Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Математика и информатика 1 (3) (2009), 19-24

KONAČNA MATEMATIKA
Egzistencija kombinatornih konfiguracija
Dirichlet-ov i Ramseyev teorem

Marko Obradović i Boris Fažo

/ P.G.Dirichlet (1905. – 1959.) njemački matematičar /
/ Frank P. Ramsey (1903. – 1930.) engleski logičar/

F.P.Ramsey – je izveo teorem, kojeg je Dirichleov princip samo jedan sićušni specijalni slučaj. Ramzijev teorem, dakle osigurava egzistenciju izvjesnih brojeva tzv. Ramzijevih brojeva. Time se bavi „ Ramseyeva teorija“ u području moderne kombinatorike.

Uvod:

Neka je S proizvoljan neprazan skup, P (S) partitivni skup skupa S, (a_1, a_2, ..., a_m) varijacija bez ponavljanja elemenata skupa S, a (S_1, S_2, ..., S_m) varijacija elemenata skupa P(S). Ako je $a_k \in S_k$, za $\forall$ k $\in$ { 1,2,...,m }, onda se varijacija (a_1, a_2, ... ,a_m) zove sustav različitih predstavnika varijacije skupa (S_1,S_2, ... , S_m).
Element $a_k \in S_k$ – je predstavnik skupa S_k .

Najprije,evo dva teorema:

-Dirichletov princip jedan je od najjednostavnijih principa kombinatorike. Često se iskazuje u šaljivoj formi kao: „Princip pretinca, kutija ili golubnjaka“.

Preciznije imamo:

Teorem 1 . (Dirichletov): Neka je { A_1,A_2, ... , A_k } razbijanje (nk + 1) – skupa S, na k – blokova. Tada bar jedan od skupova A_1,A_2, ... , A_k sadrži ne manje od n + 1 elemenata.
Dokaz: Pretpostavimo suprotno; tj. | A_j | $\leq$ n , za $\forall$ j $\in$ { 1,2, ... , k }. Tada je:

$| S | = | A_1 | + | A_2 | + ... + | A_k |$, $| S | \leq k_n$, $k \cdot n$ kontradikcija, sa uvjetom: $| S | = n \cdot k + 1$.

Napomena 1. U daljnjem ćemo umjesto „ sustav različitih predstavnika“ pisati kraće s.r.p.

Dakle , vrijedi:

Neophodan uvijet da za skupove $S_1,S_2, .. ,S_m$ postoji s.r.p. jeste da za svaki $k \in \{ 1,2, ... , m \}$ i svaku k – kombinaciju $\{ j_1,j_2, ... , j_k \}$ elemenata skupa $\{ 1,2, ... , m \}$ vrijedi:

$| S_{j1} \cup S_{j2} \cup ... \cup S_{jk} | \geq k.$

Dakako, ovo je intuitivno jasno. Način zaključivanja koji leži u osnovi Dirichletova principa može se veoma, efektno primjeniti u sličnim problemima.
Da je taj uvijet i dovoljan za postojanje različitih pretpostavki dokazao je (Filip Hol).

Teorem 2. 1935g. (F. Hola):

Neka za skupove $S_1,S_2, ... , S_m$ vrijedi neophodan uvije za egzistenciju s.r.p. i neka svaki od tih skupova sadrži ne manje od n – elemenata. Tada vrijedi:

(1^o) Ako je $n \leq m$, onda ($S_1,S_2, ... , S_m$) ima bar n! s.r.p.

(2^o) Ako je $n > m$, onda ($S_1,S_2, ... , S_m$) ima bar $\frac{n!}{(n-m)!}$ s.r.p.

Dokaz: Provodi se matematičkom indukcijom. Učini to – vježbe radi!

Napomena2. Pretpostavimo li da ne postoji s.r.p. za ($S_1,S_2, ... , S_m$). Tada iz **Holovog** teorema slijedi da postoje brojevi $j_1,j_2, ... , j_p$, takvi da vrijedi:

(1^o) $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_p \leq m$,

(2^o) $| S_{j1} \cup S_{j2} \cup ... \cup S_{jp} | = q < p$.

Zapamti to!

Konačno imamo:

Lema 1. Neka je S, n-skup i neka je: $S = S_1 \cup S_2$, za, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Ako je $n \geq q_1 + q_2 – 1$, za $q_1, q_2 \in N$, onda je $|S_1| \geq q_1$ ili $|S_2| \geq q_2$. Naime, ako je $|S_1| \leq q_1 -1$ i $|S_2| \leq q_2 -1$, onda je: $|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| \leq q_1 + q_2 – 2$, a to je kontradikcija.

-Slaba forma principa glasi:

-Ako $n + 1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n – kutija (pretinaca, onda bar jedna kutija sadrži barem dva od tih predmeta).

