# REŠENJA

**1.** Opšti član geometrijskog niza je $aq^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Iz uslova da je svaki član dva puta manji od sume narednih članova, dobijamo da je $q < 1$ (da bi suma postojala)

$$2aq^k = aq^{k+1} + aq^{k+2} + \ldots = aq^{k+1}(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{aq^{k+1}}{1-q}$$

odakle sledi

$$\frac{q}{1-q} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{2}{3}$$

Kako je peti član niza jednak $a\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16$ dobijamo da je $a = 3^4 = 81$. Dakle, traženi niz je

$$a_k = 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

**2.** Primenom Vijetovih formula dobijamo

$$x_1 + x_2 = m - 1, \qquad x_1 x_2 = \frac{m^2 + 2}{3}$$

pa je

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \\ &= (m-1)((m-1)^2 - (m^2+2)) = 1 + m - 2m^2 \end{aligned}$$

Po uslovu zadatka je $x_1^3 + x_2^3 = -2$ odakle dobijamo

$$2m^2 - m - 3 = 0, \qquad m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}.$$

odnosno $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{3}{2}$.

**3.** Koristeći formulu za zbir trećih stepena realnih brojeva $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, kao i izraz za sinus dvostrukog ugla $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, levu stranu jednačine možemo da zapišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) \end{aligned}$$

Prema tome, polazna jednačina je ekvivalentna sa

$$(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

odnosno

$$(\sin x + \cos x - 1)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0.$$

Pošto je $1 - \frac{1}{2}\sin 2x > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ ($\sin 2x < 1$), sledi da je

$$\sin x + \cos x - 1 = 0.$$

Ova jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sin x\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj.

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odakle dobijamo da je

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, konačno

$$x = 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**4.** Leva strana jednačine sadrži $\log_4 x$ i definisana je za $x > 0$. Ukoliko na obe strane jednačine primenimo $\log_4$ i iskoristimo osnovna svojstva logaritma dobijamo:

$$(2 + \log_4 x)\log_4 x = \log_4(4x)$$

odnosno

$$(2 + \log_4 x)\log_4 x = 1 + \log_4 x.$$

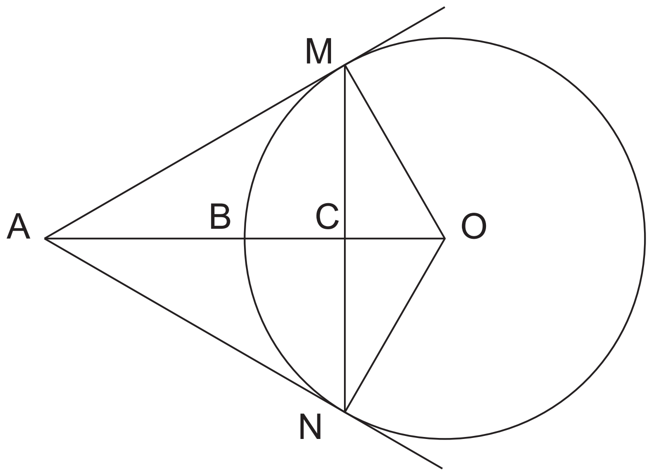
Uvodjenjem smene $t = \log_4 x$ i sredjivanjem izraza dobijamo jednačinu

$$t^2 + t - 1 = 0$$

čija su rešenja: $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Prema tome, rešenja polazne jednačine su

$$x_1 = 4^{t_1} = 4^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad x_2 = 4^{t_2} = 4^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

**5.** Posmatramo projekciju date lopte i izvora svetlosti na ravan. Neka su oznake uvedene kao na slici 1.
Da bismo izračunali visinu kalote h (odnosno duž BC - pogledaj sliku) posmatrajmo najpre trougao $\Delta AOM$. Trougao $\Delta AOM$ je pravougli, pa je $|AM|^2 + |MO|^2 = |AO|^2$ i $|MO| = 2$, $|AO| = 4$, pa je $|AM| = 2\sqrt{3}$.




Slika 1: Zadatak 5

Površina trougla $\Delta AOM$ je, s' jedne strane $P_{\Delta AOM} = |AM||MO|/2$, a s' druge strane $P_{\Delta AOM} = |AO||CM|/2$. Odatle dobijamo da je

$$|CM| = |AM||MO|/|AO| = 2\sqrt{3} \cdot 2/4 = \sqrt{3}.$$

Daljom primenom Pitagorine teoreme imamo da je

$$|CO|^2 = |OM|^2 - |CM|^2 = 1,$$

pa dobijamo

$$h = |BC| = |BO| - |CO| = 1.$$

Dakle, površina osvetljenog dela je $P = 2\pi Rh = 4\pi m^2$.

**6.** Neka su $A(x_1, y_1) \in p_1$ i $B(x_2, y_2) \in p_2$ tačke pravih $p_1$ i $p_2$ redom za koje je tačka $P(0,1)$ središte duži $AB$. Tada njihove koordinate zadovoljavaju sledeće uslove

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3y_1 & = & -10 \\ 2x_2 & + & y_2 & = & 8 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ y_1 & + & y_2 & = & 2 \end{array}$$

Rešenje ovog sistema je $x_1 = -4$, $y_1 = 2$, $x_2 = 4$ i $y_2 = 0$.
Jednačina prave kroz tačke $(-4, 2)$ i $(4, 0)$ je

$$y = -\frac{x}{4} + 1.$$