Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Математика и информатика 1 (3) (2009), 9-18

Pojačavanje konceptualnog razumevanja tangente uz pomoć Web tehnologija

Ljubica Diković

1. STANDARDAN NASTAVNI PRISTUP

Uvodjenju pojma izvoda u redovnoj nastavi, prethodi uvodjenje pojma priraštaja funkcije, priraštaja argumenta i nagiba funkcije $y = f(x)$, kao količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta. Takodje, koncept tangente i sečice mora biti potpuno usvojen, kako bi se pojam trenutne brzine promene priraštaja pravilno povezao sa nagibom tangente krive u nekoj tački.
Pitanja koja treba posebno objasniti su:

- Šta je sečica?
- Šta je priraštaj argumenta funkcije?
- Šta je priraštaj funkcije?
- Šta je nagib funkcije u nekoj tački?
- Šta je tangenta?
- Zašto je nagib tangente važan?
- Koja je razlika izmedju trenutne i srednje brzine promene priraštaja?

Na klasičnom času nastavnik obavezno uz pomoć krede i table crta i objašnjava sliku graničnog procesa, sa posebnim akcentom na njegovu dinamičku suštinu. U metodičkom smislu, važno je učiniti koncept izvoda dovoljno intuitivnim.
Pošto se u kasnijem radu izračunavanja izvoda svode na upotrebu tablice osnovnih izvoda i pravila diferenciranja, naročito je važno da do tada nastavnik iskoristi sva raspoloživa sredstva da što bolje objasni suštinu pojma izvoda kao jednog graničnog procesa.
Dakle, poseban akcenat ove nastavne jedinice treba da bude na povezivanju trenutne brzine promene neprekidnih funkcija u tački, sa izvodom te funkcije u tački. U grafičkom smislu, nagib linije tangente u tački predstavlja trenutnu brzine promene, pa samim tim predstavlja izvod. Prethodno, pomoću sečice se uvodi pojam srednje vrednosti brzine promene, što medjusobno povezuje ova

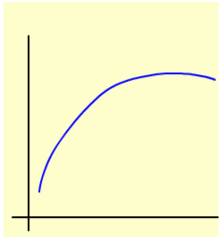
dva važna grafička koncepta (granični položaj sečice - tangenta), sa pojmom izvoda funkcije.
Izvodi i primene izvoda se izučavaju u okviru diferencijalnog računa kao jednoj od najvažnijih oblasti matematičke analize. U opštem slučaju možemo reći da je izvod mera promene, i da njegova primena omogućava određivanje područja monotonosti, konkavnosti, nalaženje tačaka lokalnog ekstremuma i sl. što je sastavni deo rešavanja mnogih inženjerskih, finansijskih i ostalih realno-životnih problema. Potpuno poznavanje i razumevanje suštine diferencijalnog računa, iz tog razloga, neophodno je svakom studentu.
Jedna od glavnih prepreka u razumevanju nastave diferencijalnog računa je veliki opseg složenih, apstraktnih matematičkih pojmova i dinamičkih koncepata, koji se uglavnom nisu izučavali u prethodnom školovanju.
Da bi ublažili teškoće i prepreke, nastavnici često upadaju u zamku svodeći nastavu diferencijalnog računa na seriju manipulativnih pravila, što je i dalje neprihvatljivo za učenike, jer ne doprinosi suštinskom razumevanju materije. Dešava se da neki učenici solidno ovladaju skupom rutinskih, manipulativnih pravila, da uspešno rešavaju čak i složene izvode, a da pri tom uopšte ne razumeju suštinu procesa diferenciranja, njegovu dinamičnost i primenu.
Međutim, savremeni nastavni trendovi dopuštaju smanjenje vremena utrošenog na manipulativni pristup diferencijalnom računu, uz akcenat na konceptualno razumevanje materije.