Napomena 3. Očito je za $n < q_1 + q_2 - 1$, moguće da vrijedi $|S_1| \leq q_1 - 1$, i $|S_2| \leq q_2 - 1$, kao recimo u slučaju:
$S_1 = \{ 1,2,...,q_1 - 1 \}$, $S_2 = \{q_1, q_2 + 1,..., q_1 + q_2 - 2 \}$.
Poopčavajući, isto dobivamo teorem **Ramzeya**.

Teorem 3. (Fundamentalni)

- Neka su $r, q_1, q_2 \in N$, za koje vrijedi: $r \geq 1$, $q_1 \geq r$, $q_2 \geq r$. Tada postoji **najmanji** prirodan broj $R (q_1, q_2 ; r)$ takav da za svaki prirodan broj $n \geq R (q_1, q_2 ; r)$ vrijede tvrdnje:
- Akoj je S proizvoljan n – skup, $P_r (S)$ skup svih r – podskupova skupa S, i $P_r (S) = \Phi_1 \cup \Phi_2$, za $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$, onda bar za jedan broj $j \in \{ 1,2 \}$ postoji q_j – podskup skupa S čiji su svi r – podskupovi sadržani u familiji Φ_j .

Dokaz: Matematičkom indukcijom po q_1, q_2, r, imamo:
(a) **Jednakosti:**
$$R (q_1 , q_2 ; 1) = q_1 + q_2 - 1 , q_1 \geq 1, q_2 \geq 1,... \quad (1)$$
$$R (q_1 , r ; r) = q_1 , q_1 \geq r > 1,... \quad (2)$$
$$R (r, q_2 ; r) = q_2 , q_2 \geq r > 1,... \quad (3)$$
Dokazujemo ovako:

- Jednakost (1) slijedi iz Teorema 1. (Kako ?)
- Neka je dalje $n \geq q_1$, $q_2 = r$.
- Ako je $\Phi_2 = \emptyset$, onda je $\Phi_1 = P_r (S)$, pa su svi r – podskupovi nekog q_1 – podskupa skupa S, sadržani u familiji Φ_1 .
- Ako je $\Phi_2 \neq \emptyset$, onda proizvoljan r – skup $A \in \Phi_2$ ima samo jedan r – podskup (samo skup A), koji je sadržan u Φ_2 . Zašto?
- Ako je $n < q_1$, $q_2 = r$ i $\Phi_2 = \emptyset$, onda uopće ne postoji q_1 – podskup skupa S, a također niti postoji r – podskup skupa S, koji je sadržan u Φ_2.
- Time je dakazana i jednakost (2). Analogno se dokazuje jednakost (3). Učini to ! Vježbe radi.

(b) Neka za brojeve $r \geq 2$, $q_1 \geq r + 1$ i $q_2 \geq r + 1$ postoje brojevi:

$P_1 = R(q_1 - 1, q_2; r)$, $P_2 = R(q_1, q_2 - 1; r)$, $R(p_1, p_2; r - 1)$, tako da za svaki od njih vrijedi **Teorem 3.,**

Dovoljno je još dokazati da je:

$$R(q, q_2; r) \leq R(p_1, p_2; r-1) + 1 \ldots (4)$$

Dalje, pretpostavimo da skup S sadrži više od $R(p_1, p_2; r-1)$ elemenata.

Neka je $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2$ za $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ i neka je a_0 proizvoljni element skupa S, Tada je: $S' = S \setminus \{a_0\}$ i $P_{r-1}(S') = \Phi_1' \cup \Phi_2'$, pri čemu za svaki skup $A \in P_{r-1}(S')$ i svako $j \in \{1,2\}$ vrijedi $A \in \Phi_j'$ akko $A \cup \{a_0\} \in \Phi_j$.

Budući da S' sadrži bar $R(p_1, p_2; r-1)$ elemenata, to je po inducionoj pretpostavci vrijedi bar jedna od tvrdnja:

(i) Postoji p_1 – podskup skupa S', označimo ga sa W, čiji svi (r- 1)-podskupovi **pripadaju familiji Φ_1**'.

(ii) Postoji p_2 – podskup skupa S' , čiji svi (r – 1)- podskupovi, **pripadaju familiji Φ_2.**

- **Dokažimo tvrdnje:**

Iz (i), Budući da skup W sadrži $R(q_1 - 1, q_2; r)$ elemenata i kako su svi r – podskupovi skupa W sadržani u $\Phi_1 \cup \Phi_2$, to vrijedi:

(i_1) postoji ($q_1 - 1$) – podskup skupa W, (označimo ga sa T_1) čiji svi r – podskupovi pripadaju familiji Φ_1.

(i_2) postoji q_2 – podskup skupa W (označimo ga sa T_2) čiji su svi r – podskupovi sadržani u Φ_2.

