Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

28.06.2017.

ZADACI SA REŠENJIMA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ~ JUN 2017.

1. Odrediti moduo kompleksnog broja

$$z = \frac{(1+i)^{100} - (1-i)^{98}}{(1+i)^{96} + (1-i)^{94}}.$$

Rešenje: Uočimo da važi $(1+i)^2 = 2i$ i $(1-i)^2 = -2i$. Tada je

$$(1+i)^{100} = 2^{50}i^{50} = 2^{50}(i^2)^{25} = 2^{50}(-1)^{25} = -2^{50} \quad \wedge \quad (1+i)^{96} = 2^{48}i^{48} = 2^{48}(i^2)^{24} = 2^{48};$$
$$(1-i)^{98} = (-2i)^{49} = -2^{49}(i^2)^{24}i = -2^{49}i \quad \wedge \quad (1-i)^{94} = -2^{47}i^{47} = -2^{47}(i^2)^{23}i = 2^{47}i.$$

Odatle sledi

$$z = \frac{-2^{50} + 2^{49}i}{2^{48} + 2^{47}i} = \frac{2^{49}(-2+i)}{2^{47}(2+i)} = 4\,\frac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 4\,\frac{-3+4i}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{16}{5}\,i.$$

Dakle,

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 4.$$

2. Ako je $x = 1 - 2i$ jedna nula polonoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 20$, naći ostale nule polinoma.
Rešenje: Kako je $x_1 = 1 - 2i$ jedna nula polonoma $P(x)$, druga nula polinoma je $x_2 = \overline{x_1} = 1 + 2i$. Prema tome,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 20 = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)Q(x) \\ &= \big((x-1)^2 - (2i)^2\big)Q(x) = (x^2 - 2x + 5)Q(x)\,. \end{aligned}$$

Deljenjem polinoma $P(x)$ sa $x^2 - 2x + 5$, dobija se $Q(x) = x^2 - 2x - 4$, čije su nule $x_3 = 1 - \sqrt{5}$, $x_4 = 1 + \sqrt{5}$.

3. Odrediti vrednosti parametra m za koje rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$x^2 - (m-2)x + m + 1 = 0$$

zadovoljavaju relaciju

$$\left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| < 2.$$

Rešenje: Oba rešenja moraju da budu različita od 0, odakle sledi $m \neq -1$. Primenom Vijetovih pravila, dobijamo

$$x_1 + x_2 = m - 2\ ,\ x_1x_2 = m + 1.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right| < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{m-2}{m+1}\right| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{m-2}{m+1} < 2. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} -2 < \frac{m-2}{m+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m-2}{m+1} + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3m}{m+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m \in D_1 = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{m-2}{m+1}<2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m-2}{m+1}-2<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-m-4}{m+1}<0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{m+4}{m+1}>0\\ &\Leftrightarrow \quad m\in D_2=(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty).\end{aligned}$$

Konačno, $m \in D_1 \cap D_2 = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

4. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x+1} \geq 5-x\,.$$

Rešenje: Oblast definisanosti date nejednačine je $\mathbb{D} = \{x \,:\, x \geq -1\}$. Data nejednačina je ekvivalentna sa

$$\Big(x+1\geq 0 \quad\wedge\quad 5-x<0\Big) \quad\vee\quad \Big(x+1\geq(5-x)^2 \quad\wedge\quad 5-x\geq 0\Big).$$

Skup rešenja nejednačina $x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad 5-x < 0$ je $x \in (5,\infty)$. Skup rešenje nejednačina $x+1 \geq (5-x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-11x+24 \leq 0$ i $5-x \geq 0$ je $x \in [3,8] \cap (-\infty,5]$, odnosno $x \in [3,5]$. Dakle, konačan skup rešenja je unija dva dobijena skupa rešenja, odnosno $x \in [3,\infty)$.

5. Rešiti nejednačinu

$$2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}>4.$$

Rešenje: Imamo da je

$$\begin{aligned}&2^{-2}\cdot 2^{3x}-2^{-3}\cdot 2^{3x}-2^{-4}\cdot 2^{3x}>2^2\\ &\quad\Leftrightarrow\; (2^{-2}-2^{-3}-2^{-4})\cdot 2^{3x}>2^2\\ &\quad\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)2^{3x}>2^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{16}\cdot 2^{3x}>2^2\\ &\quad\Leftrightarrow\; 2^{-4}\cdot 2^{3x}>2^2 \;\Leftrightarrow\; 2^{3x}>2^6 \;\Leftrightarrow\; 3x>6 \;\Leftrightarrow\; x>2.\end{aligned}$$

Prema tome, rešenje nejednačine je $x > 2$.

