Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Matematika i informatika 1 (1-2) (2008), 41-50

Kardinalni brojevi i Lebegova mera

Dragan S. Đorđević

U ovom radu prikazujemo razliku između brojanja i merenja beskonačnih skupova. Pitanje koje razmatramo jeste sledeće: zašto tačka na pravoj ima dužinu jednaku nuli, a prava ima dužinu jednaku beskonačnosti, iako je prava sastavljena od tačaka? Ne dajemo matematički potpuno korektan odgovor na postavljeno pitanje, već predstavljamo čitaocu intuitivno (nadamo se i razumljivo) shvatanje kardinalnih brojeva i Lebegove mere. Kardinalni brojevi i Lebegova mera upravo vode do odgovora na prethodno pitanje.

1. Preslikavanja i konačni skupovi

Zasnivanje matematike kao nauke podleže određnom sistemu aksioma. Aksiome su tvrđenja - postulati, koja se unapred uzimaju kao tačna. Pored aksioma, postoje i pravila dokazivanja, na osnovu kojih slede teoreme, odnosno tvrđenja koja se mogu dokazati na osnovu pretpostavljenih aksioma. Na ovaj način se izgrađuje matematika kao logička teorija.

Jedan sistem aksioma opisuje skupove, kao osnovne objekte u matematici. Nije jednostavno odabrati koja tvrđenja će biti proglašena aksiomama. Za to je potrebno ogromno iskustvo i poznavanje matematike kao celine. Ako se opredelimo za izvestan broj aksioma, onda se logično nameće činjenica da promena neke aksiome dovodi do promene čitave teorije. Najraširenija teorija aksiomatskog zasnivanja skupova i matematike jeste ZFC (sistem aksioma Zermela i Frenkela, kome je pridodata aksioma izbora). Nećemo detaljno obrazložiti teoriju ZFC, već na jednostavnom primeru ilustrujemo potrebu za strogim zasnivanjem matematike. Svaka teorija skupova pretpostavlja postojanje odnosa $\in$ i $=$. Ako skup X sadrži skup A kao svoj element, onda se ova činjenica označava sa $A \in X$. Skupovi A i B su jednaki, ako imaju iste elemente, što se označava sa $A = B$.

Raselov paradoks. Neka je $X = \{A : A \text{ je skup i } A \notin A\}$. Da li je $X \in X$, ili $X \notin X$?

Odgovor. Pretpostavimo da je $X \in X$. Skup X sadrži u sebi samo one moguće skupove A sa svojstvom $A \notin A$. Dakle, i X mora imati ovo svojstvo, odnosno $X \notin X$. Sledi da je nemoguće $X \in X$.

Pretpostavimo da je $X \notin X$. Skup X sadrži sve skupove A sa svojstvom $A \notin A$, odakle sledi $X \in X$. Dakle, nije moguće $X \notin X$. $\square$.

Odgovor na ovaj paradoks leži upravo u sistemu ZFC. Precizno, sistem aksioma ZFC ima za posledicu da za svaki skup A važi $A \notin A$. Prema tome, skup X opisan u Raselovom paradoksu, bi morao kao svoje elemente da sadrži sve moguće skupove A. Ako bi X bio skup, onda bi moralo važiti $X \in X$ (jer X sadrži sve skupove). Pošto je uvek $X \notin X$, onda kao zaključak sledi da X nije skup.

Takođe sledi da *ne postoji skup svih skupova*.

Prelazimo sada na glavnu temu ovog izlaganja. Brojanje elemenata konačnog skupa je jednostavno. Takođe, principi merenja, iskazani na konačnim skupovima, jesu jednostavni. Na primer, ako raspolažemo sa dva tega, čije su mase 3kg i 5kg, onda je njihova ukupna masa 8kg. Do suštinskih razlika dolazi u slučaju kada treba prebrojati, ili pak izmeriti u izvesnom smislu, beskonačne skupove.

Brojanje, preciznije upoređivanje broja elemenata skupova, formalno se istražuje korišćenjem preslikavanja koja poseduju neke osobine.

