

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
<http://www.pmf.ni.ac.rs/mii>
Matematika i informatika 6(1) (2025), 39-95

Nejednakosti

Uroš Stevanović

učenik Gimnazije Švetozar Marković", Niš
e-mail: uste033@gmail.com

Sažetak

U radu se razmatraju elementarne i naprednije nejednakosti sa posebnim naglaskom na metode njihovog rešavanja u takmičarskom kontekstu. Rešenja su prikazana uz obrazloženje motivacije za primenu odgovarajućih nejednakosti u konkretnim zadacima. Na kraju rada ukratko su navedene neke primene nejednakosti.

1 Uvod

Nejednakosti predstavljaju značajnu oblast matematike, sa širokom primenom kako unutar same discipline, tako i u srodnim oblastima poput fizike i računarskih nauka. Pored svoje praktične važnosti, one zauzimaju posebno mesto u matematici zbog raznovrsnosti pristupa i elegantnosti metoda koji se koriste pri njihovom rešavanju.

Karakteristično je da su rešenja zadataka sa nejednakostima često izuzetno kratka, dok sam proces dolaženja do istih zahteva visok stepen uvida, kreativnosti i iskustva. Upravo ovaj raskorak između formalne jednostavnosti i misaone složenosti čini nejednakosti pogodnim poljem za analizu strategija rešavanja.

U radu su ideje ilustrovane prvenstveno kroz pažljivo odabrane primere. Dokazi pojedinih teorema nisu uključeni, jer prevazilaze okvir rada i nisu neophodni za razumevanje razmatranih metoda.

Poseban akcenat je stavljen na objašnjenje motivacije i misaonog procesa koji vodi ka rešenju. Za razliku od standardizovanih prikaza rešenja, koja su predstavljena kao gotovi formalni postupci, cilj ovog rada je da osvetli razloge izbora određenih tehnika i nejednakosti u konkretnim problemima.

2 Elementarne algebarske nejednakosti

Elementarne algebarske nejednakosti su one koje se dokazuju elementarnim algebarskim transformacijama i primenom osnovnih nejednakosti (npr. $x^2 \geq 0$, za $x \in \mathbb{R}$).

2.1 Transformacije i jednostavne nejednakosti

Primer 2.1.1. Dokazati da za svaki pozitivan broj x važi nejednakost

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Rešenje: Množenjem obe strane nejednakosti sa x (što je dozvoljeno jer je $x > 0$) i pojednostavljivanjem izraza dobijamo ekvivalentnu nejednakost $(x - 1)^2 \geq 0$. ■

Primer 2.1.2. Dokazati da za sve pozitivne brojeve x, y, z važi nejednakost

$$x + y + z \geq 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} - \sqrt{zx}).$$

Rešenje: Nejednakost je ekvivalentna očiglednoj $(\sqrt{x} + \sqrt{z} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. ■

Nejednakosti koje pominju samo jednu promenljivu ili koje pominju izraz koji nije simetričan, niti cikličan po promenljivama, često se mogu rešiti preuređivanjem izraza. Ovi primeri su bili relativno jednostavni; posmatrajmo sada jedan složeniji primer.

Primer 2.1.3. Dokazati da za sve prirodne brojeve x, y ($x > y$) važi nejednakost

$$x^2y + x^2 + y^2 \geq xy^2 + 2xy + 3y.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Primetimo da je uslov specifičan - brojevi x i y su prirodni i važi $x > y$. Zbog drugog uslova možemo razmišljati o rastavljanju izraza tako da se u jednoj zagradi nalazi nenegativan izraz $x - y - 1$. Zbog članova x^2y i xy^2 prirodno je podesiti drugu zagradu tako da je xy u njoj. Dodatno, zbog izraza x^2 moramo dodati i x . Na ovaj način dobijamo neželjeni član $-x$, pa

kako bismo kompenzovali dodajemo i jedinicu u drugu zagradu. Matematički ispisano to izgleda ovako:

$$(x - y - 1)(xy + x + 1) = x^2y + x^2 - xy^2 - 2xy - y - 1.$$

Primetimo da jedino nedostaje izraz $y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$, pa je nejednakost sa početka ekvivalentna sa

$$(x - y - 1)(xy + x + 1) + (y - 1)^2 \geq 0,$$

što je očigledno tačno. Jednakost važi za $x - y - 1 = 0$ i $y - 1 = 0$, tj. za $x = 2$ i $y = 1$. ■

Mnoge nejednakosti mogu se rešiti ovim jednostavnim metodama. U složenijim problemima ključan korak često predstavlja upravo transformacija izraza i primena osnovnih nejednakosti, pa su ove metode od izričitog značaja za uspešno rešavanje zadatka.

2.2 Elementarna ograničenja proizvoda i zbirova

U narednim primerima primenjuju se elementarne metode pri analizi ograničenja proizvoda i zbirova.

Primer 2.2.1. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Rešenje: Označimo izraz sa leve strane nejednakosti sa A i neka je $B = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{100}{101}$. Očigledno je $A < B$, jer je svaki razlomak koji se javlja kao činilac u broju B veći od svakog razlomka u broju A , redom. Zbog toga je $A^2 < AB = \frac{1}{101} < \frac{1}{10^2}$, odakle korenovanjem sledi tvrđenje. ■

Primer 2.2.2. Dokazati da za svaki prirodan broj n važe nejednakosti

a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3};$

b) $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$

Rešenje:

a) Važi sledeći niz nejednakosti i jednakosti

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Ove nejednakosti koristimo za $k \geq 3$ i dobijamo

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ < \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati (izraz se redukuje putem masovnog poništavanja članova, što se naziva konceptom **teleskopske sume**).

b) Radi primene slične metode kao u delu pod a) posmatramo sledeći niz nejednakosti i jednakosti

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se tražena nejednakost. ■

3 Nejednakosti između sredina

Najpoznatije sredine brojeva jesu harmonijska, geometrijska, aritmetička, kvadratna i kubna. Među svim sredinama su ove navedene najkorisnije, a među navedenim se najčešće koristi nejednakost između aritmetičke i geometrijske (AG nejednakost).

Sredinu reda k definišemo na sledeći način.

Definicija 3.1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitivni realni brojevi i neka je $k \in \mathbb{R}$. Tada je *sredina reda k* brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ definisana sa

$$M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, & k = 0 \\ \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Specijalno, harmonijska, geometrijska, aritmetička, kvadratna i kubna sredina imaju oznake M_{-1}, M_0, M_1, M_2 i M_3 , redom. Često se koriste i oznake H, G, A i K za harmonijsku, geometrijsku, aritmetičku i kvadratnu sredinu.

Bitne osobine ovih sredina navedene su u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1. Funkcija $f(k) = M_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pri oznakama i uslovima iz prethodne definicije, ima sledeća svojstva:

- 1) $f(k)$ je neprekidna u tački $k = 0$;
- 2) $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq f(k) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- 4) $\lim_{k \rightarrow -\infty} f(k) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dokaz:

- 1) Možemo zapisati $f(k) = e^{\ln f(k)} = e^{\frac{1}{k} \ln \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}}$, $k \neq 0$. Neka je $g(k) = \ln \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}$. Sada je $f(k) = e^{\frac{g(k)}{k}}$. Primenom Lopitalovog pravila¹ na sledeći način

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g'(k)}{1} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{x_1^k \ln x_1 + x_2^k \ln x_2 + \dots + x_n^k \ln x_n}{n}}{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{x_1^k \ln x_1 + x_2^k \ln x_2 + \dots + x_n^k \ln x_n}{n}}{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k} \\
 &= \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \\
 &= \frac{\ln x_1 x_2 \dots x_n}{n} \\
 &= \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.
 \end{aligned}$$

¹U stranoj, a na pojedinim mestima i u našoj literaturi, uobičajen je naziv L'Hôpitalovo pravilo, pri čemu se izbegava transkripcija.

Dobija se

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{k \rightarrow 0} e^{\frac{g(k)}{k}} = e^{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(k)}{k}} = e^{\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = f(0),$$

što je i trebalo dokazati.

- 2) a) Neka je, bez gubljenja opštosti, $x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nejednakost se svodi na ekvivalentnu

$$x_1 \leq \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \iff nx_1^k \leq x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k,$$

pri čemu je poslednja nejednakost očigledna, jer je x_1 najmanji.

- b) Neka je sada, bez gubljenja opštosti, $x_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nejednakost se svodi na ekvivalentnu

$$x_1 \geq \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \iff nx_1^k \geq x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k,$$

pri čemu je poslednja nejednakost očigledna, jer je x_1 najveći.

- 3) Neka je, bez gubljenja opštosti, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Prema prethodnom delu i primenom prostih algebarskih transformacija dobija se da važi nejednakost

$$x_1 \geq f(k) \geq \frac{x_1}{\sqrt[k]{n}}.$$

Pošto je $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{n} = 1$, to je, po teoremi o dva policajca,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = x_1,$$

što je i trebalo dokazati.

- 4) Iskoristićemo prethodni deo ove teoreme. Neka opet važi, bez gubljenja opštosti, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Tvrdjenje sledi iz

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} f(k)[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) \left[\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n,$$

što je i trebalo dokazati. U uglastim zagradama se nalaze brojevi na koje se odnosi f . ■

Sledeća teorema prikazuje još jedno važno svojstvo sredina, a radi se o teoremi o nejednakostima između brojevnih sredina.

Teorema 3.2. (Nejednakosti između sredina) Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni brojevi i neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada važi

$$a > b \Rightarrow M_a(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq M_b(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■²

Ovo tvrđenje o nejednakostima između sredina prikazano je na početku kao specijalni slučaj jer ima značajnu primenu. Dokaz će biti dat u 5. poglavlju, nakon razmatranja Jensenove nejednakosti.

Primena nejednakosti između sredina ilustruje se kroz sledeće primere.

Primer 3.1. Dokazati da za sve pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Primenimo AG nejednakost na brojeve a, b, c i $\frac{1}{abc}$, sa ciljem da jedino ostane konstanta. Zbog ovoga se generalno i koristi nejednakost AG, kako bi (preko proizvoda) došlo do skraćivanja promenljivih. Dakle, primenom nejednakosti AG na prethodno opisani način se dobija:

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4 \sqrt[4]{abc \frac{1}{abc}} = 4,$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi kad je ispunjena i jednakost u AG nejednakosti, tj. kada je $a = b = c = \frac{1}{abc}$. Rešavanjem dobijamo da jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = 1$. ■

Primer 3.2. Odrediti minimalnu vrednost izraza

$$x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z},$$

²Dokaz je dat u primeru 6.3.1.

gde su x, y, z pozitivni realni brojevi.

Pomoć: Razmišljati kao u primeru 3.1. - iskoristiti AG na način da se sve promenljive ponište.

Rešenje: Želimo da pametno namestimo sabirke da se sve promenljive skrate nakon primene AG. Kada bismo odmah primenili AG na brojeve $x, \frac{y^2}{9x}, \frac{3z^2}{32y}$ i $\frac{2}{z}$ vidimo da bi nam se izgubila promenljiva x , ali ostale dve ne bi. Iz tog razloga sabirke koji sadrže promenljivu x ostavljamo, a preostala dva sabirka ćemo adekvatno namestiti kako bismo izgubili i promenljive y i z . Pošto imamo y^2 od drugog sabirka onda ćemo treći sabirak zapisati kao zbir dva sabirka, da bismo nakon množenja dobili y^2 u imeniocu. Posledica ovoga jeste da u brojiocu imamo z^4 , pa zato poslednji sabirak zapisujemo kao zbir četiri jednaka sabirka. Dakle, ovo bi sada izgledalo ovako

$$\begin{aligned} x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z} &= x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{64y} + \frac{3z^2}{64y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \\ &\geq 8 \sqrt[8]{x \frac{y^2}{9x} \frac{3z^2}{64y} \frac{3z^2}{64y} \frac{1}{2z} \frac{1}{2z} \frac{1}{2z} \frac{1}{2z}} = 2. \end{aligned}$$

Zadatak još nije završen, dokazali smo da je izraz sigurno veći ili jednak od dvojke, ali to ne mora da znači da mu je to i minimum. Moramo dokazati da se ova vrednost može dostići. Odgovarajuće vrednosti za x, y, z dobijamo rešavanjem sistema kada važi jednakost u AG i tu dobijamo da jednakost važi za $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}, z = 2$. Dakle, minimum je zaista broj 2 i dostiže se za navedene vrednosti x, y, z . ■

Sledeća tri primera na prvi pogled deluju kao zadaci nevezani za nejednakosti, ali u stvarnosti nejednakosti se mogu primeniti na različite tipove problema, ne samo na klasične zadatke iz nejednakosti.

