UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU 01.07.2021.

ZADACI SA REŠENJIMA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

1. Ako je $a \neq b$, $a \neq -b$ i $a^2 - ab + b^2 \neq 0$, uprostiti izraz:

$$A = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}\right).$$

Rešenje: Važi

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a^2 - ab + b^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\right) \\
&= \frac{a^2 - ab + b^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2) - (a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \\
&= \frac{(a^2-ab+b^2)(a-b)(-2ab)}{(a-b)(a+b)^2(a^2-ab+b^2)} \\
&= -\frac{2ab}{(a+b)^2}.
\end{aligned}$$

2. Odrediti moduo kompleksnog broja z ako je

$$z = \frac{(1+i)^{2020} + (1-i)^{2021}}{(1+i)^{2022} - (1-i)^{2020}}.$$

Rešenje: Uočimo da je

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2020} &= ((1+i)^4)^{505} = (-4)^{505} = -2^{1010} \\
(1+i)^{2022} &= (1+i)^{2020} \cdot (1+i)^2 = -2^{1010} \cdot 2i = -2^{1011} i \\
(1-i)^{2020} &= ((1-i)^4)^{505} = (-4)^{505} = -2^{1010} \\
(1-i)^{2021} &= (1-i)^{2020} \cdot (1-i) = -2^{1010}(1-i).
\end{aligned}$$

Zamenom u početni izraz, dobijamo:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(1+i)^{2020} + (1-i)^{2021}}{(1+i)^{2022} - (1-i)^{2020}} \\
&= \frac{-2^{1010} - 2^{1010}(1-i)}{-2^{1011} i + 2^{1010}} \\
&= \frac{-2+i}{-2i+1} \\
&= \frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\
&= \frac{-4-3i}{5}.
\end{aligned}$$

Dakle, moduo broja z je jednak jedan.
Zadatak se može rešiti i predstavljanjem kompleksnih brojeva u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku.

3. Za koje vrednosti parametra m je zbir kvadrata rešenja jednačine

$$x^2 + (m+1)x - m^2 = 1010$$

manji od 2021?

Rešenje: Za rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$x^2 + (m+1)x - m^2 - 1010 = 0$$

važi, na osnovu Vijetovih formula, da je $x_1 + x_2 = -(m+1)$ i $x_1x_2 = -m^2 - 1010$. Kako je $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$, uslov zadatka $x_1^2 + x_2^2 < 2021$ se može transformisati u

$$(m+1)^2 - 2(-m^2 - 1010) < 2021.$$

Odnosno, $3m^2 + 2m < 0 \Leftrightarrow m(3m+2) < 0$. Tražene vrednosti parametra m su $-\frac{2}{3} < m < 0$.

4. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3} > 0.$$

Rešenje: Imenilac $x^2 - 2x - 3$ se može rastaviti na činioce kao $(x+1)(x-3)$. Oblast definisanosti nejednačine je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Znak brojioca i imenioca utvrđujemo iz tabele

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Skup rešenja nejednačine je $(-1, 1) \cup (3, \infty)$.

5. Rešiti jednačinu:

$$15 \cdot 9^x - 34 \cdot 15^x + 15 \cdot 25^x = 0.$$

Rešenje: Polazna jednačina je ekvivalentna sa $15 \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^2 - 34 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 15 = 0$. Oblast definisanosti je skup realnih brojeva. Nakon uvođenja smene $t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, dobija se kvadratna jednačina $15t^2 - 34t + 15 = 0$, čijim se rešavanjem dolazi do dve mogućnosti $t = \frac{3}{5}$ ili $t = \frac{5}{3}$. Rešenja polazne jednačine su $x = 1$ i $x = -1$.