Neka su X i Y prozivoljni skupovi. Preslikavanje $f : X \to Y$ je "jedan-jedan" (injekcija), ako za svaka dva elementa $x_1, x_2 \in X$, iz $x_1 \neq x_2$ sledi da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekvivalentno prethodnom, preslikavanje $f : X \to Y$ je "jedan-jedan", ako za svako $x_1, x_2 \in X$, iz $f(x_1) = f(x_2)$ sledi $x_1 = x_2$.

Preslikavanje $f : X \to Y$ je preslikavanje "na" (surjekcija), ako za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$, tako da je $f(x) = y$.

Na kraju, preslikavanje $f : X \to Y$ je bijekcija, ako je f preslikavnje injekcija i surjekcija. Poznato je da ako je $f : X \to Y$ bijekcija, onda postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$ koje je takođe bijekcija.

Ako je A konačan skup, tada je sa $|A|$ označen broj elemenata skupa A. U ovom slučaju je $|A|$ prirodan broj. Ako je i B neki konačan skup, tada se prirodni brojevi $|A|$ i $|B$ mogu uporedti. Praktično, jasna je procedura na osnovu koje se utvrđuje jedna od sledećih činjenica: $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, ili $|A| > |B|$.

Upoređivanje broja elemenata konačnih skupova je u bliskoj vezi sa postojanjem injekcija, surjekcija ili bijekcija između tih skupova.

Pretpostavimo da su A i B konačni skupovi i preslikavanje $f : A \to B$ je injekcija, koje nije bijekcija. Lako je utvrditi da je tada $|A| < |B|$. Obrnuto, ako je $|A| < |B|$, tada postoji injekcija $f_1 : A \to B$ i f_1 nije bijekcija

Neka su C i D konačni skupovi. Ako je $g : C \to D$ surjekcija i g nije bijekcija, tada je $|C| > |D|$. Sa druge strane, ako je $|C| > |D|$, tada postoji surjekcija $g_1 : C \to D$ i g_1 nije bijekcija.

Posebno, lako je proveriti sledeći rezultat:

Teorema 1.1. Neka su A i B konačni skupovi. Tada je $|A| = |B|$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

2. Upoređivanje beskonačnih skupova

U slučaju beskonačnih skupova, nije trivijalno utvrditi koji skup ima više elemenata. Na osnovu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, čini se prirodnim zaključak da celih brojeva ima "više" nego prirodnih. Međutim, ovakav način upoređivanja broja elemenata ne dovodi do rezultata ako se postavi pitanje da li ima više racionalnih, ili iracionalnih brojeva. Drugo zanimljivo pitanje je da li ima više realnih brojeva, ili polinoma sa racionalnim koeficijentima. Prema tome, zaključak o utvrđivanju brojnosti elemenata nekog skupa, na osnovu eventualnog postojanja relacije $\subset$ među tim skupovima, ne daje dobre rezultate. Razlog je očigledan: mnogi skupovi su neuporedivi u smislu relacije $\subset$.

Ideja za upoređvinje beskonačnih skupova po brojnosti dolazi upravo iz Teoreme 1.1.

Definicija 2.1. Skupovi A i B su iste brojnosti (kardinalnosti), ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Na osnovu Teoreme 1.1., prethodna Definicija 2.1. je potpuno ispravna u slučaju konačnih skupova. U sledećim primerima posmatramo šta se dešava sa beskonačnim skupovima.

Primer 2.1. Kardinalnost skupa $\mathbb{N}$ jednaka je kardinalnosti skupa $2\mathbb{N}$. Drugim rečima, brojnost skupa prirodnih brojeva jednaka je brojnosti skupa svih parnih brojeva.

Dokaz. Da bi proverili tvrđenje, posmatramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, definisano kao $f(n) = 2n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Lako je proveriti da je f bijekcija. $\square$

Primer 2.2. Kardinalnost skupa $\mathbb{N}$ jednaka je kardinalnosti skupa $\mathbb{Z}$.

Dokaz. Dovoljno je poređati skup $\mathbb{Z}$ u niz, tako da je potpuno jasno koji je elemenat niza prvi, koji je drugi, i tako redom. Skup $\mathbb{Z}$ ređamo u niz na sledeći način:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Formalno, sada je moguće definisati preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ na sledeći način: $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, itd. Očigledno, f je bijekcija iz skupa $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{Z}$. $\square$

Ubuduće se zadovoljavamo ređanjem elemenata nekog skupa A u niz, bez formalne konstrukcije bijecije $f : \mathbb{N} \to A$.

