Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 3 (3) (2016), 23-36

Neki primeri metrika

Nebojša Č. Dinčić
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu
e-mail: `ndincic@hotmail.com`

Apstrakt

Prikazane su osnovne ideje teorije metričkih prostora, ilustrovane brojnim primerima metrika.

Keywords and phrases: metrika, metrički prostor

1 Uvod

Iskustvo iz svakodnevnog života nam pokazuje da je rastojanje između neke dve tačke u prostoru najčešće upravo jednako dužini duži koja spaja te dve tačke (tzv. Euklidsko rastojanje). Međutim, takođe znamo da je ovakvo merenje rastojanja neprimenljivo kad želimo da se prevezemo od jedne tačke do druge, pošto moramo slediti saobraćejnice koje se uglavnom ne poklapaju sa najkraćim, tzv. "vazdušnim", rastojanjem.

Metrika u matematici predstavlja funkciju kojom se definiše udaljenost ili rastojanje između elemenata nekog skupa. Metričke prostore uveo je francuski matematičar Moris Freše u svom radu iz 1906.

2 Aksiome metričkih prostora

Metrika na skupu X je funkcija (često nazivana **funkcijom rastojanja** ili samo **rastojanjem**) $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ koja zadovoljava sledeće aksiome:

(A1) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) \geq 0$ (nenegativnost, ili aksioma razdvajanja),

(A2) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (aksioma koincidencije),

(A3) $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = d(y,x)$ (simetričnost), (A4) $(\forall x, y, z \in X)\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla).

Aksiome (A1) i (A2) zajedno definišu pozitivno definitnu funkciju. Lako se pokazuje da aksioma (A1) sledi iz ostalih. U praksi je obično najteže, prilikom ispitivanja da li je neka funkcija metrika, proveriti važenje nejednakosti trougla (tj. subaditivnosti). Nekad je to moguće pokazati neposredno, ali često je potrebno koristiti neke nejednakosti.

Skup X opremljen metrikom d je **metrički prostor** (X, d), dok za proizvoljne tačke $x, y \in X$ realan broj $d(x, y)$ nazivamo **rastojanjem** između tačaka x i y u osnosu na metriku d. Na jednom skupu može biti zadato više različitih metrika, koje ćemo tada označavati odgovarajućim indeksima.

Naš cilj će biti predstavljanje kako nekih metrika koje se sreću često u matematici i njenim primenama, tako i nekih egzotičnijih, kako bi radoznali čitalac stekao uvid u njihovu raznovrsnost. Dokazaćemo da te funkcije zadovoljavaju aksiome (A1)–(A4), i u nekim slučajevima "upoređivaćemo" metrike definisane na $\mathbb{R}^2$ tako što ćemo posmatrati jedinične kugle ili sfere u odnosu na te metrike. Podsetimo, zatvorena jedinična kugla $K[0, 1]$ u metričkom prostoru (X, d) je skup $K[0, 1] = \{x \in X : d(x, 0) \leq 1\}$, dok je jedinična sfera njen rub: $S(0, 1) = \{x \in X : d(x, 0) = 1\}$.

3 Primeri metrika

Primer 1 (Euklidska metrika na $\mathbb{R}$): Neka je na skupu $X = \mathbb{R}$ data funkcija $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ d(x, y) = |x - y|$. Pokazaćemo da je ovakva funkcija metrika. Na osnovu osobina apsolutne vrednosti vidimo da su zadovoljene sve aksiome (A1)–(A4); specijalno, nejednakost trougla sledi iz:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

U ovoj metrici jedinična sfera se sastoji od dve tačke, 1 i -1, (rešenja jednačine $d(x, 0) = |x - 0| = 1$), dok je jedinična kugla segment $[-1; 1]$ (rešenje nejednačine $d(x, 0) = |x - 0| \leq 1$).

Primer 2 (Trivijalna metrika): Ukoliko je skup X jednoelementan, $X = \{a\}$, tada jedino $d(a, a) = 0$. Ovaj slučaj nije zanimljiv.

