakterističnih funkcija $\{\psi_n\}$. Kako je

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} d\, G_n(x) = \frac{1}{n}(\mathrm{e}^{itn} - 1)/(itn) + \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

zaključuje se da je

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = 1, \qquad t \in \boldsymbol{R}.$$

Iz ovoga dalje sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = F_0(x),$$

za svako $x \in \boldsymbol{R}$, osim za vrednost slučajne promenjive X_0.

Ostaje još da se utvrdi da li momenti $\alpha_k^{(n)}$ funkcije raspodele G_n konvergiraju ka momentima α_k funkcije raspodele F_0. Važi

$$\alpha_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\, G_n(x) = n^{k-1}/(k+1).$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \infty,\ \forall k, k = 1,2, \dots$, dok su momenti α_k funkcije raspodele F_0 jednaki nuli.

4.9 Slaba konvergencija niza funkcija raspodela ne implicira uvek njihovu konvergenciju u srednjem

Neka su $F_0, F_1, F_2, \dots$ funkcije raspodela. Pretpostavlja se da za neko $\beta > 0$ važi sledeća relacija:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F_0(x)|^{\beta}\, dx = 0. \tag{4.9.1}$$

Iz ove relacije je lako izvesti zaključak da $F_n \xrightarrow{s} F_0, n \to \infty$.

Sada će biti analizirana ista situacija, samo u suprotnom smeru. Prvo, pretpostavlja se da $F_n \xrightarrow{s} F_0, n \to \infty$. Postavlja se pitanje pod kojim dodatnim pretpostavkama se može dobiti relacija (4.9.1) sa pogodnim izborom konstante $\beta > 0$. Jedan od mogućih odgovora je sadržan u sledećem rezultatu (Laube 1973).

Ako $F_n \xrightarrow{s} F_0, n \to \infty$ i ako za neko $\gamma > 0$ važi

$$\sup_{n\geq 1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\gamma}\, dF_n(x) < \infty, \tag{4.9.2}$$

tada F_n teži ka F_0 u srednjem reda $\beta > 1/\gamma$, odnosno relacija (4.9.2) i slaba konvergencija F_n ka F_0 impliciraju (4.9.1) za $\beta > 1/\gamma$.

Cilj je utvrditi važnost svih uslova u ovom rezultatu. Naročito, biće pokazano da relacija (4.9.1) ne mora važiti ako je $\beta = 1/\gamma$. Da bi se ovo utvrdilo, razmatra se:

$$F_0(x) = 1_{[0,\infty)}(x), \qquad F_n(x) = \frac{1}{n} 1_{[-n,0)}(x) + 1_{[0,\infty)}(x), \qquad n = 1,2,\dots\ .$$

Tada se lako može uočiti da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF_n(x) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1_{[0,\infty)}(x) = F_0(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Očigledno, uslov (4.9.2) nije ispunjen za $\gamma = 1$. Međutim, relacija (4.9.1) ne važi za $\beta = 1$, tj. za $\beta = 1/\gamma$, s obzirom na to da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F_0(x)| dx = 1, \qquad \forall n.$$

Na kraju treba napomenuti da se relacija poput (4.9.1) može koristiti za dobijanje procena globalnog konvergencijskog ponašanja u centralnoj graničnoj teoremi.

Glava 5

Centralna granična teorema

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Definiše se

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad a_k = EX_k, \qquad A_n = ES_n = a_1 + \ldots + a_n,$$
$$\sigma_k^2 = DX_k, \qquad s_n^2 = DS_n = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2.$$

Kaže se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu (CGT) ako

$$\lim_{n\to\infty} P[(S_n - A_n)/s_n \leq x] = \Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, du, \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}. \qquad (CGT)$$

Neka je sa F_k označena funkcija raspodele slučajne promenjive X_k. Očigledno, može se pretpostaviti da je $EX_k = 0, \forall k \geq 1$. Sada će biti predstavljena sledeća tri uslova:

$$\lim_{n\to\infty} (1/\, s_n^2) \sum_{k=1}^{n} \int_{|u|\geq \varepsilon s_n} u^2 dF_k(u) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad (L)$$

(Lindebergov uslov);

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0, \qquad (F)$$

(Fellerov uslov);

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} P[|X_{kn}| \geq \varepsilon] = 0, \qquad X_{kn} = X_k/s_n\,. \qquad (UAZ)$$

(uslov uniformne asimptotske zanemarljivosti).

