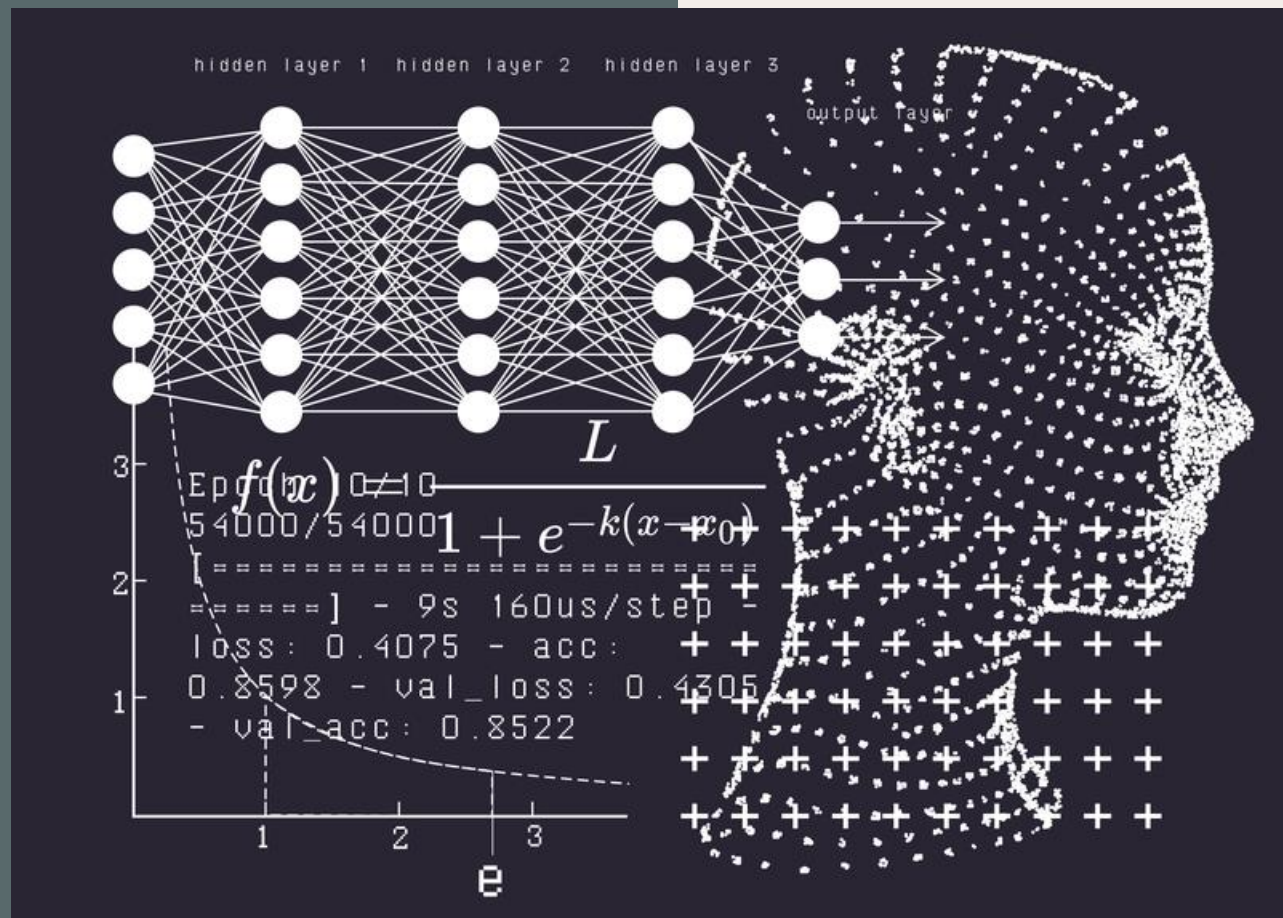


Razbijanje crno-belog sveta

uz pomoć fazi logike
i fazi skupova



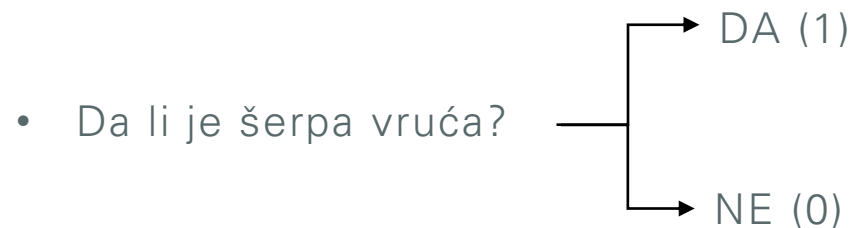
Klasična logika

- Da li je jabuka zelena?
(da ili ne)
- Da li je šerpa vruća?
(da ili ne)
- Da li je padala kiša?
(da ili ne)