Primer 3 (Euklidska metrika na $\mathbb{C}$): Neka je na $X = \mathbb{C}$ data funkcija $(\forall z, w \in \mathbb{C})\ d(z, w) = |z - w|$. Akisome (A1)–(A4) slede na osnovu osobina modula kompleksnih brojeva; specijalno, nejednakost trougla sledi iz:

$$d(z, w) = |z - w| = |z - u + u - w| \leq |z - u| + |u - w| = d(z, u) + d(u, w).$$

U ovoj metrici jedinična sfera je jedinična kružnica u kompleksnoj ravni, (rešenja jednačine $d(x,0) = |x-0| = 1$), dok je jedinična kugla jedinični krug kompleksne ravni $K[0;1]$ (rešenje nejednačine $d(x,0) = |x-0| \leq 1$).

Primer 4 (Diskretna metrika): Na proizvoljnom skupu X možemo definisati funkciju rastojanja na sledeći način:

$$(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

tj. rastojanje između proizvoljne dve različite tačke je 1, a rastojanje svake tačke od sebe je 0. Ukoliko skup X ima više od jednog elementa, može se definisati beskonačno mnogo metrika polazeći od date metrike d, jednostavnim množenjem svih rastojanja sa $\lambda > 0$.

Za dokaz nejednakosti trougla, primetimo da $d(x,y)$ može da uzima samo dve vrednosti, 0 ili 1, dok $d(x,z) + d(z,y)$ uzima tri vrednosti, 0, 1 i 2. Nejednakost trougla neće važiti samo ako $d(x,y) = 1$ a $d(x,z) + d(z,y) = 0$, odakle sledi $x \neq y$ i $x = z,\ z = y$, što je kontradikcija.

U ovoj metrici jedinična sfera data je sa

$$S(x_0;1) = \{x \in X : d(x,x_0) = 1\} = \{x \in X : x \neq x_0\} = X \setminus \{x_0\},$$

tj. sve tačke su na udaljenosti tačno 1 od proizvoljne ali fiksirane tačke x_0, dok je jedinična kugla oko tačke x_0 data sa

$$K[x_0;1] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq 1\} = X,$$

što znači da je ceo skup X sadržan u jediničnoj kugli oko svake svoje tačke.

Primer 5: Ukoliko je (X,d) metrički prostor, tada je funkcijom

$$e(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

data nova metrika na X. Primetimo da, nezavisno od vrednosti metrike d, vrednosti metrike e leže u $[0,1)$.

Aksiome (A1) i (A3) važe, za (A2) imamo $e(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Za dokaz nejednakosti trougla posmatrajmo pomoćnu realnu funkciju $\varphi(t) = \frac{t}{1+t},\ t > 0$. Kako je njen izvod, $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ pozitivan za sve $t > 0$, funkcija φ je monotono rastuća na $(0,\infty)$. Zato

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow \varphi(d(x,z)) \leq \varphi(d(x,z) + d(z,y)),$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}
e(x,y) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \le \\
&\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = e(x,z)+e(z,y).
\end{aligned}$$

Neka čitalac pokaže da je $D(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ takođe metrika.

Primer 6 (Euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$): Pokazaćemo da je na prostoru $\mathbb{R}^n$ jedna metrika data funkcijom:

$$d_2(x,y) = d_2\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2\right)^{1/2}.$$

Akisome (A1) i (A3) očigledno važe. Kako je

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2 = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \overline{1,n})\, x_k = y_k \Leftrightarrow x = y,$$

zaključujemo da važi aksioma (A2). Za dokaz (A4) možemo koristiti nejednakost Minkovskog u obliku:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k + y_k - x_k)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2\right)^{1/2},$$

tj. $d_2(x,z) \le d_2(x,y) + d_2(y,z)$.

U primenama posebno su značajni slučajevi $n = 2$ i $n = 3$ tj. Euklidske metrike u ravni ($\mathbb{R}^2$) i prostoru ($\mathbb{R}^3$):

$$d_2\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2},$$
$$d_2\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}.$$

Geometrijski, rastojanje između tačaka (x_1,x_2) i (y_1,y_2) u ravni je ono što i intuitivno shvatamo kao najkraće rastojanje, a to je dužina duži koja spaja ove dve tačke. Ukoliko bi se te dve tačke nalazile u nesusednim temenima pravougaonika, Euklidsko rastojanje predstavljalo bi dužinu dijagonale tog pravougaonika. U prostoru $\mathbb{R}^3$ Euklidsko rastojanje između tačaka (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) je dužina velike dijagonale kvadra čija su dva nesusedna temana pomenute dve tačke.

U prostoru $\mathbb{R}^2$ jedinična sfera je jedinična kružnica:

$$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x,0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

dok jedinična kugla predstavlja jedinični krug.

Primer 7 (Neke metrike na $\mathbb{R}$): Pri modelovanju realnih situacija, nekad je potrebno određene segmente realne prave smanjiti, a neke povećati - npr. model terena sa preprekama. Svaka injektivna funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ generiše metriku $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ na $\mathbb{R}$. Opštija situacija važi za proizvoljan metrički prostor. Zaista, aksiome (A1) i (A3) očigedno važe. Za (A2) imamo

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \overset{f \text{ "1-1"}}{\Longrightarrow} x = y, \text{ dok } x = y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Nejednakost trougla je posledica osobine apsolutne vrednosti:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Na primer, kako je inverzna funkcija $x \mapsto x^{-1}$ injektivna, funkcija $d(x,y) = |x^{-1} - y^{-1}|$ određuje metriku na $\mathbb{R}^+$ koja se naziva **inverzna metrika**.

Primer 8 (Taksi metrika, Menhetn metrika, L_1–metrika): Na prostoru $\mathbb{R}^n$ tzv. taksi-metrika može se definisati kao:

$$d_1(x,y) = d_1\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|.$$

Ovako definisana funkcija očigledno zadovoljava aksiome (A1)–(A3), sada dokazujemo nejednakost trougla:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k + z_k - y_k| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

Posebno je zanimljiv slučaj $n = 2$, kada je metrika data sa

$$d_1(x,y) = d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Na primer, veći deo saobraćajne mreže Njujorka sastoji se od dva skupa paralelnih ulica koje se seku pod pravim uglom. Takođe, za topove na šahovskoj tabli rastojanje se meri korsiteći ovu metriku, dok se za lovce primenjuje ista metrika, ali sa tablom gde su dijagonale koordinatne ose.

U ovoj metrici jedinična sfera je skup:

$$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| = 1\},$$

dok je jedinična kugla unutrašnjost pomenutog skupa.

Ovu metriku uveo je u XIX veku nemački matematičar Herman Minkovski.

Primer 9: Za $1 \leq p < \infty$ funkcija

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$$

je metrika na $\mathbb{R}^n$.

Zaista, osobine (A1) i (A3) su jasne, osobina (A2) svodi se na:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p = 0 \Leftrightarrow x_k = y_k,\ k = \overline{1,n} \Leftrightarrow x = y.$$

Osobina (A4) dokazuje se koristeći nejednakost Minkovskog ($a_i, b_i,\ i = \overline{1,n}$, realni ili kompleksni)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p},\ p \geq 1.$$

Pošto ova nejednakost ne važi za $p < 1$, gornja formula ne daje metriku za $p < 1$. Napomenimo da za $p = 2$ dobijamo Euklidsku, a za $p = 1$ taksi-metriku. Jedinična sfera i jednična kugla u odnosu na ovu metriku su:

$$\begin{aligned} S(0,1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_p(x,0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p = 1\}, \\ K[0,1] &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_p(x,0) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}. \end{aligned}$$