Sada će biti formulisana dva fundamentalna rezultata u kompaktnoj formi.

Lindebergova teorema:

$$(L) \Rightarrow (CGT).$$

Lindeberg-Fellerova teorema:

$$(L) \Leftrightarrow (CGT) \wedge (F),$$

ili

$$(L) \Leftrightarrow (CGT) \wedge (UAZ).$$

Primeri koji slede imaju za cilj da pokažu opseg važenja centralne granične teoreme i da ispitaju važnost uslova pod kojima centralna granična teorema ne važi. Biće razmatrana i neka srodna pitanja.

5.1 Nizovi slučajnih promenljivih koji ne zadovoljavaju centralnu graničnu teoremu

1. Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenjive definisane na sledeći način:

$$P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2},$$

i za $k \geq 2$,

$$P[X_k = \pm 1] = \frac{1}{2c}, P[X_k = \pm k] = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), P[X_k = 0] = 1 - \frac{1}{c} - \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), c > 1.$$

Prvo će biti utvrđeno da Lindebergov uslov nije ispunjen. Važi:

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq \varepsilon s_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[{X_k}^2 I\left(|X_k| > \varepsilon\sqrt{n}\right)\right].$$

Ako je n dovoljno veliko i takvo da je $\varepsilon\sqrt{n} > 1$, tada se dobija

$$\frac{1}{n}\sum_{k=\varepsilon\sqrt{n}}^{n} k^2 P[|X_k| = k] \sim \frac{1}{n}\left(n - \varepsilon\sqrt{n}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \to 1 - \frac{1}{c} > 0.$$

Dakle, dati niz $\{X_k\}$ ne zadovoljava Lindebergov uslov. Međutim, ova činjenica ne povlači da centralna granična teorema ne važi za dati niz $\{X_k\}$ jer je Lindebergov uslov samo dovoljan uslov. Zapravo, niz $\{X_k\}$ ne zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Ovo sledi na osnovu činjenice da X_k/s_n zadovoljava uslov uniformne asimptotske zanemarljivosti. Zaista,

$$P[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] = P\left[|X_k| \geq \varepsilon\sqrt{n}\right] = \begin{cases} 0, & k < \varepsilon\sqrt{n}, \\ \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), & k \geq \varepsilon\sqrt{n}. \end{cases}$$

Prema tome,

$$\max_{1\leq k\leq n} P[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}\left(1 - \frac{1}{c}\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Sada, ako se pretpostavi da $S_n/s_n \xrightarrow{r} \xi$ gde $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, zajedno sa uslovom uniformne asimptotske zanemarljivosti, to će implicirati da važi Lindebergov uslov. Međutim, već je pokazano da dati uslov nije ispunjen.

Prema tome, finalni zaključak je da Lindebergov uslov nije ispunjen i da granična centralna teorema ne važi.

2. Neka slučajna promenjiva Y uzima dve vrednosti, 1 i -1, svaku sa verovatoćama $\frac{1}{2}$, i neka je $\{Y_k, k \geq 1\}$ niz nezavisnih kopija slučajne promenjive Y. Definiše se novi niz $\{X_k, k \geq 1\}$ gde je $X_k = \sqrt{15}Y_k/4^k$ i neka je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, tj.

$$S_n = \frac{\sqrt{15}}{4}Y_1 + \frac{\sqrt{15}}{4^2}Y_2 + \cdots + \frac{\sqrt{15}}{4^n}Y_n.$$

Kako je $EY = 0$ i $DY = 1$, lako se može videti da je

$$s_n^2 = DS_n = 15\left[\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{16}\right)^n\right] = \frac{15}{16}\frac{1 - (1/16)^n}{1 - (1/16)} = 1 - (1/16)^n.$$

Prema tome, $ES_n = 0$ i $s_n^2 \approx 1$ za veliko n (ovo je razlog uvođenja faktora $\sqrt{15}$).

Lako je uvideti da je

$$P[|S_n| \leq 1/2\,] = 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Stoga, verovatnoće $P[S_n \leq x]$ ne mogu konvergirati ka funkciji raspodele slučajne promenjive sa standardnom normalnom raspodelom, $\Phi(x), \forall x$, pa zbog toga niz $\{X_k\}$ ne zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Treba napomenuti da u ovom primeru slučajna promenjiva X_1 ima dominantan uticaj u konačnom zbiru u odnosu na ostale slučajne promenjive.