2. REŠAVANJE PROBLEMA TANGENTE U DIFERENCIJALNOM RAČUNU

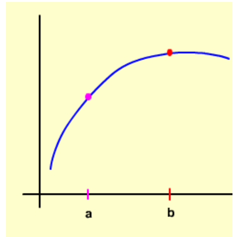
Cilj: Tangenta u tački se predstavlja kao granična linija odgovarajućih sečica u okolini te tačke. Tangenta se istražuje grafički. Studenti bi odgovarajućim setom vežbanja trebali da se osposobe da

- Vizuelizuju tangentu kao graničnu liniju linija sečica;
- Da aproksimiraju nagib tangente grafički i numerički;
- Da se osposobe da rešavaju odredjeni set problemskih zadataka.

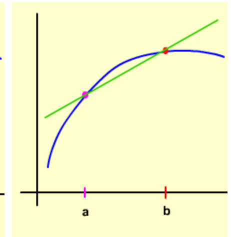
Na početku je korisno poći od definicije tangente, s tim da se ovoga puta definicija generiše korak po korak, preko apleta upotrebljenog sa adrese [1]. Neka je poznata funkcija $y = f(x)$ (slika 1.). Uočimo ma koje dve tačke a i b, koje pripadaju njenom domenu (slika 2.). Posmatrajmo pravu (sečica) kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (slika 3.). Uočimo nagib date prave, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (slika 4.). Pustimo da se tačka b sve više i više približava tački a (generišu se sečice) (slika 5.). Ukoliko postoji $m = \lim_{b->a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tada dobijamo tangentu funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$, pri čemu m, predstavlja nagib te tangente.



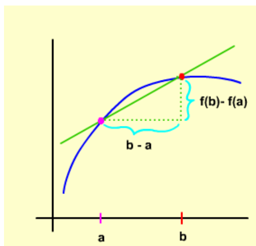
Slika 1.



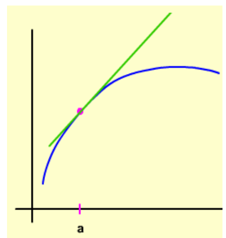
Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.

Tangenta funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ jeste prava koja dodiruje grafik date funkcije u toj tački i "paralelna" je (na neki način) grafiku funkcije u toj tački. "Paralelnost" se objašnjava time da u toj tački dodira, tangenta i kriva postižu isti smer kretanja (što ne važi za drugu tačku sečice).

Zatim se može rešavati sledeći problem: Za različite funkcije $y = f(x)$, i za različite vrednosti tačke $x = a$, numerički odredi graničnu vrednost $\lim\limits_{x->a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, koja predstavlja nagib tangente na grafiku funkcije $y = f(x)$, u tački $x = a$.

Putem softvera sa adrese [2], generisaće se tabela kao na slici br. 6, koja predstavlja numerički pristup nalaženja nagiba tangente na funkciju $y = x^2$, u tački $x = 2$. Izabrani softver omogućava da se pomoću Javascript notacije fleksibilno zada funkcija, kao i vrednost tačke u kojoj se postavlja tangenta.

f(x) = pow(x,2)

x	[f(x) - f(2)] / [x - 2]	x	[f(x) - f(2)] / [x - 2]
3	5	1	3
2.2	4.2	1.8	3.8
2.04	4.039999999999996	1.96	3.9600000000000044
2.008	4.008000000000008	1.992	3.991999999999992
2.0016	4.001600000000268	1.9984	3.9984000000000095
2.00032	4.000319999998721	1.99968	3.999679999999891
2.000064	4.000063999999744	1.999936	3.9999360000002557
2.0000128	4.000012799969418	1.9999872	3.999987199995888
2.00000256	4.000002560104906	1.99999744	3.9999974400685665
2.000000512	4.000000511743425	1.999999488	3.9999994882565746
2.0000001024	4.000000104083409	1.9999998976	3.9999998959165914

Slika 6.

Posle toga, može se uraditi nešto složeniji primer tipa:

Zadatak 2. Pronadji tangentu na grafiku funkcije $f(x) = 15 - 2x^2$ u tački $x = 1$.