Primer 10 (Čebiševljeva[1] metrika, maksimum– ili L_∞–metrika): Na prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo definisati metriku

$$d_\infty(x,y) = d_\infty\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) = \max_{i=\overline{1,n}} |y_i - x_i|.$$

[1] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894), istaknuti ruski matematičar

Dokažimo da je funkcija d_∞ metrika. Aksiome (A1) i (A3) su očigledno zadovoljene, dok (A2) važi zato što

$$d_\infty(x,y)=0 \Leftrightarrow \max_{k=\overline{1,n}} |y_k-x_k|=0 \Leftrightarrow y_k=x_k,\ k=\overline{1,n} \Leftrightarrow x=y.$$

Aksioma (A4) dokazuje se korišćenjem osobina apsolutne vrednosti i maksimuma:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{k=\overline{1,n}} |x_k-y_k| = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k-z_k+z_k-y_k| \leq \\ &\leq \max_{k=\overline{1,n}} |x_k-z_k| + \max_{k=\overline{1,n}} |z_k-y_k| = d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

U slučaju $n=2$ Čebiševljeva metrika je funkcija

$$d_\infty(x,y)=d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}.$$

Ova metrika je poznata i kao rastojanje na šahovkoj tabli, jer predstavlja minimalan broj poteza potreban da kralj pređe rastojanje od polja čije koordinate centra su (x_1,x_2) do polja čije koodinate centra su (y_1,y_2).

$S(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2 : d_\infty(x,0)=1\}=\{x\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|,|x_2|\}=1\}$, tj. sfera u ovoj metrici je kvadrat stranice 2 koji je centriran u koordinatnom početku a stranice su paralelene koordinatnim osama.

Zanimljiva praktična primena ove metrike je u logistici skladišta, pošto ona efektivno meri vreme potrebno da kran (koji može da se istovremeno kreće po $x-$ i $y-$osi istom brzinom) premesti predmet s jednog mesta na drugo.

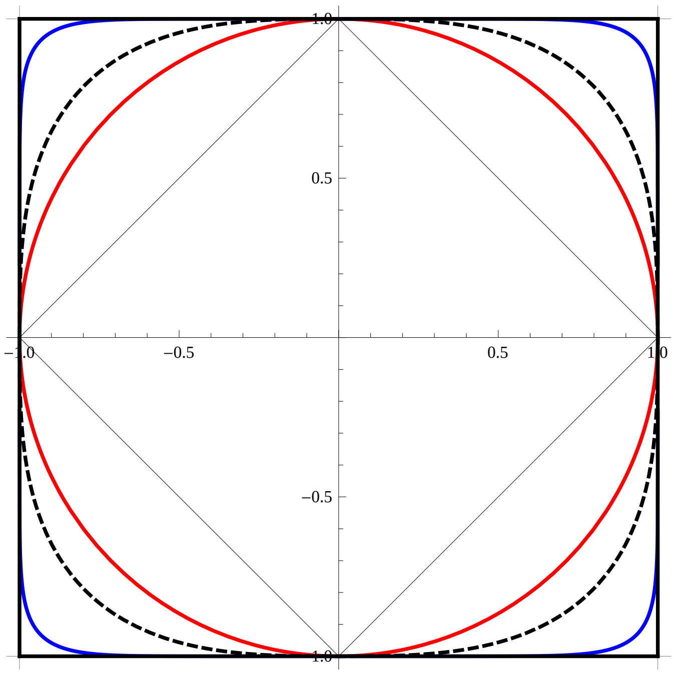
Primer 11 ($p-$adična metrika): Neka je p prost broj. Svaki nenula racionalan broj x može se predstaviti kao $p^k r/s$ za jedinstvenu vrednost $k\in\mathbb{Z}$, gde $r\in\mathbb{Z}$ i $s\in\mathbb{N}$, i ni r ni s nisu deljivi sa p. Definišemo $|x|_p=p^{-k}$, gde $|0|_p=0$. Sada se $p-$adička metrika na $\mathbb{Q}$ definiše kao $d(x,y)=|x-y|_p$.

