Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 3 (3) (2016), 1-18

Složeni zadaci sa prostim brojem

Nenad O. Vesić
Prirodno-matematički fakultet, Niš
e-mail: vesko1985@pmf.ni.ac.rs

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet Niš,
Univerzitet Metropolitan (Centar u Nišu),
OŠ "Vuk Karadžić" Doljevac,
e-mail: dsimce@gmail.com;

Milan S. Stamenković
Elektronski fakultet Niš,
e-mail: milanstamenkovic@live.com;

Goran B. Ilić
OŠ "Vuk Karadžić" Doljevac,
e-mail: ilicgoran145@gmail.com

Sažetak

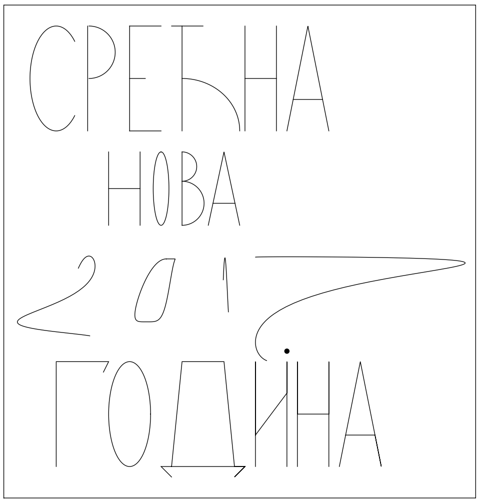
U ovom članku prikazane su neke zanimljive osobine brojeva kroz zadatke u kojima se spominje broj 2017. Najpre je, korišćenjem softverskog paketa *Mathematica* nacrtana čestitka za novu 2017. godinu. Nakon toga je rešeno nekoliko, manje ili više, komplikovanih zadataka u kojima figuriše broj 2017.

1 Deo po deo grafik a *Mathematica*

Neke grafike jako je komplikovano nacrtati kao grafike jedne funkcije. Softverski paket *Wolfram Mathematica* [9] pogodan je za crtanje grafika funkcija ali mnogi od njega odustanu ne znajući neke sitnice u vezi sa tim paketom.

Prvi težak zadatak jeste napisati čestitku za srećnu novu godinu kao niz grafika linearnih, trigonometrijskih, logaritamskih i eksponencijalnih funkcija.

Naredna slika, koliko god da to nemogućim i neverovatnim izgleda, čitava je sastavljena od grafika nacrtanih upravo u softverskom paketu *Mathematica*.