Primer 3.3. Brojevi 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 16, 25 upisani su u tablicu 3x3, nekim redom. Označimo sa P_i proizvod brojeva u i -toj vrsti tablice, $i = 1, 2, 3$. Odrediti najmanju moguću vrednost zbira $P_1 + P_2 + P_3$.

Rešenje: Ukoliko opet posmatramo proizvod, dobijamo broj $P_1 P_2 P_3$ što

predstavlja proizvod svih brojeva u tablici. Ova vrednost je jako pogodna jer je direktno možemo izračunati. Dakle, po AG nejednakosti, važi

$$P_1 + P_2 + P_3 \geq 3\sqrt[3]{P_1 P_2 P_3} = 360.$$

Primetimo da ne mogu sva tri proizvoda biti jednaka. Zaista, tada bi svaki proizvod bio jednak po 120, ali u jednom od tih proizvoda se nalazi broj 9, što je nemoguće jer 9 ne deli 120. Dakle, važi $P_1 + P_2 + P_3 \geq 361$.

Za ovaj slučaj može se konstruisati primer tako da su proizvodi približno jednaki, jer se malo odstupilo od jednakosti. Primer se može jednostavno konstruisati na sledeći način:

1	5	25
2	4	16
3	4	9

Ovime je dokazano da je traženi minimum 361. ■

Primer 3.4. U skupu pozitivnih brojeva rešiti jednačinu

$$(x + 4)(y + 2)(x + 2y) = 32xy.$$

Rešenje: Uslov o pozitivnosti brojeva bi mogao biti motivacija za korišćenje nejednakosti. Nije očigledno koji se drugi metod može koristiti. Probajmo, dakle, preko AG nejednakosti. Cilj je da se pokaže da je leva strana veća ili manja od desne strane. Sa malo isprobavanja se može naslutiti da je leva strana "skoro uvek" veća. Primenimo AG na svaku zagradu. To izgleda ovako

$$(x + 4)(y + 2)(x + 2y) \geq 2\sqrt{4x} \cdot 2\sqrt{2y} \cdot 2\sqrt{2xy} = 32xy,$$

što smo baš i želeli. Jednakost ovde važi ako i samo ako su svi brojevi jednaki na koje je korišćena AG, a to daje jedino rešenje polazne jednačine $(x, y) = (4, 2)$. ■

Primer 3.5. Naći sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje važi

$$\frac{2^{x^2}}{(2^y)^2} + \frac{2^{y^2}}{(2^z)^2} + \frac{2^{z^2}}{(2^x)^2} = \frac{3}{2}.$$

Rešenje: Ideja je slična kao i u prethodnom primeru. Eksponencijalna funkcija je uvek pozitivna pa ćemo primeniti AG na sledeći način

$$\frac{2^{x^2}}{(2^y)^2} + \frac{2^{y^2}}{(2^z)^2} + \frac{2^{z^2}}{(2^x)^2} \geq 3\sqrt[3]{2^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} \geq \frac{3}{2}.$$

Poslednja nejednakost se dobija iz $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \geq -3$, koja je očigledna (zbir tri kvadrata binoma oblika $(t-1)^2$). Jednakost važi samo za $x = y = z = 1$, te je to i jedino rešenje polazne jednačine. ■

Sledeći primer ilustruje jedan važan i zanimljiv koncept.

Primer 3.6. Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje važi $a + b + c = 3$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Primenom AG na ova tri razlomka direktno se ništa postiže. Sa druge strane, ukoliko primenimo AG na imeniocce dobijamo suprotan smer od potrebnog. Ciljamo da taj smer promenimo. Oduzmimo od svakog razlomka a, b, c , redom, pa na kraju dodajmo $a + b + c$. Dobijamo:

$$\frac{a}{b^2 + 1} - a + a = a - \frac{ab^2}{b^2 + 1} \quad (1)$$

$$\frac{b}{c^2 + 1} - b + b = b - \frac{bc^2}{c^2 + 1} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a^2 + 1} - c + c = c - \frac{ca^2}{a^2 + 1} \quad (3)$$

Sada, po AG, zaključujemo $-\frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq -\frac{ab^2}{2b} = -\frac{ab}{2}$. Sabiranjem (1), (2), (3) i korišćenjem dve analogne nejednakosti dobija se

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} = a + b + c - \left(\frac{ab^2}{b^2 + 1} + \frac{bc^2}{c^2 + 1} + \frac{ca^2}{a^2 + 1} \right) \geq 3 - \frac{1}{2}(ab + bc + ca).$$

Dovoljno je dokazati da važi $ab + bc + ca \leq 3$, međutim, ovo sledi iz $\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$, što je posledica poznate i očigledne nejednakosti $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. ■

Nejednakosti između sredina, najčešće AG, omogućavaju rešavanje problema i predstavljaju značajno i efikasno sredstvo u teoriji nejednakosti. Sledeći primeri ilustruju primenu drugih sredina, ne samo AG, iako je AG sredina u praksi najčešće primenjena.

Primer 3.7. Dokazati da za sve pozitivne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$, za koje je $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, važi nejednakost

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Glavna stvar je primetiti da je svaki izraz $\frac{a_i a_j}{a_i + a_j}$ polovina harmonijske sredina brojeva a_i i a_j . Za $i \neq j$ primenjujemo nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine, dok za $i = j$ izraze ostavljamo. Po AH je

$$\frac{a_i a_j}{a_i + a_j} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j}} \leq \frac{1}{2} \frac{a_i + a_j}{2} = \frac{a_i + a_j}{4}.$$

Primenićemo ovo kao što je gore rečeno (izrazi za $i = j$ su oblika $\frac{a_i}{2}$). Imamo

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2} + (n-1) \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2} = \frac{n}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi kada je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$. ■

Primer 3.8. Dokazati da za svako $x > 1$ važi nejednakost

$$\sqrt[x]{x + \sqrt[x]{x}} + \sqrt[x]{x - \sqrt[x]{x}} < 2\sqrt[x]{x}.$$

Rešenje: Uslov $x > 1$ je dat zbog definisanosti drugog korena. Takođe, bitan je zbog nejednakosti koje ćemo koristiti u rešenju.

Ponekad u ovakvim zadacima sa korenima nije loše uvesti smene, makar bilo samo zbog preglednosti. Dakle, neka je $a = \sqrt[x]{x + \sqrt[x]{x}}$ i $b = \sqrt[x]{x - \sqrt[x]{x}}$. Izraz $a + b$ treba ograničiti sa gornje strane. Možemo primetiti da je $a^x + b^x =$

2x. Sada možemo primeniti nejednakost između aritmetičke sredine (ona je sredina reda 1) i sredine reda $x > 1$. Dobijamo

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[x]{\frac{a^x+b^x}{2}} = \sqrt[x]{x},$$

što je i trebalo dokazati.

Nejednakost je stroga jer brojevi a i b nikada ne mogu da budu jednaki za $x > 1$. ■

Na kraju ove glave prikazuje se primer koji ilustruje da sposobnost rešavanja zadatka u velikoj meri zavisi od kreativnosti rešavaoca, a ne samo od alata. Primer takođe ilustruje kako ovaj jednostavan alat može biti primenjen za rešavanje zahtevnog problema.

Primer 3.9. Dokazati da za sve pozitivne brojeve a, b, c , za koje je $a+b+c = 1$, važi nejednakost

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Treći koren bi trebalo da asocira na ili kubnu ili geometrijsku sredinu, međutim, pošto se traži nejednakost manje-jednako pokušajmo da se usredsredimo na ideju geometrijske sredine.

Za geometrijsku sredinu je potreban proizvod, te je ideja da pod treći koren ubacimo neka dva broja. Lako se može proveriti da jednakost važi kada su svi brojevi jednaki, pa tada mora da važi i u AG nejednakosti ako ćemo je koristiti, te ne bi bilo pametno da stavimo ispod korena bilo koji broj osim jedinice. Zbog trećeg korena stavljamo dve jedinice. To izgleda ovako

$$\begin{aligned} & a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \\ &= a\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+b-c)} + b\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+c-a)} + c\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+a-b)} \\ &\leq a\frac{1+1+1+b-c}{3} + b\frac{1+1+1+c-a}{3} + c\frac{1+1+1+a-b}{3} \\ &= a+b+c + \frac{ab-ac+bc-ba+ca-cb}{3} = a+b+c = 1, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

4 Matematička indukcija u nejednakostima

Nije iznenađujuće da se metod matematičke indukcije nađe u bilo kojoj oblasti. Poznato je da je matematička indukcija jedan veoma jak alat, tako da ćemo se u ovoj glavi upoznati sa njenom primenom u oblasti nejednakosti.

4.1 Prosta indukcija

Pod prostom indukcijom podrazumevamo indukciju gde, ako pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$, dokazujemo da tada tvrđenje važi i za $n + 1$.

Sledeći primer je primer onoga što je možda neformalno poznato kao "funkcija koja brže raste". U pitanju je, na primer, eksponencijalna i stepena funkcija. Pogledajmo primer.

Primer 4.1.1. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi nejednakost

$$5^n > n^3.$$

Rešenje: Radimo indukcijom po n .

- Baza indukcije: Direktnom proverom utvrđujemo da tvrđenje važi za $n = 1$ i $n = 2$.
- Indukcijska hipoteza: Neka tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak: Dokažimo da važi i za $n + 1$. Važi

$$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n > 5n^3 > (n + 1)^3.$$

Poslednja nejednakost važi jer je ekvivalentna sa $n^2(n-3)+3n(n^2-1)+1 > 0$, što je očigledno tačno za $n \geq 3$. ■

Navešćemo jednu poznatu nejednakost čiji se dokaz izvodi matematičkom indukcijom u osnovnom slučaju kada je eksponent prirodan broj. U pitanju je Bernulijeva nejednakost.

Teorema 4.1.1. (Bernulijeva nejednakost) Ako je $x \geq -1$, tada važi

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

za sve realne brojeve $n \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty]$, odnosno

$$(1+x)^n \leq 1+nx$$

za $n \in (0, 1)$. Jednakost važi ako i samo ako je $n = 0 \vee n = 1 \vee x = 0$.

Dokaz: Dokaz izvodimo samo za prirodne brojeve n . Radimo indukcijom po n .

- Baza indukcije: Za $n = 1$ tvrđenje važi, tada važi jednakost.
- Indukcijska hipoteza: Neka tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak: Dokažimo da važi i za $n + 1$. Imamo

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = nx^2 + nx + x + 1 \\ &\geq nx + x + 1 = 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

što završava dokaz. ■

Sledeća dva primera ilustruju primenu Bernulijeve nejednakosti.