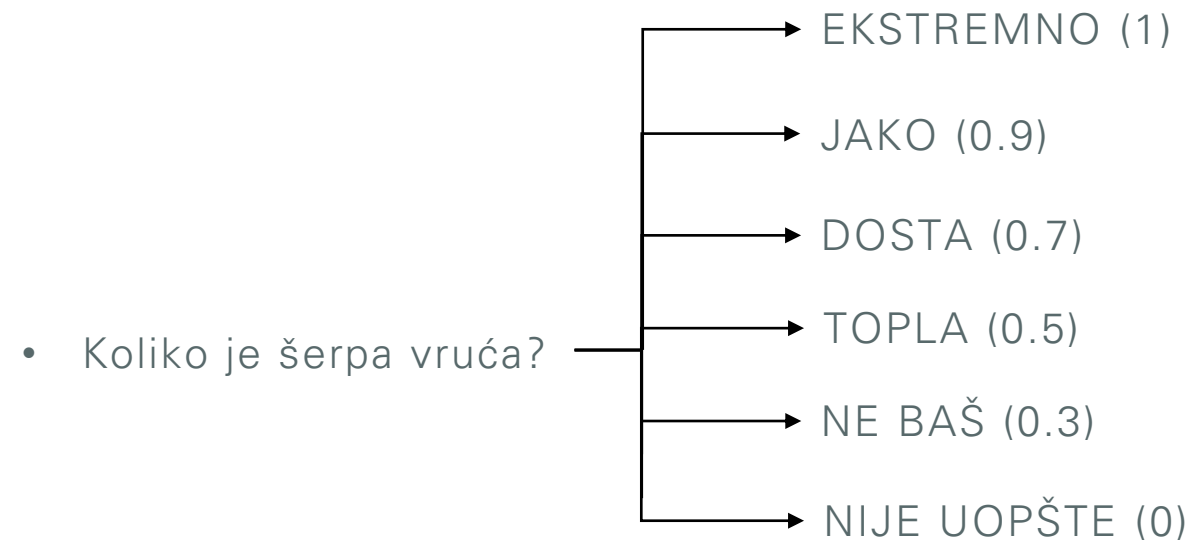
Fazi logika

- Koliko je jabuka zelena?
(skroz zelena, poprilično zelena, dosta zelena,
ne baš zelena, nimalo zelena)
- Koliko je šerpa vruća?
(ekstremno vruća, jako vruća, dosta vruća,
vruća, ne baš vruća, topla, mlaka, hladna)
- Koliko je padala kiša?
(baš mnogo, mnogo, dosta, očekivano, onako,
slabije, sitno, nimalo)

Klasična logika



Fazi logika





Automobili

za izbor stepena prenosa – zasniva se na faktorima kao što su opterećenje motora, uslovi na putu i stil vožnje.



Mašine za pranje posuđa

za određivanje programa pranja i potrebne snage, koja se zasniva na faktorima kao što su broj posuđa i nivo ostataka hrane na sudovima.



Mašine za fotokopiranje

za podešavanje jačine tonera na osnovu faktora kao što su vlažnost, gustina slike i toplina.



Vazduhoplovstvo

za upravljanje kontrolom visine za satelite i svemirske letelice na osnovu faktora okoline.



Medicina

za kompjuterski potpomognute dijagnoze, zasnovane na faktorima kao što su simptomi i istorija bolesti.



Hemijska destilacija

za kontrolu pH i temperaturnih varijabli.



Klima uređaji

određuje izlaz na osnovu faktora kao što su trenutna temperatura i ciljna temperatura.



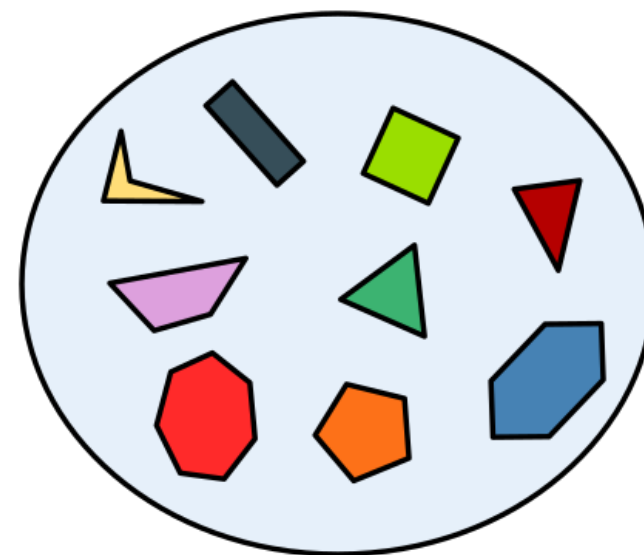
Železnica

za poboljšanje ekonomičnosti, udobnosti i preciznosti vožnje.

