Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 5(1) (2020), 31-38

# Rešavanje kombinatornih problema primenom linearne algebre

**Marko Milenković**
učenik Gimnazije "Svetozar Marković", Niš
e-mail: marko.02.milenkovic@gmail.com
**Milica Z. Kolundžija**
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu
e-mail: milica.kolundzija@gmail.com, mkolundzija@pmf.ni.ac.rs

**Sažetak**

U ovom radu su prikazani dokazi za dva kombinatorna problema u kojima se koristi alat linearne algebre.

## 1 Uvod

Desi se ponekad da naiđemo na zadatak, koji ne znamo ni da počnemo. Ne možemo da nađemo neku korisnu ideju i svi poznati šabloni ga ne rešavaju. Oblast u kojoj se ovo verovatno najčešće dešava je kombinatorika, jer je tu često potreban ili neki dovitljiv način za prebrojavanje ili neka neočekivana taktika i logika. Zbog toga ćemo u ovom tekstu pokazati jedan jako neklasičan pristup rešavanju zadataka iz kombinatorike.

Sa druge strane, ponekad se čini da linearna algebra nema veliku primenu u rešavanju zanimljivih i takmičarskih zadataka, jer u sebi sadrži dosta računice i definicija. Iz tog razloga, pokušaćemo da oborimo ovaj mit, pokazujući kako linearna algebra može da bude korisna pri rešavanju netrivijalnih kombinatornih zadataka.

## 2 Teorijske osnove

Kako bismo mogli da primenimo linearnu algebru u rešavanju predstavljenih problema, najpre ćemo definisati osnovne pojmove i navesti neka poznata tvrđenja.

**Definicija 1.** *Neka je $\mathbb{K}$ polje. Matrica tipa $m\times n$, $m,n\in\mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{K}$ jeste svaka uređena $m$-torka uređenih $n$-torki elemenata iz $\mathbb{K}$, tj.*
$$((a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}),\ldots,(a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})).$$
*Skup svih matrica tipa $m\times n$ nad poljem $\mathbb{K}$ označavamo sa $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Za rad sa matricama praktičniji je zapis matrice u pravuogaonom obliku.

Matrica $A$ tipa $m\times n$ može se zapisati na sledeći način $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

ili, još kraće, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$.

Kada je $m=n$, matricu nazivamo kvadratnom matricom reda $n$.

Navedimo i osnovne operacije sa matricama.

**Definicija 2.** *Transponovana matrica matrice $A$ se označava sa $A^T$ i ako je*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n} \quad \textit{tada je } A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

**Definicija 3.** *Matrice $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{k\times l}$ su jednake ako je $m=k$, $n=l$ i $a_{ij}=b_{ij}$ za svako $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ i svako $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.*

**Definicija 4.** *Proizvod broja $\lambda\in\mathbb{R}$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) i matrice $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ jeste matrica $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ takva da je $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ za svako $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ i svako $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.*

**Definicija 5.** *Zbir matrice $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i matrice $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ jeste matrica $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ takva da je $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ za svako $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ i svako $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.*

**Definicija 6.** *Proizvod matrica $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ je matrica $C=[c_{ij}]_{m\times k}$, takva da je $c_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}$.*

Za definisanje pojma determinante matrice, potrebni su nam pojmovi u vezi sa permutacijama. Navedimo najpre njih.

Neka je $X$ neprazan skup. Permutacija skupa $X$ jeste svako bijektivno preslikavanje skupa $X$ na samog sebe. Skup svih permutacija skupa $X$ označavamo sa $S_X$.

Ono što je od interesa za definisanje pojma determinante jeste skup konačnih permutacija kada je $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo sa $S_n$. Ako je permutacija $p \in S_n$, tada koristimo zapis za preslikavanje $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$. Ukupan broj permutacija nad skupom od $n$ elemenata jednak je $|S_n| = n!$.

Ukoliko u permutaciji $p$ imamo da je veći broj ispred manjeg, tada kažemo da ti brojevi obrazuju *inverziju*. Na primer, u permutaciji 312 skupa $\{1, 2, 3\}$ imamo dve inverzije jer je 3 ispred 1 i 3 je ispred 2. Ukupan broj inverzija u permutaciji $p$ označavamo sa $inv(p)$.

**Definicija 7.** *Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kvadratna matrica nad poljem $\mathbb{R}$. Determinanta matrice $A$, u oznaci* $\det A$*, jeste broj*

$$\sum_{p\in S_n} (-1)^{inv(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \ldots a_{np(n)}.$$

**Sarusovo pravilo.** Determinanta matrice $3 \times 3$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, računa se po formuli $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

**Definicija 8.** *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda $n$. Minor elementa $a_{ij}$, u oznaci $M_{ij}$, jeste determinanta matrice dobijene izbacivanjem vrste i kolone u kojoj se nalazi taj element. Algebarski kofaktor elementa $a_{ij}$ označavamo sa $A_{ij}$ i jednak je $(-1)^{i+j}M_{ij}$.*

**Teorema 1.** (Laplasova teorema) *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda $n$. Tada važi*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det A, & i = j \end{cases}.$$

Primetimo da se u Laplasovoj teoremi u sumi sa leve strane jednakosti javljaju elementi $i$-te vrste matrice $A$. Zato i kažemo da se determinanta razvija po $i$-toj vrsti.

Potpuno analogno tome, možemo determinantu razviti i po koloni, pa važi i sledeća jednakost:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det A, & i = j \end{cases}.$$

**Teorema 2.** *Neka je $A$ kvadratna matrica reda $n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je* $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

**Lema 1.** *Neka je $A$ kvadratna matrica sa celobrojnim vrednostima takva da na glavnoj dijagonali ima neparne brojeve, dok van glavne dijagonale ima parne brojeve. Tada matrica $A$ ima determinantu razičitu od nule.*

*Dokaz.* Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrica takva da su na glavnoj dijagonali neparni brojevi, a svi ostali parni. Tada je za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi $a_{ij} = \begin{cases} \text{paran broj}, & i \neq j \\ \text{neparan broj}, & i = j \end{cases}$.
Dokazaćemo da je determinanta matrice $A$ različita od nule tako što ćemo dokazati da determinanta mora biti neparan broj. Kao takav, ne može biti nula.

*I način:* Koristićemo matematičku indukciju po redu $n$ matrice $A$.

Za $n = 1$, matrica $A$ sadrži jednu vrednost koja je neparan broj pa je njena determinanta jednaka tom neparnom broju. Dakle, $\det A$ je neparan broj.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaku matricu reda $n - 1$ koja na glavnoj dijagonali ima neparne brojeve a van glavne dijagonale parne. Neka takve matrice imaju neparnu vrednost za determinantu.

Dokažimo da tvrđenje važi i za matricu $A$ reda $n$. Izračunajmo determinantu matrice $A$ koristeći Laplasovu teoremu razvijanjem po prvoj vrsti matrice $A$:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Vrednosti $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ su parni brojevi pa je i suma $a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ paran broj. Posmatrajmo, zato, sabirak $a_{11}A_{11}$. Broj $a_{11}$ je neparan po pretpostavci. Algebarski kofaktor $A_{11}$ jednak je determinanti matrice koju dobijemo kada iz matrice $A$ izbacimo prvu vrstu i prvu kolonu. Označimo tu matricu sa $B$. Matrica $B$ je matrica reda $n-1$ sa osobinom da na glavnoj dijagonali ima neparne brojeve, a van dijagonale parne. Zato, možemo primeniti indukcijsku pretpostavku na matricu $B$ i zaključiti da ima neparnu determinantu. Odatle sledi da je i vrednost $A_{11}$ neparan broj, pa je $a_{11}A_{11}$ neparan broj. Dakle, determinanta matrice $A$ je, takođe, neparan broj.

*II način:* Kada posmatramo definiciju determinante matrice $A$ vidimo da se u sumi koja je određuje javljaju proizvodi po permutacijama koji svi sadrže parne činioce sem jednog sabirka koji je jednak proizvodu $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ koji je neparan broj. Zato, determinanta matrice $A$ jednaka je zbiru tog neparnog broja i zbira parnih. Dakle, $\det A$ je neparan broj. □

**Lema 2.** *Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kvadratna matrica sa celobrojnim vrednostima i neka je $m \in \mathbb{N}$. Neka je matrica $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ takva da su njene vrednosti dobijene tako što su uzete odgovarajuće vrednosti matrice $A$ po modulu $m$, tj. za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi $a_{ij} \equiv_m b_{ij}$. Tada je* $\det B \equiv_m \det A$.

*Dokaz.* Dokaz sledi direktnom primenom definicije determinante. Zaista,
$\det A = \sum_{p\in S_n} (-1)^{inv(p)} a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots a_{np(n)} \equiv_m \sum_{p\in S_n} (-1)^{inv(p)} b_{1p(1)}b_{2p(2)}\dots b_{np(n)} = \det B.$

□

**Definicija 9.** *Kolone matrice $K_1, K_2, \ldots, K_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ su linearno nezavisne ako nijedna od njih nije linearna kombinacija ostalih.*
*Analogno, vrste matrice $V_1, V_2, \ldots, V_n \in M_{1\times m}(\mathbb{R})$ su linearno nezavisne ako nijedna od njih nije linearna kombinacija ostalih.*

**Teorema 3.** *Najveći broj linearno nezavisnih vrsta jednak je najvećem broju linearno nezavisnih kolona jedne matrice.*

**Definicija 10.** *Rang matrice $A$ definišemo kao najveći broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice i označavamo sa $r(A)$. Rang je jednak 0 samo za nula matricu.*

Primetimo da iz same definicije ranga sledi da rang matrice nije veći od broja vrsta i kolona matrice pa važi sledeća teorema.

**Teorema 4.** *Za matricu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, važi $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.*

**Teorema 5.** *Rang proizvoda matrice $A \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ i matrice $B \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ nije veći od minimuma rangova tih matrica, tj. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.*

**Teorema 6.** *Neka je $A$ kvadratna matrica reda $n$ čija je determinanta različita od nule. Tada je rang matrice $A$ jednak $n$.*

Prilikom dokaza drugog problema, potrebni su nam pojmovi i u vezi geometrijskih vektora.

**Definicija 11.** *Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u prostoru, u oznaci $\vec{a}\cdot\vec{b}$, jednak je $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.*
*Intezitet vektora $\vec{a}$ jednak je $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.*

Svaka tačka u ravni (prostoru) određuje jedan geometrijski vektor. To je vektor od koordinatnog početka do te tačke. Ukoliko tačka $A$ ima koordinate $(a_1, a_2)$ u ravni, tada vektor koji ona određuje, vektor $\overrightarrow{OA}$, određen je takođe tim koordinatama. Analogno važi i u prostoru.

**Teorema 7.** *Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori u ravni i neka su zadati koordinatama $\vec{a} = (a_1, a_2)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Tada za njihov skalarni proizvod važi $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2$.*

**Teorema 8.** (Kosinusna teorema) *U svakom trouglu važi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, gde su $a$, $b$ i $c$ stranice trougla i $\theta$ ugao naspram stranice $c$.*

## 3 Problemi i rešenja

**Problem 1.** *Grad Niš ima populaciju od* **n** ***ljudi*** *i u njemu je registrovano* **k** ***fudbalskih klubova****. Kako neki fudbaleri ne zarađuju dovoljno, sasvim je moguće da jedan fudbaler igra u više klubova. Nakon velike fudbalske revolucije, došlo je do toga da* ***svaki klub ima neparan broj članova i da svaka dva kluba imaju paran broj zajedničkih članova****. Lokalni matematičar u usponu, Džoni, bio je zadivljen ovom činjenicom i pokušavao je da vidi da li ovde postoji neko matematičko pravilo. Posle dosta računanja pokazao je da je uvek* $\mathbf{n} \geq \mathbf{k}$*. Da li je Džoni pogrešio ili je ovo tačna izjava?*

***Rešenje.*** Označimo sa $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sve stanovnike, a sa $F_1, F_2, \ldots, F_k$ skupove koji označavaju fudbalske klubove. Neka nam matrica $A = [a_{ij}]_{k\times n}$ daje informaciju o tome koji stanovnik igra za koji klub. Definisaćemo elemente matrice na sledeći način:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } s_j \text{ član fudbalskog kluba } F_i, \text{ tj. ako } s_j \in F_i \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, vrste matrice $A$ sadrže informacije o fudbalskim klubovima, dok kolone sadrže informacije o stanovnicima. Jasno, iz Teoreme 4, rang matrice $A$ ne može biti veći od $n$, pa je $r(A) \leq n$.

Označimo sa $B = [b_{ij}]_{k\times k}$ matricu koja je jednaka proizvodu matrice $A$ i njene transponovane matrice $A^T$, tj. neka je $B = AA^T$. Uvođenje matrice $B$ možda ne deluje kao intuitivan potez, međutim, pozicija $(i, j)$ matrice $B$ sadrži zanimljivu informaciju. Na toj poziciji u matrici $B$ nalazi se element $b_{ij}$ takav da je $b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}a_{j\ell}$. Poslednja jednakost važi jer množimo odgovarajuće elemente $i$-te vrste matrice $A$ sa odgovarajućim elementima $j$-te kolone matrice $A^T$, koja je, zapravo, $j$-ta vrsta matrice $A$. Posmatrajmo proizvode $a_{i\ell}a_{j\ell}$ za $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Proizvod $a_{i\ell}a_{j\ell}$ će biti jednak jedinici kada su oba, i $a_{i\ell}$ i $a_{j\ell}$, jednaki jedinici, odnosno kada je stanovnik $s_\ell$ član i fudbalskog kluba $F_i$ i fudbalskog kluba $F_j$. Ukoliko stanovnik $s_\ell$ nije član oba fudbalska kluba $F_i$ i $F_j$, tada je $a_{i\ell}a_{j\ell} = 0$. Zato su sabirci u sumi $\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}a_{j\ell}$ jednaki ili 0 ili 1, s tim što svaka jedinica odgovara jednom stanovniku koji igra u oba fudbalska kluba $F_i$ i $F_j$. Dakle, suma nam daje broj stanovnika koji igraju u oba fudbalska kluba, pa je $b_{ij}$ broj elemenata skupa $F_i \cap F_j$. Kako znamo da svaka dva kluba imaju paran broj zajedničkih članova, dok svaki klub ima neparan broj članova i $F_i \cap F_i = F_i$, to za svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ važi $b_{ij} = |F_i \cap F_j| = \begin{cases} \text{paran broj}, & i \neq j \\ \text{neparan broj}, & i = j \end{cases}$. Dakle, matrica $B$ je takva da na glavnoj dijagonali ima neparne brojeve, dok su van glavne dijagonale parni brojevi. Na osnovu Leme 1 sledi da je $\det B \neq 0$. Dalje, iz Teoreme 8 zaključujemo da je rang matrice $B$ jednak $k$.

Iz Teoreme 5 sledi da rang matrice $B$ nije veći od ranga matrice $A$ pa je $k = r(B) \leq r(A) \leq n$. Ovim smo pokazali da je Džonijeva nejednakost ispravna. $\square$

**Problem 2.** *Nakon svog velikog otkrića, Džoni je potrčao kod svog prijatelja Skočka, da mu se pohvali svojim novim dokazom. Međutim, Skočko mu je ubrzo prekinuo radost, saopštivši mu da je tu nejednakost pokazao američki matematičar Berlekamp još davne 1969. godine. Skočko je, zatim, pokazao Džoniju svoje najnovije otkriće -* ***ne postoje četiri tačke u ravni, tako da je rastojanje između svake dve od njih neparan prirodan broj****. Džoni, vidno snuždenog raspoloženja, bio je skoro siguran da Skočko pokušava da se pravi važan i da njegovo otkriće nije tačno. Da li je tačno da ne postoje takve četiri tačke ili je Džoni u pravu i ovoga puta?*

***Rešenje.*** Pretpostavimo da postoje takve četiri tačke. Bez gubljenja opštosti, možemo ih translirati tako da su to tačke kojima odgovaraju vektori: $\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Sada $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$, $|\vec{c}-\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{c}|$ moraju biti neparni brojevi.