Primer 4.1.2. Dokazati da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ važi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geq 1.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Posmatrajmo imenilac prvog sabirka na levoj strani i primenimo Bernulijevu nejednakost

$$\sqrt[m]{n+1} = (1+n)^{\frac{1}{m}} \leq 1 + \frac{n}{m} = \frac{n+m}{m}.$$

Analogno se dobija i $\sqrt[n]{m+1} \leq 1 + \frac{m}{n} = \frac{n+m}{n}$. Koristeći ove dve nejednakosti se dobija

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geq \frac{m}{n+m} + \frac{n}{n+m} = 1,$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je eksponent jednak jednici, tj. ako i samo ako je $n = m = 1$. ■

Primer 4.1.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni brojevi za koje važi uslov $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Dokazati nejednakost

$$x_1^{1-x_2} + x_2^{1-x_3} + \dots + x_n^{1-x_1} < 2.$$

Rešenje: Sabiranjem nejednakosti (bitno je napomenuti da je svaki eksponent između nule i jedinice zbog uslova o zbiru)

$$x_i^{1-x_{i+1}} = (1 + (x_i - 1))^{1-x_{i+1}} \leq 1 + (x_i - 1)(1 - x_{i+1}) = x_i + x_{i+1} - x_i x_{i+1},$$

za $i = 1, 2, \dots, n$, dobijamo

$$x_1^{1-x_2} + x_2^{1-x_3} + \dots + x_n^{1-x_1} \leq 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1) < 2,$$

što je i trebalo dokazati. ■

Sledeći primer ilustruje primenu matematičke indukcije na nejednakosti, gde direktno rešavanje zadatka deluje otežano, ali odgovarajuća preformulacija omogućava dobijanje rešenja pomoću indukcije.

Primer 4.1.4. Dokazati da nejednakost

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2$$

važi za sve prirodne brojeve n .

Rešenje: Direktna primena indukcije neće rešiti zadatak. Zbog toga je generalno ideja kod zadataka ovog tipa da se dokaže opštija nejednakost. Cilj je dokazati $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 2 - f(n)$, gde je $f(n)$ zgodno nameštena funkcija od n . U ovom slučaju bismo želeli da ona bude opadajuća i to "brzo opadajuća", jer nakon samo par članova izraz sa leve strane je jako blizu broju 2. Prirodno je probati $f(n) = \frac{1}{2^n}$. Dokažimo nejednakost $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$ indukcijom.

- Baza indukcije: Za $n = 1$ je $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, što je tačno.
- Indukcijska hipoteza: Neka tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak: Dokažimo da važi i za $n + 1$. Važi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Dokažimo sada jednu od najkorisnijih nejednakosti o kojoj će svakako biti reči kasnije.

Primer 4.1.5. Dokazati nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski (videti teoremu 7.1.1.).

Rešenje: Dokažimo indukcijom identitet

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1, i < j}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

iz kog direktno sledi tražena nejednakost.

- Baza indukcije: Za $n=2$ treba dokazati

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

što je ekvivalentno sa

$$a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 - a_2^2 b_2^2 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2,$$

a ovo očigledno važi.

- Indukcijska hipoteza: Neka tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$, pri čemu ćemo levu stranu označiti sa L_n , a desnu sa D_n . Dakle, hipoteza je da važi $L_n = D_n$.

- Indukcijski korak: Dokažimo da tada važi i za $n + 1$. Imamo

$$L_{n+1} = L_n + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2a_{n+1}b_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

a za desnu stranu je

$$\begin{aligned} D_{n+1} = & D_n + (a_1 b_{n+1} - a_{n+1} b_1)^2 + (a_2 b_{n+1} - a_{n+1} b_2)^2 \\ & + \dots + (a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n)^2. \end{aligned}$$

Nakon elementarnog izračunavanja leve i desne strane (i zbog indukcijske hipoteze) vidimo da je $L_{n+1} = D_{n+1}$.

Dokaz je ovime završen. ■

Još jedan primer primene indukcije možemo videti u delu 5.3 pri dokazivanju Jensenove nejednakosti.

4.2 Drugi tipovi indukcije

Sada ćemo dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine proizvoljno mnogo brojeva, ali zašto? Iako je to tvrđenje direktna posledica teoreme 3.2, „elementarni“³ dokaz ovog tvrđenja (pomoću indukcije) je nešto što smatramo jako bitnim i kreativnim, te bi bilo nezahvalno izostaviti taj dokaz. Pošto je ovo, kao što smo rekli, samo posledica jačeg tvrđenja koje smo dokazali, ovo navodimo kao primer.

Primer 4.2.1. Dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, tj. dokazati da za sve prirodne brojeve n i pozitivne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n$ važi nejednakost

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dokazati da jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Rešenje: Dokažimo prvo da tvrđenje važi za sve stepene dvojke. Ako je $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, tvrđenje dokazujemo indukcijom po k .

³Pod „elementarnim“ dokazom smatramo dokaze koji ne zahtevaju napredno matematičko znanje, ovde bi to znanje bili izvodi neophodni za korišćenje Jensenove nejednakosti (pri proverbi konveksnosti). Možemo i Jensenovu nejednakost samu po sebi smatrati „neelementarnom“ metodom.

- Baza indukcije: Za $k = 1$ je $n = 2$ pa dokazujemo nejednakost $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Ova nejednakost je ekvivalentna očiglednoj $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Ovde vidimo da jednakost važi ako i samo ako je $a = b$.
- Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $k \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak: Dokažimo da onda tvrđenje važi i za $k + 1$. Ovo je isto kao da prelazimo sa n na $2n$. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n} \right) \\
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n}} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}}.
\end{aligned}$$

Na mestu prve nejednakosti smo koristili ono što je dokazano u bazi indukcije, a na mestu druge nejednakosti smo koristili induksijsku hipotezu. Dakle, dokazali smo da AG nejednakost važi za svakih n brojeva, gde je n stepen dvojke. Dokazujemo sada, regresivnom indukcijom po n , da tvrđenje važi za svaki prirodan broj n . Pretpostavimo da nejednakost važi za neko n . Izaberimo $x_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}} \\
\iff &\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}} \\
\iff &\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \\
\iff &\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dakle, tvrđenje je dokazano. Jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

Drugi tipovi indukcije su ređi, ali itekako postoje. U ovom radu se nećemo baviti njima jer smatramo da nisu od nužnog značaja za samu oblast nejednakosti koliko su za oblast indukcije.

5 Geometrijske nejednakosti

U geometrijskim nejednakostima mogu se izdvojiti dve vrste zadataka. Prva obuhvata nejednakosti koje važe između elemenata trougla, kao što su stranice ili poluprečnici upisanih i opisanih krugova. Druga se odnosi na nejednakosti u konkretnim geometrijskim konfiguracijama. Obično druga vrsta zadataka zahteva pretežno geometrijsko znanje; stoga se u ovom radu fokusiramo isključivo na prvi tip. Cilj je analizirati aspekt nejednakosti, a ne geometrijske konstrukcije ili druge oblasti.

Radi izbegavanja konfuzije, uvode se oznake u proizvoljnom trouglu ABC , koje su uobičajene u literaturi, ali ovde ih precizno definišemo.

- a, b, c - dužine stranica naspram temena A, B, C , redom;
- α, β, γ - mere uglova kod temena A, B, C , redom;
- t_a, t_b, t_c - dužine težišnih duži iz temena A, B, C , redom;
- h_a, h_b, h_c - dužine visina iz temena A, B, C , redom;
- l_a, l_b, l_c - dužine odsečaka bisektrisa unutrašnjih uglova iz temena A, B, C , redom;
- R, r - poluprečnici opisane i upisane kružnice, redom;
- P, s - površina i poluobim, redom.

Nadalje (u ovoj glavi) se podrazumevaju ove oznake (ako negde vidimo a, b, c to su stranice trougla i slično).

Verovatno najjednostavnija geometrijska nejednakost jeste **nejednakost trougla**, koja nam govori da su pozitivni brojevi a, b, c dužine stranica nekog trougla ako i samo ako važe nejednakosti $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Primer 5.1. Dokazati nejednakost

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

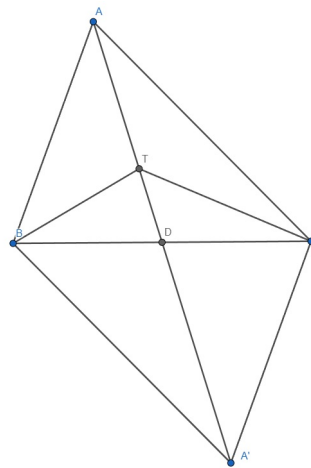
Rešenje:

- a) Neka je tačka T težište trougla ABC .
Primenom nejednakosti trougla u trou-
glovima BTC , CTA , ATB dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c &> a, \\ \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a &> b, \\ \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b &> c,\end{aligned}$$

što, kada saberemo, dobijamo

$$t_a + t_b + t_c > \frac{3}{4}(a + b + c).$$



Slika 1: Rešenje primera 5.1

- b) Neka je D središte BC , i neka je tačka A' simetrična tački A u odnosu na D . Tada je $ABA'C$ paralelogram. Primenom nejednakosti trougla u trouglu ABA' dobijamo $b + c > 2t_a$. Analogno se dobijaju i nejednakosti $c + a > 2t_b$ i $a + b > 2t_c$. Sabiranjem dobijamo

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c,$$

što završava dokaz. ■

Primer 5.2. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Po nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine važi

$$\frac{3}{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3},$$

a odatle je

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{(s-a) + (s-b) + (s-c)} = \frac{9}{s},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je $s-a = s-b = s-c$, tj. ako i samo ako je $a = b = c$ (samo kada je trougao jednakokranični). ■

Teorema 5.1. (Ptolomejeva nejednakost) Neka su A, B, C, D četiri tačke prostora. Tada važi nejednakost

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Jednakost važi ako i samo ako su tačke A, B, C, D na istom krugu, pri čemu su AC i BD dijagonale tog četvorougla ili su tačke A, B, C, D kolinearne, pri čemu tačno jedna od tačaka B, D leži između tačaka A, C . ■

Ovu teoremu navodimo bez dokaza, jer u dokazu preovladava znanje geometrije. Jedan zanimljiv dokaz je pomoću inverzije u jednom od temena, pa primenom nejednakosti trougla.

Primer 5.3. Dokazati da je površina konveksnog četvorougla $ABCD$ ne veća od

$$\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot DA).$$

U kojim četvorouglovima važi jednakost?

Rešenje: Na osnovu Ptolomejeve nejednakosti je

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Sa druge strane je $P_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \theta$, gde je θ ugao između dijagonala. Na osnovu ovoga je

$$\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot DA) \geq \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{P_{ABCD}}{\sin \theta} \geq P_{ABCD},$$

što je i trebalo dokazati. U prvoj nejednakosti jednakost važi za tetivne četvorouglove, a u drugoj za one četvorouglove sa međusobno normalnim

dijagonalama, pa jednakost važi za tetivne četvorouglove sa međusobno normalnim dijagonalama. ■

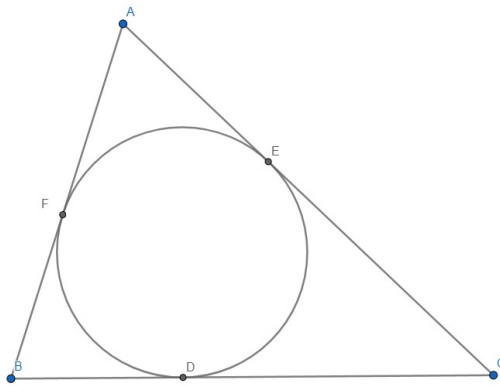
Motivacija prethodnog primera zasniva se na Ptolomejevoj nejednakosti, budući da se u zadatku pojavljuje izraz identičan onom u Ptolomejevoj nejednakosti. Proizvod dijagonala zatim je povezan sa površinom pomoću poznate trigonometrijske formule.

Teorema 5.2. (Nejednakost paralelograma) Neka su A, B, C, D četiri tačke prostora. Tada važi nejednakost

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2.$$

Jednakost važi ako i samo ako su A, B, C, D temena paralelograma. ■

Neke nejednakosti u geometriji mogu se dokazivati prelaskom sa stranica trougla (a, b, c) na pozitivne realne brojeve (x, y, z) . Ovakav pristup je ponekad pogodan, jer eliminiše potrebu za eksplicitnim korišćenjem uslova da su a, b, c stranice trougla, budući da su brojevi x, y, z bez dodatnih ograničenja, osim uslova pozitivnosti.