Klasični (krisp) skupovi

- Klasični skup je kolekcija različitih objekata koji imaju ista svojstva (atribute). Na primer, skup učenika koji je dobio ocenu 5 iz nekog predmeta.
- Svaki pojedinačni entitet u skupu naziva se **član** ili **element** skupa.
- Klasični skup je definisan na takav način da je univerzum diskursa podeljen na dve grupe: **članove** i **nečlanove**. Dakle, u slučaju klasičnih skupova ne postoji delimično članstvo.
- Neka je A dat skup. **Funkcija članstva** koja se može koristiti za definisanje skupa A je data sa:

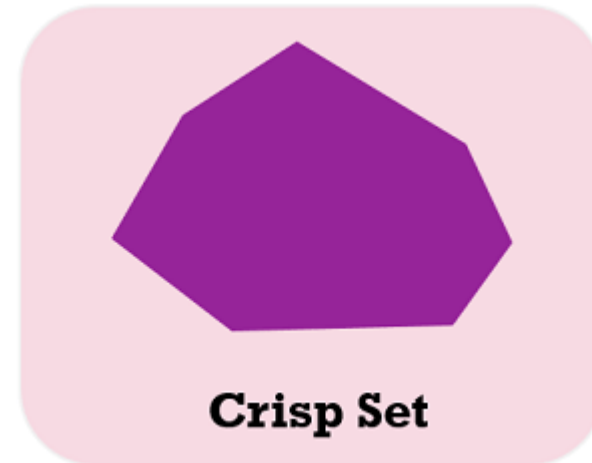
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$



Fazi skupovi

- Posmatrajmo fazi skup *visokih učenika*.
- Ne možemo jasno povući granicu pripadnosti skupu.
- Ako znamo da su ljudi visine 185cm i više visoki, da li neko visine 184cm može da se smatra da nije visok?
- Fazi skup je skup koji ima stepene pripadnosti između 0 i 1.
- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - stepen pripadnosti objekta x fazi skupu $\tilde{A}$.
- Za univerzalni skup U , fazi skup $\tilde{A}$ se definiše kao:

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in U \}.$$

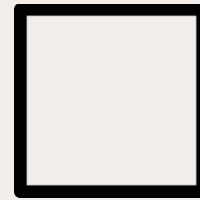
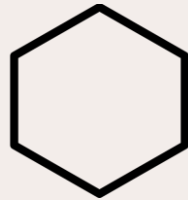
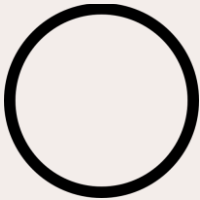




Oblici

- Univerzalni skup U : nekoliko geometrijskih figura (krug, kvadrat, heksagon).
- Fazi skup: *okruglog oblika*.
- Može biti zadat na sledeći način:

$$\tilde{A} = \{ (krug, 1), (heksagon, 0.5), (kvadrat, 0) \}$$

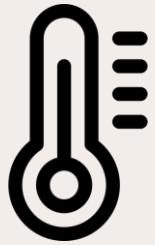




Gradovi

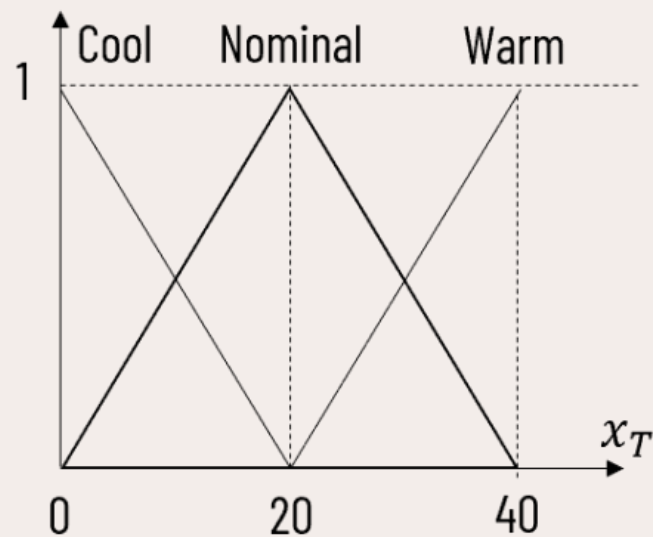
- Univerzalni skup U : gradovi (London, Nju Jork, Prag, Bon, Beograd, ...).
- Fazi skup: *veliki grad*.
- Može biti zadat na sledeći način:

$$\tilde{A} = \{ (London, 1), (Nju Jork, 1), \left(Prag, \frac{3}{5}\right), \left(Bon, \frac{1}{5}\right), (Beograd, \frac{5}{8}) \}$$



Temperature

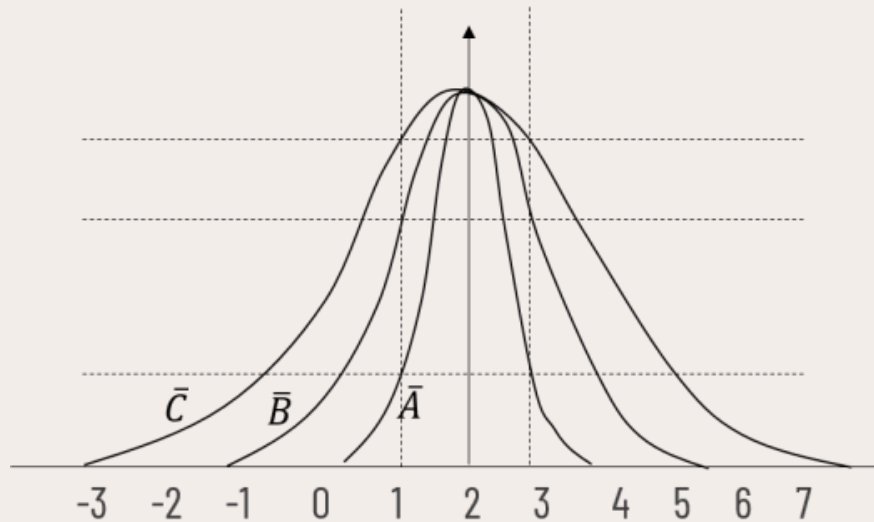
- Univerzalni skup U : vrednosti temperature (recimo, od 0 do 40).
- Pretpostavimo da imamo tri fazi skupa: *hladno*, *normalno* i *vruće* (vezane za temperaturu).
- Jedna vrednost $t = 5$ može pripadati u sva tri fazi skupa, sa različitim stepenima pripadnosti:
 - 0.7 u fazi skupu *hladno*,
 - 0.3 u fazi skupu *normalno*,
 - 0 u fazi skupu *vruće*.