Slika 1: Novogodišnja čestitka nacrtana kao niz grafika

Programski, taj grafik je nacrtan na sledeći način:

```
Ax = ParametricPlot[{{-0.5 + 4.5 t, 0}, {0, -1.3 + 5 t}},
  {t, 0, 1}, Axes -> False, PlotStyle -> White];
box = Graphics[Line[{{-0.5, -1.3}, {-0.5, 3.4}, {4., 3.4},
 {4., -1.3}, {-0.5, -1.3}}]];

dva = ParametricPlot[{10/27 Sin[E^x], 10/27 E^Cos[x]},
 {x, -1/2, Pi - 115/100}, PlotStyle -> Black];

nula =ParametricPlot[{3/10 Sin[x*E^(-Sin[x])*Cos[x]] + 21/20,
 3/10 Cos[x*Log[1 + x^2]*Sin[x]] + 537/790}, {x, 0, Pi},
 PlotStyle -> Black];

jedan = ParametricPlot[{2/11 Log[1 + Sin[x]^2] + 69/44,
 4/11 E^(Sin[1 + x^2])}, {x, 3 Pi/4, 7 Pi/8},
 PlotStyle -> Black];
```

```
sedam = ParametricPlot[{-Sin[E^x] + 2.9, Sin[Log[1 + x^2]]},
 {x, 1/10, 3 Pi/4 - 3/10}, PlotStyle -> Black];

s = ParametricPlot[0.25 {Cos[x], 2 Sin[x]} + {0, 2.7},
 {x, 7 Pi/4, Pi/4}, PlotStyle -> Black];

r1 = ParametricPlot[{0.3, 2.2 + t}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];
r2 = ParametricPlot[0.25 {Cos[x] - 0.75, Sin[x] + 1}
 + {0.5, 2.7},
 {x, -Pi/2, Pi/2},
 PlotStyle -> Black];

e1 = ParametricPlot[{0.7, 2.2 + t}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];
e2 = ParametricPlot[{{0.3 t + 0.7, 3.2}, {0.15 t + 0.7, 2.7},
 {0.3 t + 0.7, 2.2}}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];

c1 = ParametricPlot[{1.2, 2.2 + t}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];
c2 = ParametricPlot[{1.1 + 0.3 t, 3.2}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];
c3 = ParametricPlot[0.5 {1.1 Cos[x], Sin[x]} + {1.2, 2.2},
 {x, 0, Pi/2}, PlotStyle -> Black];

n1 = ParametricPlot[{{1.8, 2.2 + t}, {2.1, 2.2 + t}},
 {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];
n2 = ParametricPlot[{1.8 + 0.3 t, (3.2 + 2.2)/2}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];

a1 = Graphics[Line[{{2.2, 2.2}, {2.4, 3.2}, {2.6, 2.2}}],
 Blue];
a2 = ParametricPlot[{0.3*0.2 + 2.2 + (-0.3*0.2 + 2.6 -
 0.3*0.2 - 2.2)t, 2.5}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];

nn1 = ParametricPlot[{{0.5, 1.3 + 0.7 t}, {0.8, 1.3 + 0.7 t}},
 {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];
```

```
nn2 = ParametricPlot[{0.5 + 0.3 t, 3.3/2}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];

o2 = ParametricPlot[0.5 {0.15 Sin[x], 0.7 Cos[x]}
 + {1., 1.65}, {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Black];

v1 = ParametricPlot[{1.2, 1.3 + 0.7 t}, {t, 0, 1},
 PlotStyle -> Black];
v2 = ParametricPlot[2*0.7/10 {Cos[x], Sin[x]}
 + {1.2, 2 - 1.4/10}, {x, -Pi/2, Pi/2}, PlotStyle -> Black];
v3 = ParametricPlot[3*0.7/10 {Cos[x], Sin[x]}
 + {1.2, 1.3 + 3*0.7/10}, {x, -Pi/2, Pi/2},
 PlotStyle -> Black];

aa1 = Graphics[Line[{{1.45, 1.3}, {1.6, 2}, {1.75, 1.3}}]];
aa2 = ParametricPlot[{(1.51 - 1.3)*0.15/0.7 + 1.45
 + (-(1.51 - 1.3)*0.15/0.7 + 1.75 - (1.51 - 1.3)*0.15/0.7 -
    1.45) t, 1.51}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> Black];

tacka = Graphics[Disk[{2.2, 0.1}, 0.025]];

g3 = Graphics[Line[{{0, -1}, {0, 0}, {0.5, 0},
 {0.45, -0.1}}]];

o3 = ParametricPlot[0.5*{0.4 Cos[x], Sin[x]} - {-0.7, 0.5},
 {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Black];

d3 = Graphics[Line[{{1.1, -1.1}, {1, -1}, {1.8, -1},
 {1.7, -1.1}, {1.8, -1}, {1.7, -1}, {1.6, 0}, {1.2, 0},
 {1.1, -1}}]];

i3 = Graphics[Line[{{1.9, -1}, {1.9, 0}, {1.9, -0.7},
 {2.2, -0.3}, {2.2, 0}, {2.2, -1}}]];

n3 = Graphics[Line[{{2.3, -1}, {2.3, 0}, {2.3, -0.5},
 {2.6, -0.5}, {2.6, 0}, {2.6, -1}}]];

a3 = Graphics[Line[{{2.7, -1}, {2.9, 0}, {3.1, -1},
```

```
{0.7*0.2 + 2.9, -0.7}, {(-0.7 + 1)*0.2 + 2.7, -0.7}}]];

Show[box, Ax, dva, nula, jedan, sedam, s, r1, r2, e1, e2,
 c1, c2, c3, n1, n2, a1, a2, nn1, nn2, o2, v1, v2, v3, aa1,
 aa2, tacka, g3, o3, d3, i3, n3, a3]
```

Objasnimo sada neka pravila pri ovakvom crtanju grafika. Pre svega, potrebno je znati minimalne i maksimalne vrednosti x i y koordinata figura koje se na tom grafiku pojavljuju. U slučaju prethodne čestitke, želelo se da grafici budu oivičeni pravougaonom konturom koja je nacrtana grafikom `box`. U delu Show, na prvom mestu pojavljuje se upravo taj grafik što je obavezno.

Grafik `Ax` nije neophodan ali, ako ne bi bilo okvira, on bi morao da bude na prvom mestu u komandi `Show`. U crtanju geometrijskih slika, neophodno je koristiti grafik oblika `Ax` ili `box` kao prvi argument komande `Show` da bi čitav grafik bio nacrtan.

Uloga grafika `Ax` je da se ukaže na neke detalje a vezano za crtanje grafika funkcija jedne promenljive sastavljenih iz više delova. Prvo, komanda `Axes->False` isključuje koordinatne ose sa grafika koje se crtaju automatski. Ipak, senke tih osa se, bez obzira na tu komandu, prepoznaju. Zbog toga je taj grafik, komandom `PlotStyle->White` obojen u belo (boju pozadine) pa se ose ne vide.

Još jedna zanimljivost koja se, crtanjem grafika funkcija, zanemaruje jesu strelice na krajevima koordinatnih osa. *Mathematica* njih ne crta po automatizmu. Međutim, ukoliko je u grafiku `Axes->True` (što jeste po defoltu) onda dodatna komanda `AxesStyle->Arrowheads[{0,0.05}]` crta strelice. Važno je znati da se strelice ne nadovezuju na već nacrtane ose nego se postavljaju na kraju nacrtane ose. Zato, kada se želi nacrtati strelica na kraju osa, ose treba nacrtati dužim nego što je potrebno. Brojevi 0 i 0.05 u komandi `Arrowheads` određuju veličinu strelice. Komandom `AxesLabel->{x,y}` daju se imena koordinatnim osama i to tako da je `x` naziv x-ose a `y` naziv y-ose. Pored toga, komandom `Ticks->{{1, 2, 3},{4, 5, 6}}` su brojevi $1, 2, 3$ označeni na x-osi a brojevi $4, 5, 6$ na y-osi. Za sve ovo, neophodan preduslov je da bude `Axes->True`. Ukoliko strelica na kraju ose preklopi broj koji treba da bude označen on neće biti označen.

Sve funkcije, kojima je crtan tekst, obojene su u crno (naredbom `PlotStyle->Black`) i grafici nisu isprekidani. Ipak, komandu `PlotStyle` moguće je zadati i kao `PlotStyle->{Red, Dashing[Tiny]}`. Na taj način, grafik se crta u crvenoj boji i nije pun nego tačkast. Ukoliko je, umesto `Tiny`, zadata komanda `Dashing[{0.012}]` broj unutar komande `Dashing` ukazuje na kolike delove treba isprekidati grafik, procentualno gledano, u odnosu na dužinu celog grafika. Unutar komande `Dashing` moguće je zadati i niz dužina `{`$r_1, r_2, \ldots$`}` koje bi redom bile crtane. Još treba naglasiti da je, unutar naredbe `Graphics`, moguće obojiti i isprekidati grafik i to kao `Graphics[{`*color*`, Dashing[{`*numbers*`}],`*figure*`}]`.

2 Brojevima usloženi zadaci

Videli smo, u prethodnom poglavlju, da je crtanjem grafika elementarnih funkcija moguće mnogo toga napisati. U ovom odeljku ćemo se baviti zadacima sa prostim brojem 2017, zakomplikovanim pomoću matematičkih operacija i relacija. Zadaci, koji će biti predstavljeni i rešeni u nastavku ovog članka jesu motivisani zadacima predstavljenim u [1–5, 8, 10–15] kao i zadacima predstavljenim u [6, 7].

Počećemo sa šest relativno jednostavnih zadataka. Nakon toga, zadaci će biti sve složeniji i složeniji. Na kraju, podsetićemo se postupka rešavanja Diofantovih jednačina i uraditi jedan kombinatorni zadatak sa brojem posebnih brojeva.

Zadatak 1 *Odredi šestocifrene brojeve oblika* $\overline{a2017b}$ *koji su deljivi sa* 36.

Rešenje: Broj je deljiv sa 36 ako i samo ako je deljiv sa 4 i sa 9. Odatle sledi da je broj $\overline{7b}$ deljiv sa četiri a zbir $a+2+0+1+7+b = 10+a+b$ deljiv sa 9. Na osnovu deljivosti broja $\overline{7b}$ sa četiri sledi da je $b \in \{2, 6\}$. Odatle sledi:

- $b = 2 : 9|a + 10 + 2 \Rightarrow a = 6$,
- $b = 6 : 9|a + 10 + 6 \Rightarrow a = 2$.

Traženi brojevi su $n_1 = 620172$ i $n_2 = 220176$.

Zadatak 2 *Broju* 2017 *dopisati, sa desne strane, trocifreni broj tako da novodobijeni broj bude deljiv sa* 7, 8 *i* 9.

Rešenje: Kako je broj $\overline{2017abc}$, gde su a, b, c proizvoljne dekadne cifre, deljiv sa $7, 8$ i 9 i kako su brojevi $7, 8$ i 9 uzajamno prosti, to sledi da je broj $\overline{2017abc}$ deljiv sa $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Važi da je

$$2017000 = 4001 \cdot 504 + 496,$$

pa su brojevi oblika $\overline{2017abc}$ deljivi sa 504 zapravo brojevi 2017008 i 2017512.

Zadatak 3 *Koliko najmanje sabiraka je potrebno da ima zbir*

$$S_N = \underbrace{2017 + 2017 + \ldots + 2017}_{N \ sabiraka}$$

da bi bio deljiv sa 99*?*

Rešenje: Broj 2017 zadovoljava kongruenciju

$$2017 \equiv_{99} 37.$$

Kako su brojevi 37 i 99 uzajamno prosti, to sledi da je najmanje N, za koje je broj S_N deljiv sa 99, jednako 99.

Zadatak 4 *Odrediti ostatak pri deljenju broja*

$$N_{2017} = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2017} \tag{1}$$

sa 127*.*

Rešenje: Važi da je

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 127.$$

U zbiru N_{2017} ima ukupno 2017 sabiraka. Grupišimo, zdesna na levo, te sabirke u disjunktne grupe od po sedam uzastopnih sabiraka. Zbir elemenata svake od tih grupa zadovoljava naredne jednakosti:

$$\begin{aligned}&2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3} + 2^{k+4} + 2^{k+5} + 2^{k+6}\\ &= 2^k\big(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6\big) = 2^k \cdot 127.\end{aligned}$$

Važi da je $2017 \equiv_7 1$. Pored toga, zbir N_{2017} moguće je predstaviti u obliku

$$N_{2017} = 2 + \big(2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8\big) + \ldots + \big(2^{2011} + 2^{2012} + \ldots + 2^{2017}\big).$$

Odatle sledi da je $N_{2017} \equiv_{127} 2$.

Zadatak 5 *Dato je* 2017 *uzastopnih neparnih prirodnih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$. *Odrediti ostatak pri deljenju sume*

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2017} \tag{2}$$

sa 2017.

Rešenje: Neka brojevi $a_k, k = 1, \ldots, 2017$, imaju oblike

$$\begin{array}{lclcl} a_1 & = & 2n+1 & = & 2n+2\cdot 1-1, \\ a_2 & = & 2n+3 & = & 2n+2\cdot 2-1, \\ & & & \ddots & \\ a_{2017} & = & 2n+4033 & = & 2n+2\cdot 2017-1. \end{array} \tag{3}$$

U tom slučaju je

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2017} \\ &= 2017 \cdot 2n + 2\big(1 + 2 + \ldots + 2017\big) - (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{2017 \text{ sabiraka}}) \\ &= 2017 \cdot 2n + 2 \cdot \frac{2017 \cdot 2018}{2} - 2017 \\ &= 2017\big(2n + 2017\big) \equiv_{2017} 0, \end{aligned}$$

pa je traženi ostatak jednak 0.

Zadatak 6 *Neka su* $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$ *prirodni brojevi manji od* 2017. *Koliki je ostatak deljenja broja*

$$\zeta = n_1^{2016!} + n_2^{2016!} + \ldots + n_{2017}^{2016!}$$

sa 2017*?*

Rešenje: Brojevi $n_k, k = 1, \ldots, 2017$, su uzajamno prosti sa prostim brojem 2017. Kako važi da je

$$n_k^{2016!} = \left(n_k^{2016}\right)^{2015!},$$

$k = 1, \ldots, 2017$, to na osnovu male Fermaove teoreme, koja kaže da *ako su* a *i* p *uzajamno prosti prirodni brojevi onda je* $a^{p-1} \equiv_p 1$, sledi da je zadovoljen niz relacija:

$$n_k^{2016!} = \left(n_k^{2017-1}\right)^{2015!} \equiv_{2017} 1^{2015!} = 1.$$

Na osnovu tog rezultata sledi da su zadovoljene naredne jednakosti i kongruencije:

$$\zeta \equiv_{2017} \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{2017 \text{ sabiraka}} = 2017 \equiv_{2017} 0,$$

pa je broj ζ deljiv sa 2017 a traženi ostatak jednak je 0.

Zadatak 7 *Odrediti različite prirodne brojeve a, b, c, d takve da je*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2017}. \tag{4}$$

Rešenje: Posmatrajmo jednakost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1, \tag{5}$$

pri čemu je $2 \leq a < b < c < d$. Kako je

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} > 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1, \tag{6}$$

sledi da je $a = 2$ jedina moguća vrednost broja a. Odatle sledi da je

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

S obzirom na to da je $2 = a < b < c < d$, sledi da je $b \geq 3$. U ovom slučaju, interesantni su sledeći zbirovi:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{47}{60} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{37}{60} > \tfrac{1}{2},$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{107}{210} > \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{73}{168} < \tfrac{1}{2},$$

odakle sledi da je $b \in \{3, 4, 5\}$.