Neka upisan krug trougla ABC dodiruje stranice BC, CA, AB u tačkama D, E, F , redom. Iz jednakosti tangentskih duži je $AF = AE = x$, $BF = BD = y$ i $CE = CD = z$.

Zato imamo da za stranice ovog trougla važi

$$a = y + z;$$

$$b = z + x;$$

$$c = x + y;$$

$$x, y, z > 0.$$

Slika 2: Trougao ABC sa upisanim krugom
su onda oni dužine stranica nekog trougla.

Primetimo još i da važi $s = x + y + z$.

Očigledno važi i obratno, da ako važi gornja veza za brojeve a, b, c da

Primer 5.4. Dokazati nejednakost

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Koristeći smenu $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ nejednakost se svodi na

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz,$$

koja sledi direktno iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine primenjenu na svaku od tri zgrade.

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$, tj. $a = b = c$. ■

Teorema 5.3. (Uopštena nejednakost trougla) Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ geometrijski vektori i neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni brojevi. Tada važi nejednakost

$$|x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n| \leq |x_1\vec{v}_1| + |x_2\vec{v}_2| + \dots + |x_n\vec{v}_n|.$$

Jednakost važi ako i samo ako su svi pomenuti vektori kolinearni i istog smera. ■

Primer 5.5. Dokazati nejednakost

$$R \geq 2r.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Po poznatoj Ojlerovoj formuli je

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

odakle tvrđenje direktno sledi.

Jednakost važi ako i samo ako je $OI = 0$, tj. ako i samo ako je trougao jednakokraničan (tačke O, I su centri opisanog i upisanog kruga, redom). ■

Ojlerova formula predstavlja značajnu činjenicu, ali je u ovom radu njen dokaz izostavljen, budući da je u potpunosti geometrijske prirode.

U nastavku se navode formule koje su korisne pri radu sa geometrijskim nejednakostima. Ove formule se izводе primenom geometrijskih metoda, najčešće korišćenjem trigonometrije (sinusne i kosinusne teoreme) ili Stjuartove teoreme, čiji se dokaz takođe zasniva na kosinusnoj teoremi.

Dakle, formule koje mogu biti od značaja su:

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

$$l_a^2 = bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}, \quad l_b^2 = ca \frac{(c+a)^2 - b^2}{(c+a)^2}, \quad l_c^2 = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2},$$

$$P = \frac{4abc}{R} = rs$$

Primer 5.6. Dokazati nejednakost

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca).$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Koristeći formule za težišne duži dobijamo

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca),$$

gde smo koristili poznatu nejednakost u poslednjoj nejednakosti (AG na svaka dva člana).

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Primer 5.7. Dokazati nejednakosti

$$\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq \sqrt{3s}.$$

Kada u drugoj nejednakosti važi jednakost?

Rešenje:

a) Dokažimo prvo nejednakost $\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c}$. Obe strane su pozitivne, pa kada kvadriramo nejednakost dobijamo ekvivalentnu

$$s < s-a+s-b+s-c+2(\sqrt{s-a}\sqrt{s-b}+\sqrt{s-b}\sqrt{s-c}+\sqrt{s-c}\sqrt{s-a}),$$

a ova je ekvivalentna sa

$$0 < 2(\sqrt{s-a}\sqrt{s-b} + \sqrt{s-b}\sqrt{s-c} + \sqrt{s-c}\sqrt{s-a}),$$

koja je očigledno tačna.

b) Primenićemo nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine

$$\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq 3\sqrt{\frac{s-a+s-b+s-c}{3}} = \sqrt{3s},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakokraničan (ovo dobijamo sređivanjem uslova $\sqrt{s-a} = \sqrt{s-b} = \sqrt{s-c}$). ■

Sledeći primer na prvi pogled predstavlja standardan geometrijski zadatak, ali se njegovo rešavanje zasniva na primeni nejednakosti. Sličan fenomen javlja se i u oblasti nejednakosti između sredina, gde se pojedini problemi, iako naizgled nevezani za nejednakosti, rešavaju upravo njihovom primenom. U nastavku se razmatra jedan takav primer.

Primer 5.8. Poluprečnik kruga upisanog u trougao je $\frac{\sqrt{3}}{3}$, a obim tog trougla je 6. Odrediti uglove tog trougla.

Rešenje: Površinu trougla možemo izračunati pomoću formule $P = rs = \frac{6}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Takođe, po Heronovom obrascu, imamo da je površina $P = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2}$. Primenićemo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (član s se izostavlja jer se tako dobija jača nejednakost - da smo uzeli i s onda jednakost ne bi mogla da se dostigne pa bi nejednakost bila grublja)

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3}.$$

Sada je $(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}$, pa je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{s \cdot \frac{s^3}{27}} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}.$$

Vidimo da je $\sqrt{3} = P \leq \frac{s^2\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$, tj. jednakost mora da važi. Ovo je za $s - a = s - b = s - c$, tj. $a = b = c$, pa su uglovi svi jednaki po 60° . ■

6 Konveksnost. Jensenova nejednakost

Za izučavanje Jensenove nejednakosti neophodno je poznavati pojam konveksnih, odnosno konkavnih funkcija, kao i metode ispitivanja konveksnosti funkcije. O tome će biti reči u nastavku.

6.1 Konveksne i konkavne funkcije

Ako je (α, β) interval (na skupu $\mathbb{R}$) i $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija onda znamo da je grafik funkcije f skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (\alpha, \beta) \wedge y = f(x)\}$. Intuitivno bi onda bilo da njen nadgrafik definišemo kao isti taj skup, samo da drugi uslov promenimo u $y \geq f(x)$. Dakle, definišimo nadgrafik.

Definicija 6.1.1. Nadgrafik funkcije $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jeste skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (\alpha, \beta) \wedge y \geq f(x)\}.$$

Sada ćemo definisati konveksnost funkcije.

Definicija 6.1.2. Funkcija $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna ako je konveksan deo njenog nadgrafika nad poizvoljnim segmentom $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Definicija 6.1.3. Za funkciju $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ i svaka dva nenegativna broja λ_1, λ_2 za koje je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ važi

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Funkcija f je konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna, tj. ako važi

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Ako za $x_1 \neq x_2$ jednakost važi samo za $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ onda je funkcija f strogo konveksna (konkavna).

Ispitivanje konveksnosti funkcije na osnovu ove definicije jeste moguće, ali u praksi često nije efikasno. Kod složenijih funkcija takav pristup može biti vremenski zahtevan, pa se u narednoj glavi razmatra jednostavniji i praktičniji metod za proveru konveksnosti.

6.2 Konveksne (konkavne) i diferencijabilne funkcije

Razmatraju se funkcije koje su istovremeno konveksne (odnosno konkavne) i diferencijabilne. Između pojmova konveksnosti i diferencijabilnosti postoji značajna veza. U tom cilju navode se dve teoreme koje predstavljaju efikasan alat za ispitivanje konveksnosti diferencijabilnih funkcija.

Ove teoreme se navode bez dokaza, budući da se njihovi dokazi ne zasnivaju na nejednakostima, već na metodama diferencijabilnog računa, koji ne predstavlja osnovni fokus ovog rada.

Teorema 6.2.1. Neka je $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Funkcija f je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako je funkcija f' rastuća (strogo rastuća). Slično, funkcija f je konkavna (strogo konkavna) ako i samo ako je funkcija f' opadajuća (strogo opadajuća). ■

Teorema 6.2.2. Neka je $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja u svakoj tački intervala (α, β) ima drugi izvod. Funkcija f je konveksna (konkavna) ako i samo ako je funkcija $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), $x \in (\alpha, \beta)$. Ako su nejednakosti stroge onda je f strogo konveksna (strogo konkavna). ■

Ove teoreme su od izuzetnog značaja pri ispitivanju konveksnosti funkcije. Zašto nam je konveksnost bitna videćemo u sledećem delu o Jensenovoj nejednakosti.

6.3 Jensenova nejednakost

Sadržaj ove glave bio je usmeren ka uvođenju i razumevanju Jensenove nejednakosti. Jensenova nejednakost predstavlja izuzetno značajno sredstvo za opšte procenjivanje izraza i nalazi široku primenu i izvan oblasti klasičnih nejednakosti. Zbog svoje opštosti i snage, ona zauzima važno mesto u teoriji nejednakosti.

Teorema 6.3.1. (Jensenova nejednakost) Neka je $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$

konveksna funkcija i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nenegativni brojevi za koje važi $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Tada za sve brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\alpha, \beta)$ važi nejednakost

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Ako je f strogo konveksna, jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ili je tačno jedan λ_i jednak 1, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Za konkavne funkcije važi analogno tvrđenje (samo je nejednakost suprotna).

Dokaz: Tvrđenje dokazujemo matematičkom indukcijom po n .

- Baza indukcije: Za $n = 2$ se tvrđenje svodi na definiciju konveksne funkcije, te i važi (funkcija f je konveksna po pretpostavci).
- Indukcijska hipoteza: Neka tvrđenje važi za neko $n \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak: Neka su x_i proizvoljni brojevi iz intervala (α, β) , a λ_i nenegativni brojevi zbira 1, $i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$. Neka je $k = \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{n+1}$. Za $k = 0$ je tvrđenje očigledno (tada važi jednakost). Neka je, dakle, $k \neq 0$. Tada su brojevi $\frac{\lambda_2}{k}, \frac{\lambda_3}{k}, \dots, \frac{\lambda_{n+1}}{k}$ nenegativni brojevi čiji je zbir jednak 1, pa, po indukcijskoj hipotezi, važi

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\ &= f\left(\lambda_1 x_1 + k \left(\frac{\lambda_2}{k} x_2 + \dots + \frac{\lambda_{n+1}}{k} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + k f\left(\frac{\lambda_2}{k} x_2 + \dots + \frac{\lambda_{n+1}}{k} x_{n+1}\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + k \left(\frac{\lambda_2}{k} f(x_2) + \dots + \frac{\lambda_{n+1}}{k} f(x_{n+1})\right) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Tvrđenje je dokazano matematičkom indukcijom.

Jednakost važi (za strogo konveksne funkcije) ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ili je tačno jedan λ_i jednak 1, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Za konkavne funkcije se tvrđenje dokazuje analogno. ■

Primer 6.3.1. Dokazati teoremu 3.2.

Dokaz: Dokažimo da je funkcija $M_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rastuća po k . Fiksirajmo $x_1, x_2, \dots, x_n$. Neka je $a > b > 0$, tada je $\frac{a}{b} > 1$, pa je funkcija $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ strogo konveksna na $x > 0$, jer joj je drugi izvod $f''(x) = \frac{a}{b}(\frac{a}{b} - 1)x^{\frac{a}{b}-2} > 0$. Primenjujemo Jensenovu nejednakost

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}f(x_1^b) + \frac{1}{n}f(x_2^b) + \dots + \frac{1}{n}f(x_n^b) &\geq f\left(\frac{x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a}{n} &\geq \left(\frac{x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[a]{\frac{x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a}{n}} &\geq \sqrt[b]{\frac{x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b}{n}}. \end{aligned}$$

Jednakost važi, po Jensenovoj nejednakosti, ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, što završava dokaz. ■

Primer 6.3.2. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Dokazati nejednakost

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Sumu sa leve strane možemo pojednostaviti koristeći uslov o zbiru

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i}.$$

Ovde je Jensenova nejednakost zgodna iz par razloga. Prvi razlog je to što vidimo da svaki sabirak zavisi samo od jedne promenljive, te možemo posmatrati funkciju jedne promenljive i direktno primeniti Jensenovu nejednakost. Drugi razlog je to što imamo uslov o zbiru, što može da nas motiviše da za težine uzmemo upravo brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Posmatrajmo, dakle, funkciju $f(x) = \frac{1}{2-x}$ za $x \in (0, 1)$. Ispitajmo sada konveksnost koristeći teoremu 6.2.2.:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)' = \frac{2}{(2-x)^3} \geq 0,$$

što znači da je funkcija f konveksna na intervalu $(0, 1)$. Koristeći Jensenovu nejednakost na funkciju f i sa težinama $a_1, a_2, \dots, a_n$ dobijamo sledeću nejednakost.

$$a_1 f(a_1) + a_2 f(a_2) + \dots + a_n f(a_n) \geq f(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \quad (\star)$$

Primetimo da je funkcija f rastuća, tj. važi $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$. Želimo da ograničimo izraz $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ odozdo, što radimo pomoću AK nejednakosti

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n},$$

a odavde dobijamo

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Koristeći ovo, činjenicu da je f rastuća i $(\star)$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2 - a_i} \geq f(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{2n - 1},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$. ■

Napomena. Prošli primer smo mogli i da rešimo posmatrajući funkciju $f(x) = \frac{x}{2-x}$ i Jensenovu nejednakost sa težinama $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Slične napomene važe za još neke navedene primere koji slede.