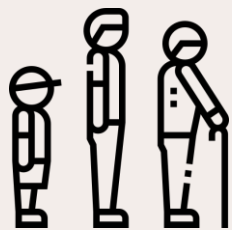


2

Brojevi

- Univerzalni skup U : Brojevi od -3 do 7.
- Fazi skup "*Otprilike 2*".
- Može se definisati preko tri različita fazi skupa:
 - $\tilde{A} = \{ (1, 0.3), (2, 1.0), (3, 0.3), (4, 0.0) \}$
 - $\tilde{B} = \{ (1, 0.7), (2, 1.0), (3, 0.7), (4, 0.2) \}$
 - $\tilde{C} = \{ (1, 0.9), (2, 1.0), (3, 0.9), (4, 0.4) \}$



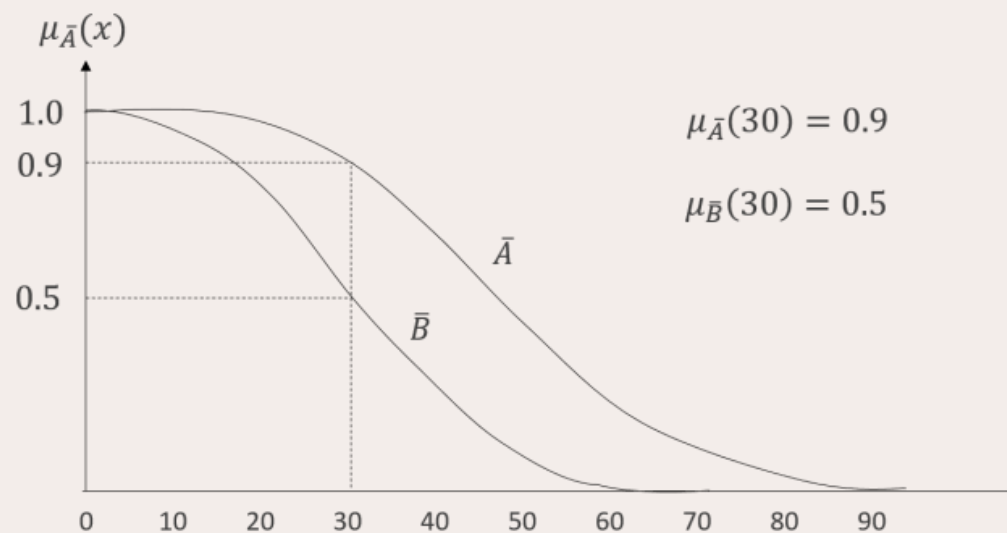


Godine

- Fazi skupovi *mlad* i *veoma mlad*.
- Univerzalni skupovi:

$$A = \{\text{mlad}\} \in [0, 90]$$

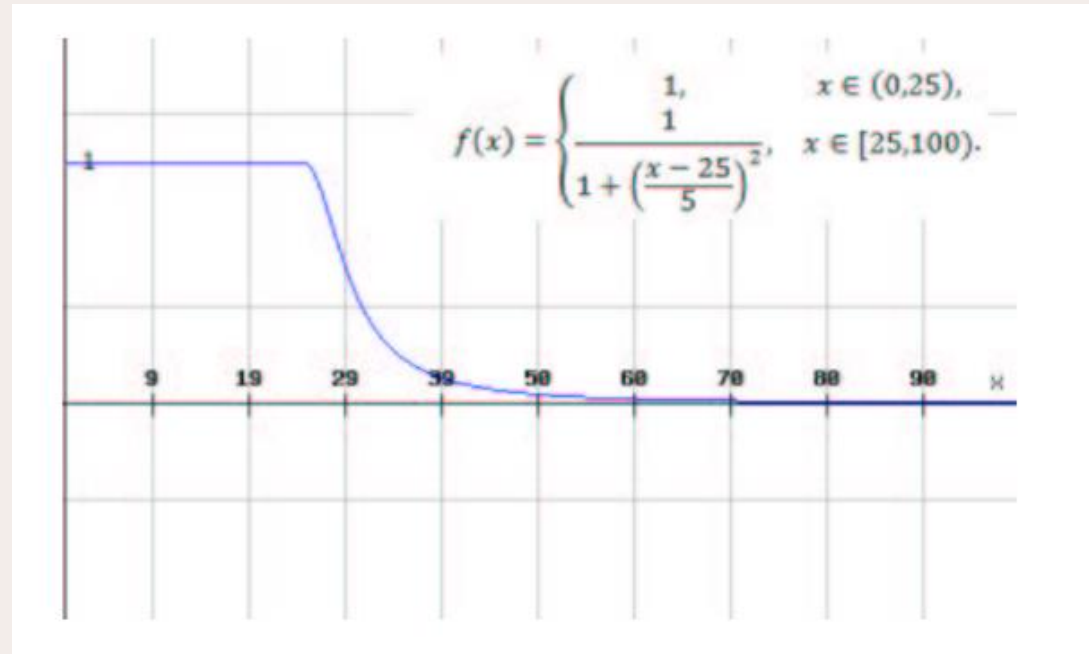
$$B = \{\text{veoma mlad}\} \in [0, 60]$$