3. Pretpostavlja se da je za svako n,

$$S_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn},$$

gde su $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ nezavisne slučajne promenjive koje imaju Poissonovu raspodelu, sa srednjom vrednošću $1/(2n)$. Može se očekivati da će raspodela slučajne promenjive $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ težiti ka standardnoj normalnoj raspodeli Φ. Međutim, ovo neće važiti, bez obzira na činjenicu da

$$P[X_{nk} = 0] = e^{-1/(2n)} \approx 1, \qquad za\ veliko\ n,$$

tj. svaka slučajna promenjiva X_{nk} je "skoro" jednaka nuli. Dovoljno je napomenti da za svako n, suma S_n ima Poissonovu raspodelu sa parametrom $\frac{1}{2}$. Naročito, $P[S_n = 0] = e^{-1/2}$, tako da raspodela slučajne promenjive $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ ne može biti bliska Φ.

5.2 Veza između centralne granične teoreme i Fellerovog uslova, kao i uslova uniformne asimptotske zanemarljivosti

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih takvih da $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, gde je $\sigma_1^2 = 1$ i $\sigma_k^2 = 2^{k-2}, k \geq 2$. Tada $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ima disperziju $s_n^2 = 2^{n-1}$. Kako $X_k/s_k \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, tada za svako n sledi da $S_n/s_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, tako da centralna granična teorema trivijalno važi za niz $\{X_k\}$.

Očigledno,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

i

$$\max_{1\leq k\leq n} P[|X_k|/s_n \geq \varepsilon] \geq P[|X_n|/s_n \geq \varepsilon] = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-u^2} du > 0.$$

Prema tome, utvrđeno je da ni Fellerov uslov, ni uslov uniformne asimptotske zanemarljivosti ne važi. Ovo implicira da ni Lindebergov uslov ne važi. Međutim, uprkos ovim činjenicama, niz $\{X_k\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Ovaj jednostavan, ali poučan primer pokazuje ulogu navedena tri uslova u smislu važenja ili nevaženja centralne granične teoreme.

5.3 Dva ekvivalentna niza slučajnih promenljivih od kojih jedan zadovoljava centralnu graničnu teoremu, a drugi ne

Ponovo se razmatra niz slučajnih promenjivih $\{X_n, n \geq 1\}$ takav da je $P[X_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$ i za $k \geq 2$ i $c > 1$,

$$P[X_k = \pm 1] = \frac{1}{2c}, P[X_k = \pm k] = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), P[X_k = 0] = 1 - \frac{1}{c} - \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Koristeći sečenje niza, definiše se još jedan niz $\{\tilde{X}_{nk}, k = 1, \ldots, n, n \geq 1\}$ gde je

$$\tilde{X}_{nk} = \begin{cases} X_k, & |X_k| \leq \sqrt{n}, \\ 0, & |X_k| > \sqrt{n}. \end{cases}$$

Neka je $\tilde{S}_n = \tilde{X}_{n1} + \cdots + \tilde{X}_{nn}$, $\tilde{s}_n^2 = D\tilde{S}_n$. Kako je $D\tilde{X}_{nk} = 1$ ako je $k \leq \sqrt{n}$ i $D\tilde{X}_{nk} = 1/c$ ako je $k > \sqrt{n}$, važi

$$\tilde{s}_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\tilde{X}_{nk} = \left[\sqrt{n}\right] + (1/c)\left(n - \left[\sqrt{n}\right]\right) \approx \frac{n}{c},$$

i tada,

$$\frac{1}{\tilde{s}_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left[\tilde{X}_{nk}^2 I\left(\left|\tilde{X}_{nk}\right| \geq \varepsilon\tilde{s}_n\right)\right] \approx \frac{c}{n}\left(\sqrt{n} - \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \to 0.$$

Dakle, Lindebergov uslov ne važi i $\tilde{S}_n/\tilde{s}_n \to \eta$, gde je η slučajna promenjiva sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Stoga, niz $\{\tilde{X}_{nk}\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu.

Dalje, cilj je pokazati da su nizovi $\{S_n\}$ i $\{\tilde{S}_n\}$ (ne nizovi $\{X_n\}$ i $\{X_{nk}\}$) ekvivalentni u sledećem smislu:

$$P\left[S_n \neq \tilde{S}_n\right] \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{5.3.1}$$

Zaista,

$$\begin{aligned} P\left[S_n \neq \tilde{S}_n\right] &\leq \sum_{k=1}^{n} P\left[X_k \neq \tilde{X}_{nk}\right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} P\left[|X_k| > \sqrt{n}\right] \leq \sum_{k=\sqrt{n}}^{n} P[|X_k| = k]. \end{aligned}$$

Kako je

$$P[|X_k| = k] = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2) < \infty,$$

zaključuje se da $P\left[S_n \neq \tilde{S}_n\right] \to 0,\ n \to \infty$.