Ovo je svakako nenegativna simetrična funkcija, jednaka je nuli samo kada $x=y$. Što se nejednakosti trougla tiče, lako se proverava da ako $|x-z|_p=p^{-m}$ i $|z-y|_p=p^{-n}$, tada

$$|x-y|_p \leq \max\{p^{-m},p^{-n}\} \leq p^{-m}+p^{-n}=|x-z|_p+|z-y|_p.$$

Primer 12: Neka je $C[a,b]$ skup neprekidnih funkcija nad realnim segmentom $[a,b]$. Pokažimo da je na ovom skupu metrika definisana funkcijom

$$d(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)| : x\in[a,b]\}.$$



Slika 1: Uporedni prikaz $p-$metrika za $p = 1$ (tanka crna linija), $p = 2$ (crvena linija), $p = 3$ (isprekidana crna linija), $p = 10$ (plava linija) i $p = \infty$ (debela crna linija)

Aksiome (A1) i (A3) slede iz osobina apsolutne vrednosti. Pošto

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a,b])\ |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a,b])\ f(x) = g(x)$$

važi i aksioma (A2). Kako za proizvoljne funkcije $f, g, h \in C[a,b]$ važi:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \leq \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| = d(f,h) + d(h,g), \end{aligned}$$

zadovoljena je nejednakost trougla tj. aksioma (A4).

Primer 13: Označimo sa $\mathcal{I}$ kolekciju realnih segmenata oblika $[a,b]$, $a \leq b$. Za proizvoljna dva segmenta $I = [a,b]$ i $J = [c,d]$, definišemo $d(I,J) = \max\{|c-a|, |d-b|\}$. Pokažimo da je ovako definisana funkcija metrika.

Pošto su aksiome (A1)–(A3) evidentne, dajemo samo dokaz nejednakosti trougla: neka je $K = [e, f] \in \mathcal{I}$, tada

$$d(I,K) + d(K,J) = \max\{|e-a|, |f-b|\} + \max\{|c-e|, |d-f|\} \geq$$
$$\max\{|e-a| + |c-e|, |f-b| + |d-f|\} \geq \max\{|c-a|, |d-b|\} = d(I,J)$$

Primetimo da smo izbegli intervale koji imaju bar jednu beskonačnu tačku (da metrika bude u $\mathbb{R}$), ali i intervale tipa $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), kako bismo obezbedili da $d(I,J) = 0 \Rightarrow I = J$.

Primer 14 (Reka u džungli): Na $\mathbb{R}^2$ definišimo metriku funkcijom:

$$d(x,y) = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |y_2 - x_2|, & x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|, & x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

Zamislimo da se reka nalazi duž $x-$ose, i da je svuda unaokolo teško prohodna džungla kroz koju se najlakše probija idući u pravcu koji je upravan na reku. Rastojanje između neka dva sela, na primer, merilo bi se po ovoj metrici (vidi Sliku 2).

Neka $d(x,y) = 0$. Ukoliko $x_1 \neq y_1$, imali bismo $0 < |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| = 0$, što je kontradikcija; dakle, mora biti $x_1 = y_1$, i tada $|x_2 - y_2| = 0$; ukoliko $x = y$, onda $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, pa je $d(x,y) = |y_2 - x_2| = 0$, čime je zadovoljena aksioma (A2). Aksiome (A1) i (A3) su očigledno zadovoljene, dokažimo (A4):

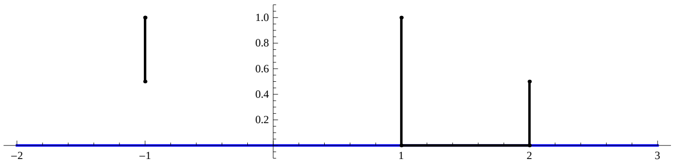
i) ako su x, y, z na istom pravcu, upravno na reku, nejednakost trougla očigledno važi;

ii) ako x, y, z nisu na istom pravcu, tada:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \leq \\ &\leq |x_2| + |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + |z_2| + |y_2| + |y_2| \leq \\ &\leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2| = \\ &= d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2)) = \\ &= d(x,y) + d(y,z); \end{aligned}$$

iii) ostali slučajevi pokazuju se na sličan način.