- Ukoliko je $a = 2, b = 3$, zaključujemo da je $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$. Kako je $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{23}{132} > \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{12} + \frac{1}{13} = \frac{25}{156}$, sledi da je, u ovom slučaju $4 \leq c \leq 11$.

- Ukoliko je $a = 2, b = 4$, sledi da je $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{4}$. S obzirom na to da je $4 = b < c, \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56} > \frac{1}{4}, \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72} < \frac{1}{6}$, zaključujemo da je $5 \leq c \leq 17$.

- Ukoliko je $a = 2, b = 5$, sledi da je $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{10}$. U ovom slučaju je, zbog $b < c$, $c \geq 6$. Zadovoljeno je i to da je $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} > \frac{3}{10}, \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56} < \frac{3}{10}$, pa je $c = 6$ jedina moguća vrednost broja c u ovom slučaju.

Iskoristimo softverski paket *Mathematica* da bismo ubrzali rešavanje ovog zadatka. S obzirom na to da postoji najviše jedna mogućnost za a i najviše tri mogućnosti za b, a s obzirom na dobijena ograničenja za vrednost c, moguće je brut-force analizom odrediti sva rešenja jednačine (5). Program koji će, za svaki od prethodna tri slučaja, biti korišćen je

```
Resenja[a_, b_, b1_, b2_] := Module[{rr = {}},
 For[i = b1, i <= b2, i++,
  If[1/a + 1/b + 1/i != 1,
   rr = Append[rr, {a, b, i, 1/(1 - 1/a - 1/b - 1/i)}]]];
  rr];
```

U prethodnom programu, argumenti $a\_$ i $b\_$ su pojedinačne vrednosti nepoznatih a i b dok su promenljive $b1\_$ i $b2\_$ ograničenja nepoznate c dobijena na osnovu posmatranih vrednosti $a\_$ i $b\_$.

- Rezultat primene programa

  ```
  Resenja[2, 3, 4, 11]
  ```

  jeste skup

$$s_1 = \big\{\{2,3,4,-12\},\{2,3,5,-30\},\{2,3,7,42\},\{2,3,8,24\},\\ \{2,3,9,18\},\{2,3,10,15\},\{2,3,11,\frac{66}{5}\}\big\}. \tag{8}$$

- Rezultat primene programa

```
Resenja[2, 4, 5, 17]
```

jeste skup

$$
\begin{aligned}
s_2 = \Big\{&\{2,4,5,20\},\{2,4,6,12\},\{2,4,7,\frac{28}{3}\},\{2,4,8,8\},\\
&\{2,4,9,\frac{36}{5}\},\{2,4,10,\frac{20}{3}\},\{2,4,11,\frac{44}{7}\},\{2,4,12,6\},\\
&\{2,4,13,\frac{52}{9}\},\{2,4,14,\frac{28}{5}\},\{2,4,15,\frac{60}{11}\},\{2,4,16,\frac{16}{3}\},\\
&\{2,4,17,\frac{68}{13}\}\Big\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

- Kako je, u ovom slučaju, moguća samo jedna vrednost promenljive c i to $c = 6$, to sledi da je $\frac{1}{d} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$. Kako su 2 i 15 uzajamno prosti brojevi to sledi da jednačina (5), u ovom slučaju, nema rešenja.

Kako svaka uređena četvorka, dobijena kao rezultat primene prethodnog programa, treba da bude potencijalno rešenje jednačine (5) u skupu prirodnih brojeva sledi da je skup rešenja jednačine (5) jednak

$$
\begin{aligned}
s = \Big\{&\{2,3,7,42\},\{2,3,8,24\},\{2,3,9,18\},\\
&\qquad\{2,3,10,15\},\{2,4,5,20\},\{2,4,6,12\}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Neka je $v = \{a_0, b_0, c_0, d_0\}$ proizvoljna uređena četvorka iz skupa S. Važi da je

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} + \frac{1}{c_0} + \frac{1}{d_0} = 1.$$

Deljenjem obeju strana te jednakosti sa 2017 dobija se da je

$$\frac{1}{a_0 \cdot 2017} + \frac{1}{b_0 \cdot 2017} + \frac{1}{c_0 \cdot 2017} + \frac{1}{d_0 \cdot 2017} = \frac{1}{2017},$$

odakle sledi da je $a = 2017a_0, b = 2017b_0, c = 2017c_0, d = 2017d_0$ rešenje zadatka. Konkretno, sva rešenja ovog zadatka su uređene četvorke navedene u narednom skupu

$$S = \Big\{(4034, 6051, 14119, 84714), (4034, 6051, 16136, 48408),$$
$$(4034, 6051, 18153, 36306), (4034, 6051, 20170, 30255),$$
$$(4034, 8068, 10085, 40340), (4034, 8068, 12102, 24204)\Big\}.$$