Sledeći primer ukazuje na to da može biti bitno ako uočimo da je nejednakost homogena i šta možemo sa tim raditi. U dosta slučajeva nam to može pomoći u rešavanju.

Primer 6.3.3. Dokazati da za pozitivne brojeve x, y, z važi nejednakost

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Da bismo rešili ovaj zadatak koristićemo osobine homogenih nejednakosti. Ova nejednakost je homogena jer su stepeni obe strane jednaki (i to su jednaki po $\frac{1}{2}$). Ovo znači da možemo nametnuti uslov sa ciljem da na olakša rešavanje zadatka. Ovde konkretno se može uzeti da je $x + y + z = 1$. Ovo je opravdano, jer skaliranjem nejednakost za k ($x \rightarrow xk$, $y \rightarrow yk$, $z \rightarrow zk$), vidimo da će se broj k skratiti (upravo jer je nejednakost homogena), te se zaista ne gubi na opštosti kada pretpostavimo da je $x + y + z = 1$. Tada se nejednakost može zapisati u obliku

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Zbog nametnutog uslova o zbiru prirodno je posmatrati funkciju $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, za $t \in (0, 1)$. Račun izvoda nam daje $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(1-t)^5}} > 0$, pa je f konveksna. Primenujemo Jensenovu nejednakost na funkciju f sa težinama x, y, z :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} &= xf(x) + yf(y) + zf(z) \geq f(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. U poslednjoj nejednakosti smo opet koristili, slično kao u prošlom primeru, nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine. Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$. ■

Primer 6.3.4. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Nejednakost je homogena pa pretpostavljamo da je $a + b + c = 1$. Ovo radimo sa ciljem da nam brojevi a, b, c budu težine. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, za koju se brzo proveriti da je konveksna ($f''(x) =$

$\frac{3}{4\sqrt{x^5}} > 0$). Primenom Jensenove nejednakosti na ovu funkciju i težine a, b, c dobijamo

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \\ &= af(a^2 + 8bc) + bf(b^2 + 8ca) + cf(c^2 + 8ab) \\ &\geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc} \\ &\geq \frac{1}{(a + b + c)^3} = 1, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Poslednja nejednakost se dobija prostim razvijanjem i korišćenjem AG na sledeći način

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) \\ &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc. \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$, to lako proveravamo izjednačavanjem u AG (uslov jednakosti u Jensenovoj nejednakosti je ovde malo nezgodan). ■

Primer 6.3.5. Dokazati nejednakost iz primera 3.9. Jensenovnom nejednakosću.

Rešenje: Već je dat uslov $a + b + c = 1$, te nameštamo da su nam to težine. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$, koja je konkavna na $x > 0$. Po Jensenovoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} & a\sqrt[3]{1 + b - c} + b\sqrt[3]{1 + c - a} + c\sqrt[3]{1 + a - b} \\ &= af(1 + b - c) + bf(1 + c - a) + cf(1 + a - b) \\ &\leq f(a + b + c) = 1, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi kada je $1 + b - c = 1 + c - a = 1 + a - b$, tj. za $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Primer 6.3.6. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{a + b}{\sqrt{c}} + \frac{b + c}{\sqrt{a}} + \frac{c + a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{3(a + b + c)}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Nejednakost je homogena pa ćemo pretpostaviti da je $a+b+c = 1$. Dovoljno je, dakle, dokazati nejednakost

$$\frac{1-a}{\sqrt{a}} + \frac{1-b}{\sqrt{b}} + \frac{1-c}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{3}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ za $x \in (0, 1)$. Račun drugog izvoda nam dokazuje da je funkcija f konveksna ($f''(x) = \frac{x+3}{4\sqrt{x^5}} > 0$). Po Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{1-a}{\sqrt{a}} + \frac{1-b}{\sqrt{b}} + \frac{1-c}{\sqrt{c}} = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{3},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Primer 6.3.7. Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje je $a + b + c = 3$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} \geq \frac{3}{2}.$$

Rešenje: Svaki sabirak se podešava tako da predstavlja funkciju jedne promenljive. Postupak je sledeći

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} = \frac{a^3}{a+abc} + \frac{b^3}{b+abc} + \frac{c^3}{c+abc},$$

i sada posmatramo funkciju $f(x) = \frac{x^3}{x+abc}$ za $x \in (0, 3)$. Računanjem drugog izvoda dobijamo da je f konveksna ($f''(x) = \frac{2x(3a^2b^2c^2+3abcx+x^2)}{(abc+x)^3} > 0$). Po Jensenovoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} &= f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f(1) \\ &= \frac{3}{1+abc}. \end{aligned}$$

Dovoljno je, dakle, dokazati nejednakost

$$\frac{3}{1+abc} \geq \frac{3}{2}.$$

Primenom AG dobijamo $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, tj. $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$, što dokazuje gornju nejednakost i završava dokaz.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Primer 6.3.8. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{a}{9bc+1} + \frac{b}{9ca+1} + \frac{c}{9ab+1} \geq \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Slično kao u prošlom primeru, pomnožimo razlomke sa $\frac{a}{a}, \frac{b}{b}$, odnosno sa $\frac{c}{c}$, redom, i posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{x^2}{9abc+x}$ za $x > 0$. Funkcija f je konveksna jer je drugi izvod $f''(x) = \frac{162a^2b^2c^2}{(9abc+x)^3} > 0$, za $a, b, c, x > 0$. Po Jensenovoj nejednakost je

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3 \frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{9abc + \frac{a+b+c}{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc}.$$

Dovoljno je, dakle, dokazati nejednakost $\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc} \geq \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}$, što se, nakon unakrsnog množenje, svodi na $(a+b+c)^3 \geq 27abc$, što sledi iz obične AG.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

6.4 Jensen-konveksne funkcije

Jedna forma Jensenove nejednakosti može se primeniti na funkcije koje nisu konveksne, već zadovoljavaju slabiji uslov poznat kao Jensenova konveksnost. Ovaj slabiji uslov definisan je na sledeći način.

Definicija 6.4.1. Funkcija $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ je Jensen-konveksna na intervalu (α, β) ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ važi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Funkcija f je strogo Jensen-konveksna ako važi stroga nejednakost. Analogna definicija važi za Jensen-konkavne funkcije.

Za Jensen-konveksne (Jensen-konkavne) funkcije važi određeni oblik Jensenove nejednakosti koji je naveden sledećom teoremom.

Teorema 6.4.1. Ako je funkcija $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ je Jensen-konveksna, onda za sve $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\alpha, \beta)$ važi nejednakost

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Ako je f strogo Jensen-konveksna, jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu obične Jensenove nejednakosti, pomoću indukcije. ■

U nekim slučajevima lakše je dokazati da je funkcija Jensen-konveksna, jer tada navedeni oblik Jensenove nejednakosti omogućava direktno rešavanje problema. Generalno, oblik Jensenove nejednakosti iz Teoreme 6.4.1. se često koristi, te je često praktičnije dokazati slabiji uslov Jensen-konveksnosti nego punu konveksnost funkcije. Postoje funkcije koje su Jensen-konveksne, ali nisu konveksne; za takve funkcije jedini način primene Jensenove nejednakosti jeste kroz ovaj slabiji uslov. Ovaj oblik može se zapamtiti kao specijalni slučaj opšte Jensenove nejednakosti, kada su sve težine jednake, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Naravno, zbog toga, ovaj oblik Jensenove nejednakosti se može koristiti i kada dokažemo da je funkcija konveksna, jer je ona tad i Jensen-konveksna.

Štaviše, jedina stvar koja razlikuje konveksne i Jensen-konveksne funkcije jeste neprekidnost. Dakle, ukoliko je neka funkcija Jensen-konveksna (strogo Jensen-konveksna) i neprekidna, onda je ona konveksna (strogo konveksna). Naravno, važi isto tvrđenje i za konkavne (strogo konkavne) funkcije. Ovo izlažemo kao činjenicu, bez dokaza, jer se u takmičarskim zadacima retko koristi, ali je korisno za precizno razumevanje pojmova..

6.5 Nejednakosti između težinskih sredina

Težniske sredine se mogu shvatiti kao uopštenje običnih sredina.

Težinsku sredinu reda k definišemo na sledeći način.

Definicija 6.5.1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitivni brojevi za koje važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ i neka je $k \in \mathbb{R}$. Tada je *težinska sredina reda k* brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa težinama $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ definisana sa

$$M_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}, & k = 0 \\ \sqrt[k]{\lambda_1 x_1^k + \lambda_2 x_2^k + \dots + \lambda_n x_n^k}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Primetimo da je ovo zaista uopštenje običnih sredina - ako uzmemo $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, onda dobijamo običnu sredinu reda k .

I ovde važe slične teoreme kao i kod običnih sredina, pa ćemo ih navesti.

Teorema 6.5.1. Funkcija $f(k) = M_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pri oznakama i uslovima iz prethodne definicije, ima sledeća svojstva:

- 1) $f(k)$ je neprekidna u tački $k = 0$;
- 2) $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq f(k) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- 4) $\lim_{k \rightarrow -\infty} f(k) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dokaz: Ovo tvrđenje se dokazuje jako slično odgovarajućem tvrđenju za obične sredine (teorema 3.1.), te dokaz prepuštamo čitaocu. ■

Sledeće tvrđenje je centralno za naš rad i predstavlja oblik Jensenove nejednakosti koji će se najčešće primenjivati u zadacima koji se razmatraju.

Teorema 6.5.2. (Nejednakosti između težinskih sredina) Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitivni brojevi za koje važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada važi

$$a > b \Rightarrow M_a(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq M_b(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dokaz: Dokaz je jako sličan dokazu teoreme 3.2. Primenjujemo Jensenovu nejednakost na težine $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. ■

Primer 6.5.1. Dokazati nejednakosti iz primera 4.1.3. pomoću nejednakosti između težinskih sredina.

Rešenje: Koristeći težinsku AG nejednakost dobijamo (svi brojevi su, zbog uslova, manji od jedinice pa su svi eksponenti pozitivni)

$$x_i^{1-x_{i+1}} = 1^{x_{i+1}} x_i^{1-x_{i+1}} \leq 1 \cdot x_{i+1} + x_i(1 - x_{i+1}) = x_i + x_{i+1} - x_i x_{i+1}.$$

Nakon ovoga se zadatak završava isto kao i u rešenju primera 4.1.3., sabiramo sve ove nejednakosti, zanemarimo negativan deo i koristimo uslov o zbiru. ■

Primer 6.5.2. Dati su brojevi a, b, c, d za koje važi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ i $a + b + c + d = 1$. Dokazati nejednakost

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Rešenje: Na osnovu težinske AG važi

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

pa je dovoljno dokazati nejednakost

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1.$$

Ako napišemo $1 = (a + b + c + d)^3$ i razvijemo obe strane gornje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &= (a + 3b + 3c + 3d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &\quad + 2(a - b)b^2 + 2(a - c)c^2 + 2(a - d)d^2 + 6(abc + bcd + cda + dab) \\ &> (a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ■

7 Poznate nejednakosti

U ovoj glavi ćemo spomenuti najpoznatije i najkorisnije nejednakosti.