Primer 2.3. Kardinalnost skupa $\mathbb{N}$ jednaka je kardinalnosti skupa $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Posmatrajmo trougaonu šemu brojeva

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Na ovaj način racionalni brojevi iz intervala $(0,1)$ su poređani u niz

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots,$$

pri čemu jednostavno preskočimo neki broj iz trougaone šeme, ako se taj broj ranije javlja u nizu. Prema tome, postoji bijekcija iz skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. $\square$

Primer 2.4. Skup svih pozitivnih racionalnih brojeva ima istu kardinalnost ka skup $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ i $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q} \cap (1,+\infty)$. Prema prethodnom primeru skup $\mathbb{Q}_1$ ima istu kardinalnost kao skup $\mathbb{N}$, te se može poređati u niz, recimo $\mathbb{Q}_1 = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Funkcija $F : \mathbb{Q}_1 \to \mathbb{Q}_2$, definisana kao $f(q) = \dfrac{1}{q}$ za $q \in \mathbb{Q}_1$, je očigledno bijekcija! Sledi da je $\mathbb{Q}_2 = \left\{\dfrac{1}{q_1}, \dfrac{1}{q_2}, \dfrac{1}{q_3}, \ldots\right\}$. Skup pozitivnih racionalnih brojeva se onda ređa u niz na sledeći način

$$1, q_1, \frac{1}{q_1}, q_2, \frac{1}{q_2}, q_3, \frac{1}{q_3}, \ldots$$

Time je dokazano da skup pozitivnih racionalnih brojeva ima istu kardinalnost kao skup $\mathbb{N}$. $\square$

Primer 2.5. Skup $\mathbb{Q}$ ima istu kardinalnost kao skup $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Tada je skup svih racionalnih brojeva predstavljen kao

$$\mathbb{Q} = \{0, s_1, -s_1, s_2, -s_2, \ldots\}. \quad \square$$

Prethodni primeri ne treba da sugerišu zaključak da svi beskonačni skupovi imaju istu kardinalnost kao i skup $\mathbb{N}$.

Primer 2.6. Skup $(0,1)$ nema istu kardinalnost kao skup $\mathbb{N}$.

Dokaz. U ovom primeru potrebno je primetiti da svaki realan broj $x \in (0,1)$ ima decimalan zapis, koji je eventualno beskonačan. Pri tome, nije dozvoljeno da se neki broj završava sa beskonačno mnogo cifara 9 na kraju. Na primer,

$$0,19999\ldots = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = 0,2.$$

Pretpostavimo da se elementi skupa $(0,1)$ mogu poređati u niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Tada je

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}\ldots, \\ x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}\ldots, \\ x_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}\ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Neka je $y_i = \begin{cases} 1, & x_{ii} \neq 1 \\ 0, & x_{ii} = 1. \end{cases}$ Tada je $y = 0, y_1y_2\ldots \in (0,1)$ i očigledno $y \neq x_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Pronašli smo broj $y \in (0,1)$ koji nije sadržan u prethodnom nizu! Prema tome, nije moguće elemente skupa $(0,1)$ poređati u niz, što znači da skupovi $(0,1)$ i $\mathbb{N}$ nemaju istu kardinalnost. $\square$

Postupak, iskorišćen u prethodnom primeru, naziva se Kantorov dijagonalni metod.

Primer 2.7. Skupovi $(0,1)$ i $\mathbb{R}$ imaju istu kardinalnost.

Dokaz. Funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} x$ je bijekcija iz skupa $(-\pi/2, \pi/2)$ na skup $\mathbb{R}$, te je funkcija $x \mapsto \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ bijekcija iz skupa $(0,1)$ na skup $\mathbb{R}$. Time je dokazano $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Kardinalnost skupa $\mathbb{N}$ označava se sa $\aleph_0$ i čita *alef-nula*.

Definicija 2.2. Skup A je prebrojiv, ako je $|A| = \aleph_0$.