Rešenje:

Tačka dodira tangente i krive ima koordinate $P = (1, f(1)) = (1,13)$.

Ako uočimo neku drugu tačku $Q = (2, f(x)) = (2,15 - 2x^2)$, izračunaćemo nagib linije sečice PQ i pokazati da je on sličan nagibu linije tangente u tački P.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{15 - 2x^2 - 13}{x - 1} = \frac{2 - 2x^2}{x - 1}$$

Posmatrajmo tabelarne vrednosti nagiba sečice m_{PQ} dobijene u slučaju kada vrednosti promenljive x postaju sve bliže i bliže broju 1 (proizvoljno mala leva i desna okolina oko tačke $x = 1$):

x	m_{PQ}	x	m_{PQ}
2	-6	0	-2
1.5	-5	0.5	-3
1.1	-4.2	0.9	-3.8
1.01	-4.02	0.99	-3.98
1.001	-4.002	0.999	-3.998
1.0001	-4.0002	0.9999	-3.9998

Iz tabele se može zaključiti da nagib linija sečica teži broju -4.

Jednačina tangente u opštem obliku koja prolazi kroz tačku $(a, f(a))$ glasi

$y = f(a) + m(x - a)$.

Tražena jednačina tangente glasi

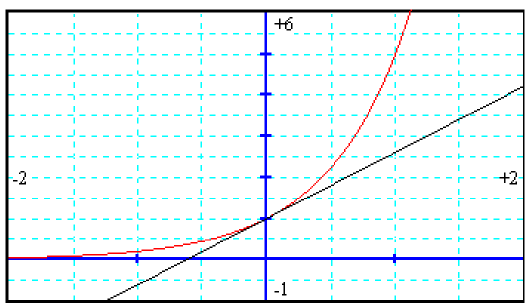
$y = 13 - 4(x-1) = -4x + 17$.

Ono što treba naglasiti jeste da u ovom procesu nikada ne smemo donositi zaključke o tome šta se dogadja u levoj okolini neke tačke na bazi dobijenih rezultata iz njene desne okoline(i obrnuto), već da se moraju ispitati leva i desna okolina oko date tačke.

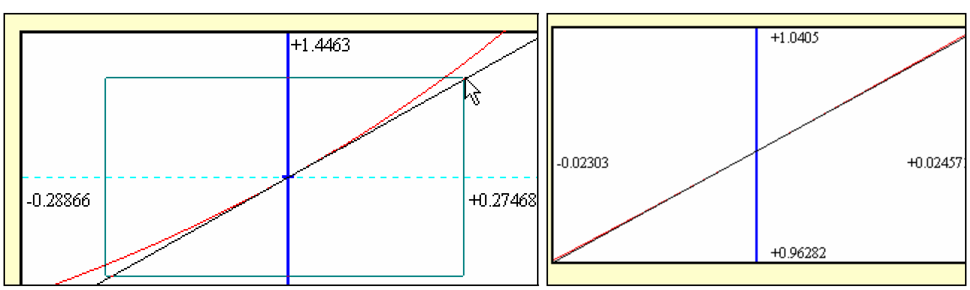
Dalje treba naglasiti da numeričko nalaženje nagiba ugla tangente podrazumeva uključivanje što većeg broja tačaka, radi dostizanja što veće numeričke tačnosti.

Zatim treba primetiti da smo vrednost nagiba ugla dobili zapravo finom približavanju tački $x = 1$, ali da tu vrednost nismo mogli dobiti iz formule u samoj tački $x = 1$. Uprkos tom ograničenju mi smo uspeli da dobijemo neke informacije o tome šta se dogadja u tački $x = 1$, na bazi toga šta se dogadja u okolini tačke $x = 1$.

Zadatak 3. Ukoliko posmatramo funkciju $y = 5^x$ (slika br. 7) i tangentu u tački $x = 0$, i ukoliko putem animirane vizuelizacije jako zumiramo okolinu tačke $x = 0$ (slika br. 8), dobićemo da je nagib linije tangente približno jednak (1.0405 - 0.96282)/(0.024571 + 0.02303) = 1.63 (slika br. 8).



