UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET **08.07.2014.**
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Odrediti vrednost izraza

$$A = \frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\Big[1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\Big]$$

ako je $x = (a-1)^{-1}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+\frac{1}{a+x}}{1-\frac{1}{a+x}} \cdot \Big(\frac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax}\Big) \\ &= \frac{a+x+1}{a+x-1} \cdot \frac{(a+x)^2-1}{2ax} \\ &= \frac{a+x+1}{a+x-1} \cdot \frac{(a+x-1)(a+x+1)}{2ax} \\ &= \frac{(a+x+1)^2}{2ax}. \end{aligned}$$

Za $x = (a-1)^{-1}$, izraz postaje

$$A = \frac{(a+\frac{1}{a-1}+1)^2}{\frac{2a}{a-1}} = \frac{(a(a-1)+1+(a-1))^2}{2a(a-1)} = \frac{a^3}{2(a-1)}.$$

■

2. Neka je $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odrediti:

(a) z_{2014};

(b) sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $z_n = 1$.

Rešenje:
(a) $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = (e^{\frac{\pi i}{3}})^n \implies z_{2014} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
(b) $z_n = 1 \iff 6 \mid n$. ■

3. Ako je ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + ax + b$ polinomom $Q(x) = x^2 - 4$ jednak 5, odrediti a i b.

Rešenje: Pošto je $P(x) = Q(x)S(x) + 5$, a $Q(x) = (x+2)(x-2)$, za $x = -2$, odnosno $x = 2$, dobijamo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 64 & - & 32 & - & 32 & + & 16 & - & 16 & - & 2a & + & b & = & 5 \\ 64 & + & 32 & - & 32 & - & 16 & - & 16 & + & 2a & + & b & = & 5. \end{array}$$

Stoga je $a = -8$ i $b = -11$. ■

4. Rešiti jednačinu
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

Rešenje: Rešenja tražimo u intervalu $x \in [1,+\infty)$. Kako je

$$\sqrt{1-2\sqrt{x-1}+x-1}+\sqrt{4-4\sqrt{x-1}+x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}=1,$$

početna jednačina je ekvivalentna sledećoj jednačini;

$$|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}-2|=1.$$

Kako je

$$|\sqrt{x-1}-1|=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1, & x\geq 2\\ 1-\sqrt{x-1}, & x<2,\end{cases}$$

i

$$|\sqrt{x-1}-2|=\begin{cases}\sqrt{x-1}-2, & x\geq 5\\ 2-\sqrt{x-1}, & x<5,\end{cases}$$

to se jednačina rešava na tri intervala.

1) Za $1 \leq x < 2$,

$$\begin{aligned}&1-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}=1\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2\\ &\Leftrightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2.\end{aligned}$$

Kako $x = 2$ ne pripada skupu $[1, 2)$, jednačina u ovom slučaju nema rešenja.

2) Za $x \in [2, 5)$,

$$\begin{aligned}&\sqrt{x-1}-1+2-\sqrt{x-1}=1\\ &\Rightarrow 1=1.\end{aligned}$$

Svako x intervala $[2, 5)$ je rešenje jednačine.

3) Za $x \geq 5$,

$$\begin{aligned}&\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}-2=1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\\ &\Leftrightarrow x=5.\end{aligned}$$

Rešenje jednačine je unija rešenja u sva tri slučaja, tj. $x \in [2, 5]$. ■

5. Odrediti parametar m tako da zbir kvadrata rešenja jednačine $x^2 - mx + m - 1 = 0$ bude minimalan.

Rešenje: Primenom Vijetovih formula iz date jednačine, imamo $x_1 + x_2 = m$ i $x_1 \cdot x_2 = m - 1$. Dakle,
$$f(m)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2m+2.$$
Funkcija ima minimum u temenu parabole $T\Big(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\Big)$, tj. za $m = 1$. ■

6. Rešiti nejednačinu

$$\log_2(x^2 - x - 6) + \log_{0.5}(x^2 - 4x - 12) \leq 2.$$

Rešenje: Nejednačina je definisana za $x^2 - x - 6 > 0$ i $x^2 - 4x - 12 > 0$, tj. za $x \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$. Nejednačina je ekvivalentna sledećem izrazu:

$$\begin{aligned}
&\log_2(x^2 - x - 6) - \log_2(x^2 - 4x - 12) \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x - 12} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x - 12} \leq 2^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x + 14}{x^2 - 4x - 12} \leq 0 \\
&\Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [7, \infty).
\end{aligned}$$

Iz uslova definisanosti logaritma sledi da je rešenje nejednačine $x \in (-\infty, -2) \cup [7, \infty)$. ■

7. Rešiti jednačinu

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\cos 4x + 2\cos^2 x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - 1 + 2\frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos 2x = -1 \quad \vee \quad \cos 2x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

8. Data je prava $(p) : 4x + 6y = 1990$ i parabola $(P) : y^2 = 4x$. Odrediti uzajamno normalne tangente parabole, od kojih je jedna paralelna datoj pravoj.

Rešenje: Uslov dodira prave $y = kx + n$ i parabole $(P) : y^2 = 2px$ je $p = 2kn$, u našem slučaju je to $1 = kn$. Dakle, za tangente $(t_1) : y = k_1x + n_1$, $\quad (t_2) : y = k_2x + n_2$, važe uslovi $k_1n_1 = 1$ i $k_2n_2 = 1$.

Jednačina prave p se može predstaviti u obliku

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{995}{3}.$$

Ako je $t_1 \parallel p$, tada je $k_1 = -\frac{2}{3}$, dok se iz uslova $t_1 \perp t_2$ zaključuje da je $k_1k_2 = -1$, odnosno da je $k_2 = \frac{3}{2}$. Kako je $n_1 = \frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}$ i $n_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{2}{3}$, jednačine tangenti su

$$(t_1) : y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}, \quad (t_2) : y = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}.$$

■

9. Prav valjak i kupa imaju zajedničku osnovu, a vrh kupe nalazi se u središtu druge osnove valjka. Odrediti ugao izmedju izvodnice kupe i ose valjka, ako je odnos površine valjka i kupe 7:4.

Rešenje: Neka je R poluprečnik osnove i H visina kupe i valjka. Tada je odnos površina

$$\frac{P_V}{P_K} = \frac{2R^2\pi + 2R\pi H}{R\pi\sqrt{R^2+H^2} + R^2\pi} = \frac{7}{4}.$$

Sredjivanjem, dobijamo

$$\begin{aligned}
&8R^2 + 8RH = 7R\sqrt{R^2+H^2} + 7R^2\\
&R + 8H = 7\sqrt{R^2+H^2} \nearrow^2\\
&R^2 + 16RH + 64H^2 = 49(R^2+H^2)\\
&48R^2 - 16RH - 15H^2 = 0 / : H^2\\
&48\left(\frac{R}{H}\right)^2 - 16\left(\frac{R}{H}\right) - 15 = 0.
\end{aligned}$$

Rešenja su: $\frac{R}{H} = \frac{3}{4}$ i $\frac{R}{H} = -\frac{5}{12}$. Kako je $\tan\alpha = \frac{R}{H} > 0$, to je $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$. ■

10. Dat je niz brojeva $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_4 = 11$, $a_5 = 18, \ldots$, takav da razlike njegovih uzastopnih članova obrazuju aritmetički niz. Odrediti a_{500}.

Rešenje: Neka je aritmetički niz sa opštim članom b_n, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $a_5 - a_4 = b_4 = 7$ i $b_4 = b_1 + 3d$, zaključujemo da je razlika uzastopnih članova aritmatičkog niza $d = 2$. Imamo da je:

$$\begin{aligned}
&a_2 - a_1 = 1 = b_1;\\
&a_3 - a_2 = 3 = b_2;\\
&a_4 - a_3 = 5 = b_3;\\
&\ldots\\
&a_{500} - a_{499} = 2\cdot 499 - 1 = 997 = b_{499}.
\end{aligned}$$

Sabiranjem levih i desnih strana jednakosti imamo

$$a_{500} - a_1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 997 = 499^2.$$

Dakle, $a_{500} = 2 + 499^2 = 249003$. ■

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$