Na osnovu prethodnog, skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ su prebrojivi. Skup A je najviše prebrojiv, ako je A konačan ili prebrojiv.

Sa druge strane, skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. Skup $\mathbb{R}$ ima kardinalnost kontinuuma, u oznaci $|\mathbb{R}| = c (= \aleph_1)$.

Nije teško dokazati osnovne osobine kardinalnosti.

Teorema 2.1. Neka su A i B prozivoljni skupovi. Tada je $|A| = |A|$. Ako je $|A| = |B|$, tada je $|B| = |A|$.

Dokaz. Neka je A proizvoljan skup i $I : A \to A$ identičko preslikavanje. Tada je I bijekcija, odakle sledi $|A| = |A|$.

Dalje, ako je B neki drugi skup i $f : A \to B$ bijekcija, tada je $f^{-1} : B \to A$ takođe bijekcija. Prema tome, važi implikacija: iz $|A| = |B|$ sledi $|B| = |A$. $\square$

Teorema 2.2. Neka su skupovi A i B iste kardinalnosti, i neka su skupovi B i C iste kardinalnosti. Tada su skupovi A i C iste kardinalnosti.

Dokaz. Iz činjenice $|A| = |B|$ sledi da postoji bijekcija $f : A \to B$. Iz činjenice $|B| = |C|$ sledi da postoji bijekcija $g : B \to C$. Nije teško proveriti da je $h = g \circ f : A \to C$ bijekcija, što povlači $|A| = |C|$. $\square$

Prethodne dve teoreme sugerišu da bi se za svojstvo "iste kradinalnosti“ moglo reći da je relacija ekvivalencije na familiji svih skupova, iako familija svih skupova u stvari nije skup!

Ako je A proizvoljan skup, tada se $|A|$ naziva *kardinalni broj* skupa A. Ako je A konačan skup, tada je $|A|$ upravo broj elemenata skupa A.

Moguće je upoređivanje kardinalnih brojeva.

Definicija 2.3. Neka su A i B skupovi. Ako postoji injekcija $g : A \to B$, tada je $|A| \leq |B|$.

Sledeći rezultat je netrivijalan, i dokaz ovog tvrđenja prevazilazi domen sadašnjeg izlaganja.

Teorema 2.3. (Kantor-Bernštajn) Ako je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, tada je $|A| = |B|$.

Neka su A i B skupovi sa svojstvom $A \subset B$. Neka je preslikavanje $J : A \to B$ definisano kao $J(x) = x$ za svako $x \in A$. Preslikavanje J je prirodna inkluzija iz skupa A u skup B. Očigledno, J je injekcija. Prema tome, ako je $A \subset B$, tada je $|A| \leq |B|$.

Na osnovu prethodnog sledi procena:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|.$$

Posebno je pitanje da li postoji neki skup A, za koji važi $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$? Poznata je *hipoteza kontinuuma* koja tvrdi da ovakav skup A ne postoji. Veoma je interesantno reći nešto više o hipotezi kontinuuma. Sistem aksioma ZFC je takav, da se ne može dokazati hipoteza kontinuuma, a takođe se ne može dokazati ni negacija hipoteze kontinuuma. Veliki deo matematike se ne oslanja na hipotezu kontinuuma, tako da ovaj nedostatak teorije ZFC ne predstavlja prepreku za razvoj matematike. Štaviše, postoje paralelne matematičke teorije: jedna teorija u sebi sadrži hipotezu kontinuuma kao svoju aksiomu, dok druga teorija kao aksiomu sadrži negaciju hipoteze kontinuuma.

3. Lebegova mera

U ovom delu posvetićemo pažnju metodama merenja. Sistem aksioma kojima se opisuju principi merenja skupova, je relativno jednostavan. Ovaj sistem aksioma se može primeniti na merenje uopšte (mase, dužine, površine, zapremine, i još mnogo drugih veličina). U sadašnjem izlaganju ograničavamo se na merenje dužine na pravoj, odnosno u skupu $\mathbb{R}$.

Sa $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ je označen skup svih podskupova od $\mathbb{R}$.