Zanimljivo da se jedinična sfera u ovoj metrici poklapa sa jediničnom sferom u $1-$metrici.



Slika 2: Rastojanje u ovoj metrici između tačaka $(-1;1)$ i $(-1;0.5)$ koje su na istom pravcu upravnom na reku (plavo obojeni deo $x-$ose) je uobičajeno rastojanje. Rastojanje između tačaka $(1;1)$ i $(2;0.5)$ koje nisu na istom pravcu dato je dužinom podebljane crne izlomljene linije.

Primer 15 (Levenštajnovo[2] rastojanje, 1965.): Kao jedan od načina merenja sličnosti među tekstualnim stringovima, Levenštajnovo rastojanje predstavlja meru sličnosti između nizova karaktera, moguće različite dužine. Definisane su tri operacije: dodavanje znaka na proizvoljno mesto, brisanje znaka i zamenu jednog znaka drugim; svaka od njih ima određenu cenu. Levenštajnovo rastojanje predstavlja minimalnu ukupnu cenu transformacije jednog niza u drugi primenom navedenih operacija u proizvoljnom redosledu.

Neka su a i b dva stringa (nizovi karaktera) dužine $|a|$ i $|b|$, redom. Levenštajnovo rastojanje između dva stringa a i b dato je sa $lev_{a,b}(|a|,|b|)$, gde je:

$$lev_{a,b}(i,j) = \begin{cases} \max\{i,j\}, & \min\{i,j\}=0, \\ \min \begin{cases} lev_{a,b}(i-1,j)+1, \\ lev_{a.b}(i,j-1)+1, \\ lev_{a,b}(i-1,j-1)+1_{a_i\neq b_j}, \end{cases} & inace \end{cases}$$

U prethodnoj formuli $1_{a_i\neq b_i}$ je pokazivačka funkcija koja je jednaka nuli ako $a_i=b_j$, a jedinici inače, dok je $lev_{a,b}(i,j)$ rastojanje između prvih i karaktera od a i prvih j karaktera od j.

Ovde nećemo dokazivati da Levenštajnovo rastojanje zadovoljava aksiome metrike. Umesto toga, ilustorvaćemo nalaženje Levenštajnovog rastojanja za stringove $a=$ "niz" i $b=$ "pi". Nađimo $lev_{a,b}(|a|,|b|)=lev_{a,b}(3,2)$

[2]Vladimir Iosifovich Levenshtein (rođen 1935.), savremeni ruski matematičar koji se bavi teorijom informacija i kodovima za korekciju grešaka.

po formuli (pisećemo skraćeno $lev(i,j)$ umesto $lev_{a,b}(i,j)$):

$$\begin{array}{rcl} lev(3,2) &=& \min\{lev(2,2)+1, lev(3,1)+1, lev(2,1)+1\},\ 1_{a_3\neq b_2}=1,\\ lev(3,1) &=& \min\{lev(2,1)+1, lev(3,0)+1, lev(2,0)+1\},\ 1_{a_3\neq b_1}=1,\\ lev(2,2) &=& \min\{lev(1,2)+1, lev(2,1)+1, lev(1,1)+0\},\ 1_{a_2\neq b_2}=0,\\ lev(2,1) &=& \min\{lev(1,1)+1, lev(2,0)+1, lev(1,0)+1\},\ 1_{a_2\neq b_1}=1,\\ lev(1,2) &=& \min\{lev(0,2)+1, lev(1,1)+1, lev(0,1)+1\},\ 1_{a_1\neq b_2}=1,\\ lev(1,1) &=& \min\{lev(0,1)+1, lev(1,0)+1, lev(0,0)+1\},\ 1_{a_1\neq b_1}=1,\\ && lev(i,0)=i,\ lev(0,j)=j,\ i=\overline{0,3},\ j=\overline{0,2}. \end{array}$$