Međutim, već je dokazano da niz $\{X_n\}$ ne zadovoljava centralnu graničnu teoremu.
Na ovaj način su konstruisana dva niza $\{X_n\}$ i $\{\tilde{X}_{nk}\}$, koja su ekvivalentna u smislu relacije (5.3.1), ali ipak, centralna granična teorema važi za niz $\{\tilde{X}_{nk}\}$ i ne važi za niz $\{X_n\}$. Treba još napomenuti da je Lindebergov uslov zadovoljen za niz $\{\tilde{X}_{nk}\}$ ali ne i za niz $\{X_n\}$.

5.4 Ako niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu, to ne implicira uvek da disperzija slučajne promenljive $S_n/\sqrt{DS_n}$ teži ka 1

Razmatraju se dva niza nezavisnih slučajnih promenjivih, $\{X_k, k \geq 1\}$ i $\{Y_k, k \geq 1\}$, takvih da je

$$P[X_k = 1] = P[X_k = -1] = \frac{1}{2}(1 - k^{-2}), \qquad P[X_k = k] = P[X_k = -k] = \frac{1}{2}k^{-2},$$

i

$$P[Y_k = 1] = P[Y_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

Uvode se oznake

$$S_n = Y_1 + X_2 + \cdots + Y_n, \qquad \tilde{S}_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Očigledno, niz $\{Y_n\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu, odnosno, $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{r} \xi$, gde je ξ slučajna promenjiva sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Princip sečenja koji se primenjuje kod niza $\{X_k\}$

pokazuje da $\tilde{S}_n/\sqrt{n}$ ima isto asimptotsko ponašanje kao $S_n/\sqrt{n}$. Prema tome, zaključuje se da $\tilde{S}_n/\sqrt{n} \xrightarrow{r} \eta, n \to \infty$, gde je η slučajna promenjiva sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom.

Intuitivno se može očekivati da

$$D[S_n/\sqrt{n}] \to 1, D[\tilde{S}_n/\sqrt{n}] \to 1, \quad n \to \infty.$$

Za niz $\{Y_k\}$ važi $EY_k = 0,\ DY_k = 1$, tako da za svako n važi da

$$1 = D[S_n/\sqrt{n}] \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Sa druge strane, za niz $\{X_k\}$ važi $EX_k = 0, DX_k = 2 - 1/k^2$. Prema tome,

$$D[\tilde{S}_n/\sqrt{n}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{1}{k^2}\right) = 2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Kako je $\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) < \infty$, važi

$$D[\tilde{S}_n/\sqrt{n}] \to 2, \qquad n \to \infty,$$

tj. $D[\tilde{S}_n/\sqrt{n}] \nrightarrow 1$, kao što je pretpostavljeno.

Dakle, centralna granična teorema u opštem slučaju ne osigurava konvergenciju momenata normirane sume $S_n/\sqrt{n}$ ka momentima normalne normirane raspodele $\mathcal{N}(0,1)$. Za konvergenciju momenata potrebni su neki dodatni uslovi integrabilnosti kao što su:

$$E\left[\left|S_n/\sqrt{n}\right|^{2+\delta}\right] < \infty, \qquad \delta > 0 \ \Rightarrow\ D[S_n/\sqrt{n}] \to \xi.$$

5.5 Ne može svaki interval biti domen normalne konvergencije

Pretpostavlja se da je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom koji zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Sa F_n će biti označena funkcija raspodele slučajne promenjive $(S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$ gde je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Uniformna konvergencija $F_n(x) \to \Phi(x), x \in \boldsymbol{R}$ implicira da sledeća relacija

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \tag{5.5.1}$$

važi uniformno za svako x na bilo kom konačnom intervalu na skupu $\boldsymbol{R}$.

Treba napomenuti da relacija (5.5.1) važi uniformno na intervalima oblika $[0, b_n]$, tj na intervalima čija se dužina povećava sa n. Uopšteno, intervali za koje važi relacija (5.5.1) se nazivaju domenima normalne konvergencije. Očigledno, takvi intervali postoje, ali cilj je pokazati da ne može svaki interval biti domen normalne konvergencije.