7.1 Nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski

Teorema 7.1.1. (Nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski) Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ realni brojevi. Tada važi nejednakost

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Jednakost važi ako i samo ako postoji realan broj k takav da je $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$.

Dokaz: Dokaz (i opštije tvrđenje) je dokazano u primeru 4.1.5. ■

Nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski je verovatno jedno od najmoćnijih oružja, uz nejednakosti između sredina i Jensenove nejednakosti. Pogledajmo par primera gde je možemo primeniti.

Primer 7.1.1. Uraditi zadatak iz primera 6.3.8. pomoću nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski.

Rešenje: Primenimo nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski na ovaj način (ovaj pristup je pogodan jer se izrazi u razlomcima pojednostavljaju, a na desnoj strani se dobija oblik koji omogućava jednostavnije algebarsko manipulisanje):

$$\left(\sum_{cyc} a(9bc + 1) \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{9bc + 1} \right) \geq (a + b + c)^2,$$

pa odavde sledi da je

$$\sum_{cyc} \frac{a}{9bc + 1} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sum_{cyc} a(9bc + 1)} = \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c + 27abc}.$$

Dovoljno je dokazati

$$\frac{(a + b + c)^2}{a + b + c + 27abc} \geq \frac{a + b + c}{1 + (a + b + c)^2},$$

ali ovo sledi iz AG nejednakosti (isto kao u rešenju primera 6.3.8.).
Jednakost se proverava iz uslova jednakosti u AG (tako je najlakše) i dobija se da važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Primer 7.1.2. Dokazati da za pozitivne brojeve x, y, z važi nejednakost

$$\sum_{cyc} (x+y) \sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy + yz + zx).$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Primenimo nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski na sledeći način, sa idejom da nestane koren:

$$\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq z + \sqrt{xy}.$$

Koristeći dve analogne nejednakosti početni izraz ograničavamo ovako

$$\sum_{cyc} (x+y) \sqrt{(z+x)(z+y)} \geq \sum_{cyc} (xz + yz + (x+y)\sqrt{xy}) \geq 4(xy + yz + zx),$$

gde smo u poslednjoj nejednakosti iskoristili AG.

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$. ■

Primer 7.1.3. Neka su x, y, z pozitivni brojevi za koje važi $xy + yz + zx = x + y + z$. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} + \frac{1}{y^2 + z + 1} + \frac{1}{z^2 + x + 1} \leq 1.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Primenimo nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski na sledeći način

$$(x^2 + y + 1)(1 + y + z^2) \geq (x + y + z)^2,$$

pa je

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} \leq \frac{1 + y + z^2}{(x + y + z)^2}.$$

Sabiranjem ove i dve analogne nejednakosti dobijamo

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} + \frac{1}{y^2 + z + 1} + \frac{1}{z^2 + x + 1} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3}{(x + y + z)^2}.$$

Ostaje da dokažemo

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3}{(x + y + z)^2} \leq 1,$$

što je ekvivalentno sa (koristimo uslov)

$$x + y + z \geq 3.$$

Ovo sledi iz

$$x + y + z = xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3},$$

gde smo iskoristili poznatu nejednakost na poslednjem mestu (ekvivalentna je sa $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$) što završava dokaz.

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z = 1$ (to najlakše vidimo iz poslednje nejednakosti, ali moramo da proverimo tako da vratimo u početnu). ■

7.2 Helderova nejednakost

Helderova nejednakost se može shvatiti kao uopštenje nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski. Ove dve nejednakosti su baš zato i jako slične i imaju slične primene sa zajedničkim idejama.

Teorema 7.2.1. (Helderova nejednakost) Neka su $a_{1_i}, a_{2_i}, \dots, a_{k_i}$ konačni nizovi ⁴ pozitivnih brojeva iste dužine i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ pozitivni brojevi za koje je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$. Tada važi nejednakost

$$(a_{1_1} + a_{1_2} + \dots + a_{1_n})^{\lambda_1} (a_{2_1} + a_{2_2} + \dots + a_{2_n})^{\lambda_2} \dots (a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n})^{\lambda_k} \geq a_{1_1}^{\lambda_1} a_{2_1}^{\lambda_2} \dots a_{k_1}^{\lambda_k} + a_{1_2}^{\lambda_1} a_{2_2}^{\lambda_2} \dots a_{k_2}^{\lambda_k} + \dots + a_{1_n}^{\lambda_1} a_{2_n}^{\lambda_2} \dots a_{k_n}^{\lambda_k}.$$

Jednakost važi ako i samo ako je zadovoljena produžena proporcija

$$a_{1_1} : a_{1_2} : \dots : a_{1_n} = a_{2_1} : a_{2_2} : \dots : a_{2_n} = \dots = a_{k_1} : a_{k_2} : \dots : a_{k_n}.$$

Dokaz: Nejednakost je homogena po svim promenljivama. Neka je zato, bez gubljenja opštosti,

$$a_{1_1} + a_{1_2} + \dots + a_{1_n} = a_{2_1} + a_{2_2} + \dots + a_{2_n} = \dots = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n} = 1.$$

⁴Kada se priča o nizovima obično se podrazumeva da je članova niza beskonačno mnogo, ali ovde ćemo podrazumevati kao da ih je konačno mnogo, te ih i nazivamo "konačni nizovi".

Nejednakost se tada svodi na

$$a_{1_1}^{\lambda_1} a_{2_1}^{\lambda_2} \dots a_{k_1}^{\lambda_k} + a_{1_2}^{\lambda_1} a_{2_2}^{\lambda_2} \dots a_{k_2}^{\lambda_k} + \dots + a_{1_n}^{\lambda_1} a_{2_n}^{\lambda_2} \dots a_{k_n}^{\lambda_k} \leq 1.$$

Ovo dokazujemo primenjujući nejednakost između težinske aritmetičke i geometrijske sredine

$$\begin{aligned} & a_{1_1}^{\lambda_1} a_{2_1}^{\lambda_2} \dots a_{k_1}^{\lambda_k} + a_{1_2}^{\lambda_1} a_{2_2}^{\lambda_2} \dots a_{k_2}^{\lambda_k} + \dots + a_{1_n}^{\lambda_1} a_{2_n}^{\lambda_2} \dots a_{k_n}^{\lambda_k} \\ & \leq \lambda_1 a_{1_1} + \lambda_2 a_{2_1} + \dots + \lambda_k a_{k_1} + \lambda_1 a_{1_2} + \lambda_2 a_{2_2} + \dots + \lambda_k a_{k_2} + \dots + \\ & \quad + \lambda_1 a_{1_n} + \lambda_2 a_{2_n} + \dots + \lambda_k a_{k_n} \\ & = \lambda_1 (a_{1_1} + a_{1_2} + \dots + a_{1_n}) + \lambda_2 (a_{2_1} + a_{2_2} + \dots + a_{2_n}) + \dots + \\ & \quad + \lambda_k (a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n}) \\ & = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost važi kada su svi i -ti članovi zagrada međusobno jednaki. Pretpostavili smo da su svi zbrojevi jednaki, ali generalno ne moraju da budu pa zato jednakost važi ako i samo ako je $a_{1_1} : a_{1_2} : \dots : a_{1_n} = a_{2_1} : a_{2_2} : \dots : a_{2_n} = \dots = a_{k_1} : a_{k_2} : \dots : a_{k_n}$. ■

Na prvi pogled, ova nejednakost može delovati složeno, ali ona predstavlja logično uopštenje Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakosti (zaista, uzimajući $k = 2$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, nakon kvadriranja se dobija izvorni oblik te nejednakosti).

Primer 7.2.1. Dokazati nejednakost iz primera 6.3.4. pomoću Helderove nejednakosti.

Rešenje: Primenimo Helderovu nejednakost na sledeći način

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{cyc} a(a^2 + 8bc) \right)^{\frac{1}{3}} \geq a + b + c,$$

odakle sledi da je dovoljno dokazati

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc,$$

ali ovo sledi prostim razvijanjem leve strane i primenom AG.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Vidimo da ova nejednakost može biti jako moćno oružje za rešavanje nejednakosti (setimo se da je rešenje Jensenovom nejednakošću komplikovanije i duže). Ovde je ideja bila da se imenioci izgube, a u trećoj zagradi smo izraze pomnožili sa a jer onda na desnoj strani dobijamo lep zbir, ovako bi eksponent bio $\frac{2}{3}$.

7.3 Nejednakost Minkovskog

Nejednakost Minkovskog bi trebalo da asocira na nejednakost trougla, te se tako može i lako zapamtiti.

Teorema 7.3.1. (Nejednakost Minkovskog) Neka su $a_{1_i}, a_{2_i}, \dots, a_{k_i}$ konačni nizovi pozitivnih brojeva iste dužine i $p > 1$. Tada važi nejednakost

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_{1_i}^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_{2_i}^p} + \dots + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_{k_i}^p} \geq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (a_{1_i} + a_{2_i} + \dots + a_{k_i})^p}.$$

Za $p < 1$ važi suprotna nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako je $p = 1$ ili

$$a_{1_1} : a_{1_2} : \dots : a_{1_n} = a_{2_1} : a_{2_2} : \dots : a_{2_n} = \dots = a_{k_1} : a_{k_2} : \dots : a_{k_n}.$$

Dokaz: Dokažimo da nejednakost važi za 2 niza. Imamo

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

Kada primenimo Helderovu nejednakost na oba sabirka sa desne strane dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Deljenjem sa $\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ dobijamo traženu nejednakost. Generalna nejednakost se dokazuje lako indukcijom - samo koristimo ovu dokazanu nejednakost na po 2 sabirka. ■

Primer 7.3.1. Dokazati da za realne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$ važi nejednakost

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Rešenje: Koristimo nejednakost Minkovskog na pozitivne brojeve $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ i na brojeve $|1 - a_2|, |1 - a_3|, \dots, |1 - a_1|$, a zatim koristimo nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \\ & \geq \sqrt{(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)^2 + (|1 - a_2| + |1 - a_3| + \dots + |1 - a_1|)^2} \\ & \geq \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |1 - a_2| + |1 - a_3| + \dots + |1 - a_1|}{\sqrt{2}} \\ & \geq \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{n\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

U poslednjoj nejednakosti smo iskoristili nejednakost trougla. Ovime je dokaz završen. ■

Primer 7.3.2. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c za koje je $a + b + c = 3$ važi nejednakost

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{\sqrt{c^2 + 2ab}} + \frac{b^2 + c^2 + 1}{\sqrt{a^2 + 2bc}} + \frac{c^2 + a^2 + 1}{\sqrt{b^2 + 2ca}} \geq 3\sqrt{3}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Na osnovu nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski je

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2 + 1}{\sqrt{c^2 + 2ab}}\right) \left(\sum_{cyc} \sqrt{c^2 + 2ab}\right) \geq \left(\sum_{cyc} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right)^2.$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine imamo

$$\sum_{cyc} \sqrt{c^2 + 2ab} \leq 3\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Iz nejednakosti Minkovskog je

$$\sum_{cyc} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \geq \sqrt{2(a+b+c)^2 + 9} = 3\sqrt{3}.$$

Iz ove tri nejednakosti sledi tražena.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = 1$. ■

7.4 Lema o permutacijama. Čebiševljeva nejednakost

Teorema 7.4.1. (Lema o permutacijama⁵) Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $y_1, y_2, \dots, y_n$ realni brojevi za koje važi $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ i $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ i neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Tada važe nejednakosti

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{n+1-i}.$$

Ako je $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ jednakost važi ako i samo ako je $y_{n+1-i} = y_{\sigma(i)}$ za desnu nejednakost, odnosno $y_i = y_{\sigma(i)}$ za desnu nejednakost, za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Ako to ne važi onda jednakost važi u slučaju $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dokaz: Neka je $S(\sigma) = \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$, za neku permutaciju σ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Pošto je permutacija bilo kog konačnog skupa konačno mnogo onda postoji neka permutacija π za koju je ona suma najveća moguća. Dokazaćemo da je to permutacija $\pi(i) = i$, za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

Pretpostavimo suprotno, da $\pi(i) = i$ ne važi za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Posmatrajmo najmanje a takvo da je $\pi(a) \neq a$. Pošto je to najmanji takav broj važi $\pi(i) = i$, za svako $i = 1, 2, \dots, a-1$. Neka je $\pi(a) = b$. Tada je $b > a$ zbog navedenog i osobina permutacija (permutacije su bijekcije). Takođe, postoji jedinstven broj c za koji je $\pi(c) = a$. Za takav broj c očigledno važi $c > a$.