Prethodni algoritam bio je namenjen da se koristi uz dobro poznavanje matematike. Brute-force algoritam koji rešava Diofantovu jednačinu (5) ne zahtevajući prethodnu matematičku analizu problema jeste

```
For[i = 1, i <= 100, i++,
 For[j = i + 1, j <= 100, j++,
  For[k = j + 1, k <= 100, k++,
   For[m = k + 1, m <= 100, m++,
  If[(1/i + 1/j + 1/k + 1/m == 1), Print[{i, j, k, m}]]]]]]
```

Korišćenjem tog algoritma dobijaju se sva rešenja jednačine (5) jednim pozivom programa.

Zadatak 8 *Odrediti cele brojeve* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$*, za koje važi da je*

$$2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + 2^{x_4} + 2^{x_5} + 2^{x_6} + 2^{x_7} = 2017. \tag{10}$$

Rešenje: Kako je $2^{11} = 2048 > 2017$, mora da važi da je $x_7 \leq 10$. Kako je

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2047$$

i

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30,$$

sledi da je rešenje zadatka uređena sedmorka

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 10).$$

Zadatak 9 *Odrediti poslednje dve cifre broja* $2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$.

Rešenje: Neka je $a = 2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}$. Jasno je da važi da je

$$a \equiv_{100} 17^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}.$$

Važe i naredne kongruencije:

$$\begin{array}{lll}
17^1 \equiv_{100} 17 & 17^8 \equiv_{100} 41 & 17^{15} \equiv_{100} 93 \\
17^2 \equiv_{100} 89 & 17^9 \equiv_{100} 97 & 17^{16} \equiv_{100} 81 \\
17^3 \equiv_{100} 13 & 17^{10} \equiv_{100} 49 & 17^{17} \equiv_{100} 77 \\
17^4 \equiv_{100} 21 & 17^{11} \equiv_{100} 33 & 17^{18} \equiv_{100} 9 \\
17^5 \equiv_{100} 57 & 17^{12} \equiv_{100} 61 & 17^{19} \equiv_{100} 53 \\
17^6 \equiv_{100} 69 & 17^{13} \equiv_{100} 37 & 17^{20} \equiv_{100} 1 \\
17^7 \equiv_{100} 73 & 17^{14} \equiv_{100} 29 & 17^{21} \equiv_{100} 17
\end{array}$$

Na osnovu prethodnog jasno sledi da važi da je $17^{20k} \equiv_{100} 1$ za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$. Važi i da je $2016 \equiv_{20} 16$ pa je

$$2016^n \equiv_{20} 16^n \equiv_{20} 16,$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, što se jednostavno dokazuje matematičkom indukcijom, a na osnovu činjenice da je $16^2 = 256 \equiv_{20} 16 \equiv_{20} 16^1$.

Konačno, važi da je

$$a = 2017^{2016^{2015^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}} = 2017^{2016^{n_0}},$$

gde je $n_0 = 2015^{2014^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$ pa se, na osnovu prethodnih rezultata, zaključuje da važi

$$a \equiv_{100} 17^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} = 17^{20m_0+16} \equiv_{100} 17^{16} \equiv_{100} 81, \tag{11}$$

na osnovu čega sledi da su poslednje dve cifre broja a cifre 81.

Zadatak 10 *Odrediti 27, 217. i 2017. cifru broja*

$$d = 1234567891011121314151617\ldots$$

dobijenog nadovezivanjem prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$, *udesno, jednog za drugim.*

Rešenje: Za zapisivanje svih jednocifrenih brojeva treba upotrebiti devet cifara, a kako je $27 - 9 = 18$ i $18 = 9 \cdot 2$, 27. cifra broja d je poslednja cifra devetog dvocifrenog broja, odnosno cifra 8.

Za zapisivanje svih dvocifrenih brojeva treba upotrebiti 180 cifara, a kako je
$217 - 9 - 180 = 28$ i $28 = 9 \cdot 3 + 1$, tj. činjenice da se pomoću 28 cifara može zapisati 9 trocifrenih brojeva, 217. cifra broja d je prva cifra desetog trocifrenog broja. Kako je $9 + 90 + 9 = 108$, sledi da je deseti trocifreni broj broj 109 i tražena cifra je cifra 1.

Kako je $2017 - 9 - 180 = 1828$ i $1828 = 609 \cdot 3 + 1$, to sledi da je 2017. cifra broja d prva cifra 610. trocifrenog broja, odnosno cifra 7.

