Rešenja zadataka iz matematike

Zadatak 1

Dokazati:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Baza: Za $n = 1$:

$$1^2 = 1, \quad \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$

Induktivni korak: Pretpostavimo da tvrdnja važi za n:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dodajemo $(n+1)^2$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Tvrdjenje važi i za $n+1$, pa je dokaz završen.

Zadatak 2

Data je jednačina:

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

Diskriminanta:

$$D = (-2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4$$

Jednačina uvek ima dva različita realna rešenja za svako $a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3

Rešiti:

$$\sin(2x) = \sqrt{3}\cos x$$

Koristimo identitet:

$$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x$$

Ako je $\cos x \neq 0$, možemo podeliti:

$$2\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\Pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, , k \in \mathbb{Z}$$

Ako je $\cos x = 0$, onda je $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 4

Rešiti:

$$\log_2(x-1) > 1 + \log_2(x+1)$$

Uslovi: $x > 1$

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) > 1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 2$$

$$x - 1 > 2(x+1) \Rightarrow x - 1 > 2x + 2 \Rightarrow -3 > x$$

Uslov $x > 1$ nije zadovoljen, pa nejednačina nema rešenja.

Zadatak 5

Data je stranica $b = 6$, $c = 8$, ugao $\angle A = 60°$.

1. Način

Konstruišemo visinu CD na stranicu AB. Kako je ΔABD polovina jednakostraničnog trougla, to je:

$$AD = AC/2 = 3$$

Odatle je $DB = 5$, a primenom Pitagorine teoreme je $CD = 3\sqrt{3}$.

Još jednom primenom Pitagorine teoreme na trougao ΔBCD, dobijamo da je $a = BC = 2\sqrt{13}$.

2. Način

Koristimo kosinusnu teoremu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 100 - 48 = 52 \Rightarrow a = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Zadatak 6

Data je prava $3x - 4y + 5 = 0$. Koeficijent pravca:

$$k = \frac{3}{4} \Rightarrow k_{\perp} = -\frac{4}{3}$$

Prava normalna na datu i koja prolazi kroz tačku $A(1, 2)$ ima oblik:

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

Opšti oblik:

$$4x + 3y - 10 = 0$$