Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 2 (1) (2013), 1-6

Позициони бројни системи и превођење бројева

Предраг В. Кртолица
Универзитет у Нишу, Природно математички факултет
krca@pmf.ni.ac.rs

Током историје људи су користили различите бројне[1] системе (види број 1, свеске 1 и 2). Главна класификација свих бројних система је на *позиционе* и *непозиционе* бројне системе. Један познати пример непозиционог бројног система јесте римски бројни систем. Памтимо ли име неког познатог математичара или физичара који потиче из Старог Рима? Тешко. Вероватно читалац може да наброји многе војсковође, политичаре, говорнике, песнике, цареве и сенаторе којих су пуни уџбеници историје. Наиме, Стари Римљани су били практични људи који нису губили време на науку већ су се бавили политиком и ратовима, живећи од освајања и поробљавања. Додуше, када је понестало снаге на том пољу пропаст је била неминовна.

Није далеко од истине рећи да је оваква ситуације била тесно скопчана са римским бројним системом који је био непрактичан за компликованије рачунице, осим можда да се преброје војници, робови, количина неке робе или новац.

Код позиционих бројних система се бројеви представљају вектором од n цифара, при чему је свакој цифри придружена *тежина* сагласна њеној позицији у вектору. Ово није случај код непозиционих бројних система, какав је био римски бројни систем, где позиција цифре није у директној вези са њеном тежином.

За успешно бављење математиком и другим дисциплинама где су потребна компликована израчунавања неопходно је користити неки позициони бројни систем. Главна карактеристика неког позиционог бројног система је његова *основа*. Људи данас претежно користе декадни бројни систем, тј. систем са основом 10, али то можда не би био случај да, рецимо, имамо 12 прстију на обе руке. Принцип би био исти а разлике би биле у нијансама. Узгред буди речено, тзв. арапске цифре које користимо (0, 1, ..., 8, 9) заправо су измишљотина Индијаца (не Индијанаца!) коју су Арапи пренели у Европу.

У наставку текста ћемо се упознати са принципима на којима се базирају *сви* позициони бројни системи. При томе ћемо користити појам бројни систем искључиво за позициони бројни систем. Како нас развој и напредак рачунарских

[1] У новије време неки аутори инсистирају на појмовима *бројевни* системи, *бројевна* права и сл. како се не би вршило мешање са појмом *бројни* у смислу *многобројни*. Аутору то личи на измишљање новоговора, јер у нашем језику постоје и други хомоними који се не мешају и успешно разликују (када кажемо *коса* у зависности од контекста увек знамо да ли се ради о длакама на нашој глави, рељефном облику или положају).

наука тера да се понекада бавимо и бројним системима основе различите од 10 (бинарни, хексадецимални, ...), проучићемо и превођење бројева из једног бројног система у други.

1. Бројни системи

Неки број A се у бројном систему са основом r представља низом

$$A = a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots\, a_1\, a_0$$

где су $a_i \in \{0, 1, \ldots, r\text{-}1\}$, $i = 1, \ldots, n$ *цифре*[2] бројног система. Тако су у декадном бројном систему цифре 0, 1, 2, ..., 9, јер је основа 10. У неким другим системима скуп цифара је другачији што очигледно зависи од основе. Примера ради, у *бинарном бројном* систему, који има за основу број 2, цифре су 0 и 1. У *окталном* бројном систему основа је 8 па су цифре 0, 1, 2, ..., 7.

Следеће што читалац треба добро да разуме јесте да су појмови презентације броја и његове вредности различити. Извор честог мешања ова два појма лежи у томе што су људи навикнути на декадни бројни систем где се читање презентације броја и његове вредности поклапају. Тако је запис броја *хиљаду* у декадном бројном систему 1000 и људи га управо изговарају тако знајући да се ради о хиљаду оваца, хиљаду динара или просто хиљаду као неименованој вредности.

Међутим, ако у неком другом бројном систему број има запис 1000 то никако не значи да се ради о вредности хиљаду па га тако и не треба изговарати (уместо тога треба рећи *један-нула-нула-нула* уз напомену о којем се бројном систему ради). Тако број чија је презентација 1000 у бинарном бројном систему има вредност 8, у окталном 512 а у *хексадекадном* 4096!