6. Rešiti jednačinu:

$$\log_{x+1}(x^3 - 1) \log_{x^2+x+1}(x+1) = 1.$$

Rešenje: Oblast definisanosti logaritamske jednačine je

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > 0 \land x^3 - 1 > 0 \land x^2 + x + 1 > 0 \land x + 1 \neq 1 \land x^2 + x + 1 \neq 1\} \\ &= (1, \infty). \end{aligned}$$

Korišćenjem osobina $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$ i $\log_a cd = \log_a c + \log_a d$, za $a, b, c, d \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dobija se

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(x^3 - 1) \log_{x^2+x+1}(x+1) &= \frac{\log_{x+1}(x^3 - 1)}{\log_{x+1}(x^2 + x + 1)} \\ &= \log_{x^2+x+1}(x-1)(x^2 + x + 1) \\ &= \log_{x^2+x+1}(x-1) + 1. \end{aligned}$$

Stoga je polazna jednačina ekvivalenta sa $\log_{x^2+x+1}(x-1) = 0$, $x \in D$. Dakle, $x - 1 = 1$, odnosno $x = 2$

7. Rešiti jednačinu:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}.$$

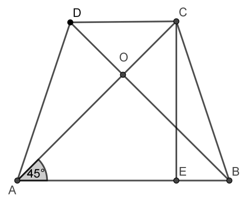
Rešenje: Prethodna jednačina može biti napisana u ekvivalentnom obliku $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$. Kako je $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, to je $\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = 1$. Na osnovu formule $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, sledi

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Rešenje poslednje jednačine je

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. Dužina dijagonale jednakokrakog trapeza je 12cm, a ugao između dijagonale i veće osnovice je $45°$. Odrediti površinu trapeza.



Rešenje: Neka je O presek dijagonala trapeza i E podnožje visine trapeza u tački C. Pošto je trougao $\triangle AEC$ jednakokrako-pravougli sa hipotenuzom dužine 12cm, visina trapeza $\overline{CE}$ je jednaka $6\sqrt{2}$cm. Uz to je i

$$\overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = \overline{AB} - \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2},$$

pa je površina trapeza $P = \frac{(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{CE}}{2} = 72\text{cm}^2$.

9. Date su tačke u ravni: $A(1,1)$, $B(5,3)$ i $C(3,-3)$. Odrediti jednačine pravih koje sadrže težišne duži trougla $\triangle ABC$, kao i koordinate težišta T ovog trougla.

Rešenje: Ako su date tačke u ravni $X(x_1,x_2)$, $Y(y_1,y_2)$ i $Z(z_1,z_2)$, onda je sredina duži $\overline{XY}$ tačka $Z_1\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)$, a težište trougla $\triangle XYZ$ je tačka $T\left(\frac{x_1+y_1+z_1}{3}, \frac{x_2+y_2+z_2}{3}\right)$. Tačka $A_1(4,0)$ je sredina duži $\overline{BC}$, tačka $B_1(2,-1)$ sredina duži $\overline{AC}$ i tačka $C_1(3,2)$ sredina duži $\overline{AB}$.
Jednačina prave koja sadrži težišnu duž $\overline{AA_1}$ je $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.
Jednačina prave koja sadrži težišnu duž $\overline{BB_1}$ je $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$.
Jednačina prave koja sadrži težišnu duž $\overline{CC_1}$ je $x = 3$.
Težište trougla $\triangle ABC$ je $T\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Do koordinata težišta možemo doći i nalaženjem preseka bilo koje dve prave koje sadrže težišne duži trougla $\triangle ABC$.

10. Zbir prvih deset članova aritmetičkog niza je tri puta manji od zbira sledećih deset članova niza. Ako je $a_1 = 1$, odrediti a_{2021}.

Rešenje: Zbir prvih n članova aritmetičkog niza je $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$. Stoga je $S_{20} = 20a_1 + 190d$ i $S_{10} = 10a_1 + 45d$. Iz uslova zadatka je $S_{20} - S_{10} = 3S_{10}$, odakle sledi

$$\begin{aligned} & S_{20} = 4S_{10} \\ \Leftrightarrow\ & 20a_1 + 190d = 40a_1 + 180d \\ \Leftrightarrow\ & 10d = 20a_1. \end{aligned}$$

Uzevši u obzir da je $a_1 = 1$, imamo $d = 2$. Dakle, $a_{2021} = a_1 + 2020d = 4041$.