Sada dobijamo:

$$\begin{array}{rcl} lev(1,1) &=& \min\{2,2,1\}=1,\ lev(1,2)=\min\{3,2,1\}=1,\\ lev(2,1) &=& \min\{2,3,2\}=2,\ lev(2,2)=\min\{2,3,1\}=1,\\ lev(3,1) &=& \min\{3,4,3\}=3,\ lev(3,2)=\min\{2,4,3\}=2. \end{array}$$

Dakle, $lev_{"niz","pi"}(|"niz"|,|"pi"|)=2$, što se pokalapa sa intuitivno dobijenim rezultatom da se od reči "niz" dobija reč "pi" ako obavimo sledeće dve operacije: obrišemo poslednji karakter u reči "niz", i zamenimo prvi karakter (tj. "n") u reči "niz" karakterom "p".

Primena ove metrike je u nalaženju približnog poklapanja stringova, na primer u programima koji proveravaju greške u kucanju upoređujući ih sa unapred datom listom reči (tzv. spell-checker). Još neke primene su u OCR (optical character recognition=optičko prepoznavanje znakova) konverziji slika, rukopisa ili štampanog teksta u odgovarajući digitalni oblik, kao i upoređivanje lanaca DNK da bi se pronašle mutacije.

Primer 16 (Hemingovo[3] rastojanje): Hemingovo rastojanje meri sličnost između dva niza bitova iste dužine, i predstavlja broj pozicija na kojima se ti nizovi razlikuju. U slučaju nizova različite dužine, potrebne su komplikovanije mere rastojanja. Samo rastojanje prvi put je opisao Heming u članku o detekciji i korekciji grešaka iz 1950. Na primer, Hemingovo rastojanje nizova 11001100 i 10001001 je 3, jer se razlikuju na 2, 6, i 8. mestu. Od aksioma metrika najteže se pokazuje nejednakost trougla, indukcijom po dužini niza bitova. Primene ove metrike i metoda zasnovanih na njoj su u oblasti telekomunikacija, teoriji informacija i kriptografiji.

[3]Richard Wesley Hamming (1915–1998), američki matematičar

Primer 17 (Metrika francuske železnice): Na $\mathbb{R}^2$ može se zadati jedna metrika funkcijom (podsetimo, $d_2(\cdot,\cdot)$ je Euklidska metrika, v. Primer 6):

$$d_f(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y), & \textit{ako postoji } t \in \mathbb{R} \textit{ tako da } x = ty, \\ d_2(x,0) + d_2(y,0), & \textit{inace} \end{cases}$$

Ova metrika je nastala kad su zaposleni u britanskim i francuskim železnicama primetili kako, bez obzira na odredište i polaznu trasu, većina pošiljki prođe kroz London, odnosno Pariz. Još uvek se koristi pri naplaćivanju nekih vrsta poštanskih usluga u Velikoj Britaniji.

Za dokazivanje nejednakosti trougla upotrebićemo posredni pristup, koji može da se primeni za još neke metrike. Za date dve tačke $x, y \in \mathbb{R}^2$ definišemo stazu γ od x do y kao konačan niz $I_1, ..., I_n$ gde:

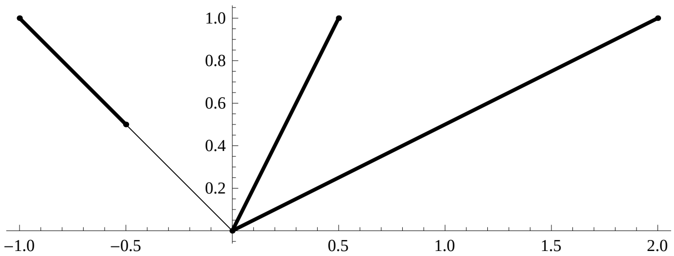
i) svaki I_i je segment koji leži na polupravoj koja počinje u koordinatnom početku;

ii) krajnja tačka I_i je početna tačka I_{i+1};

iii) početna tačka I_1 je x, krajnja tačka I_n je y.