6. Rešiti jednačinu

$$\log_{x+3}(x^2-x-2)\cdot\log_x(x+3)=2.$$

Rešenje: Oblast definisanosti date jednačine je:

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \{x \,:\, x^2-x-2>0,\; x+3>0,\; x+3\neq 1,\; x>0,\; x\neq 1\}\\ &= \{x \,:\, (x<-1 \;\vee\; x>2) \;\wedge\; x>-3 \;\wedge\; x>0 \;\wedge\; x\neq -2 \;\wedge\; x\neq 1\}\,,\end{aligned}$$

odnosno

$$D=(-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(2,\infty)\,.$$

Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{\log_{x+3}(x^2-x-2)}{\log_{x+3}x}=\log_x(x^2-x-2)=2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=-2\,.$$

Kako $x = -2 \notin \mathbb{D}$, data jednačina nema rešenja.

7. Rešiti jednačinu

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}\,.$$

Rešenje: Jednačina ima smisla za $1+\cos x \neq 0$, odnosno $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x = (1+\cos x)\sin\frac{x}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = 0 \ \vee\ \cos\frac{x}{2} = 0 \ \vee\ \cos\frac{x}{2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2l\pi \ \vee\ x = \pi + 2m\pi \ \vee\ x = 4n\pi, \\
&\qquad\ \ l, m, n \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2l\pi \ \vee\ x = \pi + 2m\pi, \quad l, m \in Z.
\end{aligned}$$

Kako je $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, to sledi da je skup rešenja jednačine $x = 2l\pi$, $l \in Z$.

8. Izvodnica prave zarubljene kupe je $s = 5\,cm$, a poluprečnici osnova su $R = 5\,cm$ i $r = 1\,cm$. Izračunati poluprečnik osnove pravog valjka koji sa njom ima jednaku visinu i jednaku površinu omotača.

Rešenje: Površina omotača zarubljene kupe je

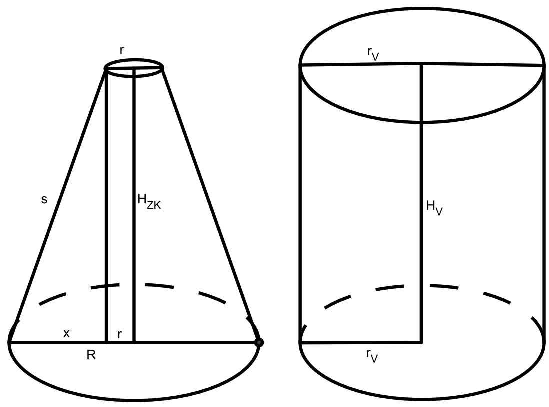
$$M_{ZK} = \pi(R+r)s = 30\pi.$$

Kako je $r + x = R$, imamo $x = 4$, pa je visina zarubljene kupe

$$H_{ZK} = \sqrt{s^2 - x^2} = 3.$$

Koristeći uslove $M_{ZK} = M_V$ i $H_{ZK} = H_V$ i da je površina omotača valjka $M_V = 2r_V\pi\, H_V$ dobijamo

$$r_V = \frac{M_{ZK}}{2\pi\, H_{ZK}} = \frac{30\pi}{2\cdot 3\,\pi} = 5.$$



9. Odrediti jednačine tangenata kruga $x^2+y^2+2x-4y = 10$ koje su paralelne sa pravom $x+2y+1 = 0$.

Rešenje: Uslov dodira prave $y = kx+n$ i kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$ je $r^2(k^2+1) = (kp-q+n)^2$. Dakle, zadata kružnica je oblika $(x+1)^2+(y-2)^2 = 15$, tako da je $p = -1$, a $q = 2$. Kako tražene tangente imaju isti koeficijent pravca kao zadata prava, to je $k = -\frac{1}{2}$. Na osnovu uslova dodira dobija se kvadratna jednačina $\frac{5^2\cdot 3}{2^2} = \left(-\frac{3}{2}+n\right)^2$, čija su rešenja $n = -\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$ i $n = \frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$. Jednačine traženih tangenata su

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \qquad \text{i} \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

10. Tri broja čije je zbir 63 su tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Ako se od prvog oduzme 7, od drugog 9, a od trećeg 5, dobijaju se tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odrediti te brojeve.

Rešenje: Neka su a, $a+d$ i $a+2d$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Na osnovu uslova zadatka, $3a+3d=63$, tako da je $a+d=21$. Dakle, članovi niza su a, 21 i $42-a$. Tada $a-7$, $21-9$ i $42-a-5$ čine tri uzastopna člana geometrijskog niza. Za tri uzastopna člana geomterijskog niza x, y i z važi $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$, tj. $xz=y^2$. Dakle, važi $(a-7)(37-a)=12^2=144$. Na taj način dobijamo kvadratnu jednačinu $a^2-44a+403=0$, čija su rešenja $a=31$ i $a=13$. Traženi članovi aritmetičkog niza su

$$31,\ 21,\ 11 \quad \text{i} \quad 13,\ 21,\ 29.$$