Razmatra se niz $X_1, X_2, \ldots$ nezavisnih Bernulijevih slučajnih promenjivih sa parametrom p, odnosno, $P[X_1 = 1] = p = 1 - P[X_1 = 0]$. Očigledno, niz $\{X_n\}$ zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Kako je

$$\begin{aligned}1 - F_n(x) &= P\left[\left(np(1-p)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - np\right) > x\right]\\ &= P\left[\sum_{k=1}^{n} X_k > x\left(np(1-p)\right)^{\frac{1}{2}} + np\right],\end{aligned}$$

za proizvoljno $x > (n(1-p)/p)^{1/2}$ se dobija sledeća jednakost

$$[1-F_n(x)]/[1-\Phi(x)]=0,$$

što je očigledno u kontradikciji sa relacijom (5.5.1). Stoga, relacija (5.5.1) ne važi za svaki interval oblika $[0,O(\sqrt{n})]$. Konkretno, interval $[0,c_p\sqrt{n}]$, gde je $c_p>((1-p)/p)^{1/2}$ i p fiksirana konstanta, ne može biti domen normalne konvergencije.

Konačno, treba napomenuti da su intervali oblika $[0,o(\sqrt{n})]$ domeni normalne konvergencije. Ovo sledi na osnovu dobro poznatih Berry-Esseenovih ocena centralne granične teoreme.

5.6 Centralna granična teorema ne važi uvek za slučajne sume slučajnih promenljivih

Neka je $\{X_n,n\geq 1\}$ niz slučajnih promenjivih koji zadovoljava centralnu graničnu teoremu. Razmatra se još jedan niz slučajnih promenjivih sa celobrojnim vrednostima, $\{v_n,n\geq 1\}$ takav da $v_n\xrightarrow{s.i.}\infty, n\to\infty$, i definiše se $T_n=S_{v_n}=X_1+\ldots+X_n$ i $b_n^2=DT_n$. Ako je

$$\lim_{n\to\infty}P[(T_n-ET_n)/b_n\leq x]=\Phi(x),\qquad x\in\boldsymbol{R},$$

kaže se da centralna granična teorema važi za slučajnu sumu $\{S_{v_n}\}$ generisanu nizovima $\{X_n\}$ i $\{v_n\}$.

Pomoću dva primera biće pokazano da centralna granična teorema ne važi uvek za slučajnu sumu $\{S_{v_n}\}$. U oba slučaja, $\{X_n,n\geq 1\}$ je niz nezavisnih slučajnih promenjivih sa istom raspodelom takav da je $P[X_1=1]=P[X_1=-1]=\frac{1}{2}$. Očigledno, ako je $v_n=n\ s.i., \forall n$, tada je

$$T_n=S_n=X_1+\ldots+X_n, b_n^2=n \text{ i } \frac{T_n}{b_n}\xrightarrow{r}\xi, \text{ gde je } \xi\sim\mathcal{N}(0,1).$$

1. Definiše se niz $\{v_n,n\geq 0\}$ na sledeći način

$$v_0=0,\qquad v_n=\min\{k>v_{n-1}:S_k=(-1)^k k\},\qquad n\geq 1.$$

Tada, $v_n\xrightarrow{s.i.}\infty, n\to\infty, b_n^2=DT_n=n^2$ i očigledno,

$$P[T_n/b_n=(-1)^n]=1.$$

Sledi da raspodela slučajne promenjive T_n/b_n nema graničnu vrednost kada $n\to\infty$, i stoga centralna granična teorema ne važi za slučajnu sumu $\{S_{v_n}\}$.

2. Neka je $\{v_n,n\geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih takvih da v_n uzima vrednosti n i $2n$ sa verovatnoćama p i $p=1-q$, respektivno. Dadatno se pretpostavlja da je niz $\{v_n\}$ nezavisan od niza $\{X_n\}$. Tada,

$$b_n^2=DT_n=pE[S_n^2]+qE[S_{2n}^2]=(1+q)n.$$

Lako se može proveriti da T_n/b_n ne konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenjivoj $\xi\sim\mathcal{N}(0,1)$. Preciznije, $P[T_n/b_n\leq x]$ konvergira ka mešavini raspodela dveju slučajnih promenjivih, $\xi_1\sim\mathcal{N}(0,(1+q)^{-2})$ i $\xi_2\sim\mathcal{N}(0,2(1+q)^{-2})$ težine p i q, respektivno.

