PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

ZADACI SA REŠENJIMA
SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE, JUL 2020

---

1. Ako je $a > 0$ i $x > \sqrt{a}$, uprostiti izraz:

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}}.$$

Rešenje: Uočimo da važi

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}} &= \sqrt{\frac{a+x^2-2\sqrt{a}x}{x}} + \sqrt{\frac{a+x^2+2\sqrt{a}x}{x}} \\
&= \sqrt{\frac{(x-\sqrt{a})^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x+\sqrt{a})^2}{x}} \\
&= \frac{|x-\sqrt{a}|}{\sqrt{x}} + \frac{|x+\sqrt{a}|}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

2. Odrediti najmanju vrednost parametra m jednačine

$$(m-3)x^2 - (m+4)x + 3m = 0,$$

tako da jedno rešenje jednačine bude tri puta veće od drugog.
Rešenje: Primenom Vijetovih formula važi

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(m+4)}{m-3} = \frac{(m+4)}{m-3}, \qquad x_1x_2 = \frac{3m}{m-3}.$$

Kako je po uslovu zadatka $x_2 = 3x_1$, sledi

$$4x_1 = \frac{(m+4)}{(m-3)}, \qquad 3x_1^2 = \frac{3m}{m-3}.$$

Prema tome,

$$x_1 = \frac{(m+4)}{4(m-3)}$$

i

$$\left(\frac{(m+4)}{4(m-3)}\right)^2 = \frac{m}{m-3}.$$

Poslednja jednačina se svodi na

$$-15m^2 + 56m + 16 = 0,$$

čija su rešenja $m_1 = 4$ i $m_2 = -\frac{4}{15}$. Kako se traži najmanja vrednost parametra za dati uslov, rešenje zadatka je $-\frac{4}{15}$.

3. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1.$$

Rešenje: Za $x \geq 1$, na osnovu

$$\sqrt{1 - 2\sqrt{x-1} + x - 1} - \sqrt{4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} = 1,$$

početna jednačina je ekvivalentna sledećoj jednačini:

$$|\sqrt{x-1} - 1| - |\sqrt{x-1} - 2| = 1.$$

Kako je

$$|\sqrt{x-1} - 1| = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1, & x \geq 2 \\ 1 - \sqrt{x-1}, & x < 2, \end{cases}$$

i

$$|\sqrt{x-1} - 2| = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 2, & x \geq 5 \\ 2 - \sqrt{x-1}, & x < 5, \end{cases}$$

to se jednačina rešava posmatranjem tri intervala.

1) Za $1 \leq x < 2$,

$$1 - \sqrt{x-1} - (2 - \sqrt{x-1}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 1$$

odnosno, jednačina u ovom slučaju nema rešenja.

2) Za $x \in [2, 5)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} - 1 - (2 - \sqrt{x-1}) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x-1} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5. \end{aligned}$$

Kako $x = 5$ ne pripada intervalu $[2, 5)$, jednačina u ovom slučaju nema rešenje.

3) Za $x \geq 5$,

$$\sqrt{x-1} - 1 - (\sqrt{x-1} - 2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1.$$

Rešenje jednačine je $x \in [5, +\infty)$.

4. Rešiti nejednačinu

$$(x-2)^{\frac{2x-1}{2-x}} \geq 1.$$

Rešenje: 1) Ako je $0 < x - 2 < 1$, odnosno $2 < x < 3$, tada

$$\begin{aligned} (x-2)^{\frac{2x-1}{2-x}} \geq (x-2)^0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (2, \infty). \end{aligned}$$

Pošto je $2 < x < 3$, u ovom slučaju nejednačina ima rešenje $x \in (2, 3)$.

2) Za $x-2>1$, tj. $x>3$, nejednačina se svodi na

$$\begin{aligned}(x-2)^{\frac{2x-1}{2-x}} \geq (x-2)^0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [\frac{1}{2}, 2).\end{aligned}$$

i u ovom slučaju nema rešenja.

Iz 1) i 2) sledi da je rešenje nejednačine $x \in (2,3)$.

5. Rešiti nejednačinu

$$\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1.$$

Rešenje: Nejednačina je definisana za

$$x>0 \ \wedge \ x \neq 1 \ \wedge \ 4^x - 12 > 0 \ \wedge \ \log_2(4^x-12) > 0,$$

odnosno

$$x>0 \ \wedge \ x \neq 1 \ \wedge \ x > \log_4 12 \ \wedge \ x > \log_4 13,$$

tj. $x > \log_4 13$. Kako je $\log_4 13 > 1$, nejednačina je ekvivalentna sledećem izrazu:

$$\log_2(4^x - 12) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad 4^x - 12 \leq 2^x.$$

Uvodjenjem smene $2^x = t$, poslednji izraz postaje kvadratna nejednačina

$$t^2 - t - 12 \leq 0,$$

čije je rešenje $t \in [-3,4]$. Vraćanjem smene i primenom uslova definisanosti logaritma, rešenje zadatka je $x \in (\log_4 13, 2]$.

