Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет
Департман за математику

30.06.2023.

ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Нека је $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1} : \dfrac{1}{x^3-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Израчунати $f(\sqrt{2})$.

   Решење. Како је

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} : \frac{1}{x^3-1} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \cdot (x^3-1) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \cdot (x-1)(x^2+x+1)$$

   и $x^2+x+1 \neq 0$ добијамо да је $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2-1$ одакле следи да је $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$. До решења се може доћи и директном заменом

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} \cdot (2\sqrt{2}-1) = \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 1.$$

2. Решити неједначину

$$|x-2| + |4+x| < 6x.$$

   Решење. Како је апсолутна вредност израза увек ненегативна, важи неједнакост $0 \leq |x-2| + |4+x| < 6x$, па је $x > 0$. Дакле, довољно је посматрати два случаја: $x \in (0,2)$ и $x \in [2, \infty)$.

   1° Ако $x \in (0,2)$, неједначина је еквивалентна са $2 - x + 4 + x < 6x$, односно са $6 < 6x$. Решење ове неједначине је $x > 1$, а како је интервал у коме се неједначина посматра $(0,2)$, то је решење полазне неједначине у овом случају $x \in (1,2)$.

   2° Ако $x \in [2, +\infty)$, добијамо неједначину $x - 2 + 4 + x < 6x$ тј. $2 < 4x$. Решење добијене неједначине је $x > \frac{1}{2}$, а како је интервал у коме се неједначина посматра $[2, +\infty)$, то је решење полазне неједначине у овом случају $x \in [2, +\infty)$.

   Дакле, скуп решење полазне неједначине је $S = (1,2) \cup [2, +\infty) = (1, +\infty)$.

3. Одредити a и b тако да је полином $P(x) = x^7 - 3x^6 + 4x^2 + ax + b$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

   Решење. *Први начин:* Дељењем полинома $P(x)$ полином $Q(x)$ добија се количник $S(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 5$ и остатак $R(x) = (a+17)x + b - 15$. Како је остатак $R(x) = 0$, следи да је $a = -17$ и $b = 15$.

   Други начин: Како је $Q(x) = (x-1)(x-3)$ и $Q(x)$ дели $P(x)$, то постоји полином $S(x)$ тако да је $P(x) = (x-1)(x-3)S(x)$. Тада је $P(1) = 0$ и $P(3) = 0$, па важи:

$$\begin{aligned} P(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^6 + 4 \cdot 1^2 + a + b &= 2 + a + b = 0, \\ P(3) = 3^7 - 3 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^2 + 3a + b &= 36 + 3a + b = 0. \end{aligned}$$

   Решавањем система, добијамо $a = -17$ и $b = 15$.

4. Одредити све реалне бројеве a тако да једно решење једначине $x^2 - ax + 3a = 0$ буде три пута веће од другог.

Решење. Нека су x_1 и x_2 решења дате квадратне једначине. Из Вијетових формула следи $x_1 + x_2 = a$ и $x_1 \cdot x_2 = 3a$. Како је једно решење три пута веће од другог, без губљења општости, претпоставимо да је $x_1 = 3x_2$. Заменом последње једнакости у Вијетове формуле имамо $4x_2 = a$ и $3x_2^2 = 3a$, па је $x_2 = \dfrac{a}{4}$ и $x_2^2 = a$, одакле је $\dfrac{a^2}{16} = a$. Дакле, добијена је једначина $a^2 - 16a = 0$, чија су решења $a = 0$ и $a = 16$.

5. Решити једначину

$$3\sin x = 2(1 - \cos x).$$

Решење. Важи:

$$\begin{aligned}
3\sin x = 2(1-\cos x) &\iff 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin^2\frac{x}{2}\\
&\iff 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}\\
&\iff \sin\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0\\
&\iff \sin\frac{x}{2} = 0 \quad \vee \quad 3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0\\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\\
&\iff x = 2k\pi \ \vee \ x = 2\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

6. Решити неједначину:

$$\log_2 \frac{1-2x}{1+x} \geq 2.$$

Решење. Неједначина је дефинисана за оно x за које важи

$$\frac{1-2x}{1+x} > 0, \quad \text{тj.} \quad x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \mathbb{D}.$$

За $x \in \mathbb{D}$, полазна неједначина је еквивалентна са

$$\frac{1-2x}{1+x} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{1+x} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-6x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-1, -1/2] = \mathbb{S}.$$

Дакле, скуп решења дате неједначине је $x \in \mathbb{D} \cap \mathbb{S} = \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

7. Решити једначину

$$\frac{9^x}{2^{2x-2}} - 5\frac{3^x}{2^x} - 9 = 0.$$

Решење. Важе следеће еквиваленције:

$$\frac{9^x}{2^{2x-2}} - 5\frac{3^x}{2^x} - 9 = 0 \iff \frac{9^x}{4^{x-1}} - 5\frac{3^x}{2^x} - 9 = 0 \iff 4\frac{9^x}{4^x} - 5\frac{3^x}{2^x} - 9 = 0$$

$$\iff 4\frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 5\frac{3^x}{2^x} - 9 = 0 \iff 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x - 9 = 0.$$

Уколико уведемо смену $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тада последња једнакост постаје $4y^2 - 5y - 9 = 0$. Решавањем те квадратне једначине, добијамо решења $y = \frac{9}{4}$ и $y = -1$. Како је $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ увек позитивна као експоненцијална функција, то следи да је једино могуће решење $y = \frac{9}{4}$. Тада је $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, па је $x = 2$.

8. Катете праволуглог троугла $\triangle ABC$ су $AC = 15cm$ и $BC = 20cm$. Одредити висину која одговара хипотенузи AB.

   Решење. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао $\triangle ABC$ добијамо

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

одакле следи да је хипотенуза $AB = 25cm$. Површина троугла $\triangle ABC$ може се одредити на два начина

$$P = \frac{AC \cdot BC}{2} \quad \vee \quad P = \frac{AB \cdot h}{2},$$

где је са h обележена висина која одговара хипотенузи AB. Следи

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h}{2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

односно $h = 12cm$.

9. Одредити полупречник основе r и висину H правог кружног ваљка коме је осни пресек квадрат, а запремина $V = 54\pi$.

   Решење. Из услова задатка да је осни пресек квадрат имамо да је $H = 2r$ одакле следи $V = r^2\pi H = 2r^3\pi$. Из $V = 54\pi$ добијамо $r = 3$ и $H = 6$.

10. Нека је збир првих 5 чланова аритметичког низа за 10 мањи од двоструког збира прва три члана. Ако је шести члан једнак 19, одредити вредност седмог члана.

    Решење. Збир првих n чланова аритметичког низа је $S_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d$, док је n-ти члан низа $a_n = a_1 + (n-1)d$. На основу услова задатка, следи $S_5 = 2S_3 - 10$, односно $5a_1 + \frac{4 \cdot 5}{2}d = 2\left(3a_1 + \frac{2 \cdot 3}{2}d\right) - 10$. Даље, важи $5a_1 + 10d = 6a_1 + 6d - 10 \Rightarrow a_1 - 4d = 10$. Како је шести члан низа једнак 19, следи да је $a_1 + 5d = 19$. Решавањем система $a_1 - 4d = 10$, $a_1 + 5d = 19$ добијамо да је $a_1 = 14$ и $d = 1$, па је седми члан низа $a_7 = a_1 + 6d = 20$.