5.7 Nizovi slučajnih promenljivih koji zadovoljavaju integralnu teoremu, ali ne i lokalnu centralnu graničnu teoremu

Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih. Sa F_n i f_n će biti označeni funkcija raspodele i gustina slučajne promenjive $(S_n - ES_n)/s_n$, gde je kao i obično $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $s_n^2 = DS_n$.

Uspostavljaju se relacije

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} du, \tag{5.7.1}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad x \in \boldsymbol{R}. \tag{5.7.2.}$$

Kaže se da niz $\{X_n\}$ zadovoljava integralnu centralnu graničnu teoremu ukoliko važi relacija (5.7.1), dok se u slučaju relacije (5.7.2) kaže da niz $\{X_n\}$ zadovoljava lokalnu centralnu graničnu teoremu. Lako je uvideti da (5.7.2) ⇒ (5.7.1). Međutim, u opštem slučaju, slaba konvergencija ne implicira konvergenciju odgovarajućih gustina. Treba napomenuti da je u relacijama (5.7.1) i (5.7.2) granična raspodela zapravo standardna normalna raspodela. Zato je u ovom posebnom slučaju, prirodno pitati se da li je i implikacija (5.7.1) ⇒ (5.7.2) tačna. Razmatraće se dva primera u kojima (5.7.1) $\nRightarrow$ (5.7.2). U prvom primeru slučajne promenjive će imati istu raspodelu, dok će u drugom slučajne promenjive biti sa različitim raspodelama.

a) Neka je X slučajna promenjiva sa gustinom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq e^{-1}, \\ 1/(2|x|\log^2|x|), & |x| < e^{-1}. \end{cases} \tag{5.7.3}$$

Kako je X ograničena slučajna promenjiva, niz nezavisnih kopija slučajne promenljive $X, \{X_n, n \geq 1\}$, zadovoljava integralnu centralnu graničnu teoremu. Problem je u proučavanju graničnog ponašanja gustine f_n slučajne promenjive $(X_1 + \cdots + X_n)/(\sigma\sqrt{n})$ gde je $\sigma^2 = DX = \int_0^{e^{-1}} (x \log^2 x) dx$.

Ako je g_2 gustina sume $X_1 + X_2$, onda se g_2 može izraziti kao konvolucija na sledeći način

$$g_2(x) = \int_{-e^{-1}}^{e^{-1}} f(u) f(x-u) du.$$

Potrebno je proceniti gustinu g_2. Dovoljno je razmatrati vrednosti za x u nekoj okolini nule; preciznije, može se pretpostaviti da je $|x| < e^{-1}$, i štaviše, da je $0 < x < e^{-1}$. Tada,

$$g_2(x) \geq \int_{-x}^{x} f(u) f(x-u) du.$$

Kako $f(x-u)$ dostiže svoj minimum na domenu $0 \leq |u| \leq x$ u tački $u = 0$, važi

$$g_2(x) \geq \frac{1}{2x\log^2 x} \int_{-x}^{x} \frac{1}{2|u|\log^2|u|} du = \frac{1}{2x|\log^3 x|}.$$

Analogno, zaključuje se da je u okolini nule gustine g_3 sume $X_1 + X_2 + X_3$ zadovoljena nejednakost

$$g_3(x) > \frac{c_3}{x\log^4 x}, \qquad c_3 = const. > 0.$$

U opštem slučaju, ako je g_n gustina sume $X_1 + \cdots + X_n$, u okolini nule važi

$$g_n(x) > \frac{c_n}{x|\log^{n+1} x|}, \qquad c_n = const. > 0.$$

Prema tome, za svako n, $g_n(x)$ uzima beskonačne vrednosti u tački $x = 0$. Kako je gustina f_n dobijena iz gustine g_n odgovarajućim normiranjem, zaključuje se da $f_n(x)$ ne može konvergirati ka $\varphi(x)$ kada $n \to \infty$.