Konačno, ako vrijedi (i_1), onda je $T_1 \cup \{a_0\}$ q_1 – podskup skupa S, čiji svi r – podskupovi sadržani u Φ_1.

Ako vrijedi (i_2) , onda je T_2 q_2 – podskup skupa S, čiji su svi r – podskupovi sadržani u Φ_2.

Napomena 4. Analogno se razmatra slučaj kad vrijedi (ii). Dokaz nejednakosti (4) je gotov, pa i teorema 1.

Korolar1.

-Neka su $r, q_1, q_2, \ldots, q_m$ prirodni brojevi, da je:

$r \geq 1$, $m \geq 2$ i $q_j \geq r$, za $\forall j \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Tada postoji NAJMANJI prirodni broj, $R(q_1, q_2, \ldots, q_m; r)$, takav da za svaki prirodan broj $n \geq R(q_1, q_2, \ldots, q_m; r)$ vrijedi:

-Ako je S proizvoljan n – skup, P_r (S)- skup svih r – podskupova skupa S i $P_r (S) = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup ... \cup \Phi_m$ za $\Phi_j \cap \Phi_k = \emptyset$, i $k \neq j$, $k,j \in \{1,2,...,m\}$onda bar za jedan broj $j \in \{ 1,2, ... , m \}$ postoji q_j – podskup skupa S , čiji svi r – podskupovi sadržani u familiji Φ_j.

<u>Dokaz</u> – je jednostavan!

-Indukcijom po m- dobivamo sljedeće:
Za m = 2, dobivamo teorem 1.
Pretpostavimo da teorem vrijedi **za neki prirodni broj**, m – 1, Koji nije manji od 2.
Neka je S , n – skup i $P_r (S) = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup ... \cup \Phi_m$, za $\Phi_k \cap \Phi_j = \emptyset$, i $k \neq j$, $k,j \in \{1,2,...,m\}$

- Označimo : $\Phi_2 = \Phi_2 \cup \Phi_3 \cup ... \cup \Phi_m$, $q_2' = R (q_2, ... , q_m ; r)$
- Tada imamo:

-Ako je $n \geq R (q_1, q_2' ; r)$ onda postoji q_1 – podskup skupa S, čiji su svi r – podskupovi sadržani u Φ_1 ili , postoji q_2 – podskup skupa S, čiji su svi r – podskupovi sadržani u Φ_2'.

Što zapažamo?

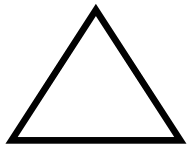
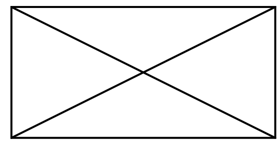
- U drugom slučaju iz indukcijske pretpostavke slijedi da bar za jedan broj $j \in \{1,2,...,m\}$ postoji q_j – podskup skupa S, čiji su svi r – podskupovi sadržani u Φ_j. Time je korolar gotov.

<u>Napomena 5.</u> Broj R (q_1,q_2, ; r) se zove (opći) Ramseyev broj.
Određivanje Ramzeyevih brojeva je vrlo teško.
Evo nekoliko gornjih (donjih) ograda:
Npr. $\mathbf{25 \leq R (4,5 ; 2) \leq 28}$
$\mathbf{34 \leq R (4,6 ; 2) \leq 44}$, provjeri to!

- Nadamo se da če niz zadataka, koji slijede ilustrirati snagu tog teorema.

- Evo nekoliko zadataka za vježbu:

Zadatci:

1) U grupi od 10 ljudi postoji ili trojka međusobnih neznanaca ili četvorka međusobnih poznanaca (poznanika).
Dakle, postoji:
ili  ili 

Obrazloži to!

2) Za svako $m \geq 3$, postoji najmanji broj C_m, da je $n \geq C_m$, i vrijedi slijedeće:
-Ako od n – točaka u ravnini nikoja trojka nije kolinearna, onda m – od tih vrhova čine vrhove konveksnog m – terokuta. Dokaži!

3) Za q_1 ,q_2, $q_3 \geq 2$, broj R (q_1, q_2, q_3 ; 2) postoji. Dokaži to!

4) Ako stranice peterokuta obojimo plavom, a dijagonale crnom bojom, dobijemo potpuni 5 – graf, koji ne sadrži monokromatski 3 – podgraf. Zato, je R (3,3;2) = 6. Zašto?

LITERATURA:

1. I. R. Bilenkin: Kombinatorika Nauka, Moskva, 2005. (reprint)
2. Kvant, 1988, NO – 7 .
3. V. Simonović: Konačna matematika, Beograd. 2000.
4. D. Veljan: Konačna matematika, Zagreb, 1987. (skripta)