Zadatak 11 *Da li je od barem po jedne kocke, čije su ivice* $1cm$, $2cm$, $3cm$, *moguće sastaviti geometrijsko telo čija je zapremina jednaka kocki ivice dužine* $14cm$*?*

Rešenje: Pretpostavimo da je x kocki ivice $1cm$, y kocki ivice $2cm$ i z kocki ivice $3cm$ od kojih je formirano traženo geometrijsko telo. S obzirom na to da je zapremina tog tela jednaka zapremini kocke čija je ivica $14cm$, to sledi da su x, y, z rešenja sistema Diofantovih jednačina

$$\begin{cases} 1cm^3 \cdot x + 8cm^3 \cdot y + 27cm^3 \cdot z = (14cm)^3 = 2744cm^3 \quad / : cm^3 \\ x + y + z = 2017. \end{cases} \tag{12}$$

Iz tog sistema sledi da su prirodni brojevi y i z rešenja Diofantove jednačine

$$7y + 26z = 727. \tag{13}$$

Odatle zaključujemo da je

$$y = -3z + 103 - \frac{5}{7}z + \frac{6}{7} \qquad \boxed{u := -\frac{5}{7}z + \frac{6}{7},} \tag{14}$$

pa je

$$y = -3z + 103 + u.$$

Kako je $y, z, 3, 103 \in \mathbb{Z}$, to sledi da je $u \in \mathbb{Z}$. Još je i

$$7u + 5z - 6 = 0,$$

odnosno

$$z = -u - \frac{2}{5}u + 1 + \frac{1}{5} \qquad \boxed{v := -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}.} \tag{15}$$

Analogno prethodnom, sledi da je $v \in \mathbb{Z}$. Odatle sledi da je

$$5v + 2u - 1 = 0,$$

što znači da je

$$u = -2v - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}$$

Iz te jednačine sledi da je

$$u = -2v + \omega \qquad \boxed{\omega := -\frac{1}{2}v + \frac{1}{2},} \tag{16}$$

pri čemu je, analogno prethodnom, $\omega \in \mathbb{Z}$. Konačno, odatle sledi

$$\boxed{v := -2\omega + 1.} \tag{17}$$

Krenimo sada, sa vraćanjem prethodnih uokvirenih smena, kroz jednačine (17)$\longrightarrow$(16)$\longrightarrow$(15)$\longrightarrow$(14). Cilj je izraziti y, z i, posledično, x kao funkciju od ω.

$$
\begin{aligned}
&u = -2v + \omega,\\
&u = -2(-2\omega + 1) + \omega,\\
&\boxed{u = 5\omega - 2,}\\
&z = -u + 1 + v\\
&z = -(5\omega - 2) + 1 + (-2\omega + 1),\\
&\boxed{z = -7\omega + 4,}\\
&y = -3z + 103 + u,\\
&y = -3(-7\omega + 4) + 103 + (5\omega - 2),\\
&\boxed{y = 26\omega + 89.}
\end{aligned}
$$

Kako je $y \geq 0$ i $z \geq 0$, to sledi da je $\omega \geq -\frac{89}{26} \approx -3.42$ i $\omega \leq \frac{4}{7} \approx 0.57$. Kako je $\omega \in \mathbb{Z}$ to sledi da je $\omega \in \{-3, -2, -1, 0\}$, odgovor na pitanje iz zadatka je MOGUĆE JE, a postoje četiri mogućnosti za x, y, z i to

$$(x, y, z) \in \big\{(1981, 11, 25), (1962, 37, 18), (1943, 63, 11), (1924, 89, 4)\big\}.$$

Zadatak 12 *Neka je*

$$N_n = N\big(n^1, n^2, \ldots, n^{1008}; c_{2017}\big) = \overline{n^1 n^2 \ldots n^{1008} c_{2017}}$$

prirodan broj dobijen nadovezivanjem najviše dvocifrenih brojeva $n^k = \overline{c_1^k c_2^k}, k = 1, \ldots, 1008,$ *i cifre* c_{2017}. *Koliko je takvih brojeva kod kojih su brojevi* $n^1, n^3, \ldots, n^{1007}$ *deljivi sa* 4, *brojevi* $n^2, n^4, \ldots, n^{1008}$ *su prosti a cifra* c_{2017} *jeste deljiva sa* 3*?*
Definicija: Broj je najviše dvocifren ako je sačinjen od proizvoljne dve cifre od kojih prva može biti 0.