⁵Negde u literaturi je poznata kao i nejednakost reanžiranja.

Posmatrajmo sada permutaciju ω istog skupa za koju važi $\omega(i) = \pi(i)$ za svako $i = 1, 2, \dots, a-1, a+1, \dots, c-1, c+1, \dots, n$ i $\omega(a) = a$, $\omega(c) = b$. Sada bi važiolo

$$0 \leq S(\pi) - S(\omega) = x_a y_b + x_c y_a - x_a y_a - x_c y_b = (x_a - x_c)(y_b - y_a) < 0,$$

jer je $x_c > x_a$ i $y_b > y_a$, ali ovo je kontradikcija.

Ako primenimo ovo dokazano na brojeve x_i i y_i , za $i = 1, 2, \dots, n$, dobijamo drugu nejednakost. Ovime je dokaz završen. ■

Primer 7.4.1. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$. Tada očigledno važi

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}.$$

Po lemi o permutacijama važi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

kao i

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Nakon sabiranja ovih nejednakosti dobijamo traženu.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Između onih dveju krajnih vrednosti u lemi o permutacijama, osim bilo koje permutacije, možemo ograničiti još jedan zgodan izraz. To nam tvrdi sledeća teorema.

Teorema 7.4.2. (Čebiševljeva nejednakost) Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $y_1, y_2, \dots, y_n$ realni brojevi za koje važi $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ i $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Tada važe nejednakosti

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{n+1-i}.$$

Jednakosti važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ili $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

Rešenje: Iz leme o permutacijama imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &\geq x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &\geq x_1 y_n + x_2 y_1 + \dots + x_n y_{n-1}. \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo traženu.

Uslov za jednakost se lako sredi i dobija se da jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ili $y_1 = y_2 = \dots = y_n$. ■

Primer 7.4.2. Dokazati nejednakost iz primera 6.3.8. pomoću Čebiševljeve nejednakosti.

Rešenje: Bez gubljenja opštosti možemo da pretpostavimo $a \geq b \geq c$. Tada je

$$\frac{1}{9bc+1} \geq \frac{1}{9ca+1} \geq \frac{1}{9ab+1}.$$

Po Čebiševljevoj nejednakosti je

$$\frac{a}{9bc+1} + \frac{b}{9ca+1} + \frac{c}{9ab+1} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{9ab+1} + \frac{1}{9bc+1} + \frac{1}{9ca+1} \right).$$

Po nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine je

$$\frac{1}{9ab+1} + \frac{1}{9bc+1} + \frac{1}{9ca+1} \geq \frac{3}{3(ab+bc+ca)+1}.$$

Koristeći ove dve nejednakosti dobijamo

$$\frac{a}{9bc+1} + \frac{b}{9ca+1} + \frac{c}{9ab+1} \geq \frac{a+b+c}{3(ab+bc+ca)+1},$$

pa je dovoljno dokazati

$$\frac{a+b+c}{3(ab+bc+ca)+1} \geq \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Ovo je ekvivalentno sa $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, odnosno sa $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, koja važi.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

7.5 Šurova i Mjurhedova nejednakost

Šurova i Mjurhedova nejednakost zahtevaju nove definicije i pojmove, tako da ćemo prvo morati da njih uvedemo.

Definicija 7.5.1. Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dva konačna niza realnih brojeva. Niz a **majorira** niz b (u oznaci $a \succ b$ ili $b \prec a$) ako i samo ako možemo preimenovati članove nizova tako da važe sledeća tri uslova:

- 1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$;
- 2) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$;
- 3) $a_1 + a_2 + \dots + a_i \geq b_1 + b_2 + \dots + b_i$, za svako $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Na primer, ako imamo nizove $a = (1, 5, 3)$ i $b = (6, 1, 2)$ možemo da preimenujemo (poređamo) članove na sledeći način $a = (5, 3, 1)$ i $b = (6, 2, 1)$ i odavde možemo da vidimo da je $b \succ a$ jer im je zbir isti i jednak 9, važi i drugi uslov i vidimo lako da važi i treći uslov. Ako imamo sada nizove $a = (1, 4)$ i $b = (5, 2)$ njih ne možemo da uporedimo u smislu operacije $\succ$ jer im zbirovi nisu isti. Takođe, očigledno je da svaki niz majorira samog sebe.

Definicija 7.5.2. Zbir $n!$ sabiraka oblika $x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_n}^{a_n}$ ($x_i \geq 0, a_i \geq 0$, za $i = 1, 2, \dots, n$), za svaku moguću permutaciju $i_1, i_2, \dots, i_n$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, označavamo sa $T[a_1, a_2, \dots, a_n](x_1, x_2, \dots, x_n)$.

U zadacima ćemo koristiti kao oznaku samo $T[a_1, a_2, \dots, a_n]$ jer ćemo znati o kom nizu je reč. Kako bi se stekao osećaj za ovu novu definiciju navodimo par primera.

$$\begin{aligned}
T[2, 1] &= x^2y^1 + x^1y^2 = x^2y + xy^2 \\
T[1, 0, 0] &= x^1y^0z^0 + x^0y^1z^0 + x^0y^0z^1 + x^1y^0z^0 + x^0y^1z^0 + x^0y^0z^1 = x + y + z \\
T[1, 1, 1] &= x^1y^1z^1 + x^1y^1z^1 + x^1y^1z^1 + x^1y^1z^1 + x^1y^1z^1 + x^1y^1z^1 = 6xyz
\end{aligned}$$

Imajmo na umu da za niz od n elemenata moramo da imamo $n!$ sabiraka (to je broj permutacija skupa sa n elemenata), tako da za niz sa dva elementa imamo dva sabirka, za niz sa tri elementa imamo 6 sabiraka itd.

Teorema 7.5.1. (Šurova nejednakost) Neka su $a, b > 0$. Tada važi nejednakost

$$T[a + 2b, 0, 0] + T[a, b, b] \geq 2T[a + b, b, 0].$$

Jednakost važi ako i samo ako su svi elementi niza jednaki.

Dokaz: Neka su x, y, z pozitivni brojevi koji čine niz za koji dokazujemo nejednakost. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $x \geq y \geq z$. Tada je

$$\begin{aligned}
&T[a + 2b, 0, 0] + T[a, b, b] - 2T[a + b, b, 0] \\
&= 2(x^a(x^b - y^b)(x^b - z^b) + y^a(y^b - z^b)(y^b - x^b) + z^a(z^b - x^b)(z^b - y^b))
\end{aligned}$$

Dovoljno je dokazati $x^a(x^b - y^b)(x^b - z^b) + y^a(y^b - z^b)(y^b - x^b) \geq 0$. Ovo je ekvivalentno sa $x^{a+b} - y^{a+b} - z^b(x^a - y^a) \geq 0$. Ovo dokazujemo ovako:

$$x^{a+b} - y^{a+b} - z^b(x^a - y^a) \geq x^{a+b} - y^{a+b} - y^b(x^a - y^a) = x^a(x^b - y^b) \geq 0.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x = y = z$, što se očigledno vidi. ■

Sada ćemo prikazati primenu Šurove nejednakosti. Posebno je važno naglasiti sledeću nejednakost:

$$T[a + 2b + c, c, c] + T[a + c, b + c, b + c] \geq 2T[a + b + c, b + c, c],$$

koja se dobija direktnom primenom Šurove nejednakosti i množenjem rezultujuće nejednakosti sa $(xyz)^c$. Iako se ne pojavljuju uvek slučajevi sa nulama u eksponentima, ovaj oblik ostaje značajan za primenu u takmičarskim zadacima.

Primer 7.5.1. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc + ab + bc + ca \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Ako primenimo Šurovu nejednakost u obliku $T[3, 0, 0] + T[1, 1, 1] \geq 2T[2, 1, 0]$ dobijamo

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2,$$

što liči na nejednakost koju treba da dokažemo. Zato, uvedimo smenu $x = a - 1, y = b - 1, z = c - 1$. Kada to ubacimo u gornju nejednakost dobijamo nejednakost iz zadatka.

Jednakost važi za $a = b = c$. ■

Uz Šurovu nejednakost se jako često nađe i Mjurhedova. Ove dve nejednakosti zajedno čine jedno jako moćno oružje za rešavanje homogenih nejednakosti ili nejednakosti kod kojih možemo iskoristiti uslov kako bismo je homogenizovali. Navedimo, dakle, Mjurhedovu nejednakost.

Teorema 7.5.2. (Mjurhedova nejednakost) Neka su a i b nizovi pozitivnih brojeva. Ako je $a \succ b$, onda važi nejednakost

$$T[a] \geq T[b].$$

Jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b isti ili kada su svi elementi tih nizova međusobno jednaki. ■

Jako je bitno napomenuti da se nejednakosti mogu dokazati ovom tehnikom samo ukoliko su homogene. Ako nejednakost nije homogena, ona se ne može ovako (u potpunosti) uraditi.

Primer 7.5.2. Dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

Rešenje: Po Mjurhedovoj nejednakosti važi

$$T[1, 0, \dots, 0] \geq T\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right],$$

odnosno

$$(n-1)!(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq n! \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

odakle sledi AG nejednakost. ■

Primer 7.5.3. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Nejednakost je homogena (stepen leve i desne strane je -1), pa možemo da probamo Mjurheda ili Šura. Nakon množenja obe strane nejednakosti sa $a^3b^3c^3$ dobijamo

$$a^2b^3c^3 + a^3b^2c^3 + a^3b^3c^2 \leq a^8 + b^8 + c^8,$$

odnosno

$$\frac{1}{2}T[3, 3, 2] \leq \frac{1}{2}T[8, 0, 0],$$

što važi na osnovu Mjurhedove nejednakosti jer je $(8, 0, 0) \succ (3, 3, 2)$.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Uslovi o zbiru ili proizvodu umeju da budu jako korisni pri homogenizaciji (nisu to jedini uslovi koji mogu da budu korisni, ali su oni najjednostavniji).

Primer 7.5.4. Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje je $a + b + c = 1$. Dokazati nejednakost

$$ab + bc + ca \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 5abc.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Koristeći uslov ćemo nejednakost iz zadatka napraviti homogenom na sledeći način

$$(ab + bc + ca)(a + b + c)^2 \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 5abc(a + b + c),$$

što se nakon sređivanja svodi na

$$T[3, 1, 0] \geq T[2, 2, 0],$$

što važi na osnovu Mjurhedove nejednakosti.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Primer 7.5.5. Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje je $abc = 1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Opet koristimo uslov i to na sledeći način

$$\frac{1}{a+b+1} = \frac{1}{a+b+(abc)^{\frac{1}{3}}}.$$

Tada je leva strana stepena -1 (kada zapišemo dve analogne jednakosti), pa da bi i desna strana bila istog tog stepena treba da zapišemo

$$1 = \frac{1}{(abc)^{\frac{1}{3}}}.$$

Nakon množenja cele nejednakosti sa

$$(abc)^{\frac{1}{3}}(a+b+(abc)^{\frac{1}{3}})(b+c+(abc)^{\frac{1}{3}})(c+a+(abc)^{\frac{1}{3}})$$

dobija se (nakon sređivanja i potiranja)

$$T[2, 1, 0] \geq T\left[\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

što važi na osnovu Mjurhedove nejednakosti.

Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c = 1$. ■

Primer 7.5.6. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Nejednakost je homogena. Nakon množenja cele nejednakosti sa $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ i sređivanja se dobija

$$4T[5, 1, 0] - T[4, 2, 0] + T[4, 1, 1] - 3T[3, 3, 0] - 2T[3, 2, 1] + T[2, 2, 2] \geq 0.$$

Ovde se ne može iskoristiti samo Mjurhedova nejednakost jer izraz $T[2, 2, 2]$ nije veći ni od jednog drugog. Zbog toga ćemo iskoristiti Šurovu nejednakost na taj i na još neki izraz. Pogledajmo Šurovu nejednakost u obliku koji smo naveli nakon same teoreme $T[a + 2b + c, c, c] + T[a + c, b + c, b + c] \geq 2T[a + b + c, b + c, c]$. Da bismo na levoj strani dobili $T[2, 2, 2]$ jedino možemo uzeti $a = b = c = 1$. Tada, po Šurovoj nejednakosti, važi

$$T[4, 1, 1] + T[2, 2, 2] \geq 2T[3, 2, 1].$$

Dovoljno je sada, zbog ovoga, dokazati nejednakost

$$4T[5, 1, 0] - T[4, 2, 0] - 3T[3, 3, 0] \geq 0.$$

Međutim, ovo direktno sledi iz Mjurhedove nejednakosti. Jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$. ■

Za kraj napomenimo da svaka nejednakost koja je posledica Mjurhedove može da se dokaže veštom primenom AG nejednakosti, a neke se ni ne mogu dokazati Mjurhedovom. Na primer, nejednakost $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$ ne sledi iz Mjurhedove (Mjurhedova nejednakost radi samo na simetričnim izrazima, a ovaj ovde nije simetričan već samo cikličan). U tim situacijama i dalje moramo iskoristiti AG: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{3} \frac{x^3}{3} \frac{y^3}{3}} = x^2y$ itd.

7.6 Karamatina nejednakost

Sledeće dve nejednakosti vezane su za srpske matematičare. Prva je Karamatina nejednakost, nazvana po Jovanu Karamati.

Teorema 7.6.1. (Karamatina nejednakost) Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ konačni nizovi realnih brojeva iz nekog intervala (α, β) . Ako je $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $a \succ b$, tada važi nejednakost

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

Za konkavne funkcije važi suprotna nejednakost.

Jednakost važi (za strogo konveksnu funkciju) ako i samo ako su nizovi a i b isti. ■

Primer 7.6.1. Dokazati da za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$ važi nejednakost

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Posmatrajmo strogo konveksnu funkciju $f(x) = e^x$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Uvedimo smenu $x_i = \ln a_i$, za $i = 1, 2, \dots, n$. Tada važi $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Lako se dokazuje da važi

$$(3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, \dots, 3x_n - x_1) \succ (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n).$$

Po Karamatinoj nejednakosti je

$$f(3x_1 - x_2) + f(3x_2 - x_3) + \dots + f(3x_n - x_1) \geq f(2x_1) + f(2x_2) + \dots + f(2x_n).$$

Nakon što vratimo smenu dobijamo traženu nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ■

Čitaocu se preporučuje da pokuša dokazati nejednakost iz prethodnog primera primenom Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakosti.

Primer 7.6.2. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{ab + bc + ca} \geq \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2}.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$. Posmatrajmo strogo konkavnu funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, za $x > 0$. Primetimo da je dovoljno da dokažemo

$$(a^2 + ab + b^2, c^2 + ca + a^2, b^2 + bc + c^2) \succ (a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, ab + bc + ca),$$

jer bi tada tvrđenje direktno sledilo iz Karamatine nejednakosti. Lako se dokazuje da su nizovi opadajući (koristimo $a \geq b \geq c$). Dalje, vidimo da su zbirovi ova dva niza jednaki i to jednaki po $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca$. Nejednakosti

$$a^2 + ab + b^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

i

$$a^2 + ab + b^2 + c^2 + ca + a^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

se trivijalno dokazuju.

Jednakost važi ako i samo ako je (nakon sređivanja uslova jednakosti prva dva člana oba niza) $c^2 = ab$ i $b^2 = ca$. Odavde se (množenjem) dobija i $a^2 = bc$, pa je $abc = a^3 = b^3 = c^3$, odnosno $a = b = c$. ■

7.7 Petrovićeva nejednakost

Još jedna značajna nejednakost koja se vezuje za konveksne funkcije je Petrovićeva nejednakost, nazvana po srpskom matematičaru Mihajlu Petroviću (Alasu).

Teorema 7.7.1. (Petrovićeva nejednakost) Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ nenegativni brojevi. Tada važi nejednakost

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Za konkavne funkcije važi suprotna nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako su nekih $n-1$ brojeva među brojevima $x_1, x_2, \dots, x_n$ jednaki nuli.

Dokaz: Neka je $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ i neka je $\lambda_i = \frac{x_i}{s}$, za $i = 1, 2, \dots, n$. Tada je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ i $x_i = (1 - \lambda_i) \cdot 0 + \lambda_i s$, za $i = 1, 2, \dots, n$. Pošto je f konveksna imamo da je

$$f(x_i) \leq (1 - \lambda_i)f(0) + \lambda_i f(s),$$

za $i = 1, 2, \dots, n$. Kada saberemo ove nejednakosti dobijamo traženu.

Jednakost važi (za strogo konveksne funkcije) ako i samo ako je $\lambda_i = 0$ ili $\lambda_i = 1$ ili $s = 0$. Svakako, to se svodi na uslov iz teoreme. ■

Petrovićeva nejednakost se može dokazati i preko Karamatine.

Dokaz preko Karamatine nejednakosti: Primetimo da je

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n, 0, \dots, 0) \succ (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pa važi nejednakost

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n - 1)f(0) \geq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n),$$

što je i trebalo dokazati. ■

8 Praktična primena i zaključak

Nejednakosti su široko primenljive u situacijama sa različitim ograničenjima, što ih čini korisnim i u složenijim problemima. Cilj ove glave je da prikaže primenu nejednakosti na što jednostavniji način. U tom kontekstu, predstavimo dva primera iz praktične primene.

Prvo ćemo navesti problem minimalne površine. Zamislite da posedujete firmu koja prodaje hranu ili pića u konzervama (oblika valjka jer je utvrđeno da je taj oblik najbolji⁶). Kako biste sačuvali na materijalu želite da vidite kakav treba biti odnos poluprečnika i visine valjka da biste imali što manju površinu, što znači da ćete potrošiti manje materijala. Znači, želimo da za zadatau zapreminu odredimo kakav valjak je najbolji što se tiče smanjenja troškova.

Neka je r poluprečnik valjka, h njegova visina, P njegova površina i V njegova zapremina. Imamo

$$V = r^2\pi h = \text{const},$$

i želimo da izraz

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

ima najmanju moguću vrednost. Iz prve veze je $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Ubacivanjem ovoga u izraz za površinu imamo

$$P = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}.$$

Želimo da se oslobodimo članova koji sadrže r da bismo dobili ograničenje, pa zato koristimo AG nejednakost na sledeći način

$$P = 2r^2\pi + \frac{2V}{r} = 2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3\sqrt[3]{2V^2\pi}.$$

⁶Oblik valjka je izdržljiv pod većim pritiskom.

Jednakost se dostiže za $2r^2\pi = \frac{V}{r} = r\pi h$, pa je odavde $2r = h$. Dakle, traženi odnos je $h = 2r$. Znači, da bismo bili najefikasniji u proizvodnji, potrebno je da nam visina valjka bude jednaka prečniku. Napomenućemo samo da se ovaj rezultat može lako dobiti primenom diferencijabilnog računa.

U praksi, limenke i konzerve retko imaju upravo ovaj odnos, jer se oblik bira i prema ergonomskim kriterijumima, odnosno lakoći držanja i upotrebe. Zbog toga se u industrijskoj proizvodnji visina i prečnik prilagođavaju praktičnim potrebama, dok minimalizacija površine nije jedini kriterijum.

Razmatramo sada problem iz fizike koji nije striktno matematički.

Ista količina istog dvoatomskog gasa se nalazi na tri mesta u tri stanja na adijabati. Ako znamo da je zbir pritisaka gasova u ova tri stanja uvek konstantan, želimo da zbir temperatura u ova tri stanja ograničimo sa gornje strane.

Neka su parametri stanja u stanju i jednaki p_i, V_i i T_i , $i = 1, 2, 3$. Iskoristićemo Jensenovu nejednakost na konveksnu funkciju $f(x) = x^\gamma$, gde je $\gamma = \frac{7}{5}$ Poasonov broj. Imamo

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3} V_1^\gamma + \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} V_2^\gamma + \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} V_3^\gamma \geq \left(\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3}{p_1 + p_2 + p_3} \right)^\gamma.$$

Množeći obe strane sa $(p_1 + p_2 + p_3)^\gamma = \text{const}$ i koristeći formulu $pV = n_m RT$ dobijamo

$$(p_1 + p_2 + p_3)^{\gamma-1} (p_1 V_1^\gamma + p_2 V_2^\gamma + p_3 V_3^\gamma) \geq (n_m R)^\gamma (T_1 + T_2 + T_3)^\gamma.$$

Odavde dobijamo traženo ograničenje

$$T_1 + T_2 + T_3 \leq \frac{1}{n_m R} \sqrt[\gamma]{(p_1 + p_2 + p_3)^{\gamma-1} (p_1 V_1^\gamma + p_2 V_2^\gamma + p_3 V_3^\gamma)}.$$

Izraz sa desne strane je konstantan zbog uslova zadatka i osobine adijabate ($pV^\gamma = \text{const}$).

Lako proveravamo da se traženi maksimum dostiže kada su sva tri stanja ista.

Nejednakosti predstavljaju značajnu oblast matematike, sa primenom u različitim disciplinama, uključujući fiziku, dinamiku, statistiku i naprednu matematiku. Kao ilustracija važnosti ograničenja u rešavanju problema, može

se pomenuti hipoteza o prostim blizancima: Yitang Zhang je uspeo da ograniči razmak između susednih prostih brojeva na najviše $7 \cdot 10^7$, dok je naknadnim unapređenjima ta granica smanjena na 246. Ovaj primer pokazuje da ograničenja igraju ključnu ulogu čak i u rešavanju velikih i složenih problema.

Literatura

- [1] Zoran Kadelburg, Dušan Đukić, Milivoje Lukić, Ivan Matić, *Nejednakosti*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2014.
- [2] Zdravko Cvetovski, *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, Skoplje, 2012.
- [3] Yufei Zhao, *Inequalities*, Winter Camp 2008. <https://yufeizhao.com/olympiad/>
- [4] Evan Chen, *A Brief Introduction to Olympiad Inequalities*, 2014. <https://web.evanchen.cc/handouts/Ineq/en.pdf>
- [5] Thomas J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*, 2005. <https://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf>
- [6] Đorđe Baralić, *300 Pripremni Zadataka za Juniorske Matematičke Olimpijade*, Izdavačka kuća "Klett", Beograd, 2016.
- [7] *Matematička takmičenja učenika srednjih škola u Srbiji*, Društvo matematičara Srbije <https://dms.rs/>
- [8] *Međunarodna matematička olimpijada* <https://www.imo-official.org/>
- [9] <https://imomath.com/srb/index.cgi?page=zadaciSaTakmicenja>