Godine, ponovo

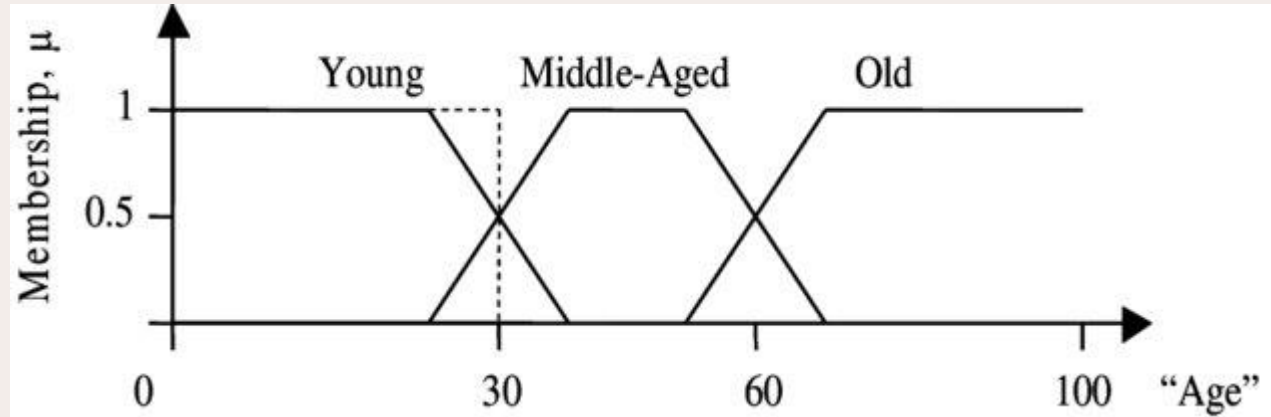
- Neka je $U = [0,100]$ univerzalni skup, koji predstavlja ljudske godine.
- Fazi skup "*mlad čovek*" mozemo dati sledećom funkcijom pripadnosti mlad : $U \rightarrow [0,1]$, definisanom sa:

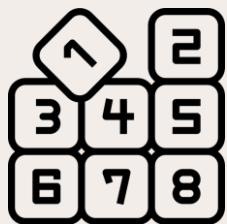




Godine, još jedanput

- Neka je $U = [0,100]$ univerzalni skup, koji predstavlja ljudske godine.
- Tri fazi skupa: "*mlad*", "*srednjovečan*" i "*star*".

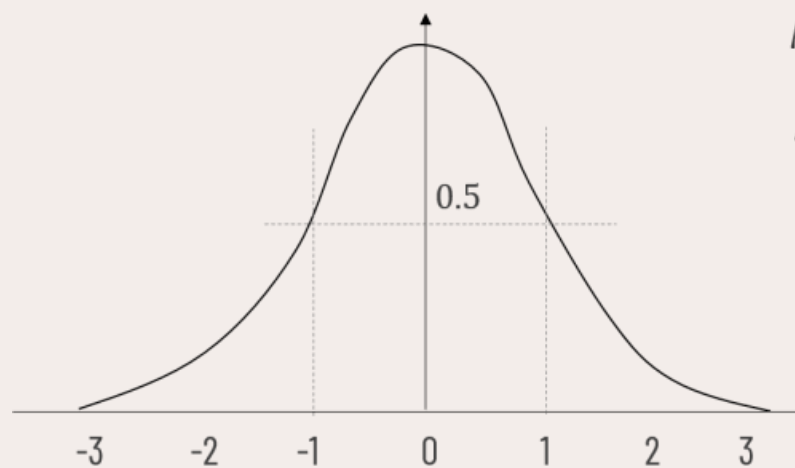




Brojevi

- Univerzalni skup: Interval $[-3, 3]$.
- Fazi skupovi "*realan broj blizu 0*" i "*realan broj vrlo blizu 0*".