Sada dužinu staze γ definišemo kao zbir dužina segmenata $I_1, ..., I_n$. Primetimo da $d(x,y)$ je dužina najkraće staze od x do y (jedan segment, ako su x i y na istoj polupravoj, dva ako nisu).

Dokažimo sada nejednakost trougla. Neka je γ_1 najkraća staza od x do y, a γ_2 najkraća staza od y do z. Označimo sa $\gamma_1\gamma_2$ stazu dobijenu nadovezivanjem γ_2 na γ_1. To je staze dužine $d(x,y) + d(y,z)$ od x do z, i ona ne može biti kraća od najkraće staze od x do z, te stoga $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.



Slika 3: Primeri rastojanja u metrici francuske železnice. Rastojanje između tačaka $(-1; 1)$ i $(-0.5; 0.5)$ koje leže na istoj polupravoj svodi se na obično Euklidsko rastojanje, dok rastojanje između $(0.5; 1)$ i $(2; 1)$ je zbir dužina duži od $(0.5; 1)$ do $(0, 0)$ i od $(2; 1)$ do $(0, 0)$

Primer 18: Muzej "Van Gog" iz Amsterdama, Holandija, 2007. godine organizovao je radionicu na kojoj je tim sa prestižnog američkog univerziteta Prinston uspešno otkrio falsifikat Van Gogove slike. Oni su uveli i koristili posebnu "metriku razlike" (dissimilarity metric), koja se definiše na osnovu parametara koji opisuju skriveni model drveta Markova transformacije talasićima (wavelet transform) slike. Na taj način mogu se razlikovati slike koje je naslikao Van Gog, od slika drugih umetnika, videti [9].

4 Neka uopštenja

Ukoliko metrika d na metričkom prostoru X zadovoljava jači uslov od nejednakosti trougla,

$$(\forall x, y, z \in X)\; d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\},$$

tada je reč o **nearhimedovskoj metrici**. Primer takve metrike je $p-$adična metrika opisana u primeru 11.

Ukoliko se izostave ili oslabe neke od aksiome metrike, dobijaju se još neke klase funkcija:

1. **pseudometrika**, ako se druga aksioma zameni sa $d(x, x) = 0$ (tj. može da se desi da bude $d(x, y) = 0$ i za neko $y \neq x$.)

2. **kvazimetrika**, ako se izostavi aksioma simetrije

3. **semimetrika**, ako ne važi nejednakost trougla. Neki autori rade sa slabijim oblicima nejednakosti trougla, kao što su:

i) $d(x, z) \leq \rho\, (d(x, y) + d(y, z))$ $\rho-$relaksirana nejednakost trougla,

ii) $d(x, z) \leq \rho\, \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ $\rho-$inframetrička nejednakost.

References

[1] D. S. Đorđević, *Metrički prostori i Riman-Stiltjesov integral (u pripremi)*

[2] T. W. Körner, *Metric and topological spaces* (syllabus), version of August 17, 2015.

[3] D. Mosić, *Metrički prostori i Riman-Stiltjesov integral (zbirka zadataka)*, PMF Niš, 2013.

[4] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[5] M. Ó. Searcóid, *Metric spaces*, Springer, 2007.

[6] V. A. Skvorcov, *Primeri metričkih prostora (na ruskom)*, Moskva, 2002.

[7] N. Teofanov, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

[8] http://wwwf.imperial.ac.uk/~svanstri/Files/ma222.pdf

[9] http://web.math.princeton.edu/~ingrid/VG_swirling_movie/