Dakle, niz $\{X_n\}$ definisan gustinom koja je data relacijom (5.7.3), ne zadovoljava lokalnu centralnu graničnu teoremu, iako za ovaj niz važi integralna centralna granična teorema.

b) Neka je $\{X_n, n \geq 1\}$ niz nezavisnih slučajnih promenjivih gde X_n ima gustinu

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n, & -2^{-n-2} \leq x \leq 2^{-n-2} \vee 1 - 2^{-n-3} < |x| < 1 + 2^{-n-3}, \\ 0, & inače. \end{cases} \tag{5.7.4}$$

Lako je videti da je $EX_n = 0, DX_n = \frac{1}{2} + 5/(3 \cdot 2^{2n+7})$. Tada je, za proizvoljno $n \geq 1$, $\frac{1}{2} < DX_n < 1$, Lindebergov uslov je zadovoljen, tako da niz $\{X_n\}$ zadovoljava integralnu centralnu graničnu teoremu.

Sa $g_k(x), x \in \boldsymbol{R}$ će biti označena gustina sume $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Tada, za $k = 2, g_2$ je konvolucija funkcija f_1 i f_2, odnosno,

$$g_2(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)du.$$

Potrebno je naći vrednost gustine $g_2(x)$ u tački $x = \frac{1}{2}$. Na osnovu relacije (5.7.4) za f_1 i f_2 važi:

$$f_1(u) \neq 0, \qquad -\frac{1}{8} \leq u \leq \frac{1}{8} \vee \frac{15}{16} < |u| < \frac{17}{16},$$
$$f_2\left(\frac{1}{2} - u\right) \neq 0, \qquad \frac{7}{16} \leq u \leq \frac{9}{16} \vee \frac{15}{32} < |u| < \frac{17}{32}.$$

Upoređivanjem intervala gde je $f_1 \neq 0$ i $f_2 \neq 0$, dolazi se do zaključka da je $g_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Analogno se dobija

$$g_3\left(\frac{1}{2}\right) = (g_2 * g_3)(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(u) g_3(x-u)du\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0,$$

i u opštem slučaju važi $g_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \forall n \geq 2$. Nije teško uvideti da je $g_n(x) = 0$ za svako x koje je oblika $x = \frac{1}{2}(2m+1), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, i konačno da je $g_n(x) = 0$ za svako x koje je oblika

$$x = \frac{1}{2}(2m+1) + \delta, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, |\delta| < \frac{1}{4}.$$

Za sumu $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ važi da je $ES_n = 0, DS_n = s_n^2 = \frac{1}{2}n + \frac{5}{1152}(1 - 2^{-2n})$. Kako gustina g_n sume S_n i gustina p_n sume S_n/s_n zadovoljavaju relaciju $p_n(x) = s_n g_n(x s_n)$, razmatra se ponašanje veličine $s_n g_n(x s_n)$ kada $n \to \infty$. Ponovo, uzima se $x = \frac{1}{2}$. Tada,

$$s_n g_n\left(\frac{1}{2}s_n\right) = \left[\frac{1}{2}n + \frac{5}{1152}(1 - 2^{-2n})\right]^{1/2} \cdot g_n\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n + \frac{5}{1152}(1 - 2^{-2n})\right]^{1/2}\right).$$

Ako je n oblika $n = 2(2N+1)^2$, tada argument funkcije g_n postaje

$$\frac{1}{2}(2N+1)\left[1+\frac{5}{1152}\left(1-2^{-2\cdot 2(2N+1)^2}\right)(2N+1)^{-2}\right].$$

Za veliko N ovaj izraz ima oblik $\frac{1}{2}(2N+1)+\delta, |\delta|<\frac{1}{4}$. Iz osobina funkcije g_n koje su prethodno ustanovljene, zaključuje se da je

$$s_n g_n\left(\frac{1}{2}s_n\right)=0,$$

za dovoljno veliko n.
Ovo implicira da je

$$\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Međutim, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, tako da relacija (5.7.2) nije zadovoljena.

Dakle, niz $\{X_n\}$ definisan gustinom koja je data relacijom (5.7.4), ne zadovoljava lokalnu centralnu graničnu teoremu.

Zaključak

Među naučnicima i danas postoji dilema da li su zakoni prirode deterministički ili slučajni. Da li slučajnost postoji samo zbog toga što ne umemo da proučimo brojne uzročno posledične veze, ili je ona realnost u prirodi? Još u XVIII veku naučnike je zanimalo ovo pitanje. Laplas je zastupao strogi determinizam i smatrao je da bi poznavanje parametara koji definišu stanje kosmosa omogućilo tačno predviđanje rezultata svakog eksperimenta. Događaji bi se po njemu delili samo na nemoguće i sigurne. Međutim, u današnje vreme nauke sigurno je jedno, i to da slučajne pojave postoje, da imaju svoje zakonitosti, a njima se bavi teorija verovatnoća.