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

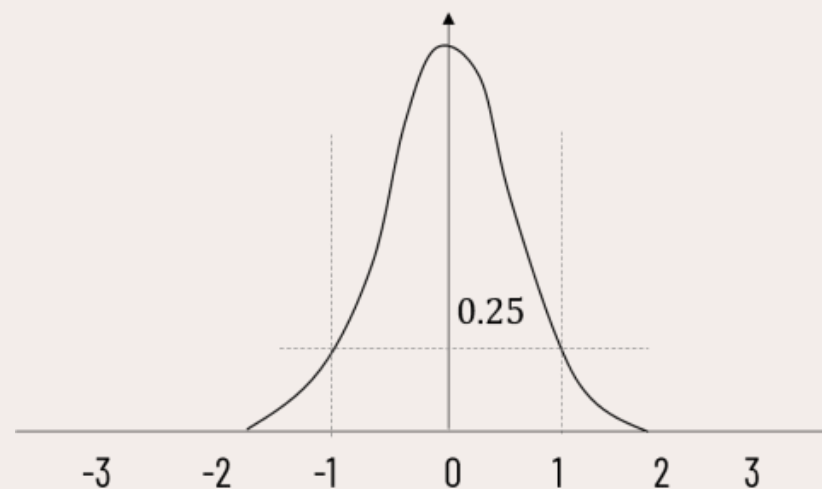


$$\mu_{\bar{A}}(0) = 1$$

$$\mu_{\bar{A}}(1) = 0.5$$

$$\mu_{\bar{A}}(2) = 0.2$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$



$$\mu_{\bar{A}}(0) = 1$$

$$\mu_{\bar{A}}(1) = 0.25$$

$$\mu_{\bar{A}}(2) = 0.0$$

Klasični skupovi

- Unija skupova:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

- Presek skupova:

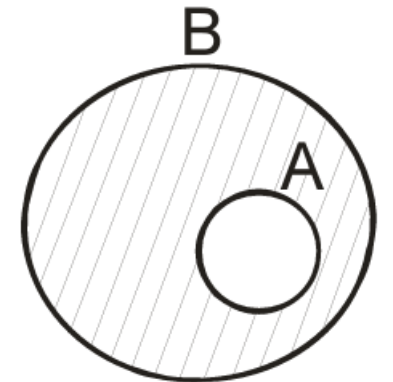
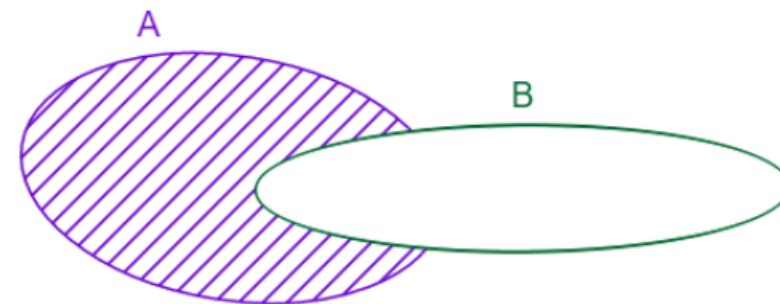
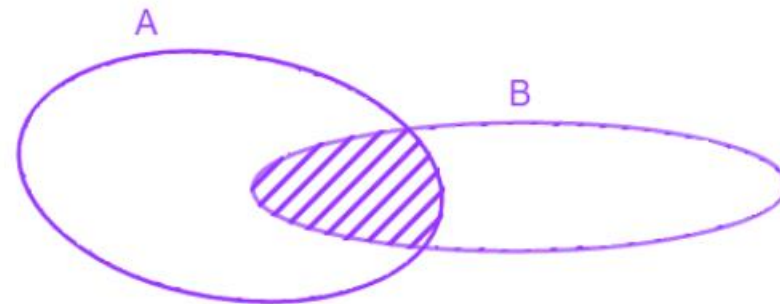
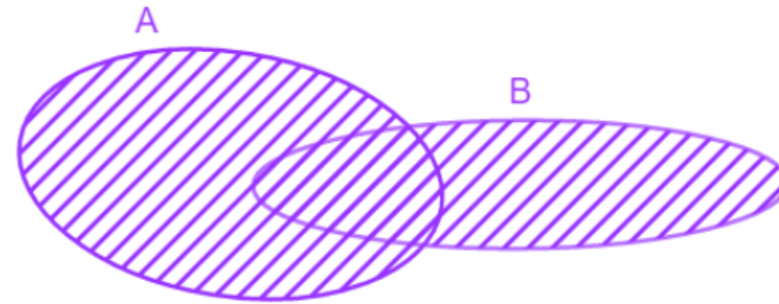
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$

- Razlika skupova:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

- Komplement skupa:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$



Dat je skup $S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Odrediti skupove $A = \left\{x \mid x \in S \wedge \frac{2x}{12-x} \in S\right\}$ i $B = \left\{y \mid y \in S \wedge \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \in S\right\}$,

zatim odrediti skupove : $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ i $P(A \setminus B)$.