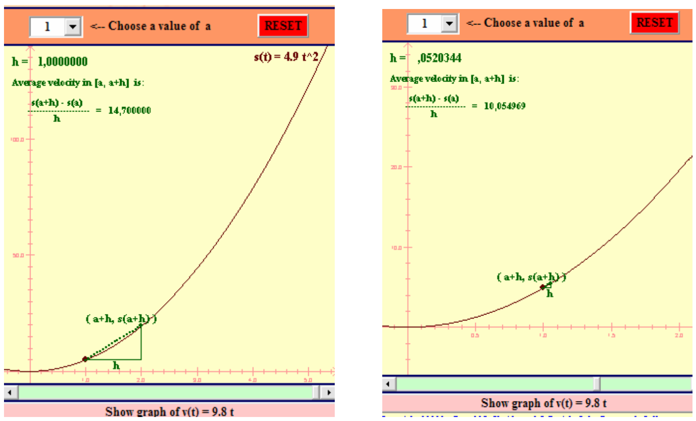
Slika 7.



Slika 8.

U cilju vizuelizacije pojma srednje brzine i trenutne brzine priraštaja, predlaže se interaktivan Java aplet sa adrese [3], koji demonstrira izračunavanje srednje brzine na proizvoljnom intervalu $(a, a+h)$ (slika br. 9).

Smanjujući opseg intervala $(a, a+h)$, jednostavnim pomeranjem klizača za vrednost h ka sve manjim vrednostima, učenici će biti u situaciji da simuliraju granični proces u datoj tački ($h->0$). Dakle, oni na vizuelan način prepoznaju razliku izmedju srednje brzine i trenutne brzine, razvijaju kritičko mišljenje i sami dolaze do odgovora na pitanja tipa "šta-ako".

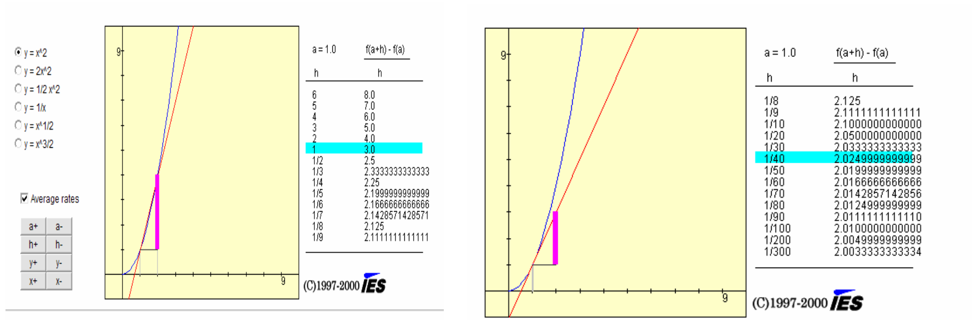


Slika br.9

Učenici kojima nedostaju potrebna teorijska znanja o srednjoj i trenutnoj brzini priraštaja, mogu ta znanja najpre osvežiti na adresi [4].

Poznato je da bilo koja forma slike graničnog procesa koji predstavlja izvod funkcije, može značajno pojasniti sam proces. Ali, što je slika dinamičnija, ona će vernije odraziti dinamičku suštinu tog procesa. U ovom slučaju, koristi se animacija, kako bi se što realnije opisao proces nalaženja izvoda funkcije.