U ovom radu, akcenat je konkretno na nekim kontraprimerima o graničnim teoremama teorije verovatnoća. Analiziran je odnos između četiri osnovne vrste konvergencija, a razmatrane su i druge vrste konvergencije slučajnih nizova. Takođe, akcenat je stavljen i na zakone velikih brojeva. Postojanje ovih zakona je od ključne važnosti za induktivno statističko zaključivanje. Na ovim zakonima se zasniva i predviđanje budućnosti na osnovu prikupljenih podataka. Zbog toga je zakon velikih brojeva jedan od ključnih statističkih koncepata. Potrebno je napomenuti da je razmatrana i slaba konvergencija verovatnosnih mera i raspodela kao još jedna bitna vrsta konvergencije nizova slučajnih promenjivih. Centralna granična teorema je opisana kao jedan od najupečatljivijih rezultata u celoj teoriji verovatnoća i statistici. Ova teorema ne igra važnu ulogu samo u verovatnoći i statistici, čak je i prevazišla domene matematike i našla svoju primenu u raznim drugim granama i domenima.

Literatura

[1] Albert N. Shiryaev, *Probability*, Springer, 1996.
[2] Ivana Kovačević, *Verovatnoća i statistika sa zbirkom zadataka*, Univerzitet Singidunum, 2015.
[3] Janković Slobodan, *Uvod u verovatnoću*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2009.
[4] Janković Svetlana, *Teorija verovatnoća*, autorizovana predavanja, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš
[5] Jordan Stoyanov, *Counterexamples in Probability*, John Wiley and Sons, 1987.
[6] Jovanović Miljana, *Uvod u verovatnoću*, autorizovana predavanja, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš

Biografija

Jelena Palurović je rođena 28. aprila 1994. godine u Kruševcu. Završila je osnovnu školu "Branko Radičević" u Kruševcu 2009. godine, kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju u Kruševcu, prirodno-matematički smer, završila je 2013. godine sa odličnim uspehom.

Osnovne akademske studije na Departmanu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu upisala je školske 2013/14. godine i završila ih 2017. godine. Iste godine je upisala master akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, smer Verovatnoća, statistika i finansijska matematika. Poslednji ispit položila je oktobra 2019. godine i time stekla pravo na odbranu master rada.

Прилог 5/1

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	мастер рад
Аутор, **АУ**:	Јелена Палуровић
Ментор, **МН**:	Марија Милошевић
Наслов рада, **НР**:	НЕКИ КОНТРАПРИМЕРИ О ГРАНИЧНИМ ТЕОРЕМАМА ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Р. Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Р. Србија
Година, **ГО**:	2020.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	58 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	примењена математика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	конвергенција низова случајних промењивих, закон великих бројева, централна гранична теорема
УДК	519.214
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овом раду се разматрају неки контрапримери о граничним теоремама теорије вероватноће. Представљене су различите врсте конвергенција и њихови међусобни односи. Још једна битна ставка која се разматра у раду је закон великих бројева, као и услов Колмогорова и услов Маркова. Осим тога, пажња је усмерена и на централну граничну теорему и њену повезаност са Линдеберговим условом, Феллеровим условом, као и условом асимптотске занемарљивости.
Датум прихватања теме, **ДП**:	05.12.2018.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	др Миљана Јовановић
	Члан:	др Јасмина Ђорђевић
	Члан, ментор:	др Марија Милошевић

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 5/2

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ **НИШ**
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**master thesis**
Author, **AU**:	**Jelena Palurović**
Mentor, **MN**:	**Marija Milošević**
Title, **TI**:	**SOME COUNTEREXAMPLES IN LIMIT THEOREMS OF PROBABILITY THEORY**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Republic of Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2020.**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**58 p.**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**applied mathematics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**convergence of sequences of random variables, laws of large numbers, central limit theorem**
UC	519.214
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		This thesis considers some counterexamples in limit theorems of probability theory. In the thesis there are presented various kinds of convergence of sequences of random variables and their relations. Another important item considered in this thesis are laws of large numbers, as well as the Kolmogorov condition and the Markov condition. Moreover, in the thesis is presented central limit theorem, and its connection with the Feller condition, the Lindeberg condition and the uniform asymptotic negligibility condition.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		05.12.2020.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	dr Miljana Jovanović
	Member:	dr Jasmina Đorđević
	Member, Mentor:	dr Marija Milošević