PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU **Utorak, 25.06.2019. godine**
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Ako je $\sqrt{100-x^2}-\sqrt{64-x^2}=3$, odrediti vrednost izraza

$$\sqrt{100-x^2}+\sqrt{64-x^2}.$$

Pomnožimo datu jednakost izrazom $\sqrt{100-x^2}+\sqrt{64-x^2}$ i primenimo formulu za razliku kvadrata. Dobijamo

$$3\left(\sqrt{100-x^2}+\sqrt{64-x^2}\right)=36,$$

pa je tražena vrednost izraza jednaka 12.

2. Data je jednačina $x^2-3x-10=0$. Sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rešenja za 3 veća od rešenja date jednačine.

Prema Vietovim pravilima, rešenja date jednačine zadovoljavaju uslove $x_1+x_2=3$ i $x_1x_2=-10$. Neka je tražena jednačina $y^2+py+q=0$. Za njene parametre, ponovo na osnovu Vietovih formula, važi $y_1+y_2=-p$ i $y_1y_2=q$.
Na osnovu uslova zadatka, dakle, treba da važi $y_1=x_1+3$ i $y_2=x_2+3$. Tada je $y_1+y_2=x_1+x_2+6=9$ i $y_1y_2=(x_1+3)(x_2+3)=x_1x_2+3(x_1+x_2)+9=-10+9+9=8$.
Dakle, $p=-9$ i $q=8$, pa je tražena jednačina

$$y^2-9y+8=0.$$

3. Dokazati da je

$$\frac{sin^2(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg^2(\alpha-2\pi)}+\frac{sin^2(-\alpha)}{ctg^2(\alpha-\frac{3\pi}{2})}=1.$$

Levu stranu svedemo na prvi kvadrant i dobijamo

$$\frac{cos^2\alpha}{ctg^2\alpha}+\frac{sin^2\alpha}{tg^2\alpha}=sin^2\alpha+cos^2\alpha=1.$$

4. Rešiti nejednačinu

$$log_{\frac{1}{2}}(x-3) - log_{\frac{1}{2}}(x+3) - log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$$

Nejednačina ima smisla za $x > 3$. Elementarnim transformacijama dobijamo

$$log_{\frac{1}{2}}(x-3) - log_{\frac{1}{2}}(x+3) - log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{x+3} - log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 = \log_2 \frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{\log_2 \frac{x+3}{x-3}}$$

Ako uvedemo smenu $\mathrm{t} = \log_2 \frac{x+3}{x-3}$, početna nejednačina dobija oblik $t - \frac{1}{t} > 0$. Skup rešenja ove nejednačine je $t \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$. Dalje se jednostavno dobija rešenje $3 < x < 9$.

5. Kvadrat i jednakostranični trougao imaju jednake obime. Ako je površina trougla $9\sqrt{3}cm^2$, izračunati dužinu dijagonale kvadrata.

   Neka je a dužina stranice datog trougla, a b dužina stranice kvadrata. Po uslovu zadatka je $3a = 4b$ i $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Odatle je $a = 6cm$, pa je $b = \frac{9}{2}cm$. Dakle, dužina dijagonale kvadrata je $\frac{9\sqrt{2}}{2}cm$.

6. Data je tačka $A(3,0,1)$ i vektor $\vec{v} = (2,1,-2)$.
   a. Odrediti koordinate tačke B, tako da je $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$ i da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{v}$ paralelni.
   b. U ravni xOy odrediti tačku C, takvu da je $\overrightarrow{AC} \perp \vec{v}$ i $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3$.

   a) Treba da važi $\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{v} = (2k, k, -2k)$ i $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$, tj. $\sqrt{4k^2 + k^2 + 4k^2} = 6$. Odavde je $|k| = 2$, tj. $k = 2$ ili $k = -2$. Ako je $k = 2$, onda je $\overrightarrow{AB} = (4,2,-4)$ i $B(x, y, z)$. Odatle je $\overrightarrow{AB} = (x-3, y, z-1)$, pa je $B(7,2,-3)$. Ako je $k = -2$, na sličan način dobijemo $B(-1,-2,5)$.
   b) Tražena tačka je u ravni xOy, pa je oblika $C(x, y, 0)$, pa je vektor $\overrightarrow{AC} = (x-3, y, -1)$. Iz uslova $\overrightarrow{AC} \perp \vec{v}$ je $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = 0$, tj. $2(x-3) + y + 2 = 0$, a uslov $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3$ daje jednakost $(x-3)^2 + y^2 + 1 = 9$. Rešenja ovog sistema jednačina su $x = 1$, $y = 2$ ili $x = \frac{17}{5}$, $y = \frac{-14}{5}$, i ova rešenja nam daju koordinate tražene tačke $C_1(1,2,0)$ ili $C_2(\frac{17}{5}, \frac{-14}{5}, 0)$.