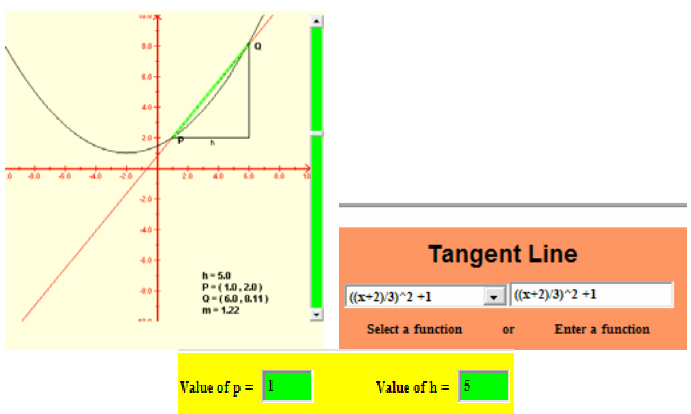
Posebna pogodnost izabranog softvera je što se pored grafičkog prikaza, istovremeno prikazuje tabela numeričkih vrednosti količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, u zavisnosti od vrednosti priraštaja argumenta. Na taj način, student paralelno dobija animiranu, grafičku i numeričku reprezentaciju izvoda (slika br. 10) .



Slika br. 10

Polazeći od jednostavnijih funkcija (na primer, $f(x)=x^2$), do složenijih funkcija (na primer, $f(x)=\sqrt{x^3}$), učenici mogu posmatrati izračunavanja nagiba tangenti za razne vrednosti. Crtanjem tih nagiba prema nezavisnoj varijabli, dobijaće se gradijentne funkcije (slika br. 10).
Uzimajući izvod kao zavisnu varijablu, za svaku vrednost nezavisne varijable neprekidne funkcije, dobiće se nova, gradijentna funkcija, koja opisuje kako se originalna funkcija menja u svakoj datoj vrednosti nezavisne promenljive.

Na adresi [5] može se veoma efikasno koristiti interaktivni aplet za uvežbavanje pojma sečice i tangente ma koje zadate funkcije (slika br. 11).
.



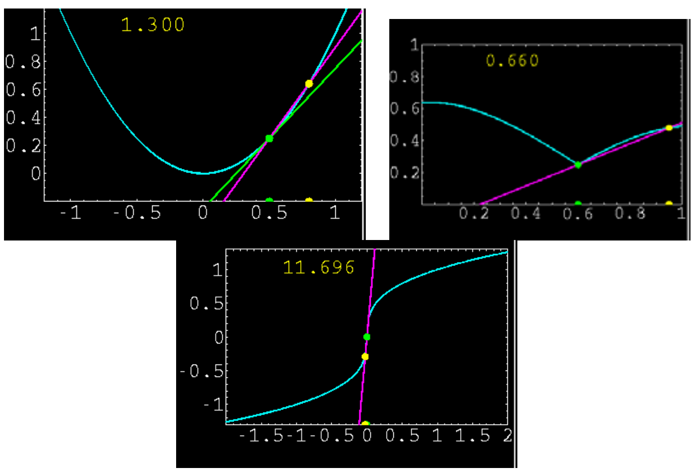
Slika br. 11

Bitna prednost ovog apleta je što učenik može birati već kreirane funkcije iz padajuće liste, ali može i sam zadati ma koju funkciju, a potom posmatrati proces konvergencije linije sečice ka liniji tangente.

Učenik će na grafiku funkcije pomeranjem tačke Q ka tački P, vizuelno i interaktivno uočiti da što je rastojanje između ovih tačaka manje ($h \to 0$), to će tangenta bolje aproksimirati sečicu. Pozicija tačke P i koraka h može se proizvoljno izabrati.

Korišćenjem ovog apleta, učenik će ustanoviti da se tangenta u tački P definiše kao granični položaj sečice, kada $Q->P$, odnosno $h \to 0$. Zatim, da je nagib tangente, granični položaj nagiba sečice kada $h \to 0$, odnosno da poveže da je vrednost $f'(P)$ izvod funkcije $f(x)$ u tački P.

Na adresi [6] može se pokazati animacija tangente, animacija sečice kroz tačku u kojoj funkcija nije diferencijabilna, kao i animacija sečice koja konvergira ka vertikalnoj tangenti (još jedna forma nediferencijabilnosti). Nagib sečice koji konvergira ka izvodu može se takodje prikazati u raznim varijantama (slika br. 12).