Вредност броја у бројном систему основе r може се изразити као

$$|A| = a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \ldots + a_1r^1 + a_0r^0$$

или компактније

$$|A| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i \,.$$

Ово се може проширити и на разломљене бројеве, тј.

$$|A| = a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \ldots + a_1r^1 + a_0r^0 + a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + \ldots + a_{-m}r^{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i r^i \,.$$

Пример 1. Још смо у нижим разредима основне школе учили да је крајња десна цифра целог броја његова *цифра јединица*, следећа слева *цифра десетица*, па онда *цифра стотина* итд. Ако имамо у виду да је $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, јасно је да смо претходно знали још и тада, само нам је то предочено на мање формалан начин. Сагласно изложеном,

$$1234 = 1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0.$$

---

[2] Укажимо на важну терминолошку разлику: све цифре јесу уједно и бројеви, али, у општем случају, бројеви нису цифре.

Пример 2. Ако имамо у виду запис неког броја у бројном систему који није декадни онда то можемо изразити навођењем бројне основе као индекса, при чему број може бити окружен заградама. Тако је број у бинарном бројном систему $(1000)_2$ или 1000_2, док је његова вредност

$$1000_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8.$$

Пример 3. Хексадекадни бројни систем има 16 цифара чије су ознаке 0, 1, ..., 8, 9, A; B, C, D, E и F. "Новоуведене" цифре A-F имају редом вредности 10-15. Тако хексадекадни број $1BC6_{16}$ има вредност

$$1BC6_{16} = 1 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 4096 + 2816 + 192 + 6 = 7110.$$

2. Превођење бројева

У основи, разликујемо два поступка превођења броја из бројног система са основом r_1 у бројни систем са основом r_2. Један је када се операције потребне за превођење извршавају у бројном систему са основом r_2 (тј. циљном бројном систему), а други је када се операције извршавају у бројном систему са основом r_1 (полазном бројном систему).

Први случај је лакши и своди се на одређивање вредности броја као што смо то показали у претходним примерима. Напоменимо да су људи навикли на рад у декадном бројном систему па се овај начин превођења бројева користи када је циљни бројни систем (систем са основом r_2) декадни бројни систем.

У другом случају, када се операције изводе у полазном бројном систему (са основом r_1), ситуација је нешто компликованија па ћемо одвојено разматрати превођење целих и превођење разломљених бројева.

2.1. Превођење целих бројева

Нека је цео број X у бројном систему са основом r_1 представљен низом цифара

$$(X)_{r_1} = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_2x_1x_0 \tag{1}$$

а нека се исти број у систему са основом r_2 представља следећим низом цифара

$$(X)_{r_2} = y_{m-1}y_{m-2}\dots y_2y_1y_0 \tag{2}$$

Напоменимо да се, у општем случају, број цифара једне и друге презентације могу разликовати. Такође је необично важно имати на уму да се ради о једној те истој вредности без обзира на начин презентације, односно изабрани бројни систем. Та вредност може се изразити, између осталог, као:

$$X = y_{m-1}r_2^{m-1} + y_{m-2}r_2^{m-2} + \dots + y_2r_2^2 + y_1r_2^1 + y_0r_2^0 \tag{3}$$

Ако сада једначину (3) поделимо са r_2 (основом бројног система у који преводимо) добићемо

$$\frac{X}{r_2} = y_{m-1}r_2^{m-2} + y_{m-2}r_2^{m-3} + \dots + y_2r_2^1 + y_1r_2^0 + \frac{y_0}{r_2} \tag{4}$$

Није тешко уочити да су сви сабирци са десне стране цели бројеви, док је последњи *прави* разломак. Другим речима, цифра најмање тежине у презентацији броја X у бројном систему са основом r_2 појавиће се као остатак при оваквом дељењу. Остале цифре можемо добити итеративним понављањем поступка нада целобројним делом количника. Када једном тај целобројни део количника постане једнак 0 поступак се завршава и већ смо добили све значајне цифре у презентацији броја X у бројном систему са основом r_2.

Пример 4. Претворимо декадни број 624 у бинарни бројни систем.

$$
\begin{aligned}
624 : 2 &= 312 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
312 : 2 &= 156 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
156 : 2 &= 78 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
78 : 2 &= 39 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
39 : 2 &= 19 \rightarrow \text{остатак је } 1\\
19 : 2 &= 9 \rightarrow \text{остатак је } 1\\
9 : 2 &= 4 \rightarrow \text{остатак је } 1\\
4 : 2 &= 2 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
2 : 2 &= 1 \rightarrow \text{остатак је } 0\\
1 : 2 &= 0 \rightarrow \text{остатак је } 1
\end{aligned}
$$

Према томе, $624_{10} = 1001110000_2$.