Primetimo da za proizvoljno $k \in \mathbb{Z}$ broj $\ell = 2k+1$ je neparan broj za koji važi $\ell^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$. Kako je $k(k+1)$ uvek paran, to je $4k(k+1)$ broj deljiv sa 8, pa kvadrat neparnog broja $\ell^2$ uvek daje ostatak 1 pri deljenju sa 8. Dakle, za proizvoljan neparan broj $\ell$ važi da je $\ell^2 \equiv_8 1$, gde je $\equiv_m$ oznaka za relaciju kongruencije po modulu $m$ koja je definisana na sledeći način: $x \equiv_m y$ ako $m \mid x - y$. Zato, primetimo da je $|\vec{a}|^2 \equiv_8 1$.

Primenom Kosinusne teoreme (Teorema 8), sledi da važi: $2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 \equiv_8 1$. Istu teoremu možemo primeniti i na $2\,\vec{b}\cdot\vec{c}$ i $2\,\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Formirajmo sada matricu rastojanja

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix}$$

Kada bi elemente matrice $A$ posmatrali po modulu 8, znali bismo da odredimo samo elemente na glavnoj dijagonali. Ali, ako bismo pomnožili sve elemente matrice sa 2, onda bi mogli da odredimo sve vrednosti dobijene matrice po modulu 8. Zato je matrica $2A$ kongruentna po modulu 8 sa matricom

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sarusovim pravilom izračunavamo determinatnu matrice $B$ i dobijamo $\det B = 4$. Iz Leme 2 zaključujemo da je $\det\ 2A \equiv_8 4$, odakle imamo da je $\det\ 2A \neq 0$. Kako iz Teoreme 2 sledi $\det\ 2A = 2^3 \det A$, to je i $\det A \neq 0$. Na osnovu Teoreme 8 sledi da je rang matrice $A$ jednak 3, tj. $r(A) = 3$.

Posmatrajmo matricu

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

gde su $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ i $(c_1, c_2)$ koordinate, redom, vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Uočimo sada da je proizvod matrice $C^T$ i matrice $C$ zapravo matrica $A$. Zaista, iz Teoreme 7 važi

$$\begin{aligned} C^TC &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 & a_1c_1 + a_2c_2 \\ b_1a_1 + b_2a_2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1c_1 + b_2c_2 \\ c_1a_1 + c_2a_2 & c_1b_1 + c_2b_2 & c_1^2 + c_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Teorema 4 nam govori da rang matrice $C$ nije veći od 2, dok nam Teorema 5 govori da rang matrice $A$ nije veći od ranga matrice $C$. Dakle, $r(A) \leq r(C) \leq 2$ što je u kontradikciji sa činjenicom da je $r(A) = 3$.

Kako smo dobili kontradikciju, dokazali smo da pretpostavka ne može biti tačna i da ne postoje četiri tačke u ravni takve da je rastojanje svake dve od njih neparan ceo broj. Dakle, Skočko se ne pravi važan i Džoni ovoga puta nije bio u pravu. $\square$

# 4 Zaključak

Iako to na prvi pogled ne deluje tako, linearna algebra može da pruži elegantno rešenje matematičkom zadatku. Konkretno, u ovom tekstu, pokazali smo kako rešiti neke, naizgled komplikovane, kombinatorne probleme upotrebom nejednakosti između rangova matrica. Glavni korak u rešavanju ovih zadataka bio je primetiti određene matrice i njihove osobine. Nakon rađenja nekoliko takvih zadataka, uočavanje ovih matrica ne bi trebao da bude egzotičan deo posla. I na kraju, uvek treba tražiti nove i nestandardne pristupe rešavanju zadataka, jer je u tome čar matematike.

# Literatura


[1] Jacob Fox, *Applications of linear algebra*, MIT 2009.

[2] Mursalin Habib, *Using Linear Algebra to Solve Combinatorial Problems: Odd Distances*, Brilliant 2018.
https://brilliant.org/discussions/thread/using-linear-algebra-to-solve-combinatorial

[3] Jiři Matoušek, *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2010.

[4] Ljubiša Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Prosveta, Niš, 1997.