Slika br. 12

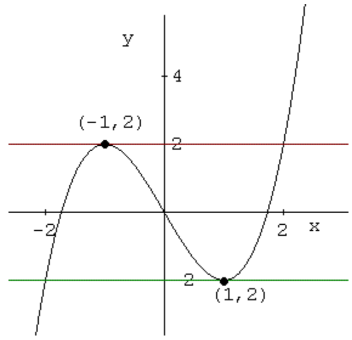
Pomoću softvera sa adrese [7] preporučuje se set zadataka sledećeg tipa:

Zadatak 4. Pronadji sve tačke na grafiku funkcije $y = x^3 - 3x$, gde je tangenta paralelna x-osi (horizontalne linije tangente).

Rešenje:

Prave koje su paralelne x-osi imaju nagib jednak 0. Nagib tangente na grafiku funkcije $y = x^3 - 3x$, odredjen je prvim izvodom $y' = 3x^2 - 3$. Dalje je potrebno naći sve vrednosti x za koje je $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -1$.

Tačke u kojima su tangente paralelne x-osi (videti sliku br.13) imaju koordinate: $(-1,2)$, $(1,-2)$.



Slika br. 13

Zadatak 5. Pronadji vrednost parametara a i b tako da grafiku funkcije $y = ax^3 + bx$ odgovara tangenta $y = -3x + 4$ u tački $x = 1$.

Rešenje:

U cilju dobijanja vrednosti za parametre a i b, potrebno je odrediti dve algebarske jednačine. Kako tangentna tačka sa x-koordinatom $x = 1$ leži na grafiku date funkcije $y = ax^3 + bx$, i istovremeno zadovoljava jednačinu tangente $y = -3x + 4$, dobijamo

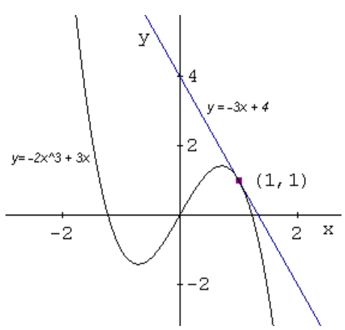
$a1^3 + b = -3 + 4 \Leftrightarrow a + b = 1$

Nagib tangente iznosi -3, što je jednako prvom izvodu funkcije $y = ax^3 + bx$ u tački $x = 1$.

$3a1^2 + b = -3 \Leftrightarrow 3a + b = -3$, odakle dobijamo da je

$a = -2,\ b = 3.$

Pogledati grafik funkcije $y = -2x^3 + 3x$ i odgovarajuću liniju tangente $y = -3x + 4$ u tački $x = 1$.



Slika br. 14

ZAKLJUČAK

Odabrani prilog elektronskih resursa koji su dostupni na Internetu, na interaktivan, vizuelan i animiran način simulira upravo samu suštinu datih, fundamentalnih procesa diferencijalnog računa, koji su po svojoj prirodi dinamični i aktivni. To objašnjava zašto je izbor takvih alata za predstavljanje tih procesa, adekvatan izbor za ovu nastavnu jedinicu.
Pri tome, elektronski resursi su pogodni jer obezbedjuju višestruke reprezentacije matematičkih koncepata. U ovom slučaju, višestrukim reprezentacijama tangente (grafički, algebarski i numerički način) stvaraju se uslovi za bolje konceptualno razumevanje tog pojma.

Reference

[1] **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/index.html**
[2] **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/tangents.7/index.html**
[3] **http://math.dartmouth.edu/~klbooksite/2.02/202.html**
[4] www.ies.co.jp/math/java/calc/heihen/heihen.html
[5] http://math.dartmouth.edu/~klbooksite/appfolder/206unit/SecTanLine.html
[6] http://www.ima.umn.edu/~arnold/graphics.html
[7] **www.analyzemath.com**

Адреса аутора:

Visoka poslovno-tehnička škola, Užice