2.2. Превођење разломљених бројева

Нека је сада разломљени број X представљен у систему са основом r_1 на следећи начин:

$$(X)_{r_1} = 0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-p+1}x_{-p} \tag{5}$$

Исти број се у систему са основом r_2 представља на следећи начин:

$$(X)_{r_2} = 0.y_{-1}y_{-2}\ldots y_{-q+1}x_{-q} \tag{6}$$

Ако вредност броја изразимо као

$$X = y_{-1}r_2^{-1} + y_{-2}r_2^{-2} + \ldots + y_{-q+1}r_2^{-q+1}y_{-q}r_2^{-q} \tag{7}$$

и једначину (7) помножимо са r_2 добићемо:

$$Xr_2 = y_{-1}r_2^{0} + y_{-2}r_2^{-1} + \ldots + y_{-q+1}r_2^{-q+2}y_{-q}r_2^{-q+1} \tag{8}$$

На десној страни једнакости (8) први сабирак представља целобројни део производа док су сви остали сабирци прави разломци за које се може показати да у свом збиру не могу достићи вредност 1 па представљају разломљени део производа. Видимо да смо прву цифре десно од тачке основе[3] добили као целобројни део производа. Остале цифре добијамо итеративним понављањем поступка над разломљеним делом, све док тај разломљени део не постане једнак 0.

[3] Навикли смо да говоримо "децимална тачка" али то је зато што обично радимо у декадном бројном систему. У општем случају ради се о *тачки основе* коју, зависно од изабраног бројног система, можемо различито звати. Тако се у бинарном бројном систему ради о *бинарној* тачки.

Пример 5. Претворимо разломљени декадни број 0.125 у бинарни бројни систем.

0.125	$\times 2 = 0.250$	$\rightarrow$	целобројни део је 0
0.25	$\times 2 = 0.50$	$\rightarrow$	целобројни део је 0
0.5	$\times 2 = 1.0$	$\rightarrow$	целобројни део је 1

Према томе, $0.125_{10} = 0.001_2$.

Напоменимо да при овом поступку није увек могуће добити коначан број цифара! Заправо, једино 5 као последња значајна цифра омогућује да се изврши конверзија у разломљени број са коначним бројем цифара. У случају када то није могуће једноставно се морамо задовољити одређеним бројем добијених цифара.

Пример 6. Претворимо разломљени декадни број 0.3 у бинарни бројни систем.

$0.3 \times 2 = 0.6$	$\rightarrow$	целобројни део је 0
$0.6 \times 2 = 1.2$	$\rightarrow$	целобројни део је 1
$0.2 \times 2 = 0.4$	$\rightarrow$	целобројни део је 0
$0.4 \times 2 = 0.8$	$\rightarrow$	целобројни део је 0
$0.8 \times 2 = 1.6$	$\rightarrow$	целобројни део је 1
$0.6 \times 2 = 1.2$	$\rightarrow$	целобројни део је 1

Очигледно ћемо се сада вртети у круг не добијајући никада да је разломљени део количника једнак 0. Према томе, $0.3_{10} = 0.010011001..._2$.

Очигледно је да је описане поступке погодно користити када се преводе бројеви из декадног у неки други бројни систем, како би се операције извршавале у декадном систему.

Како поступити када ниједан од два бројна система (полазни и циљни) није декадни? У том случају можемо да извршимо један међукорак преводећи најпре дати у број у декадни систем. Међутим, у једном посебно случају а који се у рачунарству често користи могуће је превођење бројева извршити на много једноставнији начин што ћемо видети у наредном одељку.

2.3. Превођење бројева из бинарног у октални и хексадецимални систем и обрнуто

За конверзију бинарног броја у октални групишемо цифре у групе по 3 почев од бинарне тачке, и затим сваку групу изразимо једном окталном цифром.

Пример 7.

$$(010|110|001|101|011.111|100|000|110)_2 = (26153.7406)_8$$

Код конверзије у хексадекадни систем правимо групе од по 4 бита и замењујемо их једном хексадекадном цифом.

Пример 8.

$$(010|1100|0110|1011|.1111|0000|0110)_2 = (2C6B.F06)_{16}$$

Обрнута конверзија обавља се по обрнутом поступку, замењујући сваку цифру са 3 или 4 бинарне! Јасно је да се читав поступак може генерализовати на конверзије између бинарног бројног система и бројног система са основом 2^k. У том случају правимо групе од по k цифара.