$x \in S$, znači da je $x=0, x=1, x=2, \dots$. Za svaku vrednost proverimo da li dati razlomak pripada skupu S . Ako pripada, onda vrednost x pripada skupu A .

primer : $x = 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3}{12 - 3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \notin S$

$x = 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot 4}{12 - 4} = \frac{8}{8} = 1 \in S \dots$

$A = \{0, 4, 6, 8, 9\}$

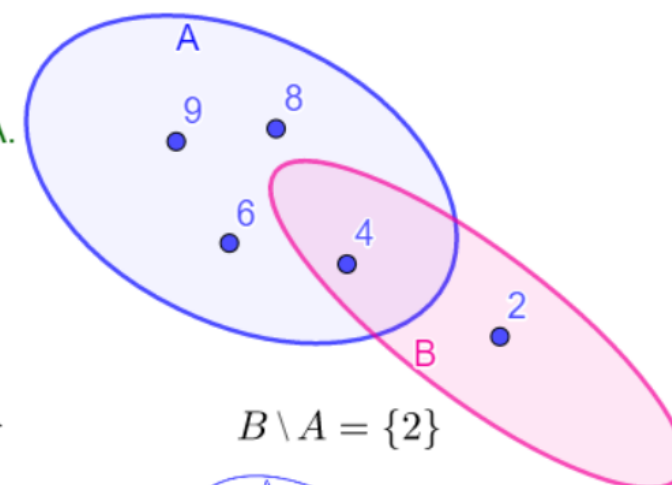
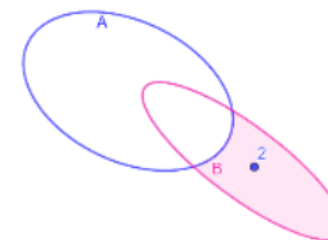
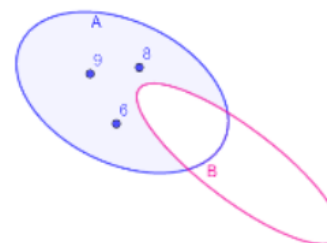
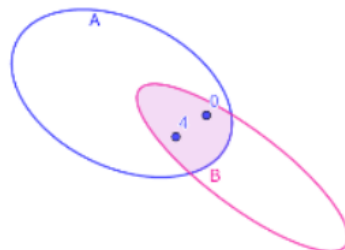
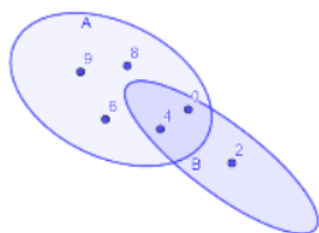
$B = \{0, 2, 4\}$

$A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$

$A \cap B = \{0, 4\}$

$A \setminus B = \{6, 8, 9\}$

$B \setminus A = \{2\}$



Kako definisati operacije nad fazi skupovima?

- Primer:

- Univerzalni skup U : *učenici* (Nikola, Marko, Petar, Ana, Milena, Ivana).

- Fazi skup $\tilde{A}$ - *visoki učenici*.

$$\tilde{A} = \{ (Nikola, 0.8), (Marko, 1), (Petar, 0.6), (Ana, 0.4), (Milena, 0.9), (Ivana, 0.5) \}$$

- Fazi skup $\tilde{B}$ - *pametni učenici*.

$$\tilde{B} = \{ (Nikola, 0.3), (Marko, 0.8), (Petar, 1), (Ana, 0.6), (Milena, 1), (Ivana, 0.4) \}$$

- Kako definisati:

- Uniju – fazi skup učenika koji su visoki ili pametni?
- Presek – fazi skup učenika koji su visoki i pametni?
- Razliku – fazi skup učenika koji su visoku, ali nisu pametni?
- Komplement – fazi skup učenika koji nisu visoki (tj. Fazi skup učenika koji nisu pametni)?

Operacije nad fazi skupovima

- Unija: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{ (x, \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}) \mid x \in U \}$.
- Presek: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{ (x, \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}) \mid x \in U \}$.
- Komplement: $(\tilde{A}') (x) = \{ x, 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in U \}$.
- Razlika??

- Primer:

- Univerzalni skup U : *učenici* (Nikola, Marko, Petar, Ana, Milena, Ivana).

- Fazi skup $\tilde{A}$ - *visoki učenici*:

$$\tilde{A} = \{ (Nikola, 0.8), (Marko, 1), (Petar, 0.6), (Ana, 0.4), (Milena, 0.9), (Ivana, 0.5) \}$$

- Fazi skup $\tilde{B}$ - *pametni učenici*:

$$\tilde{B} = \{ (Nikola, 0.3), (Marko, 0.8), (Petar, 1), (Ana, 0.6), (Milena, 1), (Ivana, 0.4) \}$$

- Unija $\tilde{A} \cup \tilde{B}$:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{ (Nikola, 0.8), (Marko, 1), (Petar, 1), (Ana, 0.6), (Milena, 1), (Ivana, 0.5) \}$$

- Presek $\tilde{A} \cap \tilde{B}$:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{ (Nikola, 0.3), (Marko, 0.8), (Petar, 0.6), (Ana, 0.4), (Milena, 0.9), (Ivana, 0.4) \}$$

- Komplement $\tilde{A}'$:

$$\tilde{A}' = \{ (Nikola, 0.2), (Marko, 0), (Petar, 0.4), (Ana, 0.6), (Milena, 0.1), (Ivana, 0.5) \}$$

Klasični i fazi skupovi - svojstva

- Komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Asocijativnost:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Distributivnost:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Idempotentnost:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- Jedinični element:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap U = A$$