Definicija 3.1. Neka je $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Tada je $\mathcal{M}$ jedna σ-algebra, ako važe svojstva:

1) $\emptyset \in \mathcal{M}$;
2) Ako je $A \in \mathcal{M}$, tada je $\mathbb{R} \setminus A = A^c \in \mathcal{M}$;
3) Ako je $A_n \in \mathcal{M}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$;
4) $(a, b) \in \mathcal{M}$ za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

Na skupu $\mathbb{R}$ može biti više različitih σ-algebri. Jedna takva σ-algebra je skup $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Na osnovu svojstva 1) i 2) prethodne definicije, sledi da $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ za svaku σ-algebru $\mathcal{M}$.

Na osnovu pravila $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, kao i

$$\bigcap_n A_n = \left(\bigcup_n A_n^c \right)^c,$$

sledi da ako su $A_1, A_2, A_3, \dots$ elementi familije $\mathcal{M}$, onda je i $\bigcap_n A_n \in \mathcal{M}$. Tada je $\{a\} = \bigcap_n \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{M}$. Takođe je $[a, b), (a, b]$, $[a, b] \in \mathcal{M}$.

Elementi familije $\mathcal{M}$ nazivaju se merljivi skupovi.

Definicija 3.2. Neka je $\mathcal{M}$ jedna σ-algebra na skupu $\mathbb{R}$. Funkcija $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ je Lebegova mera, ako ispunjava uslove

1) $m(\emptyset) = 0$;

2) $m([a, b]) = b - a$, ako je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \leq b$;

4) Ako je B translacija skupa A na realnoj pravoj, tada je $m(A) = m(B)$.

5) Ako su $A_1, A_2, A_3, \dots$ uzajamno disjunktni skupovi iz familije $\mathcal{M}$, onda je

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} [m(A_1) + m(A_2) + \cdots + m(A_n)].$$

Osobina 5) iz definicije mere naziva se prebrojiva aditivnost. Razlog je u činjenici da je indeksni skup niza $(A_n)_n$ upravo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, odnosno $n \in \mathbb{N}$, a skup $\mathbb{N}$ je prebrojiv.

Na osnovu svojstva 2) definicije mere sledi da je $m(\{a\}) = 0$ i $m([a, b]) = m(a, b) = b - a$ za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Prema tome, Lebegova mera jednoelementnog skupa je jedaka nuli, dok je Lebegova mera segmenta jednaka dužini tog segmenta. Sledi da se Lebegova mera može smatrati neposrednim uopšenjem pojma dužine na $\mathbb{R}$. Iz istih razloga uobičajeno je Lebegovu meru na $\mathbb{R}$ zvati dužinom.

Lebegova mera je prebrojivo aditivna, te sledi da su skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ dužine nula (kao prebrojivi skupovi, odnosno prebrojive unije jednoelementnih skupova, čija je dužina jednaka nuli). Sa druge strane, skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv, i stoga se ne može izvesti zaključak da je skup $\mathbb{R}$ dužine nula. Štaviše, na osnovu $\mathbb{R} = [0, 1) \cup [-2, -1) \cup [1, 2) \cup \cdots$ sledi da je $m(\mathbb{R}) = +\infty$.

Kompletnosti radi, navodimo nekoliko činjenica, koje omogućavaju potpunije shvatanje šta se dešava kod merenja dužine skupova u $\mathbb{R}$.

a) U sistemu aksioma ZFC postoji σ-algebra $\mathcal{M}$ na skupu $\mathbb{R}$, tako da se Lebegova mera m može odrediti za sve skupove iz $\mathcal{M}$. Međutim, tada je $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, odnosno postoje podskupovi od $\mathbb{R}$ koji nemaju dužinu (nisu merljivi).

b) Postoji matematička teorija koja poistovećuje postojanje euklidske (vidljive) geometrije, sa postojanjem teorije brojeva. Iz te teorije sledi da je prirodno u geometrijskim interpretacijama skup $\mathbb{R}$ izjednačiti sa nekom pravom.

Dokazi činjenica a) i b) daleko prevazilaze okvire sadašnjeg izlaganja, i ostavljaju se čitaocu kao motivacija za buduća istraživanja.

Adresa autora:

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu