UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET **29.06.2015.**
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

REŠENJA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

1. Transformacijom izraza se dobija

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right]^{-1}\cdot(ab)^{1/4}\\
&\quad=\left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right]^{-1}\cdot(ab)^{1/4}\\
&\quad=\left[a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-\frac{(a^{1/2}-b^{1/2})(a+a^{1/2}b^{1/2}+b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right]^{-1}\cdot(ab)^{1/4}\\
&\quad=(ab)^{-1/2}\cdot(ab)^{1/4}\\
&\quad=(ab)^{-1/4}.
\end{aligned}$$

2. Kako je $z=\frac{1}{a-ia}\cdot\frac{a+ia}{a+ia}=\frac{1}{2a}+i\frac{1}{2a}$, sledi da je $Rez=\frac{1}{2a}$, $Imz=\frac{1}{2a}$, odakle je $r=\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}|a|}$, $\varphi=\arctan 1$. Kako je $a<0$, to je $\varphi=5\pi/4$ (ili $\varphi=-3\pi/4$). Prema tome, $z=\frac{1}{\sqrt{2}|a|}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (ili $z=\frac{1}{\sqrt{2}|a|}\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$).

3. I. Kako je $Q(x)=(x+1)(x-2)$ i $P(x)=Q(x)S(x)+7$, gde je $S(x)$ odgovarajući polinom stepena 3, to je $P(-1)=3-a+b=7$ i $P(2)=48+2a+b=7$. Iz sistema $-a+b=4$, $2a+b=-41$ sledi $a=-15$, $b=-11$.

II. Deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ dobija se polinom $S(x)=x^3+2x^2+3x+9$ i ostatak $R(x)=(15+a)x+18+b$. Kako je poznato da je ostatak jednak 7, iz identiteta $R(x)\equiv 7$, tj. $(15+a)x+18+b\equiv 7$ sledi da mora biti $15+a=0$ i $18+b=7$, odakle je $a=-15$, $b=-11$.

4. Ako je $x_1=x_2$, po Vijetovim formulama je

$$2x_1=-\frac{8a-12}{4},\qquad x_1^2=\frac{1}{4}.$$

Iz druge jednačine je $x_1 = \pm\frac{1}{2}$, tako da je $a = 1$ i $a = 2$.

Ako je $x_1 = -x_2$, tada je $x_1 + x_2 = 0$ i $-x_1^2 = \frac{1}{4}$, što je nemoguće.

Prema tome, koreni su jednaki po apsolutnoj vrednosti za $a = 1$ ili $a = 2$.

5. Iz uslova $x + 1 \geq 0$ i $x - 3 \geq 0$ sledi da mora biti $x \geq 3$. Kako je

$$\sqrt{x+1} \leq 2 - \sqrt{x-3}, \quad x \geq 3, \tag{1}$$

i $\sqrt{x+1} \geq 0$, mora biti $2 - \sqrt{x-3} \geq 0$, odnosno $2 \geq \sqrt{x-3}$. Odavde je $4 \geq x - 3$, tj. $x \leq 7$. Kvadriranjem nejednačine (1) dobija se $4\sqrt{x-3} \leq 0$. Prema tome, nejednačina ima jedinstveno rešenje $x = 3$.

6. Nejednačina je definisana za $x > 0, x \neq 1, x \neq 1/2, x \neq 1/4$. U tom slučaju ona je ekvivalentna sa nejednačinom

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} > \frac{1}{(2 + \log_2 x)^2}.$$

Kako je desna strana pozitivna, to mora biti $\log_2 x > 0$ i $1 + \log_2 x > 0$, ili $\log_2 x < 0$ i $1 + \log_2 x < 0$, iz čega sledi da je $x > 1$ ili $0 < x < 1/2$. U tom slučaju data jednačina se transformiše u jednačinu

$$(2 + \log_2 x)^2 > \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x),$$

tj. u jednačinu $3\log_2 x > -4$, iz koje sledi da je $x > 2^{-\frac{4}{3}}$. Prema tome, $x \in (2^{-\frac{4}{3}}, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

7. Kako je $\sin\frac{3x}{2} = \sin\left(x + \frac{x}{2}\right)$, primenom adicione formule i formula dvostrukog ugla data jednačina se transformiše u ekvivalentnu jednačinu

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \left[4\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - \frac{15}{4}\right] = 0.$$

Ako je $\sin\frac{x}{2} = 0$, tada je $x = 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Ako je $4\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - \frac{15}{4} = 0$, smenom $t = \cos\frac{x}{2}$, pri čemu je $\mid t \mid\leq 1$, ova jednačina postaje $4t^2 + 2t - \frac{15}{4} = 0$, odakle je $t_1 = 3/4, t_2 = -5/4$. Iz zahteva $\mid t \mid\leq 1$ sledi da u obzir treba uzeti samo prvo rešenje. Prema tome, rešenja jednačine su $x = 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i $x = \pm2\arccos\frac{3}{4} + 4k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

8. Centar kružnice $O = (x_0, y_0)$ je sredina duži AB, pa je $x_0 = 1/2, y_0 = -1$.Kako je $\overline{AB} = 5$, poluprečnik kružnice je $r = \sqrt{5}$, a njena jednačina

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}.$$

Drugi deo zadatka se može rešiti na dva načina.