Klasični i fazi skupovi – svojstva (nastavak)

- Involutivnost:

$$(A')' = A$$

- De Morganovi zakoni:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

- Apsorpcija:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

- Svi ovi identiteti važe i za obične i za fazi skupove!
- Ima i svojstava koja ne važe za fazi skupove, kao što je Zakon isključenja trećeg:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

Fazi skupovi

- Oslonac fazi skupa $\tilde{A}$ je:

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in U \mid \tilde{A}(x) > 0\}$$

- Ako je oslonac fazi skupa prazan skup, tada se ovakav fazi skup naziva i **prazan fazi skup**.
- **Fazi singleton** je fazi skup čiji skup oslonac sadrži tačno jedan element.
- **Visina** fazi skupa je najveća vrednost funkcije pripadnosti fazi skupa.
- Ukoliko je visina fazi skupa jednaka jedan, taj fazi skup je **normalizovan fazi skup**.
- α -odsečak fazi skupa $\tilde{A}$ je skup

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$



Brzo kretanje

Zadatak 1 Fazi skup koji predstavlja brzinu kretanja automobila ima univerzalni skup jednak intervalu $[20\text{km/h}, 200\text{km/h}]$. Funkcija pripadnosti fazi skupa "brzo kretanje" je $A : U \rightarrow [0, 1]$:

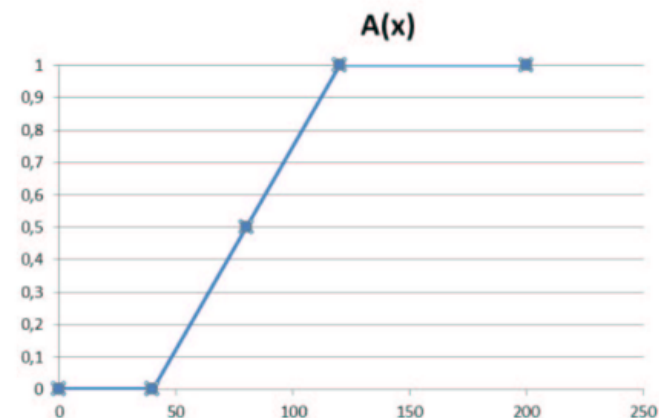
$$A(x) = \begin{cases} 0, & x < 40; \\ \frac{x-40}{80}, & 40 \leq x \leq 120; \\ 1, & 120 < x. \end{cases}$$

Za dati fazi skup odrediti:

- Tip;
- Grafički prikazati funkciju pripadnosti;
- Visinu;
- Oslonac;
- Odsečak $A_{0,5}$;

Rešenje: a) Neprekidan fazi skup;

b)



c) Visina fazi skupa je 1;

d) Oslonac fazi skupa je $\text{supp}(A) = [120, 220]$;

e) Odsečak $A_\alpha = [40, 220]$;

f) Fazi komplement je predstavljen sledećom funkcijom pripadnosti:

$$\overline{A} = \begin{cases} 1, & x < 40; \\ \frac{120-x}{80}, & 40 \leq x \leq 120; \\ 0, & 120 < x. \end{cases}$$



Zagađenje

Zadatak 2 Fazi skup koji predstavlja zagađenost reka ima univerzalni skup U sačinjen od 8 najvećih reka u Srbiji - Dunav, Tisa, Sava, Velika Morava, Drina, Tamiš, Drim, Južna Morava. Fazi skup " zagađene reke " dat je funkcijom pripadnosti $A : U \rightarrow [0,1]$:

$$A = \frac{0.8}{\text{Dunav}} + \frac{0.5}{\text{Tisa}} + \frac{0.9}{\text{Sava}} + \frac{0.4}{\text{V.Morava}} + \frac{0}{\text{Drina}} + \frac{0.8}{\text{Tam}} + \frac{0}{\text{Drim}} + \frac{1}{\text{J.Morava}}.$$

Za dati fazi skup odrediti:

- Tip;
- Visinu;
- Oslonac;
- Odsečak $A_{0.5}$;
- Komplement.

Rešenje: a) Diskretan fazi skup;

b) Visina fazi skupa je $A(\text{J.Morava}) = 1$;

c) Oslonac fazi skupa je

$\text{supp}(A) = \{\text{Dunav}, \text{Tisa}, \text{Sava}, \text{V.Morava}, \text{Tamis}, \text{J.Morava}\}$;

d) Odsečak $A_\alpha = \{\text{Dunav}, \text{Tisa}, \text{Sava}, \text{Tamis}, \text{J.Morava}\}$;

e) Fazi komplement je predstavljen sledećom funkcijom pripadnosti:

$$\bar{A} = \frac{0.2}{\text{Dunav}} + \frac{0.5}{\text{Tisa}} + \frac{0.1}{\text{Sava}} + \frac{0.6}{\text{V.Morava}} + \frac{1}{\text{Drina}} + \frac{0.2}{\text{Tam}} + \frac{1}{\text{Drim}} + \frac{0}{\text{J.Morava}}.$$



Hvala na pažni!

Pitanja?

stefan.stanimirovic@pmf.edu.rs