Rešenje: Razvrstajmo brojeve $0, 1, 2, \ldots, 99$ u disjunktne skupove $S^k = \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\}, k = 0, \ldots, 24$. Ti skupovi su:

$$\begin{array}{lll}
S^0 = \{00, 01, 02, 03\} & S^1 = \{04, 05, 06, 07\} & S^2 = \{08, 09, 10, 11\} \\
S^3 = \{12, 13, 14, 15\} & S^4 = \{16, 17, 18, 19\} & S^5 = \{20, 21, 22, 23\} \\
S^6 = \{24, 25, 26, 27\} & S^7 = \{28, 29, 30, 31\} & S^8 = \{32, 33, 34, 35\} \\
S^9 = \{36, 37, 38, 39\} & S^{10} = \{40, 41, 42, 43\} & S^{11} = \{44, 45, 46, 47\} \\
S^{12} = \{48, 49, 50, 51\} & S^{13} = \{52, 53, 54, 55\} & S^{14} = \{56, 57, 58, 59\} \\
S^{15} = \{60, 61, 62, 63\} & S^{16} = \{64, 65, 66, 67\} & S^{17} = \{68, 69, 70, 71\} \\
S^{18} = \{72, 73, 74, 75\} & S^{19} = \{76, 77, 78, 79\} & S^{20} = \{80, 81, 82, 83\} \\
S^{21} = \{84, 85, 86, 87\} & S^{22} = \{88, 89, 90, 91\} & S^{23} = \{92, 93, 94, 95\} \\
 & S^{24} = \{96, 97, 98, 99\}. &
\end{array} \tag{18}$$

Najviše dvocifreni prosti brojevi su

$$\begin{aligned} P = \{&02, 03, 05, 07, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \\ &41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}, \end{aligned} \tag{19}$$

ukupno 25 njih. Cifre deljive sa tri su

$$C = \{0, 3, 6, 9\}, \tag{20}$$

ukupno 4 njih.

Dvocifreni početak n^1 traženih brojeva prvi je element svakog od skupova $S^3, S^4, \ldots, S^{24}$, $\boxed{\text{ukupno 22 mogućnosti}}$.

Brojevi $n^3, n^5, \ldots, n^{1007}$, $\boxed{\text{njih ukupno 503}}$, prvi su elementi skupova $S^0, S^1, \ldots, S^{24}$ $\boxed{\text{kojih je 25}}$.

Brojevi $n^2, n^4, \ldots, n^{1008}$, $\boxed{\text{njih 504}}$, elementi su skupa P kojih je $\boxed{\text{ukupno 25}}$.

Poslednja cifra c_{2017} element je skupa P koji sadrži $\boxed{\text{4 elementa}}$.

Iz prethodnog sledi da je traženih brojeva ukupno

$$22 \cdot 25^{503} \cdot 25^{504} \cdot 4 = 88 \cdot 25^{1007}. \tag{21}$$

Literatura

[1] M. Ašić, M. Božić, Lj. Čukić, V. Janković, Z. Kadelburg, V. Mićić, L. Milin, J. Vukmirović, Đ. Vukomanović, *Međunarodne matematičke olimpijade*, DMS, Beograd, 1986.

[2] B. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, Materijali za mlade matematičare, sveska 49, 2-go izd, DMS, Beograd 2011.

[3] Đ. Baralić, *300 pripremnih zadataka za juniorske matematičke olimpijade: iskustvo Srbije*, Klet, Beograd 2014.

[4] Z. Kadelburg, P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike*, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, DMS, Beograd 1990.

[5] Z. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva*, Materijali za mlade matematičare, sveska 15, 5. izd, DMS, Beograd, 2013.

[6] A. B. Simić, D. I. Spasić, J. D. Krstić, D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Zadaci sa brojem* 2016, Matematika i informatika 3(2)(2016), 17–29.

[7] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Zanimljivi algebarski zadaci sa brojem 2012*, Nastava matematike, LVII, 1-2 (2012), 45-51.

[8] R. Tošić, *Matematički problemi '97: 365 zadataka sa rešenjima sa raznih takmičenja u svetu*, Arhimedes, Novi Sad, 1997.

[9] Lj. Velimirović, M. Zlatanović, P. Stanimirović, *Geometrija krivih i površi uz korišćenje paketa Mathematica*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2010.

[10] *Matematički list*, XXXII-3, DMS Beograd, 1997.

[11] *Matematički list*, XXXIII-6, DMS Beograd, 1999.

[12] *Matematički list*, XLVI-4, DMS Beograd, 2012.

[13] *Matematički list*, XLVIII-5, DMS Beograd, 2014.

[14] *Matematički list*, XLIX-3, DMS Beograd, 2015.

[15] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici „ Zadaci iz matematike" časopisa *Tangenta* 1995-2005. godine, Materijali za mlade matematičare, sveska 45, DMS, Beograd 2006.