I. Kako je svaki periferijski ugao nad prečnikom prav, tačka $M = (\alpha, \beta)$ iz koje se duž AB vidi pod pravim uglom, mora se nalaziti na kružnici i na pravoj $l : 5x + y + 1 =$, tj. u preseku prave l i kružnice. Zbog toga su njene koordinate rešenja sistema

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta+1)^2 = \frac{25}{4}, \qquad 5\alpha + \beta + 1 = 0.$$

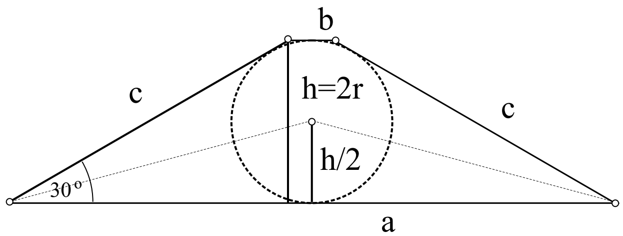
Eliminacijom β se dolazi do jednačine $26\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ koja ima rešenja $\alpha_1 = 1/2$ i $\alpha_2 = -6/13$. Kako je $\beta = -5\alpha - 1$, odnosno $\beta_1 = -7/2$ i $\beta_2 = 17/13$, tražene tačke su $M_1 = (1/2, -7/2)$ i $M_2 = (-16/13, 17/13)$.

II. Neka je l_1 prava odredjena tačkama A i M, a l_2 prava odredjena tačkana B i M. Koeficijenti pravaca ovih pravih su

$$k_1 = \frac{\beta + 3}{\alpha - 2}, \qquad k_2 = \frac{\beta - 1}{\alpha + 1}.$$

Iz uslova normalnosti $k_1 \cdot k_2 = -1$ sledi $(\beta + 3)(\beta - 1) + (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$. Kako je tačka M na pravoj l, to je $5\alpha + \beta + 1 = 0$. Iz ove dve jednačine se eliminacijom β dobija $26\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$, što dovodi do rešenja kao u slučaju I.

9. Kako se radi o tangentnom trapezu dužina osnovica a i b i kraka c, to je $a + b = 2c$.



Ugao trapeza je 30^0, odakle je visina trapeza $h = c \sin 30^0 = c/2$. Prema tome, površina trapeza je

$$\frac{a + b}{2} h = \frac{c^2}{2} = 50.$$

Otuda je $c = 10$. Poluprečnik valjka je $r = h/2 = 5/2$, a njegova visina $H = c = 10$, tako da su površina i zapremina valjka

$$P = 2\pi r(r + H) = 125\pi/2\,\mathrm{cm}^2, \qquad V = \pi r^2 H = 125\pi/2\,\mathrm{cm}^3.$$

10. Zadatak se može rešiti na više načina.

I. Neka su prva tri člana geometrijske progresije $q_1 = r, q_2 = rq, q_3 = rq^2$. Prva tri člana aritmetičke progresije su a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$. Kako je $a_1 = q_1 + 1 = r + 1$, $a_2 = q_2 + 3 = rq + 3$, $a_3 = q_3 + 4 = rq^2 + 4$ i $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, to je

$$rq + 3 - r - 1 = rq^2 + 4 - rq - 3,$$

odnosno $r(q^2 - 2rq + 1) = 1$. Odavde i iz uslova $q_1 + q_2 + q_3 = r(1 + q + q^2) = 7$ eliminacijom r se dobija jednačina $6q^2 - 15q + 6 = 0$ koja ima rešenja $q = 2$ i $q = 1/2$. Kako je geometrijska progresija opadajuća, u obzir se uzima samo drugo rešenje. Iz jednačine $r(1 + q + q^2) = 7$ sledi $r = 4$, pa je $q_1 = 4$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$.

II. Kao u I, $q_1 = r$, $q_2 = rq$, $q_3 = rq^2$ i $q_1 + q_2 + q_3 = r(1 + q + q^2) = 7$. Kako je $a_1 = a = q_1 + 1$, $a_2 = a + d = q_2 + 3$, $a_3 = a + 2d = q_3 + 4$, to je $3(a + d) = q_1 + q_2 + q_3 + 8 = 15$, tj. $a_2 = a + d = 5$. Sa druge strane, $a_2 = rq + 3 = 5$, pa se r i q odredjuju iz sistema

$$rq = 2, \quad r(1 + q + q^2) = 7.$$

Odavde je $2q^2 - 5q + 2 = 0$, tj. $q = 2$ i $q = 1/2$. Za drugo rešenje, za koje je geometrijska progresija opadajuća, je $r = 4$, a traženi brojevi su $q_1 = 4$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$.