6. Rešiti jednačinu:

$$\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}.$$

Rešenje: Na osnovu osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, važi:

$$\begin{aligned}\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} &= \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right)\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) \\ &= \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1 = \sin \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2t^2 - t - 1 = 0 \ \wedge \ t = \sin \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad (t=1 \ \vee \ t = -\frac{1}{2}) \ \wedge \ t = \sin \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin \frac{x}{2} = 1 \ \vee \ \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pi + 4k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi, \in Z.\end{aligned}$$

7. Koordinate jednog temena jednakostraničnog trougla su $(-3, 3)$, a centra oko njega opisane kružnice $(-1, 1)$. Naći koordinate preostala dva temena tog trougla.

Rešenje: Neka su B, C i $A(-3, 3)$ temena datog trougla, i $P(-1, 1)$ centar opisane kružnice oko njega. Označimo sa $D(x_D, y_D)$ podnožje visine iz temena A na pravu BC. Kako je trougao jednakostraničan to je P i njegovo težiste, a D središte stranice BC. Dakle, $A - P - D$ i $|AP| = 2|PD|$ (tačka P deli duž AD u odnosu $2 : 1$). Odatle dobijamo $-1 = \dfrac{-3 + 2x_D}{3}$ i $1 = \dfrac{3 + 2y_D}{3}$, odnosno $x_D = y_D = 0$. Jednačina prave AD je $y = -x$, obzirom da ona sadrži tačke $A(-3, 3)$ i $P(-1, 1)$, te je njen koeficijent pravca $k_{AD} = -1$. Prava BC je normalna na AD te za njen koeficijent pravca k_{BC} važi $k_{AD}k_{BC} = -1$, tj. $k_{BC} = 1$. Kako je još tačka $D(0, 0)$ na toj pravoj sledi $(BC) : \ y = x$. Dužina visine $|AD|$ je $\sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, te su stranice datog trougla dužine $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot |AD| = 2\sqrt{6}$. Zato je $|BD| = |CD| = \frac{a}{2} = \sqrt{6}$, pa su temena B i C upravo one dve tačke prave BC čija je udaljenost od tačke D jednaka $\sqrt{6}$. Ako je $T(u, v)$ na pravoj BC i $|TD| = \sqrt{6}$, imamo $u = v$ i $\sqrt{2}|u| = \sqrt{6}$, tj. $u = \pm\sqrt{3}$. Dakle, preostala dva temena trougla su tačke sa koordinatama $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ i $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

8. Trougao $\triangle ABC$, kod koga je $\angle BAC = 90^\circ$ i $\angle BCA = 75^\circ$, rotira oko stranice AB. Ako je zapremina tako dobijene kupe $\dfrac{9\pi\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{8}$, naći dužinu hipotenuze datog pravouglog trougla.

Rešenje: Stavimo $r = |CA|$, $s = |CB|$ i $h = |AB|$. Kako je $\angle ABC = 15^\circ$, to je $r = s \sin 15^\circ$ i $h = s \cos 15^\circ$, te je zapremina dobijene kupe

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ)\frac{\sin 15^\circ}{2} \cdot s^3 = \frac{\pi}{3} \sin 30^\circ \frac{\sin 15^\circ}{2} \cdot s^3 = \frac{\pi\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{24} s^3,$$

s'obzirom da je $\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Iz uslova zadatka je $V = \frac{9\pi\sqrt{2-\sqrt{3}}}{8}$, pa sledi $s^3 = 27$, tj. dužina s hipotenuze datog trougla je 3.

9. Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvoju binoma $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ jednak je 153. Odrediti član koji ne sadrži x.

Rešenje: U razvoju binoma $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$, $x > 0$, $(k + 1)$-vi član je oblika

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} (\sqrt[5]{x^2})^{n-k} \left(-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^k = \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{\frac{2}{5}(n-k) - \frac{k}{6}}.$$

Kako je zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvoju našeg binoma 153, važi

$$153 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Pošto su $n_1 = 17$ i $n_2 = -18$ rešenja jednačine $n^2 + n - 306 = 0$, zaključujemo da je $n = 17$. Član koji ne sadrži x odredjujemo pomoću jednakosti $\frac{2}{5}(17 - k) - \frac{k}{6} = 0$ čije je rešenje $k = 12$, pa je traženi član

$$T_{13} = \binom{17}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{17!}{12!5!} \frac{1}{2^{12}} = \frac{17 \cdot 7 \cdot 13}{2^{10}} = \frac{1547}{2^{10}}.$$

10. Ako je zbir tri uzastopna člana nekog rastućeg aritmetičkog niza 36, a zbir njihovih kvadrata 482, odrediti te članove.

Rešenje: Neka su $x-d$, x i $x+d$ tri uzastopna člana rastućeg aritmetičkog niza. Kako je njihov zbir 36, a zbir njihovih kvadrata 482, važi

$$(x-d)+x+(x+d)=36$$

i

$$(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=482.$$

Prema tome, $x=12$ i

$$\begin{aligned}(12-d)^2+12^2+(12+d)^2=482 &\Leftrightarrow 144-24d+d^2+144+144+24d+d^2=482\\ &\Leftrightarrow 2d^2=50\\ &\Leftrightarrow d=5 \ \vee \ d=-5.\end{aligned}$$

Iz činjenice da je aritmetički niz rastući, sledi $d>0$, pa zaključujemo da je $d=5$. Dakle, traženi članovi su: 7, 12, 17.